

Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía



**Transposición y destransposición del saber matemático y
didáctico : representaciones y prácticas en la formación inicial de
docentes**

**Memoria para optar al grado de doctor
presentada por:**

Eugenio Lizarde Flores

Fecha de lectura: 8 de julio de 2013

Bajo la dirección del doctor

José Carrillo Yáñez

Huelva, 2014

ISBN: 978-84-16061-02-0

D.L.: H 25-2014



**Universidad
de Huelva**

**Dpto. de Didáctica de las Ciencias (Experimentales, Sociales y
Matemáticas) y Filosofía.**

**Doctorado en investigación en la enseñanza y el aprendizaje de
las ciencias experimentales, sociales y matemáticas.**

**Transposición y destransposición del saber matemático y
didáctico. Representaciones y prácticas en la formación
inicial de docentes.**

Tesis Doctoral

Eugenio Lizarde Flores

Dirigido por:

Dr. José Carrillo Yáñez

Huelva, 2013

AGRADECIMIENTOS

AGRADECIMIENTOS

**Cuanto más altas sean tus miras,
más lejos llegarán tus éxitos.**

De manera semejante a la formación de las representaciones sociales, el hecho mismo de concluir esta tesis doctoral no hubiera sido posible sin la concreción de este principio básico: el intercambio comunicativo y la interacción social como referentes de conocimiento de personas e instituciones cuyo apoyo contribuyó sustancialmente para culminar esta etapa de mi formación profesional.

Mi deuda profesional y mi agradecimiento son para tod@s aquell@s que de una u otra manera contribuyeron en la concreción de este trabajo; sin ánimo de establecer ningún tipo de jerarquización he tomado la decisión de mencionarles en orden cronológico, según el momento y el apoyo brindado:

* Al Dr. José Carrillo Yáñez (Pepe, para todos sus amigos) quien aún sin conocernos personalmente tuvo la gentileza de invitarme a cursar el Doctorado en la Universidad de Huelva, brindándome el apoyo económico que en términos de su gestión le fue permitido, pero además en momentos de crisis, durante la asesoría, supo despertar el ímpetu que hace a las personas madurar profesionalmente. Sus atinadas observaciones y sugerencias trascendieron el ámbito de la dirección de esta tesis y se anclaron en mi formación personal y profesional con la posibilidad de objetivarlas en mi desempeño docente presente y futuro.

* A los integrantes del grupo de investigación DESYM quienes con sus reflexiones contribuyeron a ampliar mi visión respecto a los procesos de investigación, pero además como grupo, hicieron las gestiones necesarias para apoyar a investigadores

latinoamericanos y gracias a ello también pude obtener apoyo económico para solventar las diferentes estancias de estudio e investigación que realicé.

* Mi agradecimiento también para todos los integrantes del Departamento de Didáctica de las ciencias (Experimentales, sociales y matemáticas) y Filosofía, quienes nunca dudaron en brindarme su apoyo, aportando sus conocimientos y experiencia en la formación de posgrado, pero sobre todo por la hospitalidad y amistad características de la sociedad onubense.

* A mis colegas de profesión y amigos todos: Mtro. Marco Antonio Sánchez Martínez, Mtro. José de Jesús Paredes; Mtro. José Luis Monreal Reyes, Mtro. Gerardo Velázquez Monreal y Profr. Eduardo Nungaray Rico, quienes desde la responsabilidad que tenían en el momento que inicié los cursos de Doctorado, tuvieron la sensibilidad para entablar las gestiones con las autoridades correspondientes, autorizándome la descarga académica para hacer la primera estancia presencial en la Universidad de Huelva.

* Al compañero y amigo, Mtro. Jesús Manuel Mendoza Maldonado, con quien más que una tarea, compartimos una visión respecto a la formación de profesores; su apoyo ha sido pilar fundamental tanto en la gestión de recursos económicos, como en la concreción de la tesis, mis reflexiones son también sus reflexiones, en su caso aplica perfectamente lo dicho por Blanchot (1992) “Lo que he pensado, no lo he pensado solo”.

* Una institución no debe sólo tener funcionarios que la dirijan, su crecimiento se da a través del trabajo de profesionales con una amplia visión respecto a la formación docente, en el caso de la DGESE-SEP, debo manifestar mi amplio reconocimiento y agradecimiento a la Mtra. Marcela Santillán Nieto y al Dr. Tenoch Esaú Cedillo Ávalos (Directora General y Director de Políticas, respectivamente) quienes desde su responsabilidad me apoyaron (económica y moralmente) en la parte final de este proceso para la culminación de la escritura de la Tesis; queda el compromiso de fortalecer mi labor profesional a partir de sus enseñanzas tanto implícitas como explícitas.

* A la Dra. Eréndira Valdez Coiro, quien tras bambalinas, a la manera de una sociabilidad sincrética, siempre se manifestó dispuesta para cualquier consulta por más banal que pareciera a primera vista, pero además tuvo el consejo y el apoyo oportuno para conseguir materiales que fortalecieran este proceso de escritura.

* Dijo Marx, a propósito de la XI tesis sobre Feuerbach, que “los filósofos sólo se han encargado de interpretar el mundo, de lo que se trata es de transformarlo”; con esta cita va mi agradecimiento a los estudiantes y maestros de la Escuela Normal Rural “Gral. Matías Ramos Santos”, cuyos nombres omito en aras del anonimato propio de la ética de la investigación, pero sin los cuales las transformaciones en la formación inicial de docentes, desde este escenario microgenético, no serían posibles; mi tarea fue ser partícipe de la intersubjetividad que contribuye a la transformación de los saberes y haceres, su documentación en esta Tesis contribuye a dibujar los márgenes de las potencialidades de horizontes posibles.

* A la actual administración directiva (ciclo escolar 2012 – 2013) de la Escuela Normal Rural “Gral. Matías Ramos Santos”, encabezada por el Profr. Raúl Parra Delgado, como Director, Mtro. Marco A. Aguilar Hernández, Subdirector Académico y Profr. Sergio Adolfo Dueñas García, Subdirector Administrativo, quienes han manifestado su apoyo a mi crecimiento profesional.

* Para mis hijos Brayan Eugenio e Irvin Ulises, mi agradecimiento por su apoyo técnico e intelectual, ya que al poner en juego sus habilidades con la tecnología, me facilitaron procesos de captura y digitalización de los materiales necesarios para fundamentar esta tesis.

* A mis hermanos, Elidia y Luis Epifanio, por su apoyo en el proceso de organización de la información, mi agradecimiento sincero por la realización de la tarea que les solicité, dado que su ejecución permitió la agilización en la escritura y culminación de este trabajo de investigación.

* Finalmente, y no por ello menos importante, mi agradecimiento a los actuales funcionarios de la Secretaría de Educación del Estado de Zacatecas: Mtro. Marco Vinicio Flores Chávez, Secretario de Educación; Mtro. Ubaldo Ávila Ávila, Subsecretario de educación; Mtro. Honorio Jiménez Contreras, Director de Formación Docente y Desarrollo Educativo; y Mtro. Ricardo Vega Lomelí, Jefe del Departamento de Educación Normal, quienes en cumplimiento de sus responsabilidades hicieron las gestiones y autorizaciones necesarias para que el ciclo escolar 2012 – 2013 pudiera dedicarlo de manera exclusiva a los trabajos propios de la escritura de la Tesis Doctoral.

* La culminación de esta Tesis fue posible con el apoyo de la “Beca Tesis al extranjero para obtener el grado de Doctor”, con Folio ENRMRS-001, como parte del Programa de Mejoramiento del Profesorado (PROMEP) implementado por la Subsecretaría de Educación Superior, de la Secretaría de educación Pública en México.

Gracias por su apoyo hasta el final, que no es más que un nuevo comienzo, en esta tarea de permanente reinvención de una realidad siempre en construcción.

Sinceramente

Mtro. Eugenio Lizarde Flores

Loreto, Zacatecas; abril de 2013.

DEDICATORIAS

A mi padre, Epifanio Lizarde Polanco:

Como un reconocimiento tardío pero sincero, dado que su enseñanza, traducida en el mensaje de que con trabajo y esfuerzo todo se logra, ahora se concreta en este producto de investigación.

A mi madre, Ma. Concepción Flores Ramírez:

Porque juntos aprendimos la importancia que tiene el sacrificio de la distancia cuando de por medio está la construcción de un futuro que se antoja promisorio y que permite romper con el círculo de la reproducción de las condiciones de origen.

A mi esposa, Ma. Belén Martínez Flores y a mis hijos Brayan Eugenio, Irvin Ulises, Aritzy Belén, Fernando Sinahí, Ele Vianney Concepción y Patricia Wendolin:

El tiempo del cual nos privamos para compartirlo juntos, como consecuencia de mis afanes profesionalizantes, no se recupera, pero siempre queda la satisfacción del deber cumplido y la esperanza de construir mejores escenarios familiares. Gracias por su paciencia, comprensión y tolerancia.

ÍNDICE

ÍNDICE

	Pág.
ÍNDICE DE TABLAS Y ESQUEMAS.....	i
ABSTRACT.....	iii
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO I. PERSPECTIVA TEÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN.....	17
I.1. Las representaciones sociales en la formación docente inicial.....	18
I.1.1. Serge Moscovici, pionero en el campo de las representaciones sociales.....	19
I.1.2. Un concepto, dos posicionamientos (proceso – producto): La representación de las representaciones sociales.....	30
I.1.3. Elementos constitutivos de las representaciones sociales.....	31
I.1.4. El lenguaje y su importancia en el proceso de construcción de las representaciones sociales.....	34
I.2. De la transposición didáctica a la destransposición de saberes matemáticos y didácticos.....	36
I.3. El saber matemático en juego: las fracciones, aspectos conceptuales y didácticos.....	45
I.3.1. Un concepto con múltiples significados.....	48
I.3.1.1. Las fracciones con significado parte – todo.....	49
I.3.1.2. Las fracciones en un contexto de medida.....	52
I.3.1.3. Las fracciones como división indicada o cociente.....	53
I.3.1.4. Las fracciones como operadores multiplicativos.....	54
I.3.1.5. Las fracciones como razón.....	56
I.3.1.6. Otros contextos y significados asociados.....	57
I.3.2. Modelos teóricos ideales: integrando un “paquete de enseñanza”.....	59
I.3.2.1. El acercamiento propuesto por Mochón (1990).....	59
I.3.2.2. La recuperación del “esquema del conocimiento ideal del número racional” de Kieren (1988), desde el texto de Dávila (2002).....	61
I.3.2.3. Una revisión del modelo de Behr, Lesh, Post y Silver (1983): la propuesta de Charalambous & Pitta-Pantazi (2005).....	63
I.3.2.4. Un modelo para la enseñanza: la propuesta de Llinares & Sánchez, (1997).....	66

I.3.3. La formación matemática y didáctica en tres generaciones curriculares: ¿y las fracciones?.....	68
I.3.3.1. El Plan de Estudios 1975: Las matemáticas como “lenguaje”.....	72
I.3.3.2. El plan de estudios 1984: Las matemáticas como “instrumento” para la investigación y la práctica docente.....	76
I.3.3.3. Plan de estudios 1997: “Aprender matemáticas al resolver problemas”.	80
I.3.4. Fracciones como “saber a enseñar”: una revisión de los materiales curriculares para la educación primaria. ¿Cuál es la representación social que se promueve?.....	90
I.4. Destransposición, representaciones sociales y formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas: investigaciones en México y España. Estado del arte.	122
I.4.1. De las investigaciones sobre concepciones a las representaciones sociales. Algunos antecedentes.....	123
I.4.2. Investigaciones que articulan los conceptos básicos: representaciones sociales, formación docente inicial en matemáticas y destransposición.....	131
Síntesis del capítulo.....	136
CAPÍTULO II. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.....	139
II.1. Problema de investigación, preguntas y objetivos.....	140
II.2. Perspectiva metodológica de esta investigación.....	145
II.2.1. Elementos básicos del estudio de casos.....	149
II.2.1.1. El contexto de la investigación.....	157
II.2.1.2. Selección de los informantes.....	159
II.2.1.3. Los escenarios y el nivel de participación.....	162
II.3. Técnicas e instrumentos para la recuperación de datos.....	165
II.3.1. La importancia de la videograbación.....	166
II.3.2. La entrevista y su uso en la investigación.....	168
II.3.2.1. La entrevista antes de la práctica docente.....	170
II.3.2.2. La entrevista posterior a su práctica docente.....	172
II.3.2.3. La entrevista colectiva a un año de distancia.....	173
II.3.3. Revisión de documentos.....	175
II.3.3.1. Proyecto de asignatura del formador de profesores.....	177
II.3.3.2. Diseño de las situaciones didácticas de los estudiantes.....	178
II.3.3.3. Diario de campo de los estudiantes.....	179

II.3.3.4. Ensayos de análisis sobre su práctica docente.....	180
II.4. Procedimiento para el análisis de los datos.....	180
II.4.1. Aportaciones de la “Grounded Theory” al marco analítico de la investigación.....	182
II.4.1.1. Formular preguntas y hacer comparaciones.....	186
II.4.1.2. El microanálisis y los tipos de codificación.....	189
II.4.2. Del lápiz, papel y tijeras al Maxqda. Ejemplos de uso de la metodología de análisis.....	192
II.4.2.1. Algunos ejemplos de su uso en la parte técnica de captura de la información.....	193
II.4.2.2. Del uso del Maxqda a las herramientas analíticas de la Grounded Theory.....	195
Síntesis del capítulo.....	198
CAPÍTULO III. LA DESTANSPOSICIÓN DEL SABER: HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE NUEVAS REPRESENTACIONES SOCIALES EN MATEMÁTICAS.....	201
III.1. La emergencia del saber didáctico y su articulación con el saber matemático en el proceso de destransposición.....	204
III.1.1. Procesos planeados para el aprendizaje de las fracciones, negociaciones de sentido y tipo de representaciones asociadas.....	205
III.1.2. Transformación del texto de saber, un proceso que permite fortalecer el saber didáctico.....	209
III.2. La práctica docente en matemáticas de la Escuela Normal: ¿un escenario para la destransposición?.....	219
III.2.1. ¿Cuál es el trabajo matemático de formar para enseñar?.....	220
III.2.1.1. Conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento de un lenguaje didáctico: articulaciones y proceso de destransposición.....	222
III.2.1.1.1. El conocimiento común del contenido.....	223
III.2.1.1.2. El conocimiento especializado del contenido.....	239
III.2.1.1.3. La emergencia de representaciones en el conocimiento de un lenguaje didáctico.....	281
III.2.1.2. Representaciones sobre las matemáticas y su enseñanza que podemos apreciar en la articulación entre lo planeado y el diseño curricular.....	323

III.2.1.2.1. Problemas y saber matemático: ¿cuáles conocimientos sobre las fracciones resignifican los profesores en formación?	323
III.2.1.2.2. Análisis curricular como proceso didáctico ¿de qué manera contribuye a la destransposición del saber matemático?	355
III.2.1.2.2.1. Análisis comparativo: Plan 2011 v/s plan 1993.....	356
III.2.1.2.2.2. Formas de iniciar el tratamiento del tema de las fracciones, desde los libros de texto: diferentes épocas, diferentes contextos ¿diferentes representaciones?.....	365
III.2.1.3. La destransposición del saber: construyendo una cultura de la provisionalidad del saber.....	382
III.2.1.4. La construcción social del saber matemático para la enseñanza: el papel del “Alter”.....	384
III.3. La gestión del error como base de la destransposición del saber matemático y didáctico.....	400
III.3.1. Formas de gestión del error verbalizadas y formalmente reconocidas. Anclaje de su representación.....	402
III.3.2. Triple dimensión en la gestión del error: formador, docente en formación y gestión del saber en la escuela primaria.....	408
III.3.2.1. El lenguaje temático (normalización y motivación) como fuente de errores.....	408
III.3.2.2. Gestión del error con los estudiantes: del saber matemático a su práctica docente.....	413
Síntesis del capítulo.....	422
CAPÍTULO IV. REFLEXIONES DE LOS ESTUDIANTES: METACOGNICIÓN Y DEVOLUCIÓN DE LA RESPONSABILIDAD.....	427
IV.1. Del escenario de la formación docente a las prácticas escolares.....	429
IV.1.1. El diseño de la situación didáctica: preparándose para la experimentación a partir de diseños de los expertos. Una alternativa de formación docente inicial.....	430
IV.1.2. La estrategia global para el diseño de la situación didáctica.....	441
IV.1.2.1. El contexto cotidiano como motivación inicial: las estrategias de EPrP1, EPrV2, EPrE3, EPrM5 y EPrA6.....	442
IV.1.2.2. La situación problema define el contexto y la estrategia didáctica. El	

caso de EPrR6.....	448
IV.1.2.3. La estructura del juego “¿quién se acercó más?” como base de su estrategia didáctica. El caso de EPrI4.....	449
IV.1.2.4. El recurso a la “memoria didáctica” para lograr aprendizajes significativos.....	450
IV.1.2.5. Síntesis de la estructura de su estrategia didáctica: momentos didácticos.....	453
IV.1.3. Dificultades al planear y valoración posterior ¿cuáles son las características de la representación finalmente construida?.....	457
IV.1.3.1. En el triángulo didáctico: dificultades atribuidas al desempeño del maestro, dificultades de los niños y dificultades atribuibles al saber en juego.....	459
IV.1.3.1.1. Gestión didáctica y devolución del problema: dificultades reconocidas por los docentes en formación.....	460
IV.1.3.1.2. Conocimiento del contenido y de los alumnos. Dificultades de los alumnos reconocidas por los docentes en formación.....	468
IV.1.3.1.3. Conocimiento del contenido para la enseñanza. Dificultades en los casos objeto de estudio.....	478
IV.1.3.2. El tiempo didáctico: dificultades para su gestión.....	488
IV.1.4. La metacognición regula el orden de lo planeado: ¿mayor claridad previa – mejores resultados?.....	492
IV.1.4.1. Toma de consciencia respecto al escenario de la práctica docente: imprevistos.....	497
IV.1.4.2. Modificaciones previstas y realizadas: elementos desde la reflexión metacognitiva.....	500
IV.1.4.3. Expectativas v/s satisfacción posterior.....	506
IV.1.5. El lenguaje didáctico aprendido y su puesta en práctica: anclaje y objetivación.....	511
IV.2. Destransposición del saber: entre el horizonte formativo y el horizonte conservativo.....	519
IV.2.1. Representación sobre las fracciones.....	533
IV.2.2. Destransposición reconocida como aprendizaje en el curso de matemáticas.....	542
Síntesis del capítulo.....	549

CAPÍTULO V. CONCLUSIONES	553
V.1. Principales conclusiones de la investigación.....	553
V.1.1. El papel de las representaciones sociales en la formación inicial de profesores para la enseñanza de las matemáticas.....	555
V.1.2. El diseño curricular y su contribución a la conformación de nuevas representaciones sociales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tanto al nivel de la formación inicial como en la formación permanente de los profesores.....	557
V.1.3. La importancia de la construcción de procesos de transposición didáctica que posibiliten momentos intencionales de destransposición de saberes matemáticos y didácticos como estrategia para la consolidación de los saberes profesionales de los docentes en formación.....	561
V.1.4. El diseño y análisis de la práctica docente como momento central para generar el conflicto sociocognitivo que favorece el cuestionamiento de las representaciones previas y la posibilidad de anclaje y objetivación de representaciones alternativas.....	563
V.1.5. El lenguaje temático como punto medular en el anclaje y objetivación de las representaciones sociales: necesidad y utilidad del lenguaje didáctico. Proceso de construcción de una representación específica.....	566
V.2. Limitaciones del estudio y cuestiones abiertas.....	572
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	575
ANEXOS (se incluyen en un CD)	

ÍNDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. La matemática a través de los Planes de estudio.....	69
Tabla 2. Matemáticas y su Didáctica. Plan 1975.....	75
Tabla 3. Matemáticas. Distribución de temas. Plan 1984.....	78
Tabla 4. Matemáticas y su enseñanza. Plan 1997.....	82
Tabla 5. Comparativo de tres generaciones curriculares 1975 – 1997.....	87
Tabla 6: Fracciones: Comparación entre planes de estudio.....	88
Tabla 7. Primer Lección o actividad con que inicia el tema de fracciones.....	93
Tabla 8. Última lección de fracciones. Comparativo 1960 – 2012.....	98
Tabla 9. Paquete de conocimientos. Plan 1960.....	100
Tabla 10. Paquete de conocimientos, Plan 1972.....	104
Tabla 11. Paquete de conocimientos, Plan 1993.....	111
Tabla 12. Paquete de conocimientos, Plan 2011.....	115
Tabla 13: Concepción de fracciones en diferentes libros de texto 1960 – 2011.....	118
Tabla 14. Comparativo 1960 – 2011 ¿pervivencia de una representación?.....	121
Tabla 15. Investigaciones sobre la formación inicial de profesores.....	128
Tabla 16: Comparación entre planteamientos cuantitativos y cualitativos.....	148
Tabla 17. Matrícula estudiantil.....	159
Tabla 18. Códigos del proceso de transposición didáctica.....	202
Tabla 19: Propósitos y temas del bloque “Los números racionales”.....	208
Tabla 20. Comparativo entre la propuesta curricular y la progresión didáctica del profesor.....	214
Tabla 21. Estrategias para construir los significados de las fracciones.....	265
Tabla 22. Proceso explícito para la comprensión del significado de operador multiplicativo: taller para maestros.....	279
Tabla 23. Lenguaje didáctico: formas de construcción.....	283
Tabla 24. Conceptos didácticos: ejemplificación desde los registros.....	302
Tabla 25. Análisis de los diferentes tipos de problemas sobre fracciones ¿qué tipo de representación social se genera?.....	327
Tabla 26. Origen de los problemas y concepto matemático central.....	352
Tabla 27. Análisis comparativo de lecciones: 1993 v/s 2011.....	358
Tabla 28. Comparación de lecciones entre grados: 3º y 4º, 2011.....	360

Tabla 29. Equivalencia de grados escolares: México – Francia.....	375
Tabla 30. Formas de iniciar el conocimiento formal de las fracciones: México – Francia.....	377
Tabla 31. Antecedentes conceptuales para introducir las fracciones.....	379
Tabla 32. Formas de representación inicial del concepto de fracción.....	381
Tabla 33. Estructura de las sesiones de clase.....	386
Tabla 34. Intercambios comunicativos mediante el trabajo en equipo.	390
Tabla 35. Codificaciones de las entrevistas y los cuestionarios.....	428
Tabla 36. Delimitación del contenido de práctica.....	432
Tabla 37. Comparativo entre diseños de situaciones didácticas.....	436
Tabla 38. Memoria didáctica.....	451
Tabla 39. Dificultades de los niños, previstas y confirmadas por los estudiantes.....	469
Tabla 40. Modificaciones previstas – modificaciones realizadas.....	501
Tabla 41. Ejemplos de situaciones didácticas.....	525
Tabla 42. Representación sobre las fracciones.....	534
Tabla 43. Respuestas al problema “calcetines”.....	538
Tabla 44. Respuestas al problema “moños”.....	540

ÍNDICE DE ESQUEMAS

	Pág.
Esquema 1: Elementos para una genealogía de las representaciones sociales.....	20
Esquema 2. Proceso de transformación genética del conocimiento matemático.....	29
Esquema 3. Proceso de transposición didáctica.....	38
Esquema 4: De la transposición a la destransposición de saberes matemáticos y didácticos.....	44
Esquema 5. Articulación entre los diferentes significados de la fracción.....	60
Esquema 6. Conocimiento ideal del número racional, Kieren (1988).....	62
Esquema 7. Modelo de Behr, Lesh, Post y Silver (1983).....	64
Esquema 8. Reformulación del modelo de Behr, Lesh, Post y Silver (1983).....	65
Esquema 9. Un modelo para la enseñanza. Llinares y Sánchez (1997).....	67
Esquema 10: Procedimiento de análisis de datos cualitativos.....	184
Esquema 11. Tipos de conocimiento y proceso para la destransposición.....	222
Esquema 12: Progresión en las transformaciones de la situación didáctica.....	530

ABSTRACT

ABSTRACT

Title: Transposition and de-transposition of mathematical knowledge and teaching. Representations and practice in initial teacher training.

When we ask how to raise the formal education quality, the teacher stands as a cornerstone for transformation, however, to the frequent criticism of their training quality, it is necessary to review what is happening in the institutions responsible for this, focusing microgenetic scenarios to help us build answers to Why to study the processes of transposition and de-transposition of mathematical knowledge and teaching in initial teacher training? Why to study social representations that are associated with these processes?

Studying social representations on the stage of initial teacher training, implies to study the social determinants that influence and at the same time make possible the fields of action of the teachers, moreover it implies the review of how they are being set and the potential of transformation. When we talk about social determinants that affect as well as motivate the initial teacher training, we refer to the following:

- a) The characteristics of the curriculum used to train teachers: knowledge types that prioritize, training focus, ethos that are configured.
- b) Coordination between the curriculum that trains them and the current curriculum in elementary schools, also the differences between the social representations they faced when being students, with the same or different curriculum, and with the one they must use to teach.

- c) The progress status in educational research and understanding of institutional processes: it is clear that current research provides us a more complete and wider vision than the one of 20 or 30 years ago that refers to learning processes and relevant strategies to both, initial teacher training and for the training of students in primary school and this knowledge should be subject of study in teacher training institutions.
- d) The Social conditions of work: type of institution, population served prestige and / or social recognition, salary compensation, etc.

These conditions affect determinedly in initial teacher training processes, to configure a shared social representation regarding the type of teacher to be trained and the type of tasks to be performed in a professional field, that's why, since the very moment we began this research we started from a fundamental consideration: social representations preexist and the same time they are transformed by the subjects, in this sense we are not satisfied with some positions that used to express the impossibility to transform them, opposite to that we are on a interested processual approach of social representations because we assume that this way of studying them allows us to recognize in their configuration rather than as finished entities and determinants of teaching practices.

During the working project, we set as main research question the following: How do social representations about mathematics and its teaching have built the students before their entry into the Normal School affect transposition and destransposition processes of mathematical and didactic knowledge that the curricular is trying to convey? and from this we were drifting others in complementary, way guiding the entire process of data recovery, taking into consideration two points in time and mathematical scoping study into the issue of rational numbers (specifically fractions), since this is a topic that generates apparently more difficulties in teaching and learning that the rest of the items on the agenda of the course:

- a) When working in the Normal School, the topic of rational numbers: In what extent metacognitive reflection contributes to destransposition processes of mathematical knowledge that contributes to the recognition and transformation of social representations of students? Are there moments of negotiation of meaning, significance and function of mathematical

knowledge that affect its de-transposition processes? Do social representations that have built in their prior schooling influence them and / or "negotiate" with the meanings that are trying to build in mathematics courses and teaching when working the thematic block of rational numbers?

- b) After working on the issue of rational numbers in the Normal School: Are de-transposition knowledge processes that affect teaching practice for students to work on the same content in elementary school fulfilled? What representations about mathematics and its teaching are those that persist and are reflected in their teaching in the primary school: those built in previous schooling, those proposed in the course, a combination of both?

Due to the complexity of the concepts involved in the questions asked in the research, we seek to achieve the following objectives:

- Determine the processes of transposition and de-transposition of mathematical knowledge (along the subject of rational numbers), the interaction in the classroom teaching of the Normal School.
- Detect the way of how social representations about mathematics and its teaching students have built in their prior schooling and how they affect the process of transposition and de-transposition of mathematical knowledge.
- Characterize the metacognitive reflection processes of students when working in elementary schools with the theme of rational numbers and the impact they may have to specify the processes of transposition and de-transposition of mathematical knowledge.
- Characterize the articulation that can exist between social representations, metacognition and de-transposition processes of mathematical knowledge, both in the classroom of the Normal School and in connection with the experience of teaching practice in the Primary School.
- Provide theoretical input explanation of initial teacher training in the subject of mathematics that will eventually support the review and / or permanent daily reformulation of the teaching practices.

Of the five objectives, the less successful is number three, because the conditions of the research did not reflect the fulfillment of the data obtained, however, within the

thesis itself we can observe the strength and advance of the students reflections, mainly through collegial reflection and discussion in the class sessions.

This growth and strengthening of students' reflections are accompanied by the construction of an educational language (from the basic concepts of the theory of didactic situations, Brousseau, 2007), introduced by the teacher, and used as a tool for both the design of teaching situations, and the analysis of teaching practice of students.

From these elements we present a qualitative study in which we define as an object of study the processes of transposition and de-transposition of mathematical knowledge and teaching (both, at the Normal School, and the Elementary School) and the dialogue and interaction between the public perception of the former teachers, students and curriculum design officially proposed, that is why we reviewed the classes of a teacher (selected under the criteria of relevance for the research and worked in their natural classroom context -class), working the block II "rational numbers", Mathematics program and teaching II (SEP, 2004), in the process of initial teacher education graduates in Elementary Education; in addition to this we also review the analysis of teaching practice (their statements in interviews and essays analyzes) of 7 students, from the design of a didactic situation, its implementation and analysis after it. In addition, a year away from the course, we applied two instruments: a problems questionnaire with fractions and a collective interview.

In the methodological approach we assumed a qualitative positioning and we supported the derived analytical perspective of Grounded Theory (Strauss & Corbin, 2002), and specifically the constant comparison method, with the potential construction of the data emerging theory, however, we also clarified within the thesis, it would require a larger research program, perhaps derived from the comparison of the analysis of several cases, to fulfill this purpose (theory building), so this work aims to contribute some discussion on this topic, especially since, given the complexity of initial teacher training process, the debate about the components of professional knowledge teachers should have remained open in this sense analyzing the communicative and social interaction in two different scenarios where initial teacher education occurs (teacher training institutions, Normal Schools, in Mexico, and elementary schools) it is not only valid, but necessary to help to understand the reasons behind the performance of teachers' professional practice.

However, in the study of social representations approach the interesting thing is not to assume a contemplative attitude that allows us only to describe and analyze how they are configured in the classroom and how they negotiate, or if this influences or complements official curriculum proposals. Instead we assumed that it is necessary to observe key moments during teaching management in order to appreciate the de-transposition of knowledge, understanding that it involves grinding a knowledge that has become an obstacle for students, under the terms of Antibí

"The idea that develops Chevallard didactic transposition relates to the changes experienced by a content of knowledge (knowledge wise or academic) to become the object of teaching. I take one aspect of the didactic, then develop the concept of" de-transposition. "My starting point is the idea of didactic transposition as simplification of some notions to be taught. Always taught something, no transposition-consciously or unconsciously, the aspect that interests me highlight is related to the will of simplify knowledge to make them understandable.

It happens, then, that when we want to simplify things, we can deform the main idea in the mind of the student or erroneous misconceptions are that at any given time are useful. Time passes, may be a few months or a few years, and it is necessary to solve new problems that require a higher level of the concept learned, but the student keeps in his mind the idea of the way it was learned at an early stage. If we disregard this obstacle, the student will find major difficulties. (Antibí, 2001, page 16.)

In this position there is a hypothesis, which is nourished by my personal experience as a trainer of teachers, when students enter the Normal School they have experienced teaching practices (as students) for at least 12 school years, along of these they have been learning ideas of how they learned initially, which may represent a "false or misleading idea" and these are reflected at the time of discussing the most relevant ways to teach certain content in the sessions of the mathematics courses , so that this is precisely the time to confront these ideas under a metacognitive exercise that will help the student to become aware of them, but especially to transform them when necessary.

This mean that, in the stage of initial teacher training students are required to live didactic transposition processes that contribute to re-signify their mathematical knowledge and install a didactic discourse that enables teaching practices be articulated with a learning model based on prior knowledge transformation, however to make it possible it is necessary to review the social representations of both teachers to be and teacher trainers, this is precisely what we focus on this thesis.

In the first chapter we make a review of the conceptual elements that allowed us to substantiate the thesis under the understanding that the chances of that is emerges the data theory it is also influenced by the conceptual theoretical framework and the researcher assumes this instead of ignoring, he also should make it explicit. We review four main aspects: 1st. Social representations in initial teacher training of teachers for teaching mathematics allow us to understand the process of social construction of the "reality" of teaching and learning, that is, we provide explanatory indicators on the system of values, ideas and practices that survive in a particular time and that condition allows insertion into a specific community of practice, and also allow us to recognize the possibility of its transformation from the dialectical process of anchoring and objectification.

We recovered the central theoretical position to conceptualize social representations from the pioneering approach Moscovici (1979) said by his followers, reviewing specific texts Castorina & Kaplan (2003) and Jodelet (2006) since, as we were focusing our subject we prefer procedural approach for study.

Complementary to this, we highlight as a key element in shaping the social representations of language, since it is the medium that allows more accurate anchor while objective expression and translates thought into action thereby simultaneously reconstructs an exchange between previous representations and those that want to build as part of the communicative formally instituted.

2nd Open a discussion about how, why and what should be built in learning processes that go along to the transposition into de-transposition of mathematical knowledge and teaching in initial teacher training, we believe that, unlike the didactic in any other, in the case of those responsible for teacher training (Normal School) it is not enough to re-examine the mathematical content and pedagogical proposals for education, we need to study this process explicitly, we incorporated the review of the modes as learned knowledge and social representations that were constructed in the terms that I recuperated from Antibí (2001), mainly by the social commitment that students learn to be who enable learning with school children Primary largely a moral and professional responsibility to consolidate the basic mathematical knowledge and

the construction of social representations consistent with the theoretical position that we assume: the transformation of previous knowledge.

3rd The field of mathematical knowledge, specific fractions, since we conceive social representations, besides being of someone (the subjects) is of something and something and in our case we are interested in checking them on this issue. The analysis of the process of didactic transposition and subsequent representations that underlie (and which may be attached) also requires an analysis of "texts of knowing" which embodies the knowledge to teach in this regard and are discussed curricular approaches in two dimensions: curricular materials for training teachers, over 3 generations curriculum (1975, 1984 and 1997) and textbooks for primary education curriculum of four generations (1960, 1972, 1993 and 2011).

From this historical analysis it emerges the low impact they have had both the theoretical level curriculum for teacher training, and the design level textbooks, but it also stands out to the study of fractions and their various meanings (subconstructos, following Kieren, 1980) it clearly appears until the 1997 Plan for the training of teachers, while in previous curricula the study center was predominantly mathematical knowledge structure and even in the Curriculum 1984 the issue is left to the student learning without explicit coordination of a teacher educator, this leads us to set up the hypothesis that the absence of this explicit knowledge in previous curricula, social representations were constructed from the daily experience as students and subsequently reproduced in a similar way to teach them to how they learned.

4 ° To clarify the relevance, and the degree of originality of this thesis, we reviewed some research that address similar issues, in which involves the object of study we have built and in this regard we have to say that only two jobs research become explicit reference (Peltier, 1999; Aguayo, 2005), however we move away from them in two main aspects: the focus of the object of study (focused on an analysis of Instituting of representations and opportunities for the de-transposition) and the center of analysis of teaching practices (the Normal School and Elementary).

For the presentation of the results we use an unorthodox strategy, while simultaneously we were analyzing and even went incorporating theoretical elements (provided they were relevant to the ideas presented) to strengthen the interpretation and discussion of information, the analysis of the Data is presented in Chapters III and IV.

In the first of these, we analyze the process of didactic transposition of former teachers, and the opportunities for de-transposition of mathematical knowledge and installation (anchor process) of alternative representations knowing both teaching and the mathematical knowledge through the communicative and social interaction among students and teacher trainer.

The thematic organization of the categories that were found in the review of the information retrieved, mainly recording videos of class 9 and their corresponding transcripts, accompanied by the analysis of class plans and teacher trainer Math curriculum and His teaching II (SEP, 2004) allowed us to organize this chapter based on three sections: the emergence of knowledge didactic teaching practice of the Normal School as a stage for the de-transposition and error management as a basis for knowledge de-transposition mathematical and didactic.

In the transposition process it is articulated not only immediate intentionally teaching trainer will essentially build a specific didactic training process, it cannot be put in writing, with all the depth required more less if it does not accompany this process reflective moments that summarize and track what happened in each of the sessions.

When we say the possibility of building a specific didactic assume input active positioning of teacher educators for teaching mathematics while explicitly recognize that government programs are guides for the trainer, but in the same process transposition undergo transformations that must be recognized and analyzed; consider this epistemological vigilance necessary due to the need to clarify the kind of teacher we are forming, but above all we must be aware of the consequences of our training process.

From the teacher trainer assumes a didactic perspective clear and consistent with established theoretical position (in this case the theory of didactic situations; Brousseau, 2007), the moment of his practice, the consistency between the approach assumed and its translation into effective practices in the classroom allows a process of building alternative social representations to those circulating in the everyday context in relation to the teaching and learning of fractions (by the definition which we did) and even possible that students will internalize the characteristics of professional practice exercise.

The experience of alternative forms of "doing math" through problem solving, as opposed to ostensive teaching approaches, and the use of a specific language (derived from the Theory of Didactic Situations; cf. Brousseau, 2007) possible to document a learning process that goes homology to transform prior knowledge as a basic strategy for training teachers, and through it will build a mathematical sense, meaning and functionality to restore responsibility to the students about his process training.

In this process of training teachers, teaching practice and all that it implies: design of teaching situations, review of curriculum materials, information retrieval and analysis, appears as a good time to objectify social representations consensually constructed during the course as well as for the recognition of the difficulties and errors that may occur.

In Chapter IV we appreciate how gradually, via a recombination between the everyday languages and the proposal of the theory of didactic situations, students are internalized while transforming their social representations to try to objectify those that have been built over the course. This process is not done without difficulties, for example, it stands the idea that, in a change of didactic contract, students tend to prefer a more conservative horizon to horizon formation, ie, diluted and/or languages to recombine social representations set finally accepted as a result of new learning, new training requirements and sometimes even lower level of complexity in the theoretical foundation that explains and objective.

Now, among the main contributions of this thesis, we emphasize the focus on the importance of studying the role of social representations in the initial training of teachers for the teaching of mathematics, since recognition gives us a scenario very important for transform the social genesis of mathematical knowledge and simultaneously provides us a framework for explaining why some of the modes of proceeding in professional practices for teaching and learning.

Similarly, we also underline the recognition of the importance of curriculum design and its contribution to the creation of new social representations about teaching and learning of mathematics, both at the level of initial and in-service training of teachers. Much of the social representations are reflected in the curriculum proposals from different periods, that is to say, social representations about mathematics and its teaching (within them for the learning and the teaching of fractions) have been

determining from curricular training schemes established that members of the noosphere have raised or are no longer present.

Likewise, we emphasize that, in the process of didactic transposition, there are specific times that enable de-transposition of knowledge, which the teacher trainer must recognize and promote to contribute to the consolidation of the professional knowledge of teachers in training, but, for this to happen it requires a strong background both as didactic disciplinary to contest the "transparency" of disciplinary knowledge and teaching while questioning our own certainties product of our social representations.

Finally, we had argued about the role of language as a core theme in anchoring and objectification of social representations as part of the data analysis, we consider the process of building social representations (of which the language appears as rack) on the teaching and learning of mathematics can go through the following phases:

1st. Daily experience.

2nd. Anchor from verbalization, begins the internalization and ownership of their language. Metacognitive reflection.

3rd. Practical justification of its importance.

4th. Accuracy on its basic components. Review and appropriation of theoretical.

5th. The concept as a tool for the design, the first level of objectification.

6th. Recombination of languages. Anchoring on previous experience of students.

7th. The language in use, second level of objectification in scenarios microgenetic

These phases give us the possibility to think of a spiral process of upward growth, so that when you reach the 7th stage, it becomes the first, with new references and new opportunities to continue transforming.

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

Al volver sobre un pasado de errores, se encuentra la verdad en un verdadero estado de arrepentimiento intelectual. En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización. (Bachelard, 2000, pág. 15)

La formación de profesores es una tarea que ha estado siempre presente en la agenda educativa de cualquier país, con diferentes connotaciones y con la intención de responder a diferentes intereses. Las preguntas ¿qué tipo de profesor queremos formar? ¿cuáles competencias priorizar? se responden a partir de las representaciones sociales que en cada época se han configurado y de igual manera a partir de las que sostengan los participantes en la “noosfera” en el momento coyuntural de la configuración de una reforma a la misma.

Estudiar las representaciones sociales, en el escenario de la formación docente inicial, implica hacer objeto de estudio los determinantes sociales que condicionan pero a la vez posibilitan los márgenes de acción de los profesores; de igual manera implica revisar cómo se van configurando y las potencialidades para su transformación.

Cuando hablamos de determinantes sociales que condicionan pero a la vez posibilitan la formación docente inicial, nos referimos cuando menos a los siguientes:

- a) Las características del plan de estudios con que se forman los profesores: tipo de saberes que priorizan, enfoque de formación, ethos que se configura.
- b) Articulación entre el Plan de estudios con que se forman y el Plan de estudios vigente en la escuela primaria; pero además la diferencia entre las representaciones sociales que pudieron vivenciar cuando alumnos, con el mismo o con diferente plan de estudios, y aquel con que luego habrán de ejercer la docencia.
- c) El estado de avance en la investigación didáctica y en la comprensión de los procesos institucionales: es evidente que las investigaciones actuales nos proveen de un panorama mucho más completo que el de hace 20 ó 30 años respecto a los procesos didácticos y las estrategias más pertinentes tanto para la formación docente inicial como para la formación de los alumnos en la escuela primaria y este conocimiento debe hacerse objeto de estudio en las instituciones formadoras de profesores.
- d) Las condiciones sociales laborales: tipo de instituciones, población que se atiende, prestigio y/o reconocimiento social, remuneración salarial, etc.

Estos condicionantes inciden determinadamente en los procesos de formación docente inicial, al configurar una representación social compartida respecto al tipo de profesor que se pretende formar y al tipo de tareas que debe realizar en su ejercicio profesional, es por ello que, desde el momento mismo en que iniciamos este trabajo de investigación partimos de una consideración fundamental: las representaciones sociales preexisten a, y a la vez son transformadas por, los sujetos, en tal sentido no nos conformamos con algunos posicionamientos que manifestaban la casi imposibilidad para transformarlas, al contrario nos interesó un enfoque procesual de las representaciones sociales porque asumimos que esta manera de estudiarlas nos permite reconocerlas en su configuración, más que como entidades terminadas y determinantes de las prácticas docentes.

En este sentido, la formación docente inicial resulta ser un escenario básico para la configuración de representaciones sociales alternativas y a la vez para la destransposición del saber matemático y didáctico, sobre todo porque en el proceso mismo de transposición

del saber se generan oportunidades y necesidad de hacerlo. La investigación que aquí se presenta da cuenta de ello.

Ahora bien, ¿por qué estudiar los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico en la formación inicial de docentes? ¿por qué estudiar las representaciones sociales que le son asociadas a estos procesos?

Partimos de una consideración general, en la búsqueda de la calidad educativa el papel del maestro es fundamental, lo que haga o deje de hacer indudablemente impacta en los resultados de su labor profesional, y estas decisiones deben ser tomadas de manera competente (entendiendo por ello un saber hacer con saber y con conciencia), sobre todo en nuestros tiempos en que el papel del profesor está siendo desvalorizado y en gran medida culpabilizado de los bajos resultados de las evaluaciones tanto nacionales como internacionales [ENLACE (SEP, 2010) a nivel nacional y PISA (INEE, 2010 b) a nivel internacional].

Somos conscientes de que el mejoramiento en la calidad de la educación no depende exclusivamente de la labor del profesor, sin embargo sí consideramos que hay una importante correlación entre los conocimientos matemáticos (en nuestro caso), las representaciones sociales que sostenga en torno a la enseñanza y aprendizaje, y el logro de aprendizajes significativos en sus alumnos, al menos así lo avalan algunos resultados de investigación [Cfr. por ejemplo, Aguayo, 2005; Fazio & Siegler, 2012]; incluso, como afirman Rigo Lemini, Alfonso Paez, & Gómez (2009),

“El examen empírico aporta evidencias de que un profesor induce o refrena procesos de autosupervisión cognitiva en sus estudiantes, con independencia de que lo haya incluido en su proyecto didáctico; de que el profesor puede enseñar en sus clases de matemáticas dichos procesos, y de la necesidad y pertinencia de que el tema de la meta-cognición se incluya en la formación de los docentes de matemáticas (pág. 435).

También, desde otras investigaciones (Lizarde, 2001 y 2005; Ávila, 2001) se había encontrado una estrecha correlación entre las concepciones del docente y la concreción de sus acciones al interior del salón de clases; además son varios los autores (Schoenfeld, 1987; Santos, 1994; Mancera, 1991; Carrillo, 1998) quienes confirman la importancia que tiene el reconocimiento de la influencia que tienen las concepciones del docente en la configuración de su práctica, es decir, en el tipo de decisiones que toma y elecciones didácticas que hace; de igual manera se sigue reconociendo que es necesario instrumentar políticas de formación que las tomen en cuenta, en el entendido de que para promover en la

realidad escolar actitudes y creencias más acordes con la nueva enculturación matemática que defendemos, es imprescindible que ese cambio comience en nuestros centros de formación, de manera intencionada y con una orientación clara: profundización en los saberes matemáticos y didácticos, revisión y cuestionamiento de las representaciones sociales y su influencia en la concreción de las propuestas didáctica, todo ello bajo procesos de reflexión metacognitiva que incidan en la formación integral de los docentes.

Ahora bien, si a pesar de las diferentes reformas que se han instrumentado, tanto para la educación primaria, como en la formación de profesores, los resultados en las evaluaciones no han sido los esperados, o los estudiantes manifiestan cierto olvido de los aprendizajes a lo largo de sus estudios, se hace imprescindible revisar qué está pasando en las instituciones formadoras de docentes, ¿cuáles son las concepciones sobre matemáticas y su enseñanza con las cuales ingresan los estudiantes? ¿Cómo las concepciones personales se configuran en representaciones sociales?, ¿cuáles son las representaciones sociales que en torno al saber matemático y didáctico se presentan, tanto desde los documentos curriculares, como desde las prácticas cotidianas?, ¿de qué manera interactúan las representaciones sociales de los formadores de profesores, de los estudiantes y las planteadas curricularmente? ¿Qué características tienen los procesos de transposición didáctica en las instituciones formadoras de docentes? ¿Cuáles son los márgenes de posibilidad para construir procesos de destransposición del saber matemático y didáctico?

Partiendo de la convicción de que las representaciones sociales se forman y se transforman en los intercambios comunicativos y en las interacciones sociales, en tal sentido se vuelve relevante instrumentar un estudio que vaya al centro de los intercambios comunicativos – los salones de clase, tanto de la escuela normal, como de la escuela primaria-, para documentar en qué medida las representaciones sociales que los estudiantes han construido, sobre un tema en particular (las fracciones¹), influyen, negocian o se complementan con las concepciones que curricularmente se proponen, tanto concepciones sobre el saber matemático como respecto a su enseñanza.

Coincidimos con Brousseau cuando plantea que en los sistemas actuales de enseñanza de las matemáticas

¹ La delimitación de la investigación al tema de fracciones obedeció a dos circunstancias, primero el hecho de que es un tema que, en los resultados reportados en Lizarde (2005) aparece como el que más dificultades presenta para su comprensión y su enseñanza (esto coincide con lo reportado en la literatura de investigación por Ávila, 2001; Aguayo, 2005; Fazio & Siegler, 2012), y segundo, el reto mismo que implica su análisis desde el abordaje metodológico elegido.

El alumno [...] debe, no sólo aprender nuevos conocimientos, sino también re-aprender y re-organizar los antiguos y olvidar –o más bien des-aprender– una parte. [...] Actualmente, la integración de los conocimientos nuevos a los antiguos se deja completamente a cargo del alumno (Brousseau, 1989, pág. 6)

Consideramos que lo interesante del planteamiento no está en asumir una actitud contemplativa, que nos permita sólo describir y analizar cómo se configuran las representaciones sociales en el salón de clases y cómo negocian, influyen o se complementan con las propuestas curriculares oficiales, en cambio asumimos de entrada que es necesario observar momentos clave de la gestión didáctica en los cuales se pueda apreciar la destransposición del saber, en el entendido de que ésta implica rectificar un saber que se ha convertido en obstáculo para los alumnos, en los términos de Antibí

"La idea de transposición didáctica que desarrolla Chevallard se relaciona con las modificaciones que sufre un contenido de saber (saber sabio o académico), hasta convertirse en objeto de enseñanza. Yo tomo un aspecto de la transposición didáctica, para luego desarrollar el concepto de "destransposición". Mi punto de partida es la idea de transposición didáctica como simplificación de algunas nociones para ser enseñadas. Siempre que se enseña algo, hay transposición -consciente o inconsciente-; el aspecto que a mí me interesa destacar se relaciona con la voluntad de simplificar conocimientos para hacerlos comprensibles. Ocurre, entonces, que cuando queremos simplificar cosas, podemos deformar la idea principal y en la mente del alumno quedan ideas falsas o erróneas, que en un momento determinado le son útiles. El tiempo pasa, pueden ser unos meses, o unos años, y es necesario resolver nuevos problemas que requieren un nivel más elevado de la noción aprendida, pero el alumno guarda en su mente la idea del modo en que fue aprendida en un momento inicial². Si no tomamos en cuenta este obstáculo, el alumno va a encontrar dificultades importantes. (Antibí, 2001, pág. 16)

En este posicionamiento hay una hipótesis de partida, que se nutre con la vivencia personal como formador de profesores, cuando los estudiantes ingresan a la Escuela Normal³ ya han vivenciado prácticas de enseñanza (como alumnos) por lo menos en 12 ciclos escolares, a lo largo de éstos han ido quedándose con ideas del modo en que fueron aprendidas inicialmente, las cuales pueden presentarse como “falsas o erróneas” y éstas se reflejan al momento de estar discutiendo las formas más pertinentes de enseñar

² El subrayado no aparece en el original.

³ Por ejemplo, una concepción bien arraigada en los estudiantes es aquella que les dice que no pueden resolver problemas los niños si antes no se les ha enseñado el contenido asociado a éste, lo irónico es que, “en su trabajo de tesis, Rafael Roa pone de manifiesto las grandes dificultades que tienen los alumnos de los últimos cursos de la licenciatura de matemáticas para resolver problemas combinatorios que forman parte del currículum de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Se demuestra así, en un caso bastante extremo, que la capacidad de construir y utilizar adecuadamente estrategias de resolución de problemas (en este caso de problemas de contar) no se desarrolla de manera “espontánea” ni siquiera en adultos que poseen una preparación matemática avanzada” (Gascón, 2003).

determinados contenidos en las sesiones de los cursos de matemáticas, de tal manera que es precisamente aquí el momento para contribuir a conflictuarlas, bajo un ejercicio metacognitivo que le ayude al estudiante a tomar conciencia de ellas, pero sobre todo a transformarlas cuando sea necesario.

Es decir, en el escenario de la formación inicial de docentes los estudiantes requieren vivir un proceso de transposición didáctica que contribuya a resignificar sus saberes matemáticos e instale un discurso didáctico que posibilite prácticas docentes articuladas con un modelo de aprendizaje basado en la transformación de saberes previos, sin embargo para posibilitarlo es necesario revisar las representaciones sociales tanto de los docentes en formación como de los formadores de profesores.

En tal sentido, partiendo de las siguientes consideraciones, a) La problemática recurrente de los bajos resultados de evaluaciones, tanto nacionales como internacionales, en la asignatura de matemáticas en la educación primaria y secundaria; b) La importancia que tiene el estudio de las representaciones sociales en tanto asumimos que para mejorar la formación de profesores es necesario reconocerlas y transformarlas (cuando sea necesario); c) La importancia que tiene estudiar los procesos de transposición didáctica en las instituciones formadoras de profesores, pero sobre todo el reconocimiento de la importancia que puede tener, para elevar la calidad de los aprendizajes de los niños, el mejoramiento en las competencias de los docentes, las matemáticas como una de las más valoradas; d) El reconocimiento de que, a lo largo de su escolaridad previa los docentes en formación han construido representaciones sociales sobre las matemáticas y su enseñanza, así como conocimientos matemáticos, que no necesariamente son congruentes con enfoques constructivistas e incluso con errores y/o imprecisiones, lo cual requiere de procesos explícitos de revisión y análisis durante la formación inicial que posibilite destransponerlos para construir representaciones y saberes más sólidos; en esta tesis hacemos objeto de estudio la formación inicial de profesores para la enseñanza de las matemáticas, a partir de las siguientes preguntas de investigación

¿De qué manera las representaciones sociales que sobre las matemáticas y su enseñanza han construido los estudiantes a su ingreso a la Escuela Normal inciden en los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico que curricularmente se intenta transmitir? Las representaciones sociales que han construido en su escolarización previa ¿de qué manera influyen y/o “negocian” con los significados que

se intentan construir en los cursos de Matemáticas y su enseñanza, al trabajar el bloque temático de los números racionales? Después de trabajar el tema de los números racionales, en la Escuela Normal: ¿Se logran generar procesos de destransposición del saber que incidan en la práctica docente de los estudiantes al trabajar el mismo contenido en la escuela primaria? ¿Cuáles representaciones sobre las matemáticas y su enseñanza son las que perviven y se reflejan en su práctica docente en la escuela primaria: las construidas en su escolarización previa, las que se proponen en el curso, una combinación?

Dentro de los objetivos (que planteamos en el capítulo II) asumimos como principal, la detección y caracterización de las representaciones sociales que sobre matemáticas y su enseñanza han construido los estudiantes a su ingreso a la Escuela Normal y cómo éstas influyen en los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico; adicional a ello nos interesa revisar en qué medida se transforman las representaciones previas y cómo se instalan nuevas representaciones como producto de la vivencia y los aprendizajes del curso de matemáticas, en específico en un aspecto que históricamente se ha presentado como problemático para su enseñanza, las fracciones.

Estructura de la tesis.

Aunque en el planteamiento metodológico asumimos un posicionamiento cualitativo y nos inclinamos por la perspectiva de análisis derivada de la Grounded Theory (Strauss & Corbin, 2002) con las posibilidades de construcción de teoría emergente de los datos, consideramos que ello no riñe con la clarificación de la perspectiva teórica desde la cual fundamentamos el análisis de los datos, dado que esta recuperación de teoría la utilizamos en un doble sentido: en la construcción de la sensibilidad para observar los datos, a la manera de un ojo ilustrado y como referente para profundizar en el análisis cuando los datos se podían explicar desde categorías teóricas ya existentes en la literatura; en tal sentido, en el capítulo I, denominado ***“Perspectiva teórica de la investigación”***, presentamos el análisis de cuatro aspectos que consideramos fundamentales para la comprensión de los datos reportados en los capítulos subsecuentes:

- a) El papel de las representaciones sociales en la formación docente inicial da cuerpo a un primer apartado de este primer capítulo; resaltamos la postura de Serge Moscovici como pionero en la introducción de esta categoría y precisamos que su interés para introducirlas en el campo de investigación de la

educación matemática proviene del hecho que, a diferencia de categorías similares como la de concepciones, por ejemplo, es que en ésta se contempla tanto el soporte individual y grupal, pero sobre todo el hecho de que son elaboradas durante los intercambios comunicativos y la interacción en las instituciones con lo cual se configura un margen amplio para su revisión y/o eventual transformación.

Así pues, el status ontológico de las representaciones sociales viene dado desde el momento mismo en que éstas se producen, se recrean y se modifican en el curso de las interacciones y las prácticas sociales con lo cual tienen un carácter tanto instituyente como instituido, y es precisamente este doble carácter el que nos permite hacerlas objeto de estudio en la formación docente inicial para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria.

Al leer este apartado se notará que hay una toma de postura respecto a uno de los dos enfoques con que se han estudiado las representaciones sociales, consideramos que el enfoque procesual nos permite apreciar su configuración y transformación y por lo tanto es más congruente con los objetivos de nuestra investigación.

Las representaciones sociales en la formación docente inicial de profesores para la enseñanza de las matemáticas nos permiten comprender el proceso de construcción social de la “realidad” de su enseñanza y aprendizaje, es decir, nos proveen de indicadores explicativos sobre el sistema de valores, ideas y prácticas que perviven en un determinado momento y que condicionan o posibilitan la inserción en una comunidad de práctica profesional específica, pero a la vez nos permiten reconocer la posibilidad de su transformación a partir del proceso dialéctico de anclaje y objetivación.

Finalmente, en este apartado, hacemos alusión al lenguaje y su importancia en la configuración de las representaciones sociales (lo cual como veremos en el capítulo III resultó muy relevante para analizar el proceso de transposición del saber matemático y didáctico) en tanto asumimos que conocer una cosa es hablarla, es decir, la explicitación de las representaciones sociales pasa por la mediación del lenguaje, sin el cual no se podría desarrollar ni mantener.

- b) En un segundo apartado vamos de la revisión del concepto de transposición didáctica al concepto de destransposición de saberes matemáticos y didácticos.

Partimos de la idea de que la transposición didáctica remite al paso del saber sabio al saber enseñado, pero en este tránsito hay ideas y conceptos matemáticos que pudieron no ser transpuestos de manera adecuada o congruente con el saber de referencia, adicional a ello hay obstáculos epistemológicos propios del campo de las fracciones que entran en contradicción con los saberes propios de otro campo de las mismas matemáticas y que al ser aprendidos en su versión “definitiva” en un campo (la multiplicación en el campo de los números naturales “agrandan”) dificultan su aprendizaje en el otro (la multiplicación en los números racionales no necesariamente agranda); en tal sentido, errores en el proceso de transposición, aprendizajes mal aprendidos y/u obstáculos inherentes al saber matemático demandan su revisión y análisis en el proceso de formación inicial a través de una transposición que se acerque más a la idea de destransposición de saberes, al permitir conflictuar las representaciones previamente construidas y construir una cultura del reconocimiento de la provisionalidad de algunos saberes en momentos específicos del proceso de aprendizaje de las matemáticas.

La idea de destransposición de saberes, la concebimos vinculada a la vigilancia epistemológica que deben tener los profesores para reconocer sus saberes tanto como las dificultades que tienen y a partir de ello asumir como un compromiso la devolución del problema de su desarrollo profesional, ante lo cual los procesos metacognitivos le permitan tomar conciencia de la importancia que tiene la estructuración de una transposición didáctica que no pierda de vista el saber matemático de referencia.

- c) El saber matemático en juego, las fracciones y sus diversos significados (parte – todo, medida, cociente, operador multiplicativo y razón); de igual manera recuperamos cuatro modelos teóricos ideales para su enseñanza, los cuales nos sirven de marco de referencia para analizar los planes de estudio para la formación inicial de profesores en tres generaciones curriculares: 1975, 1984 y 1997.

Dos datos sobresalen de este análisis, propio del primer paso de la transposición didáctica, del saber sabio al saber a enseñar: los resultados de la investigación didáctica impactan con mucho retraso a las instituciones formadoras de docentes (al menos en el caso de México), mientras que desde finales de la década de los 70's e inicio de los 80's (Kieren, 1980) se había configurado con cierta claridad el conocimiento respecto a los

diferentes suestructos de las fracciones, no son considerados éstos sino hasta la reforma del plan de estudios 1997 (SEP, 1997).

Segundo, el estudio de las fracciones y sus diversos significados aparece con claridad también hasta el Plan 1997 para la formación de profesores e incluso en el Plan de 1984 el tema se deja al aprendizaje de los estudiantes sin coordinación explícita de un formador de profesores; esto nos lleva a configurar la hipótesis de que ante la ausencia explícita de estos conocimientos, en planes de estudio anteriores, las representaciones sociales se construyeron desde la vivencia cotidiana como alumnos y posteriormente se reprodujeron al enseñarlas de manera semejante a como las aprendieron. El Plan 1997, lleva la ventaja de la integración explícita del tema como objeto de estudio, de ahí la relevancia de esta investigación en tanto nos provee una visión respecto a cómo se dan los procesos para su transposición y las oportunidades para la destransposición.

En el mismo capítulo I también hacemos una revisión del saber a enseñar, pero ahora desde los materiales curriculares para la educación primaria, bajo el entendido de que la forma como se da su enseñanza y los contenidos que incorpora, contribuyen en la configuración de las representaciones sociales sobre las matemáticas (con la delimitación al tema de las fracciones) y su enseñanza que posteriormente reflejarán los estudiantes en sus proceso de formación docente inicial.

Llama la atención algunas coincidencias entre materiales curriculares de diferentes generaciones curriculares (1960, 1972, 1993, 2011), por ejemplo, las fracciones se introducen en el modelo “egipcio primitivo”, es decir a partir de fracciones unitarias e iniciando con fracciones del tipo “ $m/2^n$ ” y generalmente en el contexto del reparto; sin embargo, dependiendo del enfoque asumido por cada uno de los planes de estudio, los saberes matemáticos han sido aprendidos ya sea como herramienta (el caso de los planes de estudio más recientes: 1993 y 2011) o como objeto (en los planes de estudio de 1960 y 1972) y ello acarrea consigo diferentes representaciones sobre qué son las matemáticas y cómo se enseñan. Al interior del capítulo abundamos al respecto.

- d) Cierra este capítulo la revisión de algunas investigaciones que, o son antecedente o se vinculan de alguna manera con el objeto de estudio que ya comentamos en líneas anteriores, el análisis de los procesos de transposición y destransposición de los saberes matemáticos y didácticos en la Escuela Normal y las representaciones que le son asociadas.

En el **capítulo II**, denominado **“Diseño de la investigación”**, presentamos las preguntas de investigación, los objetivos y la perspectiva metodológica que asumimos tanto para la recuperación como el análisis de la información obtenida con diversos instrumentos.

Como se podrá apreciar, la perspectiva metodológica es propia del enfoque cualitativo dado que el objeto de estudio exige un abordaje de esta naturaleza, el análisis de los procesos de transposición y destransposición del saber y la caracterización de las representaciones sociales desde el enfoque procesual no podría ser de otra manera, sobre todo porque, ya lo decíamos, nos interesa el proceso de su configuración y la fineza con que se van estructurando en escenarios muy concretos y específicos.

La investigación es un estudio de caso, en el cual los sujetos participantes son: un formador de profesores y 7 docentes en formación, insertos en el escenario natural del proceso de formación curricularmente establecido por el curso de Matemáticas y su enseñanza II, correspondiente al plan de estudios 1997. Por tal motivo en este capítulo se podrá apreciar el contexto donde se llevó a cabo la investigación (una Escuela Normal Rural) y el proceso de negociación del acceso, los instrumentos utilizados y el acercamiento metodológico de análisis derivado de la Grounded Theory, aunque no en toda la complejidad que ello encierra; los porqué los explicamos al interior del capítulo.

Los capítulos III y IV los destinamos para presentar el análisis de la información; hago la aclaración que asumimos un posicionamiento heterodoxo en su redacción, es decir, la construcción de ambos capítulos implicó la categorización de la información y la selección de unidades de análisis (apoyados en el programa informático maxqda), usando para ello el método de comparación constante entre unidades de información obtenidas por diferentes fuentes (registros obtenidos de grabaciones de clase, entrevistas, resolución de problemas), para ir las integrando en un texto que articulara la presentación de resultados con su discusión y análisis, de tal manera que incluso cuando fue necesario también articulamos algunas citas teóricas que contribuyeran a fortalecer las ideas o argumentos que evidenciamos empíricamente.

En este sentido, el **capítulo III** documenta los procesos de transposición y las oportunidades para la destransposición que se dieron al analizar 9 sesiones de clase de un formador de profesores, por ello le nombramos **“La destransposición del saber: hacia la construcción de nuevas representaciones sociales en matemáticas”**. Como apreciaremos

este capítulo es el más extenso de toda la tesis y ello obedece a que quisimos analizar con el mayor detenimiento posible los procesos de interacción al interior del aula de la escuela Normal, en congruencia con la idea básica del proceso de configuración de las representaciones sociales: los intercambios comunicativos y las interacciones sociales.

La organización temática de las categorías que fuimos encontrando en la revisión de la información recuperada, principalmente los videos de clase y sus correspondientes transcripciones, acompañados del análisis de los planes de clase del formador de profesores y del programa de estudios de Matemáticas y su enseñanza II (SEP, 2004) nos permitió organizar este capítulo a partir de tres apartados: la emergencia del saber didáctico; la práctica docente de la Escuela Normal como un escenario para la destransposición y la gestión del error como base para la destransposición del saber matemático y didáctico.

Algunos de los resultados, que podremos encontrar en la lectura de este capítulo, nos dicen que a partir de que el formador de profesores asume una perspectiva didáctica clara y congruente con un posicionamiento teórico consolidado [en este caso la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007)], al momento mismo de su ejercicio profesional, la congruencia entre el enfoque asumido y su traducción en prácticas efectivas en el salón de clase permite un proceso de construcción de representaciones sociales alternativas a las que circulan en el contexto cotidiano, en relación a la enseñanza y aprendizaje de las fracciones (por la delimitación que hicimos) e incluso posibilitan que los estudiantes vayan interiorizando las características de la práctica profesional que ejercerán.

La vivencia de formas alternativas de “hacer matemáticas” a través de la resolución de problemas, en contraposición con enfoques de enseñanza por ostensión, y la utilización de un lenguaje específico (derivado de la Teoría de las Situaciones Didácticas; Cfr. Brousseau, 2007) permiten documentar un proceso formativo que va de la homología a la transformación de saberes previos como estrategia básica para formar profesores.

El lenguaje didáctico tiene un lugar muy importante en todo el proceso didáctico, ya que no sólo permite delimitar la representación construida, sino que además se convierte en herramienta tanto para el diseño de situaciones didácticas con las cuales practicarán los estudiantes en la escuela primaria, como en herramienta analítica para nombrar, clasificar y explicar lo acontecido en ésta, es decir, esta construcción de un lenguaje temático permite que los estudiantes recombinen conceptos específicos de un posicionamiento teórico con

los conceptos cotidianos sobre la práctica docente, de tal manera que se construye un esquema analítico con mayor profundidad y posibilita que su análisis no se quede en ambigüedades e imprecisiones.

También en este capítulo analizamos cómo, a partir de la gestión del error en una triple dimensión: del formador, de los estudiantes y de la gestión del saber en la escuela primaria (por parte de los estudiantes), se generan posibilidades claras para la destransposición del saber matemático y didáctico.

De manera complementaria, en el **capítulo IV** nos centramos en las ***“Reflexiones de los estudiantes: metacognición y devolución de la responsabilidad”***, esto es, en el momento en que los estudiantes toman decisiones de organización de sus situaciones didácticas, las ponen en práctica y elaboran documentos de análisis de lo acontecido.

En este capítulo analizamos la información obtenida de las clases videograbadas en la escuela Normal (los fragmentos de registro en que se apreciaban momentos del diseño de una situación didáctica y posteriormente el análisis de su aplicación), de los planes de clase diseñados (recuperaron una situación didáctica diseñada por un experto y le hicieron los ajustes pertinentes para su grupo de práctica) considerando que cada uno de los estudiantes practicaría en un grado diferente, cubriendo entre todos los seis grados de la escuela primaria, además los ensayos de análisis escritos como reflexión de la práctica docente y la aplicación de dos entrevistas (una previa y otra posterior a la práctica docente); adicional a ello y dado que nos interesaba tanto el anclaje como la objetivación de las representaciones sociales contruidas, como su pervivencia a lo largo del tiempo, después de un año de haber concluido el curso les aplicamos un “Cuestionario con problemas de fracciones” recuperando los mismos problemas revisados durante el curso e incluso algunos inventados por ellos mismos y los citamos a una entrevista colectiva, posterior a su resolución, con la finalidad de analizarlos y que explicaran las dificultades encontradas así como la reflexión sobre los aprendizajes que reconocían que se conservaban y los que les generaban dificultades u olvidos.

Analizamos de igual manera, en este capítulo, los diferentes diseños de situaciones didácticas que fueron elaborando a lo largo de las diferentes prácticas docentes, antes, durante y después del curso de Matemáticas, lo cual nos permitió caracterizar un proceso de recombinação de lenguajes y la conservación del esquema básico aprendido durante el curso pero cargado de actividades que no responden en su totalidad al sentido teórico de

cada uno de los componentes. Lo paradójico es que, se reconoce que el aprendizaje de esta forma de planeación (por situación didáctica) instala una representación básica respecto a cómo organizar el proceso de enseñanza (en tanto no han vivenciado otras formas de hacerlo), al transcurso del tiempo sufre transformaciones y adecuaciones como respuesta al cambio de contratos didácticos propios de otros cursos del plan de estudios, es decir, conforme se cambia la exigencia en el diseño, se tienden a diluir sus componentes.

Algunas de las ideas que encontraremos en la lectura de este capítulo están centradas en el proceso de aprender a enseñar, las dificultades que enfrentan y la utilización de las herramientas conceptuales aprendidas durante el curso como referente para interpretar lo acontecido y construir explicaciones.

La metacognición juega un papel importante en la configuración de lo que en la Teoría de las situaciones didácticas se llama “devolución”, es decir, en la medida en que los estudiantes se comprometen con su proceso formativo, el discurso y las prácticas que tuvieron un primer anclaje en las sesiones de clase, se objetivan al diseñar las situaciones didácticas y se traducen en prácticas en la escuela primaria, con lo cual se logran progresivamente los tres tipos de transformaciones descritas por (Duveen & Lloyd, 2003): ontogenéticas, microgenéticas y sociogenéticas.

Transformaciones ontogenéticas, desde el momento mismo en que los estudiantes interiorizan representaciones sociales alternativas, respecto a las fracciones y su enseñanza, y las configuran como un esquema para pensar y pensarse como docentes; transformaciones microgenéticas, porque hay un cambio en las prácticas de los estudiantes (acompañado de un choque con las prácticas tradicionales de muchas escuelas primarias) inducido por la experimentación de situaciones didácticas elaboradas, en un primer momento, por expertos y posteriormente por ellos mismos; y sociogenéticas (parcialmente) en tanto los docentes formados bajo este esquema tienen la posibilidad de incidir en un contexto más amplio que sus salones de clase, a nivel institucional y/o a nivel de las prácticas profesionales de su región.

Sin embargo, y ello es aún un reto a superar, el horizonte conservativo tiende a ganar terreno frente al horizonte formativo, tal y como lo documentamos en el apartado IV.2; los estudiantes se muestran vulnerables a las presiones conservativas del contexto y ante el cambio de contratos didácticos a lo largo de los diferentes cursos de su formación profesional (y ante la práctica docente con diferentes maestros titulares en la escuela

primaria), prefieren responder a las demandas impuestas desde éstos que a la consolidación de un discurso y prácticas derivado de el posicionamiento teórico estudiado. Con esto no queremos asumir una actitud maniquea respecto a los diferentes contratos didácticos posteriores, sin embargo al no haber un análisis específico de las matemáticas y su enseñanza los estudiantes disminuyen su nivel de compromiso y la curva del olvido hace su aparición, transformando las representaciones sociales construidas durante el curso para configurarlas en su aparente forma definitiva (al menos hasta la etapa de docentes en formación).

Cerramos esta tesis con las principales **conclusiones** de la investigación, en el capítulo V, aportando además algunas ideas de posibles estudios que permitan profundizar en el campo de las representaciones sociales sobre la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria, resaltando sobre todo la emergencia de un esquema formativo que posibilite la destransposición intencionada de los saberes matemáticos y didácticos. En éstas también planteamos el esquema del proceso que permite la configuración de las representaciones sociales, ejemplificando con una de las que apareció con más fuerza a lo largo del análisis de los datos: el lenguaje didáctico.

Finalmente incluimos las **Referencias bibliográficas** que nos ayudaron a fundamentar esta tesis, así como las evidencias (entrevistas, transcripciones de clase, planes de clase –del formador y de los estudiantes-, ensayos de análisis, lecciones de los libros de texto y cuestionario de problemas con fracciones- esto en un CD anexo) que sirven de soporte al análisis presentado en las siguientes páginas.

Queda el trabajo a consideración de los lectores, con la intención de aportar una mirada alternativa a los procesos didácticos que desde un escenario específico contribuyen a la formación de profesores; las aportaciones, sugerencias y críticas con toda seguridad contribuirán a continuar el debate.

*CAPÍTULO I. Perspectiva teórica de la
investigación.*

CAPÍTULO I.

PERSPECTIVA TEÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN.

Dejar a un lado “el pasado” es algo ingenuo e irreal, pues como mencionan Williams, Unrau y Grinnell (2005), siempre comenzamos una investigación con ciertas experiencias, ideas y opiniones sobre el problema a estudiar, lo cual es resultado de nuestra propia historia de vida. Desde luego, tratamos de hacer a un lado –en la medida de lo posible- nuestras opiniones sobre cómo se relacionan los conceptos, de igual forma nos mantenemos abiertos a nuevos conceptos y a las relaciones que emerjan entre éstos. (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010, pág. 370)

En muchas de las ocasiones existe la tendencia a querer hacer una revisión exhaustiva de los temas y presentarla por escrito en un trabajo de investigación, al respecto considero que sí se debe hacer una revisión exhaustiva (o lo más completa posible en atención a las posibilidades reales de cada investigador) en términos del acceso que se tenga a la literatura y por supuesto a la intencionalidad y delimitación del objeto de estudio, sin embargo ello no nos tiene que llevar necesariamente a incluir de manera descriptiva o resumida cada posicionamiento de los diferentes autores.

La producción teórica actual es tan vasta que enfrascarse en una tarea de esa dimensión requeriría dedicar sólo el tiempo para ello [algunos autores ya lo han hecho,

como ejemplo tenemos los diversos handbook (English, 2002; Gutiérrez, 2006; Jaworski, 2008; Lester, 2007; Clements, Bishop, Keitel, Kilpatrick, & Leung, 2013), las memorias de grupos de investigación nacionales e internacionales (Mota, 2003; Menghini, Furinghetti, Giacardi, & Arzarello, 2008) y tesis de maestría o doctorado que se plantean revisiones temáticas para integrar un estado del arte (Dávila, 2002; Fandiño Pinilla, 2009), por citar algunos casos]; partiendo de esta consideración en este capítulo nos vamos a ocupar de tres aspectos principalmente: 1º El concepto de representaciones sociales y la utilidad que tuvo para nuestra investigación; 2º La articulación entre dos conceptos complementarios: transposición didáctica y destransposición de saberes; y 3º La caracterización del campo de las fracciones y sus diversos significados [o subconstructos, como los llama Kieren (1980)].

Posterior a estos tres aspectos, vamos a recuperar una breve revisión respecto al “Estado del Arte” en cuanto a las investigaciones que consideramos se acercan o son elementos básicos como antecedente de la nuestra, es decir, investigaciones que nos sirvieron de orientación para su desarrollo, sobre todo porque tratan un objeto de estudio similar.

I.1. Las representaciones sociales en la formación docente inicial.

En los primeros esfuerzos de revisión que hice del término “representaciones” fui encontrando sistemáticamente que éste era utilizado principalmente en las investigaciones en las cuales el foco central de análisis es el contenido matemático, por ejemplo (Font, 2001) en un artículo titulado “Algunos puntos de vista sobre las representaciones en Didáctica de las matemáticas” profundiza en las diferentes discusiones que se han generado desde una postura que denomina “representacionalista” y otra “no representacionalista”; hace un análisis del significado del término “representación”, incluso comparándolo con el de “imagen conceptual” (citando a Tall y Vinner, 1981), y su análisis nos permite clarificar el papel de las representaciones cuando está en juego la comprensión de un contenido específico.

De manera similar podemos encontrar que Rico (2000) al hacer un análisis de “*La representación y comprensión en la investigación matemática*” centra su consideración en la representación de conceptos matemáticos y en su función durante los procesos de enseñanza y aprendizaje, dice...

No pretendemos extender estas reflexiones a otras cuestiones de interés para la Didáctica de la Matemática, como pueden ser las diversas representaciones que hace el profesor sobre esos mismos procesos o sobre otras componentes del sistema educativo. Nuestro ámbito de reflexión se centra en el conocimiento matemático (Rico L. , 2000, pág. 223).

Sin embargo, nuestra intención está puesta precisamente en eso que no hacen objeto de investigación los partidarios de la visión “representacionalista” del conocimiento matemático: las representaciones que hace el profesor sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; con esta aclaración establecemos una primera delimitación dentro de las investigaciones que asumen como objeto de estudio las representaciones. Reconozco que se puede establecer una dialéctica entre el tipo de representaciones que vivimos como sujetos – dígase profesores o estudiantes (entendidas como su campo histórico experiencial) y las representaciones (concepciones) sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sobre todo por la relación entre, por ejemplo, una formación en matemáticas de corte tradicionalista, y unas concepciones de la matemática centrada principalmente en la transmisión de algoritmos, fórmulas y definiciones.

Ahora bien, ya establecimos una doble dimensión de la utilización del término representación: 1º. Para indicar la relación que el sujeto establece con el conocimiento matemático; 2º. Al ser marcos explicativos de la forma de interpretar los procesos de enseñanza y aprendizaje; de igual manera hemos indicado que nuestra línea de investigación se decanta por esta segunda dimensión, sin embargo, considero que es necesario profundizar más en el campo de las representaciones, sobre todo de la categoría “representaciones sociales” para delimitar su alcance en el estudio de los procesos de formación docente inicial, a continuación nos vamos a dedicar a ello.

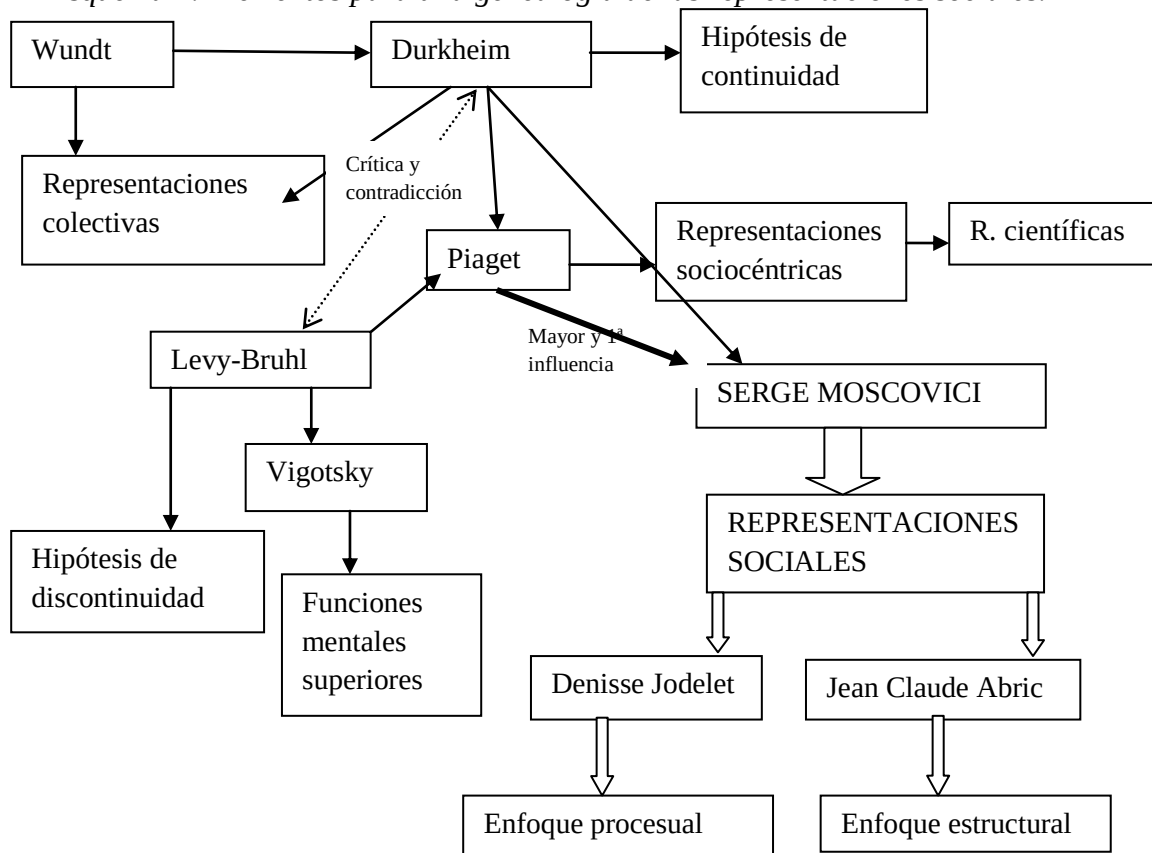
1.1.1. Serge Moscovici, pionero en el campo de las representaciones sociales.

Este subtítulo lo asumimos como tal, dado que a pesar de que el concepto de representaciones ya circulaba en la literatura, fue Serge Moscovici (Moscovici, 1979) quien lo introdujo al campo de la psicología social y desde ahí se ha estado diseminando a diferentes campos de aplicación. Cuando comencé a hacer la revisión del concepto, la primera referencia que planteaban los diferentes autores leídos, respecto a las influencias teóricas que tuvo Moscovici y que de una u otra manera incidieron en la configuración del concepto, prácticamente todos se orientaban hacia Durkheim, con lo cual nosotros planteábamos nuestras reservas, sobre todo por la orientación funcionalista de este último;

ello me motivó para hacer un seguimiento a las influencias teóricas que él mismo reconocía como tales en el proceso de configuración del concepto de representación social o las que, a partir de la lectura de los textos específicos al respecto, le atribuyen influencia sobre sus ideas.

En tal sentido, en el esquema 1: “*Elementos para una genealogía de las representaciones sociales*”, sintetizamos algunas de las influencias teóricas en la configuración del concepto de representaciones sociales; la intención es ubicar el concepto y a partir de ahí precisar su significado.

Esquema 1: Elementos para una genealogía de las representaciones sociales.



Para Wundt estas representaciones colectivas eran “*aquellos productos mentales que genera la comunidad de la vida humana y, por lo tanto, no son explicables en términos de la conciencia individual, ya que presuponen la acción recíproca de muchos*” (Farr, 2003, pág. 155).

Wundt influyó en Durkheim, en tanto al configurar su hipótesis de continuidad, se está diciendo que entre una representación colectiva “primitiva” y una representación “moderna” científica, esta última se desarrolla a partir de la primera; esta idea la contradice

Lévy Bruhl dado que para él, las representaciones “primitivas” y las “modernas” son antitéticas y la evolución de la segunda a partir de la primera implicaba la sustitución de un patrón de pensamientos y sentimientos por otro opuesto. [Como puede contrastarse en Moscovici (2003, pág. 105)].

Por otro lado, de acuerdo con Piaget *“en el proceso de descentrar las representaciones sociocéntricas, éstas se convierten en representaciones científicas”* (Moscovici, 2003, pág. 105), en tal sentido Piaget sigue la hipótesis de continuidad de Durkheim.

Moscovici mismo le atribuye tanto a Durkheim como a Lévy Bruhl, ser los *“padres de la idea”* (Moscovici & Marková, 2003, pág. 137), sin embargo asume que tuvo mayor influencia de Piaget en la configuración de su concepto de representación social y la influencia Durkheimniana fue indirecta, en tanto Piaget retomó el concepto de este último, dice *“vale decir que de alguna manera recibí la herencia de Durkheim sin tener conciencia de ella”* (Moscovici & Marková, 2003, pág. 137).

En resumen, desde el esquema podemos ver que de origen hay dos posicionamientos que podemos recuperar para explicar el desarrollo del pensamiento y de las representaciones sociales: continuidad o discontinuidad; si asumimos el primer posicionamiento, la transformación es continua y gradual, en cambio si asumimos el segundo posicionamiento, estamos hablando de un cambio radical, en tanto implica la sustitución de un patrón de comportamientos y sentimientos por otro opuesto.

Antes de definir cualquier posicionamiento, vamos a ir aclarando el concepto de representación social y cómo es que lo usamos en esta investigación; en principio, -aunque retomando en muchos de sus planteamientos a Piaget-, Furth (1987) concede al término “representación” un sentido activo y un sentido pasivo, e incluso dice, la acepción pasiva puede posteriormente subdividirse en un sentido configurativo estrecho y en un sentido significativo.

En sus propias palabras tenemos que...

La acepción original del término es activa: hacer algo presente a través de... En este caso, la persona es el sujeto de la actividad y hay un instrumento mediador implícito. ‘La persona sorda manifiesta su conocimiento sobre el asunto discutiendo mediante gestos naturales’. La oración anterior es un ejemplo del sentido activo de representación. Una persona que sabe algo sobre un evento, comunica este conocimiento a otros mediante representación gesticular. En el

sentido pasivo, el instrumento mediador se convierte en sujeto de la oración, ejemplo: ‘alguna cosa está en lugar de alguna otra’. Para la acepción configurativa estrecha tenemos el siguiente ejemplo: ‘un mapa representa el gasto de la ciudad’. Para el sentido significativo amplio está: ‘La letra X representa a aquellos niños de la ciudad que están entre 6 y 10 años de edad (Furth, 1987, pág. 31)

Esta conceptualización de la representación nos parece incompleta e incluso responde a una cuestión cognitiva de recuperación de la realidad al hacerla presente a través de..., o como el mismo autor recomienda para la teoría de Piaget, sería útil que *“el uso de la palabra inglesa ‘representación’ se limitara al sentido estrecho. De esta forma, representación se referiría siempre al producto directo de la función simbólica o semiótica (por ejemplo, imagen, lenguaje) y se relacionaría en su aspecto figurativo con la internalización real y literal de las acciones externas”* (Furth, 1987, pág. 41).

En este sentido, y a pesar de encontrar el uso de la noción de representación desde Descartes, Leibniz, Wundt, Lévy Bruhl, Durkheim, Piaget entre otros, como ya decíamos, se debe a Serge Moscovici su introducción en el terreno de la psicología social.

Derivado de ésta, el concepto de “representaciones sociales”, en nuestros días, parece ser un concepto paraguas, donde por igual se hace uso de éste para realizar investigaciones en política, deporte, educación especial, relaciones laborales, etc., e incluso poco a poco se introduce en el campo de la Educación Matemática, pero, ¿cuál puede ser la relevancia de esta categoría en el campo de la Educación Matemática? ¿Será más fecunda que, incluso, las mismas categorías de “concepciones” o “imagen mental”? ¿Qué se entiende por “representaciones sociales”? y ¿Cómo se configuran?

Pensando en el interés que puede despertar para la Educación Matemática la introducción de la categoría “representaciones sociales”, una de las cuestiones que nos apoya surge del mismo status ontológico de éstas, *“las representaciones sociales se producen, se recrean y se modifican en el curso de las interacciones y las prácticas sociales: éste es su status ontológico”* (Castorina & Kaplan, 2003, pág. 12); en tanto el peso fuerte está en las interacciones y las prácticas sociales (y no sólo en la mente del individuo) ello genera márgenes de acción para quienes tenemos la responsabilidad de contribuir en la formación docente inicial, y es que de entrada no se descarta ni el soporte individual o grupal de éstas, pero en cambio sí se resalta *“el hecho de que sean elaboradas durante los intercambios comunicativos y la interacción en las instituciones”* (Castorina &

Kaplan, 2003, pág. 12), es decir, entonces en todo intercambio comunicativo se está abonando el terreno para, o bien cuestionar o reafirmar, una representación social objeto de esos mismos intercambios comunicativos; al respecto se presenta también un problema ¿Qué tipo de intercambios comunicativos favorecen qué tipo de representaciones?

Pero no nos adelantemos (aunque es válido también este juego mental que establezco entre las conceptualizaciones, y las evidencias empíricas) ¿Cómo podemos conceptualizar las representaciones sociales? ¿Cómo lo hace quien se considera el fundador de esta teoría?

Al respecto Duveen & Lloyd (2003) retoman la definición de Moscovici en los siguientes términos, las representaciones sociales como

Sistemas de valores, ideas y prácticas que tienen una doble función: en primer lugar, establecer un orden que permita a los individuos orientarse en su mundo social y material y dominarlo; y, en segundo término, permitir la comunicación entre los miembros de una comunidad, aportándoles un código para el intercambio social y un código para denominar y clasificar de manera inequívoca los distintos aspectos de su mundo y de su historia individual y grupal (pp. 29 – 30)

En este sentido, al compartir ciertas representaciones sociales se establece una relación de pertenencia ante formas de ser y estar en el mundo social, a la vez que se confiere identidad al compartir códigos comunicativos para establecer las relaciones intersubjetivas correspondientes a su comunidad y a su cultura. Ante ello, las representaciones sociales adquieren un carácter dual ya que al mismo tiempo que construyen las realidades de la vida social, nos aportan una comprensión de la misma.

En otro lugar, el mismo Moscovici define a las representaciones sociales como “tipos de creencias paradigmáticas, organizaciones de creencias, organizaciones de conocimiento y lenguaje, y las encontramos en distintos tipos de estructuras de conocimientos” (Moscovici & Marková, 2003, pág. 140), en este sentido las representaciones sociales se fortalecen con las creencias, las organizan y son las que contribuyen a la movilidad de las personas, sobre todo para objetivar sus representaciones, sobre las matemáticas y su enseñanza, es decir una representación se objetiva a través del lenguaje en la medida que el lenguaje es el vehículo que permite organizar el pensamiento (abundaremos un poco más sobre esto en un apartado siguiente). Cuando exteriorizamos una determinada forma de concebir el conocimiento matemático o le nombramos, implícitamente estamos poniendo en juego una representación social de éste.

En su conceptualización original, además de la definición que retoman Duveen y Lloyd (2003), Moscovici incorpora tres elementos más para configurar su definición:

- Una representación social es una organización de imágenes y de lenguaje⁴ porque recorta y simboliza actos y situaciones que son o se convierten en comunes. (Moscovici, 1979, pág. 16)

- La representación social es una modalidad particular del conocimiento, cuya función es la elaboración de los comportamientos y la comunicación entre los individuos. (Moscovici, 1979, pág. 17).

- La representación social es un corpus organizado de conocimientos y una de las actividades psíquicas gracias a las cuales los hombres hacen inteligible la realidad física y social, se integran en un grupo o en una relación cotidiana de intercambios, liberan los poderes de la imaginación (Moscovici, 1979, pág. 18).

Por su parte Farr (2003) adopta una definición más escueta de las representaciones sociales, dice *“una representación es social si está o ha estado en dos o más mentes. La cuestión clave es cómo una representación puede salir de una mente en una forma tal que otra la pueda tomar e interpretar”* (pág. 172); esta preocupación de Farr se resuelve desde la importancia atribuida a la comunicación (e incluso a la difusión en su vertiente comunicación escrita), al lenguaje como el medio a través del cual se expresan las representaciones, y es que de una u otra forma, en tanto el lenguaje permite objetivar el pensamiento, contribuye a crear realidades. O de igual manera, *“lo que permite calificar de sociales las representaciones, es menos sus soportes individuales o grupales que el hecho de que ellas sean elaboradas en el curso del proceso de intercambios y de interacciones”* (Banchs, 1994, pág. 9).

Esta argumentación, para el caso específico de la formación de docentes, cobra mayor relevancia en tanto podemos asumir procesos de interacción social y discursiva a través de los cuales se puede negociar el sentido de los conocimientos matemáticos y didácticos. El problema es que se siguen sosteniendo como producto del pensamiento individual en la medida en que se asume que “sale de la mente del individuo”, de igual manera cuando se habla de que son representaciones sociales en el sentido de “ser compartidas” el primer problema que se presenta es de orden cuantitativo: ¿cuál es el grado o nivel en que se comparten? ¿a partir de que se comparten entre dos individuos? o

⁴ El subrayado no aparece en el original

¿necesariamente se remite a la configuración de la representación social en la cultura de toda la sociedad en cierto momento específico?

El hecho de admitir que las representaciones existen dentro de la mente individual, no significa de ninguna manera que ellas se produzcan individualmente y que sean una realidad meramente subjetiva, pues si algo queda claro es su carácter intersubjetivo ya que se producen en interacción con otros y que en el proceso de su producción estamos construyendo colectivamente la realidad en que vivimos y nuestra propia identidad (Banchs, 1994, pág. 9).

Lo que sí queda claro es que las representaciones sociales, además de ser siempre representaciones de algo (las matemáticas, por ejemplo), son también representaciones de alguien o de algún colectivo, pero sobre todo en su proceso de configuración tiene mucho sentido la noción de construcción social de la realidad, es decir

*La representación social es, a la vez, **pensamiento constituido** y **pensamiento constituyente**. En tanto que pensamiento constituido, las representaciones sociales se transforman efectivamente en productos que intervienen en la vida social como estructuras preformadas a partir de las cuales se interpreta, por ejemplo, la realidad. Estos productos reflejan en su contenido sus propias condiciones de producción, y es así como nos informan sobre los rasgos de la sociedad en las que se han formado. En tanto que pensamiento constituyente, las representaciones no solo reflejan la realidad sino que intervienen en su elaboración... La representación social constituye en parte el objeto que representa. No es el reflejo interior, es decir, situado en la cabeza de los sujetos, de una realidad exterior, sino que es un factor **constitutivo** de la propia realidad... La representación social es un proceso de **construcción de la realidad** y debemos entender esta afirmación en un doble sentido: primero, en el sentido de que las representaciones sociales forman parte de la realidad social, contribuyen pues a configurarla y, como parte sustancial de la realidad, producen en ella una serie de efectos específicos. Segundo, en el sentido de que las representaciones sociales contribuyen a construir el objeto del cual son una representación. Es porque la representación social construye en parte su objeto por lo cual este objeto es, en parte, **realmente** tal y como aparece a través de su representación social [El resaltado es del original] (Ibáñez, 1988: 37), citado en Araya Umaña (2002, pág. 30)*

Dentro de los procesos de construcción de las representaciones sociales Duveen y Lloyd identifican tres tipos de transformaciones que se asocian a éstas;

De sociogénesis, que tiene que ver con la construcción y transformación de las representaciones sociales de los grupos respecto a objetos específicos; de ontogénesis relacionada con el desarrollo de los individuos en relación con las representaciones sociales; de microgénesis, relacionados con la evocación de las representaciones sociales en la interacción social (Duveen & Lloyd, 2003, pág. 34).

En el caso específico de la educación matemática articulándolo con el campo de la formación inicial de maestros para la educación primaria, la clarificación conceptual de

este proceso puede contribuir a la comprensión genética de la construcción de las representaciones sociales y cómo estas han jugado en diferentes épocas, respondiendo a circunstancias contextuales específicas.

El recuerdo constante o el recurso constante al pasado en la búsqueda de explicaciones y como referente de comprensión del presente ejemplifica la sociogénesis de las representaciones sociales en el contexto actual, generalmente cuando asistimos y participamos de los procesos de formación docente inicial, en los momentos de la práctica docente de los estudiantes con los niños de la educación primaria, es frecuente escuchar expresiones del tipo “pues qué les están enseñando ahora, no saben ni las operaciones básicas”, acompañados de la expresión “en mis tiempos, a tu edad (refiriéndose a los niños de la escuela primaria) ya sabíamos sacar raíz cuadrada”, esto evidencia un proceso sociogenético de construcción y transformación de las representaciones sociales; actualmente en el discurso se escucha con mayor fuerza la alusión al enfoque actual “se aprende matemáticas al resolver problemas”, poco a poco, en los intercambios comunicativos se va configurando un discurso común con la esperanza de su traducción en acciones, es decir la actitud, la acción del resolutor de problemas, del “hacer matemáticas” es, o debe ser, consecuencia de la representación social de las matemáticas con tal enfoque, y es que, *“la sociogénesis se produce en el tiempo”* (Duveen & Lloyd, 2003, pág. 35)

Ahora bien, de la sociogénesis se configura un marco ontogenético de las representaciones sociales, es decir, ¿cómo los individuos se apropian de esas representaciones sociales? ¿Cómo interiorizan ciertas representaciones específicas de las matemáticas y su enseñanza? *Al desarrollar la competencia para participar como actores en esta sociedad pensante, los niños pueden adquirir el acceso a las representaciones sociales de su comunidad.* (Duveen & Lloyd, 2003, pág. 35)

Apreciamos un papel activo en el proceso de reconstrucción de las representaciones sociales, lo que nos permite mayores posibilidades de toma de decisiones; las representaciones sociales preexisten al individuo

“Nuestro conocimiento es una institución como el resto de las instituciones. Nuestras representaciones también son instituciones que compartimos y que existen antes de que accedamos a ellas. Formamos nuevas representaciones a partir de las anteriores o contra ellas (Moscovici & Marková, 2003, pág. 124)
pero es en el intercambio social, en el proceso de negociación de significados que se reconstruyen, interiorizándose y asumiendo una identificación con éstas en un proceso

diacrónico de asunción de la identidad correspondiente; ante el enfrentamiento con representaciones sociales diferentes a las propias se genera un conflicto cognitivo que debe llevar a un proceso de equilibración, en términos piagetianos, y de conformación de una nueva identidad, por ejemplo “ser profesor para la educación primaria” o bien “ser profesor de matemáticas”; en el caso que nos ocupa, la formación inicial de profesores para la educación primaria, las matemáticas se integran en igualdad de circunstancias al resto de las asignaturas (Español, historia, etc.), en este sentido la identidad primera recae sobre la idea de “ser profesor para la educación primaria” más que sobre la idea de “ser profesor de matemáticas”, es decir, pesa mayoritariamente una actitud práctica del “cómo enseñar” el contenido matemático que ya sé porque lo aprendí al cursar diferentes grados académicos (de 1º. De primaria a 3º. De bachillerato) por sobre la construcción de una mirada diferente de las matemáticas, una nueva enculturación matemática.

La influencia que ejercen las representaciones sociales sobre los individuos puede asumir diferentes formas. Algunas imponen una obligación imperativa de adoptar una identidad social en particular... En otros casos, en cambio, la influencia de las representaciones sociales es de tipo contractual y no imperativo: un individuo que se integra en un grupo social establece el contrato de adoptar una determinada identidad social. (Duveen & Lloyd, 2003, pág. 36)

Siguiendo esta idea apreciamos la influencia de las instituciones sobre los individuos, de los colectivos de profesionistas (el colectivo docente dentro de ellos) en la relación con quien se quiera integrar en estos: obligación imperativa o relación contractual.

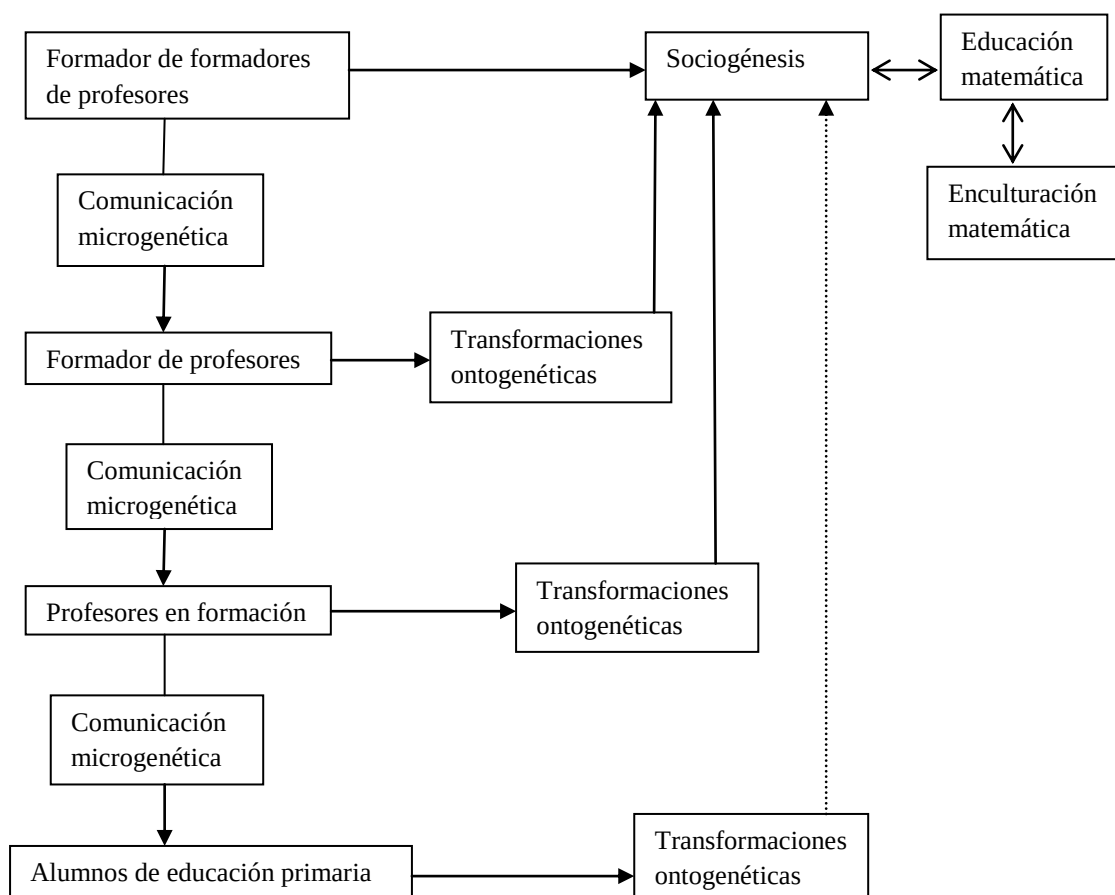
En el caso de la formación de maestros para las matemáticas de la educación primaria las posibles relaciones son duales, por un lado existe un currículo prescrito que define “el deber ser” configurando un perfil de “maestro competente, con una mentalidad didáctica” para la práctica docente en matemáticas para este nivel, lo que configura un escenario de obligación imperativa al exigirse una “identidad profesional y ética” específica de la formación que se recibe, pero por otro lado se puede apreciar, aunque sea implícitamente, una relación contractual: los estudiantes al ingreso a la escuela normal traen ciertas representaciones de la docencia que negocian con las prescripciones curriculares hasta configurar un contrato autoasumido de adoptar una determinada identidad profesional (muchas veces nos hemos quejado de la falta de compromiso de los estudiantes para con su propio proceso formativo) que les confiere pertenencia a ésta.

Finalmente el tercer tipo de transformación o aspecto genético de las representaciones sociales aparece en la interacción social, en el modo en que los individuos construyen su comprensión de las situaciones (una determinada práctica matemática, por ejemplo) y se sitúan a sí mismos y a sus interlocutores como sujetos sociales, *“la microgénesis constituye, por lo tanto, un verdadero motor para las transformaciones genéticas de las representaciones sociales”* (Duveen & Lloyd, 2003, pág. 38)

En los procesos microgenéticos, al parecer se puede establecer, a decir de Duveen y Lloyd (2003), una reciprocidad en las construcciones elaboradas por los participantes (algo parecido a un decir “estamos de acuerdo con”) o bien una negociación explícita e identificable en la interacción lo que obliga a la coordinación de diferentes puntos de vista y la resolución de conflictos, teniendo en ambos casos al lenguaje y la comunicación como el medio fundamental para la puesta en práctica de las interacciones sociales.

Pongamos un ejemplo específico del campo de la Educación matemática con la intención de clarificar el uso de la teoría de las representaciones sociales, sobre todo respecto a estos tres tipos de transformación genética, tenemos el esquema 2 como dispositivo inicial:

Esquema 2. Proceso de transformación genética del conocimiento matemático.



Siguiendo este esquema, en la cultura matemática de la sociedad y de las instituciones podemos ubicar la sociogénesis de la educación matemática; cada uno de los protagonistas en el sistema de formación contribuye a través de procesos de comunicación microgenética a la configuración de las representaciones de sus interlocutores, los formadores de formadores de profesores, al interactuar con los formadores de profesores (tanto en la comunicación cara a cara, como a través de la difusión y comunicación de las ideas por medios escritos), los formadores de profesores con los profesores en formación (sobre todo en escenarios presenciales y en el debate epistemológico y didáctico) y estos últimos con sus alumnos de la educación primaria; pero el proceso no está completo si en cada participante no ocurren transformaciones ontogenéticas (en los términos ya comentados anteriormente), que a la vez paulatinamente van impactando en la sociogénesis y en la configuración de una nueva cultura de hacer y pensar las matemáticas.

Así los investigadores comunican a los formadores de profesores los resultados de sus trabajos y proponen un enfoque para la enseñanza de las matemáticas [el que recuperamos desde esta investigación “hacer matemáticas al resolver problemas” (SEP,

1997)], a la vez que una concepción de las matemáticas, pero no se trata sólo de comunicar, se busca por diversos medios que se produzcan las transformaciones ontogenéticas y los formadores de profesores asuman ese nuevo discurso; los formadores proponen a los estudiantes tareas matemáticas congruentes con el enfoque y pretenden contribuir a la transformación ontogenética de los docentes en formación para que a su vez estos influyan en los alumnos de la educación primaria... por supuesto que hay procesos activos de negociación y resistencia en los diferentes niveles; completa el ciclo la influencia en la sociogénesis de las representaciones matemáticas, aunque generalmente quienes menos influyen son los alumnos de la educación primaria, sobre todo por la muy poca influencia social que tradicionalmente ejercen.

I.1.2. Un concepto, dos posicionamientos (proceso – producto): La representación de las representaciones sociales.

Posterior a su conceptualización original, propuesta por Moscovici (1979) y reafirmada o matizada por diferentes autores, se han ido configurando tres líneas de investigación que han dado lugar a dos posicionamientos básicos para estudiarlas.

- *Escuela clásica: desarrollada por Denise Jodelet en estrecha cercanía con la propuesta de Serge Moscovici. El énfasis está más en el aspecto constituyente que en el aspecto constituido de las representaciones. Metodológicamente recurre, por excelencia, al uso de técnicas cualitativas, en especial las entrevistas en profundidad y el análisis de contenido.*

- *Escuela de Aix-en-Provence: esta escuela es desarrollada desde 1976 por Jean Claude Abric y está centrada en los procesos cognitivos. Se le conoce como el enfoque estructural de las R S. Por excelencia recurre a las técnicas experimentales.*

- *Escuela de Ginebra. El máximo exponente es Willen Doise. Es conocida como la escuela sociológica pues se centra en las condiciones de producción y circulación de las R S. (Araya Umaña, 2002, págs. 47 - 48)*

Las dos primeras líneas de investigación son las que han definido los dos grandes enfoques para estudiarlas: el enfoque procesual y el enfoque estructural, ¿cuáles son las principales características de cada uno de estos enfoques? A continuación vamos a caracterizarlos brevemente.

El enfoque procesual se centra en el aspecto instituyente de las representaciones sociales se distingue por ser una aproximación cualitativa, hermenéutica, centrada en la diversidad y en los aspectos significantes de la actividad representativa; por tener un uso más frecuente de referentes teóricos procedentes de la filosofía, lingüística y la sociología; por un interés focalizado sobre el objeto de estudio en sus vinculaciones sociohistóricas y culturales específicas y por una definición del objeto como instituyente más que instituido.

En cambio, el enfoque estructural se centra en el aspecto instituido, quienes se inscriben en el enfoque estructural parten del supuesto de que toda representación tiene una estructura específica que le es propia, cuya característica central es que está organizada alrededor de un núcleo central y que éste es el que determina su organización y significación.

Y es precisamente la Teoría del Núcleo la que distingue el enfoque estructural del procesual. Por núcleo central se entiende el elemento o conjunto de elementos que dan a la representación su coherencia y su significación global. El núcleo tiene dos funciones: la *generadora*, que crea o transforma la función de los demás elementos de la representación, es decir le da sentido a la significación de esos elementos y la *organizadora* que organiza los elementos de la representación.

Cuenta además con dos dimensiones: normativa y funcional. En la primera se expresan dimensiones socioafectivas, sociales o ideológicas, dentro de las cuales pueden incluirse normas, estereotipos o actitudes. En la funcional se encuentran las situaciones con una finalidad operativa o aquellas que se refieren al funcionamiento del objeto

Partiendo de esta diferenciación, queda claro que el posicionamiento que vamos a asumir en esta investigación se inscribe dentro del enfoque procesual, dado que nos interesa caracterizar cómo es que éstas se forman y se transforman en los intercambios comunicativos y la interacción social; conforme avance el análisis de los datos que obtengamos se estará en posibilidades de caracterizar cómo se estructurarán las representaciones sociales, pero no nos detendremos en precisar el Núcleo central, ni sus funciones, en cambio sí nos interesa precisar con claridad cómo es que se van configurando y cómo éstas influyen en el proceso de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico, en un tema específico: las fracciones.

Con esta aclaración en el siguiente apartado vamos a darle mayor énfasis a los elementos constitutivos de las representaciones sociales desde la postura del enfoque procesual, que en esencia consideramos que es el enfoque original propuesto por Moscovici (1979).

I.1.3. Elementos constitutivos de las representaciones sociales.

Retomando a Duveen y Loyd (2003), derivado de la primera definición de Moscovici, las representaciones sociales se consideran como tipos particulares de estructuras que tienen como función aportar a las colectividades medios compartidos

intersubjetivamente por los individuos para lograr comprensión y comunicación; pero también se puede considerar como proceso, en este sentido la representación social

Se concibe como una entidad configurada por dos funciones complementarias: el anclaje (mediante el cual lo no familiar o remoto es asimilado dentro de las categorías conocidas de la cognición cotidiana) y la objetivación (que hace que las representaciones se proyecten en el mundo, de modo tal que lo abstracto se convierte en concreto). Estas dos funciones son interdependientes, dado que una representación puede lograr un anclaje seguro en la medida en que se encuentre objetivada y viceversa (Duveen & Lloyd, 2003, pág. 30)

Desde la postura de Moscovici (1979, pág. 121), el anclaje designa la inserción de una ciencia en la jerarquía de los valores y entre las operaciones realizadas por la sociedad. En otros términos, a través del proceso de anclaje, la sociedad cambia el objeto social por un instrumento del que puede disponer, y este objeto se coloca en una escala de preferencia en las relaciones sociales existentes. Entonces se podría decir que el anclaje transforma la ciencia en marco de referencia y en red de significados.

La objetivación, por su parte, *“lleva a hacer real un esquema conceptual, a duplicar una imagen con una contrapartida material (Moscovici, 1979, pág. 75)”*, sin embargo, así dicho pareciera que hay una actitud pasiva, es decir, manda la idea de que hay una imagen que se duplica sin intervención de los elementos o el contexto donde se objetiva, lo cual no es totalmente congruente con la teoría de las representaciones sociales, dado que asumimos que al tiempo que se objetiva un esquema conceptual, éste mismo es modificado y reinterpretado por influencia del contexto donde se objetiva y por la misma interacción social y los intercambios comunicativos.

En este proceso de objetivación se presentan dos operaciones esenciales: naturalizar y clasificar:

“Una convierte en real al símbolo, la otra da a la realidad un aspecto simbólico. Una enriquece la gama de seres atribuidos a la persona (y en este sentido se puede decir que las imágenes participan en nuestro desarrollo), la otra separa algunos de estos seres de sus atributos para poder conservarlos en un cuadro general de acuerdo con el sistema de referencia que la sociedad instituye (Moscovici, 1979, pág. 77)”

Considerando el proceso de formación docente en matemáticas para la educación primaria, el anclaje puede ir ocurriendo al momento de que se ponen en juego, en conflicto, la representación social de los estudiantes al objetivarse y someterse a procesos de

comunicación e interacción en los colectivos de compañeros, en este sentido lo no familiar, hasta ese momento (enfoques, currículo, etc., específicos de la didáctica de las matemáticas), puede ser asimilado dentro de sus esquemas cognitivos, reinterpretado e incluso puede llegar a modificar las posturas iniciales; por otro lado, las representaciones sociales, siguiendo el mismo caso de la formación docente inicial en matemáticas para la educación primaria asumen un doble proceso de objetivación, en primer término en los intercambios comunicativos al interior del salón de clase en las instituciones formadoras de docentes, y en segundo término al proyectarse en práctica en la escuela primaria, lo cual genera la necesidad de un nuevo “anclaje”: ahora lo no familiar es precisamente la puesta en práctica de esas representaciones y el trabajo docente específico del contenido en cuestión (las matemáticas).

Moscovici (2003) apuesta a lo que los alemanes llaman “Kulturstreit” (algo así como una contienda de ideas) en el campo de la comunicación, como la forma por la cual las representaciones se crean y se transforman.

Ahora bien, para mantener la funcionalidad del sistema de las representaciones sociales, a decir de Robert & Robinet (1989, pág. 3) son necesarios tres tipos de herramientas:

- * Un sistema de interpretación del cual derivan los significados atribuidos a las informaciones pero igualmente las expectativas y anticipaciones desarrolladas por el sujeto. La decodificación en la representación es a la vez inductiva y deductiva.

- * Un sistema de categorización que tiende a la constitución para el sujeto de una tipología de las personas o de los acontecimientos... y que permite organizar y estructurar el ambiente en un cuadro cognitivo e ideológico coherente y no – contradictorio con el del sujeto.

- * Un lenguaje específico o lenguaje temático. La naturaleza y el tipo de palabras utilizadas, el vocabulario y su extensión son igualmente síntomas de la representación y un medio para consolidarla.

Asimismo, en el proceso de constitución de las representaciones se retoma el sistema de categorización ya enunciado anteriormente, pero además resalta

un nudo central, un conjunto de informaciones, de actitudes y de creencias organizado alrededor de ese nudo central (...) Se pueden distinguir dos

dimensiones fundamentales de ese nudo central: una dimensión funcional, que si es preponderante, privilegia en la representación los elementos directamente percibidos como pertinentes para la eficacia de la acción: y una dimensión normativa, susceptible de privilegiar juicios, estereotipos, opiniones admitidas por el sujeto o el grupo de sujetos en el que se inserta (Robert & Robinet, 1989, pág. 3)

I.1.4. El lenguaje y su importancia en el proceso de construcción de las representaciones sociales.

En el estudio de las representaciones sociales, partiendo de que su formación y transformación sucede en los intercambios comunicativos, el análisis del lenguaje aparece como un elemento medular, en tanto el proceso de anclaje es un proceso de elaboración de este mediador verbal, sin el cual no se podría desarrollar ni mantener; *“conocer socialmente una cosa es hablarla (Moscovici, 1979, pág. 165)”*

La formación de una representación social y su generalización implican una injerencia de las nociones y de los términos de la propia lengua en la teoría y de los conceptos científicos en los intercambios lingüísticos corrientes, es decir, conforme se va construyendo una representación social se opera una recombinación de lenguajes, del científico al común y viceversa que son los que finalmente contribuyen a objetivarla.

En el caso de la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria, la recombinación de lenguajes con los cuales se manifestarán las representaciones sociales tendrá los componentes propios del posicionamiento matemático - didáctico que tanto curricularmente como desde la visión del formador de profesores se asuman, los cuales iremos revisando en los capítulos III y IV de esta tesis.

Este lenguaje específico es lo que Moscovici (1979, pág. 166) denomina “lenguaje temático” entendido como el conjunto de unidades léxicas que se refieren a una representación social o se impregnan de ella. Cuando nombramos algo, lo objetivamos, le imponemos límites, propiedades, establecemos un posicionamiento que distingue una postura de otra y en general configuramos un escenario relativo a una comunidad profesional específica (aunque en sentido amplio es una escenario social, pero en la delimitación de nuestra investigación preferimos referirnos a comunidad profesional, para nombrar al escenario de la formación inicial de profesores).

A decir de Moscovici (1979) hay dos mecanismos que se relacionan con el lenguaje temático: normalización y motivación.

El primero de estos mecanismos es el de la normalización: los conceptos científicos pasan al lenguaje corriente y se emplean sin que se haya establecido una relación precisa con los otros términos del vocabulario.

El segundo mecanismo es un proceso de motivación: El concepto científico pasa al lenguaje corriente sin perder su primera función de designación, pero su estructura puede cambiar, y agregarse significados más comunes a su significado original. (...) Se puede hablar de motivación cuando se produce una recombinación de una lengua por medio de un aporte nuevo, el que puede dar una coloración 'científica' a palabras de uso corriente e imponer una versión 'corriente' a palabras de la terminología científica (Moscovici, 1979, pág. 171)

En tal sentido, cuando nos preguntamos por las representaciones sociales de los estudiantes y del formador de profesores y pretendemos estudiar su incidencia en los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico, estos mecanismos de construcción del lenguaje temático orientarán el proceso de estudio de su configuración.

Finalmente, en torno a la configuración de este lenguaje temático, Moscovici (1979, pág. 234) anticipaba tres “reglas probables”:

- Regla de selección: la representación que se tiende a hacer determina la elección operada entre los sentidos que conlleva la palabra en su circulación.

- Regla de restricción: la palabra significante es reducida y tiende a ser fundida con una determinada significación, mediante una precisa organización del contexto. La construcción de las restricciones que fijan el contenido particular como contenido único, en una forma general, produce una transparencia de la palabra, cuya significación deja de ser general o particular para volverse genérica.

- Regla de jerarquía: la jerarquía de valores del grupo es reflejada por el rango de las significaciones.

La combinación de estas tres reglas llevan a la creación de un lenguaje específico y la elevación de una barrera semántica, pues a medida que se adopta este lenguaje no es posible un intercambio sin choques con los miembros exteriores del grupo, es decir, la adopción de un posicionamiento teórico, respecto a la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas fija límites y a la vez, la construcción y asunción del lenguaje temático propio del posicionamiento elegido, se convierte en una barrera semántica que al mismo tiempo que confiere identidad y pertenencia a los miembros del

grupo, delimita el margen de las interacciones con los integrantes de otros posicionamientos teóricos.

I.2. De la transposición didáctica a la destransposición de saberes matemáticos y didácticos.

El concepto de transposición didáctica ha sido estudiado por diversos investigadores (De Faria Campos, 2006; Fandiño Pinilla, 2009; Bosch & Gascón, 2004; Chamorro, 2003), pero es claro que todos ellos hacen alusión al texto de (Chevallard, 1991) en tanto documento que lo analiza en profundidad. Para fines de esta investigación vamos a caracterizarlo y distinguirlo del concepto de destransposición (Antibi & Brousseau, 2002) que comienza a acuñarse como su complemento, pero que poco se ha usado en las investigaciones para interpretar lo que sucede cuando no se logra una transposición didáctica que consolide los saberes matemáticos de referencia.

Para poder conceptualizar el término destransposición, evidentemente primero tenemos que conceptualizar el término “transposición didáctica”; retomando a (Chevallard, 1991) partimos de una consideración básica *“el concepto de transposición didáctica remite al paso del saber sabio al saber enseñado, y por lo tanto a la distancia eventual, obligatoria que los separa”* (pág. 12); es decir, la transposición didáctica se refiere al conjunto de transformaciones que sufre un saber a efectos de ser enseñado.

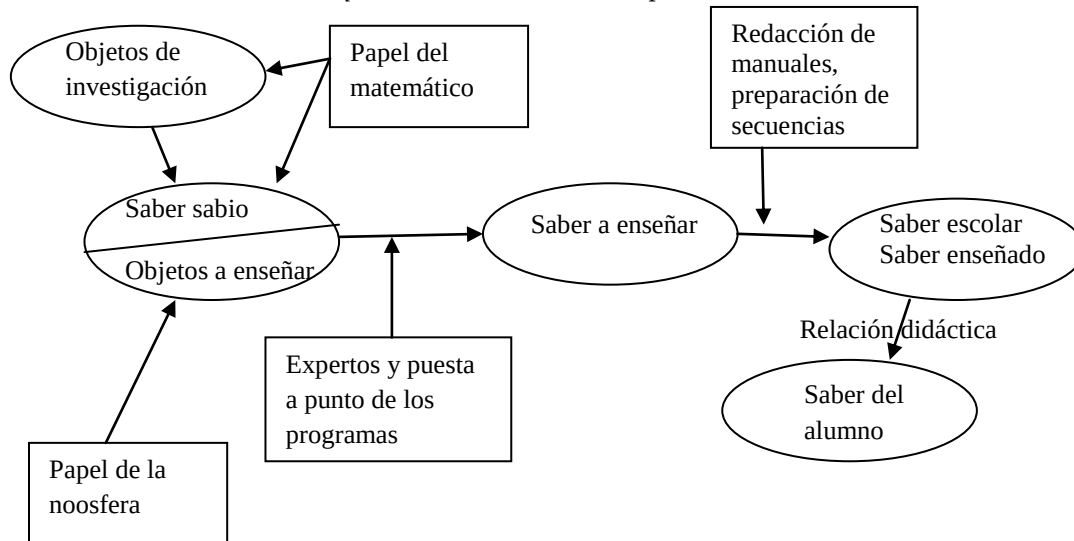
Bajo esta lógica se parte de la consideración de que, a menos que seamos partidarios de una enseñanza por ostensión, los saberes matemáticos no pueden ser enseñados tal y como se presentan en la comunidad científica; en ésta el saber matemático vive como objeto de estudio, para poder considerarse “saber sabio” (entendido como el conjunto de resultados admitidos como verdaderos por la comunidad científica de referencia, en nuestro caso, los matemáticos) el saber se presenta descontextualizado, despersonalizado, destemporalizado, de tal manera que, para llegar a saber enseñado, el maestro tiene que volver a contextualizarlo, personalizarlo, dotarlo de significados tanto para él como para sus estudiantes.

Este paso, del saber sabio al saber enseñado, requiere varios niveles de concreción, varias transformaciones para hacerlo accesible a los estudiantes de acuerdo al nivel escolar en que se quiera enseñar. En este proceso, el saber ocupa distintos espacios y cumple diferentes funciones. Las cuales comentamos brevemente.

- El primer modo del saber corresponde al **Saber Sabio**. Éste se refiere al saber que es generado por el matemático profesional, el investigador en matemática. Este saber es desarrollado en los centros o institutos de investigación, laboratorios, Universidades, etc. No está necesariamente vinculado con la enseñanza de ningún nivel escolar. Es un saber especializado; logrado a partir de procedimientos que se llevaron a cabo en algún lugar, espacio y tiempo. Su reconocimiento y la defensa de los valores son sostenidos por una cultura científica y se encuentran vinculados a otras áreas de interés: política, economía, tecnología, etc. El desarrollo del saber científico y de sus posibles resultados tecnológicos depende principalmente del financiamiento de investigaciones del Estado o bien de otras fuentes del poder económico.
- El saber científico no puede ser enseñado en la forma como se encuentra redactado en los textos técnicos-científicos y esto constituye un obstáculo a considerar en el proceso de aprendizaje. Por lo cual, es transformado en un **Saber a Enseñar**, el cual ocupa lugar en los programas de estudio (currículo). Se trata de un saber ligado a una forma didáctica que sirve para presentar el saber al estudiante. Mientras el saber científico se presenta en textos técnicos, el saber a enseñar se limita casi siempre a libros didácticos, programas y otros materiales de apoyo. En el paso del saber científico al saber enseñado, es donde ocurre la emergencia de una teoría didáctica que oriente el trabajo docente; esta teoría didáctica se concreta en los enfoques propuestos en los diferentes materiales para la enseñanza.
- Finalmente, este Saber a Enseñar, por la mediación de instituciones y personas, se convierte después en el **Saber Enseñado**. Así, el proceso de enseñanza resulta finalmente en el verdadero objeto del *saber enseñado*, esto es, aquél saber registrado en el plano de aula del docente, que no coincide necesariamente con la intención prevista en los objetivos programados al nivel del *saber a enseñar*. Este saber está ubicado en los *Sistemas Didácticos*, los cuales, corresponden propiamente a la relación ternaria: profesor-estudiante-saber.

El siguiente esquema ilustra con claridad las relaciones que se dan en el proceso de transposición didáctica:

Esquema 3. Proceso de transposición didáctica



Fuente: (Chamorro, 2003, pág. 86)

En nuestro sistema de enseñanza, el profesor realiza la transposición didáctica en el pasaje del saber a enseñar al saber enseñado, es inevitable que se dé una reconstrucción escolar de las matemáticas a nivel del aula, prácticamente ningún profesor aplica tal cual la propuesta didáctica que se le plantea en los programas de estudio oficiales; hasta la fecha no es tarea del profesor incidir en el nivel de decisión propia del diseño curricular, ese lugar está reservado a lo que Chevallard (1991) llama la noosfera, es decir, el conjunto de lugares donde los especialistas o instancias de decisión definen cuál es el saber a enseñar (el profesor también puede estar incorporado, pero con otra responsabilidad).

Este juego de relaciones es lo que ocasiona que haya dos tipos de transposición: una externa y otra interna al sistema de enseñanza:

• **Transposición externa:** que es del saber sabio al saber a enseñar. Por lo general, el saber generado por el científico, se desarrolla dentro de un cierto contexto, tiene su historia y lenguaje propio. No obstante, ese lenguaje propio no es apto para ser enseñado en nuestras escuelas, colegios ni tampoco en las universidades. Incluso, quien genera ese saber tiene que cambiar el lenguaje de modo que sea publicable. Debe adaptarlo para que otros lo puedan leer. Además, tiene que haber un proceso de descontextualización, donde se eliminan los procedimientos fallidos, los fracasos, es decir, la historicidad de su construcción o su descubrimiento. Esto es una transposición externa hasta que llega a los programas, para ser programa oficial, hasta que se decide que este saber es importante y se haga llegar a las escuelas y colegios. Se convierte saber a enseñar.

• Después ya es una **transposición interna**, la que acontece cuando el docente toma el documento oficial del ministerio de educación y lo lleva al

aula, planifica sus lecciones y ahí hace otra transformación. (De Faria Campos, 2006, pág. 3)

Estos dos tipos de transposición generan diferentes consecuencias para la enseñanza, por supuesto que cada uno a su nivel, por un lado, la transposición externa define los temas y contenidos que deberán ser enseñados y plantea los límites de la actuación profesional; por otro lado, la transposición interna, al ser finalmente la que impacta de manera más directa sobre los posibles aprendizajes de los estudiantes debe mantenerse en todo momento vigilada, dado que es precisamente en este momento cuando se pueden generar obstáculos que requerirán posteriormente de una nueva transposición didáctica, pero ahora para corregir los efectos de la primera.

El reconocimiento de que:

-Toda noción enseñada es generalmente su forma transpuesta.

- La transposición es inherente al acto mismo de enseñar y el profesor puede realizarla sin estar consciente de sus consecuencias y sin los conocimientos suficientes o pertinentes.

- En el acto mismo de enseñar opera una reconstrucción escolar de las obras matemáticas y de que, *“no se trata de ‘respetar’ la reconstrucción escolar como si fuera inamovible, pero es preciso reconocer los mecanismos que rigen dicha reconstrucción para controlar los efectos que ésta tendrá sobre el desarrollo o aplicación del currículo. Sólo así podremos evitar que el proyecto curricular sufra deformaciones que lo hagan irreconocible en la práctica docente”* (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1998, pág. 144).

- Si no se genera una actitud de vigilancia epistemológica, principalmente en el proceso de formación docente inicial, los errores y/u obstáculos generados como consecuencia de la transposición didáctica previa, tienen altas probabilidades de volver a repetirse en el proceso de enseñanza.

Esto hace necesaria una forma alternativa de transposición, la cual se acerca a lo que Antibi & Brousseau (2000) llaman “dé-tansposition”, es decir, una destransposición de saberes generada por la necesidad de superar las dificultades u obstáculos previos generados en el proceso de enseñanza, dicen ellos *“ciertas nociones transpuestas, presentadas a los alumnos en algún momento de su curso escolar, deberían ser*

destranspuestas más tarde. Ahora bien, a menudo, esta destransposición no se toma en cuenta y no se realiza” (Antibi & Brousseau, 2000, pág. 7).

¿Por qué debería de realizarse? ¿No es suficiente con el hecho mismo de la transposición didáctica? La necesidad de la destransposición tiene su origen precisamente en la vigilancia epistemológica que se debe tener ante la transposición didáctica, ante las consecuencias y problemáticas que se generan como producto de una enseñanza simplificada de los conceptos matemáticos que tiende a presentarlos de manera ostensiva y en su versión final, por ejemplo, cuando a los estudiantes se les hace ver que la multiplicación ‘agrande’ y posteriormente se da cuenta que en el campo de los racionales esto no es así, si no hay un tratamiento adecuado de esta problemática se generan obstáculos difíciles de superar.

Ahora bien, cómo se conceptualiza la destransposición; en primer lugar hemos de decir que la literatura respecto al concepto aún es escasa, al respecto encontramos dos fuentes principales (Antibi & Brousseau, 2000; y, Antibi & Brousseau, 2002), por tal motivo sobre ellas basamos los siguientes argumentos.

Los saberes son los medios culturales de identificación de las concepciones. Si se considera en las instituciones particulares (la comunidad científica, el sector industrial, la escuela, los profesores), los usos, las expresiones y la organización de saberes relativos a una misma noción pueden constituir una “concepción” suficientemente diferente del “concepto” universal unido a esta noción (Antibi & Brousseau, 2000, pág. 20).

Partimos de la consideración de que en torno a un saber matemático pueden coexistir diferentes concepciones (por ejemplo en torno a las fracciones, el cambio de los planes de estudio a lo largo de la historia ha supuesto un cambio de concepciones; Cfr. Apartado I.3.4 de este mismo capítulo) y el juego de estas diferentes concepciones puede dar lugar a tensiones. Por otro lado, en torno al saber didáctico es más evidente la tensión entre diferentes concepciones.

Una concepción es adaptada a la resolución de los ejercicios y a la comprensión de los textos unidos a cierta etapa del currículo, pero en los pasos siguientes y por estas cuestiones se vuelven inapropiadas: una nueva concepción es necesaria. La primera no debe desaparecer y ser remplazada por otra, más bien evolucionar para adaptarse a los aspectos de la noción abordados en las clases superiores (en el caso de las fracciones, tenemos como ejemplos la concepción de la multiplicación, o de la división, e incluso el

concepto de densidad, todos ellos entran en conflicto con su aplicación desde el campo de los naturales).

Pero esta “corrección” puede tomar estatutos epistemológicos y didácticos diferentes, depende de que el profesor reconozca o no que la fuente de cierto número de “errores” de los alumnos están constituidos en una concepción, depende de que esta concepción sea considerada como un error (error del alumno que aprendió mal lo previamente enseñado, error del profesor de la clase anterior o consecuencia de una enseñanza mal hecha o de un comportamiento incorrecto del alumno) o como la consecuencia natural de una enseñanza anterior legítima, como un paso normal en la adquisición de los conocimientos matemáticos, depende de que este reconocimiento se oculte o no a los alumnos.

El estudio de la de-transposición puede ser la parte de la didáctica de las matemáticas que se interesa en las modificaciones de las concepciones de objetos matemáticos anteriormente enseñados, bajo los efectos de los dispositivos didácticos posteriores (supone acercar las concepciones de las finalmente mencionadas). En la ingeniería didáctica, proponemos reservar el término de “de-transposición” para designar una acción didáctica intencional, orientada hacia el tratamiento de las consecuencias de una transposición didáctica reconocida explícitamente como antecedente legítimo y emprendido en el marco de una transposición didáctica nueva presentada como legítima. Es claro que la de-transposición didáctica aparece principalmente como un componente de una transposición didáctica y no como un medio antagonista independiente y externo⁵. (Antibi & Brousseau, 2000, pág. 23)

Asumir esta noción tiene importantes consecuencias para la labor docente, reconocer la necesidad de la modificación de las concepciones anteriores implica reconocer cuáles son éstas y por supuesto su revisión respecto a cómo se presentan, pero sobre todo implica un cambio en el rol profesional del profesor al tomar conciencia de la provisionalidad de los saberes o más adecuadamente, de la provisionalidad de la forma de presentación de los saberes y su forma de funcionamiento en un campo específico (la multiplicación en el campo de los naturales v/s la multiplicación en el campo de los racionales). En otras palabras, para poder destransponer una noción se requiere tener amplio conocimiento de cómo se da la transposición de la misma, es obvio que si no se reconoce el estado deseable, es más difícil reconocer los obstáculos presentes.

⁵ El subrayado no aparece en el original.

La idea de **destransposición** se relaciona con la consideración de que es necesario modificar las ideas que quedaron en la mente del alumno como consecuencia de una enseñanza que trató de simplificar la noción para hacerla más comprensible, pero de igual manera se relaciona con la consideración de que hay que hacer evolucionar ciertas nociones matemáticas en atención a su funcionamiento en diferentes campos de saber, es decir, un conocimiento que se manifestó adecuado para la resolución de un cierto tipo de problemas puede no ser adecuado al aplicarlo en otro campo de saber, en este caso el error proviene no de la ignorancia sino de la aplicación de un conocimiento.

Es agente de una forma de de-transposición donde el objetivo es rectificar, en un momento adecuado del curso escolar, las ideas falsas o demasiado parciales de la presentación transpuesta de una noción. (Antibi & Brousseau, 2000, pág. 37)

La concepción de la noción de destransposición como acción intencional para acercar los saberes enseñados a los saberes científicos, es lo que permite rectificar o corregir los conocimientos que en un determinado momento del proceso didáctico son parciales; es decir, en un determinado momento se introduce un concepto a un cierto nivel “t” de enseñanza, bajo la forma de saberes sencillos, pero la enseñanza en el nivel “t+1” de una nueva forma del mismo concepto requiere una nueva transposición o una nueva “praxeología” (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1998)

La enseñanza en el nivel “t+1” de una nueva forma del mismo concepto hará lo mismo y creará una nueva praxeología. Pero no es un simple agregado. Hay aumentos y también modificaciones y sustituciones. No es suficiente introducir la nueva forma porque la antigua no sea eficaz. Si los saberes nuevos son buenos se colocan por encima de los anteriores –pero aún- es necesaria la génesis proporcionada y utilizada, los llaman nuevos conocimientos pero no lo son, son fáciles de colocar por encima de los antiguos, ya sea porque justamente estos conocimientos tienen una parte importante indescriptible. Y a esos conocimientos son asociadas nuevas situaciones, nuevas formas de actividades que no se yuxtaponen, que no se reconectan sin discontinuidades con las anteriores. Por ejemplo, el simple hecho de modificar los valores de algunas variables cognitivas o didácticas, como el tamaño de los números, el número de incógnitas o el grado de las ecuaciones, puede hacer inconcebibles, inutilizables o ineficaces los métodos anteriores.

El nuevo saber y los conocimientos enseñados referidos en la etapa “t+1” deben ser contruados con (y si es necesario en contra) el saber enseñado en las etapas anteriores y que fueron proyectos y resultados de una transposición didáctica anterior (dentro del curso).

La transposición didáctica resultante está compuesta por la transposición didáctica efectiva y la **de-transposición**.

*Hay que considerar que la **transposición efectiva** es necesaria y que tiene necesariamente efectos secundarios no deseables pero que no pueden ser evitados ni corregidos con anticipación. La de-transposición tiene como objetivo acercar los conocimientos y saberes de los alumnos, que la enseñanza considera como sus*

“objetivos didácticos”: los saberes y su topogénesis de referencia, los conocimientos adquiridos, las prácticas y el conocimiento de situaciones específicas de las instituciones o comunes a la sociedad en la que los alumnos van a entrar.

De esta manera la de-transposición transforma un saber enseñado anteriormente, los conocimientos relacionados y las situaciones asociadas, en otro saber enseñado, más cercano del conocimiento científico o del conocimiento terminal proyectado por la institución escolar. Podemos decir que la de-transposición transforma la praxeología escolar en una más grande y más científica. (Antibi & Brousseau, 2002, pág. 52)

¿Cómo se logran estos procesos de destransposición de saberes? Al respecto Antibi & Brousseau (2000) proponen algunas alternativas

La “superposición” consiste para el maestro en ignorar la antigua concepción y en desarrollar la nueva con nuevas fórmulas, nuevos conceptos y un nuevo entorno de los problemas. Sucede incluso en este caso que los estudiantes y los profesores ignoran las relaciones matemáticas que existen entre las dos concepciones. Esta solución es localmente la menos “costosa” para el profesor y para los alumnos. Pero la concepción anterior puede entonces constituir un obstáculo de la siguiente (Brousseau, 1983), y las limitaciones didácticas iniciales se pueden constituir en bloqueos que provoquen incomprendiones y errores persistentes.

La “yuxtaposición” y la armonización consisten también en asumir, explicar y rectificar la antigua concepción gracias a la nueva.

La “génesis didáctica” consiste en hacer aparecer en los alumnos los límites y las contradicciones de la antigua concepción, en las condiciones donde la pueden rechazar para “construir” ellos mismos la concepción nueva a partir de la antigua. (Antibi & Brousseau, 2000, pág. 22)

Con la aclaración de que sólo las dos últimas toman en cuenta los efectos de una transposición anterior, con la intención de corregirla.

Los docentes en formación deben ser partícipes en procesos de destransposición de saberes matemáticos y didácticos, cuando menos en dos dimensiones:

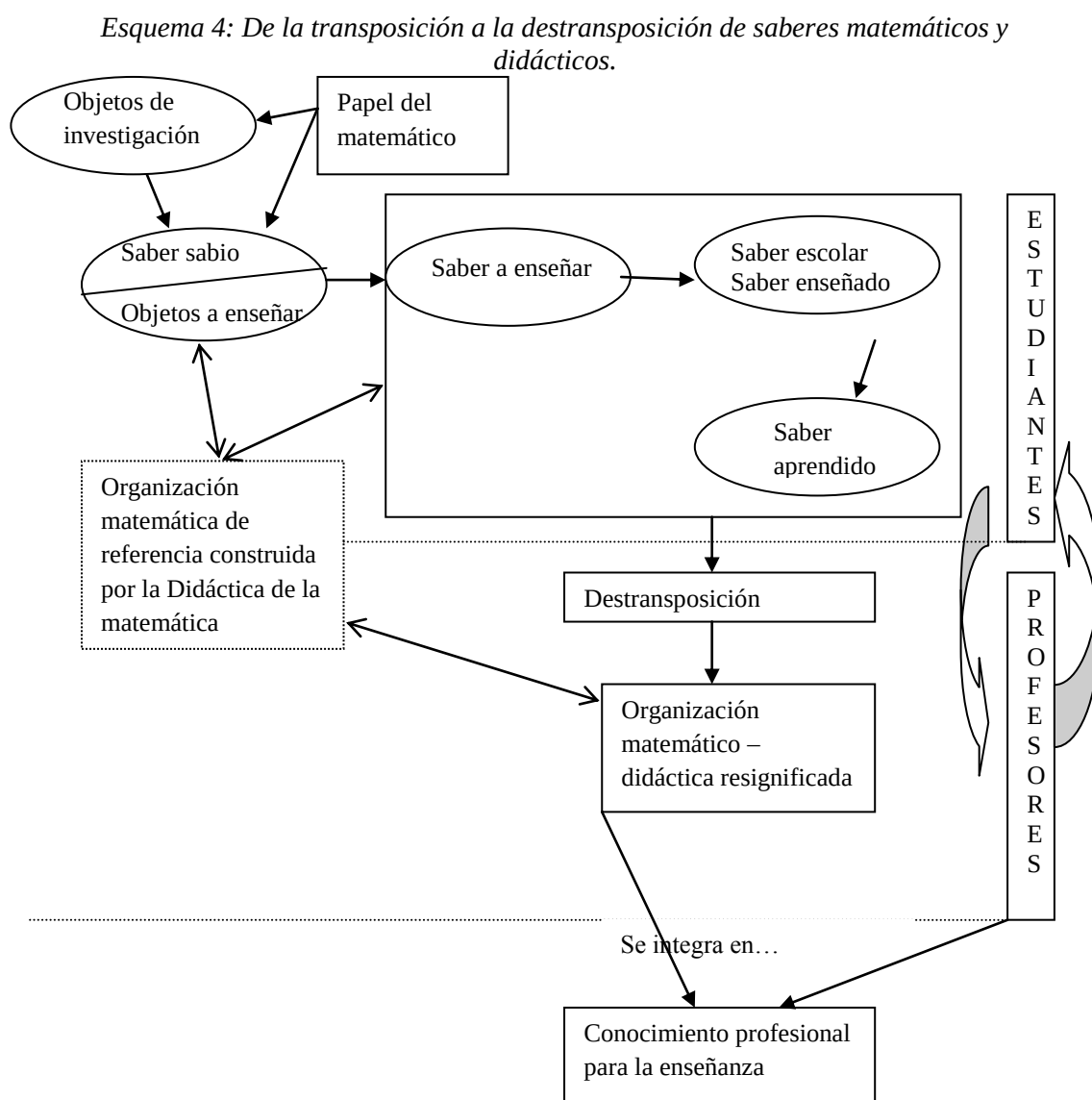
1ª Como protagonistas de su propia destransposición, es decir, la transposición didáctica de los cursos de matemáticas debe simultáneamente incorporar procesos de destransposición para que reconozcan y estén en posibilidades de rectificar sus propios errores u obstáculos epistemológicos y didácticos. Aquí puede utilizarle lo que Antibi & Brousseau (2000) llaman la alternativa de “génesis didáctica”.

Este reconocimiento y necesaria rectificación deberá incidir en los procesos sociogenéticos de transformación de las representaciones sociales sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria, y ello es de suma importancia en

tanto el maestro es el principal agente de cambio desde el escenario concreto de la transposición didáctica del saber enseñado.

2º Al reconocer los núcleos duros del aprendizaje de los saberes matemáticos, es decir, los momentos específicos, identificados por la literatura de investigación, en los cuales el proceso mismo de transposición didáctica ha demostrado que se pueden generar obstáculos en su enseñanza y diseñar intencionalmente situaciones didácticas que contribuyan a la superación de dichas dificultades.

De tal manera que la integración de estos conceptos en la formación docente inicial, nos lleva a pensar en la reformulación del esquema de la transposición didáctica que inicialmente se propuso, para plantear el siguiente:



Evidentemente estas consideraciones requieren una reformulación del rol docente, tanto de los formadores de profesores, como de los docentes en formación, y aquí es precisamente donde median las representaciones sociales de ambos, motivo por el cual las analizamos en articulación, en los capítulos siguientes.

I.3. El saber matemático en juego: las fracciones, aspectos conceptuales y didácticos.

En prácticamente todos los materiales teóricos que uno revisa, respecto al tema de las fracciones, aparece la consideración a que la enseñanza de éstas es una cuestión difícil, es decir, está presente una representación social asociada a la complejidad conceptual del tema.

Hasta aquí no hay novedad, en esencia el aprendizaje de las matemáticas ha estado muy asociado a una cuestión didáctica, a los enfoques metodológicos que se concretan a partir de las concepciones que sobre el saber matemático se tengan, desde una concepción platónica (bajo la cual el enfoque sería una ostensión de saberes) hasta una concepción constructivista del conocimiento (con el centro en la resolución de problemas y la actividad constructiva del sujeto que aprende).

Pero en el caso de los números racionales y como una parte de éstos, las fracciones, adicional a esta problemática está asociada la dificultad epistemológica, es decir, dificultades propias de la naturaleza de este tipo de números y de su comportamiento específico, en comparación con los números naturales; por ejemplo el hecho de que al multiplicarlos el resultado no es necesariamente mayor, o al dividirlos sí se pueda obtener un resultado mayor que cualquiera de los factores, o su densidad, provocan obstáculos adicionales para su enseñanza, que si no son bien trabajadas por los profesores, se generan unas lagunas enormes en el aprendizaje de los alumnos, las cuales llevan incluso al desánimo y a la frustración de los niños ante las dificultades de comprensión.

Ahora bien, ¿qué son las fracciones?, por principio de cuentas, *“la palabra fracción se deriva de la palabra latina fractus, que significa romper”* (Billstein, Libeskind, & Lott, 2008, pág. 298); muy posiblemente este origen etimológico esté en el fondo de la interpretación cotidiana de las fracciones, como quebrados y además de su significado más común, como parte de un todo (con lo cual no decimos que sea su único significado, como veremos en el siguiente apartado).

Como todos los conocimientos matemáticos, las fracciones, como número, aparecen en el momento mismo de que surge una necesidad ante la resolución de un problema; al respecto, más que una definición algebraica de la fracción, me interesa recuperar dos ejemplos que hacen surgir la necesidad de un nuevo número:

1º. Para resolver la ecuación $2x = 1$, como no hay entero que lo haga, se hace necesario un nuevo número. El nuevo número debe estar entre 0 y 1, pues $2 \cdot 0 = 0$ y $2 \cdot 1 = 2$; así $2 \cdot 0 < 2x < 2 \cdot 1$ no hay entero que satisfaga esta relación, por lo tanto, si la multiplicación va a funcionar de manera similar que con los números naturales, entonces $2x = x + x$, de modo que $x + x = 1$. En otras palabras el número creado sumado a sí mismo debe dar 1. “El número inventado para resolver la ecuación es un medio, denotado con $\frac{1}{2}$. Es un elemento del conjunto de números de la forma a/b , donde $b \neq 0$ y a y b son enteros. Más aún, los números de la forma a/b son soluciones de las ecuaciones de la forma $bx = a$. Este conjunto, denotado con Q , es el conjunto de los números racionales y se define de la manera siguiente: $Q = \{a/b \mid a \text{ y } b \text{ son enteros y } b \neq 0\}$ (Billstein, Libeskind, & Lott, 2008, pág. 298)”.

2º Usando como contexto la división ¿qué significa dividir a por b ($a \div b$)? Significa encontrar un número c tal que bxc sea precisamente a . Pero ¿qué pasa, considerando el campo de los número naturales, cuando el dividendo es menor que el divisor? Simple y sencillamente no tiene solución, por ello es que se hace necesario ampliar N para poder realizarlas y es cuando aparecen los números racionales.

Para explicar esta ampliación de los naturales con los racionales, nos valemos de los argumentos de Fandiño Pinilla (2009) y la recuperamos de manera textual:

“Consideremos las parejas $(a; b)$, $(c; d)$ en el conjunto $N \times (N - \{0\})$, donde a, b, c, d son naturales cualesquiera, con las únicas restricciones, $b \neq 0$ y $d \neq 0$; consideremos la siguiente relación (que indicamos con **eq**): $[(a; b) \text{ eq } (c; d)]$ si y sólo si $[axd = cxb]$.

Esta relación pertenece a una categoría privilegiada, las relaciones de equivalencia, en cuanto cumple con ser:

Reflexiva: por cada pareja $(a; b)$ de $N \times (N - \{0\})$, vale la siguiente afirmación: $(a; b) \text{ eq } (a; b)$;

Simétrica: por cada par de parejas $(a; b)$, $(c; d)$ del conjunto $N \times (N - \{0\})$, vale la siguiente afirmación: si $[(a; b) \text{ eq } (c; d)]$ entonces $[(c; d) \text{ eq } (a; b)]$;

Transitiva: por cada terna de parejas $(a; b)$, $(c; d)$, $(e; f)$ del conjunto $N \times (N - \{0\})$, vale la siguiente afirmación: si $\{[(a; b) \text{ eq } (c; d)] \text{ y } [(c; d) \text{ eq } (e; f)]\}$ entonces $\{(a; b) \text{ eq } (e; f)\}$.

Estando así las cosas, el conjunto $N \times (N - \{0\})$ de partida se puede repartir, subdividir, en clase de equivalencia con una operación que se llama "pasaje al cociente" y que se acostumbra indicar así: $[N \times (N - \{0\})] / \text{eq}$.

Dicho conjunto de clases esta hecho más o menos como sigue: $[N \times (N - \{0\})] / \text{eq} = \{(2; 3), (4; 6), (12; 18), (200; 300), \dots\}, \{(1; 2), (3; 6), 9; 18), (10; 20), \dots\}$.

Para ser más explícitos: $[N \times (N - \{0\})] / \text{eq}$ contiene infinitas clases, aquellas indicadas con paréntesis cuadrados, que son los elementos; dentro de cada clase están todas aquellas parejas infinitas de números naturales que, si se hubieran podido dividir entre ellas, habrían dado el mismo resultado ...

De esta manera evitamos escribir y por lo tanto definir la operación de división $\div$ en $N \times (N - \{0\})$, dado que está prohibido, pero de todas maneras identificamos todas las parejas de naturales que están en la misma relación definida arriba.

$[N \times (N - \{0\})] / \text{eq}$ es precisamente el conjunto que queríamos obtener, Q^a . Cada clase de parejas se llama número racional absoluto.

Es así como logramos definir de manera bastante correcta el conjunto Q^a de los números racionales que amplía N .

Dado que, por ejemplo, $(2; 3)$, $(4; 6)$, $(12; 18)$, $(200; 300)$... son todas parejas equivalentes entre ellas, podemos tomar una sola como "representante" de aquella clase, y no estar siempre escribiendo toda la clase; por ejemplo, escojamos $(2; 3)$ que es aquella que tiene los dos elementos menores (hay quien la llama "irreducible"). Dicha pareja puede escribirse así: $(2; 3)$ o bien $2/3$ o bien 0.6 (; (dado que $3 \times 0,6 = 2$).

Por lo tanto, un número racional absoluto es una clase que contiene infinitas parejas de naturales equivalentes entre ellas; pero, para poderlo indicar, siendo tal vez demasiado... dispendioso escribir parejas infinitas, se escoge un representante que puede expresarse con distintas escrituras⁶. (Fandiño Pinilla, 2009, págs. 28 - 29)

Como apreciamos Fandiño Pinilla (2009) define a los racionales como división indicada y en ello coincide con una de las conceptualizaciones que plantea Block (1987) al recuperar la definición algebraica de los números racionales como "cociente de dos enteros", cuya finalidad (de los racionales) es ampliar y enriquecer las propiedades estructurales de los enteros.

En general apreciamos dos interpretaciones fuertes de la fracción, primero la idea de que representan parte de un entero, que es la más común y cotidiana de las interpretaciones, y segundo, la idea de que las fracciones son "números con magnitudes" (Fazio & Siegler, 2012).

⁶ El subrayado no está en el original.

I.3.1. Un concepto con múltiples significados.

Más allá de la definición o conceptualización formal del número racional, la cual recuperamos en el apartado anterior, en la enseñanza, principalmente bajo el enfoque constructivista, se ha hecho alusión a la necesidad de considerar los diferentes significados o subconstructos que le son asociados a las fracciones.

De la lectura del texto de Kieren (1980) nos queda la impresión de que la emergencia de los subconstructos estuvo asociada a las críticas provenientes de la psicología y la investigación que indicaba la complejidad para que los alumnos comprendieran el concepto de fracción y ante la propuesta de que se trasladara su enseñanza hasta la educación secundaria es que se plantea un trabajo con los mecanismos constructivos y los diversos significados, es decir, se parte de un reconocimiento de la dificultad de la enseñanza, sobre todo bajo concepciones platónicas que partían de la definición formal y el trabajo con la estructura matemática de las fracciones, al notarse las problemáticas y la falta de sentido en los aprendizajes, la solución inteligente fue remitirse a un posicionamiento fenomenológico y ello permite la configuración de los diferentes constructos o significados que deben trabajarse para lograr un aprendizaje con sentido, significado y funcionalidad de las fracciones.

¿Cuáles son esos diversos significados que le son asociados? Comenzaremos por remitirnos brevemente a su origen o podríamos decir más bien, al primero que hizo referencia a ellos.

Kieren (1976) fue el primero en proponer que el concepto de fracción se compone de varios subconstructos y que la comprensión del concepto general depende de profundizar en el conocimiento de cada uno de estos diferentes significados de las fracciones, así como de su confluencia. Kieren inicialmente identificó cuatro subconstructos de fracciones: medida, razón, cociente y operador. En su concepción original, la noción de la relación parte-todo era considerado el semillero para el desarrollo de los otros subconstructos (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005, pág. 233)

Como apreciamos en esta cita, en coincidencia con otros investigadores (Block, 1987; Dávila, 2002), se atribuye a T. Kieren haber sido el pionero en poner el centro de la atención en los significados que puede tener la fracción, con la intención de superar una enseñanza caracterizada por el conocimiento estructural del concepto; aunque Charalambous & Pitta-Pantazi (2005) atribuyen a que en la formulación original, Kieren sólo recupera cuatro subconstructos de las fracciones, en el texto de 1980, se aprecia que,

desde 1976 ya se recuperaban siete interpretaciones de los números racionales, a saber las siguientes: fracciones, decimales, pares ordenados (clases de equivalencia), medida, cociente, operador y razón (Kieren, 1980, pág. 133).

En este mismo texto se aprecian con claridad los cinco significados con los cuales se puede enseñar las fracciones: parte – todo, cociente, medida, razón y operadores, los cuales en lo general se siguen conservando como referente básico; ¿en qué consiste cada uno de ellos? Vamos a caracterizarlos brevemente, bajo el entendido de que su comprensión contribuye a generar una representación social generalmente aceptada sobre los componentes de la enseñanza de este conocimiento matemático y a la vez se puede integrar en lo que Ball, Thames, & Phelps (2008) definen como “conocimiento especializado del contenido” o siguiendo a Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz Catalán (2013) lo que podríamos denominar como el conocimiento del tópico.

I.3.1.1. Las fracciones con significado parte – todo.

Esta interpretación se asocia con el fraccionamiento de la unidad, es la interpretación usual de la fracción, en ella, un todo (continuo o discreto) se subdivide en partes equivalentes y de ellas se señalan un número determinado; por ejemplo, las tres cuartas partes de algo significaría dividir el entero en 4 partes equivalentes y tomar 3 de ellas.

Siguiendo a Llinares & Sánchez (1997, pág. 55) el significado de la fracción como parte – todo se presenta *“cuando un ‘todo’ (continuo o discreto) se divide en partes ‘congruentes’ (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de ‘objetos’). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (que puede estar formado por varios ‘todos’). El todo recibe el nombre de unidad.”*

En este sentido, partes equivalente o partes congruentes en que se divide una unidad y de ahí considerar alguna o algunas, es lo que define este subconstructo, sin embargo, para su comprensión es necesario que los niños desarrollen a su vez:

- La comprensión de “unidad divisible” y qué unidad se considera en cada caso concreto.
- La conservación del área, para el caso de las representaciones gráficas.

- La comprensión de la equitatividad y la exhaustividad, es decir que las partes en que se divide el entero sean congruentes y que además no sobre nada.

- La comprensión de que, después de haber realizado el reparto, la integración de las partes vuelven a completar el entero.

Este proceso de comprensión, a pesar de que es la situación de partida más común para la enseñanza de las fracciones, no está exento de dificultades, al respecto Fandiño Pinilla (2009) nos plantea algunas consideraciones, las cuales en el tenor de esta investigación cobran sentido en tanto son situaciones a considerar al plantear o diseñar situaciones didácticas.

La primera consideración tiene que ver con el referente del que se parte, si el todo es continuo o discreto. Si el todo es una unidad continua, hallar los “a b-ésimos”, es decir hallar la fracción a/b , teóricamente puede hacerse siempre (y se dice teóricamente porque en el plano concreto hallar los $698/1000$ de una pizza sería muy difícil sino imposible), sin embargo *“pierde sentido el caso en el que $a > b$, las llamadas fracciones impropias, para las cuales la definición (dividir la unidad en b partes iguales y tomar a partes) pierde su significado intuitivo”* (Fandiño Pinilla, 2009, pág. 103); en este caso se refiere a situaciones en las que se quiere, por ejemplo, dividir una unidad en 4 partes y tomar 5, en casos como estos, hay un cambio en lo que se considera la unidad de referencia y ahí es precisamente donde aparecen los problemas.

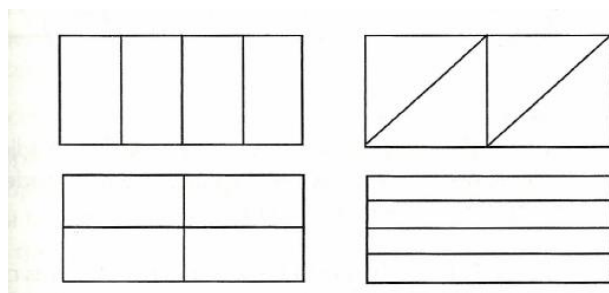
En el caso cuando se considera una unidad discreta, hay que tener cuidado al querer darle sentido concreto a la relación parte todo e incluso se complejiza el sentido de la fracción impropia; siguiendo a Fandiño Pinilla (2009, pág. 103) *“encontrar los a b-ésimos depende de la relación entre 12 y b. Por ejemplo se pueden hallar los $\frac{3}{4}$ de 12 personas (se trata de 9 personas) pero es imposible darle sentido concreto a los $\frac{3}{5}$. Sería necesario entonces distinguir: dada una unidad-todo discreta, existen algunas fracciones que tienen un sentido concreto y otras que no lo tienen⁷”*.

Otra de las consideraciones que nos plantea Fandiño Pinilla (2009) la retomamos en tanto apareció en el diseño de una de las situaciones didácticas analizadas y que

⁷ Incluso en este mismo ejemplo, obtener los $\frac{6}{8}$ de 12 personas, se puede resolver a partir de la consideración de que $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ y los $\frac{3}{4}$ de 12 sí se pueden obtener, pero aquí está presente un argumento que cuando los niños están aprendiendo las fracciones no es sencillo que lo comprendan y lo apliquen: la doble consideración, fracción propia de un conjunto discreto y equivalencia de los repartos.

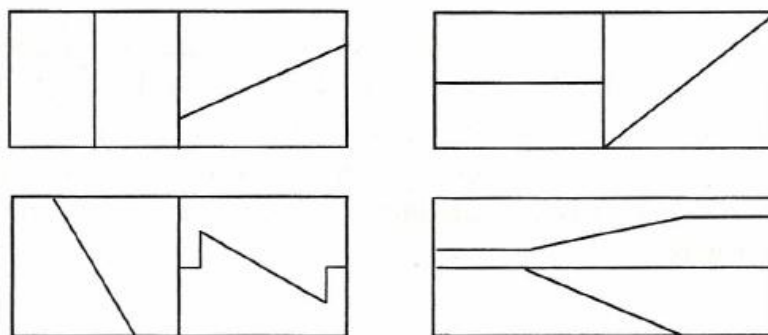
reportamos en el capítulo IV; cuando hablamos de la división de un todo en partes equivalentes o congruentes, es muy común que aparezca la denominación “partes iguales” usada como sinónimo de las anteriores, sin embargo aquí es donde aparecen las dificultades ¿a qué nos referimos con el adjetivo “igual”? En el contexto discreto el adjetivo “igual”, usado en la relación parte todo, nos remite a considerar sólo la cantidad que se reparte y abandonamos el referente concreto (por ejemplo al tomar los $\frac{3}{4}$ de 12 personas, la igualdad sólo se da en cuanto a la cantidad de personas, para nada son tomadas en cuenta las características de las mismas).

En el contexto continuo realista, también el adjetivo “igual” es problemático, por ejemplo si se reparte una pizza, un pastel o una manzana, ¿qué nos garantiza que las partes sean iguales? (la forma de la manzana no es circular, y la piza tiene diferentes ingredientes); en un contexto continuo geométrico (por ejemplo un rectángulo), la referencia a la división en partes iguales se tiende a interpretar como “partes congruentes”⁸, sin embargo ello no resuelve el problema, en tanto la congruencia sólo daría una división en partes que se pueden comparar por superposición:



Pero se genera un obstáculo en la comprensión de la equitatividad del área de una división como la siguiente, que también siguen siendo $\frac{1}{4}$ cada una de ellas:

⁸ Aunque en Llinares & Sánchez (1997, pág. 58) se hace una ampliación a la definición formal de congruencia, dicen “En la caracterización de la relación parte – todo se habla de ‘partes congruentes’ lo que no indica necesariamente partes de la misma forma”; sin embargo esta afirmación entra en contradicción con la definición formal de congruencia “los objetos congruentes tienen el mismo tamaño así como la misma forma” (Billstein, Libeskind, & Lott, 2008, pág. 644). Me parece que la congruencia puede aplicar en magnitudes discretas y en el aprendizaje inicial de las fracciones (usando modelos gráficos continuos), pero posteriormente poner contraejemplos donde no se presente la congruencia pero se mantenga la equitatividad en la conservación del área.



Como apreciamos, las mismas conceptualizaciones para emitir una consigna al solicitar a los alumnos que resuelvan un problema pueden ser fuente de problemas y éstos se agudizan si los profesores no tienen claras estas dificultades, de ahí la tendencia muy generalizada de solicitarles que las partes sean “iguales”, ante una situación de partición de una figura geométrica, por ejemplo. Usar sólo representaciones gráficas en partes congruentes al trabajar situaciones vinculadas con el significado de la fracción como parte - todo se convierte en un obstáculo para la comprensión de otro tipo de repartos.

I.3.1.2. Las fracciones en un contexto de medida.

Este significado está asociado a la idea de conmensuración de la unidad; viene caracterizado por la elección de una unidad arbitraria y sus subdivisiones como producto de que no es posible medir de manera exacta con la unidad elegida. En situaciones de medición se tiene una cantidad medible y una unidad y se quiere determinar cuántas veces cabe la unidad en la cantidad que se va a medir, la fracción aparece en el momento mismo en que no “cabe” la unidad un número exacto de veces, entonces se hace necesaria la interpretación de la medida de la parte faltante.

Para obtener la medida exacta se deben:

- Medir utilizando múltiplos y submúltiplos de la unidad.
- Realizar comparaciones con la unidad.

Aquí es importante mencionar que los contextos medibles deben diversificarse para no generar la imagen propia del uso de modelos longitudinales (por supuesto sin descartarlos), es decir, se pueden utilizar modelos de 1, 2 ó 3 dimensiones. El foco está puesto en la unidad arbitraria y su subdivisión en lugar de las relaciones parte-todo.

A decir de Kieren (1980) el número racional como medida es el escenario natural para introducir la “suma” de fracciones (entendida como la unión de dos vectores – medidas); además usando como unidad el metro se propicia una entrada “natural” de los números decimales (notación decimal).

El uso de las fracciones como expresión de una medida o de una cantidad es bastante común y es quizá el que más se utiliza en la vida cotidiana; expresiones del tipo $\frac{1}{2}$ kg de azúcar, $\frac{1}{2}$ litro de leche, etc. son de uso cotidiano y pueden contribuir a establecer un vínculo directo entre el conocimiento informal de los alumnos y la necesidad de su formalización.

I.3.1.3. Las fracciones como división indicada o cociente.

La fracción como cociente indicado es el resultado de dividir uno o varios objetos entre un número de personas o partes. También se puede definir como el valor numérico de la fracción a/b .

El sub-constructo "número racional como cociente" está estrechamente relacionado con relaciones parte-todo. Se permite la cuantificación del resultado de dividir una cantidad en un determinado número de partes y se relaciona en última instancia con el álgebra de ecuaciones lineales. Mientras que dividir una unidad en cuatro partes y la designación de tres ($3/4$) conduce a la misma cantidad que dividir 3 unidades en 4 partes ($3/4$), es evidente que se trata de problemas diferentes para el alumno. (Kieren, 1980, pág. 135)

Para distinguirlo de la interpretación parte todo, por ejemplo, en esta interpretación la fracción $1/8$ (o que cada quien recibió $1/8$ de algo) no significa necesariamente que sean 8 personas entre quienes se repartió un entero, podrían ser 24 personas que se reparten 3 pizzas. Regresando al ejemplo de Kieren, en la cita anterior, $\frac{3}{4}$ en la interpretación parte – todo-, significa una unidad partida en cuatro, de la que se toman 3; en cambio $\frac{3}{4}$ en su interpretación cociente, significa 3 unidades divididas entre 4, o bien el número que multiplicado por 4 da 3.

En esta interpretación se considera que las fracciones tienen un doble aspecto:

- a) *“Ver a la fracción $3/5$ como una división indicada, estableciéndose la equivalencia entre $3/5$ y 0.6 en una acción de reparto, y*
- b) *Considerar las fracciones (números racionales) como los elementos de una estructura algebraica; es decir, como los elementos de un conjunto numérico en el que se ha definido una relación de equivalencia, y en el conjunto cociente resultante unas operaciones –suma y multiplicación– que cumplen ciertas propiedades de tal forma que dotan a dicho conjunto de una estructura algebraica de cuerpo conmutativo” (Llinares & Sánchez, 1997, pág. 63)*

La primera de las interpretaciones a que hace alusión Llinares & Sánchez (1997) es la más común cuando se quieren introducir en la escuela primaria, sobre todo por la complejidad que encierra la comprensión de la estructura algebraica propia de la segunda interpretación: el número que multiplicado por b da como resultado a , esto es $b \cdot x = a$

I.3.1.4. Las fracciones como operadores multiplicativos.

En esta interpretación, la fracción cumple el papel de transformador multiplicativo, en un doble sentido, como amplificación o como reducción de los valores del conjunto.

En la formulación original de Kieren (1980, pág. 136), este subconstructo focaliza su atención en los racionales como elementos del álgebra de funciones, además de que la composición de operadores proporciona una base muy simple para la multiplicación de números racionales.

En tal sentido, aplicar un operador multiplicativo fraccionario a una cantidad equivale a dividir y multiplicar sucesivamente esa cantidad, por ejemplo, la multiplicación $\frac{3}{4} \times 12$ kilómetros, interpretada como $\frac{3}{4}$ de 12 kilómetros, se puede calcular dividiendo 12 entre cuatro y multiplicando lo que resulte por tres: $(12 \div 4) \times 3 = 9$ kilómetros.

Esta interpretación de la fracción es la que genera mayores problemas en la enseñanza, dos de ellos son los siguientes: 1º La multiplicación no puede interpretarse como una suma repetida, como se hace con los números enteros; y 2º La multiplicación ya no necesariamente “agrandar”; como vemos, está en juego una reconceptualización de la multiplicación, de los enteros a los racionales, y ello no puede menos que generar obstáculos epistemológicos que si no son atendidos didácticamente en su tiempo (cuando se estudia el tema), se convierten en obstáculos a superar en el proceso de formación docente inicial y ello da lugar a la necesaria destransposición de saberes.

Al respecto, Freudenthal (1994) se extiende en la caracterización del pasaje de las fracciones en el lenguaje natural, a su uso como medidas y como operadores; recupero esta extensa cita, en atención a la claridad que nos aporta

*Un extraño fenómeno —creo que en todas las lenguas— es vez o veces tras las fracciones. En la sección 5.3.2 ya nos lo encontramos...veces de...
“Veces” pertenece a la multiplicación. Con un número natural m aparece en hacer, sufrir, experimentar, esperar, m veces algo, por ejemplo
coger m veces n canicas ($m \cdot n$ canicas)
llevar m veces una varilla de medida (m veces de largo)
girar m veces la llave en la cerradura,
 m veces alrededor del reloj, la pista de carreras, la Tierra,*

rodar m veces una rueda,
 oscilar m veces adelante y atrás.
 En un momento determinado se permite que m sea una fracción. Esta extensión lingüística se entiende más fácilmente si m es un número mixto:
 2 veces de largo lleva a $2\frac{1}{2}$ veces de largo.
 $\frac{1}{3}$ veces de largo parece innatural, pero el número entero en $2\frac{1}{3}$ veces de largo sugiere que esto significa 2 veces de largo y $\frac{1}{3}$.
 En procesos cíclicos o periódicos de otro tipo $\frac{1}{2}$ vez, $\frac{1}{3}$ vez, $\frac{2}{3}$ veces pueden ser auto-explicativos sin números enteros. En $\frac{1}{2}$ vez, rodar $2\frac{1}{2}$ veces la llave en la cerradura, $\frac{1}{3}$ vez, $2\frac{1}{3}$ veces alrededor del reloj, pista de carreras, Tierra, $\frac{1}{2}$ vez, oscilar $2\frac{1}{2}$ veces adelante y atrás, $\frac{1}{3}$ vez, rodar $2\frac{1}{3}$ veces una rueda, la fracción sugiere una acción cuya última fase ha sido realizada sólo parcialmente.
 Un camino es desde 2 veces vía $2\frac{1}{3}$ veces a $\frac{1}{3}$ vez; el otro es el proceso cíclico o periódico: 2 veces alrededor del reloj; $\frac{1}{2}$ vez alrededor del reloj (Freudenthal, 1994, págs. 10 - 11).

Como apreciamos, en su mismo planteamiento va una propuesta didáctica para la introducción de este significado de la fracción: de la comprensión de “2 veces de” (con números enteros), a un entero y fracción ($2\frac{1}{3}$ veces), para llegar finalmente a “ $\frac{1}{3}$ veces”.

En coincidencia con Kieren (1980) cuando nos dice que este subconstructo relaciona los racionales con el álgebra de funciones,

“la fracción como operador, entonces, actúa sobre los números puros más que sobre los conjuntos o sobre los objetos; es de hecho, una nueva operación que combina división y multiplicación. A veces se presentan situaciones complicadas: ‘Hallar los $\frac{4}{5}$ de un conjunto de 22 peras’ presenta un problema de intuición, dado que 22 no es divisible por 5. Una vez que se pierde el aspecto intuitivo, nada evita, entonces, que se opere intercambiando entre ellas las dos operaciones (4×22) $\div 5$ (Fandiño Pinilla, 2009, pág. 113)”

Con esta aportación de Fandiño Pinilla (2009) podemos ver cómo se extiende la utilización de la fracción en su significado de operador multiplicativo, de los casos en que el conjunto unidad puede ser dividido exactamente entre el denominador de la fracción – operador (por ejemplo los $\frac{3}{4}$ de 12 kilómetros: el 12 es divisible exactamente entre el cuatro), con lo cual se aplica la relación “ $(12 \div 4) \times 3$ ” y los casos en que no es divisible exactamente y se opera a nivel numérico, permitiéndose la conmutatividad de las operaciones, como en el ejemplo “hallar los $\frac{4}{5}$ de 22 peras”, 22 no es divisible exactamente entre 5, e incluso al calcular, como nos lo propone Fandiño Pinilla (2009), $4 \times 22 = 88$, tampoco es divisible entre 5, sin embargo, el resultado sí podemos enunciarlo en fracción, haciendo una transformación entre diferentes sistemas de representación, de los

números decimales a fracciones: $(4 \times 22) \div 5 = 17.6$ y esto sería, en el contexto del problema 17 $\frac{3}{5}$ de pera. Triple dificultad: elegir la forma más adecuada para calcular, interpretar el resultado y, cambiar de sistema de representación para enunciarlo en fracción.

Además, en Llinares & Sánchez (1997, pág. 73) también se plantea, que cuando se trabaja con este significado, se puede establecer de dos formas la equivalencia de fracciones:

- a) Equivalencia de operadores: operadores fraccionarios diferentes, que al actuar sobre el mismo estado-inicial dan el mismo estado final.

Estado	operador	Estado
12	$\times(2/3)$	8
12	$\times(4/6)$	8
12	$\times(8/12)$	8

- b) Equivalencia de estados: Un mismo operador que al actuar sobre estados unidad diferentes produce la misma transformación, lo que nos introduce de forma natural a la noción de proporción.

Estado	operador	Estado
12	$\times(2/3)$	8
15	$\times(2/3)$	10
24	$\times(2/3)$	16

I.3.1.5. Las fracciones como razón.

Es una comparación entre dos cantidades o conjuntos de unidades (de igual o diferente magnitud). Las razones pueden ser comparaciones parte-parte en un conjunto (magnitud discreta) o comparaciones parte todo (magnitud continua y discreta). La generalidad de la interpretación de la fracción como razón consiste en que nos permite comparar cantidades de magnitudes diferentes, mientras que en la interpretación parte – todo en un contexto de medida sólo nos permite comparar cantidades del mismo tipo (Llinares, 2003).

Algunos autores conciben a este significado como el precursor de la noción de fracción en su papel de medida y operador multiplicativo (Block, 2001; Block, 2003; y

Block, 2008), incluso “*las fracciones se construyen a partir de las razones bajo el significado de cocientes*” (Block, 2008, pág. 506) o bien a las fracciones como la expresión de las razones (Ramírez & Block, 2009), y es que el concepto de razón está en la intersección de dos temas muy importantes de la escuela primaria: la proporcionalidad y los números racionales, desde una perspectiva didáctica.

El significado de la razón aparece cuando se habla de la igualdad (y la desigualdad) de razones, sin conocer su tamaño, cuando se dice, con sentido, "a es a b como c es a d", sin anticipar que "a es a b" puede reducirse a un número o a un valor de magnitud a/b (...) La razón es una relación de equivalencia en el conjunto de parejas ordenadas (o de valores de magnitud)... Los cocientes y las fracciones constituyen formas de reducir esta complejidad, de bajar su estatuto lógico, a costa de la lucidez [Freudenthal, 1983, citado en (Block, 2008, pág. 497)]

A decir de Block (1987), la noción de razón no involucra explícitamente a la noción de racional, se limita a establecer relaciones entre número enteros; el problema específico que engendra a los números racionales es el siguiente:

“si, por ejemplo, 1 es a 2 como 2 es a 4, como 3 es a 6, etc., ¿qué número es a 1? Este número no es un natural y, puesto que forma una razón con 1 igual a la razón de 1 con 2, podría ser expresado así: (1,2) o bien, así, $\frac{1}{2}$. Entonces, $\frac{1}{2}$ es el número cuya razón con 1 es la misma que la de 1 con 2. El problema consiste en principio en crear nuevos números cuya razón con 1 es la misma que la razón de un entero con otro (Block, 1987, pág. 28)”

I.3.1.6. Otros contextos y significados asociados.

Aunque de manera prioritaria, para fines de esta investigación, nos interesan los cinco subconstructos que hemos caracterizado brevemente en los apartados anteriores, no podemos dejar de mencionar que algunos de ellos están asociados con otros conocimientos que, si bien pueden estudiarse por separado como un contenido o tema específico, utilizan a la fracción como herramienta para expresarse.

Por ejemplo, Llinares & Sánchez (1997) incorporan dentro de la interpretación de la fracción como razón, a la probabilidad, en tanto en ésta se establece una “comparación” parte – todo entre el conjunto de casos favorables y el conjunto de casos posibles, y de igual manera a los porcentajes, dado que por regla general los porcentajes tienen asignado un aspecto de “operador”, es decir, al interpretar “el 60 % de 35” se concibe “actuando la fracción 60/100 sobre 35” (hacer 100 partes de 35 y tomar 60).

Por su parte Fandiño Pinilla (2009), adicional a los cinco subconstructos, también coincide con Llinares & Sánchez (1997) al incorporar a las probabilidades y a los

porcentajes, e incluso el contexto de la fracción como punto en una recta, con lo cual esta interpretación se acerca más al concepto de número racional que a la fracción en su acepción original. Además enfatiza la idea respecto a la fracción como número racional que *“no es otra cosa que la clase de equivalencia, por ejemplo el número racional 0.5 es la clase de equivalencia de $[(1;2), (2;4), (4;8) \dots, (3;6), (6;12) \dots]$ formada por todos y sólo aquellas infinitas parejas ordenadas de números $(a;b)$, tales que: $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}-\{0\}$ y entre los cuales aparece el par $(1,2)$ o bien si se prefiere, $b = 2xa$ (Fandiño Pinilla, 2009, pág. 115)”*.

Mención especial merece el caso de las fracciones decimales, como números con denominador la unidad seguida de ceros (10, 100, 1000...) o que se puede obtener su equivalencia a éstas, por ejemplo $\frac{3}{4} = 75/100$, las cuales poco a poco se van orientando a la comprensión de los números decimales y su correspondiente expresión decimal.

- 1.- Los números decimales son aquellos que pueden escribirse en forma de fracciones decimales.
- 2.- Las fracciones decimales son las que pueden expresarse con un numerador entero y un denominador que es una potencia de diez, por ejemplo $\frac{3}{10}$ y $\frac{1}{1000}$ son fracciones decimales; también son fracciones decimales $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$, ya que se pueden encontrar fracciones equivalentes a un medio y a tres quintos cuyos denominadores sean alguna potencia de 10.
- 3.- Este tipo de fracciones tienen la particularidad de que pueden representarse de otra manera: utilizando escrituras que llevan punto decimal, dando lugar a las expresiones decimales finitas y que en la escuela simplemente reciben el nombre de decimales. A las fracciones $\frac{3}{10}$ y $\frac{1}{1000}$ les corresponden, respectivamente, las siguientes escrituras decimales: 0.3 y 0.001.
- 4.- Las fracciones que no son decimales (por ejemplo $\frac{1}{3}$) no pueden representarse mediante una expresión decimal finita, este tipo de fracciones da lugar a las expresiones decimales periódicas infinitas ($\frac{1}{3} = 0.3333\dots$).
- 5.- Ambas expresiones, decimales finitas y decimales periódicas, forman el conjunto de los números racionales (números que pueden escribirse como fracciones), que son los que se estudian en la Educación Primaria y Secundaria. (Ávila & García Peña, 2008, pág. 33)

Una propiedad en común, tanto de las fracciones comunes como de los números decimales es la “densidad”, en este apartado vamos a caracterizarla brevemente en tanto nos sirve como referente para comprender lo acontecido en las clases del formador de profesores, para ello nos valemos del texto de Ávila & García Peña (2008) quienes afirman *“Entre dos decimales siempre es posible incorporar otro decimal, esto se conoce como la propiedad de densidad de los decimales (válida para todos los racionales)”* (pág. 51). Como consecuencia de esta propiedad, debemos también aclarar que en los números racionales no es posible hablar de antecesor y sucesor porque no podemos asegurar que un

número siga o anteceda a otro. Esta condición es fuente de muchas confusiones sobre todo en lo referente al orden y ubicación de las fracciones en la recta numérica.

I.3.2. Modelos teóricos ideales: integrando un “paquete de enseñanza”.

De igual manera a la caracterización y clarificación de los subconstructos, que en esencia prácticamente todos los investigadores recuperan de Kieren (1980), ha habido una preocupación siempre presente por su enseñanza, para ello, un paso importante es el establecimiento de relaciones o vinculaciones entre los diferentes subconstructos; obviamente las diferentes relaciones no integran un “paquete de enseñanza” en los términos que Ma (2010) propone, pero contribuyen a su configuración, en el entendido de que las aportaciones de diferentes investigadores han coincidido en establecer un orden creciente de dificultad en la comprensión de los diferentes subconstructos, desde la relación parte – todo, hasta la comprensión del número racional y sus propiedades.

En este apartado vamos a recuperar algunas de las propuestas esquemáticas de relaciones entre los diferentes subconstructos con la idea de que nos sirvan como referente para analizar, en un apartado siguiente, la lógica de organización curricular de los diferentes libros de texto oficiales (a partir de 1960) que se han utilizado en México, para la enseñanza de las fracciones.

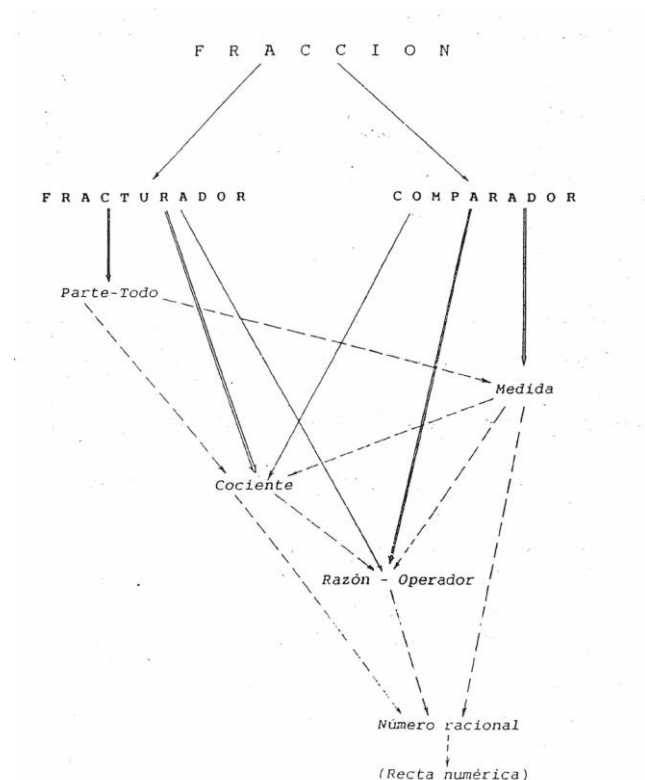
I.3.2.1. El acercamiento propuesto por Mochón (1990).

En su propuesta de relaciones entre los diferentes subconstructos podemos ver una influencia notable de la fenomenología de Freudenthal (1994), en tanto parte de las dos concepciones generales de la fracción que él plantea: como fracturador y como comparador.

En el primer caso, la *“fracción como fracturador puede ser descrita mediante un concepto de equivalencia bastante restringido: no requiere más que dividir algo en n partes iguales. Pero en la realidad de la didáctica se necesita una equivalencia de más amplio alcance, así como una disponibilidad sin restricciones de objetos en cada clase de equivalencia”* (Freudenthal, 1994, pág. 23), esto es precisamente lo que da lugar a la necesidad de la fracción como comparador y, dice Freudenthal *“uno puede darse cuenta completamente de que comparar con respecto al número o valor de una magnitud precede a la comparación con los propios números o valores de magnitudes, y que lo primero queda, o debería quedar, inmanentemente presente en lo segundo, siempre que las fracciones hayan de ser algo más que un formalismo”* (Freudenthal, 1994, pág. 21)

Con estas precisiones, el siguiente esquema ilustra las vinculaciones entre los diferentes subconstructos, de acuerdo a Mochón (1990, pág. 26)

Esquema 5. Articulación entre los diferentes significados de la fracción.



En éste, las rectas continuas designan la categoría que les corresponde a cada uno de los subconstructos de acuerdo a la división como fracturador, comparador o ambas (las dobles rayas sugieren una vinculación más fuerte, mientras que una sola raya sugiere una vinculación más débil). Nótese que el diagrama está cargado fuertemente hacia la parte derecha, indicando que la fracción aparece más frecuentemente como comparador. Las rectas discontinuas señalan la dependencia de unos subconstructos con otros. El subconstructo de medida se apoya en las ideas de parte- todo. De igual manera, el subconstructo cociente necesita de los conceptos básicos de parte-todo y medida para su desarrollo. Los subconstructos de operador y razón que parecen ser los más complejos, utilizan las nociones de las interpretaciones de medida y cociente. Por último, el nivel más abstracto, la fracción como número racional y la recta numérica como una de sus representaciones, se basa, en todas las concepciones de la fracción ya discutidas.

Posterior a la presentación de este modelo de organización de los subconstructos, él mismo recupera los elementos o sugerencias para su enseñanza, desde Streefland (1984) y

sólo las presenta, sin ningún comentario; aquí las recuperamos para, posteriormente, hacer una comparación con las que plantea Kieren (1993) citado en Llinares (2003):

- Construir las fracciones de situaciones reales.
- Construir modelos visuales como herramientas.
- Construir abstracciones y generalizaciones del conocimiento informal del niño y usando sus propias estrategias.
- Construir el lenguaje de las fracciones.
- Construir las reglas y los procedimientos para las operaciones.

Finalmente Mochón (1990) sugiere que la presentación en clase debería seguir un proceso en espiral de crecimiento ascendente, más que un proceso lineal, desarrollando de manera simultánea los mecanismos constructivos con los subconstructos.

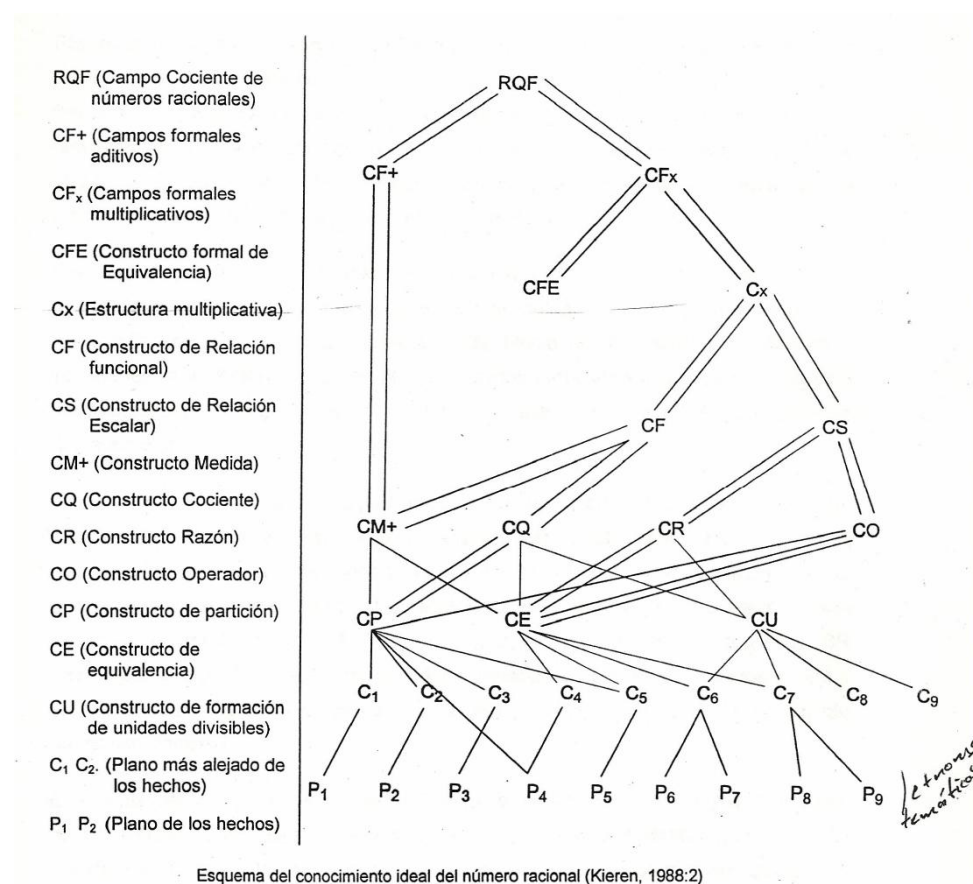
I.3.2.2. La recuperación del “esquema del conocimiento ideal del número racional” de Kieren (1988), desde el texto de Dávila (2002).

En su texto, Dávila (2002, pág. 46) recupera el siguiente esquema (esquema 6), citando a Kieren (1988); como apreciamos, coincide con el esquema del apartado anterior, en el punto de llegada: la comprensión formal del número racional.

Sin embargo, en éste se incorporan algunos otros elementos que no habíamos comentado anteriormente. Kieren identifica dos tipos de herramientas o mecanismos mentales que permiten construir el concepto de número racional: los mecanismos constructivos y los mecanismos de desarrollo. En cuanto a los primeros, señala a la partición y a la equivalencia; los segundos se refieren al proceso intelectual del niño, entre éstos, los mecanismos de conservación del número y de cantidades, los mecanismos de reversibilidad e identidad y la conservación del área.

Además señala como origen de la construcción del concepto de fracción al plano de los hechos (señalado en el esquema con P1, P2...), es decir, su desarrollo se inicia con las acciones concretas que realizan los niños sobre los objetos para repartirlos de alguna manera.

Esquema 6. Conocimiento ideal del número racional, Kieren (1988)



Plantea que con la experiencia, los niños logran resolver cierto tipo de situaciones en un *plano más alejado de los hechos* (señalado en el esquema con $C_1, C_2 \dots$), por ejemplo, frente a una situación de partición que ya dominan, son capaces de indicar cuál es el resultado de un reparto sin necesidad de realizarlo concretamente, pero apoyándose quizás en la evocación mental de sus acciones para partir y repartir. Este tipo de procedimientos les ha llamado *procedimientos intuitivos*.

Kieren, a decir de Dávila, (2002, pág. 47) destaca que muchas veces los niños, frente a cierto tipo de situaciones han avanzado, del plano de los hechos al plano más alejado de los hechos, sin embargo esto no significa que puedan mantenerse en este último plano cuando se enfrentan a situaciones más complejas. El uso recursivo de los procedimientos *etnomatemáticos* e *intuitivos* depende del grado de dificultad que represente para los niños las situaciones que enfrentan.

Los mecanismos constructivos de partición (CP), de equivalencia (CE) y de relación parte todo (CU) son la base de la estructura del esquema que permite introducir a los niños a la noción de fracción, desarrollar conocimientos puntuales, construir un

lenguaje fraccionario (técnico simbólico) para expresar los resultados relacionados con cualquiera de sus diferentes interpretaciones (CM {constructo medida}, CQ {constructo cociente}, CR {constructo razón}, CO {constructo operador}), iniciando así un proceso que los llevará a establecer nuevas relaciones entre las estructuras y operaciones que hacen al concepto del número racional.

En este esquema, puede observarse también la consideración, en las etapas superiores, de los conceptos de 'campo conceptual aditivo (CF+) y multiplicativo (CF x)' de G. Vergnaud (1996). Estos conceptos permiten destacar la integración de las fracciones en una organización conceptual más amplia.

Para completar esta descripción, y recuperado desde el texto de Llinares (2003, pág. 200), Kieren (1993) identifica cuatro formas de conocer los contenidos matemáticos relativos a los números racionales:

- Conocimiento etnomatemático, que es el que poseen los alumnos, derivado de las situaciones en las que normalmente viven.
- Conocimiento intuitivo, que supone el uso de los instrumentos cognitivos (mecanismos constructivos), representaciones y el uso informal del lenguaje.
- Conocimiento técnico – simbólico es el que resulta de trabajar con expresiones simbólicas los números racionales.
- Conocimiento axiomático – deductivo, corresponde al conocimiento de la estructura matemática.

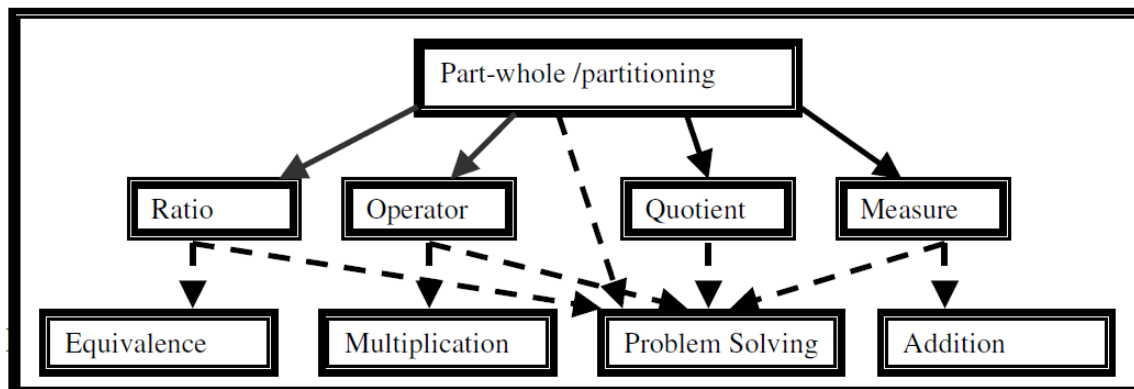
Como apreciamos, estas cuatro formas de conocer los números racionales configuran un proceso ascendente que coincide con su planteamiento de los 80's, es decir, partir del conocimiento etnomatemático, hasta llegar a la formalización axiomático – deductiva, en los niveles superiores de la escolarización, lo cual no se logra en la educación primaria.

I.3.2.3. Una revisión del modelo de Behr, Lesh, Post y Silver (1983): la propuesta de Charalambous & Pitta-Pantazi (2005).

Los autores parten de la consideración de que Behr, Lesh, Post y Silver (1983), citado en Charalambous & Pitta-Pantazi (2005), a partir de desarrollar las ideas de Kieren (1980) propusieron un modelo teórico que une las diferentes interpretaciones de fracciones

a sus operaciones básicas y la resolución de problemas. Estas relaciones han sido conceptualizadas para la enseñanza a través del siguiente esquema:

Esquema 7. Modelo de Behr, Lesh, Post y Silver (1983).



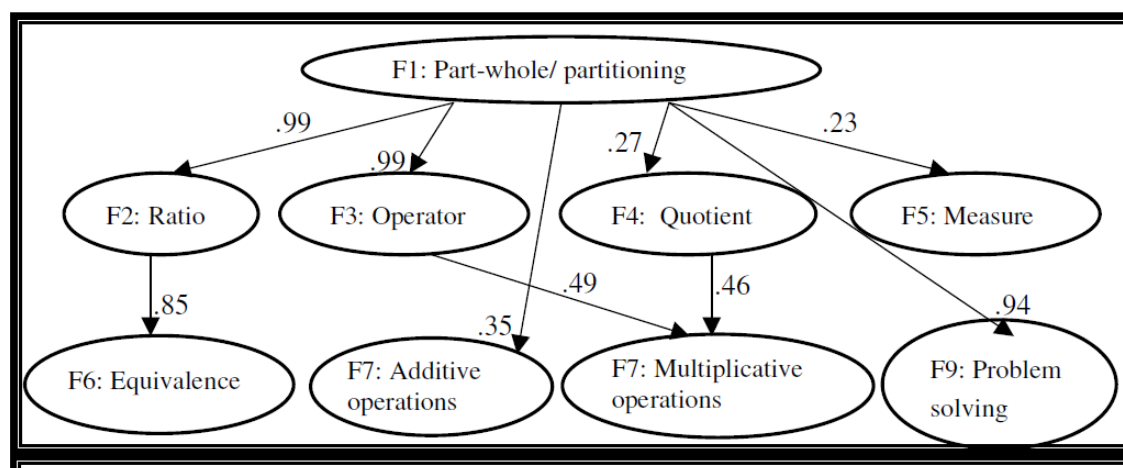
(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005, pág. 234)

Las flechas continuas de este modelo propuesto sugieren relaciones que se establecen entre los constructos, fracciones y operaciones, mientras que las flechas discontinuas representan relaciones hipotéticas.

Los autores realizan un estudio para determinar empíricamente los cinco supuestos teóricos del modelo aludido anteriormente e investigar la medida en que las asociaciones adicionales entre los conceptos y las operaciones incluidas en el modelo son empíricamente apoyadas.

Después de la aplicación de un test a 646 alumnos de 5º y 6º grados, ellos proponen el siguiente esquema:

Esquema 8. Reformulación del modelo de Behr, Lesh, Post y Silver (1983).



(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005, pág. 237)

En primer lugar encontraron una asociación entre la ubicación de fracciones en la recta numérica y la búsqueda de fracciones equivalentes.

En segundo lugar, los datos proporcionan apoyo a la hipótesis de que la interpretación parte-todo de las fracciones y el proceso de partición constituye la base para desarrollar una comprensión de las cuatro interpretaciones de las fracciones subordinadas. Específicamente, el factor 1 explica aproximadamente el 98% de la variación de los factores relacionados con los significados de las fracciones como razón y operador. Sin embargo, no se puede ignorar el hecho de que el Factor 1 explica un porcentaje mucho menor de la variación en las nociones de la fracción como cociente y medida (aproximadamente 5% y 8%, respectivamente). En tercer lugar, los datos proporcionan apoyo empírico a la hipótesis de que el dominio de la noción de las fracciones como razón contribuye predominantemente a la búsqueda de fracciones equivalentes, desde Factor 2 explica una gran proporción de la variación del sexto factor (aproximadamente 73%). El desarrollo de una comprensión del subconstructo operador también se encontró para explicar una cuarta parte de la variación del rendimiento de los alumnos sobre los temas relacionados con la multiplicación de fracciones (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005, pág. 238).

En cuarto lugar, el modelo que emerge se desvía del modelo teórico en tres aspectos: (a) el efecto del subconstructo medida en las operaciones de adición de fracciones no fue estadísticamente significativo, sin embargo, ha surgido una asociación estadísticamente significativa entre el subconstructo parte-todo y las operaciones de adición de fracciones; (b) las asociaciones de las cuatro nociones subordinadas de fracciones con la resolución de problemas no fueron estadísticamente significativas, por el

contrario, la relación parte-todo se encontró para explicar un gran porcentaje de la variación de la resolución de problemas, y (c) se encontró que el subconstructo cociente de fracciones explica alrededor del 20% de la variación del rendimiento de los estudiantes en los temas relacionados con las operaciones multiplicativas de fracciones.

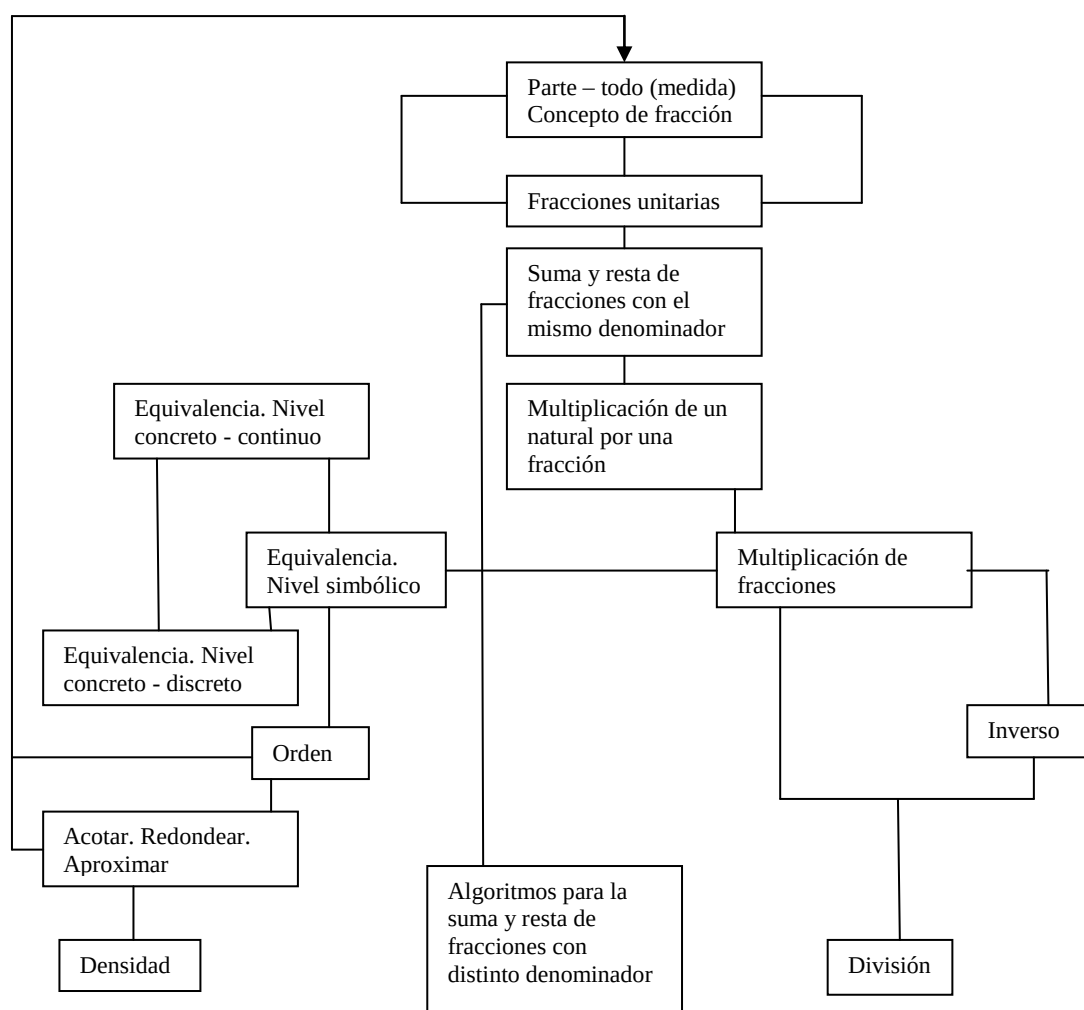
En general, el modelo verifica tres de las cinco hipótesis examinadas: (a) la interpretación parte-todo explica una proporción de la variación de los cuatro subconstructos subordinados de fracciones; (b) la noción de proporción se asoció con equivalencia, y (c) el concepto de operador fue vinculado a las operaciones multiplicativas de fracciones. Sin embargo, dos hipótesis no pudieron ser empíricamente validadas. En particular, las cuatro nociones subordinadas de las fracciones no fueron estadísticamente relacionado con la resolución de problemas, ni tampoco el subconstructo medida relacionado con las operaciones aditivas de fracciones.

Finalmente, dicen Charalambous & Pitta-Pantazi (2005), el estudio apoya dos caminos adicionales no incluidos en el modelo teórico: el primero une el subconstructo cociente a las operaciones multiplicativas y el segundo que une la relación parte – todo a las operaciones de adición de fracciones.

I.3.2.4. Un modelo para la enseñanza: la propuesta de Llinares & Sánchez (1997).

En coincidencia con Charalambous & Pitta-Pantazi (2005), los autores que ahora revisamos también parten del esquema de relaciones entre los diferentes subconstructos que proponen Behr, et al (1983) y después de la revisión de cada uno de ellos, articulado con algunas otras ideas y sugerencias prácticas para la enseñanza, plantean un esquema que muestra los posibles “núcleos duros” para la toma de decisiones curriculares, tendientes a la articulación de un proceso didáctico para la enseñanza de las fracciones.

Esquema 9. Un modelo para la enseñanza. Llinares y Sánchez (1997)



Evidentemente al conceptualizar un “paquete de conocimientos” (Ma, 2010) está de por medio la concepción que se tenga del proceso de enseñanza de un tema determinado, en este caso, las fracciones; para ayudarnos en esta tarea hemos revisado algunos de los modelos que encontramos al respecto. Coincidimos con Llinares & Sánchez (1997) cuando nos previenen respecto a la necesidad de que cada docente tome sus propias decisiones en relación a la enseñanza, sin embargo estamos conscientes de que en la medida que se tenga mayor claridad de las conexiones conceptuales, tanto entre los diferentes significados de las fracciones como sus propiedades y operaciones, las posibilidades de configurar un proceso más congruente se potencian. Esta idea se confirma a partir de lo que nos dicen Fazio & Siegler (2012) de que “*para enseñar fracciones, los mismos docentes deben tener un conocimiento profundo de los conceptos de fracciones y operaciones. Investigadores hallaron que el rendimiento matemático de los estudiantes está positivamente correlacionado con el conocimiento matemático del docente*” (pág. 21).

Ahora bien, en nuestro país hay una larga tradición (desde antes de 1960) por utilizar como fuerte referente para la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria (y por supuesto de las matemáticas en general) el libro de texto oficial, con lo cual se unifica un posicionamiento en atención al enfoque que curricularmente se transmite por intermediación de estos materiales (lo cual no quiere decir que en su concreción se transponga fielmente de los materiales curriculares a la práctica docente efectiva). Por otro lado, desde el conocimiento que tenemos de los diferentes planes de estudio para la formación de maestros, no fue sino hasta el plan de estudios 1997 en que se consideró explícitamente, de manera curricular, el estudio de las fracciones y sus diferentes subconstructos.

En los dos niveles de diseño curricular (para la formación inicial de profesores y para la educación primaria) media un modelo de enseñanza, que configura representaciones sociales desde la vivencia de sus protagonistas, es decir, los diferentes planes de estudio, en su momento, han contribuido en la conformación de una representación social sobre las fracciones y sobre su enseñanza ¿cuáles son los elementos que la caracterizan? ¿Qué transformación han sufrido ante el cambio de enfoques didácticos? ¿En qué medida se transmiten generacionalmente? ¿Cómo se da la relación entre las representaciones sociales que se intentaron construir en el escenario de la formación docente inicial (vía planes de estudio) y las representaciones presentes en los planes de estudio de la educación primaria?

En los dos apartados siguientes vamos a hacer una revisión al respecto, bajo la hipótesis de que, si las representaciones sociales se forman y transforman en los intercambios comunicativos y la interacción social, entonces el proceso de formación docente inicial debe tener una fuerte influencia en la configuración de los procesos microgenéticos (lo que pasa en los salones de clase) y por ende en la transformación sociogenética de la cultura matemática.

I.3.3. La formación matemática y didáctica en tres generaciones curriculares: ¿y las fracciones?

Al hacer una revisión de diferentes materiales (Arnaut, 1996; Cesín Vargas, 2007; SEP, 1993 b; y SEP, 1984 b) y de algunos de los planes de estudio a los que tuvimos acceso (SEP, 1975; SEP, 1984; SEP, 1997; y SEP, 2012 a), nos pudimos percatar en primera instancia del papel otorgado a las matemáticas dentro de los esquemas formativos

propuestos en cada época histórica y de igual manera de la articulación entre la formación matemática, propiamente disciplinaria, y las orientaciones para su enseñanza; al respecto, en la tabla 1 “*La matemática a través de los planes de estudio*”, hacemos un comparativo entre los cursos de matemáticas y la forma propuesta para que los estudiantes aprendieran cómo enseñarlas, tomando en cuenta desde el plan de estudios de 1936, hasta el actual 2012, pasando por supuesto por el plan de estudios 1997, que aunque sigue vigente para los estudiantes que cursan del 5° al 8° semestres en el presente ciclo escolar (2012 – 2013), dada la ubicación de los cursos de matemáticas (II y III semestres de la Licenciatura en educación primaria) ya está en aplicación el nuevo plan de estudios 2012 (en etapa de pilotaje para los estudiantes que cursan el 2° y 3° semestres y en su versión de generalización para los alumnos que ingresaron a 1° semestre este ciclo escolar).

Tabla 1. *La matemática a través de los Planes de estudio.*

PLAN DE ESTUDIOS	SEMESTRE O CICLO ESCOLAR					
	1° SEMESTRE	2° SEMESTRE	3° SEMESTRE	4° SEMESTRE	5° SEMESTRE	6° SEMESTRE
1936	Aritmética Y Geometría	Aritmética y Geometría	Aritmética, Geometría y Contabilidad rural.	Aritmética, Geometría y Contabilidad rural.	Preparación y Organización Del Material Didáctico.	Métodos de enseñanza.
1942	1er. Año Matemáticas: Fundamental mente Aritmética, Elementos de Geometría y Nociones de Álgebra: (5 hrs. de un total de 37 hrs. semanales)	2° Año Álgebra y Geometría Plana (5 de 41 hrs. semanales)	3° Año Geometría en el espacio y Trigonometría (3 hrs. de 37 semanales) Obs. Escolar (3 hrs.)	4° Año Técnica de la enseñanza	5° Año Técnica de la enseñanza	6° Año Técnica de la enseñanza.
1945	Aparece como materia optativa. Acompañados en el aspecto Didáctico de la Materia Técnica de la enseñanza, en tres cursos anuales.					
1960	Optativa: Matemáticas (4 hrs., de 30 semanales) en el 2° semestre Observación escolar (anual)		Didáctica General (6 hrs. de 32)	Anual Técnica de la enseñanza y práctica escolar y taller de materiales y recursos didácticos (10 de 32 hrs.)		

1969	Iniciación a la Técnica de la enseñanza (6 hrs. de 36)		Aritmética y Geometría (3 hrs. de 36)	Técnica de la enseñanza (7 hrs.) Didáctica General (6 hrs.)	Técnica de la enseñanza (7 hrs. de 36) Psicotécnica Pedagógica. (6 hrs.)	
1972	Matemáticas I (4 hrs.) Didáctica Gral. I (3 hrs.)	Matemáticas II (4 hrs.) Didáctica General. II (3 hrs. 36 hrs. total)	Matemáticas III (4 hrs.) Didáctica especial y práctica docente I (6 hrs.)	Matemáticas IV (4 hrs.) Didáctica especial y práctica docente II (6 hrs.)		Didáctica especial y práctica docente (en 7° y 8°, 9 hrs.)
1975 ⁹	Matemáticas y su Didáctica I (4 hrs. de 30)	Matemáticas y su Didáctica II (Números racionales)	Matemáticas y su Didáctica III	Matemáticas y su Didáctica IV	Matemáticas y su Didáctica V	Matemáticas y su Didáctica VI
1984	Matemáticas (3hrs.) Obs. De la Práct. Educ. I (3hrs.)	Estadística (4 hrs.) Obs. De la Práct. Educ. II (3 hrs.)	Introducción A Lab. De Docencia (3 hrs.)	Laboratorio De Docencia I (4 hrs.)	Laboratorio De Docencia II	Laboratorio De Docencia III
1997	Escuela y Contexto social.	Matemáticas y su enseñanza. I (6 hrs.) Iniciación a la práctica.	Matemáticas y su Enseñanza. II (6 hrs.) (Fracciones) Obs. Y Práctica Docente I	Obs. Y Práctica Docente II	Obs. Y Práctica Docente III	Obs. Y Práctica Docente IV
2012	Aritmética: su aprendizaje y enseñanza. (Fracciones) Observación y análisis de la práctica educativa	Álgebra: su aprendizaje y enseñanza Observación y análisis de la práctica escolar	Geometría: su aprendizaje y enseñanza Iniciación al trabajo docente	Procesamiento de información estadística Estrategias de trabajo docente	Trabajo docente e innovación	Proyectos de intervención socioeducativa ¹⁰

FUENTE: Elaboración propia con datos de (SEP, 1975; SEP, 1984; SEP, 1984 b; Pansza, Castorena, Maldonado, Sánchez, & Trujillo, 1991; SEP, 1993 b; SEP, 1997; SEP, 2012 a)

⁹ En 7° y 8° semestre se denominó “Matemáticas práctica docente”

¹⁰ En este plan, en el 7° y 8° semestres se denomina al curso “Práctica profesional”

Como apreciamos, desde el plan de 1936 hasta el Plan de Estudios de 1972 se aprecia una separación entre el conocimiento disciplinar y las sugerencias para su enseñanza; con diferentes énfasis se pretendía el aprendizaje del conocimiento disciplinar y no es de extrañarnos dado que en las condiciones de operatividad de cada uno de los planes de estudio, la formación de maestros no necesariamente tuvo el carácter de “formación profesional”; por ejemplo, en los años posteriores al México revolucionario de 1910, la pretensión principal fue comenzar a sistematizar la formación de profesores para una creciente demanda de atención en una población eminentemente rural¹¹, de tal manera que las exigencias hacia la profesión fueron mínimas, en ocasiones incluso quien apenas terminaba la educación primaria se habilitaba como profesor. Recordemos además que, hasta antes del plan de 1984, de manera simultánea a la formación como profesor se les otorgaba a los estudiantes el certificado de bachillerato con la idea de que pudieran estudiar otra profesión si lo deseaban.

El conocimiento disciplinar de matemáticas, hasta antes del Plan 1975, se vinculaba con el conocimiento de la “Técnica de la enseñanza”, la “Didáctica general” y la “Didáctica especial y práctica docente”; esta vinculación no necesariamente implicaba articulación consiente y sistemática, más bien el paradigma presente en esos momentos fue el propio de la relación “aprendo – aplico”, esto es, por un lado se aprendía la matemática que se juzgaba necesaria, y por el otro las cuestiones técnicas respecto a cómo enseñarla, por ello no es de extrañarnos que para 1975, el entonces Director de Educación Normal, Profr. Víctor Hugo Bolaños Martínez, le solicitara al Presidente del Consejo Nacional Técnico de la Educación, Profr. Moisés Jiménez Alarcón, que se modificara el plan de estudios 1972, porque *“no responde íntegramente a los contenidos del plan de estudio, programas, textos y guías didácticas correspondientes a la reforma de Educación primaria”* (SEP, 1975, pág. 49).

En el Plan de 1975, ante esta demanda explícita se aprecia en su denominación un acercamiento más directo entre las matemáticas y su didáctica, sin embargo en el Plan 1984 se vuelve a perder esta incipiente vinculación, para retomarse, con un posicionamiento teórico específico [aunque en cierta medida implícito, la Teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1986)] en el Plan de estudios de 1997.

¹¹ En este contexto posrevolucionario se funda la Escuela Normal Rural de San Marcos, Zac., el 3 de septiembre de 1933.

Ahora bien, en un juego dialéctico entre el pasado y el presente, los maestros hemos llegado a configurar representaciones sociales que definen una forma particular de hacer y hablar sobre las matemáticas y su enseñanza; entre la negociación y añoranza del pasado formativo inmediato, rescatando como deseable lo que en sus tiempos se consideró positivo, y las propuestas actuales que demandan “competencias” específicas tanto de los formadores de maestros como de los maestros en formación, encontramos un interjuego de poderes y decisiones (no siempre acertadas) que fluctúan entre la configuración de planes de estudio culturalistas (con fuerte peso no sólo en la cultura general, sino sobre todo en el aspecto humanista de la formación –Planes, 1936, 1942, 1945, 1972, por ejemplo), otro con la finalidad de formar maestros investigadores (Plan de 1984) hasta planes de estudio centrados en el aspecto Didáctico (aunque algunos con orientación más técnica –Plan 75 y otros centrados en las recientes conceptualizaciones e investigaciones sobre la Didáctica de las Matemáticas –Plan 1997).

Revisar todos los aspectos incluidos en los diferentes planes de estudio que hemos sintetizado en apartados anteriores, sería una labor extensa que rebasa las intenciones, pertinencia y relevancia de esta investigación, me parece más productiva una intención modesta, pero sin perder de vista la pertinencia de dicha revisión; hemos decidido focalizar nuestra revisión en 3 planes¹² de estudio: 1975, 1984 y 1997¹³. La estrategia que seguiremos para ello será, en primer término, presentar algunos elementos del contexto, así como la representación social que detectamos como central en su configuración, para finalmente focalizar en el tratamiento y/o énfasis que se le da al tema de las fracciones, en tanto es el eje central de nuestra investigación.

I.3.3.1. El Plan de Estudios 1975: Las matemáticas como “lenguaje”

Este Plan de estudios mantiene como estrategia de organización la propuesta de Benjamín Bloom de la “taxonomía de objetivos”, en este sentido los diferentes programas incluyen objetivos generales, particulares y específicos.

De entrada podemos encontrar una fuerte intencionalidad en ofrecer una sólida y profunda formación profesional, lo cual se indica en los siguientes términos...

¹² Se incluyen como anexo 2 el mapa curricular de cada uno de estos planes de estudio.

¹³ Aunque al momento de escribir esta tesis ya se está aplicando un nuevo plan de estudios (SEP, 2012 a), no nos ocuparemos de éste en tanto la recuperación de la información que analizamos está enfocada a lo sucedido con el plan 1997; sin embargo sí hacemos el comentario de que, el tema de fracciones se inserta dentro del curso de “Aritmética, su aprendizaje y su enseñanza” correspondiente al primer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria.

Se ha tomado en cuenta, tanto la formación científico-humanista como la formación específica profesional relacionada con la didáctica, y la filosofía, la historia, la legislación y el desarrollo de la comunidad en estrecha vinculación con los problemas sociales y económicos del México actual (SEP, 1975, pág. 7)

Evidentemente, ante los incipientes avances en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, dicho aspecto responde, como ya indicaba anteriormente, a la programación por objetivos un tanto deudora de la Tecnología Educativa.

Esta reforma a la Educación Normal sucede tres años después que la reforma a los Planes de Estudio para la Educación Primaria (Plan 1972) y pretende contribuir a consolidar dicha reforma.

En los documentos oficiales (SEP, 1975b) se precisan como antecedentes de la Reforma tres Seminarios Regionales sobre educación Normal (Oaxaca, 19, 20 y 21 de junio; Monterrey, 26, 27 y 28 de junio; y Guanajuato, 3, 4 y 5 de julio de 1975), lo que da como resultado el Acuerdo 11298, denominado “Resoluciones de Cuernavaca” en el cual se establece el Plan y Programas de estudio, con la participación del CONALTE¹⁴.

Desde los documentos oficiales se propuso lograr en el Plan de Estudios una *“disminución de la sobrecarga de materias; ser flexible y adaptable, articularse estrechamente con la educación primaria; lograr una sólida formación cultural y científica, incluyendo ampliamente al bachillerato general”* (SEP, 1975, págs. 18 - 19). Además, y esto hay que resaltarlo, nos permite ubicar a las matemáticas dentro de una de las tres áreas de formación que estableció en su diseño:

- a).- Área científico-humanística que incluya los lenguajes, así como las ciencias y su metodología.
- b).- Área de formación física, artística y tecnología y
- c).- Área de formación específica para el ejercicio de la profesión (SEP, 1975, pág. 19)

De estas tres áreas de formación, las matemáticas quedaron ubicadas en la primera, como un “lenguaje” (más adelante comentaremos lo que puede implicar, en términos de la formación docente, esta concepción y ubicación de la matemática).

¹⁴ CONALTE: Consejo Nacional Técnico de la Educación.

La organización curricular de los contenidos responde al modelo de áreas, e incluso fue un objetivo explícito, dentro de la formación didáctica de los futuros profesores, la “*capacitación para elaborar y poner en práctica planes didácticos que incluyan concepto de área, objetivos generales, objetivos particulares, específicos...*” (SEP, 1975, pág. 21) en plena concordancia, reitero, con la Tecnología educativa y la programación por objetivos.

El Plan de estudios además tenía una doble finalidad, que los alumnos egresados de las escuelas Normales, “*junto con su título de profesor de educación primaria, reciban su certificado de educación media superior que les permita proseguir, eventualmente, estudios de Licenciatura en otras escuelas de tipo superior*” (SEP, 1975, pág. 27); de aquí se deduce fácilmente que el nivel escolar (cfr. SEP, 1975, pág. 38) de ingreso a la Educación Normal era la Secundaria, además y aunque la intencionalidad explícita fue que se pudieran continuar estudios de “Licenciatura en otras escuelas de tipo superior” sabemos que ello sucedió muy poco, sobre todo porque al insertarse al mercado laboral inmediatamente al egresar de la Escuela Normal, podríamos pensar que en cierta medida las aspiraciones estaban cumplidas (esta aseveración sólo es sostenible para “Otras Licenciaturas” ajenas a la docencia; en el caso de la Licenciatura en educación, generalmente el camino “natural” de muchos profesores fue la “especialización” en las Escuelas Normales de tipo Superior).

Ahora bien, después de haber precisado esta serie de elementos contextuales, para el caso específico de las Matemáticas encontramos la materia “Matemáticas y su didáctica” en los primeros 6 semestres de la carrera, con una carga de 4 horas a la semana (de un total de 30 hrs./semana/semestre), en tanto para el 7° y 8° semestres aparece la materia “Matemáticas: práctica Docente I y II”, con la misma cantidad de 4 hrs./semana, se plantea además, de manera explícita, “*la integración del conocimiento científico y del conocimiento didáctico, que antes se presentaba en forma separada*” (SEP, 1975, pág. 34); en el discurso ello presenta una primera gran ventaja, sin embargo “integración” sigue implicando dos campos separados, por un lado el conocimiento científico (las matemáticas como lenguaje) y por el otro el conocimiento didáctico (traducido en prescripciones técnicas), lo cual no necesariamente implica un “conocimiento didáctico del contenido”, textualmente se dice “*El manejo didáctico de los programas implica dos problemas: por un lado la conducción del aprendizaje de la matemática, y por otro la aplicación didáctica de los materiales de la educación primaria*” (SEP, 1975, pág. 79).

El Plan de estudios procura “presentar la matemática de la educación primaria formalizándola y estudiándola cualitativa y cuantitativamente a nivel medio superior, al mismo tiempo que ofrece una capacitación didáctica paralela a ella” (SEP, 1975, pág. 62), en este sentido se presentan los contenidos organizados de la siguiente manera:

Tabla 2. Matemáticas y su Didáctica. Plan 1975.

Matemáticas y su Didáctica. Distribución de las Unidades del curso.					
1er. Semestre	2º. Semestre	3er. Semestre	4º. Semestre	5º. Semestre	6º. Semestre
Lógica y conjuntos I	Lógica y conjuntos II	Números reales	Homotecia	Espacios Vectoriales	Probabilidad
Números naturales	Relaciones y funciones	Estructuras algebraicas	Trigonometría	Geometría analítica bidimensional I	Límite y continuidad
Sistema de numeración	Números racionales	Introducción a la geometría	Sólidos geométricos	Geometría analítica bidimensional II	Nociones de cálculo
Números enteros	Didáctica de la matemática en la escuela primaria I	Transformaciones geométricas	Didáctica de la matemática en la escuela primaria II	Estadística	Didáctica de la matemática en la escuela primaria III

Como apreciamos hay una fuerte predominancia del contenido matemático además de que, en relación con la Didáctica, se establece una relación de “aplicación”, es decir, al parecer importa una sólida formación matemática que les permita a los estudiantes reconocer, aplicar, los contenidos matemáticos de cada unidad estudiada en los libros de texto de la educación primaria, lo cual se lograría al resolver las lecciones de éstos.

Sobresalen dos objetivos generales del curso Matemáticas y su didáctica (de los 5 enunciados en el Plan de Estudios): el primero, que nos permite apreciar y reafirmar la concepción de matemáticas que sustenta el programa: “Comprenderá la matemática como lenguaje que le permita interpretar, controlar y superar los fenómenos que se le presentan en el mundo que le rodea”; y el cuarto, con proyección hacia la Escuela Primaria: “Adquirirá la capacidad para introducir a los alumnos en la reflexión y generalización de los procesos cuantitativos y espaciales, que le permitan la construcción de modelos matemáticos aplicables a la solución de problemas” (SEP, 1975, pág. 6).

En esta concepción de las matemáticas como lenguaje se deja fuera sobre todo un aspecto esencial: “*La matemática como quehacer humano*” (Godino, 2003, pág. 270), que implica una actividad de resolución de situaciones problemáticas; siguiendo a Godino (2003), si las matemáticas constituyen una “realidad cultural” integrada por conceptos, proposiciones, teorías... (Quehacer humano, lenguaje simbólico y sistema conceptual) y cuya significación personal e institucional está íntimamente ligada a los sistemas de prácticas realizadas para la resolución de situaciones-problemas, el Plan de estudios 1975 las parcializó al priorizarlas como “lenguaje”, hecho que incluso se confirma cuando apreciamos un tratamiento didáctico expresado en las siguientes actividades:

- Análisis de lecciones de libros de texto de primaria.
- Rescate de sugerencias didácticas de los materiales de la educación primaria.
- Elaboración de Planes de clase.
- “Práctica intensa” en 2º, 4º y 6º semestres.

La estrategia de formación docente que plantea el Plan de Estudios involucra procesos inductivos y deductivos, inductivos en tanto se trata de “redescubrir los conceptos matemáticos” y deductivos cuando se busca “demostrar una teoría formulada o aplicar el conocimiento descubierto”.

I.3.3.2. El plan de estudios 1984: Las matemáticas como “instrumento” para la investigación y la práctica docente.

En el año 1982 asume la Presidencia de la República el Lic. Miguel de la Madrid Hurtado, quien por la aplicación de ideas neoliberales a la economía y la política de nuestro país ha sido considerado el introductor de este modelo. Puede ser relevante este dato sobre todo si consideramos que generalmente los Planes de Estudios para la formación de profesores se reformaban con posterioridad a la Reforma acaecida previamente en la Educación Primaria (1944, 1960, 1975 e incluso 1997) y con la intención de articular los primeros a los principios y enfoques de la Educación Primaria, sin embargo en el caso del Plan de Estudios 1984 no sucedió así, es decir, no hubo ninguna reforma sustantiva en los planes de estudio de la educación primaria que requiriera “hacer

ajustes” (la anterior reforma había sido desde 1972 y no recibió fuertes¹⁵ modificaciones hasta 1993, por supuesto que con un Programa Emergente en 1992) a los Programas de la Educación Normal (no es que se esté considerando que necesariamente una reforma -Educación Primaria- tenga que ser antecedente de la otra -Educación Normal-).

Más bien la hipótesis del porqué de esta forma alude a la necesidad implícita de adaptar la formación de docentes a las exigencias neoliberales de los organismos internacionales (BM, FMI, etc.) sobre todo porque esta reforma prácticamente se hizo “a espaldas” de quienes la iban a instrumentar.

La importancia de este Plan de estudios es determinante, ya que por un lado cambia el rol profesional del maestro al definirlo como “*con una mejor aptitud para la práctica de la investigación y la docencia*” (SEP, 1984, pág. 2); de igual manera también se cambia el estatuto legal de las Escuelas Normales, al definirse el nivel educativo de estas instituciones como del tipo superior: Licenciatura, exigiéndose como antecedente obligatorio los estudios de Bachillerato (aspecto sugerido desde 1944, pero concretado hasta ahora; Cfr. SEP, 1984 b).

A diferencia del Plan 75, en éste desaparecen explícitamente las didácticas, en cambio “*destaca por su importancia el laboratorio de docencia, concebido como un centro activo para el análisis y la aplicación interdisciplinaria de los contenidos de las diversas líneas de formación*” (SEP, 1984, pág. 10), sin embargo en la práctica esto no se logró (cfr. Pansza, Castorena, Maldonado, Sánchez, & Trujillo, 1991).

El plan 84 presenta dos grandes áreas de formación: una general, de tronco común a las licenciaturas en educación, y otra, específica al nivel educativo en que se ejercerá la docencia.

El área general de tronco común está integrada por 3 líneas de formación: social, pedagógica y psicológica y cursos instrumentales que cubren 36 espacios curriculares. El área específica cubre 27 espacios curriculares.

Esta breve caracterización nos permite ubicar los cursos de “Matemáticas” y “Estadística” (únicos en el Plan de estudios donde se contempla el conocimiento matemático) dentro del área general de tronco común, considerados ambos cursos dentro del grupo de carácter “instrumental”, con 3 y 4 hrs. a la semana de tiempo curricular.

¹⁵ Aunque en 1980 se hizo una reforma parcial que sólo afectó a los primeros grados.

El Documento oficial del Plan de Estudios es muy escueto en tanto no nos provee de información suficiente para caracterizar el conocimiento matemático, ni el enfoque, sin embargo, sí podemos encontrar que ambos cursos se caracterizan por ser propedéuticos: el de Matemáticas (ubicado en el 1er. Semestre de la carrera) es propedéutico para el de estadística y *“plantea el marco de una matemática operativa, que aplica sus contenidos a la resolución de problemas reales, sin ejemplificar o explicitar cómo y sin precisar criterios para ello”* (Pansza, Castorena, Maldonado, Sánchez, & Trujillo, 1991, pág. 118); por otro lado, el curso de Estadística se plantea como antecedente y propedéutico para los cursos de investigación educativa, pero reduciendo ésta a la estadística, o a *“la realización de pequeños análisis estadísticos e investigaciones que le sean requeridos durante sus estudios”* (Pansza, Castorena, Maldonado, Sánchez, & Trujillo, 1991, pág. 122).

Al estar pensada toda la lógica de formación en la investigación se descuida ampliamente el objeto de estudio de la educación primaria, es decir, los contenidos matemáticos que se plantean están pensados desde la lógica de la disciplina, de donde si bien tienen relación con el contenido de educación Primaria lo que refieren centralmente es un conocimiento “científico”, en tal sentido en la Tabla 3 apreciamos la temática de ambos cursos:

Tabla 3. Matemáticas. Distribución de temas. Plan 1984.

Matemáticas 1° semestre: 3 hrs./semana	Estadística 2° semestre: 4 hrs./semana
Unidad I Los números reales como expresión de medidas.	Unidad I La estadística descriptiva en la interpretación de los sistemas educativos.
Unidad II Los problemas de medición y las desigualdades.	Unidad II La interpretación estadística en los problemas educativos.
Unidad III Probabilidad y toma de decisiones.	Unidad III Alcances y limitaciones de la estadística.

Como apreciamos, por ningún lado se contempla un tratamiento didáctico de las matemáticas, ni se ve que se tenga la intención de ello a lo largo de los cursos. Aún más, aunque paralelamente a este Plan, en el caso específico de los programas de la educación primaria se trabajan los temas de probabilidad y estadística, estos no son considerados ni informativa ni metodológicamente en el curso de estadística, pues el propio programa establece que es antecedente del curso de investigación.

Es lamentable observar cómo a pesar de más de 10 años¹⁶ de investigación en Educación Matemática en el contexto nacional, a la fecha de elaboración de este Plan de estudios no se consideraron las aportaciones provenientes de dichas investigaciones, o al menos no se reflejan explícitamente.

A pesar de las críticas que empezó a recibir [cfr. (Pansza, Castorena, Maldonado, Sánchez, & Trujillo, 1991)] sobre todo por su fuerte desvinculación con la práctica docente, dicho Plan no fue reformado hasta 1997 (aunque se empezó a gestar la Reforma prácticamente desde 1995).

Tres cuestiones más merecen la pena ser comentadas, primero, al exigirse el Bachillerato como antecedente para el ingreso se crearon Centros de Bachillerato Pedagógico, en la intención de que de ahí se obtuviera el ingreso a la Escuela Normal, sin embargo en la actualidad se puede ingresar a los estudios de Licenciatura en educación desde cualquier tipo de Bachillerato e incluso ya no hay prácticamente ningún nexo con los “Bachilleratos Pedagógicos” (entendidos como nexo con la institución); segundo, la aplicación de este Plan de Estudios también significó en la práctica una regulación de la matrícula y control del egreso, porque como ya indicábamos, el Plan de estudios entra en funciones en 1984, pero en la práctica inicia a trabajarse hasta el ciclo escolar 1987-1988 con el 1er. Grado de Licenciatura, a la vez que egresa la última generación formada con el Plan de Estudios 1975; también en el mismo ciclo escolar (87 – 88) entra la última generación que cursaría el Bachillerato pedagógico en la misma Escuela Normal, lo que ocasiona que en los siguientes 3 ciclos escolares no ingrese ni egrese nadie de las Normales, sino hasta el ciclo escolar 91-92 cuando ingresan alumnos provenientes de los Bachilleratos pedagógicos vinculados a cada Escuela Normal; y, tercero, este Plan fue criticado también por su marcado enciclopedismo, es decir pretendía dotar de mucha fundamentación teórica (asemejándose a la universitarización de los estudios, en la concepción de esa época) pero con muy poca vinculación con la práctica.

Una conclusión general sobre el Plan 1984 es que, al proponer un excesivo número de objetivos formativos, todos ellos de realización compleja, se debilitó el cumplimiento de la función central y distintiva de las escuelas normales: formar para la enseñanza y para el trabajo en la escuela (SEP, 1997, pág. 17).

¹⁶ Aunque (Moreno L., 1995) señala el año de 1975 como la fecha de creación de la sección de Matemática Educativa en el CINVESTAV, en realidad desde principios de la década de los 70's se iniciaron trabajos propios de esta área.

I.3.3.3. Plan de estudios 1997: “Aprender matemáticas al resolver problemas”.

Las críticas al Plan de estudios 1984 y en general las críticas a la educación se empezaron a gestar desde diferentes frentes; México buscaba su inclusión al TLC¹⁷ con América del Norte y para ello necesitaba reformar su educación, sobre todo se evidenciaba baja “calidad educativa”, varias cuestiones sobresalen y anteceden la reforma a la Educación Normal, al respecto citaremos las siguientes:

- Se publican los resultados de una investigación de la educación en todos los niveles, bajo el sugestivo título de “La catástrofe silenciosa” (Guevara, 1991).
- Se firma el Acuerdo Nacional para la Modernización de la educación básica (PEF, 1992).
- Se reforma y publica la Ley General de Educación el 13 de julio de 1993.
- Se publican los “Programas Emergentes de Reformulación de Contenidos” para la educación básica. (SEP, 1992)
- En 1993 se lleva a cabo la Reforma a la Educación Primaria y se edita un nuevo Plan de estudios para este nivel.
- Se publica el Programa de Desarrollo Educativo 1995-2000 (PDE) bajo el gobierno del Dr. Ernesto Zedillo Ponce de León.
- En agosto de 1996 inicia en acción el Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académicos de las Escuelas Normales, derivado del PDE y en el cual una de las líneas principales es la “Transformación curricular”.

En este contexto de Reformas tanto legales, como de orden pedagógico-didáctico nace el Plan de estudios 1997; desde su formulación, y evitando cometer los mismos errores de su antecesor se buscó cuidar varias cosas, de entre éstas sobresalen:

- Reducir el carácter enciclopedista-teórico que en la práctica representó el Plan 1984.
- Vincular la elaboración del Plan y Programas de estudio con los enfoques y principios del Programa de educación primaria, dado que una Reforma sucedió a la otra, como necesidad de adecuación y para estar en sintonía.

¹⁷ TLC = Tratado de Libre comercio con América del Norte

- Resaltar la doble dimensión de la formación docente inicial: en el escenario de la Escuela Normal y en la práctica docente en la Escuela Primaria.
- Articular explícitamente el conocimiento disciplinar (enfocado principalmente a lo que debe saber un profesor para la educación primaria) con el conocimiento didáctico específico de éste. En el caso de Matemáticas sobresalen dos propósitos: que los estudiantes amplíen sus conocimientos sobre los contenidos matemáticos que el maestro de educación primaria requiere dominar, y comprendan en qué consiste el enfoque para la enseñanza de esta disciplina; y, que diseñen y apliquen estrategias didácticas para la enseñanza de algunos contenidos propuestos en el currículum de la escuela primaria (SEP, 1997, pág. 72).
- Pero sobre todo, recuperar las inquietudes de uno de los protagonistas principales: el maestro formador de docentes, recuperando simultáneamente los resultados de diversas investigaciones en el campo de la didáctica.

En este sentido, el mapa curricular del Plan de estudios considera tres áreas de actividades de formación, cualitativamente diferentes pero en estrecha interrelación (cfr. SEP, 1997, pág. 51)

a).- Actividades principalmente escolarizadas: 35 asignaturas de duración semestral, distribuidas a lo largo de los seis primeros semestres.

b).- Actividades de acercamiento a la práctica escolar, desarrolladas en los seis primeros semestres, de manera gradual y sistemática, teniendo como eje central la reflexión antes, durante y después de la práctica.

c).- Práctica intensiva en condiciones reales de trabajo, ocupando la mayor parte del tiempo de los dos últimos semestres de la formación.

Las matemáticas están contempladas dentro de las actividades principalmente escolarizadas, en el segundo y tercer semestres, con una duración de 6 hrs. a la semana, de un total de 32 hrs. de trabajo semanal.

Cada curso se ha organizado en cuatro bloques temáticos, como podemos apreciar a continuación:

Tabla 4. Matemáticas y su enseñanza. Plan 1997.

Matemáticas y su enseñanza I (108 hrs.)	Matemáticas y su enseñanza II (108 hrs.)
Bloque I Aprender matemáticas al resolver problemas. Bloque II Los números naturales y el sistema decimal de numeración. Bloque III Las cuatro operaciones básicas con números naturales. Bloque IV La Geometría.	Bloque I La medición Bloque II Los números racionales Bloque III Procesos de cambio Bloque IV Tratamiento de la información, predicción y azar.

Como podemos apreciar, al comparar esta distribución de los diferentes bloques de los dos cursos con los ejes temáticos de la educación primaria del plan de estudios vigente al momento de su formulación [Cfr. (SEP, 1993)] hay una total vinculación, no sólo en su denominación, sino también en el enfoque de tratamiento específico, por un lado la distribución de los contenidos matemáticos en la educación primaria se organizó en seis ejes temáticos: Los números, sus relaciones y sus operaciones; medición; geometría; Procesos de cambio; Tratamiento de la información; y, La predicción y el azar¹⁸ (SEP, 1993, pág. 50), lo cual coincide prácticamente con los bloques del programa (salvo los números racionales que, dada la dificultad inherente al contenido, se aborda en Matemáticas y su enseñanza II); por otro lado, se recupera el enfoque oficial del Plan de Estudios 1993 para la educación primaria, las matemáticas cobran sentido, significado y funcionalidad al ser herramientas para resolver problemas en distintos contextos.

De manera explícita se está pensando en que, para que el maestro en formación sepa trabajar el enfoque con los niños, necesariamente debe ser formado bajo el mismo enfoque, es decir, debe enfrentarse a la resolución de situaciones problema, en tal sentido esta es una de las recomendaciones más fuertes, además de ampliar sus conocimientos matemáticos, “*que conozcan una manera distinta de hacer y aprender matemáticas, a la vez que analizan progresivamente aspectos didácticos subyacentes*” (SEP, 2004, pág. 12).

Implícitamente en esta aseveración podemos encontrar una crítica al enfoque del plan de estudios anterior (tanto para el de Educación Primaria – 1972-, como para el de

¹⁸ Es importante aclarar que a la fecha (2012) en la educación primaria se está trabajando con un nuevo plan de estudios (SEP, 2011) y también la denominación de los ejes temáticos ha cambiado; ahora se plantean los siguientes: Sentido numérico y pensamiento algebraico; forma, espacio y medida; y, Manejo de la información.

Educación Normal – 1984-), asumiendo una forma distinta a la tradicional, de lápiz y papel, predominantemente algorítmica, misma que poco a poco ha generado una representación social de las matemáticas como asignatura difícil, de temor y rechazo por parte de los estudiantes, de ahí que incluso en el mismo programa *“se pretende que los futuros maestros superen el temor o el rechazo a esta disciplina y comprueben, a lo largo de los cursos, que aprender matemáticas puede ser una experiencia personal muy gratificante”* (SEP, 2004, pág. 12).

Así pues, recuperando un enfoque encaminado a “hacer matemáticas” propio de una versión artesanal constructivista del conocimiento (en el programa se resalta que “aunque conocer es un acto individual, el estudio de las matemáticas rinde mejores frutos por medio del trabajo en pequeños grupos”), acompañado de un cambio actitudinal, los conceptos matemáticos se estudian a partir de sus distintos significados (no sólo en su versión algorítmica), por ejemplo, **al estudiar el bloque sobre “Los números racionales” resaltan los significados de la fracción en el “reparto”, en un contexto de medición, como “razón entre dos cantidades”, como cociente y como operador multiplicativo**, lo cual contribuye con mayor claridad a dotar de significado la representación “ $3/5$ ” por ejemplo, y además contribuye a superar las ideas de los niños de la fracción como “pares de números naturales sin relación entre sí, puestos uno arriba del otro”.

Por supuesto que para que ello suceda se requiere como mínimo una amplia comprensión de este enfoque por parte de los docentes en formación (y de los formadores de docentes) e incluso, muchas de las veces, romper con las concepciones que han construido antes de su ingreso a la Escuela Normal; ante ello la estrategia de formación que el Plan de Estudios y los Programas de la asignatura plantean tiene que ver con ayudar al estudiante a *“recuperar los significados de los conocimientos matemáticos, recontextualizarlos, es decir, ponerlos en situaciones en las que cobren sentido para el alumno al permitirle resolver los problemas que se le plantean”* (SEP, 2004, pág. 10).

Esto es importante resaltarlos porque en el caso de los estudiantes hay una doble tarea, por un lado se asume que saben matemáticas y ante ello requieren recontextualizar sus conocimientos, dotarlos de sentido (y en muchos de los casos aprenderlos), pero al mismo tiempo tienen que aprender, diseñar, construir secuencias de actividades para ayudar a los niños, al contextualizar para ellos los conocimientos, a que progresivamente avancen hasta la institucionalización, es decir, favorecer una evolución progresiva desde

las estrategias informales, en principio, hasta las estrategias formales como punto de llegada y a la vez de inicio para la construcción de otros conocimientos; aún más, de manera explícita se busca que los estudiantes reconozcan las articulaciones entre los diferentes contenidos y temas, por ejemplo, numerosos problemas que dan lugar a la utilización de herramientas aritméticas y geométricas son de medición.

Recuperando una idea trabajada por Brousseau (1994), se busca la formación de un maestro “devolvente”, al respecto este autor nos dice que

No basta con ‘comunicar’ un problema a un alumno para que ese problema se convierta en su problema y se sienta el único responsable de resolverlo. Tampoco basta que el alumno acepte esa responsabilidad para que el problema que resuelva sea un problema ‘universal’, libre de presupuestos subjetivos. Denominamos ‘devolución’ a la actividad mediante la cual el docente intenta alcanzar ambos resultados (Brousseau, 1994, pág. 67).

En coincidencia con esta idea encontramos en el programa de Matemáticas y su enseñanza II que “*se trata de lograr que los estudiantes asuman la responsabilidad de buscar diferentes alternativas de solución ante los problemas que se les presentan y también que se responsabilicen de las soluciones que encuentren, validándolas ante sí mismos y ante los demás compañeros*” (SEP, 2004, pág. 68).

Pero para ello el mismo Plan 1997 busca que el formador de docentes...

seleccione actividades, organice al grupo, propicie que los estudiantes resuelvan los problemas con sus propios recursos, socialicen sus procedimientos generados y, al final, destaque los contenidos matemáticos implícitos y explícitos que se trabajaron, así como promueva la reflexión sobre determinadas características didácticas de las distintas experiencias (SEP, 2004, pág. 13).

En sí, se pretende que al hacer que el estudiante “viva” una forma diferente de “hacer matemáticas”, ésta se traslade a la Escuela Primaria, al configurar paulatinamente una “mentalidad didáctica” específica del contenido a estudiar.

A diferencia de los anteriores Planes de Estudio, el Plan '97 se acompañó de una fuerte dotación de materiales para el estudio de las diferentes asignaturas, en el caso de las matemáticas el material central de estudio es el taller para maestros “La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria” (Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila, 1999), e incluso parece ser que dicho material es el que le confiere cuerpo a los mismos programas

de Matemáticas y su enseñanza I y II, ello se infiere al comparar las temáticas y el uso que de éste se hace en los cursos.

Adicional al paquete de libros de este taller (4 en total, dos con el título anterior, un libro de lecturas y un libro de material recortable) se editaron una serie de videos y audiocintas con la finalidad de apoyar a los estudiantes en la comprensión y profundización de las nociones matemáticas y didácticas estudiadas (sin contar también toda la serie de materiales oficiales para la educación primaria: libros para el maestro, libros para el alumno, ficheros de actividades didácticas, diseñados para cada uno de los grados escolares y que son retomados y analizados en los cursos de Matemáticas y su enseñanza I y II).

En términos de la estructura de los programas sobresale como dato interesante el que a diferencia del curso de Matemáticas y su enseñanza I en el cual vienen diseñadas todas las actividades que se sugieren para su conducción, en Matemáticas y su enseñanza II sólo se indican los temas de cada uno de los bloques, lo cual evidentemente “obliga” a los formadores de docentes a diseñar sus propias secuencias didácticas poniendo en juego, por supuesto, sus propias competencias didácticas.

En síntesis, para la formación matemática de los maestros, de acuerdo con este Plan de estudios, es necesario considerar:

- a) La comprensión y consolidación de los contenidos matemáticos fundamentales, propios de la educación primaria, a partir de dotarlos de sus diferentes significados.
- b) La formación de una “mentalidad didáctica” específica del contenido matemático.
- c) El enfrentamiento, por parte de los estudiantes, con situaciones problemas que les permitan vivir la experiencia de “hacer matemáticas” al resolver diversos tipos de problemas.
- d) La reflexión sobre su propia práctica, al diseñar y aplicar situaciones didácticas en la escuela primaria, pero sobre todo al recuperar y analizar los procedimientos, respuestas y errores frecuentes de los alumnos en el desarrollo de éstas. El acercamiento a la Escuela primaria es gradual, en el primer curso se organizan dos estancias en la Escuela primaria, la primera de 3 días de observación de la práctica docente del maestro titular y

aplicación de actividades iniciales (una ficha didáctica, un juego o la resolución de algún problema matemático), y la segunda de 5 días consecutivos aplicando algunas propuestas de los ficheros didácticos o de los libros de texto gratuitos *“sin que esto signifique que el estudiante deba enseñar contenidos matemáticos específicos con la complejidad que este proceso implica”* (SEP, 2004, pág. 14); en cambio en Matemáticas y su enseñanza II *“las actividades de enseñanza se preparan con base en los contenidos que se elijan para el desarrollo de una secuencia de clases, lo que significa un mayor nivel de complejidad en la elaboración y la aplicación de los planes de clase”* (SEP, 2004, pág. 66).

- e) El conocimiento y análisis de los materiales de apoyo para la educación primaria (Plan de estudios, libros para el maestro, libros para el alumno, material complementario – videos, audiocintas, “juega y aprende matemáticas”, etc.) como un referente fundamental para su práctica docente.

Dos aspectos más conviene destacar:

- Se conceptualiza de manera explícita la Didáctica de las matemáticas, lo que refleja una fuerte influencia de una perspectiva teórica: La teoría de las situaciones didácticas, se dice al respecto...

La didáctica de las matemáticas estudia los fenómenos relativos a la enseñanza y al aprendizaje de esta disciplina; describe y analiza las dificultades que se identifican en estos procesos, propone recursos para ayudar a los profesores y a los alumnos a superarlas y, especialmente, para hacer del saber que se enseña algo vivo y funcional. La didáctica de las matemáticas nos proporciona herramientas para analizar secuencias de situaciones didácticas, para mejorarlas o incluso para crearlas (SEP, 2004, pág. 9).

- Aunque como en el mismo programa se asume, al ser sólo dos cursos de matemáticas y su enseñanza, no significa que al término de estos los estudiantes concluyan el proceso de aprendizaje de sus contenidos y su didáctica, explícitamente en los subsiguientes cursos del Área de Acercamiento a la Práctica Escolar (específicamente Observación y práctica docente I, II, III y IV) se continúan tanto las actividades de planeación, como de análisis de esta asignatura.

Para concluir este apartado se presenta el siguiente cuadro comparativo de los tres planes de estudio analizados, resaltando: tipo de educador que se pretendía formar, conocimiento didáctico, contenido matemático, estrategia de formación y evaluación.

Tabla 5. Comparativo de tres generaciones curriculares 1975 – 1997.

ASPECTOS	1975	1984	1997
Tipo de educador	Un educador equipado técnica e ideológicamente, para cumplir la difícil y muy noble tarea de encauzar la energía creadora de las nuevas generaciones. Promotor del acto educativo.	Un educador con una más desarrollada cultura científica y general y con una mejor aptitud para la práctica de la investigación y de la docencia y un amplio dominio de las técnicas didácticas. Y el conocimiento amplio de la Psicología educativa. Enciclopedismo.	Un educador con habilidades intelectuales y competencias profesionales que le permitan conocer e interpretar las principales características del medio, su influencia en la educación de los niños, los recursos que pueden aprovecharse y las limitaciones que impone.
Conocimiento Didáctico	Análisis de lecciones de libros de texto de primaria. Rescate de sugerencias didácticas de las matemáticas de primaria. Elaboración de planes de estudio. Práctica intensa: 2°, 4° y 6° semestres.	Desaparece explícitamente la Didáctica.	Se pretende que los estudiantes revisen la secuencia que existe entre los contenidos a lo largo de uno o de varios grados de la escuela primaria, observen el trabajo de profesores en grupo, diseñen, analicen y apliquen propuestas didácticas y utilicen los resultados de su experiencia. Formación de una “mentalidad didáctica”.
Contenido Matemático	Propio de un nivel de Bachillerato. Aplicar e identificar los contenidos de cada unidad en los libros de texto de primaria (resolver lecciones).	Derivado desde la lógica de la misma disciplina: probabilidad y estadística.	Se estudian los conceptos matemáticos en sus distintos significados. (Ejemplo, fracciones: reparto, medición, cociente, razón y operador multiplicativo).
Estrategia de formación	Redescubrir los conceptos matemáticos,	Modalidad de taller o laboratorio	Recuperar los significados de los conocimientos

	mediante un desarrollo inductivo. Demostrar una teoría formulada o aplicar el conocimiento descubierto: proceso deductivo.		matemáticos, “recontextualizarlos”. Ponerlos en situaciones en las que cobren sentido para el alumno al permitirle resolver los problemas que le plantean. Taller con “situaciones problemáticas”

Como fuimos apreciando en el desarrollo del análisis de los tres planes de estudio (1975, 1984 y 1997), sólo en dos de ellos (1975 y 1997) se recupera el tema de los números racionales; en el plan de 1975 se trabaja en el segundo semestre, como parte de la tercera unidad, acompañado de la “Didáctica de la matemática en la escuela primaria”, es decir se plantea un trabajo por separado de ambos campos del saber. En cambio en el plan de estudios 1997 se plantea un trabajo articulado entre el contenido y su enseñanza, a partir de los diferentes significados en que éste se presenta.

En la siguiente tabla podemos apreciar, de manera comparativa, las diferencias entre ambos planteamientos:

Tabla 6. Fracciones: Comparación entre planes de estudio.

Plan de estudios 1975		Plan de estudios 1997	
Objetivos particulares. Unidad 3 Números racionales.	Objetivos particulares. Unidad 4 Didáctica de la matemática en la escuela primaria	Propósitos del bloque	Temas
3.1. Definirá a los números racionales como un conjunto de clases de equivalencia. 3.2. Usará algunas propiedades de los racionales en demostraciones. 3.3. Demostrará algunas propiedades de las operaciones en los racionales. 3.4. Manejará los números racionales	4.1. Elaborará un cuadro sinóptico acerca de los contenidos y sugerencias de tipo pedagógico incluidos en los libros de texto y auxiliares didácticos de matemáticas relacionados con la conducción del aprendizaje de los sistemas N y Z. 4.2. Manejará los	1. Conozcan los diferentes significados que puede tener una fracción y los problemas que se generan con ellos. 2. Utilicen adecuadamente las fracciones y los números decimales, al comunicar o interpretar cantidades o al operar con ellos.	• Las fracciones como expresiones de una cantidad y como medidas. • Los decimales como expresiones de medidas. • Las fracciones como resultado de una división. • Fracciones y decimales como operadores multiplicativos. • Los contenidos de

en su notación decimal en la solución de ejercicios y problemas. 3.4. Resolverá problemas utilizando ecuaciones en Q (SEP, 1975, págs. 69 - 70)	objetivos específicos del programa, relacionados con los temas que se refieren a números naturales y enteros, mediante el análisis de las actividades de los mismos. 4.3. Resolverá lecciones del libro de texto correspondientes a los temas de números racionales. 4.4. Elaborará planes de clase para dirigir el aprendizaje de temas como: Relaciones de equivalencia y orden entre los racionales. Operaciones con fracciones comunes y decimales. Aplicación a problemas. (SEP, 1975, pág. 70)	3. Reflexionen sobre la estructura algebraica de los números racionales. 4. Conozcan los aspectos relativos a las fracciones y los decimales que se estudian en cada grado de la escuela primaria. 5. Conozcan, prevean y comprendan algunos errores frecuentes que cometen los niños al trabajar con las fracciones. (SEP, 2004, pág. 74)	fracciones y decimales a lo largo de la escuela primaria. • Dificultades, procesos y errores frecuentes; noción de obstáculo epistemológico. • Análisis de situaciones didácticas. Conocimientos implícitos y explícitos. • Sesión de observación y práctica. (Diseño de plan de clase, experimentación y análisis.) (SEP, 2004, pág. 74)

En este Plan (1975), los números racionales son concebidos desde la postura formal de su definición, es decir, como “*un conjunto de clases de equivalencia* (Fandiño Pinilla, 2009)”, tal y como apreciamos en los objetivos particulares que para el desarrollo de esta unidad se plantean. El esquema de aprendizaje que se infiere también aparece de manera muy clara, primero se aprenden las definición, propiedades, operaciones y notaciones, para posteriormente aplicarlas a la resolución de problemas.

En el caso del planteamiento didáctico, éste está pensado más como revisión de los materiales curriculares y a partir de ahí recuperar los contenidos, las sugerencias pedagógicas y el análisis de las lecciones de los libros de texto para utilizar esa información en la elaboración de planes de clase.

Si consideramos que al momento de elaboración de este plan de estudios, el desarrollo de la teoría didáctica aún es incipiente, ello nos ayuda a explicar el porqué de

esta estructuración, recordemos que en el contexto internacional, aún las investigaciones respecto a la importancia de los subconstructos no están desarrolladas, tal y como lo evidencia la publicación del estudio de Kieren hasta los 80's (Kieren, 1980) e incluso en México apenas se estaba configurando el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV (Moreno L. , 1995); adicional a ello, no olvidemos que las discusiones teóricas generalmente van más adelante que sus aplicaciones o traducciones en disposiciones curriculares.

En cambio, en el Plan de estudios 1997, se manifiestan claridades respecto a la concreción de algunos de los postulados de la teoría didáctica, en particular el posicionamiento de Kieren, (1980) para el caso de los diferentes subconstructos de las fracciones, y la Teoría de las situaciones didácticas como enfoque didáctico subyacente, aunque en gran medida implícito.

A partir de esta revisión podemos concluir en que, el conocimiento de las fracciones, como contenido o tema curricular explícito en la formación de profesores ha estado parcialmente ausente, y cuando aparece se muestra más cargado hacia los aspectos formales, (caso del Plan 1975), con la excepción del Plan 1997 donde explícitamente se hace alusión a las fracciones y sus diversos significados, a partir de un enfoque centrado en la resolución de problemas.

En tal sentido, una hipótesis que nos parece plausible, respecto a la configuración de las representaciones sociales, partiendo de esta ausencia explícita del conocimiento de las fracciones de manera curricular, es que éstas son producto de la vivencia cotidiana como alumnos y posteriormente (ante el vacío formativo) se reproducen en su labor de profesores, a partir de enseñar de manera semejante a como han sido enseñados.

I.3.4. Fracciones como “saber a enseñar”: una revisión de los materiales curriculares para la educación primaria. ¿Cuál es la representación social que se promueve?

A partir de la revisión del texto de Chevallard (1991) ha quedado claro que el saber matemático de referencia sufre transformaciones en su paso de saber sabio a saber a enseñar y de ahí a saber enseñado y aprendido; estas transformaciones dependen de

múltiples factores, de entre las cuales sobresalen las decisiones de diseño curricular y su puesta en “un texto de saber” (Cantoral, 1995, pág. 6).

En este apartado, partiendo de las consideraciones expuestas en el apartado anterior, relativas a la debilidad (cuando no ausencia) de las propuestas formativas en torno al concepto de fracciones en los diferentes planes de estudio para la formación de profesores, vamos a hacer una revisión de este concepto en los materiales curriculares para la educación primaria, con un marcado énfasis en el análisis de los libros de texto, en tanto nos interesa apreciar el tipo de representaciones que sobre el mismo se configuran de manera oficial; somos conscientes de que la configuración global de las representaciones sociales sobre las fracciones no depende únicamente de lo que de manera explícita se plantea en dichos materiales, sin embargo también somos conscientes de la imposibilidad para recuperarlas desde las interacciones cotidianas de los salones de clase (en los intercambios comunicativos y la interacción social), sobre todo cuando hacemos alusión al pasado, por tal motivo y con el riesgo que ello implica, vamos a centrarnos en el análisis de los libros de texto de cuatro generaciones curriculares, utilizando para ello los siguientes indicadores:

- * ¿Cuál es la primera lección o actividad con que se introduce el concepto?
- * ¿Cuál es la última lección o actividad que se plantea?
- * ¿Cuál o cuáles significados de la fracción se trabajan a lo largo de la escolarización primaria?
- * ¿De qué manera se introduce el lenguaje formal de las fracciones y los diferentes sistemas de representación?
- * ¿Cómo se trabajan los algoritmos de las fracciones?
- * ¿Qué elementos podemos inferir en la construcción de un “paquete de conocimientos” (Ma, 2010) para la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria?
- * ¿Cómo se podría caracterizar la representación sobre las fracciones históricamente construida?

A partir de estas preguntas guía, vamos a interrogar los libros de texto de cuatro generaciones: 1960¹⁹, considerando los siguientes (SEP, 1960; SEP, 1964; SEP, 1960 a; SEP, 1961; SEP, 1962); 1972 desde la revisión de las versiones de los libros (SEP, 1990; SEP, 1982; SEP, 1982; SEP, 1984; SEP, 1972; SEP, 1982); 1993 a partir de (SEP, 1993; SEP, 1993 a; SEP, 1994; SEP, 2000; SEP, 1999) y del 2011 los libros (SEP, 2011; SEP, 2011 a; SEP, 2011 b; SEP, 2011 c; SEP, 2011 d; SEP, 2011 e).

A partir de la intención del gobierno federal de dotar a todos los niños de libros de texto gratuitos y “únicos”²⁰, a nivel nacional se instala al mismo tiempo la generalización de un enfoque oficial a través de los diferentes planes de estudio y por ende representaciones específicas sobre el saber matemático atribuibles a cada periodo histórico.

Desde la creación de la Comisión Nacional de los libros de texto gratuito, en 1959, hasta la fecha, el imaginario social sobre el libro de texto se conserva, tal y como vemos en la siguiente cita:

Los LTG son el producto de un derecho social que todos ejercemos y pagamos con nuestros impuestos los distintos componentes del LTG (unicidad, obligatoriedad, gratuidad, propiedad y universalidad) no ponen en duda su viabilidad actual o futura, pero la falta de conocimiento sobre el impacto que el programa está generando y sus aportaciones al rendimiento académico sí pone en grave riesgo el aprendizaje efectivo y la calidad de los servicios de educación básica. (Anzures, 2011, pág. 385).

En nuestro país, el libro de texto se considera el instrumento básico por excelencia en la formación de las nuevas generaciones, y en gran medida “*representa una tendencia unificadora en la enseñanza a nivel nacional*” (Figueras, 1988, pág. 9) de ahí la importancia de su análisis, sobre todo también si partimos de la debilidad del tratamiento didáctico del tema de fracciones en los planes de estudio para la formación inicial de profesores; la hipótesis es que, a partir de su vivencia formativa como estudiantes de

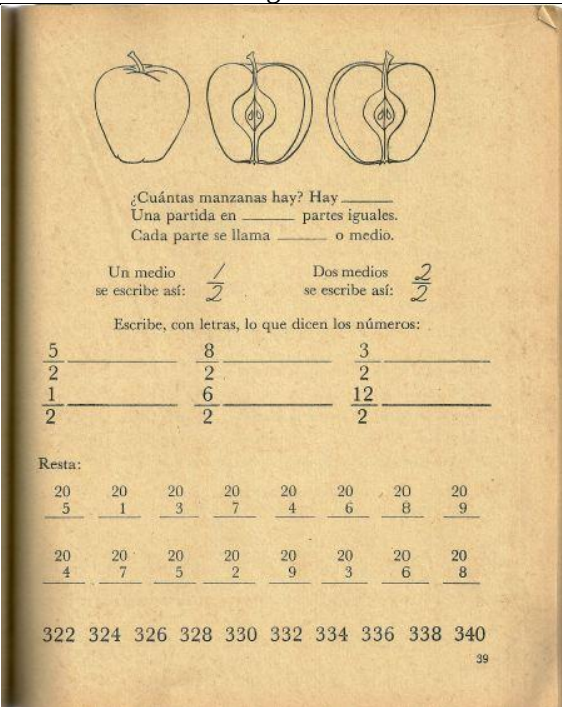
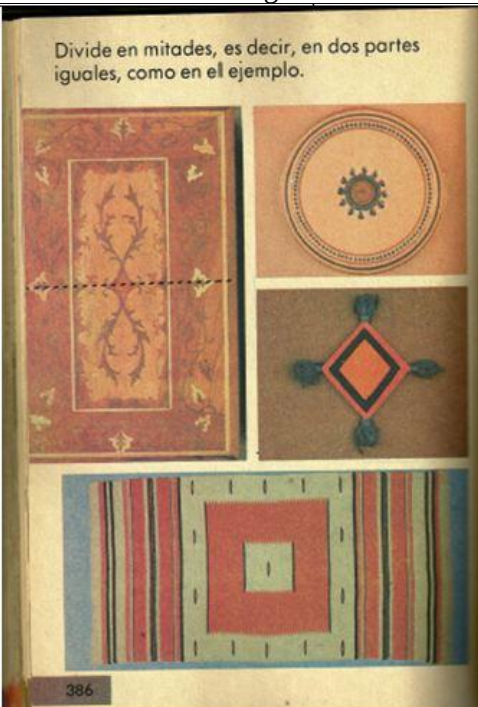
¹⁹ Como antecedente, en el texto de Ávila A. (1988) se mencionaban cuatro reformas a la enseñanza oficial de las matemáticas en México, para la educación primaria: 1944, 1960, 1972 y 1980 (parcial porque sólo afectó a 1º y 3º de primaria), sin embargo en nuestro análisis partimos de la reforma de 1960 porque es en este momento cuando se editan por primera vez libros de texto de distribución nacional, únicos y gratuitos, a partir de la promulgación del decreto que crea la Comisión Nacional de los libros de texto gratuito (12 de febrero de 1959), adicional a ello no consideramos la reforma de 1980, precisamente por su carácter de parcial.

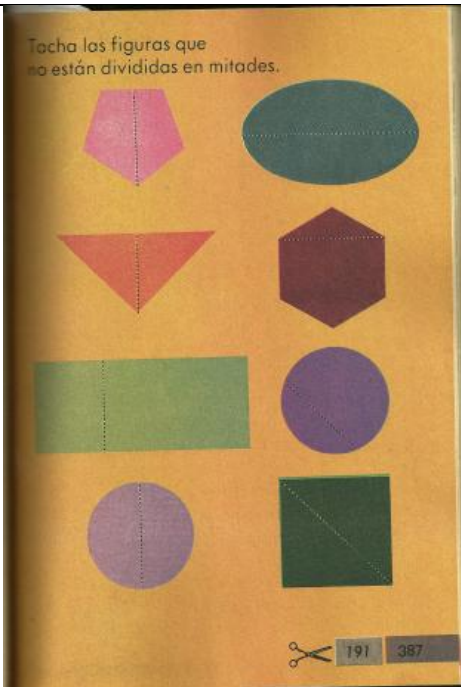
²⁰ El uso de comillas obedece a que utilizamos el calificativo de “únicos” para referirnos a su utilización como fuente principal para la enseñanza de las matemáticas, sin embargo no como la fuente exclusiva y menos en los tiempos actuales en que el uso de “guías didácticas” se ha hecho tan común y en ocasiones tiene mayor peso que el libro de texto (se dejan tareas para la casa, hay presión social para contestarla incluso de manera más sistemática que el mismo libro de texto).

educación primaria, los futuros profesores han construido las representaciones sociales que posteriormente regresan a ésta sobre todo cuando los procesos de formación inicial no logran que los estudiantes tomen conciencia de ellas y sus implicaciones prácticas.

En cuanto al tema de las fracciones, el primer contacto que tienen los niños con ellas, de manera formal escolarizada, puede determinar sus posteriores actitudes y muy posiblemente el grado de éxito o fracaso en su aprendizaje; en tal sentido ¿de qué manera se introduce este concepto a lo largo de los diferentes libros de texto? ¿Qué diferencias y/o semejanzas se aprecian en su introducción?

Tabla 7. Primer Lección o actividad con que inicia el tema de fracciones.

1960	1972
2º grado	1º grado
	

	
1993	2011
3° grado	2° antecedente y 3° explícito
3. Banderas de colores / Terminaron las vacaciones. En el salón de Luis forran algunas cajas para guardar su material. También hacen banderas de colores.  1 Luis quiere dividir un pliego de papel en 2 partes iguales para forrar 2 cajas. Con colores diferentes ilumina en el papel de Luis la parte que le corresponde a cada una de las cajas. 2 El equipo de Luis compró 3 pliegos de papel para hacer banderitas de México. Para hacer una banderita se necesita una parte verde, una blanca y una roja. Divide cada pliego para que se puedan hacer 4 banderitas del mismo tamaño.  ¿En cuántas partes iguales quedó dividido cada pliego? Luis y su equipo ya hicieron 2 banderitas de las 4 que quieren hacer. ¿Qué parte del pliego verde han utilizado?	46 Me da un litro? Lo que conoces. Dibuja en el recuadro lo que se te pide.  Para llevar a cabo las siguientes actividades necesitarán envases o botellas de plástico de dos litros, un litro, medio litro y un cuarto de litro. Marca los recipientes con su capacidad (dos litros, un litro, etcétera).  1. Formen equipos y contesten las preguntas. • ¿Con cuántas botellas de un cuarto de litro puedes llenar una de medio litro? • ¿Cuántas botellas de un cuarto de litro puedes llenar con una de medio litro? • ¿A una botella de medio litro, le cabrá lo mismo que a dos botellas de un cuarto de litro? ¿Por qué? 178 16 ¿Cuántos caben? Lo que conoces. Luis y su hermana Rosa ayudaron a pintar en la escuela los señalamientos de emergencia. Luis empleó $\frac{1}{4}$ litro de pintura y Rosa, $\frac{1}{2}$ de litro. ¿Quién usó más pintura? 1. En esta actividad van a necesitar recipientes de plástico de 1 litro, $\frac{1}{2}$ litro y $\frac{1}{4}$ de litro. En equipo utilicen dichos recipientes y contesten las siguientes preguntas. • ¿Cuántos recipientes de $\frac{1}{4}$ de litro se necesitan para llenar el envase de $\frac{1}{2}$ litro? • ¿Cuántos recipientes de $\frac{1}{2}$ litro caben en el de 1 litro? • ¿Cuántos de $\frac{1}{4}$ de litro necesitarán para llenar el envase de 1 litro? • ¿Cuántos de $\frac{1}{2}$ se usarán para llenar 2 litros? • ¿Cuántos recipientes de $\frac{1}{4}$ litro se necesitarán para llenar 3 litros? • ¿Cuántos recipientes de $\frac{1}{4}$ de litro se necesitarán para llenar 1 litro? Dato interesante Un centímetro de agua que contiene el cuerpo de un humano recién nacido (neonato) es aproximadamente de 75% y en un adulto de 60%. Por esto y para mantener tu salud, procura beber agua simple potable. 56

3 Usa una hoja blanca, una verde y una roja para que tengas los 3 colores de la bandera. **Corta** las hojas como tú creas, para que puedas hacer 4 banderitas del mismo tamaño.

4 El equipo de Rosa también compró 3 pliegos de papel, pero ellos quieren hacer banderas más grandes. **Divide** cada pliego para que se puedan hacer 2 banderas del mismo tamaño.



En el dibujo de arriba, **pon** una palomita a las partes que se usaron para hacer una bandera.

¿Qué parte de un pliego se usó para una bandera? ____

5 Ayuda a los demás equipos a dividir sus pliegos de papel.

Nosotros queremos hacer 8 banderas.



Nosotros queremos hacer 3 banderas.



2. Resuelve con un compañero y resuelvan los ejercicios.

- ¿Cuánta crema necesitará si su mamá le pide que compres $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ de crema?
- En el mercado compraste $1 \frac{1}{2}$ litros de leche para preparar un pastel y te sobraron $\frac{1}{4}$ litro más. ¿Qué cantidad de leche llevaste a casa?
- En la tienda de don Enrique venden crema a granel. Patricia desea comprar 2 litros, pero sólo tiene suficientes de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ litro. Escribe dos maneras diferentes en que Patricia puede llevar la crema que compró.

• Margarita compra leche fresca en un establo y pide al vendedor que la coloque en los siguientes recipientes: 1 de 1 litro, 3 de $\frac{1}{2}$ y 7 de $\frac{1}{4}$. ¿Qué cantidad de leche compró?

En los siguientes recuadros dibujen dos de las combinaciones que hicieron. En el tercer recuadro dibujen una propuesta diferente y explíquela a sus compañeros.

1

2

3

3. Resuelve las operaciones de números fraccionarios.

Ejemplo: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$ ____

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$ ____

$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} =$ ____

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$ ____

$1 + \frac{1}{2} =$ ____

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$ ____

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$ ____

Al concluir esta actividad compara tus resultados con los de tus compañeros. Si cometiste errores, corrígelos.

RETO La señora Patricia va a la tienda con un contenedor de 5 litros para comprar 3 litros de blanqueador.

Una vez que le han despedido el líquido, se da cuenta de que solamente le alcanza para comprar $1 \frac{1}{2}$ de litro y pide entonces esa cantidad. Si el encargado sólo tiene las medidas de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ de litro y no quiere vaciar todo el blanqueador antes de despacharlo, ¿cómo podrá concluir la cantidad de blanqueador que quiere la señora Patricia?

A partir de la comparación entre la primer lección o actividad podemos hacer algunos comentarios; en primer lugar, como podemos apreciar ha ido cambiando la apreciación respecto al grado escolar en el cual se introducen las fracciones, en 1960, se plantean en 2º grado, mientras que en 1972 desde 1º grado se plantea su conocimiento a partir del fraccionamiento de la unidad en “mitades”; para 1993, el trabajo de investigación de Dávila (1991) tuvo una importante influencia para que se postergara su introducción hasta el 3º grado de educación primaria, dado que se manifestaron dificultades de comprensión de este concepto por parte de los alumnos de la educación primaria, al respecto se dijo

“las fracciones se enseñaban desde primer grado, solamente las más simples, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, pero incluyendo ya la representación simbólica y las equivalencias en ese nivel. En aquel momento mi conclusión fue enfática: la enseñanza de las fracciones debía posponerse hasta tercer grado. Una segunda revisión de mi propio estudio y de los estudios realizados posteriormente, me llevan a matizar dicha conclusión: las experiencias más simples de reparto (repartos entre 2^n) podrían realizarse desde primer grado, cuidando la forma en que se nombra el contenido (no ‘fracciones’, tal vez ‘repartos en el nivel concreto’) y precisando lo que es factible encontrar” (Dávila, 2002, pág. 121)

Esta nueva conclusión, para el caso del Plan 2011 tuvo un eco parcial, como podemos ver en la tabla anterior, en segundo grado se introducen las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ en

una situación de medición de la capacidad de recipientes, sin hacer alusión explícita como contenido de fracciones; al igual que el Plan 93, en el 2011 se conserva su tratamiento formal hasta 3º grado de primaria.

A lo largo de la historia, el fraccionamiento en “mitades” o medios aparece como la constante para iniciar el tratamiento del tema, acompañado del fraccionamiento en cuartos y octavos (es decir fracciones del tipo $m/2^n$), sin embargo el contexto con el cual se le da sentido a este fraccionamiento ha variado:

1960: se remite a un contexto conocido por los niños, el reparto de una manzana, y se formaliza la fracción $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{2}$, pero además se amplía el rango a fracciones impropias, con denominador 2, con lo cual se genera la concepción de que la fracción es una extensión de los números enteros y el denominador sólo sirve para nombrarla.

1972: Al introducirse desde 1º grado, se cuidó que en la primera actividad sólo se hiciera el reparto y se nombrara como “mitades”; el contexto es una situación realista más alejada de los alumnos (sobre todo si comparamos con el contexto que se usa en el Plan de 1960) e inmediatamente se recurre a la representación gráfica a partir de figuras geométricas, con lo cual se introduce de manera implícita la noción de equitatividad en el reparto al solicitarle a los alumnos que tachen las figuras que no están divididas en mitades, considerando que dividir en mitades implica que sean “*dos partes iguales*” (SEP, 1990, pág. 386). En el libro de texto de primer grado, la última actividad de este tema, incluye el conocimiento de los símbolos $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$.

1993: En la lección 3 de 3º grado, vemos que el contexto que se utiliza, a diferencia de los libros de texto de los dos planes de estudio anteriores, es la elaboración de “banderas de colores” (en este grado los niños ya saben que nuestra bandera está formada por tres partes iguales, cada una con un color distinto) y por ello mismo, en lugar de las representaciones circulares, se usa el rectángulo como la figura geométrica que permite hacer el reparto; considerando este contexto se introducen de manera consecutiva las fracciones medios, cuartos, octavos y tercios, a partir del fraccionamiento de la unidad, pero sin formalizar simbólicamente ninguna de ellas, es decir, hay una priorización de la acción de repartir con lo cual se genera la necesidad de nombrar de alguna manera a cada una de las partes en que se divide la unidad.

A diferencia de la actividad del plan 1960, en ésta lección del plan 1993 se solicita explícitamente que se haga el reparto usando hojas de papel de igual área y haciendo los cortes necesarios para dividir cada una de ellas en cuatro partes. En esto coincide con la actividad del Plan 1972, en la cual se usa un material recortable para verificar la equidivisión en “mitades”.

2011: En este libro de texto (de 3º grado) lo primero que apreciamos es la extensión de la lección (3 páginas, en los anteriores fue de una a dos páginas), así como la cantidad de conceptos que se introducen en ella: las fracciones medios, cuartos y octavos, con su correspondiente símbolo; la suma de fracciones unitarias con igual denominador (y el algoritmo convencional,); la comparación de fracciones; la equivalencia de fracciones (sin formalizar); la resolución de problemas, involucrando fracciones mixtas; y la suma de fracciones con diferente denominador (sin formalizar), todo ello a partir de un contexto de medición de la capacidad de recipientes (litros).

En síntesis, aunque aparecen de manera privilegiada las fracciones del tipo $m/2^n$, como consecuencia de la facilidad que brinda el doblado y recortado en mitades y la misma comprensión que se puede obtener derivada de las experiencias matemáticas cotidianas de los niños, me parece que la actividad del libro de 3º del Plan 1993 puede contribuir a generar una representación más firme de la fracción como reparto, dado que el control de las variables utilizadas: hojas de papel rectangulares, trazado y recortado, cambios en la variable ‘número de divisiones’, permite que el niño aprenda significativamente a hacer un reparto simple. A diferencia de la lección del Plan 2011, el contexto de medición con que se plantea la introducción de las fracciones, dificulta el control de la equitatividad en los transvasados para verificar si realmente con 4 botellas de $\frac{1}{4}$ de litro se completa un litro, además hay que considerar que el planteamiento de la última pregunta de la página 56 contradice el contexto cotidiano (es muy difícil tener recipientes de $\frac{1}{8}$ de litro); estas dos condiciones, en nuestra cultura magisterial, orientan hacia la tendencia a trabajar de manera ostensiva y en lugar de permitir la actividad constructiva de los niños, ésta se puede orientar hacia un cálculo numérico.

Por otro lado, el análisis de la última lección que se trabaja con el tema es indicador de las expectativas y del cierre de un proceso con el tema de las fracciones, cobra importancia en tanto nos permite apreciar si se logra consolidar una representación explícita sobre el contenido; por ello en la siguiente tabla presentamos de manera

comparativa la última lección en que se trabaja el tema de fracciones en los diferentes libros de texto de cada plan de estudios.

Tabla 8. Última lección de fracciones. Comparativo 1960 – 2012.

Tabla 8. Ultima lección de fracciones. Comparativo 1960 – 2012.

1960

RAZONES Y PROPORCIONES

Ya has usado la fracción común como expresión de partes iguales de un entero o de un grupo de elementos, y también como una división.

$$\frac{1}{4} = .25$$

79

La fracción común también expresa una relación o razón entre dos números. Ejemplos:

a) Si tú tienes \$ 10.00 y tu compañero Juan, \$ 5.00, se dice que la razón entre lo que tú tienes y lo que tiene Juan es 2, la cual significa que tú tienes el doble de lo que tiene Juan. Esta razón o relación se obtiene dividiendo los dos números; así:

$$\frac{10}{5} = 2$$

b) Si José tiene \$ 5.00 y Juan \$ 10.00, la razón es $\frac{1}{2}$, la cual significa que José tiene la mitad de la cantidad que tiene Juan. Se obtiene así:

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

c) Si un niño tiene 12 canicas y otro 4, la razón es 3, porque el primer niño tiene tres veces el número de canicas del segundo. Se obtiene así:

$$\frac{12}{4} = 3$$

ch) Si el primer niño tiene 4 canicas y el segundo tiene 12, la razón es $\frac{1}{3}$, la cual significa que el primero tiene la tercera parte del número que tiene el segundo. Se obtiene así:

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

d) La razón entre estos dos segmentos es $\frac{3}{2}$ o sea, $1\frac{1}{2}$, la cual significa que el primer segmento tiene una vez y media la longitud del segundo.

En general, para obtener la razón de 2 números se expresan éstos en forma de fracción común y se simplifica la fracción.

Para dividir un número en dos partes que estén en una razón determinada procede como sigue:

a) Dividir 25 en la razón $\frac{2}{3}$

80

1972

79. División de fracciones

Recuerda que cuando divides dos fracciones como $\frac{2}{5} \div \frac{1}{3}$, el resultado representa el número que multiplicado por $\frac{1}{3}$, le da $\frac{2}{5}$.

En lecciones anteriores ya has visto un método para calcular el resultado:

$$\frac{2}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{5 \times 1} = \frac{6}{5}$$

Vamos ahora a tratar de aplicar estos conocimientos. Supón que vas a una tienda en la que sabes que todos los artículos han sido rebajados una cuarta parte de su precio original. Por tanto, siempre que veas un artículo sabrás que su precio es $\frac{3}{4}$ del precio original.

Si el precio reducido de un balón es de \$ 60.00 ¿cuál era el precio original? ¿Cuánto ahorraste en esa compra? Para obtener la respuesta hay que resolver la división:

$$60 \div \frac{3}{4}$$

representa el número cuyas tres cuartas partes es el número 60, y éste es precisamente el número que estás buscando. Así, obtienes:

$$60 \div \frac{3}{4} = \frac{60 \times 4}{3} = 20 \times 4 = 80$$

El precio original era, entonces \$80.00 y tu ahorro es, por tanto, \$80.00 — \$60.00 = \$20.00

265

1993

Lección 66 Grandes retos con números pequeños

Uso de las operaciones con fracciones

1. Resuelve los siguientes problemas y después compara tus resultados con los de otros compañeros.

Al contar sus canicas, Juan ve que la mitad son blancas, un tercio son rojas y el resto son azules. ¿Cuál es el menor número de canicas que puede tener Juan?

¿Qué parte del total son azules?

Lety separa sus estampas y ve que $\frac{1}{4}$ son de historia, $\frac{1}{5}$ de animales y las demás de geografía. ¿Cuál es el menor número de estampas que puede tener Lety?

Del total de revistas que tiene Carmen, $\frac{1}{3}$ son de deportes, $\frac{1}{5}$ de animales y el resto son de historietas.

¿Cuál es el menor número de revistas que puede tener Carmen?

El lunes me gasté $\frac{1}{5}$ del dinero que me dieron para la semana, el martes me gasté $\frac{1}{6}$, el miércoles $\frac{1}{10}$.

¿Cuánto dinero me pudieron haber dado? Hay más de una respuesta correcta.

Según la cantidad que anotaste en la pregunta anterior, ¿qué parte del total me quedó después del miércoles?

Para comprar un rompecabezas yo puse $\frac{1}{7}$ del costo, mi hermana puso $\frac{1}{8}$ y mi papá el resto.

¿Cuánto pudo haber costado el rompecabezas?

¿Qué parte del costo puso mi papá?

2. Anota las fracciones necesarias para establecer el equilibrio en cada móvil. Algunos tienen varias respuestas posibles.

3. En parejas, completa la tabla.

El equipo de caminata de la escuela de matemáticas en un círculo de 2 kilómetros. Registra en la siguiente tabla el número de kilómetros que recorren.

4. Resuelve los problemas siguientes.

a) El papa de Raúl necesita saber cuál es la longitud en centímetros de una varita de 22 pulgadas.

b) La mamá de Leticia trabaja en un restaurante, para preparar un guiso necesita comprar 1 kg de jamón. Si el kg cuesta \$45, ¿cuánto tendrá que pagar?

c) Rina compró 5 kg de papas que costaron \$10.00 el kg. ¿Cuánto pagó?

d) Dora Luisa tiene un terreno que mide 1 km de ancho y 2 km de largo, quiere sembrar tomates. Si cada semilla requiere 500 gramos de abono, ¿cuántas semillas debe comprar si cada kg de abono cuesta \$10.00, ¿cuánto le costará el abono?

e) Guadalupe fue a la librería a comprar 15 m de enciclopedia que necesitaba para la clase de historia. Si cada enciclopedia cuesta \$10.00, ¿cuánto pagó por todo el enciclopedia?

f) Juanito ganó 120 pesos de una carrera que le encargó su mamá. Si el metro cuesta \$0.80 y su mamá le dio \$40.00, ¿cuánto le quedó de la carrera?

g) ¿Por qué?

5. Lee el siguiente texto extraído del libro "El mundo ambiente" Problemas en México y el mundo, publicado por la Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales. Con base en la tabla, responde las preguntas que se piden.

Si igual virtual se refiere a la cantidad total de agua que se requiere para la obtención de un producto, incluyendo la utilizada durante el cultivo de la planta, el procesamiento de los animales, el procesamiento de los productos industriales.

Fuente: National Geographic, 2010.

Por ejemplo, para producir 1 vaso de jugo de naranja se requieren en total 370 L de agua, para sembrar los naranjos, para regarlos, etcétera.

¿Cuánta agua virtual se necesita para obtener 12 vasos de jugo de naranja?

Se utilizan 3 000 L de agua para obtener huevos, ¿cuántos kilogramos de huevos se producen?

Construye cuántos litros de agua se utilizan para producir los siguientes kilogramos de tortillas:

1 kg

2 kg

3 kg

4 kg

5 kg

6 kg

7 kg

8 kg

9 kg

10 kg

11 kg

12 kg

13 kg

14 kg

15 kg

16 kg

17 kg

18 kg

19 kg

20 kg

21 kg

22 kg

23 kg

24 kg

25 kg

26 kg

27 kg

28 kg

29 kg

30 kg

31 kg

32 kg

33 kg

34 kg

35 kg

36 kg

37 kg

38 kg

39 kg

40 kg

41 kg

42 kg

43 kg

44 kg

45 kg

46 kg

47 kg

48 kg

49 kg

50 kg

51 kg

52 kg

53 kg

54 kg

55 kg

56 kg

57 kg

58 kg

59 kg

60 kg

61 kg

62 kg

63 kg

64 kg

65 kg

66 kg

67 kg

68 kg

69 kg

70 kg

71 kg

72 kg

73 kg

74 kg

75 kg

76 kg

77 kg

78 kg

79 kg

80 kg

81 kg

82 kg

83 kg

84 kg

85 kg

86 kg

87 kg

88 kg

89 kg

90 kg

91 kg

92 kg

93 kg

94 kg

95 kg

96 kg

97 kg

98 kg

99 kg

100 kg

101 kg

102 kg

103 kg

104 kg

105 kg

106 kg

107 kg

108 kg

109 kg

110 kg

111 kg

112 kg

113 kg

114 kg

115 kg

116 kg

117 kg

118 kg

119 kg

120 kg

121 kg

122 kg

123 kg

124 kg

125 kg

126 kg

127 kg

128 kg

129 kg

130 kg

131 kg

132 kg

133 kg

134 kg

135 kg

136 kg

137 kg

138 kg

139 kg

140 kg

141 kg

142 kg

143 kg

144 kg

145 kg

146 kg

147 kg

148 kg

149 kg

150 kg

151 kg

En el caso del Plan 1972, recuperamos una lección de 5° grado, dado que en los mismos materiales curriculares se afirma que el 6° grado *“pretende afirmar los conocimientos que posee el niño más que desarrollar conocimientos nuevo”* (SEP, 1982, pág. 61), además de que el libro de texto de dicho grado, después de su análisis, me parece que efectivamente en él se logra la consolidación del conocimiento matemático que se considera fundamental para la educación primaria.

Esta comparación entre la última lección de cada uno de los planes de estudio nos permite apreciar la representación sobre el nivel de complejidad con que se deben enseñar las fracciones, en tal sentido vemos que, en la lección de 1960 se hacen explícitos los diferentes significados de la fracción, con todo y el incipiente desarrollo de la teoría didáctica que había hasta esa fecha; al respecto dice el libro de texto: *“Ya has usado la fracción común como expresión de partes iguales de un entero o de un grupo de elementos, y también como una división. La fracción común también expresa una relación o razón entre dos números* (SEP, 1962, págs. 79 - 80)”, con esta afirmación se explicita el saber matemático con que el niño debe quedarse y al mismo tiempo se delimitan los significados de la fracción como parte – todo (continuo o discreto), como cociente y como razón; cabe mencionar que, aunque en la cita anterior no se enuncian, tampoco quedan fuera los significados de la fracción medida y operador multiplicativo (tal y como veremos en la tabla 13: Paquete de conocimientos. Plan 1960, de 2° a 6° grado de educación primaria de acuerdo a este plan de estudios; el contexto de medida aparece desde 2° grado y la multiplicación en 4° grado).

En el caso del plan 1972, durante todos los grados de la educación primaria se trabajan las fracciones, con diferente nivel de profundidad, ello permitió a los diseñadores que, en las últimas lecciones de 5° grado, pusieran una serie de problemas para aplicar los conceptos aprendidos, de tal manera que en la lección 79 se concluye el tratamiento del tema con la resolución de 9 problemas de aplicación del algoritmo de la división; este plan de estudios, en el caso de matemáticas, pretende que éstas sean *“un lenguaje que le ayude a organizar las ideas e informarse sobre su ambiente y a plantear y resolver una gran diversidad de problemas que surgen de dicho ambiente* (SEP, 1988, pág. 59)”, en tal sentido, las fracciones son concebidas como un lenguaje y como tal se estudian sus propiedades como objeto matemático.

Por su parte, el libro de texto de 6° grado del plan 1993 plante una especie de recapitulación de los conocimientos sobre las fracciones y a la vez el título del contenido (en la cintilla naranja de la lección) “uso de las operaciones con fracciones” redondea la concepción de la matemática que se ha trabajado durante toda la educación primaria, como herramienta para resolver una variedad de problemas; el hecho de que se cierre con el planteamiento y resolución de problemas no debe confundirse con el enfoque aprendo aplico, al contrario, en este plan de estudios, la fracción en todo momento se trabaja contextualizada en situaciones problema (recordemos la estructura de la primera lección “Banderas de colores”).

Una acotación merece ser enunciada, desde que se formuló este plan de estudios (SEP, 1993) se dijo que uno de los principales cambios, respecto al tema que nos ocupa, era la supresión de los contenidos relativos a la multiplicación y a la división de fracciones (se trasladó su enseñanza a la escuela secundaria), entendidos como conocimientos formales, en cambio se plantean situaciones de aplicación de la fracción como cociente y operador multiplicativo en situaciones sencillas, muy al estilo del posicionamiento propuesto por Freudenthal (1994).

Finalmente, en el Plan 2011, también se cierra el proceso con la resolución de problemas multiplicativos de fracciones, en tanto se conservan los saberes formales de la multiplicación y división de fracciones como un conocimiento para la escuela secundaria. La diferencia con el tipo de problemas planteados en la última lección de fracciones en el Plan 1993 está en que en el 2011 se combina la utilización de fracciones comunes con fracciones decimales.

Ahora bien, es obvio decirlo que entre la primera lección o actividad y la última, donde se trabaja el tema de las fracciones, median una serie de lecciones y actividades que configuran un proceso didáctico; en lo que sigue presentamos la progresión de las actividades, por cada grado escolar y en los diferentes planes de estudio, con la intención de precisar los elementos que pueden configurar un “paquete de conocimientos” (Ma, 2010) específico de la enseñanza de las fracciones en la educación primaria.

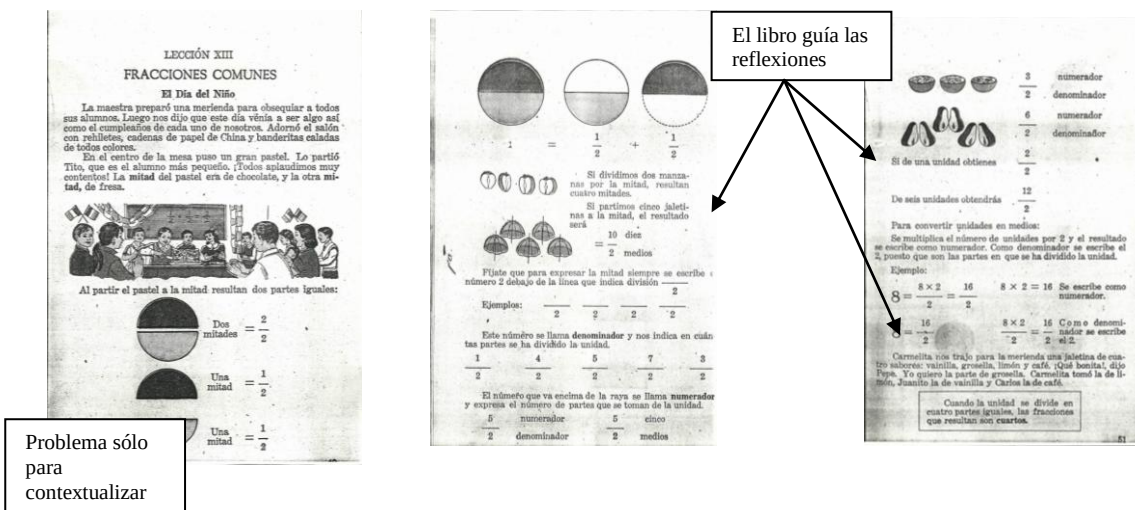
Tabla 9. Paquete de conocimientos. Plan 1960

Grado	Aspecto que se trabaja
2°	Introducción de la fracción $\frac{1}{2}$ al partir en dos una “manzana”. Primero fracción unitaria y luego como fracción impropia ($\frac{6}{2}$, por ejemplo). Introducción de las fracciones: cuartos y tercios. Conversión de fracciones

	impropias a enteros y viceversa. Situaciones de reparto. Medios y cuartos en un contexto de medición de capacidad de recipientes. Introducción de la fracción: sextos, en un contexto de reparto de un pastel. Resolución de problemas usando las fracciones $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ en un contexto de medición.
3º	Introducción de la fracción $\frac{1}{2}$ como “mitad de”. Formalización de los nombres: denominador, numerador. Uso de un contexto realista cotidiano. Conversión de enteros a medios, vía la multiplicación del numerador. $8 = \frac{8 \times 2}{2} = \frac{16}{2}$ División del entero en cuartos; equivalencia entre medios y cuartos a nivel gráfico y simbólico. Introducción de la fracción: octavos, a partir de la división de círculos. Comparación de octavos, con su equivalencia en cuartos y medios. Suma y resta de fracciones con igual denominador. Suma y resta de fracciones con diferente denominador, usando las equivalencias conocidas (medios, cuartos y octavos). Introducción de las fracciones en tercios y sextos. De lo gráfico a lo simbólico. Equivalencia y conversión de tercios a sextos. Suma y resta de fracciones con igual y con diferente denominador. Aplicación de las equivalencias. Introducción de la fracción: quintos y décimos, a partir de la división de círculos. En todos los casos se va del reparto a nivel gráfico a su simbolización. Equivalencia entre quintos y décimos. Suma y resta de fracciones con igual y con diferente denominador, incorporando el rango numérico revisado hasta el momento.
4º	Fracciones comunes: medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, octavos, doceavos. Equivalencia, comparación y orden. Fracciones propias e impropias; comparación entre dos fracciones con el mismo numerador pero diferente denominador. Números mixtos; conversión de fracciones impropias a números mixtos. Formalización de los conceptos: fracción impropia, número mixto; y del procedimiento de conversión. Simplificación de fracciones a partir de la división. Institucionalización del procedimiento. Adición y sustracción de fracciones de diferente denominador a partir de la reducción a un común denominador, mediante su equivalencia. Construcción de una “tabla de equivalencias”. Multiplicación de fracciones: entero por fracción y fracción por fracción. Formalización del procedimiento convencional. División de fracciones. Formalización del procedimiento: “invierto y multiplico”
5º	Comparación de fracciones, de $\frac{1}{2}$ hasta $\frac{1}{12}$. Equivalencias, comparación y orden. Suma y resta de fracciones con diferente denominador. Fracciones mixtas. Resolución de sumas y restas utilizando el común denominador (hasta cuatro sumandos). Suma y resta de números mixtos, simplificación de resultados. Problemas de suma y resta de fracciones con igual y diferente denominador.

	Multiplicación de quebrados: fracción por entero, fracción por fracción, número mixto por número mixto. Resolución posterior de una situación problemática. División de quebrados a partir de la utilización del “recíproco” (pág. 94): fracción entre entero, entero entre fracción, fracción entre fracción, número mixto entre entero, entero entre número mixto, número mixto entre número mixto. Resolución de problemas en contexto de reparto y medición, usando los algoritmos aprendidos. Ejercitación de los algoritmos aprendidos: suma, resta, multiplicación y división. Entretenimientos y acertijos usando fracciones. Equivalencia entre las fracciones comunes y las decimales. Suma y resta.
6º	Multiplicación de fracción por entero en forma “extractiva”: $\frac{1}{4}$ de 12 = 3. Uso de contexto discreto. División de enteros entre decimales. Conversión de decimales a fracciones. Significado de “cuántas veces cabe...” Repaso de varios conceptos de las fracciones comunes: su uso como medida, reparto, equivalencia, fracciones propias e impropias, números mixtos, simplificación y conversión de fracciones comunes y decimales, reducción a un común denominador. Cálculo del común denominador a partir de los factores primos. Operaciones con fracciones comunes, suma y resta con igual denominador, con diferente denominador (reducción a un común denominador mediante fracciones equivalentes) y números mixtos. Multiplicación de fracciones: como suma abreviada y como partes de un entero. Casos: entero por fracción, fracción por entero; fracción por fracción, números mixtos; multiplicación de tres o más fracciones. División de fracciones: entero entre fracción, fracción entre entero y fracción entre fracción. Uso del recíproco del divisor. Fracción como expresión de una relación o razón entre dos números. Fracciones en los porcentajes. De los porcentajes a las fracciones decimales y de ahí a la fracción común.

A partir de la revisión que hicimos de los libros de texto de matemáticas de este Plan de estudios, podemos decir que el modelo didáctico que se utiliza para la enseñanza de las fracciones se caracteriza por los siguientes componentes: se inicia con el planteamiento de un problema, el cual sólo sirve para dotar de un cierto contexto al contenido que se va a trabajar, ya que no se pide que los niños lo resuelvan, sino que el mismo libro los guía para resaltar el saber en juego que se pretende que aprendan; como ejemplo veamos la siguiente lección:



Cabe mencionar que esta lección se desarrolla en 12 páginas (SEP, 1964, págs. 49 - 60), sin embargo sólo presentamos estas tres, dado que se conserva el formato, es decir, con este contexto realista “El día del niño”, se introducen las fracciones en medios, cuartos, octavos, tercios, sextos, quintos y décimos, además de los conceptos de numerador y denominador, acompañados de las equivalencias entre pares de fracciones (medios, con cuartos; cuartos con octavos; tercios con sextos; y quintos con décimos) y finalmente la suma de fracciones usando las equivalencias conocidas. Decíamos que el planteamiento del problema sólo es un pretexto porque inmediatamente se abandona, dado que no se resuelve, y se deja paso a la partición de unidades representadas por modelos continuos (circulares predominantemente y en algunos casos rectangulares) y con ello a la abstracción de las propiedades de la fracción y a su tratamiento como objeto de estudio.

Un ejemplo del tratamiento de las fracciones como objeto de estudio, lo encontramos desde el momento mismo en que desde cuarto grado se formaliza el algoritmo de la multiplicación y la división de fracciones y se fortalecen en los grados escolares sucesivos (SEP, 1960 a, págs. 54 - 55); además, como complemento al libro del alumno se incluyó un “cuaderno de trabajo” en el cual los alumnos ejercitan los conocimientos aprendidos.

Al comparar el conocimiento matemático de este Plan (1960) con el conocimiento matemático del Plan 1972, nos damos cuenta que este último comparte con su antecesor la concepción de las matemáticas como un lenguaje y su tratamiento como objeto de estudio, aún más, de los libro de texto de matemáticas de los cuatro planes de estudios analizados, en el conjunto de los correspondientes a este Plan de estudios, la cantidad de actividades donde se trabaja el tema de fracciones es mucho mayor, como ejemplo de esta amplitud, en

el libro de 5º grado (SEP, 1972) se trabajan las fracciones en 82 páginas de un total de 272 que tiene el libro de texto, lo cual representa un 30.5 % de su contenido.

La secuencia de actividades la sintetizamos en la siguiente tabla:

Tabla 10. Paquete de conocimientos, Plan 1972

Grado	Contenido o aspecto
1º	Introducción de las fracciones unitarias $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, usando representaciones gráficas y el símbolo numérico. La denominación es “mitad” y “cuarta parte”.
2º	Fraccionamiento e integración de la unidad, en medios y cuartos. Suma de fracciones de igual denominador para integrar la unidad. Medición con fracciones (desde los dibujos del libro), usando “medios” y “cuartos”.
3º	La fracción $\frac{1}{2}$ se introduce con la denominación “una mitad” Se introduce la fracción $\frac{1}{3}$ con la denominación “tercera parte”, a partir del fraccionamiento de la unidad. Fracciones unitarias: $\frac{1}{4}$ = una cuarta parte, $\frac{1}{5}$ = una quinta parte y $\frac{1}{6}$ = una sexta parte. Modelo: de lo gráfico, a lo verbal y a lo simbólico. Comparación de fracciones: $\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{4}$ (dentro de una misma representación gráfica) y $\frac{1}{5}$ con $\frac{1}{3}$ (a partir de dos rectángulos con igual área – se resalta esta condición). Reparto: $\frac{1}{7}$ = una séptima parte; $\frac{1}{8}$ = una octava parte, $\frac{1}{9}$ = una novena parte y $\frac{1}{10}$ = una décima parte. Comparación y orden de las fracciones estudiadas. Identificación de fracciones en figuras subdivididas según el rango a identificar. Fracción impropia a partir de la suma de fracciones, por ejemplo $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$. Suma de fracciones con igual denominador y a partir del conteo. Fracción como medida: un decímetro dividido en “quintas partes” y luego en “octavas partes”. Resolución de problemas de resta de fracciones con igual denominador; concepto de quitar y concepto de diferencia entre dos cantidades (pág. 126 – 127) Ejercicios de resta de fracciones (propias e impropias) con igual denominador. Invención de problemas a partir de las operaciones resueltas. Introducción de las fracciones impropias a partir de completar una o varias unidades, por ejemplo $1 = \frac{9}{9}$; $1 = \frac{80}{80}$; $\frac{6}{2} = 3$; $\frac{15}{5} = 3$ Introducción de las fracciones mixtas a partir de lo que excede a la unidad. Símbolo numérico: $1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5} = 1 \frac{4}{5}$, se lee “un entero y cuatro quintos” (se incorporan como fracciones mixtas, doceavos y centésimos) Resolución de problemas usando fracciones mixtas. Introducción de la equivalencia de fracciones: a $\frac{1}{2}$, a $\frac{1}{3}$ y luego con todo el rango conocido hasta el momento. Fracciones decimales (décimos y centésimos): identificación y conversión a expresiones decimales.
4º	Denominación: $\frac{1}{2}$ = un medio, $\frac{1}{3}$ = un tercio, $\frac{1}{4}$ = un cuarto, $\frac{1}{5}$ = un quinto. Partes de unidad, usando magnitudes discretas. Introducción de los términos numerador y denominador. Suma de fracciones propias con igual denominador: formalización del

	procedimiento. Suma de fracciones impropias con igual denominador. Resolución de problemas. Ubicación, comparación y equivalencia de quebrados en la recta numérica. Suma y resta de fracciones con diferente denominador a partir de completar (o sustraer una parte de) la unidad. Uso de la recta numérica para sumar y restar “quebrados” con igual denominador. Uso de fracciones sencillas en las escalas: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$. Introducción a la suma de fracciones con diferente denominador a partir de las equivalencias: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{15}{30}$. Uso de la equivalencia en la comparación, suma y resta de fracciones. Cálculo de fracciones equivalentes, multiplicando numerador y denominador por el mismo número entero. Comparación de fracciones con diferente denominador a partir de encontrar equivalencias. Obtención del común denominador a partir de multiplicar los denominadores entre sí. Ampliación del rango de fracciones equivalentes a veinticuatroavos y uso en la suma y resta. Institucionalización del procedimiento para encontrar fracciones equivalentes a partir de multiplicar el numerador y denominador de una fracción por el denominador de la otra. Uso en la suma y resta de fracciones. Suma de fracciones impropias con diferente denominador. Uso del denominador 1, para la conversión de enteros a quebrados, por ejemplo $\frac{7}{1} = \frac{7}{1} \times \frac{4}{4} = \frac{28}{4}$; Comparación de enteros con fracciones. Institucionalización del significado de número mixto: “una manera de escribir la suma de un entero y una fracción” (pág. 197) Conversión de números mixtos a quebrados. Resolución de problemas de suma y resta de fracciones con diferente denominador a partir de la conversión en fracciones equivalentes. Fracciones y decimales en un contexto de medición de capacidad y peso.
5°	Reconocimiento, ubicación y representación de fracciones propias, usando magnitudes continuas y discretas. Equivalencia de fracciones, a partir de fracciones unitarias en un rango de medios a onceavos. Procedimiento de multiplicar o dividir tanto numerador como denominador de una fracción por el mismo número. Comprobación de la equivalencia de fracciones por el método de productos cruzados. (El rango de fracciones aumenta a 8192/20480). Comparación y orden de fracciones con igual y diferente denominador. Representación sobre la recta numérica. Suma de fracciones con diferente denominador, usando equivalencias. Sustracción de fracciones con diferente denominador, usando equivalencias. Fracciones decimales; conversión de fracción común a fracción decimal y expresión decimal. Producto de un entero por una fracción. La multiplicación como suma abreviada. Dedución de la fórmula $n \times \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \times n = \frac{n}{m}$ Multiplicación de fracción por fracción, en el sentido de parte de parte (un medio de la mitad, un medio de la tercera parte, un medio de un cuarto y un

	medio de tres cuartos). Institucionalización de la ecuación $\frac{1}{2} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{2 \times d}$ (ampliando el rango a $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ para sustituirlo en la ecuación). Representación gráfica del producto de dos fracciones mediante el modelo de áreas y la utilización de la ecuación $\frac{1}{2} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{2 \times d}$; extensión a fracciones no unitarias, por ejemplo $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = 3 \times \frac{2}{4 \times 5}$, para concluir en que $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$ Multiplicación de tres fracciones usando la propiedad asociativa. Introducción del inverso multiplicativo. Fracciones en la probabilidad clásica y la comparación de probabilidades. Cociente de fracciones. Uso del inverso multiplicativo. La división como “parte de” y “veces contenido en” (¿Cuántas veces contiene $\frac{4}{3}$ a $\frac{1}{6}$?); el número que resulta de un cociente indicado (¿cuál es el número que multiplicado por 5 da como resultado 3?) Ubicación de fracciones en la recta numérica: fracciones propias, impropias y mixtas; unidad definida y no definida. Resta de fracciones usando la recta numérica. Resolución de problemas de suma y resta de fracciones con diferente denominador; conversión a fracciones equivalentes. Resolución de problemas de multiplicación usando el algoritmo convencional. Resolución de problemas de división aplicando el algoritmo convencional.
6º	Comparación de números racionales expresados como fracciones utilizando la recta numérica. Fracciones comunes y fracciones decimales. Equivalencia de fracciones, representación en la recta numérica. Simplificación de fracciones a partir de la división del numerador y denominador por un mismo número. Resolución de problemas que implican adición y sustracción de fracciones de diferente denominador. Interpretación de “tanto por ciento” como una fracción con denominador 100. Resolución de problemas con porcentajes. Comprobación de la equivalencia de fracciones por medio de productos cruzados. Uso de las fracciones en el cálculo de probabilidades. Expresión de fracciones como decimales y decimales como fracciones.

En el análisis de este paquete de conocimientos, es importante mencionar que en los tres primeros grados, en alusión al uso cotidiano del concepto, se recupera el concepto de “mitad” en lugar de “un medio”, así como la idea de “tercera parte” y “quintas partes”, antes de introducir la denominación formal, como tercios o quintos; estas denominaciones pueden resultar conflictivas y llevar a confusión con los números ordinales, a pesar de la intención de querer vincular el lenguaje natural, las expresiones simbólicas y el lenguaje gráfico como diferentes “registros de representación semiótica” (Fandiño Pinilla, 2009, pág. 133).

El modelo de enseñanza que se plantea a lo largo de los seis grados se podría caracterizar de la siguiente manera: en los grados inferiores (1º a 3º) se recupera un contexto realista, que rápidamente se abandona para dar paso a la utilización de representaciones gráficas (figuras geométricas) a partir de las cuales se construye el concepto a través del significado de fraccionamiento de la unidad (incluso en los grados superiores ya no se hace alusión al contexto realista); a continuación se establecen relaciones numéricas de acuerdo al concepto estudiado (como lenguaje y objeto matemático); generalización de las relaciones y formulación de un modelo matemático (algebraico); en algunas lecciones se plantea explícitamente una extensión del concepto (conectando, aunque no siempre, los aprendizajes nuevos, con los conocimientos previos) y posteriormente se exige su ejercitación para fortalecer su aprendizaje; cierra el proceso (no en cada lección, sino en cada grado) el planteamiento y resolución de problemas matemáticos.

El siguiente ejemplo (SEP, 1972, págs. 38 - 41) es ilustrativo del esquema de enseñanza que hemos brevemente caracterizado:

Representaciones gráficas para introducir el concepto

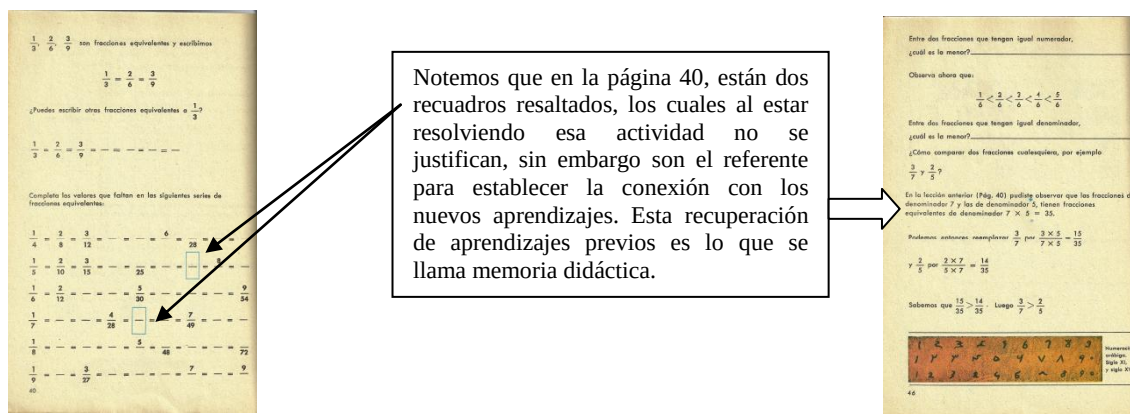
Formalización del concepto: fracciones equivalentes

Establecimiento de relaciones numéricas del concepto

Generalización de las relaciones: modelo matemático.

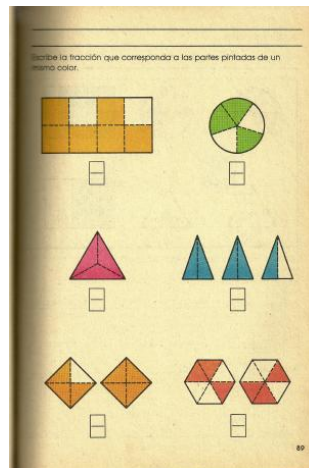
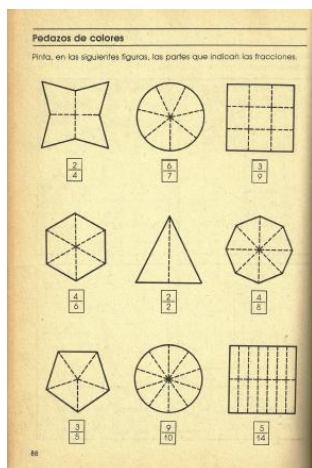
En lo general este es el modelo didáctico que se sigue en las lecciones para el aprendizaje de las fracciones, complementado, como ya decíamos, con actividades de ejercitación y de resolución de problemas para aplicar los conocimientos adquiridos.

En este momento quiero resaltar un aspecto que en teoría didáctica se llama “memoria didáctica” (Ávila A. , 2001) y que de manera explícita se hace alusión en algunas de las lecciones de los libros de texto de este Plan de estudio, por ejemplo en la siguiente actividad, con el propósito de que los niños comparen fracciones (SEP, 1972, pág. 45) se recuperan los aprendizajes sobre la equivalencia de fracciones, aprendidos en la página 40 del mismo libro, con lo cual se hace una extensión del concepto y su conexión con aprendizajes nuevos.



Hago alusión a esto porque, en la búsqueda de un aprendizaje significativo, la articulación entre diferentes aprendizajes contribuye para que ello se logre; habitualmente esta tarea se le deja al profesor (en el Plan 1993, esta tarea de transferencia de aprendizajes e incluso de formalización de saberes está a cargo totalmente del profesor), con el riesgo de que luego él se las deje a los niños y por ende no se logre. Llama la atención que desde el diseño curricular se expliciten estas vinculaciones, lo cual sólo se presenta parcialmente en algunos de los libros de texto de este plan de estudios; aquí hay una tarea muy importante para los diseñadores de materiales curriculares, con lo cual se podrían fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta noción.

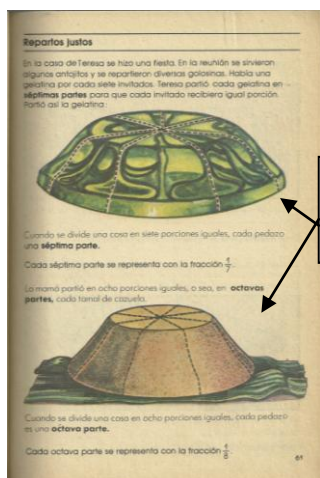
En otro orden de ideas, también corresponde a esta época la popularización de las figuras tipo para representar los repartos, es decir, figuras geométricas previamente divididas para que los niños identificaran la fracción asociada (SEP, 1982, págs. 88 - 89), tal y como vemos en las siguientes imágenes:



Adicional a estos modelos geométricos, se introducen modelos realistas de representación de la fracción, sin embargo, en coincidencia con Figueras (1988)

“En estas estrategias de enseñanza, en las que la imagen es esencial, la traducción de un lenguaje a otro no sólo está presente en la resolución de problemas formulados en lenguaje usual, sino que es un requisito indispensable para comprender las ideas que están presentes en la imagen. (...) Por ejemplo en el ‘modelo del pastel’, la estrategia didáctica, además de incluir factores de invarianza del área, apela a la percepción, visualización e imaginación espacial del alumno. Con respecto a esta última, resaltan las habilidades que permiten imaginar las transformaciones de partición y movimiento subyacentes en una imagen estática, que muestra el resultado de una serie de cambios que ha sufrido el todo” (Figueras, 1988, pág. 20)

Al respecto las siguientes actividades son ilustrativas de la complejidad a la que se enfrenta el niño:



Partición,
conservación del
volumen



Invarianza del
área

Percepción,
imaginación
espacial

De igual manera la referencia a la fracción como “quebrado” es una herencia formal de estos materiales curriculares (lo cual no quiere decir que se use esta denominación a partir de aquí²¹, le denomino herencia formal, porque aparece definida así en libros de texto de circulación nacional).

El Plan de estudios 1993 (SEP, 1993), como ya decíamos en párrafos anteriores, posterga el inicio de la enseñanza de las fracciones hasta el tercer grado y traslada el conocimiento formal de la multiplicación y la división de fracciones hasta la educación secundaria; adicional a ello asume como enfoque didáctico la idea de hacer matemáticas a través de la resolución de problemas. Con esta decisión, se reducen de manera explícita los conocimientos formales y el proceso didáctico toma como centro de la atención el planteamiento de situaciones problema, a partir de las cuales y por un proceso de reflexión compartida con sus compañeros y de formalización por parte del profesor, los alumnos construyen su conocimiento.

A partir de la revisión de las diferentes lecciones y actividades con que se trabaja el concepto de fracción, podemos inferir que los saberes matemáticos adquieren el carácter de herramientas y ello se confirma a partir de la siguiente afirmación

“El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar, de manera flexible, para resolver problemas. De ahí que su construcción amerite procesos de estudio más o menos largos que van de lo informal a lo convencional, en términos de lenguaje, representaciones y procedimientos. La actividad intelectual fundamental en estos procesos se apoya más en el razonamiento que en la memorización. (SEP, 2002)

Cabe mencionar que, desde la revisión de los libros de texto, dicha afirmación se traduce en un cambio radical en el diseño de estos materiales; si comparamos la estructura y el contenido de una lección de cualquiera de los libros de texto de los dos planes de estudio anteriores, con una de este plan, las diferencias son evidentes, en este último caso se presentan muy pocas definiciones y formalizaciones de los saberes, es decir no hay momentos de institucionalización de saberes explícitos desde los libros de texto [se sobreentiende que es una de las tareas del profesor, tal y como lo marca la teoría de las

²¹ Desde 1907, en su obra “Artículos pedagógicos”, que reeditó la SEP (Secretaría de Educación Pública, en México) en 1964 ya se hablaba de la fracción como “quebrado” en los siguientes términos “*tener noción de lo que es un medio, un octavo y un quinto, es tener ciertas nociones sobre los quebrados*” (Carrillo C. , 1964, pág. 653)

situaciones didácticas – al respecto véase Brousseau (1994)], sin embargo quedó demostrado que esto generó serios problemas

“Llama la atención que la confrontación de resultados y la elaboración y prueba de hipótesis – elementos introducidos con la reforma – tienen escasa presencia en el discurso de los profesores. Más escasa aún la tiene el maestro que valida o institucionaliza el saber (Ávila, y otros, 2004, pág. 353)”

En el mismo reporte de investigación de donde recuperamos esta cita se resalta la gran importancia y utilidad que le dan los profesores a los libros de texto, en tal sentido no debe sorprendernos que no se hayan instalado las representaciones que los diseñadores esperaban, relativas a la importancia de la confrontación de resultados – y ello a pesar de que esta tarea sí aparece de manera explícita – o a la validación, ya no se diga respecto al papel de la institucionalización, sobre todo en la consideración de que no se plantea de manera explícita, en los libros de texto, la forma de cómo institucionalizar los saberes o los procedimientos.

Con estas consideraciones recuperamos el paquete de conocimientos que curricularmente se plantea para cada grado escolar.

Tabla 11. Paquete de conocimientos, Plan 1993

Grado	Contenidos de fracciones (SEP, 1993)	Contenidos asociados
3º	Introducción de la noción de fracción en casos sencillos (por ejemplo, medios, cuartos y octavos) mediante actividades de reparto y medición de longitudes Representación convencional de las fracciones Planteamiento y resolución de problemas que impliquen suma de fracciones sencillas, mediante manipulación de material	Resolución de problemas sencillos que impliquen la medición de longitudes utilizando el medio metro y el cuarto de metro. Medición del peso y la capacidad utilizando el kilo, el medio kilo, el cuarto de kilo, el litro, el medio litro y el cuarto de litro. Uso de expresiones: “media hora” y “un cuarto de hora”
4º	Fraccionamiento de longitudes para introducir nuevas fracciones (por ejemplo, tercios, quintos y sextos) Diversos recursos para encontrar la equivalencia entre algunas fracciones Fracciones con denominador 10, 100 y 1000 Comparación de fracciones manteniendo constante el numerador o el denominador Ubicación de fracciones en la recta numérica Planteamiento y resolución de problemas	

	que impliquen suma y resta de fracciones con denominadores iguales Algoritmo convencional de la suma y resta de fracciones con igual denominador.	
5º	Fraccionamiento de longitudes para introducir nuevas fracciones (por ejemplo, séptimos y novenos) Utilización de diversos recursos para mostrar la equivalencia de algunas fracciones Planteamiento y resolución de problemas con fracciones cuyos denominadores sean 10, 100 y 1000 Actividades para introducir las fracciones mixtas Ubicación de fracciones en la recta numérica Planteamiento y resolución de problemas de suma y resta de fracciones con denominadores iguales y diferentes, mediante la equivalencia de fracciones Algoritmo de la suma y de la resta de fracciones utilizando equivalencias Empleo de la fracción como razón y como división, en situaciones sencillas Cálculo de porcentajes mediante diversos procedimientos	
6º	Ubicación de fracciones en la recta numérica Equivalencia y orden entre las fracciones Planteamiento y resolución de problemas de suma y resta de fracciones mixtas Conversión de fracciones mixtas a impropias y viceversa Simplificación de fracciones Planteamiento y resolución de problemas de suma y resta de fracciones con denominadores distintos mediante el cálculo del denominador común	

Las fracciones se inician en tercer grado con la presentación de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, y aparecen en situaciones problemáticas relacionadas con magnitudes, especialmente área, capacidad y peso; muchas de estas actividades apuntan hacia proporcionalidad, es decir que las fracciones se presentan en el contexto de operador y en el de relación parte-todo, donde el todo es siempre continuo. Al principio se usan solamente los vocablos *medio*, *cuarto*, *tercio* y posteriormente se introducen los símbolos.

En el caso de las fracciones generalmente aparecen en cuarto grado sumas con igual denominador (salvo una lección en la cual los sumandos tienen distintos denominadores, pero uno siempre es el doble del otro), además hay lecciones con fracciones cuyos denominadores son potencias de 10. Las restas se usan con fracciones similares a las anteriores. Las multiplicaciones de fracciones aparecen en tablas de variación proporcional y consideran fracciones por naturales.

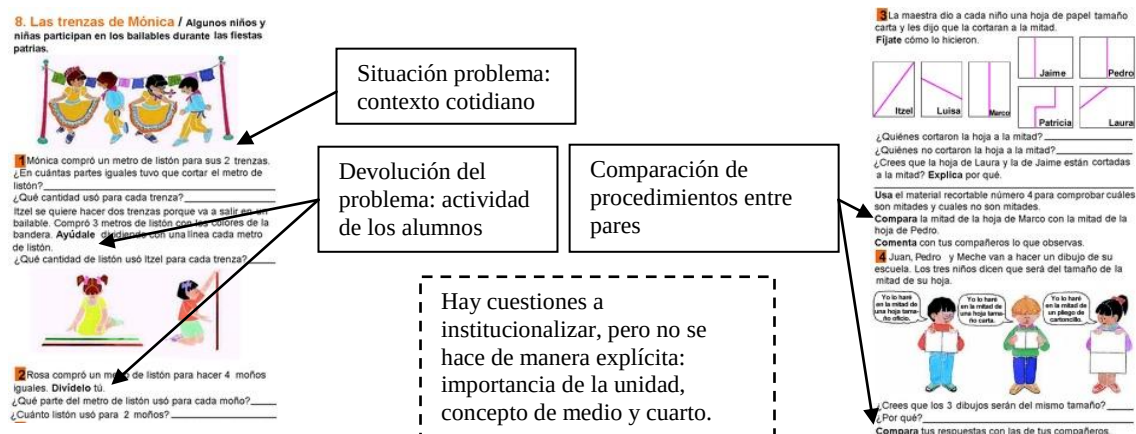
“Las fracciones adquieren un peso relativo que va aumentando gradualmente desde un 10% en tercer grado hasta 34% en sexto (Alatorre Frenk, de Bengoechea Olguín, López Amador, Mendiola Sanz, & Sáiz Roldán, 1999, pág. 75)”

Las fracciones, como decíamos, se empiezan a ver desde tercer grado, aunque en segundo aparece ya la palabra *mitad*. Los nombres de fracciones sencillas como *un medio* y *un cuarto* aparecen en tercero y luego se van complicando a lo largo de toda la primaria hasta terminar en sexto grado con fracciones mixtas como *cuatro enteros dos tercios*. La notación q/p se utiliza a partir de tercer grado y la de fracciones mixtas, $n\ q/p$, desde quinto (con el antecedente $n+$ q/p en tercero y cuarto).

“La terminología aparece después del manejo de los objetos matemáticos: así, el término parte aparece en tercero y el término fracción en cuarto, mientras que los términos asociados a las fracciones: parte entera, simplificar, convertir y equivalente aparecen en quinto y los términos numerador, denominador, denominador común, fracción simple, fracción impropia, fracción mixta, número mixto, número entero, parte fraccionaria mixta y reducir aparecen en sexto grado (Alatorre Frenk, de Bengoechea Olguín, López Amador, Mendiola Sanz, & Sáiz Roldán, 1999, págs. 123 - 124)”

En cuanto a la caracterización global del modelo didáctico que emerge desde la revisión de los libros de texto de este Plan de estudios, podemos enunciar los siguientes elementos: planteamiento de una situación problema (contextualizada desde lo cotidiano), devolución del problema: actividad de los alumnos (trabajo individual o en pequeños grupos: trazar, manipular, recortar), comparación de procedimientos entre pares, discusión de los mismos [no se plantea la validación como tal – Crf. al respecto Brousseau, 1994], algunos intentos de institucionalización y muy poca ejercitación explícita (sobre todo si comparamos con la tradición proveniente de los anteriores libros de texto –entendemos que éstos últimos implicaban un cambio de enfoque).

Para ilustrar este modelo didáctico, recuperamos la siguiente lección:



Finalmente, en esta comparación entre los libros de texto de educación primaria, de cuatro generaciones curriculares, al hacer la revisión encontramos que el libro de matemáticas 5º grado del Plan 1993 (SEP, 2000) y su correspondiente libro para el maestro (SEP, 2002) se pueden considerar como un puente que apuntaba al cambio, no necesariamente de enfoque, pero sí de estructuración de materiales curriculares y libros de texto, principalmente por dos motivos: instalar el enfoque por competencias (SEP, 2011) y segundo, en el caso de matemáticas, consolidar las ideas derivadas tanto de las investigaciones en didáctica de las matemáticas como de la Teoría de las situaciones didácticas.

A diferencia del esquema formativo del Plan 1993, en éste se plantea de manera más explícita la Teoría de las situaciones didácticas como marco teórico subyacente y en el diseño de los libros de texto se incorporan momentos explícitos de institucionalización de saberes (como más adelante veremos).

Se conserva la introducción de las fracciones en tercero, y se incorpora una propiedad de las fracciones que no se encontró trabajada en ninguno de los libros de texto de planes de estudio anteriores a éste: la densidad de los racionales, en sexto grado.

La división de fracciones considera el caso de cuando se divide una fracción entre un número natural, pero sólo como identificación de la operación, sin formalizar el procedimiento convencional (SEP, 2011 e, pág. 134).

A continuación sintetizamos el paquete de conocimientos de cada grado escolar:

Tabla 12. Paquete de conocimientos, Plan 2011

Grado	Contenidos
3° A partir del Bloque III	Uso de fracciones del tipo $m/2^n$ (medios, cuartos, octavos, etc.) para expresar oralmente y por escrito medidas diversas. • Uso de fracciones del tipo $m/2^n$ (medios, cuartos, octavos, etc.) para expresar oralmente y por escrito el resultado de repartos. Identificación de escrituras equivalentes (aditivas, mixtas) con fracciones. Comparación de fracciones en casos sencillos (con igual numerador o igual denominador). Elaboración e interpretación de representaciones gráficas de las fracciones. Reflexión acerca de la unidad de referencia. Resolución de problemas sencillos de suma o resta de fracciones (medios, cuartos, octavos).
4°	Resolución de problemas que impliquen particiones en tercios, quintos y sextos. Análisis de escrituras aditivas equivalentes y de fracciones mayores o menores que la unidad. Representación de fracciones de magnitudes continuas (longitudes, superficies de figuras). Identificación de la unidad, dada una fracción de la misma. Identificación de fracciones equivalentes al resolver problemas de reparto y medición. Resolución, con procedimientos informales, de sumas o restas de fracciones con diferente denominador en casos sencillos (medios, cuartos, tercios, etcétera). Uso de las fracciones para expresar partes de una colección. Cálculo del total conociendo una parte. Obtención de fracciones equivalentes con base en la idea de multiplicar o dividir al numerador y al denominador por un mismo número natural. • Expresiones equivalentes y cálculo del doble, mitad, cuádruple, triple, etc., de las fracciones más usuales ($1/2$, $1/3$, $2/3$, $3/4$, etcétera).
5°	Resolución de problemas que impliquen sumar o restar fracciones cuyos denominadores son múltiplos uno de otro. Conocimiento de diversas representaciones de un número fraccionario: con cifras, mediante la recta numérica, con superficies, etc. Análisis de las relaciones entre la fracción y el todo. • Análisis del significado de la parte decimal en medidas de uso común; por ejemplo, 2.3 metros, 2.3 horas. Comparación de fracciones con distinto denominador, mediante diversos recursos. • Uso del cálculo mental para resolver adiciones y sustracciones con números fraccionarios y decimales. Identificación de la regularidad en sucesiones con números (incluyendo números fraccionarios) que tengan progresión aritmética, para encontrar términos faltantes o continuar la sucesión. • Resolución de problemas que impliquen sumas o restas de fracciones comunes con denominadores diferentes. Uso de la expresión n/m para representar el cociente de una medida entera

	(n) entre un número natural (m): 2 pasteles entre 3; 5 metros entre 4, etcétera.
6º	Lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales. Explicitación de los criterios de comparación. Resolución de problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, variando la estructura de los problemas. Estudio o reafirmación de los algoritmos convencionales. Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales. Ubicación de fracciones y decimales en la recta numérica en situaciones diversas. Por ejemplo, se quieren representar medios y la unidad está dividida en sextos, la unidad no está establecida, etcétera. Identificación de una fracción o un decimal entre dos fracciones o decimales dados. Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales. Conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa. Aproximación de algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. • Identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con números (naturales, fraccionarios o decimales) que tengan progresión aritmética o geométrica, así como sucesiones especiales. Construcción de sucesiones a partir de la regularidad. Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión “a/b de n”. Resolución de problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales. Resuelve problemas que impliquen comparar dos o más razones

Desde los análisis de los libros de texto, correspondientes a este plan de estudios de reciente incorporación en nuestro sistema educativo, como ya decíamos, en esencia plantea un avance con respecto al plan 1993, al intentar consolidar y explicitar algunos de los supuestos implícitos de su predecesor, es decir, aspectos que estaban en las intenciones de los diseñadores y que se dejaron para que los hicieran los profesores (la institucionalización de saberes, por ejemplo), en los libros de texto actuales aparecen de manera explícita.

En el caso de las fracciones, este paquete de conocimientos coincide en la secuencia y progresión del conocimiento matemático con sus antecesores: fracciones del tipo $m/2^n$ (medios, cuartos y octavos), luego tercios, quintos y sextos; trabajo con equivalencias, suma y resta de fracciones con igual denominador y con diferente denominador. Sin embargo se distingue en los énfasis que le pone al saber formal en su relación con situaciones problemáticas, la intención que subyace en este planteamiento, al igual que el

de su antecesor inmediato²², es el uso de la matemática como herramienta en la resolución de problemas, de ahí que, como podemos ver en la tabla anterior, gran parte de los contenidos vienen enunciados en términos de “uso de...” o a partir de la “resolución de problemas...”, lo cual está permeado por el enfoque de competencias que se incorpora para el trabajo con todas las asignaturas de la educación primaria.

En cuanto al planteamiento didáctico, se hace énfasis en el desarrollo de cuatro competencias: Resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados, y manejar técnicas eficientemente (SEP, 2012, pág. 71), en tal sentido, las lecciones deben reflejar la manera en cómo se contribuye para su logro; sabemos que las competencias no se logran de una vez y para siempre, sino que se van fortaleciendo a través de procesos sistemáticos de reflexión y reestructuración de saberes y haceres, en tal sentido, veamos un ejemplo de una lección, donde se trabaja un contenido de fracciones:

El diagrama ilustra una lección sobre fracciones que integra cuatro competencias curriculares:

- Resolver problemas de manera autónoma:** Se muestra un material titulado "El cociente y la fracción" con ejercicios de reparto de manzanas y preguntas como "¿Qué fracción de las manzanas le tocó a cada niño?".
- Validar procedimientos y resultados:** Se muestra un material con una tabla de datos y preguntas como "¿Qué robot avanza más unidades por cada paso?".
- Comunicar información matemática:** Se muestra un material con una tabla de datos y preguntas como "¿Cuántos pasos debe dar el robot Beta 5 para recorrer lo que avanzó el robot Beta 7 con dos pasos?".
- Institucionalización:** Se muestra un material titulado "RETO" con preguntas como "¿Cuántos rectángulos amarillos caben en el cuadrado?".

Como apreciamos, de manera explícita en la lección se le va abonando a la construcción de las cuatro competencias matemáticas que se plantean curricularmente; en todas las lecciones se inicia con la resolución de un problema (“lo que conozco”), con la intención de valorar los conocimientos previos y además establecer una conexión con aprendizajes anteriores; posteriormente se plantean algunos problemas y/o actividades para que los alumnos pongan en juego el conocimiento que se pretende que construyan o apliquen (según sea el caso); tienen un papel importante las preguntas en tanto guían el proceso de reflexión de los alumnos, y de igual manera se abre un espacio en todas las lecciones para que comparen los procedimientos y resultados encontrados; es de resaltarse que, dado que una de las debilidades encontradas en los materiales del anterior plan de

²² Desde la lectura de los materiales vemos que hay cierta continuación en la autoría intelectual de los materiales tanto del Plan 1993, como del 2011 en el caso del diseño curricular en matemáticas.

estudios (1993) fue en la parte de institucionalización, ahora se plantea explícitamente desde el logro de una de las competencias: manejar técnicas eficientemente, en la lección que ponemos de ejemplo le llamamos institucionalización en tanto no necesariamente se refleja el manejo eficiente de una técnica matemática, pero en cambio sí se formaliza un saber, en este caso el concepto mismo de lo que son las fracciones.

Cierra el proceso didáctico en todas las lecciones, con un reto matemático vinculado al conocimiento que se trabaja en la lección, pero con un grado mayor de complejidad.

Ahora bien, la recuperación de la lección anterior, desde el libro de 6º grado (SEP, 2011 e, págs. 12 - 14) fue con una doble intención, en primer lugar ejemplificar el proceso didáctico y la articulación con las competencias del enfoque oficial, y en segundo lugar, con la intención de ir cerrando este apartado, recuperar las concepciones sobre la fracción que se han planteado de manera explícita en los libros de texto.

Tabla 13. Concepción de fracciones en diferentes libros de texto 1960 - 2011

1960	1972
4º grado: Estos $\frac{4}{6}$ se <u>llaman fracción propia, porque valen menos que un entero; son, en verdad, una fracción.</u> (SEP, 1960 a, pág. 47) 6º grado: Para <u>expresar el valor de cantidades que no contienen un número exacto de veces la unidad elegida, o de cantidades menores que la unidad, se han creado las fracciones comunes.</u> (SEP, 1962, pág. 43) <u>Las fracciones comunes se expresan con dos números escritos uno sobre el otro y separados por una raya horizontal.</u> El número de la parte inferior se llama denominador y representa el número de partes iguales en que se ha dividido la unidad. El número que está en la parte superior se llama numerador y representa el número de partes iguales que se han tomado de la unidad. (SEP, 1962, pág. 44)	4º grado: Los <u>números</u> como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, se llaman <u>quebrados o fracciones.</u> (SEP, 1984, pág. 40)
1993	2011
3º grado: <u>Para escribir cantidades como un medio o un cuarto, se pueden utilizar las fracciones. Un medio se escribe así $\frac{1}{2}$; un cuarto se escribe así: $\frac{1}{4}$</u> (SEP, 1993 a, pág. 93)	6º grado: <u>Las fracciones son números que sirven para expresar cantidades que no necesariamente son enteras.</u> Por ejemplo, al repartir 3 chocolates (dividendo o numerador) entre 5 niños (divisor o denominador) a cada uno le corresponden $\frac{3}{5}$ de chocolate; o si se reparten 4 chocolates entre 2 niños a cada uno le corresponde $\frac{4}{2}$ de chocolate, que es igual a 2 chocolates” (SEP, 2011 e, pág. 14)

Aunque es evidente que nos estamos refiriendo al mismo objeto matemático, a lo largo de los años el concepto ha tenido algunos matices y ello ha impactado en la

configuración de su representación ¿cuáles son esos matices? Consideremos la primer definición del libro de matemáticas de 4º grado de los 60's, cuando afirma que las fracciones propias "*son, en verdad, una fracción*" evidentemente se está asumiendo la idea de la fracción en su acepción latina del término "fracturar, romper" (Fandiño Pinilla, 2009, pág. 37); esta concepción de la fracción se conserva en el libro de texto de 4º grado del plan 1972 y es aquí donde se retoma el concepto de "quebrados" por analogía con fracciones, el cual en esencia envía la misma imagen mental, las fracciones surgen cuando se "quiebra" o se parte algo.

Llama la atención también que, al libro de texto de 6º grado de 1960, le debemos la concepción de que las fracciones son "*dos números escritos uno sobre el otro y separados por una raya horizontal*", la cual ha generado bastantes errores en la enseñanza, sobre todo cuando se trata de trabajar con la comparación, el orden o los algoritmos de la suma y la resta (Fandiño Pinilla, 2009, pág. 143), por ejemplo cuando los niños suman numerador con numerador y denominador más denominador: $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{5}{7}$, es una manifestación de esta representación que se han formado sobre la fracción como dos números separados por una raya; otro ejemplo, en la relación de orden, es el error de creer que el sucesor de $\frac{4}{6}$ es $\frac{5}{6}$, con lo cual se complica la comprensión de la densidad de los racionales.

Tanto en 1993, como en el 2011 se plantea la conceptualización de la fracción como **un número que expresa cantidades**, en tal sentido, se busca superar las dos concepciones que se arrastraban desde los 60's: sólo son fracciones las que surgen del reparto o la medición y menores que la unidad (el resto no son "en verdad" fracciones) y la concepción de la fracción como dos números escritos uno sobre otro.

Es importante aclarar que el hecho de que explícitamente se formule una concepción o definición sobre las fracciones, no significa que no se trabajen diferentes aspectos de esta conceptualización, es decir, aunque la concepción original de la fracción, según el Plan de 1960 hace alusión a fracciones menores a un entero, en el tratamiento que se le da a lo largo de los diferentes grados escolares, incorpora las fracciones impropias, las mixtas y las decimales; este mismo argumento se sostiene para todos los materiales curriculares de los diferentes planes de estudio.

Finalmente, una de las preguntas que nos hicimos al inicio de este apartado y que configuró la mirada con la cual nos acercamos a los materiales curriculares de los

diferentes planes de estudio, tienen que ver con la caracterización de la representación de las fracciones históricamente construida, al respecto queremos apuntar algunas ideas:

- En el contexto cotidiano pueden coexistir dos ideas centrales de la fracción: como un número que expresa una cantidad o como dos números separados por una raya, la asunción de una u otra de estas perspectivas puede contribuir a generar un concepto sólido de las fracciones; en un primer momento la concepción de la fracción como dos números separados por una raya horizontal nos puede parecer incongruente, sin embargo hay significados de la fracción que pueden dar la impresión de que así se comporta ésta, por ejemplo la fracción como cociente: 3 pasteles repartidos entre 5 personas, les toca de $\frac{3}{5}$ a cada una; como vemos los dos números usados en el reparto, integran el número de la respuesta y si no hay un tratamiento didáctico adecuado se puede fortalecer la idea de que entonces la fracción resultante son los dos números separados por una raya horizontal.

Un ejemplo más del comportamiento de la fracción como “dos números separados por una raya horizontal” se da en el significado de razón, ante problemas como el siguiente: Un jugador de baloncesto acierta 7 tiros de cancha y falla 5 en un partido; en el siguiente juego, acierta 3 y falla 6. ¿Cuál es la razón de tiros acertados a fallados en el conjunto de los dos partidos?, la respuesta es $\frac{10}{11}$, misma que se puede obtener a partir de la siguiente suma $\frac{7}{5} + \frac{3}{6} = \frac{10}{11}$, como apreciamos, si no se tiene cuidado en la interpretación del resultado, y si el estudiante no está preparado para su comprensión es evidente la confusión que se genera con el algoritmo convencional de la suma de fracciones, dado que se opera, en este caso, considerando dos números separados por una raya horizontal.

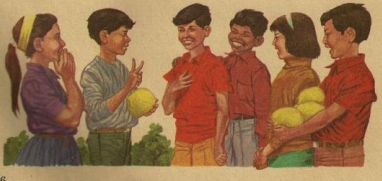
- Históricamente la fracción se introduce (en los libros de texto mexicanos) predominantemente en situaciones de fraccionamiento de unidades continuas, tipo reparto, y considerando situaciones del tipo $m/2^n$, tal y como se enuncia en el plan 2011.

- Los diferentes significados de las fracciones aparecen explicitados principalmente en los libros de texto de los dos planes de estudio más recientes (1993 y 2011), sobre todo porque en éstos las matemáticas aparecen como herramientas para la solución de problemas contextualizados (con marcado énfasis hacia situaciones problema cotidianas). En cambio, en los libros de texto de los planes de estudio de 1960 y 1972 el énfasis estuvo puesto en las matemáticas como objeto de estudio y en tal sentido se estudió la fracción tomando sólo como referente de entrada algún problema cotidiano, pero éste se abandonaba rápidamente para dar paso al trabajo con las relaciones numéricas propias de

cada aspecto o propiedad de la fracción que se quisiera trabajar, por ejemplo el cálculo de fracciones equivalentes o sus diferentes operaciones.

- Si en la docencia la forma es contenido, ello nos lleva a pensar en la posibilidad de que en el diseño didáctico de las lecciones se muestren tendencias a la reproducción de las representaciones sociales; en este sentido nos llamó la atención la semejanza entre las siguientes lecciones:

Tabla 14. Comparativo 1960 – 2011 ¿pervivencia de una representación?

Plan 1960; 4º grado (SEP, 1960 a, pág. 46)	Plan 2011; 3º grado (SEP, 2011 b, pág. 85)
FRACCIONES COMUNES En una excursión, los alumnos de 4º año, al repartir la fruta, se dieron cuenta de que no alcanzaban los melones para dar uno a cada niño. Dijo Antonio: —Para que alcancen, partamos algunos melones en pedazos iguales. A los maestros se los daremos enteros; a los alumnos mayores, la mitad y a los chicos, un tercio. Como en ese momento llegaron otros alumnos hubo que partir por mitad las fracciones, de donde resultaron cuartos y sextos. Es que las fracciones siempre se pueden dividir en otras partes iguales. Si dividimos $\frac{1}{2}$ en dos partes iguales, tendremos $\frac{1}{4}$, y si volvemos a dividir esos $\frac{1}{4}$, cada uno en otras dos partes iguales, tendremos $\frac{1}{8}$, y así sucesivamente; es decir, que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, etcétera. Si $\frac{1}{2}$ lo dividimos en tres partes iguales, tendremos $\frac{1}{6}$, y si esos $\frac{1}{6}$ volvemos a dividirlos, cada uno en dos partes iguales, tendremos $\frac{1}{12}$, etc.; es decir, que $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$, etc. Comparemos algunas fracciones: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$. Encontramos que la mayor es $\frac{1}{2}$. Comparando $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ hallamos que la fracción mayor es $\frac{4}{5}$. 	Significado y uso de los números La mitad de la mitad de la mitad... Lo que conozco. Resuelve el problema. La maestra cortó una hoja de papel en partes iguales y las repartió entre los miembros del equipo integrado por Irma, Pedro, Alonso y Mariana. ¿Qué porción de la hoja le correspondió a cada uno? 1. Lee el problema siguiente y contesta las preguntas. La tía de Felipe tiene un melón en su frutero. Cuando Ana y Mariana fueron a visitarla, lo repartió entre las dos en partes iguales. Como después llegaron Antonio y Felipe, les pidió que lo repartieran en partes iguales otra vez. • ¿Qué cantidad de melón tenían Ana y Mariana antes de que llegaran los niños? • Después de la segunda repartición, ¿con cuánto se quedó cada quien? Ana dice que cada uno recibió la mitad de la mitad del melón, mientras que Felipe asegura que cada quien recibió una cuarta parte. • ¿Es correcta la afirmación de Felipe? _____ • ¿Por qué? _____ • ¿Y lo que dijo Ana? _____ • ¿Por qué? _____

¿Coincidencia o la pervivencia de la representación sobre la enseñanza de las fracciones? A medio siglo de distancia se plantean lecciones donde el centro de la reflexión matemática es el mismo, la obtención de partes de partes y de ahí a la equivalencia de fracciones. La diferencia radica en que, con la concepción del papel actual de los niños, como constructores de su propio aprendizaje, en lugar de que el libro sea el que aporte las respuestas, éstas se plantean en forma de preguntas para fomentar la reflexión (el contenido encerrado en la forma rectangular).

Esta coincidencia reafirma lo que Block, 1987 (pág. 33) llama tendencia a la particularización dado que “cualquier interpretación es susceptible de ser particularizada en mayor o menor medida, a través de una reducción del tipo de casos estudiados, del tipo de representaciones utilizadas y, consecuentemente del tipo de problemas abordados. De hecho, en la mayoría de las propuestas didácticas para la enseñanza de las matemáticas

en el nivel elemental encontramos una tendencia a la particularización extrema (Block, 1987, pág. 34)”

I.4. Destransposición, representaciones sociales y formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas: investigaciones en México y España. Estado del arte.

En una investigación para tesis doctoral se hace completamente necesario hacer una revisión del Estado del arte, es decir de las investigaciones que se han hecho en un campo de estudio determinado, sino exhaustiva por la dificultad para precisar los límites tanto espaciales como temporales, si lo más completa posible que nos permita valorar las relaciones que guarda nuestro objeto de estudio con otros abordajes similares, de igual manera esta revisión nos aporta pistas e ideas respecto al grado de originalidad que puede tener nuestro posicionamiento e incluso nos orienta respecto a las diferentes estrategias metodológicas que otros investigadores han utilizado, con lo cual estamos en posibilidades de justificar la pertinencia de la nuestra y las posibilidades que tenemos para aportar otros elementos tanto a la discusión teórica sobre el objeto de estudio como para su concreción en la práctica.

Dado el doble escenario en que nos movemos, por un lado los estudios de doctorado que realizamos en la Universidad de Huelva y por el otro el contexto de recuperación de datos: una Escuela Normal del Estado de Zacatecas, pero además con la intención de que los resultados tengan vigencia y pertinencia en ambos contextos, la presente revisión del Estado del conocimiento la hicimos desde la recuperación de investigaciones en múltiples contextos, las que al momento de redacción de este apartado pudimos localizar, valiéndonos de documentos básicos y centrales, en los cuales se reporta de manera sintética la producción investigadora.

Para el caso de México, principalmente el documento del COMIE²³ (Mota, 2003) que edita cada 10 años aproximadamente y en el cual sintetizan los reportes de investigación más relevantes de la década anterior; de igual manera, en el contexto internacional revisamos los distintos Handbooks que se han editado a la fecha principalmente los siguientes (Jaworski, 2008; Lester, 2007; Pehkonen & Leder, 2002; Gutiérrez, 2006; English, 2002). En la misma lógica de la revisión de reportes de investigación también nos fueron relevantes los archivos, en su versión digital, de la revista ZDM “The international journal on mathematics education” desde la dirección electrónica

²³ COMIE: Consejo mexicano de investigación educativa

www.springer.com y de igual manera los materiales del congreso internacional del PME a partir de la revisión de las ediciones electrónicas de sus memorias en el rango temporal del 2001 al 2011; finalmente no podíamos dejar fuera los reportes de la SEIEM; así mismo, cuando nos fue posible, incorporamos otras investigaciones que aunque no estén reseñadas en este tipo de publicaciones de corte internacional, de una u otra manera son intentos por desvelar un campo de conocimiento y hacérselo comprensible.

Evidentemente no podemos ni tendría sentido hacer un resumen de todas las investigaciones que se reseñan en los documentos señaladas, ello implicó una delimitación intencional bajo tres categorías que nos interesaban en atención a nuestro objeto de estudio: investigaciones que tocaran el tema de la destransposición del saber y aquellas donde apareciera explícitamente el concepto de representaciones sociales (con un breve seguimiento desde investigaciones con el tema de concepciones); una delimitación más se hizo necesaria, al ser algunos de ellos “conceptos paraguas”, se resalta la revisión de investigaciones en las que ambos conceptos estén vinculados con las matemáticas y con la formación inicial de profesores.

Hechas estas precisiones en lo que sigue nos abocaremos a indicar cuáles son las principales investigaciones que se han realizado al respecto, comenzando desde el escenario más amplio, el internacional, para llegar al escenario de lo local, el país o la cercanía con la institución donde se realizó la investigación.

I.4.1. De las investigaciones sobre concepciones a las representaciones sociales.

Algunos antecedentes.

Carlos Marcelo desde 1992, ya distinguía cinco conclusiones de las investigaciones sobre creencias, principios, constructos personales y conocimiento práctico de los profesores (Marcelo, 1992):

- 1.- Las creencias educativas de los profesores son diversas y variadas, e incluso las denominaciones varían, desde quienes las presentan: a) como categorías; “gestión de clase”; o también, b) como afirmaciones; “la matemática es esencialmente resolución de problemas”.
- 2.- Las creencias educativas y la conducta de clase se influyen: una vez identificado esto ¿qué métodos flexibilizan las creencias y las hacen más adaptativas a las innovaciones educativas?

- 3.- Los alumnos y el rol del profesor son los constructos más frecuentes.
- 4.- Los constructos personales y concepciones educativas influyen en las innovaciones curriculares.
- 5.- El conocimiento práctico de los profesores orienta su conducta.

Como apreciamos, en sus inicios estas conclusiones están referidas principalmente a los profesores en servicio, ello se explica por el énfasis inicial del mismo paradigma, sin embargo en términos de nuestra investigación contribuyen a ponernos en antecedentes, como una especie de vigilancia epistemológica²⁴ (Bachelard, 1994) y nos previenen con relación a la necesidad de actuar con posibilidades futuras, es decir si desde la revisión de lo que pasa con los profesores en servicio se encuentran serias dificultades para transformar sus concepciones, entonces tenemos que revisar qué es lo que sucede en la formación docente inicial.

Continuando con nuestra revisión de algunos resultados, encontramos en Contreras que, *“como han mostrado Brown y Borko (1992), los cambios aparentes producidos durante la formación no siempre se ponen en práctica, los profesores noveles frecuentemente vuelven a los métodos con los que aprendieron y tras finalizar el periodo de formación, muchos afirman no haber aprendido mucho nuevo”* (Contreras L. C., 2002, pág. 79); e incluso, como reafirma más adelante, retomando ahora a Manouchehri (1997), cuando éste concluye, en concordancia con Raymond (1997) que *“las experiencias previas provocan que la formación posterior sea vista como irrelevante y que los cambios en profundidad en las concepciones sobre la matemática y su enseñanza, a corto plazo, sean difíciles”* (Contreras L. C., 2002, pág. 79).

Todo ello nos lleva más que a aceptar estas conclusiones como definitivas, a estructurar un trabajo de investigación que nos permita encontrar por qué sucede eso, por qué se regresa a la aplicación de los métodos con los que aprendieron, ¿realmente se regresa a esos métodos? ¿cuáles?, así mismo qué hacer ante esa aparente “irrelevancia” con que es vista la formación “teórica” de la institución formadora de docentes; partimos de la necesidad de establecer una dialéctica entre comprender – actuar – transformar. En este trabajo pretendemos tocar buena parte de estos planteamientos, sin embargo toda la

²⁴ La vigilancia epistemológica la planteamos como una necesidad de estar alertas a los giros que dé el campo de conocimiento, en nuestro caso el campo de la didáctica de las matemáticas, y dentro de éste, el paradigma del pensamiento del profesor, delimitando incluso a la línea de Desarrollo profesional.

problemática rebasaría nuestros objetivos, en tal sentido poco a poco se irá apreciando la delimitación y el foco de nuestra atención.

Algunas otras investigaciones (Ávila A. , 2001; Lizarde, 2001; Lizarde, 2006) han encontrado una estrecha correlación entre las concepciones del docente y la concreción de sus acciones al interior del salón de clases; además son varios los autores (Santos, 1994; Mancera, 1991; Carrillo J. , 1998) quienes afirman y confirman que las concepciones del docente juegan un papel importante para su práctica; de igual manera se sigue reconociendo que es necesario instrumentar políticas de formación que tomen en cuenta las concepciones de los maestros, en el entendido de que para promover en la realidad escolar actitudes y creencias más acordes con la nueva enculturación matemática que defendemos, es imprescindible que ese cambio comience en nuestros centros de formación.

Con el propósito de revisar cómo, de qué manera y por quiénes se está trabajando el tema de las concepciones del docente en matemáticas, nos dimos a la tarea de revisar los informes de las recientes investigaciones, principalmente los reportes del COMIE (López y Mota, 2003), con la intención de precisar cuál o cuáles investigaciones se habían realizado con alguna temática similar a la que más adelante vamos a precisar como objeto de nuestro interés en la línea que ya apuntábamos en párrafos anteriores: La formación docente inicial en matemáticas para la educación primaria; al respecto encontramos investigaciones en cuatro líneas principalmente:

1.- Referidas a un análisis curricular, en una doble vertiente: representaciones sociales del currículum de la educación primaria (Mercado, 2001); actitudes de los formadores de docentes en la instrumentación del Plan 97 para formación inicial de maestros (Guzmán, 2001). En esta primera línea son investigaciones generales sobre el currículum sin profundizar específicamente en algún campo disciplinario.

2.- Una investigación referida al “Potencial de la especialización en educación matemática de la Escuela Normal Superior de México, para transformar los significados de la práctica docente” (Ávalos, 2001); esta investigación la ubico en una segunda línea, porque tiene que ver con la relación interactiva formadores – docentes en formación, pero sobre todo porque busca incidir, a partir de reconocer dicho potencial, en espacios concretos y problemáticos de la formación: planeación, transferencia de los aprendizajes, etc.; además de la delimitación específica en el área de matemáticas.

3.- Investigaciones que tiene como objeto de estudio las prácticas de los maestros en servicio; aunque aquí hay investigaciones varias, desde aquellas relacionadas con el diseño y experimentación de ingenierías didácticas (Block & Solares, 2001), hasta el análisis de la enseñanza de las matemáticas en grados específicos (Martínez Hernández, 2001), etc., sin embargo en esta línea no nos centraremos debido a que nuestro interés está puesto en la formación docente inicial.

4.- Finalmente una cuarta línea tiene que ver con investigaciones relacionadas con la formación docente inicial, sin embargo las investigaciones reportadas están referidas sobre todo a las prácticas pedagógicas de los estudiantes (Mercado, 2001).

De esta primera revisión no encontramos ninguna investigación que tenga que ver con la formación docente inicial en matemáticas para la educación primaria.

En el caso de estudios en el extranjero, sobre todo en España, hemos encontrado una fuerte preocupación por la formación docente inicial en el área de matemáticas, sobre todo las investigaciones y propuestas reportadas en los libros “Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente” (Contreras & Blanco, 2002 a) y “Modelos de formación de maestros en matemáticas” (Carrillo & Climent, 1999), los cuales de una u otra manera nos ofrecen un panorama de las principales preocupaciones y temas de estudio en nuestra área: la didáctica de las matemáticas.

Ahora bien, ¿cuáles son esas preocupaciones y/o temas de estudio?, a decir de Schoenfeld [2000 citado en (Torralbo, 2003)], la investigación en educación matemática tiene dos propósitos principales, *“uno puro a fin de entender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje y otro aplicado a fin de usar tales comprensiones para mejorar la instrucción de las matemáticas”* (pág. 295).

No es todavía el momento para profundizar en esta distinción, lo que sí se hace necesario es precisar cuáles y con qué temáticas se han realizado investigaciones en Didáctica de las matemáticas, como una forma de concretizar el Estado del Arte para el caso de España; la estrategia utilizada para tal efecto fue revisar la base de datos TESEO,²⁵ los diferentes reportes de la SEIEM²⁶ (Contreras L. C., 2000; Moreno M. F., 2002), así

²⁵ Localizable en www.mcu.es/TESEO/

²⁶ SEIEM = Sociedad española de investigación en Educación matemática: www.ugr.es/local/seiem/

como otros materiales (incluidos los dos libros ya mencionados) en los que se incluyen reportes recientes de investigación (Socas, 2001); de igual manera también revisamos las publicaciones del CERME 2 “European Research in Mathematics Education II” (Mariánske, 2001); como es obvio al tomar en cuenta el campo amplio de la Educación matemática (Rico, Sierra, & Castro, 2002) nos encontramos tesis vinculadas cuando menos a los siguientes aspectos:

- 1.- La matemática como apoyo a otras ciencias: economía, derecho.
- 2.- La matemática en el caso de alumnos con necesidades educativas especiales.
- 3.- Tratamiento de aspectos específicos: resolución de problemas, proporcionalidad, geometría...
- 4.- Matemáticas y fracaso escolar.
- 5.- Matemáticas en la formación inicial docente: concepciones y prácticas.
- 6.- Análisis de libros de texto y materiales curriculares de matemáticas.
- 7.- Las matemáticas en la educación de adultos.
- 8.- Nuevas tecnologías y matemáticas.

Al ser este campo tan amplio, necesitamos concretizar, para ello y tomando en cuenta nuestro interés de estudio, la decisión sobre cuáles tesis revisar con mayor atención se vio mediada por el cruce de las categorías sobre las cuales construiríamos nuestro objeto de estudio:

Investigaciones que tuvieran en cuenta el campo de las concepciones del docente, en matemáticas.

Que fueran relativas a la formación docente inicial para la educación primaria (por ser el ámbito de desarrollo de esta investigación y sobre todo por las características diferenciales de formación que adquiere el nivel: generalistas).

Hechas estas precisiones, pero además con fines de revisión comparativa e incluidas las investigaciones que cubrían alguno (s) de los criterios mencionados, el siguiente cuadro presenta los resultados de esta primera revisión²⁷:

Tabla 15. Investigaciones sobre la formación inicial de profesores.

	En Formación inicial	En servicio
Primaria	Llinares, S. (1988) Creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza de estudiantes para profesor. Sánchez, V. (1988) Los constructos de dos estudiantes para profesores de primaria acerca de las matemáticas y su enseñanza. Influencia de las prácticas. Hernández, J. Et al (2001) Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las matemáticas de los alumnos que comienzan la diplomatura de maestro. Blanco Nieto, Lorenzo (1990) Conocimiento y acción en la enseñanza de conceptos matemáticos y la resolución de problemas.	Martín Amador, Ma. Esther (1998) Creencias y prácticas del profesorado de primaria en la enseñanza de las matemáticas. Relación entre pensamiento y acción. Climent, Nuria (2001) El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso. Muñoz Catalán, Cinta (2009) El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel

²⁷ Llinares (1998) presenta una revisión de las investigaciones “sobre” el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional, hasta esa fecha, en la cual identifica dos agendas de investigación, dice “una de ellas recoge todos los aspectos investigados relativos a cuestiones de aprendizaje y generación de nuevo conocimiento para enseñar. La segunda agenda recoge todos los aspectos investigados vinculados a la práctica profesional del profesor” (p. 155), desde estas agendas, nuestra investigación cabe dentro de la primera, tomando como subproblemática la de “aprender a enseñar y desarrollo profesional”.

Secundaria	Flores, Pablo (1995) Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza. Bedoya Moreno, Evelio (2001) Formación inicial de profesores de secundaria. Evaluación de programas curriculares. Bosch Saldaña, Ma. Asunción (2002). Una estrategia de formación de profesores de secundaria. Evolución del conocimiento profesional del futuro profesor sobre la evaluación en matemáticas. Gómez, Pedro (2002). Desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas. La planificación de unidades didácticas.	Carrillo Yáñez, José (1996) Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza. Metodología de la investigación y relaciones. Contreras, Luis Carlos (1998) Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula. Gil Cuadra, Francisco (1999) Creencias de los profesores sobre evaluación en matemáticas. Sánchez, V. (2000) Representaciones y comprensión en el profesor de matemáticas: un contenido (semejanza); influencia de su representación mental sobre su práctica.

Como podemos apreciar el peso específico relativo de las investigaciones se encuentra en el nivel de la educación secundaria, por no ser de nuestro interés, por el momento, no nos vamos a centrar en este nivel, aunque es necesario aclarar que todas las investigaciones aportan datos muy valiosos para la comprensión de las prácticas docentes e incluso por un proceso de abstracción y/o adaptación nos aportan “pistas” e ideas sobre por dónde continuar las líneas de investigación.

Como nuestra intención es justificar el diseño de un trabajo de investigación en un área delimitada y también en un nivel educativo determinado, nos centraremos en el recuadro superior izquierdo, en la intersección “Formación inicial de los maestros de educación primaria”, hasta el momento sólo hemos localizado tres tesis (Llinares, 1988; Sánchez, 1988; Blanco, 1990) y un trabajo de investigación (Hernández, 2001) que

explícitamente tocan el tema de las concepciones (creencias o constructos) en la formación docente inicial en matemáticas.

Dos de las tesis mencionadas guardan mucha similitud, tanto en el título como en su abordaje, por su parte Llinares (1988) describe a través de dos estudios de caso, las creencias mantenidas por dos estudiantes para profesores de primaria sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y las características de la interacción entre éstas y las prácticas de enseñanza; en tanto que Sánchez (1988) se centra en el estudio de las concepciones que acerca de las matemáticas y su enseñanza tienen dos maestros en formación, así como la influencia que sobre las mismas ejercen los periodos de práctica docente, utiliza para el análisis la teoría de los constructos personales de Kelly.

Por su parte Blanco (1990) se centra con más énfasis en los conocimientos que ponen en acción los estudiantes al trabajar la resolución de problemas, todo ello en un intento de descubrir el conocimiento práctico personal de sus informantes.

Finalmente el trabajo de investigación de Hernández (2001) incluye lo relativo a las actitudes y realiza su investigación a partir de la aplicación de varios cuestionarios, con la intención de *“analizar los datos obtenidos con el fin de considerarlos al elaborar un programa de matemáticas para el plan de estudios de maestro, que parta de un conocimiento real del nivel de los alumnos y que permita que ellos desarrollen actitudes positivas”* (pág. 115)

Este breve bosquejo de resultados da cuenta de la necesidad de seguir revisando un campo importante de acción poco explorado, sobre todo en nuestro país, el campo de los “docentes en formación para la educación primaria”, del cual tenemos pocos resultados que nos den cuenta de cómo se están formando los futuros docentes (sabemos de las investigaciones institucionales en términos de seguimiento de la aplicación de los programas de estudio que realiza el equipo de la Subsecretaría de educación básica y normal) y son mucho menos las investigaciones que nos dan cuenta de problemáticas más concretas, por ejemplo, en matemáticas; es decir, ¿cómo se está formando el maestro que posteriormente irá a trabajar en la escuela primaria con la asignatura de matemáticas?. Al respecto tenemos conocimiento de una investigación de doctorado concluida (Aguayo, 2005) que centra su visión en los procesos de transposición del saber didáctico; una de las conclusiones más fuertes tiene que ver con el hecho de que para transformar los procesos de formación inicial es necesario transformar las representaciones y prácticas de los

formadores, con lo cual coincidimos y en buena medida la incorporamos en nuestro objeto de estudio, pero además queremos centrar nuestra mirada con más énfasis en los procesos de construcción del sentido y los significados por parte de los alumnos, docentes en formación, y en apreciar de qué manera las representaciones construidas a lo largo de su escolarización previa “negocian” o bien son congruentes y se complementan con la concepción de “hacer matemáticas al resolver problemas”, para finalmente integrarse en una estructura de conocimientos que trascienda en su desempeño futuro.

Cuando hablamos de las concepciones construidas a lo largo de su formación nos remitimos a varios aspectos, en primer lugar anticipamos esa doble construcción de las concepciones, su configuración y génesis individual y social (Giordan & De Vecchi, 1999), pero también hacemos alusión a que a lo largo de su escolarización previa los alumnos han interiorizado una (o varias) formas de “ser maestro” (en la docencia la forma es contenido), en el entendido de que muy posiblemente les gustó la forma (estilo) como “x” maestro les enseñó las matemáticas, asimismo anticipamos la posibilidad de la existencia de obstáculos epistemológicos y/o didácticos que sean necesarios revisar, como diría Antibí (2001) la necesidad de algunas estrategias metacognitivas para contribuir en la destransposición del saber, en esa lógica de aprender a desaprender para volver a aprender [Cfr. Contreras L. C., 2002 y Flores, 1996]. Ello nos lleva a descentrar nuestro objeto de estudio, desde el tipo de investigaciones que aquí hemos someramente reseñado, en la línea del pensamiento del profesor, sus creencias y concepciones, hacia una línea más centrada en una perspectiva sociocultural, esta es la perspectiva de las representaciones sociales y la destransposición del saber matemático a partir de una reflexión metacognitiva desde la formación docente inicial.

I.4.2. Investigaciones que articulan los conceptos básicos: representaciones sociales, formación docente inicial en matemáticas y destransposición.

El concepto de representaciones sociales, como ya hemos apreciado en apartados anteriores no es nuevo (Moscovici, 1979), sin embargo su articulación en los estudios sobre formación inicial de profesores para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria, a partir de la revisión que hicimos sí está muy poco utilizado.

En un artículo relativamente reciente Piña Osorio & Cuevas Cajiga (2004) hacen una revisión de la utilización del concepto de representaciones sociales en la investigación

educativa en México, a partir de esos datos, encontramos que sólo 4 trabajos hacen alusión a la investigación en un contexto similar a nuestro objeto de estudio

LÓPEZ Fidencio, (1999), "El profesor: su educación e imagen popular", tesis doctoral, en Universidad Nacional Autónoma de México.

HERNÁNDEZ, Fabiola (2001), "Vida cotidiana y representaciones sociales en torno a la formación académica de los estudiantes normalistas", tesis de maestría, en Universidad Nacional Autónoma de México.

GÜEMES, Raquel (2002), "Las representaciones sociales en la construcción de los procesos identitarios del maestro de educación normal. El caso de la Escuela Normal de Especialización", tesis de maestría, en Universidad Nacional Autónoma de México.

GÜEMES, Carmela (2003), "La identidad del maestro de la educación normal. Entre representaciones e imaginarios sociales", en Juan Manuel Piña (coord.), Representaciones, imaginarios e identidad. Actores de la educación superior, México, CESUUNAM/ Plaza y Valdés, pp. 73-144. (Piña Osorio & Cuevas Cajiga, 2004, pág. 111)

Como apreciamos se hace uso del concepto de representaciones sociales, pero no se vincula con la enseñanza de las matemáticas.

En el mismo tenor, en los reportes del COMIE (Piña, Furlan, & Sañudo, 2003) sólo se reportan las mismas investigaciones que ya comentamos en la cita anterior.

Por otra parte Wagner & Flores-Palacios (2010) se preocupan por analizar la epistemología de las representaciones sociales y dicen que el contexto de las matemáticas, en este caso, nos remite a considerarlo como un espacio privilegiado para avanzar en el conocimiento de los procesos interindividuales e intraindividuales que surgen ante un fenómeno aparentemente alejado de un contexto social y cultural en el que, además, subyacen componentes subjetivos e intersubjetivos en una relación continua, imprimiendo una relación directa con la afectividad. Además analizan las representaciones vinculadas con las creencias de orden social, por ejemplo la creencia de que las matemáticas es únicamente para gente inteligente y en general, según esta creencia, son los varones los que presentan mayores habilidades y atributos en este campo, generando así una psicología folclórica que tiene repercusiones en las concepciones que la gente construye acerca de las matemáticas y que, por tanto, requiere un análisis sistemático entre la creencia y la acción.

Al respecto, Ursini (Ursini y Sánchez, 2008; Ursini, en prensa) ha iniciado una perspectiva de investigación importante en la que pretende demostrar, precisamente, la utilidad de la teoría de las representaciones sociales como una posibilidad de explicación descriptiva acerca de esta creencia cuando menciona cómo conciben los niños y las niñas las matemáticas y cómo se autoconciben frente a ella, encontrando de manera general que: todos coincidieron en que, para

aprender matemáticas, era necesario prestar atención, tener interés e inteligencia, esforzarse, disciplinarse y tener dedicación para realizar los trabajos. Adicionalmente, algunas niñas manifestaron la conveniencia de seguir las instrucciones que daba el profesor. De manera explícita ninguno declaró que las matemáticas fueran un dominio masculino, ya que, en general, no consideraron que hubiera diferencia entre hombres y mujeres en la posibilidad de obtener buenas calificaciones” (Ursini, en prensa). (Wagner & Flores-Palacios, 2010, pág. 149)

Dos estudios más guardan cierta vinculación con nuestro objeto de estudio; el primero lo recuperamos desde la base de datos de TESEO²⁸, corresponde a la tesis doctoral de María Margarida Da Silva Graca, presentada en la Universidad de Burgos, con el título “Representaciones sociales de los profesores de matemáticas: un estudio con profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria”, en el año 2005.

De acuerdo a la misma investigadora, su estudio se enmarca dentro de dos grandes áreas de investigación, una las representaciones sociales, en particular, sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y otra el profesor, específicamente el profesor de Matemáticas. Esta investigación, en la que subyace un paradigma interpretativo, se desarrolló en dos fases:

La 1ª fase, constituida por el Estudio 1 (estudio exploratorio) y por el Estudio 2 (estudio con un grupo de referencia de profesores de Matemáticas de la Enseñanza Secundaria), se analizaron las respuestas a las siguientes preguntas: (1) ¿qué representaciones sociales sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, son compartidas por los profesores de Matemáticas de la Enseñanza Secundaria? (2) ¿cómo se caracterizan la estructura y las dimensiones de dichas representaciones?

Con la 2ª fase constituida por el Estudio 3 (estudio de caso desarrollado con el profesor André, uno de los profesores que participó en el Estudio 2) y por el Estudio 4 (taller pedagógico) se buscaron respuestas, desde una perspectiva exploratoria, a las siguientes preguntas: (1) ¿cómo interpretar las prácticas lectivas de los profesores de Matemáticas de la Enseñanza Secundaria a la luz de las respectivas representaciones sociales sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje? y, (2) ¿cómo contribuir para una posible dinámica de representación de las prácticas lectivas de profesores de Matemáticas de la Enseñanza Secundaria, en el caso de que éstos manifestaran representaciones sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, que no facilitan

²⁸ <https://www.educacion.es/teseo/mostrarRef.do?ref=387501>

potencialmente el aprendizaje significativo de conceptos matemáticos por parte de los alumnos?

Desde la revisión de los reportes de investigación de la XV escuela de Invierno en Matemática educativa (Sosa Moguel, Aparicio Landa, & Rodríguez Vázquez, 2012) detectamos, en el apartado de trabajos relativos a las representaciones sociales, son muy contados (sólo 5 comunicaciones se presentaron) y ninguna de ellas referida a la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas; el reporte de investigación (que según sus autores está en proceso de concluirse) que más se acerca a nuestro objeto de estudio es el de Marisa Miranda Tirado y Gustavo Martínez Sierra, titulado “Representaciones sociales de profesores y estudiantes sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje”, sin embargo, desde el momento mismo que su objetivo es caracterizar y comparar las representaciones sociales de docentes y estudiantes de nuevo ingreso del Instituto de Educación Media Superior del D.F. sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, se aleja de nuestra intencionalidad de investigación.

Como apreciamos, prácticamente ninguno de los trabajos se enmarca dentro de la articulación entre las representaciones sociales, la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas y los procesos de transposición y destransposición del saber; en este sentido, dejamos para el último los comentarios respecto al trabajo de Peltier (1999) el cuál aunque no es muy reciente está totalmente vinculado con nuestro objeto de estudio dado que estudia las “Representaciones de los profesores de la escuela primaria sobre las matemáticas y su enseñanza” y hace objeto de estudio a un centenar de “ingresantes a un instituto de formación de maestros” (Peltier, 1999, pág. 5) cuyas edades oscilan entre los 20 y los 40 años de edad.

Su trabajo vincula la didáctica de matemáticas con la formación de profesores. Se analizan las representaciones metacognitivas acerca de las matemáticas y su enseñanza de los futuros maestros; asimismo, se analiza la evolución que tales representaciones sufren en el transcurso de la formación recibida en el Instituto. Finalmente, a partir de un estudio de caso, se observan los vínculos y las rupturas entre las concepciones "teóricas" de los estudiantes y las decisiones que toman en las clases de matemáticas durante sus prácticas como profesores de escuela.

Algunas consideraciones respecto a los resultados de esta investigación merecen destacarse; a decir de Peltier (1999, pág. 15) “*el primer punto relativamente sorprendente*

es la poca evolución global de la imagen de las matemáticas en el transcurso de la formación. Esto nos remite al resultado conocido relativo a la fuerte resistencia de las representaciones a los cambios, situándose el impacto de la formación —sin duda—, más al nivel de los elementos periféricos de la representación que al nivel del núcleo central”.

Como apreciamos, inmediatamente se detecta que su posicionamiento se acerca al enfoque estructural, en tal sentido nos aporta elementos a considerar al momento de analizar las representaciones sociales de los estudiantes que serán objeto de estudio de esta investigación, pero nos permite precisar que nos alejamos de su estrategia metodológica en tanto se pretende un acercamiento procesual.

Más recientemente, los trabajos de Miguel Ribeiro sobre el conocimiento de los futuros maestros sobre las fracciones también nos aporta información valiosa sobre las dificultades que enfrentan los docentes en formación; su estudio está centrado en proporcionar un enriquecimiento de los subdominios del MKT de Ball, Thames, & Phelps (2008) y a la vez un refinamiento de sus componentes para que sirvan de orientación al diseño curricular para la formación de profesores (Véase Ribeiro, 2012; y, Caseiro & Ribeiro, 2012)

Finalmente podemos decir que el abordaje y objeto de estudio que pretendemos documentar en esta tesis, adquiere matices de originalidad dada la escasa investigación que al respecto se reporta en la literatura especializada.

Síntesis del capítulo

Bajo la premisa de que la teoría juega un papel importante en el análisis de los datos, pero sin la pretensión de aplicarla como referente principal, más bien como parte integrante de esa “sensibilidad teórica” que nos ayude a mirar con mejores lentes conceptuales, el trabajo de investigación no lo iniciamos con alguna teoría preconcebida, pero a la vez tampoco somos partidarios de esa pretendida ausencia de teoría para poder iniciar cualquier proceso de investigación, dado que los mismos conceptos con que nos preguntamos y/o empezamos a cuestionar y problematizar la realidad nunca parten de un lenguaje ingenuo, al contrario, el mismo lenguaje que utilizamos ya responde a la representación que subyace en nosotros respecto a un posicionamiento teórico, es decir, aunque ya se haya operado una recombinação de lenguajes entre lo científico y lo cotidiano, el resultado debe su antecedente a la experiencia (teórica) profesional del investigador.

La teoría ya consolidada nos permite estimular nuestras ideas y hacernos más sensibles para examinar los datos, de tal manera que podamos tomar distancia entre los datos y las teorizaciones previas; en tal sentido la construcción de este capítulo fue un trabajo dialéctico entre lo que íbamos encontrando en los datos y lo que se hacía necesario profundizar para fortalecer nuestras comprensiones, por ejemplo, al notar el énfasis puesto en los diferentes significados de las fracciones, ello nos llevó a revisar con profundidad lo que se ha escrito al respecto, o de igual manera, cuando notamos en los datos que el libro de texto es un referente importante en la formación docente inicial, se hace necesaria una revisión curricular, etc.

En este primer capítulo retomamos y clarificamos nuestro posicionamiento respecto a la Teoría de las representaciones sociales a partir del trabajo pionero de Serge Moscovici (1979) y sus seguidores; además precisamos al respecto que el enfoque adecuado para nuestro objeto de estudio es el enfoque procesual a partir del posicionamiento de Denisse Jodelet (2006), en tanto nos interesa más el proceso constituyente de las representaciones que el aspecto constituido.

Damos énfasis también a tres elementos constitutivos de las representaciones sociales: anclaje, objetivación y el lenguaje temático y la manera en cómo éstos interaccionan para configurar las representaciones sociales.

En un segundo apartado reformulamos el esquema de la transposición didáctica y planteamos la posibilidad de considerar, en el proceso de formación docente inicial para la enseñanza de las matemáticas, un esquema más complejo que incluya la destransposición de saberes y el doble rol que juegan los estudiantes al ir descentrando su papel y acercándose al rol del profesor (véase esquema 4).

El saber matemático de referencia en la tesis, las fracciones, es revisado desde su aspecto matemático (el paso de N a Q), los diversos significados o subconstructos que se han estudiado, a partir de la caracterización de Kieren (1980): parte – todo, medida, cociente, operador multiplicativo y razón, y los modelos para su enseñanza propuestos por diversos investigadores.

De igual manera abrimos dos apartados para retomar la revisión curricular en una doble dimensión: desde los planes de estudio para la formación inicial de maestros (1975, 1984 y 1997) y desde los planes de estudio para la educación primaria (1960, 1972, 1993 y 2011); al respecto podemos concluir que las representaciones sociales que circulan en torno a la enseñanza de las matemáticas deben su génesis a las propuestas contenidas en los materiales curriculares de la educación primaria, dado que los mismos planes de estudio para la formación de profesores así lo potenciaron (con excepción del plan 1997).

Finalmente en este apartado hacemos una revisión de las investigaciones que guardan similitud con el objeto de estudio que hemos abordado en esta tesis, resaltando dos trabajos principales: Peltier (1999) y Aguayo (2005); en ambos casos precisamos las diferencias para con nuestro objeto de estudio, en cuanto al primero se distingue por la diferencia entre el enfoque estructural que sostiene y el enfoque procesual que nosotros asumimos y en cuanto al segundo, porque aunque ambos hacemos objeto de estudio el proceso de transposición didáctica, nuestro objeto de estudio también focaliza la construcción de representaciones por parte de los estudiantes y la influencia de sus representaciones previas en el proceso mismo de la transposición, así como la posibilidad de construir momentos para la destransposición de saberes matemáticos y didácticos.

CAPÍTULO II.

Diseño de la investigación.

CAPÍTULO II.

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.

En la investigación cualitativa, ser objetivos no significa controlar las variables sino ser abiertos, tener la voluntad de escuchar y de “darles la voz” a los entrevistados, sean estos individuos u organizaciones. Significa oír lo que otros tienen para decir, y ver lo que otros hacen y representarlos tan precisamente como sea posible. (Strauss & Corbin, 2002, pág. 48)

En este capítulo planteamos dos aspectos importantes, el primero tiene que ver con la explicitación de nuestra pregunta principal de investigación, acompañada de otras 6 preguntas complementarias que le confieren cuerpo y estructura al proceso investigativo, a éstas le agregamos los objetivos que pretendemos lograr, en torno a tres categorías principales: las representaciones sociales, la metacognición y la destransposición del saber, insertos en un escenario de formación docente inicial de profesores para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria.

Esta acotación parecería irrelevante, sin embargo en el caso de la formación de los Licenciados en Educación Primaria en nuestro país, la formación docente es generalista, un mismo profesor aborda en sus planes de clase el trabajo didáctico con todas las asignaturas del currículo oficial, lo cual les confiere un ethos particular, y establece una distinción entre ser profesor de matemáticas y ser profesor para la enseñanza de las matemáticas.

El segundo aspecto principal que planteamos en este capítulo tiene que ver con el diseño metodológico de la investigación, en el entendido de que

Diseñar significa, ante todo, tomar decisiones a lo largo de todo el proceso de investigación y sobre todas las fases o pasos que conlleva dicho proceso. Algunas de estas decisiones se tomarán al principio, mientras se va perfilando el problema a investigar y se delimitan los casos, el tiempo y el contexto del estudio. Otras irán surgiendo sobre la marcha. Lo importante es retener que se trata de cuestiones que deben trabajarse y resolverse en cada circunstancia concreta de investigación. El diseño no se estampa mediante un molde o modelo que sirvió una vez, sino que se moldea cada vez a partir de los criterios maestros generadores de respuestas (Valles S., 2000, pág. 78).

Considero que a partir de esta cita queda claro que asumimos el diseño como algo flexible y adaptable a las circunstancias concretas de la investigación, además partimos de la consideración de que el tipo de estudio que realizamos no pretende generalidad en sus resultados, más en bien, en la misma lógica cualitativa, lo que pretendemos es aportar elementos de análisis para que en la medida que los lectores se puedan identificar con ellos logren hacer sus propias generalizaciones y deriven conclusiones prácticas cuando ello sea posible.

II.1. Problema de investigación, preguntas y objetivos.

Las decisiones que como investigadores tomamos irrenunciablemente van acompañadas de nuestras propias representaciones sobre la realidad, sobre los hechos y fenómenos que en ésta se presentan, es una actitud de permanente vigilancia la que contribuye a que rescatemos y analicemos el sentido de los datos que los sujetos protagonistas de la investigación nos proporcionan.

La formulación de un problema de investigación lleva todo un proceso que comienza con una idea, la cual puede ser producto del seguimiento a una línea de investigación propia de un grupo académico, o bien la ampliación de las líneas de investigación del mismo grupo a partir de hacer un abordaje teórico y metodológico alternativo, e incluso puede ser una idea que surge de manera empírica al observar los hechos cotidianos y teorizarlos, mediante la técnica del porqué; esta idea, sin embargo, requiere de una formulación específica para convertirla en un problema investigable y abordable en las condiciones y circunstancias concretas de las que dispone el investigador.

Al respecto de la selección de un problema de investigación, Strauss y Corbin (2002) nos dicen que las decisiones más complejas se presentan al intentar resolver las preguntas ¿cómo encuentro un problema investigable? Y ¿cómo lo reduzco lo suficiente para que sea trabajable?; en cuanto a la primera pregunta su respuesta la enmarcan al sugerir diferentes “fuentes de problemas investigables” (Strauss & Corbin, 2002, pág. 42) en los términos siguientes:

1ª. Problemas de investigación sugeridos o asignados: aquí la idea es que, de la convivencia con investigadores consolidados puede surgir el problema de investigación, en el entendido de que ellos tienen una visión más amplia de las problemáticas que pueden ser objeto de investigación e incluso muchas de las veces esto va generando “programas de investigación”.

2ª. Una segunda fuente es la literatura técnica y no técnica: muchas de las veces la literatura orienta sobre áreas poco exploradas o bien sobre temas que requieren mayor profundización e incluso aplicaciones creativas de algunos conceptos de la literatura especializada en campos para los cuales originalmente no estaban destinados.

3ª. La experiencia personal y profesional: su mismo nombre lo indica, ambos tipos de experiencia pueden ser orientadores para la elección del problema a investigar, en el caso de la experiencia profesional, cito a los autores *“la experiencia profesional suele llevar a juicios que declaren que alguna característica de la profesión o su práctica es menos efectiva, eficiente, humana o equitativa de lo que debería ser. Entonces se piensa que un buen trabajo de investigación puede llevar a corregir tal situación.* (Strauss & Corbin, 2002, pág. 42)”

4ª. La investigación misma: los autores, con esta fuente dejan abierta la posibilidad de que, al escuchar las “voces de los protagonistas” se pueda ir focalizando el objeto de estudio, el problema y por ende todo el diseño metodológico.

Partiendo de la consideración básica de estas cuatro fuentes fundamentales que nos plantean los autores, considero que mis preguntas de investigación surgen y recuperan las tres primeras fuentes; cuando inicié los estudios de doctorado mi preocupación estaba puesta en las concepciones de los profesores y decidí cursarlo en esta universidad en tanto se comenzaba a trabajar una línea de investigación (fuente 1ª.) con dicha temática (Carrillo, 1998), sin embargo conforme fui realizando algunas lecturas teóricas (fuente 2ª)

mi objeto de estudio se descentró de la parte cognitiva hacia una perspectiva más social, desde las concepciones individuales hacia las representaciones sociales, formadas y transformadas en los intercambios comunicativos y la interacción social; el trabajo cotidiano y mi experiencia profesional (fuente 3ª.) orillaron la delimitación de mi objeto de estudio hacia los procesos de transposición y destransposición del saber, al notar cómo los estudiantes, en su gran mayoría, al llegar a VII y VIII semestres de la Licenciatura no recuperaban muchos de los saberes que se habían revisado en los cursos de matemáticas y su enseñanza (II y III semestres de la Licenciatura²⁹).

Obviamente, de aquí surge un interés manifiesto por hacer una investigación que considero reúne las tres fuentes en una perspectiva de desarrollo profesional, al intentar aportar al grupo de investigación una mirada complementaria, a la vez que planteamos la posibilidad de aplicar categorías de la psicología social a un campo relativamente poco explorado, las representaciones sociales en la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas y finalmente, el escenario de lo cotidiano le confiere el marco de la experiencia profesional que se convierte en fuente de motivación intrínseca para desarrollarla.

La segunda pregunta de Strauss & Corbin (2002) respecto a la aprehensión de un problema de investigación para hacerlo manejable, tiene su respuesta más general en la especificación de las preguntas, según lo plantea también Valles (2000, pág. 86), *“las preguntas de investigación, en los estudios cualitativos, deben conjugar la amplitud (sin pretender abarcarlo todo) con la focalización (sin excluir la exploración y el descubrimiento a lo largo del estudio)”*.

En el mismo tenor de las preguntas de investigación Strauss & Corbin (2002, pág. 45) plantean que *“es necesario formular una pregunta de manera que permita la flexibilidad y libertad para explorar un fenómeno con profundidad”*, sin limitarse con ello o encasillarse a ésta, por el contrario conforme avanza la investigación se pueden ir focalizando o bien reafirmando; la pregunta en un estudio cualitativo *“es una declaración que identifica los fenómenos que se van a estudiar y les dice a los lectores qué quiere saber específicamente el investigador sobre su tema”* (Strauss & Corbin, 2002, pág. 46)

²⁹ Al respecto se incluye, como anexo 3, el mapa curricular de la Licenciatura en Educación Primaria, Plan 1997.

Hechas estas breves precisiones estamos en condiciones de formular nuestro problema principal de investigación, enunciándolo en los siguientes términos:

Pregunta central:

¿De qué manera las representaciones sociales que sobre las matemáticas y su enseñanza han construido los estudiantes a su ingreso a la Escuela Normal inciden en los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico que curricularmente se intenta transmitir?

Preguntas complementarias:

En cualquier problema de investigación, con la finalidad de que sea abordable en los tiempos que se disponen, es siempre deseable que haya una delimitación que permita acotar el campo de investigación; como antecedente a éste elaboramos otro trabajo de investigación (Lizarde, 2006), en el cual caracterizamos las concepciones sobre matemáticas y su enseñanza de un grupo “natural” y de 3 profesores de la Escuela Normal; como parte de los resultados de este trabajo, se confirma la representación socialmente aceptada respecto a la complejidad que reviste la enseñanza de los números racionales, y como un subconjunto de éste, las fracciones.

Partiendo de esta consideración, tomamos la decisión de delimitar como campo de investigación, al momento del curso de Matemáticas y su enseñanza II cuando se trate el bloque II “Los números racionales”, por ello también planteamos preguntas en tal sentido.

Al trabajar, en la Escuela Normal, el tema de los números racionales:

¿En qué medida la reflexión metacognitiva contribuye a generar procesos de destransposición del saber matemático que contribuyan al reconocimiento y transformación de las representaciones sociales de los estudiantes?

¿Existen momentos de negociación del sentido, significado y funcionalidad del saber matemático que incidan en procesos para su destransposición?

Las representaciones sociales que han construido en su escolarización previa ¿De qué manera influyen y/o “negocian” con los significados que se intentan construir en los cursos de Matemáticas y su enseñanza, al trabajar el bloque temático de los números racionales?

Después de trabajar el tema de los números racionales, en la Escuela Normal:

¿Se logran generar procesos de destransposición del saber que incidan en la práctica docente de los estudiantes al trabajar el mismo contenido en la escuela primaria?

¿Cuáles representaciones sobre las matemáticas y su enseñanza son las que perviven y se reflejan en su práctica docente en la escuela primaria: las construidas en su escolarización previa, las que se proponen en el curso, una combinación?

Objetivos:

Dada la complejidad que tienen los tres conceptos principales, involucrados en las preguntas que hemos formulado en el apartado anterior, los objetivos los vamos a enmarcar en esa misma lógica, en tal sentido, pretendemos

- Determinar los procesos de transposición y destransposición del saber matemático (con el tema de los números racionales), en la interacción didáctica en el aula de la Escuela Normal.
- Detectar la forma en que las representaciones sociales que sobre matemáticas y su enseñanza han construido los estudiantes en su escolarización previa inciden en el proceso de transposición y destransposición del saber matemático.
- Caracterizar los procesos de reflexión metacognitiva de los estudiantes al momento de trabajar en la escuela primaria con el tema de los números racionales y la incidencia que puede tener para concretar los procesos de transposición y destransposición del saber matemático.
- Caracterizar la articulación que puede darse entre las representaciones sociales, la metacognición y los procesos de destransposición del saber matemático, tanto en el aula de la Escuela Normal como en la vinculación con las experiencias de práctica docente en la Escuela Primaria.
- Aportar elementos teóricos de explicación sobre la formación docente inicial en la asignatura de Matemáticas que eventualmente nos apoyen en la revisión y/o reformulación permanente de las prácticas docentes cotidianas.

II.2. Perspectiva metodológica de esta investigación.

En la década de los 90's tuve oportunidad de leer un artículo que se titulaba “Las guerras de paradigmas y sus consecuencias: Un bosquejo ‘histórico’ de la investigación y la docencia desde 1989” (Gage, 1989), en éste de manera descriptiva nos hacían ver las consecuencias negativas que para el avance del conocimiento se podrían tener de continuar con esa separación e incompatibilidad que generalmente se ha observado entre los precursores de un enfoque cuantitativo (habitualmente caracterizado de positivista) y los defensores de las perspectivas cualitativas (hermenéuticas e interpretativas), afortunadamente esto ya no pervive, actualmente se reconoce que los investigadores de las ciencias sociales y humanas son *“pragmáticos operacionales. Mientras más flexiblemente funcionen los científicos o se les permita hacerlo, hay mayor probabilidad de que su investigación sea creativa (Strauss & Corbin, 2002, pág. 33)”*.

Al respecto hemos de decir que somos partidarios de que el objeto crea el método, en tal sentido más que posicionarnos de entrada en uno u otro paradigma, son las mismas preguntas y la forma de interrogar a la realidad las que nos posicionan en cualquiera de ellos e irremediablemente nos inclinamos hacia un lado u otro de la balanza y es que innegablemente, como dice Gimeno Sacristán (2008) *“El lenguaje no es inocente”* y aunque asumimos la posibilidad de complementariedad entre los paradigmas, conforme el lector va recorriendo el texto se da cuenta del posicionamiento en que nos encontramos.

Consideramos que el estudio de las representaciones sociales y su concreción en procesos áulicos requiere de una investigación insertos en el paradigma cualitativo – interpretativo (Colás & Buendía, 1994; Latorre, Del Rincón, & Arnal, 1997), principalmente porque la investigación cualitativa se enfoca a comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010).

En este sentido Strauss & Corbin (2002, pág. 12) definen la metodología cualitativa como *“cualquier tipo de investigación que produce hallazgos a los que no se llega por medio de procedimientos estadísticos u otros medios de cuantificación”*, y la delimitan para tipos de estudios sobre la vida de la gente, donde se trata de recuperar expectativas,

emociones, sentimientos, etc., de ahí que, dada la naturaleza de nuestro objeto de estudio, sea el abordaje más recomendable.

Respecto a esta misma metodología, Colás & Buendía (1994, pág. 250) señalan seis características comunes, mismas que a continuación rescato brevemente:

- 1.- Concepción múltiple de la realidad: se asume que existen múltiples realidades que sólo pueden ser estudiadas holísticamente. Los datos obtenidos de la realidad necesariamente divergirán, por lo que no se determinará una única verdad ni será posible la predicción ni el control de los hechos.*
- 2.- El principal objetivo científico será la comprensión de los fenómenos. En la comprensión se pretende llegar a la captación de las relaciones internas y profundas, indagando en la intencionalidad de las acciones.*
- 3.- Investigador y objeto de investigación están interrelacionados, interaccionando e influyendo mutuamente.*
- 4.- El objetivo de la investigación es desarrollar un cuerpo de conocimientos ideográficos que describan los casos individuales. La investigación cualitativa no pretende llegar a abstracciones universales sino a concretas y específicas universalidades (Erikson, 1989).*
- 5.- La simultaneidad de los fenómenos e interacciones mutuas en el hecho educativo hace imposible distinguir las causas de los efectos.*
- 6.- Los valores están implícitos en la investigación, reflejándose en las preferencias por un paradigma, elección de una teoría, etc.*

En general asumimos como intencionalidad la comprensión de las vivencias en un entorno específico, cuyos datos emergentes aporten al entendimiento de un fenómeno también específico, el cual, desde la delimitación que hemos planteado en las preguntas de investigación, tiene que ver con los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico, así como las representaciones sociales que desde ahí se pueden apreciar.

Por otro lado, Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio (2010) siguiendo a Patton (2002) identifican las siguientes áreas y necesidades como adecuadas para planteamientos cualitativos referentes a procesos (por ejemplo en torno a un programa educativo o uno de cambio organizacional):

- 1.- El centro de la investigación está conformado por las experiencias de los participantes en torno al proceso, particularmente si subraya resultados individualizados.*
- 2.- Es necesaria información detallada y profunda acerca del proceso.*
- 3.- Se busca conocer la diversidad de idiosincrasias y cualidades únicas de los participantes inmersos en el proceso. (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010, pág. 369)*

Como veremos más adelante, el tipo de objeto de estudio y los sujetos de la investigación que hemos focalizado, además del contexto donde se desarrolla la investigación, innegablemente están vinculados por un proceso en torno a un programa educativo, en este caso la formación profesional de Licenciados en Educación Primaria, de tal manera que, es manifiesta la pertinencia que cobra este abordaje cualitativo; tenemos la necesidad de recuperar sistemáticamente las experiencias de los participantes en el proceso didáctico que será objeto de estudio, con la debida profundidad y en los márgenes de nuestras posibilidades. Aunque somos conscientes de las limitaciones para generalizar y tampoco es la pretensión, sí pretendemos mostrar la construcción de algunas regularidades en torno a las características de dichos procesos didácticos, que aunque singulares pueden contribuir a desvelar las “concretas y específicas universalidades” (Erikson, 1989; en Colás & Buendía, 1994, pág. 250)

Otra de las características que pretendemos que definan nuestra investigación es que sea de corte descriptivo pero con fuerte tendencia a la explicación y a la posibilidad de generación de teoría fundamentada en los datos, en los términos que plantean Strauss & Corbin (2002). Recordemos que un componente fundamental es la interpretación (Stake, 1999), ya que el investigador hace su propia descripción y valoración de los datos, ello por supuesto demanda no sólo de habilidades para articular los datos y poder hacer las interpretaciones, sino sobre todo de una gran responsabilidad, de tal manera que todo lo que se argumente esté perfectamente bien sustentado en los datos que se van obteniendo.

Aunque en los primeros párrafos de este apartado asumimos que nuestra investigación está inserta en el paradigma cualitativo, es necesario aclarar que algunos autores proponen el uso del término “perspectivas” para referirse a sistemas no tan cerrados en sí mismos y más fácilmente utilizables por los investigadores, cualquiera que sea su paradigma de adherencia.

En Valles (2000, pág. 52) encontramos la aclaración de que *“un paradigma suele englobar varias perspectivas teórico – metodológicas, y además se caracteriza por una serie de principios o supuestos generales (ontológicos, epistemológicos, metodológicos). Las perspectivas podrían denominarse también, si se prefiere, paradigmas de rango inferior o ‘miniparadigmas’”*; de aquí que cuando titulamos este apartado como perspectiva metodológica estamos pensando en un sistema no tan cerrado como el

paradigma pero sí inserto dentro de uno de ellos (el cualitativo) por la coincidencia con sus supuestos generales.

En el plano ontológico, nos cuestionamos por la realidad que va a ser investigada: o nos quedamos en los hechos observables (“reales”) o nos sumergimos en un realismo crítico y defendemos una comunicación sujeto-objeto, impregnada por la subjetividad de los protagonistas; en el plano epistemológico nos interrogamos respecto a qué es hacer ciencia, aquí cobra relevancia las palabras de Bourdieu (1976) citado en Valles (2000, pág. 50)

Preguntarse qué es hacer ciencia o, más precisamente, tratar de saber qué hace el científico, sepa o no lo que hace, no es sólo interrogarse sobre la eficacia y el rigor formal de las teorías y de los métodos, es examinar a las teorías y los métodos en su aplicación para determinar qué hacen con los objetos y qué objetos hacen.

En tal sentido, plantearse preguntas epistemológicas, relativas al conocimiento, implica examinar no sólo el rigor formal de la metodología, sino sobre todo examinarla en sí misma en su aplicación para determinar cómo el objeto crea al método, al mismo tiempo que el método configura un tipo de objeto de investigación muy particular.

En el plano metodológico la pregunta principal es sobre las formas particulares para conocer esa realidad, de ahí que cada investigador tenga que tomar sus propias decisiones en la articulación entre estos tres planos: el ontológico, el epistemológico y el metodológico para definir qué quiere conocer y cómo es que va a hacerlo.

Finalmente, en la siguiente tabla recuperamos una breve comparación entre los planteamientos cuantitativos y cualitativos, con lo cual explicitamos aún más el porqué de la decisión por realizar un abordaje cualitativo.

Tabla 16: Comparación entre planteamientos cuantitativos y cualitativos.

Planteamientos cuantitativos	Planteamientos cualitativos
Precisos y acotados o delimitados	Abiertos.
Enfocados en variables lo más exactas y concretas que sea posible	Expansivos, que paulatinamente se van enfocando en conceptos relevantes de acuerdo con la evolución del estudio.
Direccionados	No direccionados en su inicio.
Fundamentados en la revisión de la literatura	Fundamentados en la experiencia e intuición.
Se aplican a un gran número de casos	Se aplican a un menor número de casos.
El entendimiento del fenómeno se guía a través de ciertas dimensiones consideradas como significativas por estudios previos.	El entendimiento del fenómeno en todas sus dimensiones, internas y externas, pasadas y

Se orientan a probar teorías, hipótesis y/o explicaciones, así como a evaluar efectos de unas variables sobre otras (los correlacionales y explicativos)	presentes. Se orientan a aprender de experiencias y puntos de vista de los individuos, valorar procesos y generar teorías fundamentadas en las perspectivas de los participantes.

Fuente: (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010, pág. 365)

Ahora bien, en lo que sigue nos dedicaremos a describir y caracterizar tanto a los informantes, como a las técnicas e instrumentos con los cuales recuperamos los datos que le dan cuerpo a esta tesis, así como el procedimiento de análisis que seguimos.

II.2.1. Elementos básicos del estudio de casos.

Una de las dificultades de la investigación cualitativa, entre otras, es que al intentar investigar desde el contexto en que suceden los hechos evidentemente no podemos tomar como objeto de estudio a poblaciones numerosas, dado que al poner el centro en la parte interpretativa de los datos, la cantidad de éstos es muy relevante en términos de los tiempos de que se dispone para concluir la investigación. Además es importante mencionar que, a diferencia de los estudios cuantitativos que se preocupan por la representatividad de la muestra con miras a la generalización de los resultados a toda la población, en los estudios cualitativos, hacemos alusión al criterio número 4 que ya recuperábamos desde Colás & Buendía (1994) quienes citando a Erikson dicen que el paradigma cualitativo “*no pretende llegar a abstracciones universales sino a concretas y específicas universalidades*” (pág. 250).

Bajo esta consideración hacemos una acotación más, nuestra investigación se inserta como un estudio de caso, en los términos que Eisenhardt (1989) plantea, como “*una estrategia de investigación dirigida a comprender las dinámicas presentes en contextos singulares*”, la cual podría tratarse del estudio de un único caso o de varios casos, combinando distintos métodos para la recogida de evidencia cualitativa y/o cuantitativa con el fin de describir, verificar o generar teoría. (Martínez Carazo, 2006, pág. 174)

De esta manera, para Yin (1989, 1998), la cuestión de generalizar a partir del estudio de casos no consiste en una “*generalización estadística*” (desde una muestra o grupo de sujetos hasta un universo), como en las encuestas y en los experimentos, sino que

se trata de una “*generalización analítica*” (utilizar el estudio de caso único o múltiple para ilustrar, representar o generalizar a una teoría) (Martínez Carazo, 2006, pág. 173).

Ahora bien ¿qué elementos caracterizan el estudio de casos? Para dar respuesta a esta pregunta, e incluso ir definiendo a qué le podemos llamar “caso” y en particular cómo delimitamos nuestro caso de investigación, vamos a partir de la consideración que nos plantean VanWynsberghe & Khan (2007) en el sentido de que en las últimas tres décadas se han producido más de 25 definiciones diferentes de lo que es un estudio de casos respondiendo a diferentes énfasis en el proceso de investigación. Como muestra de esta variedad de énfasis vamos a recuperar algunas conceptualizaciones que nos permitan delimitar un posicionamiento al respecto.

Siguiendo a Yin, un estudio de casos es una investigación empírica que:

- * *Investiga fenómenos contemporáneos en profundidad y dentro de un contexto de la vida real, especialmente cuando*
- * *las fronteras entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes* (Yin, 2009, pág. 18).

VanWynsberghe & Khan (2007), recuperan la definición de Gerring (2004) cuando éste afirma que el estudio de casos es un diseño de investigación definido de la mejor manera como el estudio intensivo de un caso particular (un fenómeno relativamente limitado), donde el objetivo del investigador es dilucidar las características más amplias de una clase de fenómenos similares; como apreciamos en esta idea hay una clara intencionalidad a la generalización a partir de la investigación de un caso, es decir, a partir de comprender el fenómeno en su singularidad se estará en condiciones de dilucidar características comunes de fenómenos similares, lo cual coincide con la idea de “generalización analítica” que plantea Yin (2009).

Siguiendo con la caracterización, a decir de Albert Gómez (2007) todas las definiciones vienen a coincidir en que el estudio de casos implica un proceso de indagación que se caracteriza por el examen detallado, comprehensivo, sistemático y en profundidad del caso objeto de interés.

“Consiste en una descripción y análisis detallados de unidades sociales o entidades educativas únicas. Es un tipo de investigación apropiado para estudiar un caso o situación con cierta intensidad en un periodo de tiempo corto. El potencial del estudio de caso radica en que permite centrarse en un caso concreto o situación e identificar los distintos procesos interactivos que lo conforman, así

como su flexibilidad y aplicabilidad a situaciones naturales” (Albert Gómez, 2007, pág. 216)

Para Rojas Soriano (2002) el estudio de caso *“es un procedimiento que permite centrar la atención en una institución o persona que se considera típica o que se elige de manera intencional, para obtener información amplia y profunda y conocer con detalle los diversos aspectos, manifestaciones y situaciones que ha tenido o tiene el caso que se estudia”* (Rojas Soriano, 2002, pág. 143).

A diferencia de Yin (2009), quien habla de investigar “fenómenos contemporáneos”, en la definición anterior de Rojas Soriano (2002) se precisa que el centro del estudio de casos puede ser una institución o persona que se considera típica o se elige de manera intencional, lo cual permite mayor acotación en la interpretación de qué considerar un caso para investigar.

En el contexto mexicano y muy vinculado con el estudio de las representaciones sociales, encontramos en Giménez (2012) el análisis y conceptualización de lo que es un caso, a partir de la comparación entre los posicionamientos de dos autores que se consideran (a su juicio) los más actuales y representativos de este tipo de estudios (John Gerring, 2007; y Yin, 2009); según el primero *“un caso es un fenómeno (o unidad) espacialmente delimitado, observado en un solo punto del tiempo o a través de un determinado periodo de tiempo”* (p. 19).

Pero también podríamos definirlo, desde una posición más constructivista, como un fenómeno o evento social relativamente unificado y delimitado, que se da en la experiencia histórica concreta y cuyo sentido se constituye en función de una teoría o una categoría analítica. Por lo tanto, un caso es siempre un fenómeno de la vida real (v.g., individuos, pequeños grupos, organizaciones, comunidades, naciones, sujetos, etc.), y no una abstracción como sería un tópico, un argumento o incluso una hipótesis (Yin, 2009, p. 32; citado en Giménez, 2012, pág. 43).

En la recuperación de ideas que hace Giménez (2012) se precisa que cuando se habla de “fenómenos de la vida real” se hace alusión a individuos, pequeños grupos u organizaciones, incluso naciones, esto es, pensar en el caso es pensar en un fenómeno identificable temporal y espacialmente; el caso es algo específico pero a la vez complejo y

en funcionamiento; como diría Stake (1999), “*el caso es uno entre muchos. En cualquier estudio dado, nos concentramos en ese uno*” (pág. 15).

Ahora bien, desde la revisión del texto de Stake (1999), encontramos una triple diferenciación de los estudios de caso en atención al interés del investigador:

- *Estudio intrínseco de casos*: tenemos un interés intrínseco en el caso, no nos interesa porque con su estudio aprendamos sobre otros casos o sobre algún problema general, sino porque necesitamos aprender sobre ese caso particular; un ejemplo puede ser cuando un profesor decide estudiar a un alumno en dificultades, cuando sentimos curiosidad por unos determinados procedimientos, o cuando asumimos la responsabilidad de evaluar un programa. El caso viene dado.

- *Estudio instrumental de casos*: en otras situaciones, nos encontraremos con una cuestión que se debe investigar, una situación paradójica, una necesidad de comprensión general, y consideraremos que podemos entender la cuestión mediante el estudio de un caso particular. Por ejemplo, los profesores no universitarios suecos disponen de un año para empezar a utilizar un sistema nuevo de calificación de sus alumnos, aprobado por el Parlamento. ¿Cómo funcionará? El sistema debe tener una orientación referida a criterios; ¿esta orientación cambiará la forma de enseñanza de los profesores? Se puede elegir a una profesora como objeto de estudio, observar de forma general cómo enseña y de forma más particular cómo califica el trabajo de los alumnos, y si ello afecta o no a su modo de enseñar. La finalidad de este estudio de casos es comprender otra cosa. Aquí el estudio de casos es un instrumento para conseguir algo diferente a la comprensión de esa profesora concreta.

- *Estudio colectivo de casos*: quizá nos parezca oportuno elegir a varios profesores como objeto de estudio, y no sólo a uno. O quizá decidamos utilizar escuelas como casos, y elegir varias escuelas. Cada estudio de casos es un instrumento para aprender sobre los efectos de las normas de calificación, pero deberá existir una buena coordinación entre cada uno de los estudios individuales. (Stake, 1999, págs. 16 - 17)

Esta distinción obedece, además de al interés del investigador, al énfasis metodológico que se le puede dar a cada uno. Por ejemplo, si nuestro caso se orienta más hacia un estudio instrumental, tenemos la posibilidad de plantear hipótesis que nos ayuden a comprender un fenómeno más general, lo cual no sería posible en un estudio intrínseco

de casos, dado que en éste tenemos que centrarnos en los aspectos específicos del caso que estudiamos y frenar nuestra curiosidad y nuestros intereses especiales.

A partir de estas consideraciones estamos en condiciones de ir delimitando que nuestra investigación puede adoptar las características de un estudio de casos instrumental, dado que tenemos interés en que, a partir del caso concreto de un aula y más específicamente de un profesor en interacción con un grupo de alumnos, en un espacio y tiempo determinados curricularmente (el curso de Matemáticas y su enseñanza II y dentro de éste el bloque de números racionales) se puedan encontrar claves para caracterizar los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico, así como la influencia que tienen en éstos las representaciones sociales tanto del formador de profesores como de los estudiantes.

En otro orden de ideas, a decir de VanWynsberghe & Khan (2007, pág. 4) siete características son necesarias (aunque no necesariamente suficientes) en los estudios de caso:

Característica 1: Pequeño N. El estudio de caso requiere un enfoque intensivo y profundo en la unidad de análisis específico y generalmente requiere un tamaño de muestra mucho más pequeña que la investigación por encuestas. (...) Por ejemplo, un aula de clase usando una simulación por computadora puede ser un $N=1$.

Característica 2: Detalle contextual. Los estudios de casos tienen como objetivo dar al lector una sensación de "estar ahí", proporcionando un alto nivel de detalle y de análisis contextualizado de "una instancia en la acción" (MacDonald y Walker, 1977, p. 182). El investigador delimita cuidadosamente la "instancia", definiéndola en términos generales y desmenuzando sus particularidades.

Característica 3: Escenarios naturales. Los investigadores del estudio de casos optan por estudiar sistemáticamente las situaciones donde hay poco control sobre el comportamiento, organización o eventos. El estudio de caso es adecuado únicamente para la investigación en situaciones complejas (Anderson, Crabtree, Steele, y McDaniel, 2005), porque avanza el concepto de que los escenarios complejos no pueden reducirse a las relaciones entre una sola causa y efecto.

Característica 4: Acotados. Los estudios de caso ofrecen una descripción detallada de un límite temporal y específico. Asistir al lugar y tiempo contextualiza las estructuras y

relaciones que son de interés. El salón de clases, por ejemplo, une espacialmente un ambiente formal institucional con un espacio y horarios establecidos, expectativas comunes, y a menudo un currículo prescrito.

Característica 5: Hipótesis de trabajo y lecciones aprendidas. Los investigadores pueden generar hipótesis de trabajo y aprender nuevas lecciones sobre la base de lo que se descubre o construirlas durante la recolección y análisis de datos en el estudio de caso.

Característica 6: Fuentes múltiples de datos. El estudio de caso utiliza rutinariamente múltiples fuentes de datos. Esta práctica desarrolla líneas convergentes de consulta, lo que facilita la triangulación y ofrece resultados que son propensos a ser mucho más convincentes y precisos.

Característica 7: Posibilidad de ampliación. Los estudios de caso pueden enriquecer y potencialmente transformar la comprensión del lector de un fenómeno por el que se extiende la experiencia del lector. El investigador de estudio de caso analiza las interacciones sociales complejas para descubrir o construir factores "inseparables", que son los elementos de los fenómenos (Yin, 2003). En un estudio de caso, el investigador busca confluir y articular estas relaciones contextualizadas con la esperanza de que el contexto y las relaciones puedan resonar en el lector.

Como podemos apreciar, estas siete características acotan al estudio de caso y le dan estructura, de tal manera que nos queda claro que, dada la naturaleza cualitativa del proceso investigativo, al momento mismo de hacer el análisis se debe potenciar la posibilidad de que los lectores se identifiquen con la información que se presenta, dando la sensación de un “estar ahí”, sobre todo porque se recupera la información con múltiples fuentes y desde su escenario natural (en lo que sigue vamos a profundizar en ello).

En otras palabras, nosotros usamos el estudio de casos porque buscamos comprender el fenómeno a profundidad en la vida real, pero semejante comprensión está rodeada por las condiciones contextuales en las que se desarrolla la investigación, de ahí que una parte importante para poder estructurar el estudio de casos sea la elección de los informantes, o, como algunos autores le llaman, la “decisión muestral”.

En este tenor, Valles (2000) reflexiona sobre el muestro cualitativo y nos plantea algunos criterios a tomar en cuenta, los cuales recupero brevemente:

1º. Una de las decisiones muestrales que el investigador suele tener que barajar es la *selección de contextos relevantes al problema de investigación*. Dentro de estos contextos se procederá a seleccionar los *casos individuales*.

2º. El segundo criterio tiene que ver con las “consideraciones pragmáticas”, la “consideración de la accesibilidad” y la “consideración de los recursos disponibles” en la selección de contextos.

3º. La cuestión de la “representatividad”; al respecto se considera que *“la selección de informantes, episodios e interacciones van siendo conducidas por un planteamiento conceptual, no por una preocupación por la 'representatividad'”* (pág. 94).

4º. Y finalmente, hay que tomar decisiones muestrales también sobre la cronología de la investigación.

Por su parte, Strauss & Corbin (2002) recomiendan que cuando se “*saturen*” los temas y áreas en los cuales el investigador está interesado, significando que no se encuentran nuevos datos en los casos adicionales, no se deberían adicionar más casos y se debe detener el proceso de recolección de información. De acuerdo con lo anterior, Perry (1998) indica que no hay una guía precisa acerca del número de casos que deben ser incluidos, por lo que *“esta decisión se deja al investigador...”* [Citado en (Romano, 1989, pág. 36)]. Similarmente, Patton (1990:181) no proporciona un número exacto o rango de casos que podrían servir como guía a los investigadores, y afirma que *“no hay reglas”* para el tamaño de la muestra en una investigación cualitativa. Sin embargo, algunos autores, teniendo en cuenta que es necesario suministrar una guía a los investigadores interesados en este tipo de metodología, recomiendan un rango dentro del cual el número de casos de cualquier investigación podría caer. Por ejemplo, Eisenhardt (1989:545) sugiere entre cuatro y diez casos, y afirma: *“Mientras no existe un número ideal de casos, con un rango entre cuatro y diez casos se trabaja bien. Con menos de cuatro casos, es difícil generar teoría con mucha complejidad, y es empíricamente inconveniente”*. (Martínez Carazo, 2006, pág. 184)

En el mismo tenor de la definición de cómo hacer el muestreo Strauss & Corbin (2002, págs. 222 - 223) plantean cuatro consideraciones generales, las cuales presentamos sintetizadas:

1° Se debe escoger un sitio o un grupo para ser estudiado. Esto, por supuesto, está guiado por la pregunta principal de la investigación.

2° Se debe tomar una decisión sobre los tipos de datos que se van a usar. La decisión se debe tomar con base en aquellos datos que tienen el mayor potencial de captar los tipos de información deseados.

3° Debe considerarse el tiempo que se dedicará al estudio de un área.

4° Inicialmente, las decisiones con respecto al número de sitios y observaciones o entrevistas dependen del acceso, los recursos disponibles, los objetivos de la investigación y el tiempo y la energía del investigador.

A partir de estas consideraciones proponen tres tipos de muestreo: abierto, de relaciones y variaciones, y muestreo discriminado. Cada uno de estos vinculado con los tipos de codificación que desde la Grounded theory proponen, a saber, codificación abierta, axial y selectiva (en un apartado siguiente caracterizaremos estos tres tipos de codificación y la manera en cómo los usamos en esta investigación).

En el muestreo abierto, *“la selección de los entrevistados o sitios para observación es relativamente abierta en el sentido de que se podría escoger cada tercera persona que pasara por la puerta o hacer sistemáticamente una lista de nombres, horas y lugares”* (Strauss & Corbin, 2002, pág. 225), sin embargo, ante la complicación que esto implica, ellos mismos plantean algunas “variaciones”: 1° El investigador puede buscar personas, sitios o acontecimientos donde pueda recoger, con un propósito, datos relacionados con las categorías, sus propiedades y dimensiones. 2° Proceder de modo muy sistemático, yendo de persona a persona o de lugar en lugar, en una lista que uno elabore (...) haciendo un muestreo con base en la conveniencia. 3° A partir del muestreo teórico, cuando el investigador se topa con acontecimientos teóricos importantes de manera inesperada, durante la observación de campo, al hacer las entrevistas o al leer los documentos. 4° Volver a los datos y reorganizarlos de acuerdo con los conceptos teóricamente pertinentes.

El segundo tipo de muestreo, de “relaciones y variaciones”, implica que *“el investigador busque incidentes que demuestran el rango o variaciones de las dimensiones de un concepto y las relaciones entre conceptos”* (Strauss & Corbin, 2002, pág. 229)

Finalmente, en el “muestreo discriminado”, un investigador *“escoge sitios, personas y documentos que maximicen las oportunidades de análisis comparativos. Esto puede significar volver a visitar sitios, documentos o personas o ir a los nuevos a fin de conseguir los datos necesarios para saturar las categorías y completar un estudio”* (Strauss & Corbin, 2002, pág. 231).

Como podemos apreciar, en los diferentes posicionamientos queda claro el margen de apertura que tiene el investigador para tomar las decisiones que considere más pertinentes para su objeto de estudio, en tal sentido, y a reserva de que en los apartados que siguen profundizaremos un poco más al respecto, podemos anticipar que nuestro objeto de investigación son los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico (tanto en la Escuela Normal, como desde la recuperación de datos de la Escuela Primaria, por parte de los estudiantes), así como el diálogo e interacción entre las representaciones sociales del formador de profesores, los estudiantes y el diseño curricular propuesto oficialmente, para ello focalizaremos como caso de estudio el aula-clase de un profesor en su contexto natural de trabajo docente con el bloque II “Los números racionales”, del programa de Matemáticas y su enseñanza II, en el proceso de formación docente inicial de los Licenciados en Educación Primaria, durante el semestre non (agosto –enero) del ciclo escolar 2011 - 2012; adicional a ello también revisaremos el análisis de la práctica docente (a partir de sus declaraciones en entrevistas y sus ensayos de análisis) de 7 estudiantes, desde el diseño de una situación didáctica, su puesta en práctica y el análisis posterior a ella.

En la lógica del muestreo discriminado y de los “grupos focales”, a un año de distancia de haber llevado el curso aplicamos una entrevista colectiva (14 de enero del 2013), con la intención de recuperar sus apreciaciones sobre los cambios que han sufrido tanto los conocimientos (matemáticos y didácticos) como sus representaciones a lo largo del tiempo y poder establecer algunas relaciones causales. Esta entrevista colectiva partió de la resolución de 25 problemas matemáticos, recuperados desde las mismas transcripciones de las clases del formador de profesores, es decir, problemas que un año antes habían resuelto en clase; primero se les dejaron los problemas para que los resolvieran de manera individual y luego se les convocó a la entrevista.

Dicho lo anterior, en los apartados que siguen profundizamos un poco más sobre lo que sintéticamente hemos descrito.

II.2.1.1. El contexto de la investigación.

La elección del contexto de la investigación es relevante en tanto define las posibilidades de recuperación de la información, la accesibilidad de los informantes y la pertinencia de los datos recuperados; al respecto Mertens (2005), citado en Hernández

Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio (2010, pág. 372), plantea dos condiciones esenciales a tomar en cuenta, la conveniencia y la accesibilidad.

“La primera responde a las siguientes interrogantes: ¿el ambiente definido contiene los casos, personas, eventos, situaciones, historias y/o vivencias que necesitamos para responder a las preguntas de investigación? La segunda tiene que ver con el cuestionamiento ¿es factible realizar la recolección de los datos? O ¿podemos acceder a los datos que necesitamos?”.

En atención a estos dos criterios y dada la naturaleza cualitativa de la investigación consideramos que el contexto elegido cubre los requisitos necesarios, contiene el caso, personas y situaciones que necesitamos para responder a las preguntas de investigación y además nos da facilidad para el acceso, al poder regresar cuantas veces queramos al escenario, dado que los estudiantes estarán por dos años y medio más como alumnos de la institución y el profesor es parte de la planta docente de base, con amplio y reconocido prestigio profesional.

La Escuela Normal donde se lleva a cabo la presente investigación fue fundada el 3 de septiembre de 1933, desde este momento adquirió el carácter de Escuela Normal Rural³⁰, asumiendo un fuerte compromiso con la formación de docentes para el medio rural, hecho que hasta la fecha sigue cumpliendo, dado que la gran mayoría de sus egresados son contratados para ejercer la docencia en estas condiciones.

La matrícula estudiantil actual asciende a los 578 estudiantes³¹, distribuidos en 17 grupos: salvo el primer grado que tiene cinco grupos el resto son cuatro grupos por cada grado, de primero a cuarto grado de Licenciatura en Educación primaria, la cual es la única que se oferta en nuestra institución. En la tabla siguiente podemos apreciar la distribución estudiantil:

³⁰ En nuestro país existen Escuela Normales que por el tipo de sostenimiento económico se clasifican en públicas y privadas; las escuelas privadas generalmente ubicadas en los centros urbanos, en cambio las escuelas públicas se subdividen a su vez en Urbanas, Rurales y Experimentales. Cabe mencionar que el calificativo de Rural no obedece sólo a su ubicación en una población de este tipo, sino sobre todo a que desde su mismo contrato fundacional adquirió una mística de servicio principalmente hacia las comunidades rurales, es decir, prácticamente hasta antes del Plan de estudios 1984 nuestra escuela incluía en sus programas actividades propias del servicio hacia las comunidades rurales e incluso la ideología que pervive es en ese mismo sentido: formar docentes para el servicio en las comunidades rurales (a pesar del carácter uniformizante de los actuales planes de estudio, sobreviven de manera cocrurricular, como resabios de planes de estudio anteriores asignaturas como “industrias rurales”, “peluquería”, “corte y confección”, “electricidad” y “serigrafía”, como una preparación adicional y con posibilidades de servicio a las comunidades)

³¹ Aunque a la fecha de cierre del ciclo escolar 2011 – 2012, la matrícula real de estudiantes es de 579, como me lo confirman los datos de Control Escolar de la Escuela.

Tabla 17. Matrícula estudiantil.

Grado/grupo	A	B	C	D	E	Total
1º.	36	37	35	36	37	181
2º.	34	30	34	33		131
3º.	34	34	32	30		130
4º.	35	36	33	32		136
Total						578

Actualmente laboramos en la institución un total de 46 profesores, de los cuales 9 son profesores comisionados, ejercen en la Escuela Normal pero con una plaza de la escuela primaria.

El plan de estudios con el que se forman los Licenciados en Educación primaria está vigente desde 1997, aunque a la fecha ya se está en un proceso de reforma a nivel nacional; dentro de este plan, los cursos de matemáticas se imparten en el II y III semestres de la carrera y el bloque temático donde se trabajan los números racionales es el segundo correspondiente también al segundo curso de matemáticas y su enseñanza³².

II.2.1.2. Selección de los informantes.

De acuerdo con Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio (2010, pág. 394), por lo general son tres los factores que intervienen para “determinar” (sugerir) el número de casos:

1. Capacidad operativa de recolección y análisis (el número de casos que podemos manejar de manera realista y de acuerdo con los recursos que dispongamos).
2. El entendimiento del fenómeno (el número de casos que nos permitan responder a las preguntas de investigación); lo cual en la línea de la grounded theory se denomina “saturación de categorías”.
3. La naturaleza del fenómeno bajo análisis (si los casos son frecuentes y accesibles o no, si el recolectar información sobre éstos lleva relativamente poco o mucho tiempo).

³² Se anexa mapa curricular del plan 1997, indicando el lugar que ocupan los cursos del área de matemáticas (Anexo 3).

Con estos tres criterios vamos focalizando los sujetos que se convertirán en nuestros informantes, aunque en líneas anteriores ya indicábamos cuántos; en primer término, al ser un análisis de caso, nuestra capacidad operativa se reduce a la revisión y análisis de un grupo natural de la Escuela Normal; en segundo lugar, negociaremos el acceso con un profesor que tenga cierto nivel de pericia en la formación inicial de profesores (experiencia, tipo de concepciones, disposición) y en tercer lugar al ser una investigación cualitativa, focalizaremos la investigación en el tratamiento de las clases de un bloque temático (con el tema de fracciones). En los siguientes párrafos profundizaremos al respecto.

Parafraseando a Valles (2000), cuando estamos en el momento de tomar decisiones sobre el diseño metodológico y principalmente en esta parte de los informantes, tenemos que hacernos tres preguntas principales: ¿qué nos comunicarán? ¿A quién? Y ¿bajo qué condiciones?; la respuesta a cada una de estas preguntas nos irá indicando quiénes serán nuestros informantes.

La primera ¿qué nos comunicarán? Definitivamente debemos pensar en las características de los informantes de tal manera que nos den información relativa a nuestro objeto de estudio, es decir, qué entiendan el objeto de estudio, relativa a los procesos de transposición y destransposición del saber matemático.

En un primer momento, esta “negociación del acceso” (Valles S., 2000), implica solicitar la participación de un profesor, que bajo el criterio de “*relevancia para nuestra investigación*”, la caracterización de sus concepciones declaradas se acerque más al modelo de profesor que desde la literatura se considera deseable, en concreto, el profesor como un profesional reflexivo y crítico o incluso con una tendencia didáctica investigativa (Carrillo, 1998). Como ya indicábamos, esta decisión obedece más al criterio de relevancia que al de representatividad³³, tomaremos en cuenta y valoraremos la disposición para participar en el proyecto como lo que finalmente definirá el maestro participante. Esta definición se hará en negociación directa con el formador de profesores, a través de nuestras redes personales de mutua colaboración.

El segundo tipo de informantes son los estudiantes, en este sentido también la decisión para su elección obedece al mismo criterio de “*relevancia para la investigación*”, mediado por el tipo de interacción que manifestaron al momento del desarrollo del curso,

³³ En su acepción cuantitativa, dado que las características profesionales del profesor participante pueden ser representativas de una forma de “hacer matemáticas”.

es decir, la relevancia para la investigación está dada en la medida que ellos se comprometieron con su propia práctica y aceptaron la “devolución de la responsabilidad” que implica hacer un trabajo reflexivo tanto en el momento de planear su clase para trabajar en la escuela primaria, como en la sistematización de los datos posteriores a la práctica. Para esta decisión se tomó en cuenta la opinión del maestro titular de la asignatura, en tanto su conocimiento respecto al nivel de compromiso asumido es un indicador de la relevancia que puede tener la información que nos aporten.

La respuesta a la pregunta ¿a quién? se contesta desde el momento mismo que asumimos que al ser el investigador un participante más de la comunidad normalista, los niveles de confianza son buenos y ello facilita la participación, pero a la vez obliga a estar en constante vigilancia para lograr ver lo extraño en lo familiar, es decir, para romper con la “ilusión de transparencia” traducida en acciones autojustificadoras de las formas de ser y hacer en este contexto.

Finalmente, ¿bajo qué condiciones?, éstas en todo momento se han planteado bajo el principio ético del anonimato, dado que lo que nos interesa es la búsqueda de teoría emergente a partir de los datos y en lo más mínimo se tiene la intención de evidenciar prácticas de ninguna naturaleza.

Considerando estos criterios ya mencionados, anticipamos que para la presente investigación se tomaron en cuenta la videograbación de 9 sesiones de clase de un maestro, en un contexto “natural” de una Escuela Normal Rural, las cuales en conjunto configuraron un proceso didáctico para el tratamiento del tema de los números racionales; además se seleccionaron 7 estudiantes para realizar un seguimiento tanto en el escenario de la Escuela Normal como en un periodo de práctica docente en la Escuela primaria.

A lo largo de todo el contenido de la tesis, identificaremos al profesor participante como “el maestro” y en las citas de fragmentos de las clases se identificará como “Mo.”, en aras de conservar el anonimato; para el caso de los estudiantes, en el anexo 1 planteamos diferentes formas de identificarlos según corresponda la unidad de información que recuperemos a cada uno de los instrumentos utilizados, por ejemplo, en sus participaciones en clase los identificaremos como: P1, V2, etc., o para el caso de las entrevistas previas, usaremos la denominación EPrP1, EPrV2, etc.

Se aplicaron dos entrevistas a cada estudiante, una previa y otra posterior a la práctica docente en la escuela primaria; complementario a ello se analizaron tanto sus transcripciones de clase como sus ensayos producto del análisis de sus propias prácticas; y

en la parte final de la investigación (a un año de distancia), se les aplicó un cuestionario con problemas sobre fracciones, estructurado a partir de los mismos problemas trabajados durante el curso de Matemáticas y su enseñanza II; este cuestionario se complementó con una entrevista colectiva, donde se discutieron los porqué en el cambio de algunas formas de estructurar su planeación, así como en su comprensión sobre los significados asociados a las fracciones.

II.2.1.3. Los escenarios y el nivel de participación.

Cuando hablamos de escenarios nos referimos a los lugares en que tendrá lugar la investigación, ello es relevante en tanto el tipo de escenario genera interacciones y relaciones de poder diferentes; adicional a ello, las actitudes de los protagonistas pueden diferir de un lugar a otro, por ejemplo, el comportamiento de los estudiantes no es el mismo cuando interactúan con sus compañeros en el salón de clase, desde una lógica de alumnos, que cuando van a la escuela primaria y tienen que asumir su papel como profesores.

En tal sentido, desde el párrafo anterior ya deslizamos la idea de que los escenarios en que se desarrollará la investigación son tres:

a) El salón de clases de la escuela normal: aquí será el escenario desde el cual se analizarán las interacciones de los estudiantes con el saber matemático, mediados por los procesos de transposición bajo la coordinación de un maestro formador de profesores. Como ya dijimos, el análisis se focalizó en 9 sesiones de clase durante el desarrollo del bloque temático correspondiente a los números racionales, con la acotación al tema de las fracciones.

El maestro participante en la investigación tiene 26 años de servicio al momento en que la iniciamos, por lo cual podemos inferir que cuenta con amplia experiencia en el campo laboral; además de su experiencia como maestro normalista, también se ha desempeñado en un Centro de docencia superior universitario y sus inicios como profesor fueron en una escuela primaria.

Desde el conocimiento personal, tanto como desde la revisión misma de su currículo nos damos cuenta de su amplia formación profesional, tanto a nivel de Maestría como de Doctorado, en psicología, ciencias de la educación y educación matemática; esto

último, sus estudios en Educación matemática, tanto como sus habilidades docentes reconocidas por sus colegas, son los que permiten que su participación sea relevante para nuestra investigación.

El grupo con el cual se realizó la investigación está integrado por 34 alumnos que cursan la Licenciatura en Educación primaria; no tienen más experiencia en la docencia que la que se deriva de la aplicación de actividades (fichas de matemáticas) en una jornada de práctica docente de una semana en el semestre anterior al actual, es decir, en el curso de Matemáticas y su enseñanza I se solicita que apliquen una ficha didáctica propuesta por los mismos materiales curriculares de la educación primaria, como parte de su primer experiencia formal con la enseñanza de las matemáticas.

Dado el tipo de investigación que nos hemos planteado realizar, hacerles seguimiento a los 34 alumnos nos resultaría muy complejo en las condiciones temporales en que realizamos la investigación, por tal motivo decidimos focalizar nuestra atención en 7 estudiantes; para seleccionarlos y dado el escaso conocimiento que teníamos de ellos, solicitamos la sugerencia del maestro titular del curso, pero con la condición de que los estudiantes fueran a realizar su práctica docente en diferentes grados escolares, cubriendo a la vez todos los grados de la educación primaria, con lo cual obtendríamos una visión global del tratamiento del tema (fracciones) en este nivel (al final 2 estudiantes practicaron en 6º grado). Esta decisión fue relevante dado que en nuestro país, el tema de las fracciones se plantea de manera curricular a partir de 3º grado de educación primaria, entonces al explorar el tratamiento de algún aspecto de las fracciones en los dos grados iniciales, les daría a los estudiantes algunos elementos para valorar la pertinencia del planteamiento curricular así como las posibilidades de adecuaciones al mismo; por otro lado a nosotros nos permitió detectar las representaciones de los estudiantes respecto al tema y su tratamiento de manera general en la educación primaria.

En cuanto al conocimiento matemático, éste corresponde al que aprendieron como alumnos durante los 12 ciclos escolares previos a su ingreso a la Escuela Normal, con la profundidad común al estudiante promedio; sin embargo al momento de la investigación (semestre agosto – enero de 2011 – 2012) ya habían llevado un curso de Matemáticas y su enseñanza (SEP, 2004 b), bajo la coordinación del mismo maestro que coordina el actual, con lo cual se tenían ciertos conocimientos didácticos trabajados desde el mismo curso.

Cabe hacer la aclaración de que, aunque ambos cursos se plantearon de manera consecutiva, el tratamiento temático es diferente, de tal manera que, para el caso del tema de las fracciones, éste no se trabaja de manera formal hasta que los estudiantes cursan el bloque II de Matemáticas y su enseñanza II, sus conocimientos matemáticos al respecto provienen de su escolarización previa y son éstos precisamente los que se pondrán en juego e interactuarán con la propuesta curricular oficial y/o sus correspondientes adecuaciones en atención al proceso de transposición didáctica que defina el maestro formador de profesores.

Ahora bien, de manera curricular se plantea un total de 34 horas para el tratamiento del bloque II Los números racionales, distribuidas en 17 sesiones de clase de 2 horas; sin embargo dos factores contribuyeron para que sólo consideráramos 9 sesiones de clase: 1º La delimitación a las sesiones de clase donde se trabajaran exclusivamente los temas de fracciones y sus diversos significados, y 2º La decisión del maestro titular para acotarlo en esa cantidad de sesiones, derivada de los ajustes temporales que la misma dinámica institucional plantearon, es decir, se suspendía alguna sesión de clase y ello reducía el tiempo para el tratamiento de este bloque en aras de no limitar tanto el tratamiento de los temas de los dos bloques restantes del programa.

Consideramos que estas 9 sesiones de clase son representativas del trabajo del profesor y nos dan elementos suficientes para caracterizar tanto el proceso de transposición didáctica como las representaciones sociales que se ponen en juego en las interacciones e intercambios comunicativos; adicional a ello, la delimitación misma de la investigación no nos deja posibilidades para continuar la recuperación de información en este escenario, dado que el curso de Matemáticas y su enseñanza II es el último que de manera curricular se plantea para el trabajo con la asignatura.

b) Las escuelas primarias de la región: Son el escenario desde el cual se recupera la información de la actividad de práctica docente de los 7 estudiantes seleccionados en atención a su disposición para apoyarnos; cada uno de ellos practicó con un grado escolar, diferente, de la educación primaria (de 1º a 6º), con excepción de dos de ellos que lo hicieron en el mismo (6º).

De manera articulada entre los cursos de Observación y práctica docente I y Matemáticas y su enseñanza II se plantean durante el semestre dos jornadas de práctica en la escuela primaria, con la intención de que los estudiantes pongan en juego las

competencias didácticas que van desarrollando y de manera complementaria resignifiquen sus saberes al tener la oportunidad de discutirlos durante el desarrollo del curso de matemáticas.

Para el caso de nuestra investigación, consideramos la jornada de práctica correspondiente a la semana del 28 de noviembre al 2 de diciembre de 2011, tal y como institucionalmente se organizó, es decir, no se gestionó ningún tiempo adicional, procurando que los acontecimientos se desarrollaran de la manera más cotidiana posible.

De común acuerdo con el maestro formador de profesores (sujeto de esta investigación) los estudiantes solicitaron a los maestros titulares de la escuela primaria, previamente a su práctica, que les permitieran practicar con una situación didáctica que diseñarían desde la Escuela Normal (aspecto que describimos más ampliamente en el capítulo III) y la cual estaba pensada para explorar tanto el diseño, como la implementación y el análisis de una situación didáctica con el tema de fracciones.

c) El cubículo del investigador: como el lugar donde se aplicaron las entrevistas a los alumnos participantes en la investigación. En este caso, al ser un lugar privado, permitió el mínimo de interferencias durante el desarrollo de las mismas, así como la generación de un ambiente de confianza para que se expresaran libremente según los cuestionamientos que les fueron formulados.

II.3. Técnicas e instrumentos para la recuperación de datos.

En congruencia con nuestro objeto de estudio y dado que el objetivo principal es comprender los procesos de transposición y destransposición desde el escenario de lo cotidiano, desde la perspectiva de los actores, que para nuestro caso se refiere a un profesor y siete estudiantes, lo que nos interesa es seleccionar instrumentos de investigación que nos ayuden a cumplir tal propósito, en tal sentido, la elección está puesta en instrumentos que recuperen la mayor cantidad de información en su contexto; ante ello, planteamos la necesidad de videograbar las clases del profesor, considerando la secuencia de situaciones didácticas necesarias para el tratamiento del tema de fracciones; de igual manera, la recuperación de las experiencias de clase de los estudiantes es muy relevante para caracterizar sus procesos de transposición y destransposición, así como las

representaciones que le son asociadas, y finalmente el análisis de algunos documentos básicos nos permitirá triangular la información con el mismo propósito.

En los subapartados que siguen haremos una breve caracterización de estos instrumentos mencionados.

II.3.1. La importancia de la videograbación.

En la tarea de recuperación de los procesos de transposición y destransposición del saber, tanto en el escenario de la formación de profesores en la escuela Normal, como en la aplicación de las situaciones didácticas de los estudiantes en la escuela primaria, se hace necesario un proceso sistemático que nos permita tener una visión lo más completa posible de lo que acontece en los salones de clase; en tal sentido, la videograbación de las clases cumple una función relevante dado que nos brinda una visión completa de los acontecimientos e interacciones que se dan en los salones de clase, además no perdamos de vista que, si las representaciones sociales se generan en los procesos comunicativos y en las interacciones sociales, el video nos permite revisar cuántas veces se considere necesario, en la lógica del proceso de análisis, el tipo de interacciones que se dan entre los protagonistas de cada sesión de clase: maestro – alumnos, mediados por un saber matemático que es sobre el cual se construyen los procesos de transposición y destransposición.

La importancia de la videograbación se potencia, en tanto que

Las aulas son ambientes complejos y la instrucción es un proceso complejo. Los observadores están necesariamente limitados en lo que pueden observar, y esto reduce los tipos de evaluaciones que pueden desarrollar. El video provee una forma de resolver el problema: los observadores de video pueden codificar el video de múltiples maneras, considerando diferentes dimensiones del proceso áulico en cada ocasión. Así, por ejemplo, se puede codificar la organización de la lección en una primera instancia; después el uso de materiales instruccionales; en la tercera el patrón de discurso que caracteriza a las aulas de diversos sitios. Hacer esto es imposible para un observador en vivo.

No únicamente pueden codificar diferentes aspectos pero también lo pueden hacer en cámara lenta. Con el video, por ejemplo, es posible ver la misma muestra de comportamiento múltiples veces, permitiendo a los codificadores describir las conductas en detalle, lo que permite análisis mucho más sofisticados (Stigler, Gonzales, Kawanaka, Knoll, & Serrano, 1999).

En coincidencia con las ventajas que Stigler, Gonzales, Kawanaka, Knoll, & Serrano (1999) le atribuyen al uso de la videograbación de clases, sobre otros instrumentos como puede ser el registro escrito levantado en el salón de clases o el diario de campo, consideramos que éste es el instrumento que mayor información nos provee, dado que, efectivamente, las posibilidades de conservar las sesiones en video nos brindan una inmejorable oportunidad de volver a ellas cuantas veces queramos y aplicarle distintas miradas analíticas, sin perder de vista nuestro objeto de estudio.

Una ventaja adicional del uso de la videograbación de clase, en la formación docente inicial, viene dada por el hecho de que, a diferencia de cuando se filman clases en la escuela primaria, los estudiantes no pierden necesariamente la concentración en el tema, con lo cual los procesos de clase se conservan tal cual se dieron; no estamos diciendo con esto que no haya una distracción, pero se procura que ésta sea mínima.

Estamos conscientes que desde el momento mismo en que está presente la cámara de video, las interacciones no son igual de “naturales” que en circunstancias cotidianas, sin embargo, dada la cantidad de información que nos puede brindar sostenemos esta estrategia de recuperación de la información como la más factible para nuestra investigación.

Con la finalidad de minimizar las interferencias en la marcha normal de la clase y con el apoyo del profesor titular de la asignatura, se solicitó el apoyo de los mismos estudiantes para llevar a cabo las grabaciones de las clases; varias razones justificaron esta decisión:

- Por lo regular es mejor entrar de la manera menos disruptiva posible. El ingreso debe resultar lo más natural posible.
- Al ser los mismos estudiantes quienes filmaron, alumnos del grupo objeto de estudio, sus compañeros se sentían en confianza para manifestar sus comentarios, opiniones o argumentos hacia la clase y en la discusión de los temas, bajo las mismas circunstancias que si no estuviera la cámara de video.
- La misma participación, rotativa, de estudiantes en la filmación de sesiones de clase, les sirvió como entrenamiento para cumplir esa misma tarea al filmar sus propias clases y/u orientar a quienes los apoyaran.

Cabe mencionar que el “entrenamiento” al respecto ya lo habían recibido del maestro titular de la asignatura, en tanto es también de su interés que los estudiantes aprendan cómo filmar clases que les permitan recuperar información valiosa sobre los procesos didácticos, por ejemplo, decisiones del tipo:

- Cuándo abrir la toma, para captar el ambiente total de la clase.
- Enfocar a quien participa en determinado momento, para no perder detalle de la información: sea el profesor o los estudiantes.
- Si el trabajo es en equipo, filmar procesos completos en cada uno es más relevante que filmar el inicio en uno, en otro la discusión de formas de resolución del problema, en otro la validación, etc.
- Cuando se trabaja en el pizarrón es necesario filmarlo para recuperar los procedimientos ahí plasmados.
- De igual manera sucede con las producciones de los cuadernos, es importante filmarlas para detectar cómo se dan los procesos de resolución individual de problemas; adicional a ello, esta consideración nos permite recuperar información que luego no se comenta de manera colectiva, pero que es relevante para el proceso de análisis de los acontecimientos de la clase.

Bajo estas consideraciones las 9 sesiones de clase del formador de profesores y con fines de tratamiento de la información, se transcribieron íntegramente y se capturaron en un registro escrito.

En el caso de las sesiones de práctica docente de los estudiantes, en la escuela primaria, no se recuperó el video de las clases, sólo se recuperaron algunas de las partes que fueron transcritas e incorporadas en sus ensayos de análisis de la práctica; esto obedeció a que el centro de la atención estuvo puesto en las interacciones dentro del salón de clase de la Escuela Normal, en este caso derivadas del análisis de lo acontecido en la práctica docente de la Escuela Primaria.

II.3.2. La entrevista y su uso en la investigación.

Las entrevistas presentan las siguientes características que las hacen relevantes para nuestra investigación...

- a) Que las personas entrevistadas expresan sus propias perspectivas personales;
- b) El entrevistador nunca predetermina frases o categorías que puedan ser utilizadas en las respuestas;
- c) El objetivo básico es comprender la posición de los participantes, conocer su terminología y captar la complejidad de sus percepciones y experiencias individuales (Colás & Buendía, 1994, pág. 261).

A diferencia de las entrevistas en la investigación cuantitativa, las entrevistas en la investigación cualitativa son más íntimas, flexibles y abiertas. *“Esta se define como una reunión para conversar o intercambiar información entre una persona (el entrevistador) y otra (el entrevistado) u otras (entrevistados)”* (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010, pág. 418); en la entrevista, a través de las preguntas y respuestas, se logran desvelar los significados e interpretaciones del entrevistado en torno a un tema determinado y, en el caso de la entrevista colectiva, la construcción de significados se logra de manera conjunta.

Siguiendo a Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio (2010, pág. 418),

“las entrevistas se dividen en estructuradas, semiestructuradas o abiertas. En las primeras o entrevistas estructuradas, el entrevistador realiza su labor con base en una guía de preguntas específicas y se sujeta exclusivamente a ésta (el instrumento prescribe qué cuestiones se preguntarán y en qué orden). Las entrevistas semiestructuradas, por su parte, se basan en una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información sobre los temas deseados (es decir no todas las preguntas están predeterminadas). Las entrevistas abiertas se fundamentan en una guía general de contenido y el entrevistador posee toda la flexibilidad para manejarla (él o ella es quien maneja el ritmo, la estructura y el contenido)”.

Estos tres tipos de entrevistas pueden usarse en una misma investigación ya que podemos atribuirles finalidades distintas, sin embargo, en esta investigación, nos decidimos por la entrevista semiestructurada, en el entendido de que, partiendo de una serie de preguntas base, pudiéramos plantear las preguntas complementarias que fueran necesarias para ahondar en el significado de los procesos que incorporamos en ellas, además de que ellos nos permitió adecuar las preguntas y el orden de su formulación, a los participantes y al desarrollo de la misma entrevista, con la finalidad de obtener la perspectiva, las experiencias y las opiniones detalladas de los participantes en su propio lenguaje.

Con estas consideraciones, se aplicaron entrevistas semiestructuradas a los estudiantes, en tres momentos básicos del proceso de investigación: antes de su jornada de práctica docente (con el diseño de sus situación didáctica de por medio), después de la aplicación de su situación didáctica (posterior a su práctica) y una entrevista colectiva (aunque ésta se acercó bastante a una entrevista abierta, dado que partimos de la revisión de los 25 problemas matemáticos previamente resueltos por los estudiantes; Cfr. Anexo 4 “Cuestionario de problemas con fracciones”) a un año de distancia de haber llevado el curso de Matemáticas y su enseñanza.

II.3.2.1. La entrevista antes de la práctica docente.

Ésta es una entrevista semiestructurada, con lo cual le conferimos un amplio margen de flexibilidad, consensuamos las preguntas entre pares, para revisar su claridad y su pertinencia para recuperar información relevante al objeto de estudio.

El guión final de la entrevista es el siguiente, sin embargo, como se podrá apreciar en los anexos (transcripciones de las entrevistas: 5.1 a 5.7), el orden de formulación de las preguntas se adecuó a cada uno de los sujetos entrevistados, en atención a la misma información que nos proporcionaron.

ENTREVISTA PREVIA A SU PRÁCTICA

Alumno:

Grado escolar de práctica:

Cantidad de alumnos de su grupo:

Contenido que vas a abordar:

¿Cómo decidiste el contenido que vas a trabajar? ¿Qué tipo de contenidos te han dado para planear? ¿Son contenidos de repaso o es la secuencia habitual del programa del maestro titular?

¿Te ha generado alguna dificultad el saber matemático presente en tu planeación? ¿Cómo la has superado?

Describe de manera global cuál es la estrategia que vas a utilizar para trabajar el contenido.

¿Por qué el orden de lo planeado y su organización? ¿Hay alguna estructura o lógica que te haya llevado a esa organización? (Contemplas, por ejemplo, como organizadores la dificultad del contenido, su estructura conceptual, el tipo de actividades, los principales objetivos que pretendes conseguir).

¿Qué aspectos has considerado en esa planeación? Desde el análisis a priori y el análisis epistemológico.

¿A lo largo del desarrollo de la planeación vas pensando con más detalle en lo que vas a hacer o consideras que ya lo tienes previsto todo?

¿Qué dificultades crees que surgirán en lo previsto? ¿Qué grado de dificultad esperas que tenga cada actividad prevista? ¿Cómo esperas que reaccionen los alumnos? ¿Tienes alguna previsión al respecto de alumnos concretos?

¿Consideras posibles modificaciones a lo planeado? ¿Cuáles posibilidades anticipas de antemano?

En general, ¿cuáles son tus expectativas respecto al logro por parte del grupo de alumnos de los

propósitos previstos?

Considerando todo el proceso de planeación de esta situación didáctica, ¿cuáles son las mayores dificultades que encontraste? ¿A qué se las puedes atribuir?

¿En qué medida las actividades desarrolladas, hasta el momento, en el bloque de fracciones te han apoyado en este proceso de planeación?

¿Deseas hacer algún comentario adicional?

Para fines de interpretación de los resultados y de identificación de los informantes, utilizamos los siguientes códigos: EPrP1; EPrV2; EPrE3; EPrI4; EPrM5; EPrA6; EPrR6; en los cuales EPr significa “entrevista previa”, la siguiente letra nos permite identificar el nombre del estudiante y el número significa el grado de práctica durante el semestre que recuperamos la información (véase anexo 1).

¿Qué es lo que justifica la aplicación de esta entrevista? ¿cuál es su ubicación durante el proceso de transposición didáctica? ¿con qué finalidad la aplicamos y qué tipo de información queríamos recuperar? En primer lugar hemos de decir que, en la búsqueda de que los estudiantes realicen ejercicios metacognitivos y tomen conciencia de las implicaciones que tiene su desempeño en la escuela primaria, así como el grado de avance en sus competencias didáctica, con la entrevista previa a la práctica lo que pretendíamos era que los estudiantes clarificaran la representación que tenían respecto a lo que iban a hacer durante su práctica, pero al mismo tiempo que, mediante su verbalización, lográramos recuperar las representaciones sobre las matemáticas y su enseñanza que subyacen a sus decisiones o futuras decisiones.

La entrevista, como su nombre lo indica, se aplicó días previos a la jornada de práctica (jueves y viernes de la semana anterior a la práctica), teniendo de por medio el diseño de su situación didáctica, lo cual permitió ajustarla en congruencia con el contenido de su planeación (véanse anexos 5.1 a 5.7), pero sobre nos permitió apreciar el grado de claridad que los estudiantes tenían de su diseño de situación didáctica (la cual como veremos más adelante en este capítulo, pero sobre todo en el capítulo III, retomó un diseño de un experto (Block, 1987), así como la toma de conciencia de las representaciones previas sobre su práctica y el proceso de enseñanza en general.

II.3.2.2. La entrevista posterior a su práctica docente.

De nueva cuenta con su situación didáctica a la mano y con la experiencia de su aplicación, se convocó a los estudiantes a una entrevista posterior a su práctica, en la primera semana inmediata al regreso de la Escuela primaria, con la finalidad de que sus recuerdos sobre la práctica estuvieran lo más claro posibles; el guión final es el siguiente:

GUIÓN DE LA ENTREVISTA POSTERIOR A SU PRÁCTICA

¿Cómo consideras tu grado de satisfacción respecto a la puesta en práctica de la planeación? ¿Se han cumplido tus expectativas respecto de los objetivos que te planteabas?
Menciona, si las hubo, algunas cuestiones inesperadas en la aplicación de tu situación didáctica.
¿Hubo actividades que no funcionaron como esperabas? ¿Cuáles y por qué?
¿Qué dificultades manifestaron los alumnos en los diferentes momentos de trabajo con esta clase?
¿Has modificado algún aspecto del diseño original de tu situación didáctica? ____ ¿Qué has modificado y por qué?
Si volvieras a trabajar el mismo contenido ¿Hay algo que modificarías en una puesta en práctica posterior? Enúncialo y escribe por qué
¿Se lograron los propósitos que planteaste en tu planeación? ¿Cómo te diste cuenta?
¿Cuáles son tus retos, respecto al tema de las fracciones, después de haber puesto en práctica esta planeación?
¿Qué dificultades reconoces en cuanto al conocimiento matemático de las fracciones?
En cuanto al diseño de Situaciones Didácticas, enuncia: logros, dificultades y retos.
¿Cómo considera su nivel de preparación para trabajar el tema de fracciones en la escuela primaria?
Finalmente ¿Qué aprendizajes lograste consolidar?

En este caso, para identificar a los informantes, sólo variamos el inicio del código, dado que ahora es la entrevista posterior, los códigos quedaron de la siguiente manera: EPpP1; EPpV2; EPpE3; EPpI4; EPpM5; EPpA6; EPpR6. (Véase anexos 5.8 a 5.14)

La intencionalidad explícita de esta entrevista era valorar el cambio en las apreciaciones de los estudiantes, desde las representaciones que se evidenciaron en la entrevista previa y los eventuales cambios ocasionados por los conflictos propios de la aplicación de su situación didáctica; al respecto el mejor ejemplo es el caso de I4 quien se manifestaba muy optimista antes de la práctica, pero al mismo tiempo, en su entrevista previa evidenció dificultades con el contenido matemático que iba a trabajar en su situación didáctica e incluso en la comprensión del diseño mismo, lo cual impactó fuertemente en su desempeño y en su entrevista posterior manifestó cierta decepción (profundizamos en esto en el capítulo IV) y a la vez cambios parciales en su representación sobre la enseñanza de las matemáticas.

Respecto a ambas entrevistas, es importante decir que, en el lapso de trabajo de las 9 sesiones de clase que hicimos objeto de análisis se incluyó el proceso mismo de diseño, práctica y análisis de la situación didáctica, ante ello, las entrevistas fueron aplicadas al tenor del mismo proceso de recuperación de la información y del trabajo didáctico del profesor en el bloque de números racionales; esto es relevante porque (lo decimos en los capítulos III y IV) con ello se asume un proceso recursivo en la formación de profesores, superando con ello la representación social que configura el esquema aprendo – aplico, para insertarse gradualmente en un esquema aprendo – aplico – resignifico y vuelvo a aprender pero ahora con mayores referentes.

II.3.2.3. La entrevista colectiva a un año de distancia.

En atención a la naturaleza del objeto de estudio de esta investigación y con el propósito de revisar en qué medida se conservaron los aprendizajes del curso, en la doble dimensión: didácticos y disciplinarios, se convocó a los 7 estudiantes objeto de investigación, a una entrevista colectiva, de carácter abierto, tomando como centro de análisis el “Cuestionario de problemas con fracciones” que previamente a ésta les solicitamos que contestaran.

Cabe hacer la aclaración que al momento del diseño de la investigación estos dos momentos (la aplicación del cuestionario de problemas con fracciones y la entrevista colectiva) no estaban considerados, sin embargo, haciendo alusión a las posibilidades que nos brinda el enfoque cualitativo y en atención a la “saturación teórica” (Strauss & Corbin, 2002) vimos la pertinencia y necesidad de su aplicación.

La pertinencia y necesidad de su aplicación surge desde el momento mismo que en uno de los objetivos de la investigación nos planteamos la pregunta relativa a la pervivencia o cambio en las representaciones sociales a lo largo del tiempo, así como los posibles factores que pueden incidir en cada caso; de igual manera, tenemos presente la pervivencia de los aprendizajes de los estudiantes o su transformación, es decir, cuáles de los aprendizajes consolidados durante el curso siguen considerándose como relevantes y han logrado anclarse en los esquemas de pensamiento de los estudiantes como una estructura de saber para su desempeño profesional.

Esta entrevista colectiva, por su caracterización se acerca a lo que Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio (2010) denominan “grupos de enfoque”, dado que, más allá de hacer la misma pregunta a varios participantes, planteamos como objetivo generar y analizar la interacción entre ellos y a la vez contrastar explícitamente las diferencias y/o semejanzas en los cambios operados a la distancia.

“En los grupos de enfoque existe un interés por parte del investigador por cómo los individuos forman un esquema o perspectiva de un problema, a través de la interacción” (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010, pág. 425)

Con todo y su carácter abierto, en esta entrevista colectiva focalizamos 5 puntos principales de análisis (para definirlos también consideramos la lectura de los otros instrumentos de recuperación de la información: planes de clase de los estudiantes, ensayos de análisis de la práctica y videgrabaciones de las 9 clases):

- * Claridad y fortaleza de sus conocimientos matemáticos y didácticos (diferentes significados de las fracciones, por ejemplo) reflejados en la resolución del cuestionario de problemas con fracciones.

- * Reconocimiento de la incidencia del curso en sus aprendizajes matemáticos y didácticos.

- * El esquema de diseño de su planeación por situación didáctica y los porqués de las modificaciones operadas a lo largo del tiempo.

- * La pervivencia y utilización de los conceptos –herramientas de lenguaje didáctico derivados de la Teoría de las situaciones didácticas- analizados durante el curso, en la elaboración de sus ensayos de análisis sobre la práctica docente en matemáticas.

- * Sus recuerdos formativos previos en matemáticas y su incidencia en el proceso de formación inicial docente para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria.

La transcripción completa de esta entrevista la incluimos como anexo 19 y en el capítulo IV sólo recuperamos las unidades de información que requerimos en función del esquema analítico seguido en esta investigación.

II.3.3. Revisión de documentos.

Como parte de los instrumentos de recuperación de la información, también incluimos los documentos elaborados por los participantes en ésta; entendemos por “documentos”, todos aquellos escritos elaborados sin fines explícitos de investigación, pero que son recuperados por el investigador en tanto manifiestan un posicionamiento en torno al objeto de estudio.

En el texto de Goetz & LeCompte (1988) se utiliza la denominación “artefactos” para referirse a *“la recogida de material demográfico y de archivo, así como el análisis de vestigios y restos materiales”* (pág. 125) e incluyen como ejemplo de material demográfico y de archivo la recogida y análisis de libros de texto, guías curriculares, apuntes de clase, listas de matrícula, actas de las reuniones, expedientes personales de los alumnos, documentos personales de profesores y alumnos, entre otros; desde estas apreciaciones parece más factible utilizar como subtítulo de este tipo de instrumentos de recogida de la información la denominación de artefactos; sin embargo, de la revisión bibliográfica que hicimos, podemos plantear la siguiente acotación, en la lógica de nuestra investigación y teniendo como referente principal la teoría de las representaciones sociales, desde la cual los intercambios comunicativos son básicos, preferimos la denominación “revisión de documentos” o simplemente “documentos” para referirnos a las producciones escritas en el transcurso de la investigación, no necesariamente con el fin explícito de instrumento de investigación, pero que podemos utilizarlos para recuperar información valiosa en torno a nuestro objeto de estudio.

Desde finales de los 70's Moscovici (1979) ya incorporaba como técnica de investigación de las representaciones sociales *“el examen científico de poblaciones de individuos y al análisis de contenido referente a la ‘población’ de documentos. Estas técnicas son muy simples y muy flexibles, y permiten proporcionar resultados válidos acerca de los puntos particulares que nos interesan”* (Moscovici, 1979, pág. 20).

Más recientemente, Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio (2010) establecen la distinción entre “documentos escritos personales” y “artefactos”, categorizando los primeros en tres tipos:

1º documentos o registros preparados por razones oficiales, como certificados de nacimiento o de matrimonio, entre otros.

2º documentos preparados por razones personales, a veces íntimas, por ejemplo: cartas, diarios, manuscritos y notas.

3º documentos preparados por razones profesionales (reportes, libros, artículos periodísticos, correos electrónicos, etc.), cuya difusión es generalmente pública. (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010, pág. 433)

Y reservan la categoría de artefactos individuales para los artículos creados o utilizados con ciertos fines por una persona: vasijas, ropa, herramientas, mobiliario, juguetes, armas, computadoras, etc.

En esta distinción se refleja la definición básica de la palabra, es decir, de acuerdo a la definición de la Real Academia de la lengua, artefacto designa cualquier obra mecánica hecha con arte, es decir “arte factum” hecho con arte, en cambio en el mismo Diccionario de la Real Academia de la lengua se define documento como un “*Escrito en que constan datos fidedignos o susceptibles de ser empleados como tales para probar algo*” (Consultado en línea <http://www.rae.es/rae.html>); desde esta diferenciación básica es que usamos nosotros el término en nuestra investigación.

El anclaje teórico, además de las fuentes que ya hemos mencionado en párrafos anteriores, lo encontramos también en Martínez Carazo (2006, pág. 167) quien se refiere al uso de documentos como fuente de obtención de datos; desde Stake (1999) encontramos la referencia a la revisión de documentos dado que éstos “*sirven como sustitutos de registros de actividades que el investigador no puede observar directamente*” (Stake, 1999, pág. 66); en el texto de Valles (2000) se refiere a materiales documentales como fuente de información; y de igual manera tanto Rojas Soriano (2002), como Albert Gómez (2007) mencionan el término documentos para referirse a los textos escritos por los sujetos y que el investigador puede utilizar como fuentes de datos; incluso Strauss & Corbin (2002) también se refieren a los documentos como fuente de datos.

Finalmente, a decir de Albert Gómez (2007, pág. 252) “*la historia de los documentos personales tiene sus raíces en la escuela de Chicago, que fue quien legitimizó institucional e intelectualmente esta técnica. Tiene su base en la tradición sociológica imperante y se basó en un sentimiento de marginalidad, y tal vez esto fue lo que provocó el*

surgimiento del documento y la historia personal”; algo que es importante mencionar es que todos estos documentos proceden del propio sujeto y se refieren a todo escrito que nos proporciona, intencionalmente o no, información relativa a la estructura y dinámica de la vida del autor. Para el caso de nuestra investigación la dinámica que nos interesa revisar está inserta en las relaciones interpersonales que se suceden en los intercambios comunicativos y la interacción social en el aula – clase de un grupo específico de la Escuela Normal, tal y como fue caracterizado en párrafos anteriores.

En un proceso didáctico, los “documentos” escritos nos proveen de información valiosa sobre las representaciones de los sujetos de la investigación y se convierten en testimonio de su configuración y sus eventuales cambios, de ahí la importancia de su recuperación para poder explicitarlas.

II.3.3.1. Proyecto de asignatura del formador de profesores.

En la revisión de este documentos hicimos un recorte con fines metodológicos, dado que el proyecto de asignatura contempla la planeación de todo el curso de Matemáticas y su enseñanza II, sólo le solicitamos al profesor el apartado correspondiente al bloque II “Los números racionales”; la parte indicada la incluimos como “Anexo 6 Proyecto de asignatura: bloque II. Los números racionales”.

¿Cuál es la importancia que le dimos a la revisión de este documento? En primer lugar es innegable que en él se reflejan las representaciones sociales que sobre las matemáticas y su enseñanza manifiesta el formador de profesores, pero también se refleja otro aspecto que es fundamental para esta tesis, la reorganización curricular, es decir, las diferencias entre el planteamiento oficial (en términos de orden en el tratamiento de los temas) y la propuesta específica que él hace.

Esta reorganización curricular manifiesta lo que Chevallard (1991) llama “transposición didáctica” en el nivel del saber enseñado, es decir, los ajustes que el profesor propone al “saber por enseñar” para contextualizarlo y hacerlo viable en el proceso de formación docente inicial.

Cuando se hace la transposición para llegar al aula, el docente (quien tiene los programas oficiales), va a tener que volver a contextualizar el saber, porque todo está des-contextualizado, des-historizado, despersonalizado, des-temporalizado. Y para que ocurra un aprendizaje significativo, tiene que colocar un contexto en el contenido que está enseñando. Pero, por lo general, ese contexto reconstruido tras

la re-contextualización, no coincide con el saber de origen, y en la mayoría de los casos no llega a cumplir todas las funciones para las cuales fue transpuesto. Entonces, antes de llegar al aula el saber, primero se da una transposición por el matemático (quien des-contextualiza su saber), y, después de eso, el docente tiene que hacer el proceso inverso, tiene que re-contextualizarlo (De Faria Campos, 2006, pág. 4).

Evidentemente a partir de esta consideración cobra mayor sentido la recuperación de este documento, dado que esta recontextualización del saber está mediada por las representaciones y creencias respecto a qué es lo importante y lo básico que debe aprender un docente en formación, pero también importa el modo como lo aprende, dado que la forma en cómo se aprende también configura una representación sobre la enseñanza de las matemáticas, la cual puede coincidir con las representaciones de los estudiantes, o bien, en caso contrario, contribuir a generar opciones para su eventual destransposición. Esto es precisamente nuestro objeto de estudio.

II.3.3.2. Diseño de las situaciones didácticas de los estudiantes.

Recuperamos tanto los planes de clase que fueron objeto de experimentación durante el curso (Anexo 7), como los planes de clase consecutivos a éstos que aún conservaban los estudiantes, lo cual nos permitió analizar la progresión en la configuración de la representación asociada a un esquema de diseño de una situación didáctica.

La recuperación de sus situaciones didácticas nos permitió delimitar el proceso de objetivación de la representación construida durante el curso. Un primer nivel de objetivación de ésta se dio en el mismo curso, cuando reorganizaron un diseño de experto (Block, 1987), bajo la guía del formador de profesores; el segundo nivel de objetivación ocurre cuando, al transcurrir del tiempo y ante la presencia de nuevos aprendizajes, los estudiantes transforman el diseño y por ende la representación construida para ir configurando una representación social producto de la recombinação de diferentes lenguajes, asociados a la tarea de diseñar planes de clase.

II.3.3.3. Diario de campo de los estudiantes.

Por otra parte, el diario de los estudiantes será uno de los instrumentos transversal a la investigación, ya que concebimos que éste permite recuperar las representaciones sociales de los estudiantes, “hacerlas explícitas” (Cfr. Porlán, 1991), desde el momento mismo en que su redacción implica una reflexión personal (Cfr. Kemmis & McTaggart, 1992; Latorre, Del Rincón, & Arnal, 1997), un ejercicio de introspección en el que se *“combinan los sentimientos, emociones y pensamientos con las propias creencias y expectativas, con los conocimientos previos, con las vivencias personales y los esquemas perceptivos”* (Colás & Buendía, 1994, pág. 267).

El formato para su elaboración se decidió con los participantes en la investigación, sobre todo porque más que el formato nos interesaba sensibilizar en la implicación y el compromiso para su elaboración, dado que puede cumplir también un objetivo planteado de manera curricular en el Plan de Estudios 1997, en nuestra Escuela, al considerarse un instrumento básico que los estudiantes deben dominar.

En este sentido, sólo se les pidió que hicieran un diario de campo al terminar de aplicar sus situación didáctica diseñada ex profeso, con la intención de que anotaran sus primeras impresiones, dando respuesta a las siguientes preguntas: *¿lograste lo planeado? ¿Cuáles fueron las principales dificultades que se te presentaron? ¿Tuviste dificultades relacionadas con el dominio del saber matemático? ¿Cómo las resolviste? ¿En qué pensabas al momento de tomar las diferentes decisiones al momento de trabajar tu clase (por ejemplo de cambio de actividades o relacionadas con la gestión didáctica)? ¿Consideras que los niños aprendieron el contenido central de tu situación didáctica?*

Sabemos que un diario de campo, dada la naturaleza de su escritura (más personal y privada), no debe ser directivo, sin embargo para fines de esta investigación decidimos orientar un poco la reflexión con la intención de superar el clásico temor a la “hoja en blanco” y al no saber qué escribir; además no olvidemos que durante toda la investigación planteamos la idea de que la reflexión debe ser metacognitiva, pero cuando no estamos habituados una de las estrategias que la facilita es la formulación de preguntas, en este caso la intención fue que, a manera de andamiaje para la reflexión, éstas la orientaran.

II.3.3.4. Ensayos de análisis sobre su práctica docente.

Como parte de las actividades posteriores a la práctica docente de los estudiantes, en la Escuela Normal se plantea un proceso de recuperación de evidencias (grabación de clases y recuperación de producciones de los niños), a partir de las cuales se hace la reflexión sobre lo acontecido durante ésta. El producto de análisis que habitualmente se les solicita es un escrito tipo ensayo, que articula las reflexiones sobre el diseño de la situación didáctica, las producciones de los alumnos de primaria, con las cuales se valora el logro de los aprendizajes, las reflexiones de los propios estudiantes, y todo ello, con una fundamentación teórica que le dé sustento.

Con este antecedente, consideramos que un documento base para rastrear el proceso de objetivación de las representaciones de los estudiantes es precisamente su ensayo de análisis de la práctica docente. Principalmente recuperamos los ensayos elaborados durante el curso de Matemáticas, como producto de su experimentación didáctica (7 ensayos, uno por cada estudiante); sin embargo también nos fue posible recuperar los siguientes ensayos a éstos, aunque su análisis fue más superficial, dado que en lo general no se hicieron a partir del análisis de clases de matemáticas, es decir, nos sirvieron para contrastar la pervivencia del lenguaje construido como herramienta para el análisis de su práctica docente y para darnos cuenta de cómo se configura este proceso, a partir de los casos objeto de estudio.

II.4. Procedimiento para el análisis de los datos.

Consideramos que el proceso de análisis, como cualquier proceso de pensamiento, debe ser flexible y dirigido por la comprensión que vamos obteniendo a partir de la interacción con los datos, más que estar demasiado estructurado y basado sólo en procedimientos, sin embargo no podemos dejar de reconocer, como opción metodológica, que existen propuestas de procedimientos que nos orientan y que podemos ajustarlos en atención a las características específicas de nuestro objeto de estudio y al logro de los propósitos que nos planteamos.

Comenzamos este apartado con una cita de Strauss & Corbin (2002) que nos dice lo siguiente

Al hablar sobre análisis cualitativo, nos referimos, no a la cuantificación de los datos cualitativos, sino al proceso no matemático de interpretación, realizado con el propósito de descubrir conceptos y relaciones en los datos brutos y luego organizarlos en un esquema explicativo teórico. Los datos pueden consistir en entrevistas y observaciones pero también pueden incluir documentos, películas o cintas de video, y aun datos que se hayan cuantificado con otros propósitos tales como los del censo. (pág. 12)

De esta cita podemos resaltar lo siguiente, el análisis cualitativo implica un proceso de interpretación que nos lleve a descubrir conceptos y relaciones entre los datos que vamos obteniendo con diferentes instrumentos, para organizarlos en un sistema o esquema explicativo teórico; en lo particular me parece que el análisis cualitativo demanda mayores habilidades del investigador, sobre todo para sintetizar la información que obtiene, depurar la que no es relevante para el tipo de pregunta de investigación que se plantea y sobre todo hacer gala de una construcción original para presentar la información en un esquema teórico innovador.

Tarea nada sencilla, sobre todo si coincidimos con Strauss & Corbin (2002, pág. 14) en que *“el análisis es la interacción entre los investigadores y los datos”*, lo cual demanda una buena dosis de creatividad para la presentación de los resultados.

“La creatividad se manifiesta en la capacidad de los investigadores de denominar categorías con buen tino, formular preguntas estimulantes, hacer comparaciones y extraer un esquema innovador, integrado y realista de conjuntos de datos brutos desorganizados (Strauss & Corbin, 2002, pág. 14)”; estas operaciones del pensamiento serán las que nos guíen durante todo el proceso de análisis, incluso la presentación de los resultados no se hará con el esquema tradicional desde el cual se presentan primero los hallazgos y luego se hace el análisis o interpretación de los datos, en nuestro caso, los capítulos III y IV los estructuramos de tal manera que se muestren las articulaciones entre los datos, las categorías analíticas utilizadas, su interpretación y los conceptos teóricos que le son asociados (referenciados de manera sintética, cuando la literatura nos los aporta) o bien la posibilidad de emergencia de otros conceptos.

Según Latorre, Del Rincón, & Arnal (1997, pág. 112), para el proceso de análisis el principal recurso intelectual es el *“método comparativo”*³⁴: tarea que implica conceptualizar, categorizar, encontrar relaciones y evidencias, casos negativos, casos

³⁴ Con esta categoría no se refieren a la “investigación comparada”, ni al método comparativo causal (Latorre, Del Rincón, & Arnal, 1997, pág. 74)

discrepantes. Las categorías que emergen deben comprobarse con los últimos datos y modificarse y redefinirse hasta llegar a un sistema satisfactorio. El proceso termina cuando los datos no generan nuevas percepciones. *“Hacer comparaciones obliga a los analistas a examinar los datos en el nivel de las dimensiones (Strauss & Corbin, 2002, pág. 49)”* (esto lo examinaremos con más detalle en un apartado siguiente, a propósito de la perspectiva de la Grounded theory”)

Una de las estrategias que utilizaremos para profundizar en los análisis será la triangulación múltiple (Latorre, Del Rincón, & Arnal, 1997; Strauss & Corbin, 2002), tanto de fuentes de datos (entrevistas, registros de observación, videograbaciones, ensayos, planeaciones, cuestionario) como de informantes (alumnos, titular de la asignatura), según el momento y la circunstancia de la investigación.

De estos primeros comentarios ya se puede inferir que el esquema analítico que seguiremos en la investigación recupera muchos de los elementos de la “Grounded theory”, aunque no la metodología completa como tal, ello por las circunstancias propias de la investigación y las condiciones temporales para realizarla, por tal motivo en el siguiente apartado nos vamos a detener un poco en su caracterización, haciendo uso para ello de tres fuentes principales: (Strauss & Corbin, 2002; Valles, 2000 y Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010), sin dejar de lado las aportaciones e interpretaciones de investigadores noveles que han incursionado en esta perspectiva de investigación (Muñoz Catalán, 2009)³⁵. A la vez que la caracterizamos vamos a ir definiendo hasta dónde fue posible que siguiéramos sus planteamientos y en qué medida nos acercamos a la profundidad que ella exige.

II.4.1. Aportaciones de la “Grounded Theory” al marco analítico de la investigación.

Sabemos que en el caso de las investigaciones de corte cualitativo, los autores coinciden en que el marco analítico lo va definiendo el propio objeto de estudio, es decir, de acuerdo a las características que asume el objeto de estudio, se plantean las posibilidades analíticas; sin embargo, en lo general hay coincidencias respecto al proceso

³⁵ Aunque su acercamiento metodológico no es completamente desde esta perspectiva, incorpora de manera complementaria al interaccionismo simbólico y la perspectiva dialógica del discurso. (Muñoz Catalán, 2009, pág. 154)

que se puede seguir para hacer el análisis de los datos recuperados con diversas fuentes, en nuestro caso las que hemos anunciado en los párrafos anteriores.

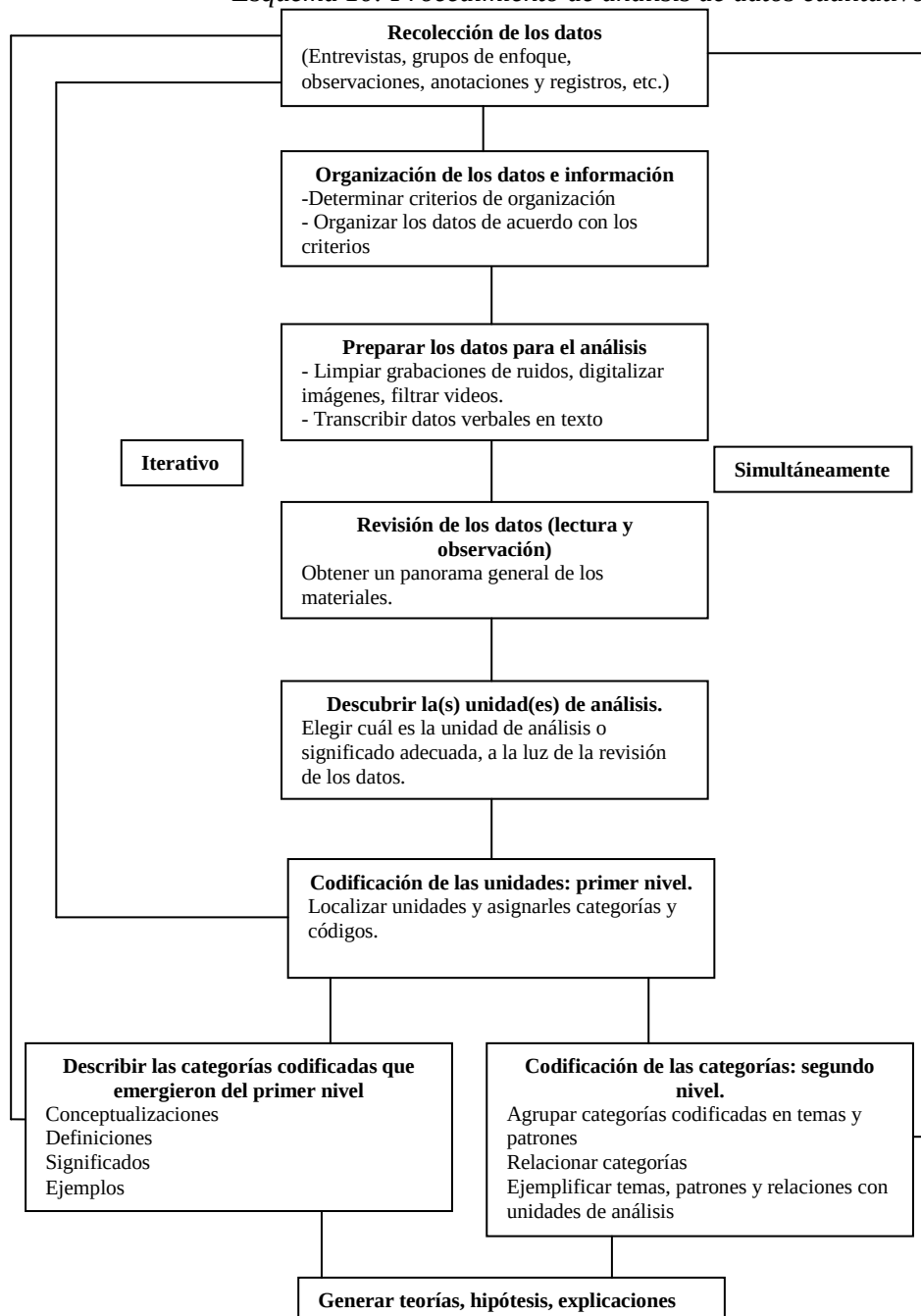
Al revisar la literatura de investigación, encontramos en Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio (2010, pág. 445) el siguiente esquema (esquema 10) que sintetiza de manera genérica los pasos para el análisis en congruencia con una investigación cualitativa; ellos mismos reconocen que dicha síntesis es producto de la lectura de los elementos de la Grounded theory (Strauss & Corbin, 2002) y aquí lo recuperamos porque en esencia describe los pasos analíticos que hemos seguido en la presente investigación, aunque con algunas variantes que vamos a ir comentando enseguida.

En este esquema, los autores prácticamente hacen un recorrido de todo el proceso, lo cual se justifica dado que muchas de las veces la descripción sobre el proceso de análisis parte del momento de revisión de los datos, sin considerar que en este tipo de investigaciones todo el proceso es relevante, desde el momento mismo en que se “negocia el acceso” ya se están obteniendo datos que nos informan algo, ya es tarea del investigador si los considera o no relevantes para su objeto de estudio.

En tal sentido, desde la postura de Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio (2010) a partir de la interpretación que hacen de los elementos de la Grounded theory, los pasos del proceso analítico los podríamos sintetizar en:

- a) Recolección de los datos.
- b) Organización de los datos e información.
- c) Preparación de los datos para el análisis.
- d) Revisión de los datos (lectura y observación).
- e) Descubrir la(s) unidad(es) de análisis.
- f) Codificación de las unidades: primer nivel.
- g) Describir las categorías codificadas que emergieron del primer nivel.
- h) Codificación de las categorías: segundo nivel.
- i) Generar teorías, hipótesis, explicaciones.

Esquema 10: Procedimiento de análisis de datos cualitativos



Fuente: (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010, pág. 445)

Por su parte Valles (2000), también recuperando el procedimiento de la Grounded theory, que denomina “método comparativo constante”, distingue cuatro fases o momentos del análisis cualitativo:

- 1) Comparación de “incidentes” (observaciones, fragmentos de entrevista, documentos...)

- 2) Integración de categorías y sus propiedades.
- 3) Delimitación de la teoría.
- 4) Escritura de la teoría.

Y recupera una advertencia, aunque este método de generación de teoría es un proceso creciente, las fases previas siguen operando simultáneamente a lo largo del análisis.

Como apreciamos, aparentemente es más sintético el procedimiento analítico, sin embargo es claro que, para poder cubrir cada una de estas fases, hay tareas que no se aprecian pero que es necesario hacerlas, por ejemplo, la recolección, organización y preparación de los datos son pasos previos para el primer punto, que es la comparación de incidentes; en tal sentido, vemos cómo con diferentes términos se va configurando un procedimiento general para analizar los datos cualitativos.

Ahora bien, antes de esbozar el procedimiento analítico que seguimos, es necesario recuperar las ideas centrales respecto a ello, es decir, cuáles son los pasos y las estrategias que proponen para hacer el análisis cualitativo de los datos.

“Básicamente, existen tres componentes principales en la investigación cualitativa. Primero están los datos, que pueden provenir de fuentes diferentes, tales como entrevistas, observaciones, documentos, registros y películas. Segundo, están los procedimientos, que los investigadores pueden usar para interpretar y organizar los datos. Entre estos se encuentran: conceptualizar y reducir los datos, elaborar categorías en términos de sus propiedades y dimensiones, y relacionarlos, por medio de una serie de oraciones proposicionales. Al hecho de conceptualizar, reducir, elaborar y relacionar los datos se le suele denominar codificar. (...) Los informes escritos y verbales conforman el tercer componente y pueden presentarse como artículos en revistas científicas, en charlas (por ejemplo en congresos), o como libros” (Strauss & Corbin, 2002, pág. 13)

De estos tres componentes, el primero ya lo describimos en apartados anteriores; del último damos cuenta con el mismo trabajo; del segundo nos vamos a ocupar en lo que sigue, pero adicional a la propuesta de los tipos de codificación que hacen Strauss & Corbin (2002), vamos a recuperar el método de comparación constante que proponen como estrategia analítica.

II.4.1.1. Formular preguntas y hacer comparaciones.

En el proceso de investigación es muy importante no quedarnos con la sensación de que la realidad está dada de antemano, al contrario, si no le preguntamos no nos dice nada, en general es una habilidad del pensamiento el formular preguntas, de tal manera que, en éste no podemos asumir una actitud contemplativa para con nuestros datos, al contrario hay que interrogarlos, en atención a nuestro objeto de estudio, bajo el entendido de que no es la situación como tal la fuerza motriz sino las preguntas que le formulamos, las que dinamizan nuestra investigación.

Desde la perspectiva de la Grounded theory se conciben, para el desarrollo de la teoría, dos operaciones como absolutamente necesarias: formular preguntas y hacer comparaciones.

Respecto a la primera, tenemos que

Las "buenas" preguntas dependen a veces de la suerte, pero más a menudo las suscitan los conocimientos relevantes, un sentido de que "aquí algo falta" y, lo más importante, la sensibilidad a lo que los datos en realidad dicen. (Strauss & Corbin, 2002, pág. 82)

Esa actitud cuestionadora de que "aquí algo falta" es el disparador para enfocar la mirada analítica en los datos, pero ¿qué tipo de preguntas sugieren los autores que planteemos durante el proceso de análisis de los datos?; recordemos que en este momento no nos referimos a las preguntas de investigación, son preguntas para ahondar inquisitivamente en los datos.

Al respecto sugieren cuatro tipos de preguntas, con la salvedad de que no se trata de una tipología en extenso, simplemente es una orientación para el investigador; los tipos de preguntas las denominan: sensibilizadoras, teóricas, de naturaleza práctica y estructural, y preguntas guía. En la siguiente cita vamos a recuperar, en palabras de los mismos autores, en qué consisten cada una de ellas.

1. Primero están las preguntas sensibilizadoras: Estas ponen al investigador en sintonía con lo que los datos pueden estar indicando. De este tipo son las siguientes: ¿Qué está pasando aquí? (por ejemplo, asuntos, problemas, preocupaciones) ¿Cuáles son los actores involucrados? ¿Cómo definen la situación? ¿Cuál es el significado para ellos? ¿Qué están haciendo los diferentes actores? ¿Son sus definiciones y significados los mismos o diferentes? ¿Cuándo, cómo, y con qué consecuencias actúan y en qué se parecen o diferencian, en el caso de los diferentes actores y las diversas situaciones?

2. Segundo, existen preguntas teóricas. Éstas son las que ayudan al investigador a ver el proceso, la variación y cosas semejantes, y a hacer conexiones entre los conceptos. Pueden ser así: ¿Cuáles son las relaciones de un concepto con otro? (por ejemplo, ¿cómo se comparan y relacionan en cuanto a las propiedades y las dimensiones? ¿Qué sucedería si...? ¿Cómo cambian los acontecimientos o las acciones con el tiempo? ¿Cuáles son los asuntos estructurales más importantes en este caso, y cómo intervienen o afectan estos acontecimientos lo que estoy viendo o escuchando?
3. Tercero, hay preguntas de una naturaleza más práctica y estructural. Éstas son las que dirigen el muestreo y ayudan en el desarrollo de la teoría que va evolucionando. De estas preguntas, entre otras muchas, son las siguientes: ¿Cuáles conceptos están bien desarrollados y cuáles no? ¿Dónde, cuándo y cómo voy luego a recolectar los datos para la evolución de mi teoría? ¿Qué tipos de permiso necesito? ¿Cuánto tiempo tomará? ¿Es lógica la teoría que estoy construyendo? ¿Dónde se falta contra la lógica? ¿Ya llegué al punto de saturación?
4. Cuarto, las preguntas guía: Son estas preguntas las que guían las entrevistas, observaciones y análisis de estos u otros documentos. Estas preguntas cambian con el tiempo, se basan en la teoría que está desarrollándose y son específicas para la investigación en particular; por tanto, es difícil mostrar ejemplos. Empiezan siendo abiertas y tienden a volverse más específicas y refinadas a medida que la investigación va avanzando. (Strauss & Corbin, 2002, págs. 84 - 85)

Al hacer una lectura de esta propuesta de tipos de preguntas, nos damos cuenta que en realidad se abarca todo el proceso de investigación con miras a la generación de teoría, sin embargo para fines del proceso analítico, sin considerar la recursividad que los autores plantean, en términos de la búsqueda de la “saturación”, considero que los primeros dos tipos de preguntas (sensibilizadoras y teóricas) pueden ser orientadoras para un análisis con un buen nivel de profundidad. Preguntarnos siempre ¿qué está pasando aquí?, ¿cuál es el significado de las diferentes situaciones para los actores?, ¿cuáles son las relaciones de un concepto con otro?, ¿cómo cambian las acciones y los acontecimientos a lo largo del tiempo? Se convierten en buenos referentes para el análisis de los datos; por supuesto que no descartamos el otro tipo de preguntas, pero no las retomamos tal cual.

Por otro lado, la segunda operación analítica es la que más consideramos dentro de nuestra investigación: hacer comparaciones; sin embargo en la revisión bibliográfica que hicimos al respecto, encontramos algunos matices que vamos a comentar.

Desde el texto de Valles (2000) se hace alusión al método comparativo constante

"Queremos sugerir un tercer approach al análisis de los datos cualitativos -uno que combina, mediante un procedimiento analítico de comparación constante, el procedimiento de codificación explícita del primer approach y el estilo de desarrollo de teoría del segundo. El propósito del método comparativo constante de conjuntar codificación y análisis es generar teoría más sistemáticamente que el

segundo approach mediante el uso explícito de procedimientos de codificación y análisis. Aunque más sistemático que el segundo approach, este método no se adhiere completamente al primero, el cual entorpece el desarrollo de teoría pues está diseñado para el test provisional, no el descubrimiento, de hipótesis" (Glaser & Strauss, 1967: 102 citado en Valles, 2000)

Como apreciamos la cita corresponde a los primeros desarrollos de la metodología, en tal sentido no es de extrañarnos la denominación “método comparativo constante”, sin embargo, en su desarrollo posterior Strauss & Corbin (2002) plantean tres tipos de comparaciones: de incidentes, teóricas y extremas. ¿En qué consiste cada una de ellas? ¿Cuál o cuáles nos resultaron más pertinentes para el desarrollo de nuestro análisis?

En cuanto a la comparación de incidentes, no le dedican mucha atención en tanto se asume fácil su comprensión, cada incidente se compara con otros, en cuanto a sus propiedades o dimensiones en busca de similitudes y diferencias, y se ubica en una categoría.

Las comparaciones teóricas, a decir de los autores, estimulan nuestro pensamiento sobre las propiedades y dimensiones para dirigir nuestro muestreo teórico. En ésta se comparan categorías (conceptos abstractos) para buscar conceptos similares y diferentes a las que se les puedan sacar sus posibles propiedades y dimensiones.

“Las comparaciones teóricas son herramientas (una lista de propiedades) para observar algo con alguna objetividad más bien que darle un nombre o clasificarlo sin un examen profundo del objeto en cuanto a sus propiedades³⁶ y dimensiones” (Strauss & Corbin, 2002, pág. 88).

El tercer tipo de comparación, las extremas, son como su nombre lo indica, poco comunes, por ejemplo, comparar el trabajo de los psiquiatras con el de las prostitutas: ambos tienen una profesión, tienen clientes, se les paga por su trabajo, etc.

Como apreciamos, principalmente los dos primeros tipos de comparación son muy factibles y de hecho son los que utilizamos de manera predominante en el análisis de los datos de esta investigación, sobre todo porque de esta forma nos obligamos a pensar de manera más abstracta y general, al encontrar lo común y lo diferente en datos diversos, y no quedarnos en la descripción sistemática de los hechos, sino en la búsqueda de sus posibles articulaciones.

³⁶ “Las propiedades son las características generales o específicas o los atributos de una categoría, las dimensiones representan la localización de una propiedad durante un continuo o rango” (Strauss & Corbin, 2002, pág. 128)

II.4.1.2. El microanálisis y los tipos de codificación.

De la lectura del texto de Strauss & Corbin (2002) detectamos dos operaciones más vinculadas con el análisis de los datos cualitativos, el microanálisis y la codificación; a decir de ellos, el microanálisis incluye la codificación axial y abierta.

El microanálisis exige examinar e interpretar datos de manera cuidadosa, y a menudo hasta minuciosa. Cuando decimos "datos" nos referimos a entrevistas, notas de campo a partir de la observación, videos, periódicos, memorandos, manuales, catálogos y otras modalidades de materiales pictóricos o escritos (Silverman, 1993). Separamos los datos y trabajamos con los cuadros, palabras, frases, oraciones, párrafos y otros segmentos del material.

Incluidos en este examen microscópico se hallan dos aspectos principales del análisis: a) los datos -sea el recuento que los participantes hacen de acontecimientos o acciones según los recuerdan- o textos, observaciones, vídeos y artículos semejantes recopilados por el investigador, y b) las interpretaciones de los observadores y los actores de esos acontecimientos, objetos, sucesos y acciones. También hay un tercer elemento: la interacción que tiene lugar entre los datos y el investigador en el proceso de recolección y análisis de los mismos. (Strauss & Corbin, 2002, pág. 64)

Como puntos principales para hacer microanálisis, los autores consideran de suma importancia que los investigadores consideren el grado de verosimilitud de los datos, los datos no son forzados, se les permite hablar; se busca lo específico de los datos, no sólo en el sentido descriptivo, sino también en el sentido analítico para formar un esquema interpretativo; hay que escuchar bien lo que los entrevistados están diciendo y cómo lo están diciendo, teniendo en cuenta sus interpretaciones; las preguntas juegan un papel importante, con mayor énfasis a las preguntas teóricas; desde el punto de vista analítico lo relevante son los datos, no las especificidades de un caso, un individuo o un colectivo; hay que conceptualizar, clasificar y establecer comparaciones de los dos tipos principales que ya indicamos; se pueden plantear hipótesis provisionales y no aceptar las presuposiciones.

Además este tipo de análisis nos permite centrarnos en una palabra, una frase o una oración, hacer análisis línea por línea o bien centrarnos en un párrafo completo; de manera específica, usamos esta estrategia en nuestra investigación, de tal manera que después de varias lecturas a cada una de las entrevistas o documentos con que recuperamos la información, nos centramos en párrafos en los cuales las interacciones nos permitieran asignarles un código, apoyados con el programa informático Maxqda (del cual vamos a hablar más adelante), hecha esta primer codificación, separamos todos los fragmentos de

entrevista, por ejemplo, que respondían al mismo código, dimos varias lecturas de nuevo a este material y volvimos a codificar, pero ahora agrupando en atención a las propiedades y dimensiones que consideramos comunes a cada uno de los fragmentos; este agrupamiento nos permitió construir los diferentes apartados de cada capítulo.

Ahora bien ¿en qué consiste la codificación? De acuerdo con Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio (2010), en la codificación cualitativa los códigos surgen de los datos (más precisamente de los segmentos de datos): los datos van mostrándose y los “capturamos” en categorías. Usamos la codificación para comenzar a revelar significados potenciales y desarrollar ideas, conceptos e hipótesis; vamos comprendiendo lo que sucede con los datos (empezamos a generar un sentido de entendimiento respecto al planteamiento del problema). Los códigos son etiquetas para identificar categorías, es decir, describen un segmento de texto, sea de una entrevista o de cualquier documento.

En este mismo tenor, en el texto de Strauss & Corbin (2002) encontramos tres tipos de codificación:

- a) **Codificación abierta:** Es el proceso analítico por medio del cual se identifican los conceptos y se descubren en los datos sus propiedades y dimensiones.

“El analista le puede poner nombre a los objetos a causa de la imagen o significado que evocan cuando los examina comparativamente y en contexto o el nombre se puede tomar de las palabras de los entrevistados mismos. Estos suelen llamarse también “códigos in vivo” (Strauss & Corbin, 2002, pág. 114)

La codificación abierta se puede hacer línea por línea o también por párrafos. Una vez hecha la codificación y conforme los conceptos se acumulen hay que agruparlos bajo términos más abstractos, ello da lugar a la construcción de categorías y subcategorías.

“Las categorías son conceptos derivados de los datos, que representan fenómenos. Los fenómenos son ideas analíticas pertinentes que emergen de nuestros datos. Responden a la pregunta ¿qué pasa aquí? Ellos describen los problemas, asuntos, ocupaciones y temas pertinentes que están siendo estudiados. El nombre escogido para una categoría parece ser por lo general el que mejor describe lo que sucede” (Strauss & Corbin, 2002, pág. 124)

Complementarias a las categorías, ellos proponen las subcategorías, en tanto *“básicamente las subcategorías hacen más específica a una categoría al denotar información tal como cuándo, dónde, por qué y cómo es probable que ocurra un fenómeno”* (pág. 130).

- b) **Codificación axial:** El proceso de la codificación axial es comenzar el proceso de reagrupar los datos que se fracturaron durante la codificación abierta. En la codificación axial las categorías se relacionan con sus subcategorías para formar unas explicaciones más precisas y completas sobre los fenómenos.
- c) **Codificación selectiva:** Es el proceso de integrar y refinar las categorías; sólo cuando las categorías principales se integran finalmente para formar un esquema teórico mayor, los hallazgos de la investigación adquieren la forma de teoría.

En el proceso completo de aplicación de esta metodología deben utilizarse estos tres tipos de codificación, dado que según Strauss & Corbin (2002) esto garantizaría la construcción de teoría emergente de los datos, sin embargo, en estos procesos median las circunstancias temporales del desarrollo de la investigación, lo cual dificulta el nivel de profundidad con que se puede llevar un análisis; sería demasiado pretensioso decir que con el nuestro llegamos a la formulación de una teoría, consideramos que el tipo de análisis nos lleva a un “ordenamiento conceptual” (Strauss & Corbin, 2002, pág. 21) con posibilidades de seguir profundizando en nuestro objeto de estudio, en otras condiciones (tal vez como programa de investigación desde el escenario normalista) que permitan la emergencia de teorizaciones específicas.

En general, haciendo una precisión respecto al uso de la Grounded theory en nuestra investigación podemos decir que:

- Recuperamos las preguntas sensibilizadoras y las preguntas teóricas, en tanto las preguntas de naturaleza práctica y estructural nos fueron guiando en la toma de decisiones, pero sin llegar a la saturación de la información, dado que sólo volvimos parcialmente a recuperar información (por ejemplo con el Cuestionario con problemas matemáticos y la Entrevista colectiva) pero no con la mirada profunda que nos permitiera validar la teoría que empezamos a construir, más bien dejamos varios elementos como hipótesis plausibles y componentes de una posible teorización.

- En cuanto a los tipos de comparación, priorizamos la comparación de incidentes y las comparaciones teóricas, vinculando estas últimas con categorías conceptuales derivadas de posicionamientos teóricos ya consolidados (por ejemplo los mismos conceptos de la Teoría de las situaciones didácticas).

- Centramos como mirada analítica el microanálisis, dado que procuramos examinar los datos de manera cuidadosa y hasta minuciosa, e incluso (como veremos en los capítulos III y IV) se resaltaron ideas, frases o palabras que en sí mismas encerraban un significado y/o se convertían en elementos básicos para interpretar la configuración de las representaciones sociales.

- De los tipos de codificación recuperamos predominantemente la codificación abierta y la codificación axial; sin embargo, la codificación selectiva no fue posible integrarla dado que no nos planteamos formar un esquema teórico mayor, sino más bien caracterizar el proceso de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico, así como las representaciones sociales que influyen en ello, y eventualmente las que se construyeron como producto de los intercambios comunicativos y la interacción social en el proceso didáctico que hicimos objeto de estudio.

- Asumimos como actitud básica el permitir que los datos fueran los que hablaran y esa misma apertura nos permitió identificar relaciones entre éstos y conceptualizaciones teóricas ya existentes en la literatura.

II.4.2. Del lápiz, papel y tijeras al Maxqda. Ejemplo de uso de la metodología de análisis.

No queremos cerrar este capítulo de la perspectiva metodológica de la investigación sin hacer una referencia a un apoyo importantísimo para su desarrollo; no asumimos per se una actitud proactiva por el uso de la tecnología, más bien valoramos las potencialidades y economía que nos brinda al desarrollar el trabajo.

En este sentido, ante la cantidad de datos y documentos que fuimos recuperando se hacía necesario un procedimiento que agilizara el proceso de codificación y que a la vez nos permitiera potenciar la estrategia de comparación constante al recuperar los fragmentos de registro o de texto codificados.

En otras ocasiones el proceso de codificación y selección de fragmentos de registro se hizo como luego se dice “con lápiz, papel y tijeras” en clara alusión al subrayado y recortado de unidades de información, las cuales se integran en categorías analíticas, sin embargo, la utilización del programa Maxqda, no sólo nos facilitó el proceso de codificación y categorización, sino que nos permitió recuperar de manera comparativa los diferentes segmentos codificados, para posteriormente darles un tratamiento analítico más fino.

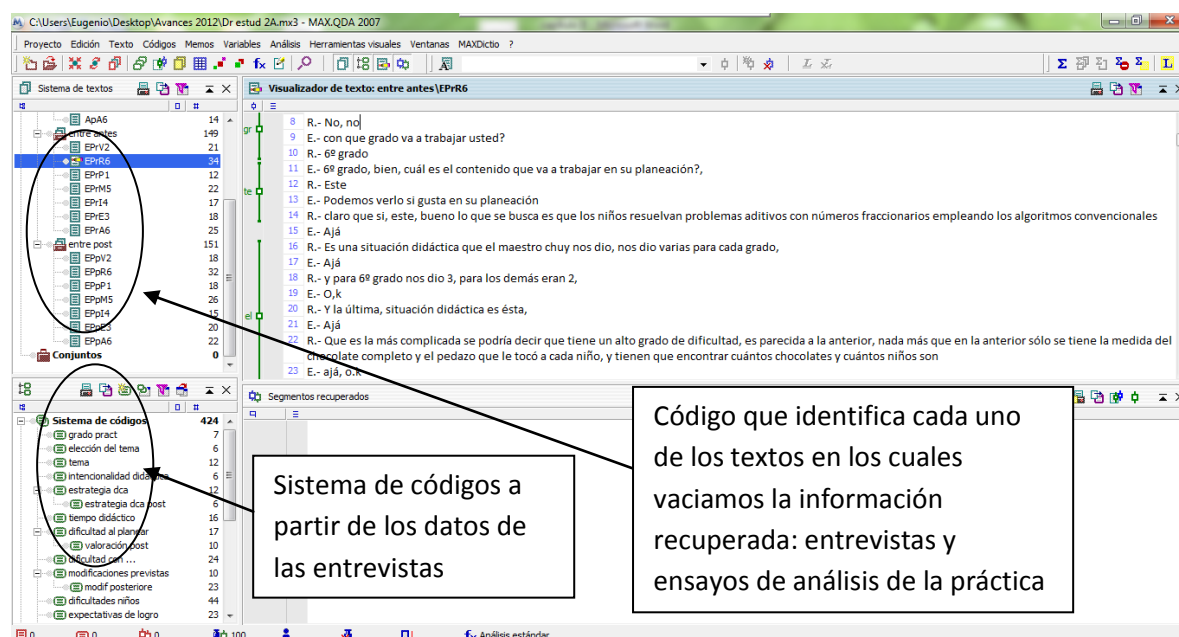
Al respecto, ya otros autores han identificado y valorado las potencialidades que nos brindan los programas informáticos, por ejemplo en Valles (2002) se hace un análisis extenso de las ventajas que brinda el programa Maxqda (Kuckartz, 2007) y cómo su uso se puede articular con los planteamientos de la Grounded theory, con las cuales coincidimos: ahorro de tiempo, exploración y codificaciones intuitivas y sistemáticas, modelización y visualizaciones analíticas. Además permite múltiples codificaciones entre los datos y recuperación de la información en tablas comparativas.

Otra de las ventajas es la construcción de “memos”, los cuales nos permiten asignar reflexiones a los fragmentos o unidades de información conforme va avanzando el proceso de codificación y luego recuperarlos para integrarlos al proceso de escritura del análisis.

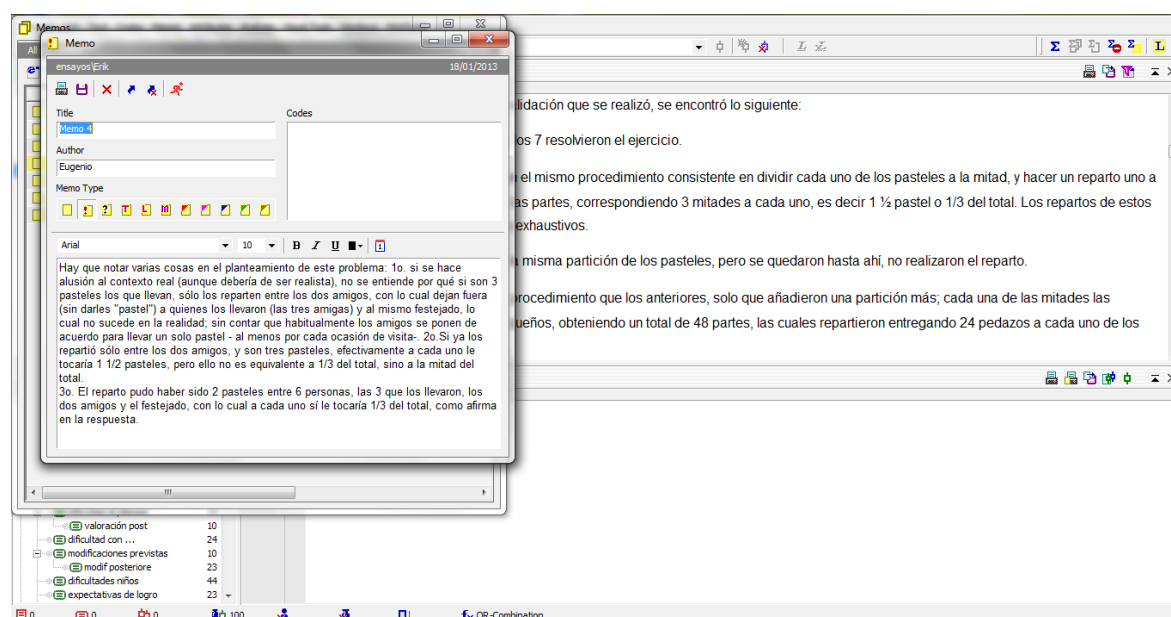
II.4.2.1. Algunos ejemplos de su uso en la parte técnica de captura de la información.

Antes de colocar algunos ejemplos de su uso, es importante mencionar que se prepararon todos los archivos para incorporarse al programa, para ello se les asignó un código de identificación según el tipo de documento o de instrumentos de recuperación de la información de que se tratara.

En la siguiente imagen apreciamos cómo es que ya están los textos cargados en el sistema y además se ha hecho el proceso de codificación de la información:



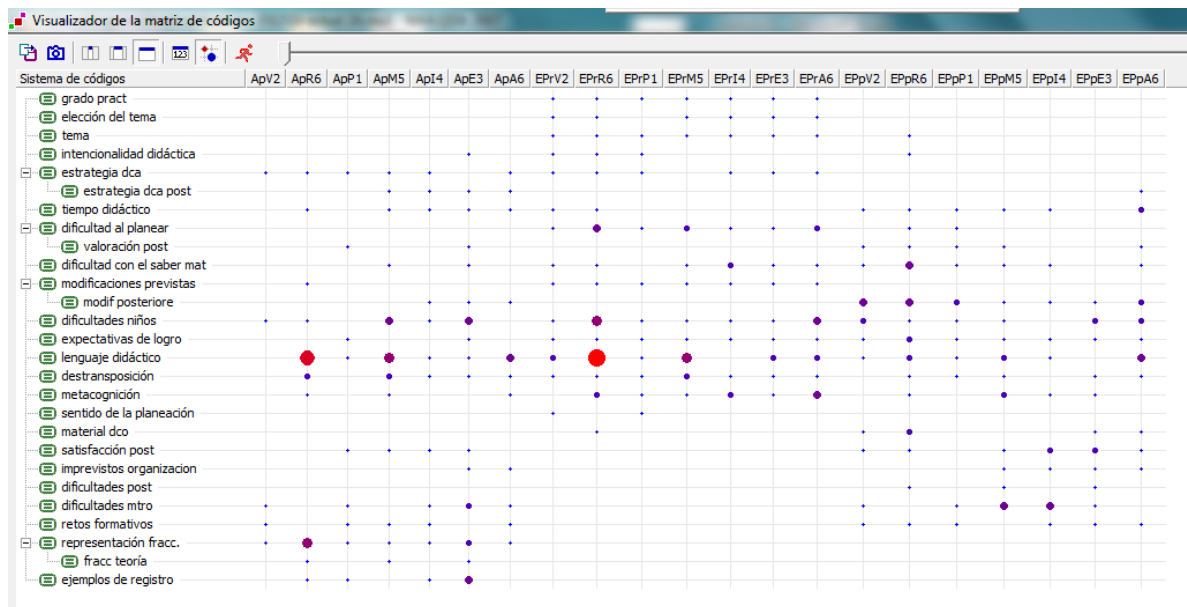
El siguiente ejemplo corresponde a la utilización del programa para la elaboración de “memos” con reflexiones que luego recuperamos para integrarlas al análisis final.



Un tercer ejemplo se da a partir de la visualización de algunas relaciones entre los datos, por ejemplo en la siguiente pantalla vemos cómo la categoría “lenguaje didáctico” aparece con mucha fuerza en el análisis de la información, principalmente vinculada a la denominación de la estrategia didáctica, es decir, cuando los estudiantes hablaron sobre su estrategia didáctica para enseñar fracciones, aprovecharon los conceptos didácticos aprendidos para utilizarlos como un lenguaje especializado:



Y, finalmente, en la siguiente matriz de códigos vemos cómo se dio la presencia de cada código, asignado en las dos entrevistas aplicadas a los estudiantes y el ensayo de análisis de su práctica.



II.4.2.2. Del uso del Maxqda a las herramientas analíticas de la Grounded Theory.

Después de la explicación que dimos en los párrafos anteriores respecto a los principales elementos de la metodología de la Grounded Theory, en lo que sigue vamos a recuperar un ejemplo de su uso, bajo la consideración de que al inicio de cada uno de los siguientes capítulos se hacen acotaciones importantes que permiten clarificar aún más la estrategia de análisis seguida.

En primer lugar, como ya afirmamos en el apartado anterior, nos valimos del programa Maxqda dado que éste nos permitió recuperar los fragmentos de registro o de

entrevista, según fuera el caso, de manera comparativa a partir de un mismo código asignado a la información obtenida con diferentes instrumentos de recuperación de datos.

En tal sentido podemos decir que un primer nivel de reducción de la información se dio a partir de la primera codificación que hicimos a los textos derivados de los instrumentos con que recuperamos la información, ésta es una codificación abierta que hicimos a partir de lo que observamos desde la lectura de las transcripciones; el programa Maxqda nos presenta la información organizada en una tabla que identifica la procedencia de la información, por ejemplo el número de sesión de clase, la ubicación de los segmentos codificados en el texto completo e incluso la fecha de creación:

Segmentos codificados								
Comentario	Texto	Código	Principio	Final	Peso	Segmento	Autor	Fecha de creación
	primeras dos clases	TM DCO	51	64	100	voy a pedirles que tomen nota de 3 preguntas, que tienen que ver con lo que vimos eh, o lo que vieron ustedes en su clase, hemos platicado y espero que no se les vayan olvidando todos los conceptos didácticos con los cuales hay que explorar lo que pasa no solo con las fracciones sino que como las fracciones es el tema de ahorita , entonces si, son 3 preguntas, les sugiero que las pongan seguidas y ya después cada uno las va poniendo dependiendo, si eso es importante que tengan la evidencia, les parece que lo arranquemos de su cuaderno o les doy una hoja de maquina A(todos) .- la arrancamos M.- si la arrancan mejor, no hay secretos, fíjense que no tengan anotado nada ahí, porque la van arrancar y me la van a entregar si, dice así, pregunta 1 ¿en cuál aspecto, en cuál aspecto, cuál, de sus competencias didácticas, en cuál aspecto de sus competencias didácticas consideran que hubo una mejoría, una mejoría o evolución respecto A.-(m) respecto M.- respecto a la jornada de prácticas del semestre anterior, si, en cuál aspecto de sus competencias didácticas consideran que hubo una mejoría o evolución respecto a la jornada de prácticas del semestre anterior?, si, pregunta 2, pregunta 2, ¿cuál de los aspectos de sus competencias didácticas, cuál de los aspectos de sus competencias didácticas considero que constituye un reto a superar A(m).- un reto a que M.- un reto a superar para las próximas, para la próxima jornada de prácticas?, ¿cuál de los aspectos de sus competencias didácticas consideran que constituye un reto a superar para la próxima jornada de prácticas?, este última, ¿describan un ejemplo de cómo se presento, en el periodo de prácticas pasado, en el periodo de prácticas pasado, cualquiera de los siguientes 3 tópicos: A(m).- 3 que? M.- 3 tópicos o tres conceptos: regulaciones didácticas, o 3 conceptos, regulaciones didácticas A(varios).- como? M.- regulaciones didácticas, devoluciones, tratamiento de los errores, esas son las 3 que vamos a ver, si se entiende esa última A(m).- no M.- no las van a contestar las 3, bueno si alguien quiere decir poquito de las 3, pero la idea es que seleccionen una nada mas y dejenme les añado algo una restricción más a la consigna, la idea es que lo digan de que es lo que pasó en la clase que llevamos mas nosotros, sobre todo en la clase mas preparada de las fracciones, en ese como les fue con los errores, en el caso de los de segundo y primero recuerdo que fue lo de la casita uno, bueno otros hicieron , de lo de la casita, otro me enseñó el trazo ese de geometría, entonces lo que hayan hecho mejor, los de primero y segundo, lo que hayan trabajado, los de tercero y sexto vamos a repetir estas preguntas sobre todo pensando en las situaciones didácticas que trabajamos si,	toshiba	13/04/2012 08:02

Cuando codificamos, de manera inicial las 9 sesiones de clase del formador de profesores, veíamos un interés por que los alumnos tuvieran un conocimiento didáctico del contenido, y nos pareció que ese podría ser el código para seleccionar los fragmentos de registro, TM DCO nos permitió indicar un trabajo con las matemáticas donde el énfasis estaba puesto en el conocimiento didáctico del contenido.

En un primer momento recuperamos unidades de información en contexto, lo cual nos permitió apreciar el proceso de surgimiento de la categoría; en tal sentido una lectura y relectura comparativa de los diferentes fragmentos de texto nos ayudó a reducir aún más las unidades de información y de manera simultánea a identificar las propiedades y dimensiones presentes en la categoría, de tal manera que, siguiendo con el ejemplo anterior, nos dimos cuenta que sistemáticamente lo que iba emergiendo desde los datos era un proceso de construcción de una representación alternativa al conocimiento didáctico, relacionada más bien al conocimiento de un lenguaje didáctico.

Al tener la información con un primer nivel de codificación (codificación abierta), y revisada en sus propiedades y dimensiones procedimos a hacer una codificación axial, bajo el entendido de que ésta implica reagrupar los datos que se fracturaron durante la codificación abierta. En la codificación axial las categorías se relacionan con sus subcategorías para formar unas explicaciones más precisas y completas sobre los fenómenos.

En este proceso de integración fue necesario un proceso de abstracción que nos posibilitara construir una posible explicación del proceso de construcción de una representación social sobre la importancia de un lenguaje didáctico en el proceso de formación docente inicial (siguiendo con el ejemplo). La abstracción cobra importancia en tanto, de manera comparativa, podemos inferir las propiedades que presenta una categoría e incluso sus dimensiones, por ejemplo en el análisis de la categoría “lenguaje didáctico” pudimos identificar las siguientes dimensiones: 1°. Vivencia cotidiana; 2°. Anclaje a partir de su verbalización; 3°. Justificación práctica de su importancia; 4°. Precisión sobre sus componentes básicos; 5°. El concepto como herramienta para el diseño, primer nivel de objetivación; 6°. Recombinación de lenguajes, anclaje en la experiencia previa de la práctica de los estudiantes; y, 7°. El concepto en uso, segundo nivel de objetivación en escenarios microgenéticos.

Realizado este proceso de abstracción, que se nutre de las evidencias empíricas que los datos nos aportan (en el texto se recuperan todos los fragmentos de registro que fundamentan estas aseveraciones), estamos en condiciones de pensar en un esquema de organización para la presentación de la información, es decir, el reporte de la investigación. Para ello decidimos que en su estructuración fueran los mismos datos quienes nos dieran una lógica de presentación que al mismo tiempo diera cuenta del proceso didáctico de transposición y destransposición del saber (al respecto los mismos títulos de cada uno de los apartados de los capítulos III y IV, ejemplifican lo que aquí afirmamos); recordemos que la investigación la planteamos como un estudio de casos instrumental, en tal sentido, más que la descripción de la participación de cada caso, nuestro interés estuvo puesto en que a partir de la comparación de incidentes y de categorías se pudieran encontrar claves para caracterizar los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico, así como la influencia que tienen en éstos las representaciones sociales tanto del formador de profesores como de los estudiantes.

Síntesis del capítulo

Dada la naturaleza de nuestro objeto de estudio y el enfoque procesual de las representaciones sociales que nos interesa estudiar, en nuestra investigación nos hemos inclinado por un enfoque cualitativo interpretativo en tanto pretendemos analizar el proceso de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico para responder a la pregunta ¿de qué manera las representaciones sociales que sobre las matemáticas y su enseñanza han construido los estudiantes a su ingreso a la Escuela Normal inciden en los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico que curricularmente se intenta transmitir?

De igual manera, el interés por apreciar la fineza del proceso de construcción de las representaciones sociales producto del diálogo e interacción nos lleva a pensar en un estudio de caso instrumental (Stake, 1999) en tanto más que comprender a un profesor o a unos estudiantes en lo particular nos interesa comprender de manera general la incidencia de las representaciones sociales en los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico en el proceso de formación docente inicial y para ello el análisis a profundidad de un caso (un aula de la Escuela Normal, con la focalización de un profesor y siete estudiantes) inserto en un contexto particular nos puede aportar claves para lograr dicha comprensión.

En este capítulo presentamos la caracterización de los elementos básicos del estudio de casos, así como la elección de las técnicas e instrumentos de recogida de la información, con su debida justificación; así mismo hacemos una caracterización del procedimiento para el análisis de los datos, retomando para ello los elementos principales de la Grounded Theory (Strauss & Corbin, 2002): los tipos de codificación (abierta, axial y selectiva), la importancia de las preguntas y el papel del método de comparación constante.

Precisamos cuáles aspectos de la Grounded theory sí nos fue posible utilizar y al mismo tiempo hacemos la aclaración de que no hay una intención explícita de generar teoría como fin último de nuestra investigación, sin embargo en la medida que los lectores se sientan identificados con los resultados sí podemos hablar de la posibilidad de una “generalización analítica”.

Describimos y ejemplificamos de manera sintética el procedimiento de análisis que seguimos; no lo hacemos con mayor profundidad porque consideramos que la construcción misma de los capítulos III y IV es ilustrativa del proceso de análisis seguido.

Un apoyo importante en el proceso de reducción de los datos con fines analíticos, así como herramienta fundamental en el proceso de comparación constante de los datos obtenidos con diferentes instrumentos, fue el programa informático Maxqda; su utilización permitió agilizar el proceso de recorte, selección y ubicación de fragmentos de registro y su traducción en unidades de información, sin embargo ello no sustituyó el trabajo analítico y el proceso de abstracción propio del investigador.

CAPÍTULO III.

*La destransposición del saber: hacia la
construcción de nuevas representaciones
sociales en matemáticas.*

CAPÍTULO III.

LA DESTRANSPOSICIÓN DEL SABER: HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE NUEVAS REPRESENTACIONES SOCIALES EN MATEMÁTICAS

Cuando el enseñante interviene para escribir esta variante local del texto del saber que el llama “su curso”, o para preparar su curso (es decir, para realizar el texto del saber en el desfiladero de su propia palabra), ya hace tiempo que la transposición didáctica ha comenzado... (Chevallard, 1998, pág. 16)

Después de que en los capítulos anteriores discutimos teóricamente los conceptos principales de esta tesis, en este capítulo vamos a presentar los resultados del trabajo de campo realizado en un grupo “natural” de una Escuela Normal; el escenario, como ya indicamos en el capítulo sobre metodología, es la secuencia de clases de un profesor cuando trabaja el tema de “fracciones”, en total se consideraron 9 sesiones de clase de aproximadamente 100 minutos. Al respecto es necesario aclarar que se videograbaron en las condiciones normales de desarrollo de la clase, es decir, no se hizo ninguna planeación especial³⁷, dado que lo que interesa estudiar son los procesos de transposición y destransposición del saber en escenarios y condiciones reales.

³⁷ Me refiero en concreto que no se trata de la experimentación de situaciones didácticas intencionadas, el análisis corresponde a la progresión en los contenidos tal y como el profesor titular los coordina habitualmente.

El proceso de lectura y relectura de las transcripciones de los videos nos permitió paulatinamente ir las codificando, con la intención de construir las categorías analíticas que al mismo tiempo que nos permitieran aprehender lo que sucede en este salón de clase, nos sirvieran como un marco conceptual para la estructuración de los diferentes apartados de este capítulo; en tal sentido, los códigos que fuimos generando, auxiliados con el programa informático Maxqda, son los siguientes:

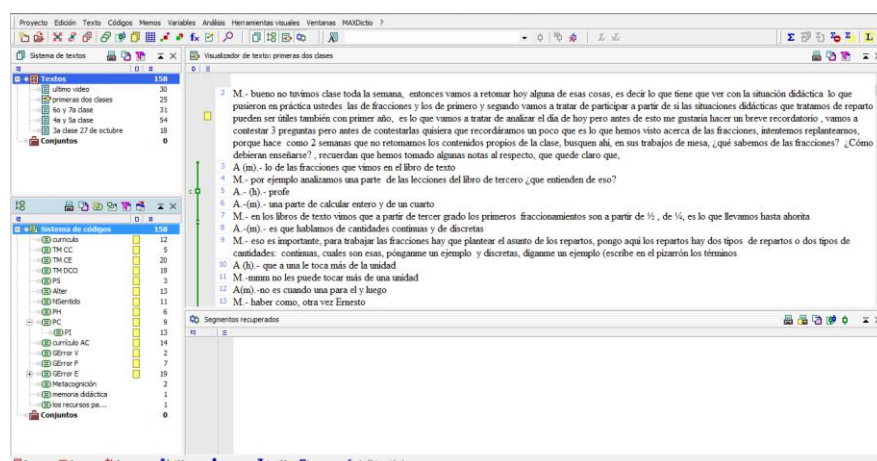


Tabla 18. Códigos del proceso de transposición didáctica

Código	Interpretación
Currículo	Currículo: del texto al saber matemático.
TM CC	Trabajo matemático: conocimiento común del contenido.
TM CE	Trabajo matemático: conocimiento especializado del contenido
TM DCO	Trabajo matemático: conocimiento de un lenguaje didáctico.
PS	Provisionalidad del saber
Alter	Interacción entre diferentes sujetos
PH	Problemas matemáticos por homología.
PC	Problemas matemáticos para construir un nuevo saber.
PI	Problemas inventados por los estudiantes.
currículo AC	Análisis curricular comparativo entre diferentes libros de texto.
GError V	Gestión del error: verbalizado.
GError F	Gestión del error: formador de profesores.
GError E	Gestión del error: del formador hacia los estudiantes.

Estos códigos nos permitieron organizar la información en tablas, las cuales, usando la estrategia del método comparativo constante, es decir, una lectura más cuidadosa del material seleccionado, pero sobre todo de manera comparativa entre diferentes sesiones

de clase, nos permitió estructurar este capítulo de análisis sobre lo acontecido en las sesiones de clase de un formador de profesores.

Cobra sentido volver a hacer la aclaración de que, aunque permitimos que la lectura de las transcripciones y de los diferentes documentos que usamos para el análisis fueran definiendo las categorías centrales para darle cuerpo a este capítulo, de manera transversal aplicamos una mirada centrada en tres categorías básicas: transposición, destransposición y representaciones sociales. ¿Cuál es la justificación que guía esta decisión? En esencia hay una tesis básica que es la que queremos documentar: a diferencia de los procesos de transposición didáctica en el escenario de la formación escolarizada durante la educación básica e incluso durante la educación media superior, en el proceso de transposición del saber en el escenario de la formación docente inicial, deben hacerse explícitos procesos de “destransposición del saber”, pero bajo la condición de una doble destransposición: la destransposición del saber matemático (para nuestro caso y focalización, las fracciones, como una parte del conjunto de los números racionales) y la destransposición de conocimientos didácticos.

Asumimos la distinción entre conocimiento y saber, en tanto los conocimientos aluden a situaciones informales, no necesariamente intencionadas, mientras que el saber hace referencia a procesos formales, producto de intenciones didácticas claras y diseñadas ex profeso para que los estudiantes lo aprendieran; la siguiente cita de Brousseau y Centeno contribuye a clarificar esta distinción:

“Los conocimientos son los medios transmisibles (por imitación, iniciación, comunicación, etc.), aunque no necesariamente explicitables, de controlar una situación y obtener de ella determinado resultado conforme a una expectativa y a una exigencia social. (...) El saber es el producto cultural de una institución que tiene por objeto identificar, analizar y organizar los conocimientos a fin de facilitar su comunicación (...).” (Brousseau & Centeno, 1991, pág. 176)

En el caso del saber matemático, consideramos que los estudiantes en formación inicial, al haber cursado como mínimo 12 años de escolarización previa al ingreso a la Escuela Normal, han participado en diferentes procesos de transposición didáctica del saber matemático que les ha generado ciertas representaciones sobre el mismo, pero a la vez han configurado “ideas erróneas” que requerirán de procesos intencionados de reflexión metacognitiva, así como de un trabajo de transposición didáctica con la

intencionalidad de localizar esas posible ideas erróneas para conflictuarlas, ponerlas en crisis y, cuando sea necesario, transformarlas.

En el caso del saber didáctico, como éste es un saber en construcción, bajo la idea de que los estudiantes apenas van a tener sus primeros acercamientos de manera formal a este tipo de saber, no podríamos hablar, de manera inicial, de un proceso de destransposición del saber, considero que tenemos que hablar de un proceso de destransposición de conocimientos informales que han ido adquiriendo en su paso por la escolarización previa a su ingreso a la Escuela Normal, bajo una premisa semejante a lo que asumimos para el caso del saber matemático: los estudiantes han generado tanto representaciones sobre las formas de enseñanza (al vivenciarlas), como ideas “erróneas” sobre éstas mismas (sin que esto signifique que haya un saber “verdadero” sobre cómo enseñar matemáticas en la escuela primaria), en tal sentido se hace importante que se recuperen estas representaciones sociales y se discutan al confrontarlas con el saber didáctico formal presente en las propuestas curriculares o incluso desde las propuestas didácticas del mismo formador de profesores.

Hecha esta precisión, en lo que sigue vamos a ocuparnos del análisis y presentación de resultados, a partir de las transcripciones de las grabaciones de clase, los planes de clase del formador de profesores y el análisis de los materiales curriculares que fueron utilizados durante el desarrollo de las clases objeto de investigación.

III.1. La emergencia del saber didáctico y su articulación con el saber matemático en el proceso de destransposición.

Como dice la cita con la que iniciamos este capítulo, cuando el enseñante organiza su clase, cuando la planea con una clara intencionalidad didáctica, el proceso de transposición ya hace tiempo que comenzó, ello debemos tenerlo bien claro todos los profesores, y no porque no seamos capaces de hacer alguna propuesta de organización curricular que pueda impactar incluso en el escenario nacional, sino porque a pesar de ello siempre hay una transposición previa, derivada del proceso de selección de los temas y/o contenidos elegidos en el proceso de formación inicial del profesor de matemáticas.

Para nuestro caso, la selección del saber a enseñar es una responsabilidad de la Secretaría de Educación Pública, consignada en la Ley General de Educación y el artículo 3º. Constitucional. En tal sentido, se diseñan a nivel nacional el Plan y los programas de la asignatura de matemáticas, o más concretamente para la Licenciatura en Educación

primaria, los cursos correspondientes al II y III semestres, denominados Matemáticas y su enseñanza I y II; como ya hemos comentado en capítulos anteriores, la formación del profesor de matemáticas para la educación primaria es una formación generalista (Cfr. Anexo 3. Plan de estudios 1997) que contempla cursos semejantes a los que se trabajan en la Escuela primaria, los cuales en su denominación se hacen acompañar del complemento “y su enseñanza”, bajo la perspectiva de que se trabaje el contenido, pero vinculado a cómo se enseñaría en la escuela primaria.

Ahora bien, ¿Se logra esta articulación entre el saber matemático y el saber didáctico? ¿Cómo y de qué manera? ¿Qué diferencias apreciamos entre los planteamientos curriculares y su concreción práctica en los salones de clase? ¿Qué consecuencias acarrea para el caso de la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas? ¿Cuáles representaciones sobre matemáticas y sobre la enseñanza de matemáticas se aprecian en los procesos formativos? En los programas oficiales ¿se presenta algún proceso didáctico sugerido para orientar posibles procesos de destransposición del saber? ¿En la planeación de los formadores de profesores se puede apreciar esta intencionalidad? En caso afirmativo ¿qué características presentan estos procesos? Estas preguntas iremos aclarándolas a lo largo de este capítulo, siempre buscando la articulación entre los datos que tenemos y las perspectivas teóricas que nos orienten al respecto.

III.1.1. Procesos planeados para el aprendizaje de las fracciones, negociaciones de sentido y tipo de representaciones asociadas.

Decíamos en los párrafos anteriores que los programas oficiales son una responsabilidad de las autoridades educativas a nivel nacional, en tal sentido ¿los formadores de profesores los siguen al pie de la letra? ¿qué tipo de modificaciones les hacen? ¿Cuáles son las intencionalidades que guían estos cambios?

Definitivamente en la “puesta en textos de saber” se articula no sólo la intencionalidad didáctica inmediata del formador, en esencia se va construyendo una didáctica específica del proceso formativo, misma que no es posible poner por escrito, con toda la profundidad que se requiere y mucho menos si no se acompaña este proceso de momentos reflexivos que sinteticen y den seguimiento a lo acontecido en cada una de las sesiones.

Cuando afirmamos la posibilidad de la construcción de una didáctica específica, de entrada asumimos un posicionamiento activo de los formadores de profesores para la enseñanza de las matemáticas y al mismo tiempo reconocemos explícitamente que los programas oficiales son guías para el formador, pero en el mismo proceso de transposición sufren transformaciones que es necesario reconocer y analizar; considero que esta necesaria vigilancia epistemológica obedece a la necesidad de clarificar el tipo de profesor que estamos formando, pero sobre todo tenemos que ser conscientes de las consecuencias de nuestro proceso formativo.

Si a lo largo de la escolarización previa de los docentes en formación, no tuvieron la oportunidad de “vivir” escenarios para la destransposición del saber, asumo que en la formación inicial no sólo deben vivirse, sino que deben ser intencionalmente planeados de tal manera que cuando egresen de la institución formadora se vayan con la menor cantidad de errores conceptuales; este proceso de revisión debe ser un proceso de reflexión metacognitiva que les permita a cada uno de ellos tomar control de su propio proceso formativo, sobre todo si consideramos que la toma de decisiones al momento de su trabajo didáctico es individual.

En tal sentido, ¿de qué manera se plantea curricularmente el proceso de aprendizaje para la enseñanza de las fracciones en la escuela normal? Como hemos venido apreciando, la focalización de la mirada analítica está puesta en las sesiones de clase en las que se trabajó el tema de las fracciones; al hacer una revisión del programa oficial de matemáticas, nos damos cuenta que el tema se trabaja en el curso de Matemáticas y su enseñanza II, correspondiente al III semestre de la Licenciatura, es el bloque II, titulado “Los números racionales”.

En el programa de la asignatura, desde la introducción al tratamiento de este bloque se define el sentido del mismo, después de haber aclarado algunos de los problemas básicos de la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria (su poco uso, la introducción prematura del simbolismo y algunos de los errores que comenten los alumnos tanto al interpretarlas como al operar con ellas), en los siguientes términos:

“...el trabajo de contextualizar las fracciones es uno de los retos que plantea el estudio de esta noción. Es necesario diseñar situaciones en las que las fracciones, sus relaciones y operaciones cobren sentido como herramientas útiles para resolver determinados problemas”. (SEP, 2004, pág. 73)

Como apreciamos desde esta primera afirmación, ya le están asignando una tarea tanto al formador de profesores como a los estudiantes: “contextualizar las fracciones”; no podemos dejar de notar la coincidencia entre este planteamiento curricular oficial y “los diferentes roles del maestro” asignados por Brousseau en un texto del mismo nombre; él lo recupera de la siguiente manera

“El matemático no comunica sus resultados tal como los ha hallado; los reorganiza, les da la forma más general posible; realiza un “didáctica práctica” que consiste en dar al saber una forma comunicable, descontextualizada, despersonalizada, atemporal.

El docente realiza primero el trabajo inverso al del científico, una recontextualización y repersonalización del saber: busca situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar. Pero, si la fase de personalización ha funcionado bien, cuando el alumno ha respondido a las situaciones propuestas no sabe que ha producido un conocimiento que podrá utilizar en otras ocasiones. Para transformar sus respuestas y sus conocimientos en saber deberá, con la ayuda del docente, redespersonalizar y redescontextualizar el saber que ha producido, para poder reconocer en lo que ha hecho algo que tenga carácter universal, un conocimiento cultural reutilizable” (Brousseau G. , 1994, pág. 65)

En esta coincidencia apreciamos varias cuestiones que pueden derivarse: a) para el formador de profesores.- la contextualización y diseño de situaciones de aprendizaje con el tema de las fracciones; b) para los docentes en formación.- la descontextualización de lo aprendido para integrarlo en una estructura generalizable que les permita construir un esquema y estilo de docencia propio para la enseñanza de las fracciones, pero a la vez un proceso de contextualización y diseño o selección de situaciones de aprendizaje al nivel de los alumnos y de acuerdo a cada grado escolar.

Es precisamente en este tipo de tareas donde cobra mayor sentido la reflexión metacognitiva de los estudiantes para poder rectificar los conocimientos mal aprendidos o aprendidos de manera superficial, de tal manera que todo este trabajo de contextualización y descontextualización les permita destransponer sus saberes, al entrar en conflicto con las diversas situaciones que se les presenten.

El mismo programa de estudios continúa precisando el carácter del curso, en los siguientes términos

“El análisis de las situaciones en que se utilizan las fracciones lleva a identificar distintos significados de esta noción: las fracciones pueden expresar una cantidad que se forma dividiendo un todo en partes iguales y tomando cierto número de partes (compré $\frac{3}{4}$ de metro de listón”), pueden expresar una razón entre dos cantidades (el precio actual de la canasta básica es una vez y media el anterior), pueden expresar el resultado de una división (el resultado de dividir 3 entre 5 es

3/5), pueden, finalmente, expresar una transformación multiplicativa (el número que multiplicado por 3 da como resultado 5, es 5/3)." (SEP, 2004, pág. 73)

Como apreciamos en esta cita, son cuatro los tipos de situaciones que resalta el programa como principales para identificar los distintos significados de esta noción: la relación parte todo, razón, como cociente (el resultado de una división) y como operador multiplicativo; nos pareció necesario recuperar este aspecto básico porque de una u otra forma es el planteamiento curricular oficial, en tal sentido se convierte en un parámetro para precisar el carácter de la transposición que opera en los salones de clase y en su caso, analizar la distancia que media entre el diseño y lo realmente ejecutado.

En el curso de matemáticas y su enseñanza II, que como ya habíamos aclarado, es donde se trabaja el tema de los números racionales, se plantea que se le dediquen 34 horas aproximadamente, durante el semestre; aunque es importante aclarar que, como veremos más adelante, aparte de las fracciones se trabaja el tema de los números decimales en el mismo bloque.

El tratamiento temático corresponde al bloque II del programa (de un total de 4 bloques) y de manera explícita plantea los siguientes propósitos y contenidos temáticos (SEP, 2002, págs. 19-20):

Tabla 19: Propósitos y temas del bloque "Los números racionales"

Propósitos del bloque	Temas
1. Conozcan los diferentes significados que puede tener una fracción y los problemas que se generan con ellos.	• Las fracciones como expresiones de una cantidad y como medidas. (Paquete didáctico. Segunda parte, pp. 18-27 y 31-52.)
2. Utilicen adecuadamente las fracciones y los números decimales, al comunicar o interpretar cantidades o al operar con ellos.	• Los decimales como expresiones de medidas. (Paquete didáctico. Segunda parte, pp. 55-59 y 63-67.)
3. Reflexionen sobre la estructura algebraica de los números racionales.	• Las fracciones como resultado de una división. (Paquete didáctico. Segunda parte, pp. 87-96.)
4. Conozcan los aspectos relativos a las fracciones y los decimales que se estudian en cada grado de la escuela primaria.	(Paquete didáctico. Lecturas, pp. 177-191.)
5. Conozcan, prevean y comprendan algunos errores frecuentes que cometen los niños al trabajar con las fracciones.	• Fracciones y decimales como operadores multiplicativos. (Paquete didáctico. Segunda parte, pp. 68-83.)
	• Los contenidos de fracciones y decimales a lo largo de la escuela

	primaria. (Paquete didáctico. Segunda parte, pp. 27-29, 52-54, 60-62 y 84-86.) • Dificultades, procesos y errores frecuentes; noción de obstáculo epistemológico. (Paquete didáctico. Segunda parte, p. 30.) (Paquete didáctico. Lecturas, pp. 159-175.) • Análisis de situaciones didácticas. Conocimientos implícitos y explícitos. (Paquete didáctico. Segunda parte, pp. 96-97.) • Sesión de observación y práctica. (Diseño de plan de clase, experimentación y análisis.)

Como apreciamos desde este comparativo, el centro está puesto en la construcción de los diferentes significados de las fracciones, su tratamiento didáctico a lo largo de la escuela primaria y el diseño y análisis de situaciones didácticas adecuadas a la escuela primaria.

Este cuadro nos servirá de referente para poder analizar el proceso de transposición efectivamente realizado, motivo por el cual a continuación vamos a revisar cómo se realizó la planeación del profesor titular de la asignatura, qué tanto se acercó o alejó de la propuesta oficial, a qué se pueden atribuir estas decisiones, etc. ello con la finalidad de apreciar las representaciones sociales que se evidencian, pero sobre todo las oportunidades para la destransposición.

III.1.2. Transformación del texto de saber, un proceso que permite fortalecer el saber didáctico.

El proceso de transposición didáctica conlleva un proceso de transformación del texto de saber, de la progresión curricular propuesta a la concreción del aula, y en ese tránsito media un contrato didáctico implícito que le confiere sentido a las acciones; en este sentido llama la atención que desde la presentación misma del proyecto de trabajo para el

tema de las fracciones, el profesor hace explícito un tipo de contrato didáctico al cual se adhiere, en los siguientes términos³⁸

Presentación/Premisas básicas del curso

Desde la Teoría de las Situaciones Didácticas se promueve una “enseñanza por adaptación” que Brousseau sintetiza de la siguiente forma: “La concepción moderna de la enseñanza le demanda al maestro provocar en el alumno las adaptaciones necesarias, a través de una elección razonada, de los problemas que él propone” (Brousseau, 1998:59)

Considerar lo anterior (“provocar en el alumno las adaptaciones necesarias”) precisa que los profesores en formación adviertan la necesidad de atender varias condiciones indispensables, en primer lugar, que los niños acepten los problemas propuestos, más claramente, que reconozcan el problema a resolver. Lo que significa que acepten, desde el inicio, comprometerse en una actividad matemática de reflexión –y de acción– a fin de poder disponer de tentativas de respuesta, que los alumnos acepten además difundir –explicar a otros las estrategias propias y confrontarlas con las de otros alumnos– sus intentos y aproximaciones a la solución del problema planteado, que corroboren su validez, que produzcan (si se llega a esto) una solución, que ésta sea el resultado de momentos de cooperación con sus pares. Este proceso, en el cual la responsabilidad de la producción de una respuesta o solución de un problema es transferido del profesor a los alumnos, recibe el nombre de devolución. Brousseau define este proceso así: “La devolución es el acto por el cual el enseñante hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctico) o de un problema y acepte él mismo las consecuencias de esta transferencia” (Brousseau, 1998:303) Y esto se da en el contexto de un contrato didáctico.

El contrato didáctico que en sus declaraciones se pretende configurar, es un contrato que devuelve la responsabilidad a los alumnos para con su propio proceso formativo, es decir, les hace aceptar la responsabilidad de una situación de aprendizaje, pero además, como formador de profesores se tiene que asumir las consecuencias de esa transferencia; en el curso del análisis de las clases tendremos oportunidad de apreciar cómo se va logrando este tipo de contratos didácticos, sobre todo porque en la cotidianeidad de las clases es común que los estudiantes esperen de sus profesores todas las respuestas a sus planteamientos, lo cual, traducido al escenario de la formación de profesores, se aprecia en la búsqueda de las metodologías más adecuadas para la enseñanza, pero no en un proceso constructivo de discusión sino más bien en un proceso de transmisión directa, con la esperanza de que se les “enseñe a enseñar”.

Cuando el profesor habla de un contrato didáctico, también se está refiriendo a que

³⁸ Las citas que se retoman todas corresponden al documento interno, presentado como proyecto de la asignatura Matemáticas y su enseñanza II, en particular el apartado “Los números racionales”, del profesor sujeto de la investigación. Anexo 6. Proyecto de asignatura: bloque II. Los números racionales

Tal contrato “estipula” -de manera implícita, por supuesto- que en situación escolar el profesor organiza y construye un medio que revela más o menos claramente su intención de enseñar un cierto saber a los alumnos, pero que disimule u “oculte” suficientemente este saber y la respuesta esperada, a fin de que los alumnos no puedan obtenerla más que por una adaptación al problema planteado (Brousseau, 1998: 302) Esto conlleva, además, que el profesor acepte que los alumnos movilicen –mediante la memoria didáctica- conocimientos anteriores, algunas veces erróneos o inapropiados. Todo esto precisa ser analizado por los estudiantes normalistas, en tanto se trata de un saber didáctico prácticamente ineludible en la compleja, tanto como emocionante tarea de convertirse en profesor. (El problema es que los jóvenes normalistas a veces identifican lo complejo, pero no lo emocionante de la tarea de enseñar)

En la concreción de este contrato didáctico se aprecia la idea de que los alumnos aprendan “por adaptación al medio”, entendiendo éste como las situaciones problema que dotan de sentido a los aprendizaje. El análisis de la organización del medio didáctico nos proveerá de los elementos necesarios para caracterizar las representaciones sociales que se manifiestan, ya no en lo deseable, sino en los hechos; por un lado, la forma de “preparar el medio”, es decir, las consideraciones que toma el formador de profesores, la valoración de conocimientos previos que haga, la progresión didáctica (entendida como el proceso y la secuencia de situaciones que organice), los materiales de que disponga, la forma de organizar al grupo y el tipo de participación que les dé, son un indicador de su representación sobre el tipo de profesor que se forma, en el caso que nos ocupa, incluso indican los elementos que se consideran importantes como conocimiento fundamental para la enseñanza de las matemáticas (y de la fracciones en particular) en la escuela primaria; por otro lado, las interacciones entre los tres polos básicos del triángulo didáctico (maestro, alumno y saber) son el escenario para la configuración de nuevas representaciones, en tanto asumimos que es en el intercambio comunicativo y en la interacción social el escenario para la configuración de éstas.

Como apreciamos también en la cita anterior, se denota mucha claridad respecto al papel del profesor en el proceso de aprendizaje; me llama la atención la intencionalidad de que *“el profesor acepte que los alumnos movilicen –mediante la memoria didáctica- conocimientos anteriores, algunas veces erróneos o inapropiados”*, y es que es precisamente en este momento donde se construyen las oportunidades para la destransposición del saber, dado que en la medida en que los formadores de profesores tengan claro los posibles errores conceptuales de los docentes en formación, su función de ayuda será más aceptable, lo cual a su vez es el camino para la configuración de las

estrategias didácticas pertinentes para, intencionalmente, movilizar saberes y lograr destransponerlos.

Aquí la pregunta que me surge es si tiene que ser “mediante la memoria didáctica³⁹”, sobre todo porque ésta hace referencia a la recuperación de saberes compartidos, es decir, la memoria didáctica se da en el momento en que, en una situación de clase, el profesor remite a que los alumnos recuerden procedimientos de resolución de problemas o bien pasajes de clases que con anterioridad han tenido, pero siempre y cuando ambos estuvieran presentes; en términos coloquiales sería decir: *“se acuerdan que esto lo vimos en la clase tal, y se acuerdan que dijimos que para resolverlos teníamos que hacer...”*; en tal sentido, en el proceso de movilización de conocimientos anteriores, las mismas situaciones didácticas diseñadas ex profeso deben contribuir a lograrlo y en este proceso, puede recuperarse la memoria didáctica, pero a la vez puede ser que el conflicto se dé inherente a la situación problemática que el estudiante tenga que resolver. En este juego de situaciones es donde el estudiante tiene que reconocer errores o conocimientos inapropiados y buscar la movilización o ajuste a los conocimientos formales.

Ahora bien, ya que hemos caracterizado el posicionamiento didáctico del formador de profesores, vamos a caracterizar la progresión didáctica (Véase anexo 8) que propone para el tratamiento del tema de “Los racionales” y dentro de ésta, las situaciones didácticas específicas para el tema de “Las fracciones” que, como hemos apreciado en toda la tesis, es el tema principal.

De la revisión del mismo documento interno, el proyecto de su asignatura, apreciamos una clara intencionalidad por articular tres elementos básicos en el proceso de formación de profesores: a) el estudio del conocimiento matemático y del saber didáctico; b) el estudio de los materiales para la enseñanza; y c) el diseño, desarrollo y análisis de situaciones didácticas.

Respecto al primer elemento, el profesor lo clarifica de la siguiente manera:

La naturaleza de los conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas que deben poseer los profesores en formación en este curso se orienta por los conceptos que ya se han trabajado en el semestre anterior (Enseñanza de las matemáticas I): Situación didáctica (fases de acción, formulación, validación e institucionalización), momentos adidácticos, contrato didáctico, devolución, tiempo didáctico, regulaciones, variables didácticas, memoria didáctica. Habría

³⁹ Concepto recuperado desde el Anexo 6. Proyecto de asignatura: bloque II. Los números racionales

que precisar que esta perspectiva no está explícita en el curso que la SEP propone, más bien se trata de una transposición que estamos explorando en la Normal, y que, al parecer, ha permitido que los estudiantes focalicen con mayor precisión los fenómenos a que da lugar la comunicación de un saber y puedan, por tanto, “analizar su práctica” más allá de la mera descripción o las afirmaciones genéricas del tipo: “Los niños al inicio tenían dificultades para comprender pero ya luego hice las correcciones necesarias y, al final, todo resultó favorablemente”. Pero esto ya se argumentó en el curso del semestre anterior. Ahora se utilizará tal saber didáctico como un utillaje (Bourdieu, 1995) para trabajar el tema de las fracciones.

Dos comentarios sobresalen de este posicionamiento, el primero tiene que ver con la afirmación de que “esta perspectiva no está explícita en el curso que la SEP propone, más bien se trata de una transposición que estamos explorando en la Normal”, en tal sentido hay que ver cómo se articula con los posicionamientos oficiales y en qué medida es más adecuado para la formación de profesores, en el entendido de que se pretende aportar un marco discursivo para nombrar y explicar los fenómenos didácticos que acontecen en el salón de clase.

En segundo lugar, al utilizarse estos conceptos como “utillaje”, se plantea la posibilidad de que sean herramientas para el análisis del tema de las fracciones y a la vez se aprecia la idea de que tal “utillaje” les sirva tanto en las clases de la escuela normal, como en el análisis de las clases en la escuela primaria.

El análisis sobre el saber matemático, desde sus mismas afirmaciones, se concreta dado que

En ciertos momentos el saber matemático constituye un saber para accionar, formular, validar, institucionalizar, para memorizar, regular o devolver. El saber matemático a veces se analiza en los exámenes, en los libros de texto, en problemas para resolver y a veces para analizar. El saber matemático también conlleva para los profesores en formación, la necesidad de modelizar situaciones de aprendizaje, o bien, de analizar, las SD que han construido otros, y someterlas a prueba, con sus correspondientes adecuaciones, si fuera el caso.

Como veremos más adelante, estas afirmaciones cobran sentido al hacer objeto de análisis el saber matemático desde los libros de texto, no sólo los textos nacionales, sino también los textos internacionales (de Francia, por ejemplo), tanto los vigentes actualmente como algunos textos antiguos. Se manifiesta también una intencionalidad de estudiar matemáticas al resolver problemas e incluso al analizarlos.

Una tercera dimensión del saber matemático se manifiesta en la declaración de que los estudiantes deben “modelizar” situaciones de aprendizaje, es decir, la idea es que aprendan a diseñar situaciones de aprendizaje en congruencia con el saber matemático que se quiera trabajar; sin embargo, la visualización de posibles complicaciones lo lleva a pensar en la necesidad de *“analizar las SD que han construido otros y someterlas a prueba, con sus correspondientes adecuaciones...”*.

En tal sentido, los tres elementos básicos a los que se refiere el profesor, y que rescatamos en líneas anteriores, se encuentran interrelacionados, esto es, en la medida en que los estudiantes comprenden a profundidad los conocimientos fundamentales (saber matemático), estos se convierten en un instrumento que les permite tanto modelizar situaciones de aprendizaje como analizar las propuestas de otros autores, dentro de las cuales están las propuestas por los materiales oficiales.

A todo esto, el profesor le llama “cambio de estatuto del saber” y reconoce que *“diseñar un curso implica prever los sucesivos cambios de estatuto que llevan a la progresión del tiempo didáctico”*, es decir, prever la manera en cómo se concibe el saber matemático y su presencia como instrumento para el diseño y el análisis de los procesos de aprendizaje.

Dicho lo anterior, en el siguiente cuadro comparativo retomamos la secuencia de contenidos que plantea el programa de la asignatura Matemáticas y su enseñanza II y lo relacionamos con la lógica de las sesiones que trabajó el profesor:

Tabla 20. Comparativo entre la propuesta curricular y la progresión didáctica del profesor.

Propuesta curricular, Plan 1997.	Progresión didáctica del profesor.
	Actividad de evaluación: examen de conocimientos al inicio del tratamiento del bloque y una evaluación final
	Exploración de conocimientos previos, mediante preguntas diseñadas ex profeso.
Las fracciones como resultado de una división.	Actividad “repartos de pastel”
Las fracciones como resultado de una división. Los contenidos de fracciones y decimales a lo largo de la escuela primaria.	Ubicación del tema “el reparto” en los libros de texto oficiales.
Análisis de situaciones didácticas. Conocimientos implícitos y explícitos.	Análisis del registro escrito de una clase de fracciones: mitades de mitades.
Análisis de situaciones didácticas. Conocimientos implícitos y explícitos.	Variable didáctica

Sesión de observación y práctica. (Diseño de plan de clase, experimentación y análisis.)	Preparación para la práctica: análisis y rediseño de situaciones didácticas ⁴⁰ .
	Análisis posterior a la práctica.
Análisis de situaciones didácticas. Conocimientos implícitos y explícitos.	Análisis de clase en video: las de los estudiantes.
Las fracciones como resultado de una división.	Las fracciones: partes de partes.
Las fracciones como expresiones de una cantidad y como medidas. Las fracciones como resultado de una división. Fracciones y decimales como operadores multiplicativos.	Diferentes sentidos de las fracciones.
Los contenidos de fracciones y decimales a lo largo de la escuela primaria.	Análisis curricular: textos vigentes.
Los contenidos de fracciones y decimales a lo largo de la escuela primaria.	Análisis curricular comparativo: textos antiguos, vigentes y extranjeros.
Las fracciones como expresiones de una cantidad y como medidas. Las fracciones como resultado de una división. Fracciones y decimales como operadores multiplicativos.	Lectura de textos: Los números racionales como conocimiento a enseñar.
	Significados de las fracciones: ejemplificación por parte de los estudiantes.
	Lectura y análisis del Texto “Las fracciones: mecanismos constructivos y formas de presentación” (<i>escrito por el profesor</i>)
Los contenidos de fracciones y decimales a lo largo de la escuela primaria.	El saber matemático en los libros de texto: suma y resta de fracciones; equivalencias.
Los contenidos de fracciones y decimales a lo largo de la escuela primaria.	Análisis curricular: suma, resta, comparación y equivalencia.
Análisis de situaciones didácticas. Conocimientos implícitos y explícitos.	Juegos con fracciones: dominó, Del cero al uno, ¿quién se acercó más?
Fracciones y decimales como operadores multiplicativos.	Las fracciones como operadores multiplicativos
Las fracciones como expresiones de una cantidad y como medidas. Las fracciones como resultado de una división. Fracciones y decimales como operadores multiplicativos.	Operador y razón. Diseño de situaciones problema.

Es fácil apreciar que si comparamos la progresión que plantea el programa oficial para la formación de profesores y que recuperamos íntegro el apartado correspondiente al bloque de “Los números racionales” (Véase Tabla 19), con la secuencia que organizó el profesor, vemos que hay una transformación en el orden del tratamiento de los temas, además de que en algunas de sus actividades podemos notar el tratamiento simultáneo de varios de los temas propuestos; cabe mencionar que el tema de “Los decimales como expresiones de medidas”, que viene incorporado en el mismo bloque, lo trabajó el profesor posteriormente a los temas relacionados con las fracciones, en parte ello obedeció al apoyo

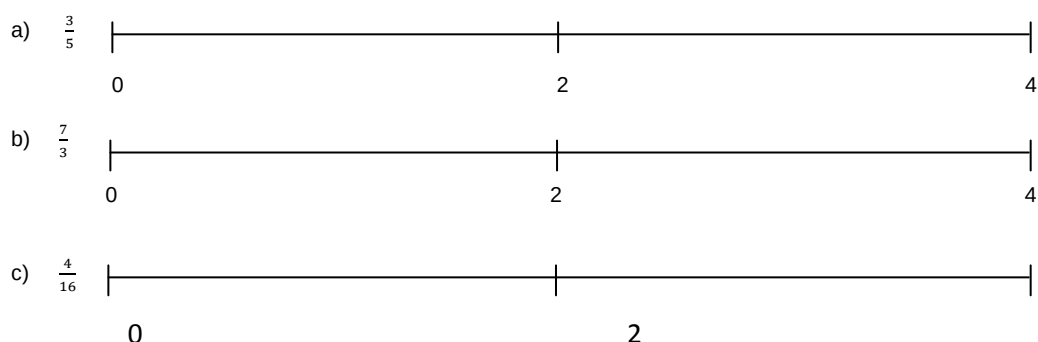
⁴⁰ Ésta y la sesión siguiente, se plantearon como “sesión comodín” en el entendido de que se trabajarían según se presentaran los tiempos agendados para hacer la práctica en la escuela primaria.

brindado para la grabación de las sesiones de clase, objeto de estudio en la presente investigación.

Las sesiones de este bloque inician con una evaluación de conocimientos matemáticos relativos a las fracciones (Cfr. Anexo 6 Proyecto de asignatura: bloque III. Los números racionales), como ejemplo retomamos las siguientes preguntas:

II. Planteé tres problemas, uno que se resuelva mediante una suma de fracciones, otro mediante una multiplicación de fracciones y uno más que se resuelva mediante una división de fracciones.

IV. Indica el lugar que ocupan las siguientes fracciones en la recta numérica



4VI. Escribe un número que se encuentre entre las siguientes fracciones.

$\frac{2}{10}$ ----- $\frac{3}{10}$ **0.53** **0.54** $\frac{15}{100}$ ----- $\frac{16}{100}$
1.8 **1.9** $\frac{25}{100}$ ----- $\frac{26}{100}$

IX. Resuelve los siguientes problemas utilizando la operación correspondiente

1. José Luis va a construir una bandera con $\frac{3}{4}$ de un pliego de cartulina, si $\frac{2}{3}$ de la cartulina que usará deben iluminarse de rojo, ¿cuál es la parte del pliego de cartulina que irá de rojo?

En este momento no nos vamos a detener en el análisis del tipo de preguntas planteadas, sólo queremos resaltar que la evaluación de diagnóstico está centrada en los conocimientos matemáticos de los estudiantes, en cambio la evaluación final adquiere un carácter más personal en términos de sus opiniones o percepciones al término del tratamiento del bloque; como ejemplo recuperamos las siguientes preguntas:

X. Luego del estudio de esta unidad ¿ha cambiado tu percepción sobre las fracciones y los decimales?
 SI NO ¿Porqué?

XI. Luego del estudio de esta unidad ¿te sientes capaz (utilizando los diferentes materiales para el maestro) de enseñar las fracciones y los decimales en la escuela primaria?
 SI NO ¿Porqué?

XII. Marca con una cruz los conocimientos que consideres haber adquirido mayormente durante el estudio de esta unidad.

- a) Conocimientos sobre las fracciones y los decimales ()
- b) Conocimientos sobre la manera en que las aprenden los niños ()
- c) Conocimientos sobre cómo enseñar matemáticas ()
- d) Conocimientos sobre cómo enseñar las fracciones y los decimales..... ()
- e) Otros

XIII. Marca con una cruz los conocimientos que en tu opinión no has adquirido de forma conveniente y que por ello deberán estudiarse en posteriores cursos

- a) Conocimientos sobre las fracciones y los decimales ()
- b) Conocimientos sobre la manera en que las aprenden los niños ()
- c) Conocimientos sobre cómo enseñar matemáticas ()
- d) Conocimientos sobre cómo enseñar las fracciones y los decimales..... ()
- e) Otros

De manera global podemos decir que, después de hacer un análisis de las sesiones de clase del profesor, detectamos que adicionalmente a las actividades de evaluación, son cinco los tipos de actividades que se articulan en su esquema de formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas y en concreto en su esquema de trabajo con el tema de las fracciones:

- Actividades predominantemente matemáticas: las cuales articuladas con los componentes didácticos, traducidos en una proyección hacia el trabajo en el salón de clase (por ejemplo, con preguntas del tipo ¿cómo trabajarías el reparto en la escuela primaria?), fortalecen el saber matemático necesario para la enseñanza. En esta línea apreciamos las actividades, “el reparto de pastel”, “partes de partes”, “operador multiplicativo” y “razón”.
- Actividades de análisis curricular: a partir de la revisión de diferentes libros de texto se pretende que identifiquen el saber en juego presente en ellas, así como el tipo de ayudas que brinda a los niños en el proceso de resolución, e incluso se puede apreciar la idea de hacer un ejercicio comparativo entre diferentes textos para apreciar las ventajas y desventajas de los diferentes planteamientos. Este tipo de análisis comparativo permite apreciar cómo es que las representaciones sociales sobre el saber matemático perviven o bien se han transformado en diferentes épocas; de igual manera este análisis curricular articula el saber matemático con el saber didáctico, en tanto los libros de texto se convierten, muchas de las veces, en el “medio” con el cual interactúan los alumnos en su proceso de aprendizaje matemático. Estas actividades se ven reflejadas en las sesiones donde se analizan los libros de texto de la época de 1960, así como los textos vigentes y los libros de texto del sistema educativo francés (en concreto la lección “Fractions au quotidien” recuperada de Peltier, Briand, Ngono, & Vergnes, 2009, pág. 136)).

- Actividades de análisis de clases en la escuela primaria: aquí cobra relevancia el propósito de que los estudiantes revisen los procesos de aprendizaje del saber matemático en situaciones cotidianas, es decir, el centro sería la relación de las matemáticas y los estudiantes, sus procesos de aprendizaje, errores conceptuales, etc. Sobresalen tres tipos de actividades al respecto, análisis de registros de clase (tanto aportados por el formador de profesores, como las transcripciones de sus propias clases), observación y análisis de fragmentos de videos de clase (donde los conductores de la clase son los mismos estudiantes) y la organización de juegos matemáticos con el tema de fracciones, con la intención de que se pongan en situación de cómo los resolverían los niños.
- Diseño de situaciones didácticas: congruente con el posicionamiento teórico asumido explícitamente (la TSD), se aprecia en su proceso de planeación la intención de que los estudiantes transfieran los conceptos teóricos al diseño y gestión de clases en la escuela primaria y se les prepara explícitamente para ello. En este sentido, se detectan tres tipos de actividades, la primera tiene que ver con el diseño de situaciones didácticas por parte de los estudiantes (o de algunas partes medulares de ésta, como es el diseño de “consignas”), complementario a éstas se trabaja el concepto de variable didáctica, entendida como los posibles cambios que puede tener una situación problema de aprendizaje para generar el conflicto cognitivo, y finalmente tiene una gran importancia la reformulación de situaciones didácticas diseñadas por expertos. Todo esto integra un proceso que va del análisis de situaciones didácticas previamente diseñadas, su reajuste o reformulación, hacia la puesta en práctica en la escuela primaria y su posterior análisis en el salón de clase de la escuela normal.
- Análisis de textos de corte didáctico: complementan la resolución de actividades matemáticas articuladas con el análisis curricular, de tal manera que teóricamente fundamentan el conocimiento especializado sobre el contenido, resaltando los diferentes significados que puede tener la fracción según el contexto de uso. Al respecto son dos tipos de texto los que se pide revisar, texto publicado en libro de circulación nacional (Pujadas & Eguiluz, 2000) y un texto que es una revisión del concepto y sus diferentes significados, por parte del profesor sujeto de la investigación, titulado “Las fracciones: mecanismos constructivos y formas de presentación”.

En este primer acercamiento encontramos similitudes entre los tipos de actividades básicas que articula el profesor en sus procesos didácticos y los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza que plantea (Ball, 2011), sin embargo, antes de hacer alguna afirmación categórica vamos a ir analizando el contenido de sus clases, es decir, la traducción en actos de lo planeado.

III.2. La práctica docente en matemáticas de la Escuela Normal: ¿un escenario para la destransposición?

Hablar de la práctica docente en la Escuela Normal, es hablar de un escenario singular con un ethos particular, al menos para el caso de nuestro país, la formación de profesores sigue siendo encomendada a este tipo de instituciones, las cuales en esencia tienen sólo esta misión⁴¹, formar profesores para la educación básica, o como es el caso de la Escuela Normal donde se realizó la investigación, formar profesores para la educación primaria.

La formación que se brinda está regida por un plan de estudios nacional, en el caso de esta investigación, los alumnos se encontraban cursando el Plan 1997 de la licenciatura en educación primaria, es una formación generalista, donde el conocimiento disciplinario aparece articulado con el conocimiento didáctico⁴², al menos esto se presenta para el caso del programa de matemáticas, donde, a decir de Castro & Curiel (2010),

*“Existen algunas materias, las menos, que trabajan sobre contenidos concretos de enseñanza en la primaria: matemáticas, español, geografía, historia, ciencias naturales y cultura ética y cívica. No obstante, los contenidos de estas asignaturas se integran a su vez, por elementos propiamente disciplinarios y elementos de corte didáctico y pedagógico*⁴³*” y añaden “la asignatura Matemáticas y su enseñanza, impartida en el segundo semestre, sí aborda contenidos matemáticos concretos: problemas, números, operaciones, etcétera. La preparación docente en este tipo de contenidos curriculares, incidirá directamente en la actuación frente a los grupos escolares. En Matemáticas y su Enseñanza II, la instrucción también se centra en contenidos concretos de la enseñanza de las matemáticas” (pág. 18).*

⁴¹ El trabajo de investigación no se encuentra explícitamente dentro de la misión de las Escuelas Normales, aunque en años recientes se ha configurado un discurso tendiente a la conformación de líneas de generación y aplicación innovadora del conocimiento.

⁴² Aunque según los resultados de la investigación de “Análisis de contenido. Licenciatura en educación primaria” (Castro & Curiel, 2010) el conocimiento disciplinario y didáctico no se encuentran equilibrados dentro del plan de estudios, ellos encontraron una marcada tendencia hacia una mayor presencia del conocimiento didáctico, en sus propios términos lo enuncian *“Desde nuestro punto de vista, la nueva circunstancia del plan de estudios, guarda un desequilibrio en el que frente al conocimiento pedagógico, que es un enorme cuerpo de saberes y, sin duda, necesario para los futuros profesores, queda en desventaja el dominio indispensable de las asignaturas y contenidos del plan de estudios de educación primaria, (matemáticas, español, ciencias naturales, historia, geografía, etc.) para la tarea de enseñanza en el aula (pág. 8)”*.

⁴³ El subrayado es mío, no aparece en el original.

Como observamos, en el planteamiento curricular del plan 1997, para la enseñanza de las matemáticas sí se aprecia cierta integración de lo disciplinario con lo didáctico.

En tal sentido, desde estas premisas básicas, la formación generalista encomendada a las instituciones formadoras de profesores y el equilibrio entre conocimiento disciplinario y didáctico que presentan formalmente los dos programas de Matemáticas y su enseñanza, nos surgen una serie de interrogantes sobre la práctica docente en matemáticas de la Escuela Normal, ¿cuáles son las características que tienen los procesos de transposición del saber matemático (en concreto del tema de las fracciones)? ¿Se discute explícitamente el saber común sobre las fracciones que se adquiere en la escolaridad previa como un antecedente para la comprensión del saber especializado sobre el tema? ¿Cuál es el tratamiento didáctico que se le da a los “errores” de los estudiantes durante el proceso de transposición del saber matemático y didáctico? ¿En qué medida el tratamiento de los “errores” contribuye a configurar escenarios para la destransposición? Y en general ¿se configuran escenarios para la destransposición del saber matemático y didáctico en el salón de clase? ¿Con qué elementos podemos caracterizarlos? A lo largo de este apartado vamos a ocuparnos de estas preguntas.

III.2.1. ¿Cuál es el trabajo matemático de formar para enseñar?

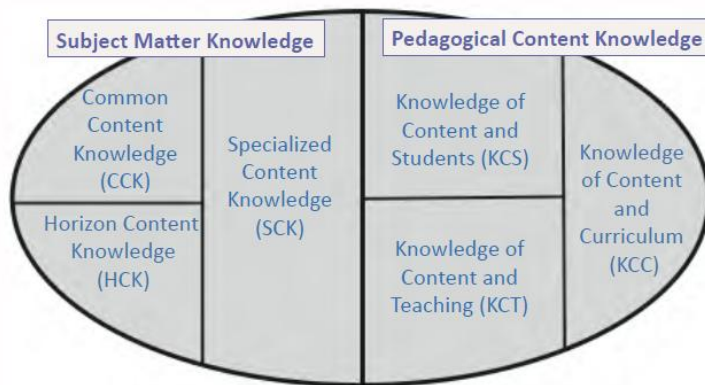
Actualmente se está criticando duramente la formación profesional de los docentes en nuestro país, bajo el argumento de que el conocimiento disciplinar es limitado, en tal sentido, la pregunta que nos hacemos en este apartado es ¿cuál es el trabajo matemático de formar para enseñar?, en esencia desde la pregunta misma planteamos un posicionamiento claro, en la formación de profesores debe estar presente un trabajo matemático que les permita a los docentes en formación comprender de manera profunda las matemáticas fundamentales.

El trabajo didáctico necesario en el proceso de transposición del saber también es un trabajo matemático, en tanto cobra sentido y asume características particulares en función del mismo saber que se quiere que resignifiquen los docentes en formación; en este sentido, desde las grabaciones de clase podemos apreciar un trabajo matemático en un triple sentido: un trabajo a partir del conocimiento común del contenido, otro a partir de la necesidad de ir configurando un conocimiento especializado, en nuestro caso sobre las

diferentes interpretaciones que pueden tener las fracciones, y un tercer tipo de trabajo matemático, más apegado al conocimiento didáctico de las matemáticas.

En tal sentido nos parece muy pertinente la recuperación de la caracterización de los tipos de conocimiento desde el planteamiento de Ball (2011), sintetizado en el siguiente esquema:

Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)

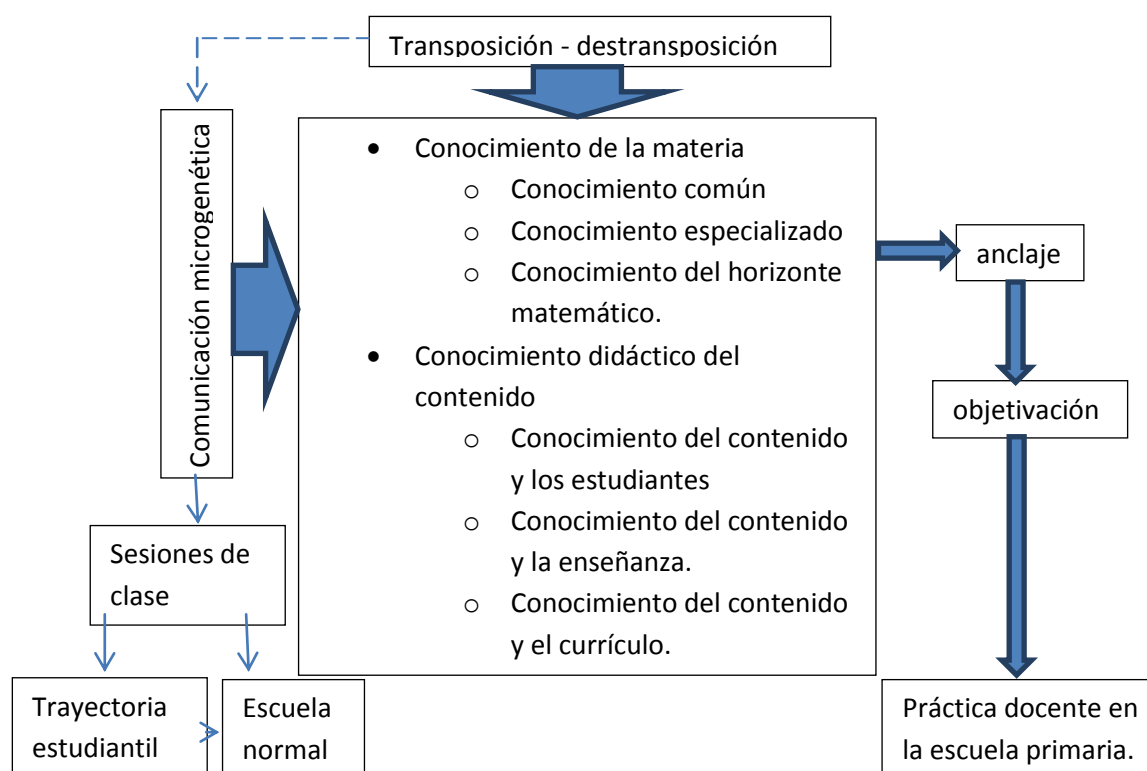


En tanto de una revisión global de las transcripciones de clase podemos ver su presencia en diferentes momentos del análisis, consideramos que nos puede servir como indicador para ir caracterizando las representaciones, es decir cómo es que se presentan los diferentes tipos de representaciones y de qué manera se van modificando en el tratamiento mismo de los diferentes contenidos del bloque “fracciones”.

Además, la articulación de estas categorías con las categorías propias de la teoría de las representaciones sociales, mediadas ambas por el concepto de “destransposición” nos pueden aportar un marco explicativo para interpretar lo que aconteció en la comunicación microgenética de las sesiones de clase de la escuela normal, durante el tratamiento del tema ya indicado.

El siguiente esquema sintetiza lo aquí expuesto:

Esquema 11. Tipos de conocimiento y proceso para la destransposición.



La instauración de la destransposición no consiste en intentar destruir los conocimientos anteriores ni cuestionarlos como erróneos per se, sino más bien en reconocerlos y apoyarnos en ellos para llevar a los estudiantes a conocimientos y prácticas matemáticas más amplias y auténticas, entendiendo por prácticas “amplias y auténticas” aquellas donde el centro de la discusión sea el saber matemático, donde se usen las matemáticas como un lenguaje y una herramienta que se hace necesaria para modelizar y resolver diferentes tipos de problemas. En tal sentido, en las páginas siguientes vamos a introducirnos al salón de clase de la escuela normal, para apreciar cómo se da el proceso de formación docente inicial en matemáticas y de qué manera se configuran los procesos de transposición didáctica, pero intentando sobre todo caracterizar los momentos en los cuales se genera la necesidad de una destransposición.

III.2.1.1. Conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento de un lenguaje didáctico: articulaciones y proceso de destransposición.

Al inicio de este capítulo ya indicábamos que el programa informático Maxqda nos sirvió en el proceso de codificación y categorización de las transcripciones de las 9 clases filmadas donde se trabajó el contenido de fracciones (Véanse anexos 9.1 a 9.9); ahora, para

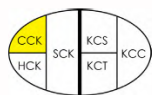
la presentación del análisis de las mismas nos encontramos en la disyuntiva entre, por un lado ir analizando clase por clase, o bien, a partir de una lectura y relectura de las transcripciones, haciendo uso de una comparación múltiple y una triangulación de diferentes elementos (entre diferentes transcripciones de clase, entre diferentes codificaciones de fragmentos de clase, entre éstos y su categorización, contrastándola con aportaciones teóricas, etc.), presentar los resultados en atención a las categorías que pudimos construir.

La decisión se inclinó por esta última opción, es decir, presentar fragmentos de diferentes clases que de acuerdo a su contenido e interpretación, nos ayudaran a ilustrar una categoría; en este apartado vamos a trabajar con tres tipos de conocimientos que se encuentran presentes en las transcripciones de clase analizadas: el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado y el conocimientos de un lenguaje didáctico.

Pretendemos precisar cómo se presentan los procesos de transposición didáctica y en qué momentos se da o puede dar la destransposición, al recuperar las representaciones de los estudiantes y la manera en cómo se manifiestan en las interacciones comunicativas en el salón de clases.

III.2.1.1.1. El conocimiento común del contenido.

Deborah Ball (2011) entiende por conocimiento común del contenido, el conocimiento matemático que cualquier ciudadano tendría, o dicho en sus propios términos *“como el conocimiento que se utiliza en el trabajo de enseñanza de manera similar a la forma en que se utiliza en muchas otras profesiones u ocupaciones que también utilizan matemáticas”* (Hill, Ball, & Schillin, 2008, pág. 377) y lo ilustra con algunos ejemplos: la habilidad para comprender lo que es un cuadrado, por ejemplo o para interpretar y resolver una división de fracciones



**Common content
knowledge (CCK)**

Calculate:

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{3}$$

En el dominio del conocimiento común no se le exige a los sujetos que sean capaces de explicar “las reglas ciegas” o los pasos ocultos en el procedimiento, incluso en ocasiones ni siquiera explicar el por qué funciona tal o cual algoritmo, simplemente se sabe calcular usándolo; habitualmente el conocimiento común se aprende en prácticas de enseñanza caracterizadas por la ostensión, en las cuales el maestro expone-explica un procedimiento y los alumnos, después de mucha práctica, logran dominarlo.

Ahora bien, si los estudiantes tienen como antecedente este tipo de prácticas (estamos partiendo de una generalización difícil de comprobar⁴⁴ en tanto los estudiantes que ingresan a la escuela normal provienen de diferentes partes del Estado de Zacatecas e incluso de estados vecinos, con lo cual obviamente que también han cursado diferentes tipos de bachillerato), ¿de qué manera interactúan en el salón de clase cuando se les pide que recuperen conocimientos previos? ¿Qué tipo de conocimiento común ponen en práctica al resolver las situaciones problema que se les plantean? ¿Cuál es el nivel de exigencia matemática que les plantean a los estudiantes? ¿Qué tipo de dificultades manifiestan y qué tipo de errores cometen? ¿De qué manera se logra generar momentos para el conflicto y la destransposición del saber?

Para ejemplificar el uso del conocimiento común que se hace en las clases analizadas, vamos a retomar 3 actividades, correspondientes sucesivamente a la 3ª, 7ª y 8ª clases grabadas.

- **Situación didáctica “Partes de partes”.** Corresponde a la 3ª. Clase grabada, ésta se planteó de la siguiente manera:

*Mo. No, la mitad de una canica, no, canicas, pero hoy vamos a ver un aspecto distinto de esos repartos, hoy lo que se está repartiendo aquí no es una unidad completa, fíjense, lo que vamos a ver hoy es saber cómo se toman partes de otras partes*⁴⁵, por ejemplo queremos ver la mitad de $1/3$, ¿cuál será la mitad de $1/3$?

Aa. $1/6$

Mo. ¿Qué es lo que vamos a ver aquí?, incluí $1/3$ en todas las fotocopias, por cierto se los pasé al colectivo

Aa. Dulce las tiene

Ao. Quédate aquí con la mía

Mo. Sirve que nos dices, si

Ao. Es que a unas no les entendí

⁴⁴ Aunque en un trabajo de investigación anterior, cuando exploramos los “recuerdos y expectativas” de los docentes en formación, en torno a su escolarización previa, un 78.37 % de los entrevistados, manifestó en sus declaraciones recordar clases donde los procedimientos algorítmicos eran la forma común de enseñanza. (Lizarde, 2005, pág. 121)

⁴⁵ Los subrayados son míos, en éste y en los sucesivos fragmentos, con la intención de resaltar aspectos básicos del registro.

Mo. A ver permítanme, vamos a contestar este ejercicio, pero esta es una actividad previa, después de eso vamos a ver una ficha que traigo para ustedes, que son algunos problemas con diferentes características, las leemos que son 2 hojitas prácticamente y luego vamos a analizar los libros de texto, lecciones del libro de texto y luego al final de clase, espero que nos quede tiempo para jugar a una versión distinta de dominó con fracciones, aquí una vez jugamos con dominó, lo que vamos a ver hoy es una versión distinta a lo que vimos en clase, entonces esto es una actividad previa, es como la preparación del medio, a qué horas empezamos, a ver veamos la lección que tenemos ahí, y luego a ver, Jorge, lea la pregunta y denos la respuesta y vamos discutiendo aquí los demás

J.- ¿qué parte de la pregunta?

Mo. Si la pregunta y...

J.- ¿Qué parte del terreno se dedicó a la siembra del maíz? (CP 3)

Como apreciamos en el registro, esta actividad se había encargado previamente, de tarea, en tal sentido, al iniciar esta sesión de clase se considera como una “preparación del medio” para el análisis de los libros de texto, es por ello que comienza pidiéndole a un alumno que lea la pregunta y dé la respuesta, sin embargo cuando el estudiante sólo lee la pregunta, el profesor le pide que lo haga desde el principio, es decir, desde el inicio de la actividad.

Antes de avanzar en el análisis, es importante aclarar que estos problemas son recuperados del Taller Nacional “La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria” (Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila, 1999), texto básico para la formación de profesores de matemáticas, según la propuesta del plan de estudios 1997; corresponden a la Actividad 5 “partes de partes”, del Tema 2 “Las fracciones en la medición”, tal como podemos ver en las siguientes imágenes:

Actividad 5

Partes de partes

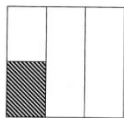
Los problemas en los que se aplica una fracción a otra fracción ayudan a profundizar en el significado de la fracción como partes de unidades.

1. Resuelva el siguiente problema:

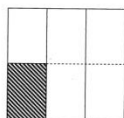
La tercera parte de un terreno se dedicó a la siembra. De esta parte, en la mitad se sembró maíz.

¿Qué parte **del terreno** se dedicó a la siembra del maíz? _____

2. Observe la siguiente resolución gráfica al problema anterior y verifique si su respuesta fue correcta.



Parte dedicada a la siembra del maíz.



La parte dedicada al maíz es $\frac{1}{6}$. Para saberlo, se dividió el terreno en partes iguales.

3. Resuelva los siguientes problemas. Procure utilizar dibujos para resolverlos.

a) Un alambre que mide $\frac{2}{3}$ de metro, se parte a la mitad. ¿Qué fracción de metro mide cada parte? _____

b) Se usó un cuarto de un pliego de cartoncillo para hacer una bandera. La tercera parte de ese cuarto, se pintó de rojo. ¿Qué fracción del pliego de cartoncillo se pintó de rojo? _____

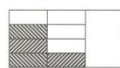
40

Taller para el maestro

c) El jardín de una casa ocupa $\frac{3}{5}$ del terreno. En $\frac{2}{3}$ del jardín hay pasto. ¿Qué fracción del terreno tiene pasto? _____

d) La mitad de una pared se cubrió con mosaicos, unos lisos y otros con dibujo. Los mosaicos con dibujo abarcan $\frac{1}{3}$ de la pared. ¿Qué fracción del total de los mosaicos tienen dibujo? _____

4. ¿Qué fracción de cada una de las siguientes superficies está sombreada?



5. Sombree las fracciones de superficie que se indican, utilizando las subdivisiones de las figuras.



$\frac{1}{6}$ de la superficie



$\frac{4}{15}$ de la superficie



$\frac{5}{12}$ de la superficie

Un maestro hizo esta pregunta en clase: "Si tomo un avión y voy al norte, luego al sur, después al este y luego al oeste, ¿cuántos años tengo?"
-Usted tiene 44 años- replicó un muchacho.
-Exactamente- dijo sorprendido el maestro, pero ¿cómo lo supiste?
-Muy fácil- contestó el alumno. -Tengo un hermano que tiene 22 años y está medio loco-.

MATEMÁTICAS **41**

El propósito de la actividad es que los alumnos profundicen en el significado de la fracción como partes de unidad, al complejizarlo más allá del clásico reparto, en el cual se da una unidad de referencia y se les pide que lo dividan según un denominador indicado y coloreen según lo que les pida el numerador, en una representación gráfica, habitualmente circular y ya dividida en las partes que indica el denominador del ejercicio propuesto. En esta actividad, a partir del planteamiento de problemas, los estudiantes pondrán en juego su conocimiento común sobre el contenido, que se encuentra implícito y nos remite a la multiplicación de fracciones; es decir, trabajar con "partes de partes" indirectamente nos orienta hacia la multiplicación de fracciones, sin embargo en esta actividad se les pide a los estudiantes que "procuren utilizar dibujos para resolverlos".

Notemos la estructura de la secuencia de actividades: el primero y el problema 3.a utilizan el mismo rango de fracciones (tercios y medios); en el punto 2 de la actividad se sugiere la estrategia de resolución y se solicita que la utilicen, tal pareciera que implícitamente se está sugiriendo que el tratamiento didáctico del tema debe pasar por estrategias informales, con el recurso a una representación icónica.

Mo. La idea es que dice, procure utilizar dibujos para resolverlos, ¿hizo algún dibujo para resolverlo?

L.- Profe ahí no le entendí, la 2ª

Ao. Yo hice un dibujo

Mo. A ver dibújelo acá en el pizarrón, ¿A ver cómo le hizo usted?

Alumno pasa al pizarrón

Mo. Dice utilizar dibujo, la idea es que vamos a profundizar con los recursos gráficos, ¿cómo le hizo?

Ao. Hice una recta y luego lo dividí en 3, y coloree arriba, pero los 2/3

Como vemos, las sugerencias de los materiales curriculares se fortalecen en la conducción de las actividades por el profesor.

En general el rango de las fracciones utilizadas va de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{6}$ en el planteamiento de los problemas, aunque en la resolución se amplía a doceavos y quinceavos.

Ahora bien, ¿cómo se puso en práctica el conocimiento común del contenido en esta actividad?, para ello veamos lo que pasó en el siguiente fragmento de registro, cuando en la secuencia de la actividad los alumnos se enfrentaron al problema “3-d”, con mayor dificultad que los anteriores:

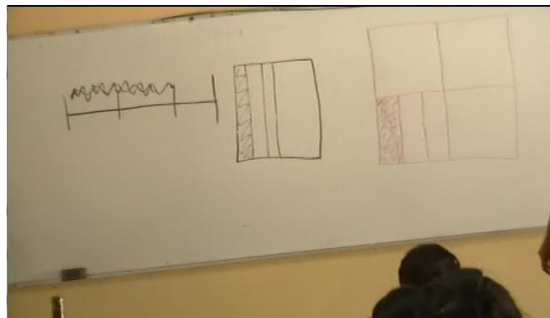
Aa. Es que dice que la mitad de

Mo. A ver explíqueselos a sus compañeros

Aa. Es que dice que la mitad de una pared se cubrió con mosaico, la dividí en 2 y esta mitad (señala su dibujo dividido en 2 partes y una de ellas dividida a la vez en 3), fue la que se cubrió con mosaico, y luego dice unos lisos y otros con dibujos, los mosaicos con dibujo abarcan $\frac{1}{6}$ de la pared, o sea si la dividimos en 6, quedarían en 3 y 3, y ya está la mitad, entonces ¿qué fracción del total de los mosaicos tiene dibujos?, ¿o sea qué fracción del total de los mosaicos, o sea que nada más de la mitad de la pared?, $\frac{1}{3}$

Ao. Esa es la que no entendía muy bien

Aa. Yo tampoco



Como podemos apreciar en la imagen tomada del pintarrón, hasta este momento de la clase, el conocimiento matemático sobre las fracciones se está usando sólo de manera verbal, no hay ningún número escrito; creemos que ello obedece a dos cuestiones, primero, la consigna de la misma actividad sugería el uso de dibujos para resolver los problemas y segundo, el grado de dificultad no es tanto como para exigir la escritura de los números utilizados, la pregunta es ¿qué dificultades hayan enfrentado los estudiantes si se les solicita que los resuelvan sin usar dibujos? En principio les haya obligado a que tradujeran

del lenguaje común al lenguaje matemático un enunciado de un problema, enseguida, por supuesto que haya aparecido la multiplicación de fracciones como la herramienta matemática más adecuada para resolverlos. Sin embargo, no se planteó esta posibilidad ni por el profesor ni de manera curricular.

En cambio, aparece la multiplicación de fracciones sin formalizarse, cuando los estudiantes se enfrentan a la actividad del punto 5

Mo. Dice la 5, sombrea las fracciones de superficie que se indican y dice utilice las subdivisiones de la figura, Noé

N.- siempre la oportunidad de sombrear los ya divididos, como esto que a lo inverso, por eso surgió el conflicto, ¿cómo dividirlo?

Aa. ¿A ver profe cómo?

Mo. ¿Se pueden hacer con todas las divisiones que están ahí?, ¿con las divisiones que ya están ahí?

Alumnos.- si

Mo. ¿O tienen que hacer divisiones distintas?,

Aa. Más divisiones, más

Ao. En la última no,

Mo. ¿En la de 5/12 qué H.?

H.- sí se puede hacer con las divisiones que tiene ya

Mo. Si se puede, a ver pase a decir cómo le hizo

E3. Solamente hay que multiplicar el denominador

En esta parte de la actividad se están poniendo las restricciones de la consigna, es decir, sigue planteándose que se haga con las divisiones que ya están ahí, la pregunta es ¿cómo utilizar las divisiones que ya tiene el dibujo para indicar los 5/12? Si recordamos, la figura es un cuadrado dividido en 36 partes equitativas (6 x 6), ello obliga a los estudiantes a que pongan en juego conocimientos que ya deben saber y que en el planteamiento del problema no se hacen explícitos, en particular el cálculo de fracciones equivalentes.

Aunque el alumno E3 adelanta una respuesta “*solamente hay que multiplicar el denominador*”, ésta no es considerada en este momento de la clase, se continúa con la participación del estudiante que va a mostrar su procedimiento en el pizarrón, tal y como apreciamos en el siguiente fragmento de registro, el cual es continuación del anterior.

alumnos hablan a la vez de cómo le hicieron

H.- Primero hice un cuadrado (lo dibuja en el pizarrón)

Mo. De acuerdo, todos nos lo imaginamos (el comentario alude a que no está bien trazado el cuadrado)

H.- ¿cuántos tiene éste?, no, no se crean

Aa. Primero la mitad, ¿cuál vas a hacer? (le dice a H),

Mo. El último el de 5/12

Aa. Ese bueno yo lo multiplique 6X6, 36 luego dividí el 36, ya no me acuerdo cómo le hice

Aa. Profe ¿3 entre 7 cuánto es?, si tengo 3 chocolates

Ao. Pasteles

Aa. Si tengo 3 pasteles, y los voy a dividir entre 7, son $3/7$,

H.- (termina su dibujo el cual dividió en 36 partes y dice) $5/12$

Aa. Se buscaba un múltiplo que diera 36 al denominador, y se multiplica por el mismo el numerador, nomás divides y multiplicas

Mo. A ver antes de que nos digan los que ya tienen la respuesta, Flor y Fabiola, quién nos decía que era difícil, ¿por qué era difícil?

E3. a lo mejor se nos dificulta porque el número de cuadros que hay es más grande el denominador que tenemos; en las anteriores, bueno en la primera por ejemplo era más pequeño y en la otra también, tenías que hacer más divisiones y aquí te encuentras con divisiones más grandes, o cuadros más pequeños, ahí tenías que fraccionarlos.

Mo. Así es, así es, ¿A ver Fabiola cómo le hizo usted?

F.-Pues nada más multipliqué por 3 el 12 y ya daba 36, y el 5 también por 3 y coloree nada más 15 cuadritos.

Aa. Yo no le hice así

Mo. Lo que hicieron ustedes fue primero sacar, ¿a cuántos cuadritos equivale $1/12$?

Aa. Primero contamos los cuadritos

Mo. ¿A cuánto equivale?

Aa. a 3

Mo. ¿A cuántos cuadritos equivale $1/12$?

Aa. A 3

Mo. A 3

Ao. No

Alumnos varios.- siii

Mo. No le hicieron así

Aa. Yo primero conté todos los cuadritos, y luego busqué un número que multiplicado en 12 diera 36, y cuando ya dio 36, que fue el 3, multipliqué 5 por 3

Ao. Igual, igual

Mo. El 3 equivalía pues a $1/12$

Aa. Yo lo hice más chido (muestra la producción 2)

Ao. Pues yo nada más multipliqué todos juntos y ya (muestra la producción 3)

H.- Ya (terminó de dibujar y colorear sus cuadritos en el pizarrón)

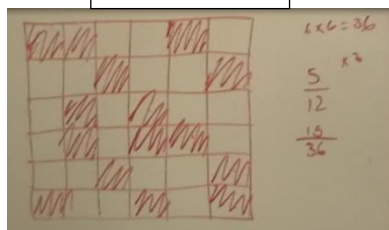
Mo. ¿Cuántos cuadritos tiene iluminados, H.?

Alumnos.- 15

Mo. 15, muy bien

Así es como muestra H. su actividad, junto con un cuadrado dividido en 36 partes de las cuales toma 15

Producción 1



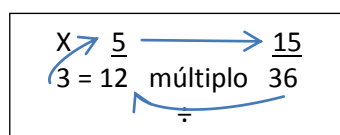
$$\begin{array}{r} 6 \times 6 = 36 \\ \times 3 \\ 5/12 \\ 15/36 \end{array}$$

Aa. Yo lo había hecho diferente porque no le había hallado divisiones,

Varias cosas resaltan de la lectura del registro, en primer lugar (lo subrayado con una sola línea) el uso que se le da al conocimiento común, me parece que aunque se pone

en juego prácticamente el mismo conocimiento, la representación mental que se genera es diferente; en tal sentido podemos detectar tres formas diferentes de resolver el problema:

1ª. “Se buscaba un múltiplo que diera 36 al denominador, y se multiplica por el mismo el numerador, nada más divides y multiplicas”: En esta lógica el procedimiento matemático es el siguiente



2ª. Pues nada más multipliqué por 3 el 12 y ya daba 36, y el 5 también por 3 y coloree nada más 15 cuadritos,

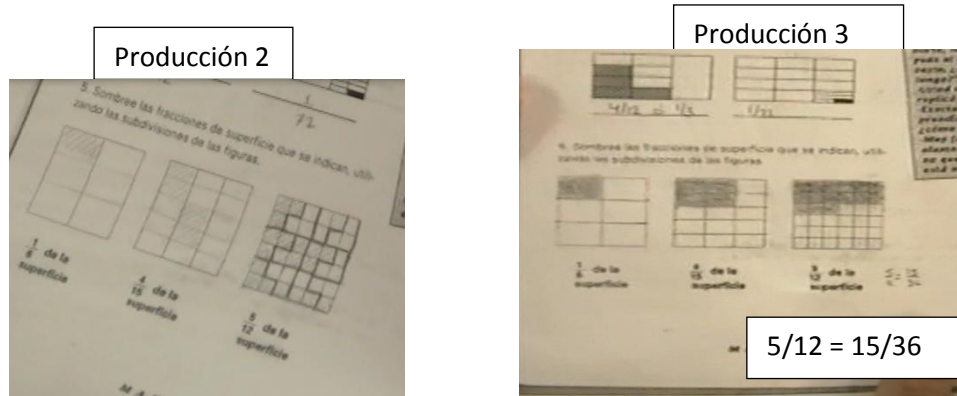
$$\frac{5}{12} \times \frac{3}{3} = \frac{15}{36}$$

3ª. Lo que hicieron ustedes fue primero sacar, a cuántos cuadritos equivale 1/12: Como podemos leer en el registro, esta es la interpretación del profesor y aquí la interpretación es: 36 cuadritos es equivalente a 12/12, es decir la unidad, entonces $36 \div 12 = 3$, lo cual equivale a 1/12 y como necesitamos colorear 5/12, multiplicamos $5 \times 3 = 15$, que son los cuadritos que se deben colorear.

Como ya lo decía, el conocimiento matemático básico, requerido para resolver la situación problema, es equivalencia de fracciones; lo interesante en esta secuencia de procedimientos es precisamente que al permitir que aparezcan se está contribuyendo a construir una representación social sobre las matemáticas y su enseñanza en la cual la búsqueda creativa de diferentes procedimientos es lo valioso y la resolución del problema puede ser por varias vías; algo que pudo ser interesante es haber hecho notar que en el procedimiento 2º se esconde el procedimiento 1º, es decir, cuando el estudiante dice “*pues nada más multipliqué por 3*” antes tuvo que hacer algo para encontrar ese 3 y ahí está la división de 36 entre 12, presente en el primer procedimiento, y que al hacer el cálculo y buscar la interpretación del resultado, nos lleva al 3er. procedimiento, es decir, el resultado de la división 36 entre 12 se interpreta como 1/12 de 36.

Por otro lado, y esto es algo que puede quedar a la reflexión, aparte del procedimiento de resolución está la representación gráfica del resultado; en la producción 1 (puesta enseguida del registro), después de que sabe que hay que colorear 15 cuadritos, no sigue ningún patrón para hacerlo; en cambio en la producción 2, vemos una división en

doceavos (3 cuadritos por cada doceavo) y de ellos resalta 5; finalmente en la producción 3 sólo toma en cuenta que son 15 cuadritos los que hay que colorear y lo hace en secuencia, con lo cual inferimos que lo coloreado representan los $5/12$. ¿Cuál representación puede ser más funcional para profundizar en el conocimiento de las fracciones como partes de partes? ¿Con cuál representación podemos resolver más problemas, por ejemplo si preguntamos, basándonos en la figura dividida, cuántos cuadritos es $2/12$, $7/12$, etc.?



Más allá de la respuesta que demos a las anteriores preguntas, si podemos adelantar que para tener una representación pedagógicamente poderosa de un tema, un profesor debe primero tener una comprensión exhaustiva de éste.

Algo que hay que resaltar es la intencionalidad explícita por usar el discurso matemático en el salón de clase, pero sobre todo articularlo con el discurso didáctico. En este mismo tenor, quiero resaltar la participación de E3, cuando reflexiona sobre el porqué de la dificultad para resolver este problema

E3.- a lo mejor se nos dificulta porque el número de cuadros que hay es más grande el denominador que tenemos; en las anteriores, bueno en la primera por ejemplo era más pequeño y en la otra también, tenías que hacer más divisiones y aquí te encuentras con divisiones más grandes, o cuadros más pequeños, ahí tenías que fraccionarlos.

Aunque en la secuencia de la clase no se retomó, me parece que en reflexiones como ésta hay una buena oportunidad para la destransposición del saber didáctico, en tanto posibilita reconocer formas alternativas de plantear las actividades, tal vez muy diferentes a las formas cómo les fueron planteados este tipo de problemas en su escolaridad previa; este comentario lo retomaremos más adelante cuando analicemos el conocimiento didáctico del contenido, en este mismo apartado.

- **Situación didáctica “Las fracciones como operadores multiplicativos”,** corresponde a la 7ª. Sesión de clase grabada, e igual que la anterior también se retoma del material del taller para maestros que ya hemos citado y que a continuación pongo la página de donde se obtiene la actividad.

Tema 4
Las fracciones como operadores multiplicativos

En el tema 2, “Las fracciones en la medición”, se vieron algunas situaciones en las que se multiplicó una medida fraccionaria (multiplicando) por un número entero (multiplicador); por ejemplo “5 veces $\frac{2}{3}$ de centímetro”. En este tema se abordarán situaciones en las que las fracciones juegan ahora el papel de un multiplicador (operador multiplicativo), es decir, indican un número de veces, por ejemplo, $2\frac{1}{4}$ veces 12 km.

Actividad 1

Tres y media vueltas
En esta actividad se analiza una primera situación que da lugar al uso de las fracciones como operador multiplicativo.

1. Resuelva el siguiente problema.

Un trenecito recorre un circuito de 12 kilómetros. Complete los datos que faltan en la tabla:

Número de vueltas	Total de kilómetros
1	12 km
3	
6	
$\frac{6}{2}$	
$2\frac{1}{4}$	
$\frac{3}{4}$	
$\frac{5}{6}$	
0.75	

¿Qué operación utilizó para calcular el total de kilómetros del tercer renglón? _____

¿Qué operación utilizó en el sexto renglón? _____

68 Taller para el maestro

Como podemos observar, todas las preguntas tienen la misma estructura: el trenecito da cierto número de vueltas y hay que calcular el total de kilómetros recorridos. La diferencia es que a veces el número de vueltas (el operador multiplicativo) está dado por un número entero y otras veces por una fracción.

En los planes de estudio para la educación primaria (SEP, 2011) no se contempla el algoritmo convencional de la división ni la multiplicación de fracciones, en cambio se ha decidido trabajar como antecedente el significado de la fracción como operador multiplicativo; desde el mismo taller precisa el por qué

“... en la escuela primaria no es conveniente formalizar desde el principio las expresiones del tipo “ $\frac{3}{4}$ de 12 kilómetros” como multiplicaciones de fracciones. Deben plantearse, en cambio, variadas situaciones en las que las fracciones se alternen con los números naturales en el papel de operadores multiplicativos, como en la situación del trenecito...” (Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila, 1999, pág. 69)

Con este propósito, los docentes en formación reflexionan al resolver este tipo de situaciones, sobre el conocimiento común del contenido, aunque en este caso ya interacciona con el conocimiento especializado, porque se usa el conocimiento común de las fracciones para resolver una situación problemática donde se pone en juego uno de los significados de las fracciones: como operador multiplicativo.

Para contextualizar un poco esta clase, he de decir que de la grabación se aprecia que antes del fragmento que vamos a recuperar, los estudiantes participaron en un juego matemático, titulado “¿Quién se acercó más?; este juego fue organizado por un equipo de alumnas y tiene como propósito que *“los niños aprendan a aproximar la longitud de varias fracciones de uno o de dos metros y apliquen la equivalencia y suma de fracciones”* (Fuenlabrada, Block, Balbuena, & Carvajal, 1991, pág. 83); además, como ya había comentado la actividad se retoma del Taller de matemáticas y también se les dejó que la resolvieran de tarea, de tal manera que en el salón de clase sólo se recupera de manera general.

En este caso, quien hace referencia al conocimiento común del contenido y lo pone en práctica en el proceso de resolución es el formador de profesores, en los siguientes términos

Mo. Esa era la intención, este juego que les acaban de poner sus compañeras, es una posibilidad de lo que van a llevar en las prácticas, (...) si alguien que esta de tercero a sexto quisiera probar en vez de la situación didáctica que ya vimos aquí, quisiera probar alguna variante de este juego que les pusieron ahorita sus compañeros sería factible, entonces ya tenemos este repertorio, entonces de esto se va a tratar de que ahora que vayan a pedir los contenidos, también nuevamente les comenten a los maestros de que les den oportunidad de llevar contenidos para cuatro días de la semana porque un día vamos a trabajar las fracciones, entonces ahora si ya, cerramos ese paréntesis, y les voy a pedir que ahora pensemos en el cuadrito que pusimos ahí en las hojas, si, hay dos cuadros que son más o menos parecidos, uno es esto (señala el cuadro dibujado en el pizarrón); y el otro es algo distinto, sigue siendo los kilómetros pero ahora cambia la interrogante,
Ao. Cambia la interrogante

Un trenecito recorre un circuito de 12 kilómetros. Complete los datos que faltan en la tabla:

Número de vueltas	Total de kilómetros
1	12 km
3	
6	
$\frac{6}{2}$	
$2 \text{ y } \frac{1}{4}$	
$\frac{3}{4}$	
$\frac{5}{6}$	
0.75	

Mo. Sigue siendo, vamos a ensayar un poquitito con esto, fíjense bien si resulta que por una vuelta llega a 12, ¿con 3 vueltas lo que va hacer es qué?

Aa. Multiplicarlo

Mo. Multiplicarlo por 12 y lo tendremos

Aa.36

Aa. Oh sumar 3 veces el 12

Mo. O sumar 3 veces el 12, entonces quiere decir que aparentemente esto lo podemos resolver con una multiplicación, si, hoy vamos a ver uno de los puntos del asunto de las fracciones que es el siguiente, muy listos eh, pareciera ser que siempre que hacemos una multiplicación, el resultado es mayor, el resultado es grande, pero a ver cómo interpretamos o cuál es, o si ya han encontrado es un punto fino, que es éste y a ver qué pasa cuando lo multiplicamos, a ver que sea $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ de

Aa. 12

Mo. $\frac{3}{4}$ de 12

Aa. ¿Por qué no divide 12 entre 4?

Mo. La otra es aplicarlo es igual, multiplicamos 3 por 12 y lo dividimos luego

Aa. Entre 4

Mo. Entre 4

Aa. Oh divide 12 entre 4 y lo multiplica por 3,

$$\frac{3}{4} \times 12/1 = 36/4 = 9$$

Aa. Es la misma, es igual,

Mo. Aquí lo que quiero es que identifiquen ustedes, entonces aquí aparece el asunto de la multiplicación en las fracciones, y el resultado es ¿cuánto aquí les salió?

Aa. 9

Mo. Es lo mismo que 36, 4 es igual a

Aa. 9

Aa. Se le pone abajo y nada más el 12 abajo verdad

Mo. Sí, bueno aquí el asunto es que hay veces que, como explicamos, el asunto es una multiplicación, pero el resultado no es mayor, sino es menor, porque no creemos que esto es fácil que los identifiquen, esta es una situación muy bonita, muy bonita para que los niños identifiquen eso, porque no siempre que les explica uno a los niños a ver cuándo se multiplica

Aa. Porque no está multiplicando números mayores, o no está multiplicando números que sean más grandes a la unidad, o sea el multiplicar es doble de la unidad, le va a salir el número más grande, o un número mayor a la unidad, pero si multiplicas un número mayor a la unidad, te va a salir un número menor,

A*.- Es lo que iba a decir que siempre que multiplique, el 12, ¿qué papel tiene?,

Aa. Números

A*.- No, son

Aa. Son factores

A*.- Es factor

Mo. Pues estos dos son factores

A*.- Que lo multiplique por un número, por una fracción en una unidad y ponga abajo el 4, el factor, así por decir $\frac{4}{3}$ ya sólo serían 2,

Mo. Ha, entonces es un derivado de

Aa. $\frac{6}{2}$

Mo. En esto

Aa. Fracciones, sería que al multiplicar fracciones que representen menos que una unidad, el numero resultante va a ser mayor al (es interrumpido)

Mo. Vamos a ver la conclusión, cuando se multiplica por fracciones, el resultado es un número menor, pero luego hacemos otra acotación, si, siempre y cuando esa fracción sea menor a la unidad, si, si esta fracción es mayor que la unidad, el

resultado va a ser mayor, si, esto es de lo que nos dimos cuenta, creen que los niños de sexto podrían resolver esto,
Aa. Ya de sexto si

Este problema multiplicativo permite en su resolución que los estudiantes pongan en juego relaciones de proporcionalidad, además de, por supuesto, la estrategia que orientó el profesor; en este caso, el trabajo con la fracción como operador multiplicativo implica que los estudiantes comprendan el funcionamiento de ésta en la resolución de problemas, “la multiplicación $\frac{3}{4} \times 12$ kilómetros, interpretada como $\frac{3}{4}$ **de** 12 kilómetros, se puede calcular dividiendo 12 entre cuatro y multiplicando lo que resulte por tres: $(12 \div 4) \times 3 = 9$ kilómetros” (Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila, 1999, pág. 69), que es prácticamente como usaron el conocimiento matemático para resolverlo, cuando dicen

M. (...) que es este y a ver qué pasa cuando lo multiplicamos a ver que sea $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ de...
Ao. 12
Mo. $\frac{3}{4}$ de 12
Ao. ¿Por qué no divide 12 entre 4?
Mo. La otra es aplicarlo es igual, multiplicamos 3 por 12 y lo dividimos luego
Ao. Entre 4
Mo. Entre 4
Ao. Oh divide 12 entre 4 y lo multiplica por 3,
 $\frac{3}{4} \times 12/1 = 36/4 = 9$
Ao. Es la misma, es igual,

Notemos aquí la utilización del algoritmo convencional de la multiplicación de fracciones, aunque en el proceso de la clase no se profundiza en su operatoria: $\frac{3}{4} \times 12/1 = 36/4 = 9$, es decir, sólo se usa el conocimiento común porque ya se sabe cómo operar con él y por ende se obvia todo lo que está implicado en él, la atención está puesta en que éste se requiere para resolver problemas donde está implicado el significado de la fracción como operador multiplicativo.

- **Diseño de situaciones didácticas:** como parte de la octava sesión filmada, con el tema de fracciones, el profesor les encargó que diseñaran problemas en atención a los diferentes significados de la fracción estudiados a lo largo de las diferentes sesiones. En el contexto de la revisión de la tarea, surgen las siguientes interacciones, donde se vuelve a poner en juego el conocimiento común sobre las fracciones y en específico sobre operador multiplicativo y división.

Mo. Eso es lo importante ver la unidad, la representación de la unidad, y otro recurso para la enseñanza que también viene en los libros, que también debemos utilizar

nosotros en las fracciones, es la ubicación, la ubicación de las fracciones en la recta numérica y luego decíamos aquí que la operatoria con los algoritmos tiene una función distinta, si, decíamos que si se multiplican 2 fracciones el resultado es más grande,

Ao. Se multiplica

Mo. Cuando se multiplican 2 fracciones, ¿el resultado es mayor?

Ao. Es menor

Mo. Siempre es menor y cuando se divide es mayor, a la inversa de los números naturales, aquí veíamos el asunto el problema es el de la multiplicación, lo veíamos aquí, decíamos el ejemplo del operador multiplicativo, $\frac{3}{4}$ partes de una vuelta, de una vuelta que mide 2 km, si lo multiplicamos nos daría una fracción,

Ao. Si pero nada más eso, es lo que hicimos la otra vez, nada más el numerador

Mo. Ha si tiene razón

Ao. Por decir $\frac{4}{3}$, el resultado es mayor

Mo. Si, si

Ao. Pero en si es multiplicación

Mo. Cuando multiplicamos por una fracción cuando lleguemos al, cuando lo multiplicamos por una fracción propia, siempre el resultado será

Alumnos.- Menor

Mo. Y si multiplicamos por una fracción que se conoce como impropia, así, como $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{3}$, etcétera, es decir, el resultado será mayor, muy buena aportación la que hicieron, yo creí que sólo lo que habían visto no había quedado claro, y ¿cómo sería un problema con la división?, la idea es que con la división agranda, la división agranda, no siempre, así, a ver nosotros decimos, nosotros decimos que vamos a dividir 6 entre 2, si, la idea es cuantas veces cabe el 2 en el 6

Ao. 6

Mo. Si, es una forma de inducir la división, de tal manera que con el mismo ejemplo vamos a dividir 6 entre $\frac{1}{3}$, la idea es cuantas veces cabe $\frac{1}{3}$ en el 6, por eso el resultado será mayor

Ao. $\frac{6}{36}$

Mo. ¿Y aquí cual es el resultado?

Ao. $\frac{1}{3}$

Ao. $\frac{6}{3}$

Mo. Vamos haciéndolo $\frac{6}{1} \div \frac{1}{3} = \frac{18}{1}$

Ao. Sale a 3

Mo. 6×3

Ao. 18

Mo. El resultado sería, 18 veces cabe $\frac{1}{3}$ en el 6

Ao. ¡Ah ya le entendí!

Ao. Es que hay que multiplicar cruzado para que funcione...

Mo. Para que, así es, ahora hay va la pregunta difícil, ¿díganme un problema donde aparezca la división?, difícil

Aa. Pues es como la que yo hice, le puse que era una tina que media $\frac{3}{2}$ y se tenía que llenar con recipientes de $\frac{1}{4}$, y que ¿cuántos íbamos a necesitar?,

Mo. $\frac{3}{2}$ equivale a cuantos recipientes de $\frac{1}{4}$, cuantos recipientes vamos a ocupar, si, $\frac{3}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{12}{2}$

Ao. Serían $\frac{6}{2}$

Mo. 3×4

Ao. 12

Mo. 2×1

Ao. 2

Mo. Ocupamos

Aa. 6, 6, pues 6 veces vaciar el recipiente

Aa. ¿Entonces cuántos vamos a ocupar?

Ao. Son 6 de $\frac{1}{4}$, o sea la división ahí te cubre el valor de los 6 litros, son 6 recipientes

Al hacer el análisis del fragmento de registro apreciamos que se retoma la situación del operador multiplicativo y al hilo de las interacciones el profesor se da cuenta que sí quedó comprendido por parte de los estudiantes (*yo creí que sólo lo que habían visto no había quedado claro*), se reafirma un concepto ya analizado, es decir, qué es lo que pasa con la multiplicación de fracciones: la distinción entre multiplicar por una fracción propia y hacerlo con una fracción impropia; este recordatorio, da pie a la comparación de qué pasa con la división de fracciones, para ello retoma un ejemplo con número naturales “*vamos a dividir 6 entre 2, si, la idea es cuantas veces cabe el 2 en el 6*”, esta estrategia del número de veces que cabe un número en otro, se manifiesta efectiva al pasar ahora a un ejemplo con fracciones, en los siguientes términos: “*vamos a dividir 6 entre $\frac{1}{3}$, la idea es cuantas veces cabe $\frac{1}{3}$ en el 6*”, lo cual contribuye a que los estudiantes que no tenían claro el concepto lo comprendan, tal y como dice uno de los estudiantes “Ao. ¡*Ah ya le entendí!*,” y otro de ellos argumenta “Ao. *Es que hay que multiplicar cruzado para que funcione...*”

Hemos subrayado doblemente la frase “¡*Ah ya le entendí!*” porque nos parece un indicador de cómo los estudiantes comienzan a rectificar conocimientos comunes que no tenían muy claros, es decir, cuando al estudiante “le cae el veinte”⁴⁶ progresivamente va comprendiendo conocimientos que pudo haber aprendido de manera mecánica, en este caso, la estrategia de “cuántas veces cabe... el divisor... entre ... el dividendo” se mostró eficaz para lograr el entendimiento del concepto; sin embargo, y aunque en el contexto de la clase no se apreció, ¿entienden los estudiantes para maestro por qué se multiplica cruzado para que funcione? ¿Será necesario discutirlo en el salón de clase de las escuelas normales?

Me parece que en la búsqueda de un conocimiento profundo de las matemáticas fundamentales sí es necesario profundizar un poco más, aprovechar estas oportunidades de clase para cuestionar a los estudiantes respecto al sentido de la división por fracciones y cómo ésta se articula con la multiplicación de fracciones, o con su uso como operador multiplicativo, es decir, cobra relevancia que los estudiantes tengan claro cómo se opera, pero a la vez saber por qué tiene sentido, matemáticamente hablando. “*Así, explorar el ‘porqué’ que subyace al ‘cómo’ lleva paso a paso hacia las ideas básicas del núcleo de las matemáticas*” (Ma, 2010, pág. 133)

⁴⁶ Frase coloquial que significa un súbito entendimiento de algo...

Cuando uno de los estudiantes expresa la frase “Ao. Es que hay que multiplicar cruzado para que funcione...”, ¿qué tipo de intervención didáctica habría que realizar para profundizar matemáticamente en su razonamiento?; da la impresión de que así le enseñaron que debería de hacerse la división de fracciones, pero no es lo mismo “multiplicar cruzado”, que saber que “dividir por un número es equivalente a multiplicar por su inverso multiplicativo”; en tal sentido, las declaraciones de los estudiantes objetivan su representación y a la vez permiten que a partir de su cuestionamiento éstas sean rectificadas, ampliadas y mejoradas para acercarlas al conocimiento matemático de referencia.

El contexto del diseño de un problema evidencia la comprensión del uso de la división de fracciones, cuando el profesor les pide que inventen un problema difícil:

Aa. Pues es como la que yo hice, le puse que era una tina que media $3/2$ y se tenía que llenar con recipientes de $1/4$, y que ¿cuántos íbamos a necesitar?,

Aunque el discurso matemático se usa de manera muy informal (al decir una tina que media $3/2$, no se indica que se refiere a capacidad, ni tampoco la unidad de medida), el problema sí permite poner en juego el saber matemático en discusión: la división de fracciones, tal y como apreciamos en el siguiente fragmento

*Mo. $3/2$ equivale a cuantos recipientes de $1/4$, cuantos recipientes vamos a ocupar, si,
 $3/2 \div 1/4 = 12/2$*

Ao. Serían $6/2$

Mo. 3×4

Ao. 12

Mo. 2×1

Ao. 2

Mo. Ocupamos

Aa. 6, 6, pues 6 veces vaciar el recipiente

En el proceso de comprensión del algoritmo de la división, un paso intermedio se puede plantear a partir de esta secuencia de ideas presente en el registro, si consideramos la división en los números naturales como “cuántas veces cabe”, entonces aquí podríamos decir que $3/2 = 6/4$ y entonces vemos que en $6/4$ está contenido 6 veces $1/4$. En esta lógica se está trabajando lo que Liping Ma llama el “modelo de medición para la división”, sin

embargo hay otros modelos⁴⁷ (Ma, 2010, pág. 91) que no se tuvo oportunidad de revisar en esta clase, dado que tampoco era la intención.

En el análisis de esta clase no se presentó la oportunidad de ver cuántos de los alumnos realmente tuvieron dificultades para operar con el algoritmo de la división, sin embargo creo que es un tema que debe profundizarse más en el escenario de la formación de profesores, sobre todo porque coincidimos con las afirmaciones de los “Principios y objetivos” derivados del NCTM y recuperado por Rick Billstein y colaboradores

“La división de fracciones siempre ha sido muy molesta para los estudiantes. Aunque “invierte y multiplica” ha sido básico en la enseñanza convencional de las matemáticas y aunque parece ser una manera sencilla de recordar cómo dividir fracciones, desde hace mucho tiempo los estudiantes han tenido dificultades para hacerlo. Algunos olvidan cuál es el número a invertir y otros se confunden acerca de cuándo es apropiado aplicar el procedimiento. Una manera común de justificar formalmente el procedimiento de “invierte y multiplica” es usar argumentos sofisticados que incluyan la manipulación de expresiones algebraicas racionales. Este proceso puede parecer lejano y misterioso para muchos estudiantes. Al no comprender cabalmente la justificación subyacente muchos estudiantes son entonces incapaces de reparar sus errores y aclarar por sí mismos sus dudas sobre la división de fracciones...” (Billstein, Libeskind, & Lott, 2008, pág. 332)

III.2.1.1.2. El conocimiento especializado del contenido.

La idea de conocimiento especializado del contenido la retomamos desde (Ball, 2011), en esta conceptualización, a diferencia del conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado hace referencia al tipo de conocimiento que debe tener el profesor para la enseñanza de cierto contenido, en nuestro caso del tema de fracciones, aludimos a todos los conocimientos de los diferentes significados de las fracciones: parte todo, medida, cociente, operador multiplicativo y razón.

El conocimiento especializado del contenido es específico a la tarea del profesor, es un tipo de conocimiento que le permite comprender cómo ayudar a sus alumnos a que aprendan matemáticas con sentido, significado y funcionalidad y no como reglas ciegas.

Algunos de los elementos que puede contener se refieren a que el profesor requiere conocer a profundidad los conceptos fundamentales de cada uno de los tópicos

⁴⁷ Aparte del modelo de “medición para la división”: “encontrar cuántos medios hay en $1\frac{3}{4}$, o encontrar cuántas veces cabe $\frac{1}{2}$ en $1\frac{3}{4}$ ”; Liping Ma propone el “modelo partitivo de la división”: “encontrar un número tal que $\frac{1}{2}$ de él sea $1\frac{3}{4}$ ”; además el “modelo de factores y producto”: “encontrar un factor que multiplicado por $\frac{1}{2}$ dé $1\frac{3}{4}$ ”.

matemáticos que enseñará; conocer no sólo el cómo (conocimiento común) sino los porqués de lo que va a enseñar; tener claridad sobre cómo desglosar ideas y procedimientos matemáticos para hacerlos más simples y comprensibles para sus estudiantes; conocer las conexiones entre los diferentes tópicos y entre diferentes conceptos relativos a su asignatura, e incluso el conocimiento especializado llevaría a comprender las vinculaciones de las matemáticas con otras asignaturas.

En tal sentido, desde los fragmentos de transcripción de clase, y siguiendo la misma estrategia comparativa de análisis, al revisarlos después de una primera codificación, encontramos que el conocimiento especializado del contenido y la forma de expresarse en el salón de clase de la Escuela Normal, alude especialmente a cuatro categorías: análisis y discusión de procedimientos para transponer los saberes aprendidos a la escuela primaria, análisis de los aspectos y propiedades básicas de las fracciones, construcción del concepto de fracción (como parte culminante), pero predominantemente la construcción de los diferentes significados de las fracciones.

a) Análisis y discusión de procedimientos para transponer los saberes aprendidos a la escuela primaria: Ya comentábamos en párrafos anteriores que la construcción de estrategias didácticas adecuadas a los diferentes grados de la escuela primaria, necesariamente pasa por el dominio de los saberes matemáticos que se quieren transponer; aunque en un apartado más adelante profundizaremos en la construcción del conocimiento didáctico, en esta parte me parece interesante resaltar una intencionalidad presente en el profesor en diversas ocasiones, dicha intencionalidad se traduce en generar la reflexión acerca de cómo aplicarían los conocimientos que van adquiriendo en la escuela primaria, es decir, en el proceso mismo de reflexionar sobre los diferentes significados que adquiere la fracción (conocimiento especializado), se hace referencia a cómo lo trabajarían en la escuela primaria. Creo que en esto coincidimos ampliamente con los posicionamientos teóricos que asumen que el conocimiento profesional del profesor se manifiesta en la práctica de manera interrelacionada.

Los siguientes fragmentos son indicadores de ello:

Mo. A ver, que más tienen anotado ahí, hemos visto algunas de las propiedades de las fracciones, si las propiedades, no hemos visto muchas pero si, las propiedades (anota en el pizarrón) una de ellas decíamos aquí, a ver ¿cuáles tienen anotadas ahí para trabajar las fracciones?, hay que ver el asunto de la comparación, comparar (lo escribe en el pizarrón)
Aa. equivalencias

Mo. (Anota en el pizarrón) equivalencias y luego existe el asunto de Aa. orden y (luego anota) representación gráfica

Mo. orden, bueno hemos visto también lo que son los algoritmos que son la suma y resta de eso verdad, e hicimos aquí un ejercicio aquí para acordarnos un poco de eso, eso es lo que llevamos hasta ahorita, hay un ejemplo que se nos quedó incompleto, ahí, decíamos que en el reparto de cantidades discretas, por ejem E3 tiene 36 canicas y de esas 36 canicas, $\frac{2}{9}$ de esas canicas son azules, el resto son amarillas, ¿cuántas son amarillas?, los niños ven, es un ejemplo de cómo podemos plantearnos un problema, es de 2 fracciones con cantidades discretas, por eso hay que ponerle a los niños reparto con cantidades continuas y reparto con cantidades discretas, donde les toque más de una unidad y menos de una unidad, hay que explorar con los niños este tipo de actividades en donde ellos tengan que comparar, tengan que buscar equivalencias, el orden, de hecho para trabajar el orden, tienen que trabajar también la comparación, primero las comparan y luego ya las ordenan... (CP 1)⁴⁸

Como podemos apreciar, se hace referencia explícita a la asociación del tema que se está revisando con la importancia que éste tendrá en la escuela primaria; esta acotación se ve relevante en tanto pareciera ser que subyace la idea del sentido de los aprendizajes, es decir, lo que se estudia en la escuela Normal cobra sentido en tanto permite orientar la práctica docente en la escuela primaria.

En este caso, fue la primer clase que se grabó, después de varias sesiones que por diversos motivos no se tuvieron, en tal sentido también apreciamos en el discurso del profesor, una recapitulación de lo que los estudiantes han revisado (memoria didáctica), pero con énfasis a su aplicabilidad, “hay que ponerle a los niños reparto con cantidades continuas y reparto con cantidades discretas, donde les toque más de una unidad y menos de una unidad, hay que explorar con los niños este tipo de actividades”.

Más adelante, en la misma sesión de clase, producto del análisis de videos de clase de los propios estudiantes, surge la oportunidad de confirmar esta representación del profesor, traducida en el hecho de que los estudiantes tienen que tomar conciencia de cómo trabajar el contenido en la escuela primaria:

Mo. Regularmente es lo que pasa, los maestros no ponen problemas de esto si antes los niños no saben hacer las representaciones escritas

E3. Mis niños no conocía las fracciones

Mo. ¿qué quiere decir con que no las conocía?

E3.- haga de cuenta que yo también cometí un error, les anoté $\frac{1}{2}$ en una hoja y les pregunté ¿qué número es éste?, ¿cómo se le llama a este tipo de números?, como no sabían... no olvidenlo, dejé así la situación hasta el momento en que

⁴⁸ Vamos a usar en lo sucesivo la denominación CP para hacer referencia al número de clase del profesor de la cual se recupera el fragmento de registro, en este ejemplo corresponde a la clase # 1.

confrontamos entre ellos y ya miré y las puse las fracciones, pero cuando les puse el número en fracción me di cuenta que los niños no conocían,

Mo. Aquí lo que hubiera sido interesante es que los niños sin saber, la idea es de cómo lo intentaron hacer, sí, no tienen que poner una situación en la que tengan que decir cómo se representa, sí, eso lo vamos viendo más adelante, es decir, es más importante que los niños sepan hacer particiones adecuadas, que los niños se den cuenta de estos tipos de repartos como ahorita mismo decían los equipos, un pastel a cada uno y de otro pastel le dieron la mitad, y hubo 3 niños que dividieron los 3 pasteles a la mitad y luego le dieron la mitad a cada uno, son 2 maneras de hacer el reparto, qué bueno que aparezcan en el grupo, qué bueno que surja esto antes de la representación gráfica, esa, muy bien Luis, hubo mucho relajo en su grupo, pero dijimos que eso se vale,

Ao. Por eso lo hacíamos en equipo, en equipo para que comenten

Mo. Así es, hubo por ahí, se fijan que por más que quería confundirlos hubo algunos equipos por ahí que no mas, así, los medios, los grupos tenían ideas de los medios, tenían ideas de los cuartos, de los tercios, veamos ahora un fragmento de la clase de “I” quieren (CP2)

Este fragmento de registro es muy relevante porque denota explícitamente la representación de las matemáticas y de su enseñanza que pone en juego el profesor en sus clases, la frase “Mo. Regularmente es lo que pasa, los maestros no ponen problemas de esto si antes los niños no saben hacer las representaciones escritas” se convierte en una crítica al esquema tradicional de enseñanza de las matemáticas, bajo el cual los niños no están en condiciones de resolver problemas si antes no tienen el saber necesario para ello; este reconocimiento de la dificultad que ello conlleva le permite cuestionar la representación que manifiestan los estudiantes cuando afirman que el niño no conocía las fracciones. La pregunta “¿qué quiere decir con que no las conocían?” obliga a que el estudiante ponga en juego su propia representación de qué significa “conocer las fracciones” lo que nos conduce a definir lo que significa “saber matemáticas” para este estudiante “E3. Haga de cuenta que yo también cometí un error, les anoté $\frac{1}{2}$ en una hoja y les pregunté ¿qué número es éste?, ¿cómo se le llama a este tipo de números?, como no sabían... no olvídenlo, dejé así la situación hasta el momento en que confrontamos entre ellos y ya miré y las puse las fracciones, pero cuando les puse el número en fracción me di cuenta que los niños no conocían”.

Hasta este momento no podríamos afirmar categóricamente que la representación de este estudiante sea que las matemáticas son un conjunto de símbolos que los niños deben aprender a manipular, pero para este caso, el hecho de que los alumnos no supieran identificar un número se convirtió en un indicador de una falta de conocimientos. Lo interesante también en este fragmento de registro es el reconocimiento del estudiante de que hubo un error en la forma de plantear la pregunta a los alumnos; esta actitud de

autoreconocimiento es lo que abre las posibilidades para ir cambiando las prácticas de enseñanza y, como apreciamos en el registro, es posible que aparezcan desde los salones de clase de la escuela normal, es decir, en el mismo proceso de formación docente inicial los estudiantes son capaces de hacer ejercicios de reconocimiento de sus errores.

La intervención del profesor, dirigiéndose a todo el grupo, al parecer pretende instalar una forma de trabajar el contenido

Mo. Aquí lo que hubiera sido interesante es que los niños sin saber, la idea es de cómo lo intentaron hacer, sí, no tienen que poner una situación en la que tengan que decir cómo se representa, sí, eso lo vamos viendo más adelante, es decir, es más importante que los niños sepan hacer particiones adecuadas, que los niños se den cuenta de estos tipos de repartos como ahorita mismo decían los equipos, un pastel a cada uno y de otro pastel le dieron la mitad, y hubo 3 niños que dividieron los 3 pasteles a la mitad y luego le dieron la mitad a cada uno, son 2 maneras de hacer el reparto, qué bueno que aparezcan en el grupo, que bueno que surja esto antes de la representación gráfica, esa, muy bien Luis, hubo mucho relajo en su grupo, pero dijimos que eso se vale,

La primera frase de este registro puede ser el principio del “anclaje⁴⁹” de una representación sobre la forma de trabajar el contenido, cuando dice “*aquí lo que hubiera sido interesante es que los niños sin saber, la idea es de cómo lo intentaron hacer*”, manda dos mensajes importantes, con el primero les devuelve la responsabilidad a los estudiantes para tomar decisiones, algo así como “piensen en la conveniencia de hacerlo de esta manera”, con el segundo les remarca que en su perspectiva didáctica, los niños deben intentar hacer particiones adecuadas, explorar diversos procedimientos antes de las representaciones gráficas o simbólicas... y este es un ejemplo de “anclaje” de una representación que cuestiona la representación de los estudiantes, que rectifica un conocimiento experiencial ¿para cuántos estudiantes es familiar el hecho de que primero aprenden el simbolismo matemático y posteriormente lo aplican a la resolución de problemas?

Finalmente, sobre esta parte referente a la discusión sobre los procedimientos para transponer los conocimientos a la escuela primaria, en alguno de sus comentarios se desliza un modelo de enseñanza por homología, por ejemplo cuando afirma “*a lo mejor a ustedes se les hizo muy sencillo, pero para los niños es importante que tratemos de hacer este tipo de actividades*” (CP 3), refiriéndose a los problemas de reparto.

⁴⁹ El anclaje se refiere a la incorporación de los eventos, acontecimientos, significados extraños, a categorías y nociones familiares en grupos sociales específicos, en este caso el grupo clase es un grupo específico, inmerso en una tarea específica.

*“Las **estrategias basadas en la homología**: Que proceden por analogía entre la formación del adulto y aquella del niño. ‘Sus defensores insisten acerca de la necesidad de hacer coincidir las metodologías utilizadas en la formación de profesores con aquellas que se ponen en práctica en las clases’”. (Artigue, 1995, pág. 16)*

Decíamos que al parecer en la afirmación del profesor se puede ver esta estrategia formativa, en tanto el hecho de reconocer que a los alumnos se les hizo “muy sencillo”, al mismo tiempo es un reconocimiento de que los problemas a resolver son adecuados para los niños y cuando los estudiantes los resuelven y analizan se dan una idea de cómo trabajarlos en la escuela primaria; incluso la misma metodología que se trabaja en las clases de la Escuela Normal se pretende que se deslice hacia la escuela primaria.

b) Análisis de los aspectos y propiedades básicas de las fracciones: Por aspectos y propiedades básicas de las fracciones estamos recuperando la conceptualización del profesor, quien al mismo tiempo recupera la idea de “mecanismos constructivos” de T. Kieren y trabajado explícitamente por Simón Mochón, los cuales a decir de él *“sirven como herramientas mentales para ir desarrollando los diferentes significados de las fracciones”*. (Mochón, s/f)

En el siguiente fragmento de clase se discutieron los aspectos y propiedades de las fracciones y los mecanismos constructivos,

Mo. Dicen que las fracciones tienen algunas propiedades, hay que ver una propiedad importante que no hemos visto aquí, ahorita la van a ver así pues de paso, si pero las fracciones tienen algunos aspectos o propiedades de la enseñanza, díganme algunas

Ao. Que son continuas

Mo. Ah bueno, la idea es que tiene que ver con lo continuo y lo discreto, son más bien magnitudes, son recursos para la enseñanza, eh, continuo y discreto, continuo, continua, discreta, magnitudes, si, magnitudes continua y discreta, algunos aspectos o propiedades cuales son

Ao. Dice ahí que la fracción aparece como fracturador⁵⁰

Mo. La idea que aparece como fracturador era aquí, en la parte todo, la fracción es fracturador

Ao. Yo creí que las fracciones requieren de una unidad de referencia

Mo. Si, nada más que eso que usted nos dice nos está ayudando a decir los mecanismos constructivos, verdad, pero está bien, a ver dejen les digo, los aspectos o propiedades de las fracciones, las fracciones tienen un orden, están de acuerdo?, y cuando les ponemos a los niños que ordenen fracciones tienen que

⁵⁰ En este caso el estudiante hace referencia al texto que se les encargó leer, titulado “Las fracciones: mecanismos constructivos y formas de presentación” de la autoría del mismo profesor sujeto de la investigación.

comparar (este concepto lo escribí entre paréntesis, como parte del orden), que es mayor $\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{3}$?, etcétera antes de poderlos ordenar, inclusive para ordenar tienen que comparar las fracciones, las fracciones tienen además un aspecto que es la equivalencia, y a la vez la equivalencia es un mecanismo constructivo también, si, a ver qué más podemos decir, un orden, comparación equivalencia, voy a mencionarlo, pero lo voy a poner de rojo porque ni siquiera lo hemos visto aquí (densidad) lo vamos a poner de rojo porque no lo hemos visto aquí, que es la densidad?, no lo hemos visto, si, pero es una de las propiedades más interesantes que tienen las fracciones, la densidad es que siempre entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ siempre es posible poner otra fracción, ¿díganme una fracción que sea mayor de $\frac{1}{4}$, pero menor de $\frac{1}{3}$?

As.- $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$

Ao.- No hay

Ao.- (diferente) Un cuarto y medio. (CP 8)

En este fragmento de registro, derivado del análisis de un texto (el que indicamos en la nota al pie número 50) se recuperan de manera global tanto algunos recursos para la enseñanza, como los aspectos, propiedades y mecanismos constructivos, tal y como apreciamos en la siguiente producción del pizarrón

SIGNIFICADOS DE LAS FRACC	ASPECTOS Y PROPIEDADES	RECURSOS P/ ENSEÑANZA
① Parte toda (fraccionador)	• Orden (comparación)	• Continuas
② Medida	• Equivalencia	• Discretas
③ Cociente	• Densidad	
④ Operador	$\frac{1}{4} - \frac{3}{10} - \frac{1}{3}$	
⑤ Razón	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{8}$	

Después de enunciadas, una de las propiedades a las que se da peso en el análisis es a la de “densidad”, precisamente por la idea que comentaba en el fragmento anterior, no la habían visto al menos en alguna clase de la Escuela Normal; la pregunta inicial es: *¿díganme una fracción que sea mayor de $\frac{1}{4}$, pero menor de $\frac{1}{3}$?* y aunque los alumnos adelantan algunas respuestas, éstas no son tomadas en cuenta en este primer momento; sin embargo quiero resaltar una de las respuestas de los alumnos, la que dice “un cuarto y medio”, ello lo resalto porque manifiesta un conocimiento implícito, pero que en este caso no lo lleva a la respuesta, dado que si estamos buscando un número que esté entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$, de primera impresión parece que su hipótesis es que considerando la mitad del número menor añadida a sí mismo, quedará contenido en el rango solicitado, sin embargo no es así, tal y como lo podemos verificar.

Matemáticamente su interpretación debería ser: $\frac{1}{4} + (\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$; la mitad de un cuarto es un octavo, y “un cuarto y medio”, entendido como $\frac{1}{4}$ más su mitad, es igual a $\frac{3}{8}$, al hacer la comparación de fracciones, usando para ello sus correspondientes equivalencias, tenemos que $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$; $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$; y $\frac{1}{4} = \frac{6}{24}$; como apreciamos $\frac{3}{8}$ es mayor que cualquiera de las otras dos, en tal sentido no cumple la condición enunciada en el problema.

Ahora bien, dada la dificultad de los estudiantes para “encontrar” la fracción “mayor de $\frac{1}{4}$, pero menor de $\frac{1}{3}$ ”, el profesor induce a usar los números decimales para validar, dice:

Mo. A ver dejen usamos los decimales para validar, porque en números decimales a cuanto equivale,

Ao. a 5

Aa. .25

Mo. $\frac{1}{4}$ es igual a 0.25, $\frac{3}{10}$ es igual a 0.30, $\frac{1}{3}$ es igual a 0.33 y si es cierto que es mayor que $\frac{1}{4}$ pero es menor que $\frac{1}{3}$,

Aa. Si

Llama la atención que no fueron los estudiantes los que recurrieron a esta estrategia; la resalto porque en el siguiente fragmento de registro, que me parece ilustra muy bien el proceso para llegar al concepto de “densidad”, es precisamente este recurso el que lo facilita; veamos cómo se dio en el salón de clase:

Mo. Bien déjenme lo hago más complicado, porque este es el asunto de este

Aa. Ah, más complicado

Mo. Que va, ahorita las que nos interesan son estas dos, vamos a buscar una fracción que sea mayor que $\frac{1}{4}$, y menor que $\frac{3}{10}$

Aa. $\frac{3}{12}$

Ao. $\frac{3}{15}$

Ao. $\frac{2}{16}$

Aa. $\frac{4}{16}$

Ao. $\frac{9}{16}$

Aa. $\frac{7}{16}$

Aa. $\frac{1}{16}$

Ao. quince nuevávonos

Ao. quince nuevésimos

Ao. (otro) Es demasiada información para mí

Mo. ¿Es demasiada información?

E3.- La densidad es cuántas fracciones caben dentro de (es interrumpido por el maestro)

Mo. No, una fracción, la idea es que siempre, siempre en medio de 2 fracciones será posible que encontremos otra fracción

Ao. Cuatro veintuavos

Mo. En cambio cuando uno habla de los números naturales, entre el 25 y el 27, ¿cuál es el número que va aquí? (señala una línea que escribió en el pintarrón en

medio de los dos números indicados) el 26, cuantos hay en medio de estos dos
Ao. Son números naturales

Mo. Es número natural, si esto mismo lo aplicamos a las fracciones, siempre en medio de 2 fracciones será posible encontrar otra más, si, por eso aquí es donde aparecen los otros números que conocemos nosotros, si, que son los números decimales, entre $2/10$ y $3/10$, habrá algún otro número que vaya aquí?

Ao. si hay

Aa. $3/11$

Ao. Dos punto cinco dieciavos (sic)

Mo. La idea es que es más fácil encontrar los decimales

Ao. $9/12$

Ao. 0.21

Ao. $5/20$ es $1/4$

Mo. Los niños han encontrado una estrategia excelente, excelente

Aa. cual?

Ao. pero los niños franceses o japoneses, aquí no...

Ao. Multiplicar

Ao. Dividir

Mo. Dividir o multiplicar, las fracciones, ¿ $2/10$ a cuántos centésimos es igual? A 20, ¿el 3 décimos a cuántos centésimos es igual?

$\frac{1}{4}$	$3/10$
$20/100$	$30/100$

(esto aparece en el pizarrón; en realidad sólo escribió un cero adyacente al 2 y al 10 para pasar de $2/10$ a $20/100$)

Aa. a 30

Mo. 30, ¿Cuántas fracciones podemos encontrar aquí?

Ao. Uuuuu

Aa. $3/12$

Mo. ¿Si ubican?, listos, vamos en $2/10$

Ao. 25

Ao. $25/100$

Mo. Voy a poner aquí $20/100$ 21, 22, 23, 24 centésimos...29, $30/100$

Ao. $25/100$

Mo. Estas fracciones es posible que vayan entre $2/10$ y $3/10$, la fracción, listos, ¿será posible encontrar una fracción que vaya entre $21/100$ y $22/100$?

Ao. Si, $215/1000$

Mo. Estos los convertimos a milésimos y entonces encontraremos aquí (señala el rango)

$210/1000$ $220/1000$

Mo. A ver ¿digan una que vaya en medio de éstas?

Ao. $5/1000$

Ao. $211/1000$

Mo. Diga otra

Ao. $215/1000$

Mo. 215, va de nuevo ¿será posible que entre $215/1000$ y $216/1000$ haya otra fracción?

Aa. Si

Ao. 1251 diez milésimos

Ao. 2151 diez milésimos

Mo. Exacto, habrá algún punto en que se acabe esto,

Ao. No, millonésimos

Mo. millonésimos o diezmillonésimos, a lo que voy es a esto, entonces siempre en medio de dos fracciones, es posible que encontremos otro número más

Ao. Otra partecita

Mo. Otra partecita aun más pequeña, a ésta característica, ¿cómo se le llama a esta propiedad?

Aa. Densidad

Ao. Densidad

Mo. Densidad que es una inmensidad, ya está pues nos brincamos esa, si de una manera rápida, esta es una propiedad que tienen las fracciones, el orden, la equivalencia y la densidad, son las 3 más importantes. (CP 8)

La idea de recuperar este fragmento de registro tan extenso obedece al hecho de querer ilustrar cómo se dio todo el proceso que llevó al profesor a aclararles el concepto de “densidad” a los estudiantes; sin embargo para fines analíticos vamos a irlo descomponiendo un poco más.

Notemos en primer término que ahora retoma el $3/10$ que encontraron entre todo el grupo, al resolver el problema anterior, con la intención de delimitar un intervalo cerrado al plantear el problema, ahora considerando las fracciones $1/4$ y $3/10$, dice “*vamos a buscar una fracción que sea mayor que $1/4$ y menor que $3/10$* ”; así planteado el problema, aunque esperaríamos que los estudiantes recuperaran el procedimiento utilizado previamente, sin embargo vuelven a lanzar respuestas al parecer sin una estrategia definida e incluso sin denominarlas correctamente, como el caso del estudiante que dice “cuatro veintuavos”, sin que en este momento haya cuestionamiento alguno por parte del profesor; en cambio su estrategia es recurrir a la analogía, como apreciamos en el siguiente recorte de registro:

Mo. No, una fracción, la idea es que siempre, siempre en medio de 2 fracciones será posible que encontremos otra fracción

Ao. cuatro veintuavos

Mo. En cambio cuando uno habla de los números naturales, entre el 25 y el 27, ¿cuál es el número que va aquí? (señala una línea que escribió en el pintarrón en medio de los dos números indicados) el 26, cuantos hay en medio de estos dos

Ao. Son números naturales

Mo. Es número natural, si esto mismo lo aplicamos a las fracciones, siempre en medio de 2 fracciones será posible encontrar otra más, si, por eso aquí es donde aparecen los otros números que conocemos nosotros, si, que son los números decimales, entre $2/10$ y $3/10$, habrá algún otro número que vaya aquí?

Dicha analogía se establece cuando compara el campo de los números naturales, para distinguirlos de las fracciones.

También en el anterior registro podemos apreciar el concepto de densidad que el profesor les está transmitiendo: “*siempre en medio de dos fracciones será posible encontrar otra fracción*”, sin embargo hay que resaltar que al referirse a “en medio” no se refiere a exactamente a la mitad de la secuencia numérica o del intervalo cerrado entre dos

números racionales, sobre todo porque valida la respuesta 211/1000 como aceptable, es decir el concepto de en medio, en su discurso, quiere decir entre dos fracciones. Lo interesante es que algunos alumnos sí responden a la pregunta de encontrar la fracción, con el número que está en medio del intervalo, como por ejemplo en el caso de las fracciones 25/100 y 215/1000

De cualquier manera, este tipo de conceptos y su traducción en el discurso del salón de clase debe mantenerse vigilado, sobre todo si consideramos lo que nos dicen Antibi y Brousseau “*las nociones presentadas con más insistencia son aquellas donde las destransposiciones posteriores son más delicadas*” (Antibi & Brousseau, 2002); en tal sentido si se instala en la comprensión de los estudiantes el concepto de “densidad” como “el número que está en medio”, se estará instalando una idea incompleta, sobre todo si consideramos que dos números racionales cualesquiera, a/b y c/d , en los que se cumple que $a/b < c/d$, constituyen en sí mismos un conjunto especial llamado intervalo cerrado, el cual tiene la propiedad de densidad. Dicha propiedad establece que entre dos números racionales así definidos puede considerarse una infinidad de números racionales de la forma m/n , tales que para cualquiera de ellos se podrá establecer que $a/b < m/n < c/d$.

Considero que la afirmación debió de matizarse en los siguientes términos, entre dos decimales —en lo que constituye otra diferencia con los naturales— siempre es posible incorporar otro decimal (propiedad de densidad, válida para todos los racionales) o también, entre dos fracciones siempre es posible encontrar otro conjunto de fracciones que cumpla con la condición indicada de estar entre.

En el siguiente fragmento de registro apreciamos la estrategia del maestro para llevar a los estudiantes a encontrar las fracciones contenidas en un intervalo

Mo. Los niños han encontrado una estrategia excelente, excelente

Aa. ¿cuál?

Ao. pero los niños franceses o japoneses, aquí no...

Ao. Multiplicar

Ao. Dividir

Mo. Dividir o multiplicar, las fracciones, ¿2/10 a cuántos centésimos es igual? A 20, ¿el 3 décimos a cuántos centésimos es igual?

Esta frase es una provocación hacia los estudiantes y al mismo tiempo denota una estrategia indirecta del profesor para hacerles llegar un conocimiento, al decirles “*los niños han encontrado*”, implícitamente les está mandando el mensaje del papel activo de los

estudiantes en la búsqueda de conocimientos, sin embargo el problema es que luego es él mismo quien conduce el proceso, al no devolverles la responsabilidad en la búsqueda del procedimiento.

Ahora bien, hasta esta parte de la clase se ha trabajado el concepto de “densidad”, la pregunta ahora es ¿los estudiantes lo comprendieron?, considero que el siguiente fragmento de registro nos ayuda a aclararla; este fragmento corresponde a la misma clase, en un momento posterior:

Mo. (...⁵¹) sobre el asunto de la densidad Ricardo, si más o menos, ¿que será la densidad entonces?

R.- La fracción que se encuentra en medio de dos,

Ao. De dos fracciones conjuntas

Ao. No precisamente en medio

Mo. ¿En qué consiste la densidad en las fracciones José?

J.- Yo creo que todo el rango, todo el ramo de fracciones que podamos encontrar dentro de cierto rango

Ao. El rango dentro de cierto rango

Mo. ¿Cuántas fracciones hay en medio de un rango?

Aa. No

Mo. Es muy directo

Ao. ¿Cuáles?, infinitas

Ao. Por ejemplo 3 3 3 3 3

Ao. Es infinito

*Mo. Es infinito, esto quedó más claro ya sabemos que la característica, de la densidad es en las fracciones decimales, si, las fracciones, en las fracciones decimales forman parte en los mismos números, de los números racionales (...)
(CP 8)*

Como apreciamos en este fragmento, aparecen las dos ideas que se han estado trabajando sobre el concepto de densidad, en primer término aparece la idea de “*la fracción que se encuentra en medio de dos*”, la cual coincide en cierta medida con la idea aportada por el profesor “*en medio de dos fracciones siempre hay otras*”, es decir, al parecer el estudiante reinterpretó la frase del profesor y dedujo que la densidad en las fracciones está referida a la fracción que está en medio; aquí apreciamos también que al ser cuestionado el concepto, la siguiente aportación se acerca más a la definición formal, en los siguientes términos: “*todo el ramo de fracciones que podamos encontrar dentro de cierto rango*”.

⁵¹ Cuando coloquemos tres puntos suspensivos dentro de un paréntesis estaremos indicando que se recupera sólo la parte del discurso del profesor que interesa para el análisis que se está realizando; sin embargo siempre tendremos la precaución de que estos recortes no cambien el sentido de su discurso, esto se puede comprobar yendo a la transcripción completa que incluimos en los anexos.

Al hacer el análisis de esta clase completa (corresponde a la última sesión grabada y se estuvieron recapitulando tanto los significados como los recursos para la enseñanza y los aspectos básicos de las fracciones), apreciamos que, aunque hay un interés por que los estudiantes comprendan dichos aspectos, no se ve un acercamiento a los aspectos formales de las matemáticas, cuestión que es fundamental en la parte de institucionalización de los saberes; es decir, trabajar con el saber matemático, en determinado momento del proceso, también implica trabajar con el lenguaje formal que le es inherente.

Por otro lado, otra de las preocupaciones del profesor por hacer saber el conocimiento especializado a los estudiantes, tiene que ver con el conocimiento de los recursos para la enseñanza de las fracciones, en tal sentido, a lo largo de las clases videograbadas encontramos la referencia a tres tipos de recursos principales: el reconocimiento por parte de los estudiantes de los tipos de magnitudes con las cuales presentar las fracciones (continuas y discretas); las formas de representación (concreta, gráfica –circular o rectangular- y simbólica); y el conocimiento de la recta numérica como un recurso para trabajar diferentes aspectos de las fracciones (ubicación, orden, equivalencia y densidad).

- Respecto a los tipos de magnitudes con las cuales trabajar las fracciones, desde la primera sesión de clase videograbada se hace alusión a la importancia que tiene, desde el principio de la enseñanza del tema, trabajar con los dos tipos de magnitudes. El siguiente fragmento de registro es ilustrativo al respecto:

Mo. En los libros de texto vimos que a partir de tercer grado los primeros fraccionamientos son a partir de medios, de cuartos

Aa. Es que hablamos de cantidades continuas no de discretas

Mo. Eso es importante, para trabajar las fracciones hay que plantear el asunto de los repartos, pongo aquí los repartos hay dos tipos de repartos o dos cantidades, continuas, ¿cuáles son esas?, pónganme un ejemplo y discretas, díganme un ejemplo

Ao. Que a una le toca más de la unidad

Mo. mmm no les puede tocar más de una unidad

Aa. no es cuando una para él y luego

Mo. A ver cómo, otra vez Ernesto

E.- las continuas no son las que lo parten y luego ya empiezan a entregarle uno a cada uno y ya

Ao. partes iguales

Mo. Lo parten y luego empiezan a entregarle uno a cada uno, eso lo hemos estudiado aquí como el reparto, uno a uno, y no es así el reparto, si dijimos van a repartir 36 canicas entre

Ao. Entre 4

Mo. Entre 4 niños, ¿de cuántas le toca a cada niño?, y los niños empiezan a repartirla de una a una canica, ese es el reparto, a ver déjenme lo voy induciendo porque parece

que no lo recuerdan bien, cuando uno reparte canicas, canicas, ¿qué más puede repartir?, muchas galletas, dulces, muchos dulces

Aa. Chocolates

Mo. chocolates, muchos chocolates, ¿estamos hablando de cantidades continuas o discretas?

Ao. Continuas

Ao. Discretas

Mo. Discretas verdad, discretas, cuando en el reparto hablamos de canicas, hablan de dulces, cosas que no se dividen

Ao. tazos

Mo. tazos, exacto son las que no se dividen, y cuando habla uno de cantidades continuas

Aa. Pastel

Ao. Es como el pastel

Mo. el famosísimo pastel hay algo que dijeron aquí importante que tenemos que tener presente para las fracciones, creo que por ahí lo citaba usted Jonathan alguien lo citó por ahí,

A (j).- ¿cuál? (CP 1)

Aquí cortamos el registro para no dejar pasar algunos comentarios, en primer lugar como podemos notar, los estudiantes manifiestan confusión respecto a la distinción entre las cantidades continuas y las cantidades discretas, lo cual obliga al profesor a irlo “induciendo”, en tal sentido y dado los ejemplos (chocolates, canicas, galletas) se va generando la idea de que las cantidades discretas “son las que no se dividen”; por otro lado, las cantidades continuas aparecen representadas por el “famosísimo pastel”, considerándolo como unidad (entero) divisible o fraccionable.

Para mayor claridad, plantean los siguientes ejemplos:

Mo. Hay repartos que a los alumnos les puede tocar de a más de una unidad o menos de una unidad, alguien lo cito por aquí, ¿cuánto le toca?, pongan un ejemplo en que le toque más de una unidad

Aa. Cuando la cantidad sea mayor

Ao. Que la de niños

Mo. Cuando la cantidad a repartir sea mayor a la cantidad de niños, cuando hemos visto que es mayor el

Ao. denominador

Mo. denominador que

Ao. numerador

Mo. que el numerador, el clásico que hemos visto aquí y que ustedes pusieron en práctica fue el de vamos a repartir 3 pasteles

Ao. entre 2 niños

Mo. entre 2 niños, ese es un ejemplo de un reparto que le toca más de una unidad y que es un ejemplo de magnitudes continuas, un ejemplo de reparto con magnitudes discretas, un ejemplo vamos a ver, vamos a partir del mismo ejemplo, 36 canicas entre 4 niños, ¿cuántas canicas le van a tocar a cada niño?, estaríamos hablando reparto con magnitudes discretas. (CP 1)

¿En qué medida el uso que se le da a los referentes concretos ayuda o dificulta la comprensión de los conceptos? ¿De qué tipo de cantidad estaríamos hablando si en lugar

de repartir 3 pasteles entre 2 niños, repartiéramos 36 pasteles entre 4 niños? Los ejemplos usados en esta clase, son ejemplos clásicos para ilustrar el concepto, y que al parecer logran materializarlo, es decir, dejar la idea del tipo de cantidad sobre la cual se opera.

Otro asunto importante a considerar, en este caso, es el uso como sinónimo de “cantidad y magnitud” para luego agregarle el calificativo de continua o discreta; si por definición, la magnitud es la propiedad física que puede medirse, y la cantidad es el valor numérico que resulta de la medición, entonces me parece que el concepto más adecuado, en el contexto de las fracciones es el de tipos de magnitudes, sean continuas o discretas, dependiendo de la unidad con la cual sean medibles, por ejemplo si la magnitud es continua, su cantidad se determina por el método llamado medición. El método de medición de la cantidad de una magnitud continua consiste en contar cuántas veces esta cantidad es mayor (o menor) que una cantidad unidad. En cambio, si la magnitud es discreta, su cantidad se determina por el método llamado enumeración. El método de enumeración de la cantidad de una magnitud discreta consiste en contar cuántas cantidades unidad contiene. En un sentido amplio, el pastel lo podemos usar tanto como una magnitud continua (y al hacer un reparto, la cantidad unidad de referencia para el reparto nos lleva a una fracción), y como una magnitud discreta (si usamos la enumeración para saber cuántas cantidades unidad contiene). Es decir, lo que determina la relación de magnitud no es el objeto concreto, sino las relaciones de medición que le apliquemos, aunque en su presentación fenomenológica ayuden a la construcción del concepto, en su comprensión matemática total sí debemos tener presente que pueden “funcionar” de determinadas maneras. Hago esta aclaración porque más adelante tendremos oportunidad de ver cómo al analizar una lección del libro de texto del sistema educativo francés, se presenta esta situación problemática del uso de las magnitudes (Crf. Peltier, Briand, Ngono, & Vergnes, 2009).

En el siguiente fragmento de registro vemos cómo, después de varias clases (recordemos que los anteriores registros corresponden a la primer sesión de clase), en la 8a clase grabada, los alumnos aún manifestaron confusiones en esta distinción

Mo. (...) los recursos para la enseñanza, dijimos que tenemos magnitudes continuas y magnitudes discretas, hay que procurar tener como apoyo la representación, la representación gráfica, que no sean sólo representaciones de magnitudes continuas sino también discretas, y yo aquí les decía si los usamos como alumnos, ésta, ustedes serían una magnitud discreta, si dijéramos aquí en el salón 2/3 le va al cruz azul
Ao. Uuuu

Mo. Debiera ser más, pero a ver ¿a cuánto equivale, a cuánto equivale? Representándolo en números y esa sería la manera discreta

Ao. Profe a mí se me confunde todavía, las continuas son las que se van a contar, no, ¿son las continuas?

Mo. A ver...

X.- yo creo que las continuas son las que se pueden contar por ejemplo las canicas y todo eso, no

Aa. no al revés

Mo. Las discretas son las que se pueden contar: canicas, lápices, alumnos y las continuas

Aa. Pasteles

Mo. No es posible contarlas, solo repartirlas, como el pastel, una barra de chocolate,

Ao. Y hay combinadas como el problema de una barra de chocolate pero dividida en 3

Mo. Ándele

Pareciera ser que el nombre, la palabra, es fuente de confusión, si es continuo se puede contar, sin embargo se hace la precisión de nuevo: “las discretas son las que se pueden contar” y las continuas “no es posible contarlas, sólo repartirlas”; evidentemente de manera implícita se hace referencia a la distinción que planteamos en líneas anteriores, las magnitudes continuas se comparan con una cantidad unidad y las magnitudes discretas pueden ser enumeradas.

Un ejemplo podría ayudarnos a esta clarificación; tenemos el siguiente problema:

Juan quiere repartir, en partes iguales, 39 bolitas entre 6 niños.

María va a repartir, en partes iguales, 39 hojas entre 6 niños para hacer un collage. ¿Quién podrá repartir todo lo que tiene? ¿Cuánto le darán a cada uno en cada caso?

Notemos como tanto el dividendo como el divisor son el mismo, sin embargo el contexto del problema nos puede llevar a diferente cociente, ya que en un caso el cociente es un número Natural (6) mientras que en el otro es una fracción que también puede expresarse como número mixto ($13/2$ ó $6 \frac{1}{2}$). Esto es consecuencia de que en el primer caso estamos frente a una magnitud discreta, mientras que en el segundo se trabaja con una magnitud que, aún cuando es discreta, funciona, en esta oportunidad, como continua. Esto se debe a que las hojas se usarán para un collage por lo que es posible cortarlas. No sería lo mismo si éstas fuesen destinadas a otro uso.

- Respecto a los **tipos de representación**, desde el análisis de las clases vemos un uso sistemático de la representación gráfica, con predominancia sobre los otros dos tipos (concreto y simbólico), como ejemplo recordemos

las diferentes imágenes que ya hemos incluido en este capítulo, sobre todo las imágenes tomadas desde el pintarrón.

Las representaciones gráficas se usan para visualizar las diferentes fracciones, tanto como recursos o estrategias en la resolución de los problemas; sin embargo, estas representaciones gráficas deben ser muy cuidadosas, sobre todo en el planteamiento de problemas, o como recurso para comparar fracciones; en el siguiente fragmento de registro se presentó una reflexión al respecto.

Mo. Hay otra forma de trabajar con la representación gráfica eh, a la par de la representación, dividida entre dos no es nada más el problema

Aa. ¿Pero la representación gráfica tiene que tener en cuenta la unidad de referencia?, no,

Mo. ¿Qué quiere decir eso?

Aa. Por ejemplo que $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4}$ son equivalentes, pero si uno divide uno en $\frac{1}{2}$ y el otro en $\frac{2}{2}$ ya no

Mo. Ya no es lo mismo

Aa. No es lo mismo

Ao. Es como el ejemplo que presentaba la, como se llama, la número 2, que presentaba de $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$, que ahí el de $\frac{1}{2}$ estaba más pequeño que el de $\frac{2}{4}$, la cantidad era que $\frac{1}{2}$ era más pequeño que $\frac{2}{4}$,

Mo. Eso es lo importante ver la unidad, la representación de la unidad. (CP 8)

Cuando la alumna menciona que la representación gráfica tiene que tener en cuenta la unidad de referencia, se está refiriendo a que en la comparación de fracciones, la unidad de referencia es un criterio de comparación, es decir, nos es lo mismo $\frac{1}{2}$ de una hoja de papel (folio), que $\frac{1}{2}$ de la habitación, aunque la representación simbólica de la fracción sea la misma; en este sentido nos referíamos a ser cuidadosos al usar representaciones gráficas, como modelización de la realidad, éstas deben estar perfectamente contextualizadas al problema por resolver.

- Finalmente, otro recurso para la enseñanza, citado en el análisis de clase del profesor, es la recta numérica, principalmente utilizada en la ubicación, orden y comparación de fracciones.

c) La construcción de los diferentes significados de las fracciones: De manera curricular se hace alusión a la construcción y comprensión por parte de los docentes en formación, de los diferentes significados que puede tener la fracción; como apreciábamos en la primera parte de este capítulo, cuando presentamos la propuesta curricular correspondiente al curso de Matemáticas y su enseñanza II y en específico al bloque de los

números racionales [Cfr. Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila, 1999]; de igual manera, el interés manifiesto en la formación docente inicial, porque los estudiantes dominen los diferentes significados de las fracciones, debe seguir presente, sobre todo porque, “*no obstante ser uno de los objetos de investigación más trabajado durante ya dos décadas, las fracciones y los conceptos asociados a ellas, permanecen como el tema de aritmética que presenta mayores dificultades al finalizar la educación primaria, según se constata en un estudio realizado en una población de alumnos amplia y diversa*”, (Cfr. Eudave y Ávila, 2001; citados en López y Mota, 2003, pág. 64) en tal sentido su estudio y comprensión por parte de los docentes en formación podría contribuir a remontar estas dificultades.

Evidentemente ello explica por qué encontramos, en todas las sesiones de clase, alusión explícita a cada uno de ellos, por supuesto con diferente énfasis, según el tema principal de la clase.

Coincidimos con Wong y Evans, cuando afirman que

Aunque el símbolo de fracción carece de significado físico y contexto (Lamon, 2006) tiene muchas interpretaciones, incluyendo, parte / todo, cociente, medida, razón y operador (Kieren, 1980). Aunque no es independiente, cada interpretación permite ver los números racionales desde otra perspectiva lo que proporciona una base para desarrollar una comprensión del número racional (Kieren, 1980) [citado en (Wong & Evans, 2008, pág. 597)].

En este mismo sentido, estos son los diferentes significados a desarrollar, que plantea el programa oficial de la Licenciatura; ahora bien ¿de qué manera se trabajaron en el escenario de la escuela Normal? ¿Qué dificultades se presentan para su comprensión? Recurrimos a los fragmentos de registro y a las transcripciones completas para documentar estos procesos.

- **El significado de la fracción como reparto.**

Del análisis de las grabaciones de clase, no encontramos una en la cual los estudiantes trabajaran este significado, como contenido, a partir de actividades propuestas por el formador de profesores, sin embargo, hay dos tipos de actividades que contribuyeron en su construcción y/o revisión. La primera actividad, realizada en la primera clase grabada, tiene que ver con el análisis de este significado a partir de la revisión de dos

videos de clase de los alumnos, es decir, se discute el significado de la fracción como reparto en el contexto de las clases de los propios estudiantes.

En este sentido, después de observar un fragmento de clase, seleccionado por el formador de profesores, se plantea lo siguiente:

Mo. si, estaban trabajando, Luis ahorita me permite las evidencias de lo que hicieron los niños, si quiere pase para que las vean sus compañeros, a ver si alcanzaron a identificar las consignas, la primer consigna era 3 pasteles para

Aa. para 2 niños

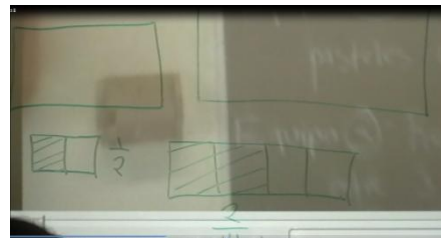
Mo. para 2 niños, 3 pasteles para 2 niños, el segundo era 2 pasteles

Aa. para 4 niños

Mo. para 4 niños, el último era 1 pastel para 5 niños, los niños que dicen que iban a dividir un pastel para 3 niños recuerdan ese, un pastel para 3 niños

Aa. si que no lo hicieron

Mo. si, decían los niños que quedaba $\frac{1}{3}$, pero no pudieron dividir los 3 tercios, se fijaron que eran distintos, y hay una cosa que no se si alcanzaron a percatar porque pasó muy rápido, voy a ponerlo aquí sí, (lo dibuja en el pizarrón), un pastel era de un tamaño y el otro pastel era de otro tamaño, entonces cuando eso sucede, entonces los niños se generan dificultades a veces en la manera de concebir, de concebir la representación gráfica de las fracciones, porque miren se encuentra uno con que ahora resulta con que este podemos decir que es un medio de acuerdo, pero luego resulta con que esto (señala la otra figura de rectángulo que dibujó en el pizarrón), que esto son $\frac{2}{4}$, que noción creen ustedes que se forman los niños de esto, la idea es que estamos favoreciendo equivalencias, ¿pero a que confusión los llevaría esto?



(h).- en el tamaño de esas

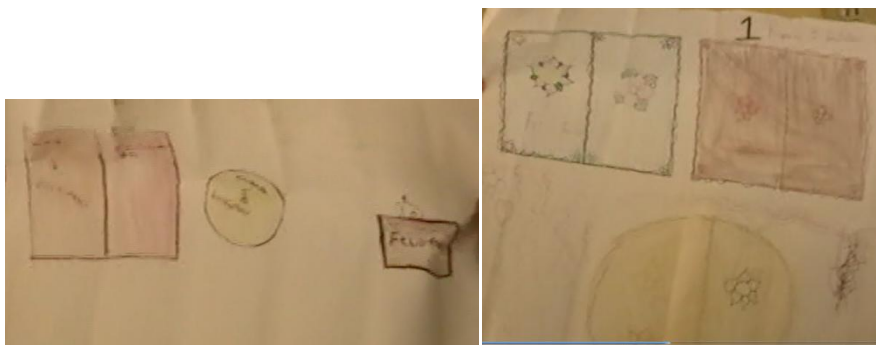
Mo. Si, entonces quien aquí de ustedes aquí concluía que en las fracciones es importante la unidad de referencia,

Ao. Entonces cuando nos dice repartir pasteles habrá que poner la referencia de que los pasteles sean iguales, que sean del mismo tamaño

Mo. Así es porque todos los niños se forman la idea como aquí que $\frac{2}{4}$ es más grande que $\frac{1}{2}$, y es lo que pasó ahorita, es lo que falló, bueno son 2 consignas distintas, vamos a ver en la clase de I4 que I4 les da los pasteles ya hechos, aquí están, aquí Luis les pidió que los dibujaran y lo que pasa es que los niños los dibujaron de diferente tamaño,

Es necesario aclarar que la estrategia didáctica de este estudiante fue, después de darles la consigna, dejar que los niños hicieran sus propios dibujos, esta decisión fue la que favoreció que aparecieran este tipo de dificultades, principalmente asociadas al uso de la representación gráfica; sin embargo, ello es lo que le permite al profesor hacer la aclaración respecto a la importancia de la unidad de referencia en el reparto.

Este mismo contexto, el análisis de las producciones de los niños, como parte del trabajo de los estudiantes en las escuelas primarias, también da oportunidad para discutir respecto al saber matemático y ya no sólo respecto a los tipos de representación en el reparto; por ejemplo, cuando el estudiante muestra las producciones que hicieron dos equipos diferentes ante una misma consigna.



La consigna fue repartir “tres pasteles entre dos niños”, sin embargo al notar que hicieron producciones diferentes, en el análisis se comenta lo siguiente

Luis.- en este me dijeron que le sobraba de un pastel $1/2$ y acá ¿no sé si lo vieron? $3/2$,

E3.- Si, acá repartieron un pastel y medio, y ya repartieron los 3 pasteles a la mitad y le dieron un pastel entero a uno y luego otro pastel entero a otro y la mitad de uno, pero los que repartieron son de diferente tamaño,

Mo. Les tocó la misma consigna, pero cada equipo hizo repartos distintos,

Ao. sigue I4

Mo. ahí lo que me gustaría que luego nos platique Luis que en este caso, ¿qué es lo que aprendieron los niños en la validación?, ¿se dieron cuenta los niños de esto?, o ¿los niños no se percataron de esto?

Luis.- Haga de cuenta que ya cuando acabaron, pasó el equipo 1 y empezaron a explicar su repartición de cómo le hicieron,

Mo. 3 pasteles entre 2 niños

Luis.- entonces ellos tuvieron una confusión en poner $3/2$, porque aquí estaba 1, 2, y luego ponían $1/2$ abajo,

Mo. A ver no podían escribir $3/2$

Luis.- no podían escribir $3/2$, solo esto, ya al último le dije si $1/2$, esta cantidad, más $1/2$ más $1/2$, son $3/2$, entonces ¿cómo se pone esta cantidad?, y no sabían, ahí es cuando no hallaba cómo explicarles

Aa. Bueno y ¿los demás del grupo que? y eso que eran los más avanzados de los 4 eran los más avanzados,

Mo. ¿de qué grupo estamos hablando Luis?

Luis.- de 4º,

Mo. Bueno ¿entonces aquí los niños hicieron el reparto bien o qué tanto sabían de la representación?, no sabían la representación simbólica, pero es de lo que se trata que llegemos más adelante, lo interesante aquí sería como dice Bere que les preguntara al resto del grupo, ¿nadie supo del grupo cómo se escribía?

Luis.- ya al último pasó uno y ya lo hizo así

Mo. pareciera ser que ustedes ya no es necesario que nos entretengamos mucho en aclarar esto, de que hubiera sucedido si Luis les explica primero lo que son $3/2$,

2/2, 1/2, 2/4, o bien lo hacemos así y luego después llegamos a las fracciones, (CP 2)

Esta doble ejemplificación da pie para comentar respecto a los dos tipos de representación que los niños van aprendiendo: gráfica y simbólica, pero lo que llama la atención es cómo a partir de ellas se detecta el dilema del paso entre una y otra, es decir, los niños hacen la representación gráfica (reparten los pasteles, aunque sin considerar la equitatividad en la unidad de referencia), sin embargo al querer representar el resultado, de manera simbólica, ponen de manifiesto lo limitado de sus conocimientos, hasta ese momento (iniciando el cuarto grado de la educación primaria –la clase se grabó en los primeros días de octubre- y recordemos que en México, se inicia a trabajar con contenidos de fracciones hasta a mediados del 3º. Grado), no sabían escribir fracciones impropias.

Ahora bien, aquí no se trata de analizar las clases de los estudiantes (todavía, ello lo reservamos para el siguiente capítulo), pero en cambio sí quiero resaltar cómo se utilizan esos momentos para que el estudiante resignifique sus conocimientos sobre uno de los significados de las fracciones, a partir del análisis de su propia experiencia, lo cual le puede dar una mayor significatividad a sus aprendizajes profesionales.

Notemos incluso cómo estos aprendizajes se vinculan con la formación profesional, cuando el profesor se preocupa porque los estudiantes sean conscientes de lo que lograron que los niños aprendieran en la escuela primaria:

Mo. Ahí lo que me gustaría que luego nos platique Luis que en este caso, ¿qué es lo que aprendieron los niños en la validación?, ¿se dieron cuenta los niños de esto?, o ¿los niños no se percataron de esto? (CP 2)

Este tipo de cuestionamientos va mandando el mensaje a todo el grupo, de que como profesores no se trata de trabajar el tema y darlo por visto, sino que la intención es que verifiquen el logro de los aprendizajes; así dicha no tiene nada de extraordinaria esta afirmación, pero es relevante si consideramos que muchas de las veces en las prácticas docentes de los estudiantes para maestro, la preocupación está puesta en cubrir el requisito, asistir los días correspondientes a cada jornada y cumplir el requisito administrativo. Es por ello muy necesario y relevante que en la formación docente inicial, los momentos de análisis de las prácticas tengan este componente: ¿aprendieron los niños los contenidos planeados?

En el análisis de un segundo video de clase de los estudiantes, también se pueden apreciar las múltiples representaciones de los niños al resolver los problemas, pero sobre todo se articula la comprensión de este significado de las fracciones, con el enfoque de enseñanza y la pertinencia de los tipos de representación, así como las dificultades asociadas a ello; el siguiente fragmento de registro nos ilustra al respecto:

Mo. 12 pasteles entre 3 niños platíquenlos I4 cómo le hicieron los niños, I4. así lo hicieron como si fuera rectangular, yo lo que hice, si a la persona que le iba a tocar este pastel⁵², y muchos si se enojaban y yo les decía, ¿a ver cuál elegirías tu?, y decían que uno de estos, (I4 señala a sus compañeros su material con el que trabajo con los niños, donde elegían el tamaño mayor), y no sé porque, ya después cuando les dije que si no se enojarían hicieron este, entre 3, (en forma circular), medio chueco, y luego éste el que dice el profe que estaba atrás, es éste, por eso yo les decía que no lo recortaran porque les iba a salir mal, aquí hasta le rellenaron con otro pedazo, al momento que hicieron el reparto y lo recortaron, y luego les dije a ver fórmenme otra vez el pastel y ya no pudieron y luego dije como me llevo las evidencias, y les di otro papel para que lo pegaran aquí y ya no lo pudieron formar, de hecho una, de hecho una rueda la recortaron para que quedara

Ao. Parejo

I4. para que quedara la rueda, y éste también (muestra un círculo todo mal, que reconstruyeron los niños), uno me dijo que como que algunos niños, el niño que les cae más mal del equipo, le daban los pedazos más chiquitos y no lo pudieron formar otra vez el pastel y que más, pues fueron los repartos de 9, cosa que no, pues no da porque pues no, un equipo lo hizo con 8 pedazos y son líneas, 9 pedazos, no se puede

Aa. es un rompecabezas,

Ao. ¿Ninguno usó transportador?

I4.- estas son las niñas que lo hicieron a la primera vez(muestra los círculos divididos por las niñas), y les quedó bien, estos pusieron pedazos, y estos que no están iguales y otros que si se la mancharon, no quedó nada, por eso es que yo les decía que no lo recortaran para que pudieran corregir, y ya no tenía material, pero si muchos hicieron lo de reparto, como si fueran rectangulares y al final, y les dije que si se les hacia fácil y a unos sí, otros no porque no podían, y les puse actividades, y les puse pasteles rectangulares, 2 pasteles rectangulares y pasé a unos a que lo resolvieran y les dije que era igual y de volada lo dividieron, les puse otro pastel entre más personas y lo repartían igual, era más fácil, pero con esto (círculos), si batallaron mucho (CP 2)

En esta primera parte del registro vemos cómo, a pesar de tener material manipulable (en este caso círculos de papel), el tipo de representación genera dificultades, sobre todo en uno de los aspectos básicos para la comprensión del reparto, la equitatividad, es decir, el que todas las partes sean iguales; cuando se usa el modelo circular en el reparto,

⁵² Se refiere a que hubo un reparto inequitativo; como utilizó círculos de papel para que hicieran los repartos, entonces el equipo del que está hablando dividió el círculo en 12 partes, de manera vertical e intentando conservar el paralelismo entre las líneas trazadas, con lo cual obviamente las partes más alejadas de la línea central (diámetro) tenían un área menor.

pareciera ser que a los niños les causa más dificultades, sobre todo cuando no tienen la oportunidad de usar un instrumento auxiliar, como en este caso un transportador.

Ahora bien, volviendo al asunto, me parece que de aquí podemos inferir que para ella el modelo rectangular le será más útil en el proceso de enseñanza de las fracciones.

Continuando con el registro

Mo. es que no sabían cómo hacer las particiones para un pastel circular, si verdad, una cosa que no se alcanza a ver en los equipos, pero hacen muchas partes, se fijan que lo hacen primero en 4, luego de a 8, luego de 16, de a 16 partes, pero como en el equipo sólo son 3, entonces les toca de a 5 a cada niño y hay una que sobra y luego los niños la sacan, ¿para qué?, a fin de que a todos les tocara lo mismo para cumplir la consigna que les dijo la maestra, la maestra les dijo que todos fuera la misma parte, entonces a todos les daban 5 rebanadas y les sobraba una para que todos sean iguales

Ao. Ahí falta en la consigna de que tienen que repartir los 3 pasteles entre los 3 niños, para que les toque lo mismo y no sobre nada de los $\frac{2}{3}$, (CP 2)

Tres cosas más, en el proceso de aprendizaje de este significado de la fracción, sobresalen de este fragmento de registro: la primera tiene que ver con poner el acento en una estrategia básica de los niños, el doblado en mitades (cuando el material lo permite); segunda, cuando los profesores plantean restricciones en la consigna deben tomar conciencia de las consecuencias de ésta, en el ejemplo que se está analizando, la maestra organizó equipos de tres alumnos, entonces cuando los niños utilizaron la estrategia de hacer mitades de mitades, llegaron a 16 partes, y como tenían que repartir a “todos iguales”, repartieron 5 a cada uno y les sobró uno, en este caso se consideró la equitatividad, pero no la exhaustividad; y ésta última es precisamente la tercera cuestión que sobresale, en el proceso de comprensión del reparto, a la equitatividad la acompaña necesariamente la exhaustividad, tal y como lo menciona un alumno: *Ao. Ahí falta en la consigna de que tienen que repartir los 3 pasteles entre los 3 niños, para que les toque lo mismo y no sobre nada de los $\frac{2}{3}$; ese “no sobre nada” es precisamente lo que caracteriza la exhaustividad en el reparto.*

Mo. oigan y ¿qué piensan de esto?, ustedes trabajaron ésta o alguna de estas situaciones, ¿pero qué piensan?, fíjense en lo que estamos, estamos planteando situaciones en las que de manera constructiva se van acercando a las fracciones, pero otro procedimiento a la idea que les decimos, a ver niños este es un pastel, les damos las divisiones y ahora les pedimos iluminen $\frac{1}{4}$, frente a este tipo de actividades nosotros estamos planteando otras, eh, ¿qué piensan?, ¿cuál es la diferencia entre una cosa y otra?, ¿qué pasaría si les decimos ilumina $\frac{1}{4}$ y ya les damos la división hecha?

Ao. No, se le va a complicar

Mo. Es una actividad sin esfuerzo el que hacen los niños
Aa. Tampoco se les hacía...

Al inicio del análisis de este registro, comenté cómo el análisis de las clases de los mismos estudiantes para maestro se convierte en una oportunidad para precisar el enfoque, en este caso se le da mucho valor a la consigna como agente disparador de un tipo de enfoque, por un lado, no es lo mismo darles una figura (manipulable o no) previamente dividida, pero en las partes exactas del denominador de la fracción y pedirles que coloreen cierta fracción, que organizar al grupo y pedirles que hagan diferentes repartos, usando las mismas figuras (círculos o cuadrados del mismo tamaño y manipulables para todo el grupo); en el primer caso sólo aparecería el conteo de partes, mientras que en el segundo caso es necesario saber, y esta es la decisión más compleja, cómo dividir para que se cumplan las condiciones de la consigna: equitatividad y exhaustividad.

Sin embargo el punto más interesante es el “¿qué piensan?” que formula el profesor, dado que no sólo es un reconocimiento del papel activo de los docentes en formación sino que puede contribuir a instalar una forma de actuar en la docencia; esa devolución es la que genera la reflexión sobre los diferentes enfoques formativos y que contribuye a la destransposición de un saber didáctico en este caso.

Ahora bien, continuando con el registro, vemos la importancia del reconocimiento del conflicto cognitivo en los alumnos:

Mo. y la otra sería ¿si se fijan que, lo que hizo I4 de ponerles los pasteles más bien redondos que rectangulares, en verdad conflictuo a los niños?

Alumnos varios.- siii

Mo. Creó un conflicto, a diferencia de la clase que nos comentó Luis, todos los niños, casi la mayoría hizo pasteles rectangulares porque era más fácil,

Ao. Tienes que sacar iguales, ya estás en la honda de con transportador para que te queden, bueno a mí se me hace difícil repartir en círculo.

Ao. La niña que lo hizo bien, o sea como le hizo ahí,

Mo. El círculo el 3, verdad,

I4.- pero bueno no ocuparon regla ni nada pero, pues si

Mo. Mucho ensayo y error,

Aa. si tenía la noción de cómo hacerlo pero no tenía regla ni nada,

I4. pero aun así a lo mejor algún pedazo si estaba más grande que otro, pero yo a lo que me referi que si estuvo bien, porque hubo niños que hicieron el mismo reparto, pedazos de más, 9, cosa que no, yo a lo que me referi que estaba, no usaron regla ni nada pero si

Mo. Decía yo que no pudieron, ustedes me decían hace un momento que si todos los niños hacían la misma consigna se iban a copiar, ustedes aquí en este grupo vieron que se copiaron

Aa. no mucho

Mo. no mucho verdad, no estorbó que fuera la misma consigna y ¿ustedes creen que fue una mala regulación o una mala variable didáctica que uso I4 de usar pasteles redondos en vez de rectangulares?

Ao. no es mala,

Ao. buena

Mo. estuvo bien ¿verdad?

Ao. eh yo también le hice así,

Mo. Estuvo bien para calcular, luego les puso el ejercicio con pasteles rectangulares, para que lo pudieran hacer, entonces concluimos una cosa: hay que ponerle a los niños repartos distintos en los cuales les toque más de una unidad, y menos de una unidad, hay que ponerles repartos donde el objeto tenga diferentes formas. ¿para qué? ya vimos que esto en verdad es una cosa que conflictua a los niños. (CP 2)

Finalmente, en el análisis de este extenso registro, sobresalen otras dos cosas, ¿hasta dónde es conveniente ser flexibles con los niños al momento de que dividen una figura en partes equitativas? En este caso la representación social se aprecia a favor de la flexibilidad, del análisis de la clase podemos inferir esto:

Mo. Mucho ensayo y error,

Aa. si tenía la noción de cómo hacerlo pero no tenía regla ni nada,

I4. pero aun así a lo mejor algún pedazo si estaba más grande que otro, pero yo a lo que me referí que si estuvo bien,

Como vemos “a lo mejor algún pedazo si estaba más grande que otro, pero... si estuvo bien”, esta afirmación configura una forma común de considerar los repartos en la escuela primaria y en este caso no fue cuestionada, como consecuencia se puede configurar una representación social sobre el margen de error al hacer los repartos, enunciada en términos de la posibilidad de validar repartos no equitativos, pero que manifiesten gráficamente la noción que se esté trabajando.

Por otro lado, la conclusión a que se llega en esta sesión de clase es provisional, dado que sólo se recapitula lo que se ha estado viendo; no puede considerarse como una institucionalización de saberes específicos a este significado de la fracción, en tanto no aparecieron términos básicos que yo he estado utilizando para nombrar aspectos específicos del registro: unidad divisible (excepto unidad de referencia), equitatividad y exhaustividad.

Como complemento y fortalecimiento a este significado de la fracción “parte – todo”, si encontramos que en una de las clases se toca explícitamente la actividad “partes de partes” (citada en la página 224 y analizada en su contenido matemático en las páginas que le siguen), retomada del taller para maestros (Block, Schulmaister, Balbuena, &

Dávila, 1999). En tal sentido aquí sólo quiero enfatizar la representación social que trasmite el libro del taller, para ello recupero el texto tal y como lo plantea:

Actividad 5

Partes de partes

Los problemas en los que se aplica una fracción a otra fracción ayudan a profundizar en el significado de la fracción como partes de unidades.

Y concluye las actividades cuestionando el enfoque de enseñanza que prioriza el reparto a partir de figuras previamente divididas⁵³:

Los ejercicios en los que se pide que se marque una fracción de la superficie de una figura suelen ser poco interesantes porque, generalmente, la figura ya está dividida en el número de partes que indica el denominador, y solamente es necesario fijarse en el numerador.



"Colorea $\frac{1}{3}$ de la figura"

Ejercicios como el que acaba de realizar hacen necesario fijarse tanto en el numerador como en el denominador.

Es importante mencionar que en la tercera clase, a partir del análisis de algunos problemas matemáticos, se retoma el concepto de reparto.

- **Diferentes estrategias didácticas para la comprensión de los significados de las fracciones.**

Al hacer la revisión de las diferentes clases grabadas, pudimos detectar que la construcción de los significados de las fracciones, no se va haciendo de a uno por uno, es decir, no hay un orden creciente de dificultad, en cambio pudimos encontrar cuatro estrategias didácticas básicas que utiliza el profesor para contribuir a que los estudiantes conozcan y comprendan los diferentes significados de la fracción.

⁵³ Para mayor claridad de el planteamiento de esta lección y la forma como se trabajó, remitimos al lector a la página 224 y siguientes, de este capítulo; ello con la intención de no repetir información ya trabajada.

En el apartado anterior, ya comentamos respecto a la construcción del significado de la fracción en la relación parte – todo, en este apartado vamos a analizar las cuatro estrategias que utiliza el maestro para trabajar el resto de los significados asociados al concepto, y en el siguiente apartado, profundizaremos (porque además así lo hace el maestro) en dos significados que en el trabajo didáctico del salón de clase presentaron cierto nivel de dificultad: el significado de operador multiplicativo y el de razón.

Las cuatro estrategias didácticas utilizadas por el profesor para ayudar a los estudiantes a identificar y comprender los significados de la fracción son:

- El planteamiento, análisis y resolución de problemas, donde se usa cada uno de éstos. (CP 3)
- A partir del análisis de páginas de los libros de texto de educación primaria, tanto de planes de estudio anteriores, como textos vigentes. (CP 4 y CP 5)
- Resolución y análisis de las actividades del taller para maestros. (CP 7)
- Institucionalización de los conceptos y fundamentación teórica que los argumenta. (CP 8)

La siguiente tabla, presenta de manera comparativa cómo se plantea la consigna de las actividades de acuerdo a cada una de las estrategias aquí señaladas:

Tabla 21. Estrategias para construir los significados de las fracciones.

Planteamiento, análisis y resolución de problemas	Análisis de libros de texto	Taller para maestros	Institucionalización y fundamentación teórica.
Mo. Quiero que <u>platiquen los problemas</u> que están ahí eh, tiene que quedar, a ver hay les va cuál es la consigna, la consigna, aquí ya está la consigna de lo que van a hacer, la consigna digamos así la consigna fundamental de esta actividad, tienen que <u>diferenciar ustedes</u> y eso platiquenlo ahí, ¿cómo es ver la fracción como un reparto? Fíjense la fracción como un	E3.- el problema que debemos de ver las fracciones, que <u>uno se encandila en uno mismo</u> , por ejemplo <u>en el reparto, siempre vas a repartir pasteles, siempre vas a repartir galletas y en ese sentido nosotros nos quedamos con la idea de que tiene que ser el pago de tantas hrs que trabajó, cuando en vez de aplicarlas, uno reproduce los mismos problemas que</u> Aa. Que ya has visto	[Aquí están resolviendo una actividad del taller para maestros, (Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila, 1999, pág. 70)] E.- Cuantas vueltas, cuantos km es una vuelta? Mo. Una vuelta es $\frac{1}{4}$, Er.- Todos tuvimos que hacer eso mental o gráficamente, tuvimos que hacer eso, en el caso de que las fracciones en la de $\frac{5}{6}$, también teníamos que saber a cuánto	[La siguiente consigna se formula después de la lectura del texto de (Mendoza, 2011)] Mo. A ver este es solo uno, de lo que estábamos haciendo ahorita, a ver, si, las fracciones tienen diferente significado, uno de ellos es, porque esto no lo pusimos acá, pero aparte de esto, las fracciones tienen unos que se llaman mecanismos, tenemos unos que se llaman los constructivos, a ver

reparto ¿qué es eso?, y luego la fracción como una medida, ¿qué es eso? y luego la fracción como una razón, ¿qué es la fracción como una razón?, y luego la última ¿qué es, la fracción como operador multiplicativo?, si, entonces, <u>la fracción como reparto, la fracción como medición, la fracción como operador multiplicativo y la fracción como razón,</u> tienen que sabérselas, son 4 cosas y <u>aquí vienen 4 problemas distintos en función de cada uno, sale, esto es lo que tienen que aprenderse hoy,</u> eh, búsqúenle *Alumnos tratan de resolver las consignas* Ao. Profe que es operador que Mo. Operador multiplicativo (CP 3)	E3.- <u>No busca variar en como relacionarla</u> Mo. Aunque <u>la idea E3 es que esto nos lo facilita los libros de texto, porque en los libros de texto se supone que vienen estos contextos,</u> si, esto es algo así como la preparación del medio antes de acercarnos... (...). (CP 4) E3.- Profe yo una duda por ejemplo en la primera lección, de cuantas fracciones de tercero hay verdad, cuando yo fui con mis niños no le digo que los deje en suspenso porque no sabían que eran las fracciones, de aquí ya de fracciones concretas de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ¿se debe de trabajar antes de llegar a las fracciones o qué? Mo. No, <u>se entiende que la lección nos va a permitir que los niños vayan aprendiendo eso,</u> si, por eso hay que enfrentarlos a la lección, estudiarlas aquí, que nos traiga aquí, que nos plantee cada una de las lecciones y nosotros ser conscientes, se supondría después de todo lo que hemos discutido aquí saber que las fracciones se pueden plantear a partir de repartos, a lo mejor hay algunas actividades donde utilizaron <u>repartos</u> en los niños, esa es una posibilidad, otra, las fracciones también tiene que ver con	equivalía $\frac{1}{6}$, para así saber, Mo. Eso viene dentro de lo implícito, para poder resolver el cuadro, entonces pareciera ser que los niños, creo que sería más común en lo que nos comentaba Ernesto, en los niños sería muy difícil en el primer intento, utilizando la multiplicación lo más común sería que hicieran algo parecido a estas operaciones que ustedes hicieron, bien, estos números que ven aquí, es la idea, por eso lo estamos trabajando, se conocen como los operadores, aquí funcionan como operador, como operador pues, entonces cuando el operador es mayor que la unidad, el resultado es mayor, más grande que el operador, cuando el operador es menor que la unidad lo que hace es que el operador lo disminuye, si, pongan ustedes ahí, <u>en la página 70, ahí es donde está muy claro lo que es el operador,</u> si, Ao. No trae otras hojas profe Mo. Lo que estamos mencionando aquí es un 12 por, este es el operador este es el resultado que nos da 36, entonces el número que va aquí en medio es el que se conoce como el operador, entonces <u>ya</u>	ahorita vemos eso, si no cabe ahí lo ponen abajo porque algunos no quedó, si, pero <u>vamos a los 5 significados de las fracciones,</u> son las fracciones como (anota en el pizarrón) : SIGNIFICADOS DE FRACCIONES 1 Parte todo . 2 Medida. 3 Cociente. 4 Operador 5 Razón Ao. Son los 5 significados? Mo. Son los 5 (CP 8)

	contextos de medición, entonces a lo mejor el juego que nos van a poner el próximo jueves, podría ayudar a hacer una buena preparación del medio, si, no hay del colectivo, entonces bueno esa es una posibilidad, entonces quizá el juego que vamos a hacer de rato, el de dominó, haciéndole algunos ajustes nos permita, entonces aquí la pregunta verdadera o más profunda E3 sería <u>de todo el repertorio que hemos visto ¿cual es el más pertinente para plantearse los?</u> y ¿la otra, sería necesario plantearles antes algunas actividades o hay que ponérselo directo, directo la lección?, y después en los errores iríamos corrigiendo, iríamos añadiendo, algún otro saber que fuera saliendo, ¿cuál de las 2 rutas les resulta más convincente? (CP 5) <i>(El contexto del siguiente registro es la comparación de las actividades con fracciones del libro de texto mexicano de 1960, con los textos actuales; profundizaremos sobre este análisis en el apartado “análisis comparativo de diferentes textos de saber”)</i> Mo. A ver jóvenes la pregunta no es cómo resolvieron cada ejercicio, eso no lo	<u>se fijaron que van apareciendo las fracciones de diferente forma, hay veces que a esta le dieron un numero, estas fracciones tienen un significado, el significado es como factor</u> Ao. Y como se llama el Mo. En este caso el <u>operador</u> (CP 7)	

	vamos a ir explorando, la pregunta es ¿qué piensan de esta manera de presentarles a los niños?, esta que vieron aquí es la primera lección con la que los niños se van a encontrar, de fracciones, que piensan ustedes de esta actividad, que esto no es como lo hemos visto nosotros en los libros de texto, en los actuales, si, aquí digamos hay un contexto de un problema para esto Ao. no Mo. ¿Cuál es el problema cotidiano que tienen los niños con lo que se puede asociar esta actividad? Ao. con los pasteles Ao. Lo presentas directo, lo presentas directo, Mo. Directo de las fracciones, verdad, y lo manda directo al asunto de, aquí hemos visto varios significados que tienen las fracciones, aquí al significado de una parte de un todo, esta idea que está aquí es lo que mencionaban alguno de ustedes en una de las sesiones, es la idea de quebrar, esto lo que está presente aquí, es la idea de las fracciones como un quebrado, es decir de una parte de un todo no es otro contexto tan espeso que veíamos hace rato en las fracciones como números, como una razón o como un		

	cociente, aquí es mucho más sencillo, sí, bueno que les parecen las actividades que están ahí. (CP 7)		

Como podemos apreciar, por la cantidad de sesiones en las cuales se abordó el análisis de los libros de texto, pareciera ser que se les otorga un buen peso en el proceso de comprensión de los diferentes significados de las fracciones, esto confirma la concepción del profesor, enunciada en los siguientes términos: “**esto nos lo facilita los libros de texto, porque en los libros de texto se supone que vienen estos contextos**” la cual es congruente con su intención explícita de profundizar en el análisis de estos materiales, incluso de manera comparativa, tanto para conocer los diferentes significados de las fracciones, como para precisar las diferencias en los enfoques de enseñanza que ha estado presentes a lo largo de la historia.

Esta afirmación no debe de ninguna manera interpretarse como que los libros de texto son la única fuente, queda claro que son un recurso auxiliar y en tal sentido aportan una propuesta, la cual debe ser analizada y sometida a la reflexión por parte de los estudiantes, tal como apreciamos, de nueva cuenta la intención por parte del profesor de que los alumnos se comprometan en el análisis, con frases como “¿qué piensan ustedes de esta actividad?” o también “¿qué piensan de esta manera de presentarles a los niños?”; no es la primera vez que, en este proceso de análisis de las sesiones de clase, aparece este tipo de frases; se reafirma un proceso de devolución de la responsabilidad a los estudiantes, mediante el cual lo no familiar (que en términos de la teoría de las representaciones sociales sería el anclaje) se va interiorizando en sus representaciones; en este caso, lo no familiar puede cobrar distintos matices, por un lado está la cuestión de la evolución de diferentes formas de enseñanza [caso de la comparación de diferentes libros de texto – sobre esto profundizaré más adelante, apoyándome del texto de Ma, (2010)] y por el otro lado está la comprensión de los diferentes significados de las fracciones.

Ahora bien, y a riesgo de ser muy esquemático, estas cuatro estrategias con las cuales profundizan sobre los significados de las fracciones, denotan un proceso: se parte del análisis y resolución de problemas, se contextualizan en los libros de texto (de manera comparativa), se profundiza en conceptos más complejos (operador y razón) y se

institucionaliza un saber, en este caso un saber especializado sobre un tema concreto, los significados de las fracciones y su uso en diferentes situaciones.

En cuanto a la primera estrategia, el planteamiento, análisis y resolución de problemas, debemos aclarar que la intención no fue que los estudiantes se enfrentaran a la resolución de problemas a su nivel, sino que a partir del análisis de problemas a nivel de la escuela primaria (seleccionados y divididos por grado escolar incluso, tal y como podemos apreciar en el siguiente recorte de la ficha de actividades que les entregó el profesor para esta sesión -27/X/2011) fueran identificando los significados que puede tener la fracción.

Enseguida se presenta una serie de situaciones para aprender algunas propiedades de las fracciones. En binas hagan un análisis de ellas y luego busquen en los libros de texto actividades similares a las que aquí se presentan.

1º. y 2º. Grados

El reparto de objetos

1. Repartir 15 objetos entre 3 niños

En general esperamos que los alumnos den 5 objetos a cada niño y que cumplan con la equitatividad y la exhaustividad (algunos niños le reparten más a los de mayor edad estatura)

Otros niños pueden repartir 1 objeto a cada niño, hasta que se acaban los objetos

2. Repartir 17 canicas entre 3 niños. (que a todos les toque la misma cantidad de objetos/ aquí tendrán que quedar algunas canicas sin repartir)

Aquí es preciso aclarar que los niños de 1º y 2º no están listos para hacer repartos hipotéticos (sin material)

3er. Grado

Repartos de superficie que impliquen fraccionar las unidades

-Partir hojas que representen pasteles

3 pasteles entre 4 niños. Podrían partir los pasteles a la mitad y un cuarto

(Se les pueden plantear a los alumnos de primero y segundo, siempre y cuando no se les exija que conozcan o dominen la terminología correcta de las fracciones y su representación simbólica)

Comparar las superficies equivalentes.

En este tipo de repartos es importante que los niños vayan advirtiendo que los repartos resultantes no son siempre menores a la unidad

En el recorte de registro correspondiente a esta estrategia, subrayamos algunas palabras o frases que indican el sentido de la actividad; en primer lugar, ésta se desarrolló en equipos de trabajo y la idea básica fue la comunicación entre ellos, queda claro cuando dice el profesor (lo cual además se aprecia en el video de la clase) “quiero que platicuen los problemas”, porque de esta manera podrán “diferenciar” los cuatro primeros significados de las fracciones “**la fracción como reparto, la fracción como medición, la fracción como operador multiplicativo y la fracción como razón**”.

Es significativa esta estrategia sobre todo porque, en congruencia con los principios de la teoría de las representaciones sociales, es el intercambio comunicativo y la interacción social lo que contribuye a instalar (o bien a conflictuar) una representación social, en este caso sobre los significados de las fracciones, de tal manera que al reunirlos

en equipos (binas) los estudiantes tienen la oportunidad de contrastar lo que ellos piensan sobre lo que están leyendo y analizando, pero sobre todo tienen la oportunidad de aclarar un tema que aparece por primera vez en su trayectoria estudiantil y esto es precisamente lo que le da el carácter de especializado a este conocimiento, dado que es específico a las *necesidades didácticas* del profesor.

Ahora bien, tal vez la pregunta siga siendo ¿cómo generar estas *necesidades didácticas* en los estudiantes? Suena pertinente este cuestionamiento sobre todo si asumimos que es el conflicto cognitivo el que contribuye a generar un desequilibrio en las concepciones de los alumnos y por ende a exigir una acomodación a nuevos esquemas, una construcción de nuevas representaciones; derivado de esta estrategia analizada vemos que las necesidades son generadas por el planteamiento que hace el profesor **“aquí vienen 4 problemas distintos en función de cada uno, sale, esto es lo que tienen que aprenderse hoy”** en tal sentido, pareciera que la intención es que los alumnos aprendan estos significados a partir de la ejemplificación y su aplicación en distintos problemas.

De igual manera, el análisis de los libros de texto también aparece como un buen elemento para comprender los diferentes significados de las fracciones, a partir de su identificación en cada una de las lecciones, los estudiantes van tomando conciencia de que existen y sobre todo de que los alumnos son sensibles a estas diferencias (me refiero a la diferencia que se da en cada uno de los significados), pero a la vez (y esto debe ser más consciente y explícito en los salones de clase) debe permitir que los estudiantes comparen lo que saben de las fracciones con lo que se está analizando, debe posibilitárseles para que “*extiendan*⁵⁴” (amplíen, profundicen) su conocimiento común del contenido en función de su uso, como instrumento en la resolución de problemas, pero también como objeto de estudio, con todo lo que ello implica; en este sentido, la comprensión de los diferentes significados le dará al profesor un “repertorio” de situaciones para la enseñanza, las cuales le permitan abandonar (cuando sea el caso) la presentación ostensiva del saber matemático.

La construcción de este repertorio además es una necesidad formativa de los estudiantes, en una doble dimensión, muchos de ellos esperan que se les diga cómo trabajar en la escuela primaria, pero otros (y aquí es donde debe aparecer con más fuerza la

⁵⁴ El concepto “*extiendan*” lo tomo como conjugación del “*extension*” que usan los japoneses para denotar la ampliación en el nivel de complejidad de los conocimientos matemáticos (Isoda, Arcavi, & Mena Lorca, 2008).

destransposición) empiezan a tomar conciencia de las limitaciones y aspectos a superar, tal y como apreciamos en el siguiente fragmento de registro:

*E3. el problema que debemos de ver las fracciones, que uno se encandila en uno mismo, por ejemplo en el reparto, siempre vas a repartir pasteles, siempre vas a repartir galletas y **en ese sentido nosotros nos quedamos con la idea de que tiene que ser el pago de tantas hrs que trabajó, cuando en vez de aplicarlas, uno reproduce los mismos problemas que***

Aa. Que ya has visto

E.- No busca variar en cómo relacionarla

*Mo. Aunque **la idea E3 es que esto nos lo facilita los libros de texto, porque en los libros de texto se supone que vienen estos contextos (CP 4)***

Como apreciamos en este fragmento, los estudiantes toman conciencia de sus procesos de aprendizaje, aparece un ejercicio de reflexión metacognitiva, el cual al ser socializado puede contribuir a que el resto del grupo se identifique con él y haga sus propias reflexiones; de igual manera, apreciamos una posibilidad para la destransposición, ¿cómo llevar a los estudiantes a que no se queden con una sola idea?, la respuesta viene en el mismo proceso de clase del profesor, tiene que ver con la ampliación del repertorio de actividades, con la construcción de los diferentes significados de las fracciones por diferentes estrategias, pero sobre todo con la vivencia de las dificultades que se presentan en este mismo proceso (esto lo analizaremos en un subapartado denominado “la gestión del error...”).

Otra de las estrategias utilizadas es el apoyo del taller para maestros (Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila, 1999), incluso cobra tal peso que se concibe como elemento para institucionalizar los significados, como es el caso del operador multiplicativo: “**en la página 69, ahí es donde está muy claro lo que es el operador**”.

Si nos remitimos a la página indicada, el concepto de operador aparece vinculado con las situaciones de enseñanza que le dan sentido, en los siguientes términos (Anexo 10 “Operador multiplicativo”):

*Las expresiones “3 veces 12 kilómetros” o “0.75 veces 12 kilómetros” suelen asociarse a la multiplicación, pero las expresiones “ $\frac{6}{2}$ **de** 12 kilómetros”, o “ $\frac{3}{4}$ **de** 12 kilómetros”, que son equivalentes a las anteriores, no se suelen asociar a la multiplicación, aunque... ¡también lo son!*

Y luego dan una explicación de por qué no se asocian estas expresiones a la multiplicación, pero lo que me parece más importante, la reconceptualización de la multiplicación que el conocimiento de este significado contribuye a generar:

*Hay por lo menos dos motivos que dificultan asociar las expresiones anteriores con multiplicaciones: uno es el hecho de que no solemos decir " $\frac{3}{4}$ veces 12 kilómetros". Usamos la preposición **de** ($\frac{3}{4}$ **de** 12 kilómetros) que sugiere la idea de extracción, no de multiplicación (aunque sí decimos, por ejemplo, $2\frac{1}{4}$ **veces**). Por otro lado, y esto es aún más importante, cuando una fracción juega el papel de operador multiplicativo, la multiplicación ya no puede interpretarse como una suma repetida, como se hacía con los números enteros. Además, la multiplicación ya no necesariamente "agrandar".*

Para finalmente aclarar a los estudiantes, cómo funciona el operador multiplicativo.

Es decir, aplicar un operador multiplicativo fraccionario a una cantidad, equivalen a dividir y multiplicar sucesivamente esa cantidad. ¡Está en juego una reconceptualización de la noción misma de multiplicación!

No me extendiendo en estas acotaciones, lo haremos en el siguiente apartado, aquí me interesaba resaltar dos cosas, la primera el hecho de que el libro del taller es un elemento que permite institucionalizar los conceptos, y la segunda, se deriva de esto mismo, es decir, al institucionalizar también está generando una representación compartida sobre el concepto y pone el acento en dos cuestiones fundamentales, que generan una destransposición de saberes previos: "la multiplicación ya no necesariamente agranda" y la noción misma de multiplicación (y por ende una ampliación del campo de los números naturales).

Finalmente, el proceso de comprensión de los significados de la fracción, desde el análisis de las clases, cierra con el análisis de un texto teórico desde donde se definen formalmente en qué consisten cada uno de ellos (Anexo 11).

- **Dos significados con buen nivel de complejidad: la fracción como operador multiplicativo y como razón.**

En el análisis de las clases, sobresale el reconocimiento explícito de que hay dos significados de las fracciones que al parecer causan mayores dificultades; desde la tercera clase (si recordamos aquí el análisis de los significados de las fracciones se asocia al tipo de problemas, es decir, un tipo de problema para cada significado) se detecta que estos significados son más complejos, dado que de una u otra forma son los que llevan a una reconceptualización de la multiplicación, del campo de los naturales al campo de los números racionales. Es precisamente cuando hablamos de reconceptualización, que establecemos la vinculación con los procesos de destransposición del saber, es decir, cuando a los estudiantes se les presenta un conflicto cognitivo que cuestiona sus representaciones (algunos autores le llaman a esto, cuestionamiento de las misconcepciones; Cfr. D'Amore, 2005) se genera una excelente oportunidad para profundizar y contribuir a la destransposición del saber.

En tal sentido, al retomar el análisis de los problemas planteados en unas hojas (folios), surgen las siguientes interacciones:

Mo. Bien ahora vayamos a las preguntas difíciles que tiene que ver con las hojitas que les repartí hace un momento, bien empezamos con la más complicada, ¿a qué se refiere?, en lo que estuvimos ahorita leyendo, bueno más bien las fracciones tienen diferentes significados, o pueden ser como reparto o como parte todo, pueden ser como medición o pueden ser como operadores, ¿qué es eso?, ¿a qué se refiere que las fracciones pueden tener un significado de operador?, ¿qué es eso?, ¿qué decía?

E3.- Ahí dice las hojas, hasta lo subraye,

Mo. Bien, ¿qué es eso de las fracciones como operador?

Ao. Operador multiplicativo

Mo. Operador multiplicativo dice ahí, ¿pero qué es eso?, es más permítanme acotarles aún más la pregunta, les dice ahí que hasta en las escalas, en las escalas participan las fracciones como operador ¿qué es eso?

Ao. sí, que tiene que multiplicar por 2 o dividir, bueno a mi me pasó eso, yo digo que eso para sacar la fórmula del rectángulo y del triángulo, bueno del triángulo, porque bueno lo que yo practiqué estábamos viendo el triángulo que era la mitad de un rectángulo, entonces decíamos no pues es la mitad, entonces para hacer la multiplicación pues se tiene que dividir entre 2, o sea porque decíamos ya que saquemos el área del rectángulo, ¿cómo sacamos la mitad?, no pues dividimos entre 2 y ya es algo parecido no

Mo. Por ahí va, por ahí va, ¿cómo decía Cindy?

C.- no pues funciona como algo que sea para utilizar ese para multiplicar,

Mo. Pero ¿cómo es ese algo?

E.- como un factor, como un factor profe

Mo. Póngale nombre E3, como un operador, es esa

E.- ¿el operador es un factor?

Mo. A ver vamos pensando que este es un terreno (el maestro dibuja un rectángulo en el pizarrón); tiene 7 y este 9, queremos hacer este terreno a escala, pero queremos que sea 5 veces más pequeño, equivale a escala, lo que acá equivale a 1 cm equivale a $\frac{1}{5}$, como sería acá

Aa. 9

Aa. Multiplicarlo entre 5

Aa. 7 por 9

Mo. A ver ¿entienden lo que es la escala? (CP 3)

Como apreciamos en este registro, la dinámica misma de las interacciones no permite retomar algunas ideas para cuestionarlas, por ejemplo cuando el estudiante asocia el concepto de operador multiplicativo a la fórmula para calcular el área de un triángulo ¿cuál es la representación del concepto que manifiesta? ¿Cómo logra asociar la idea que se ha estado trabajando, de agrandar o hacer más chica una figura, con el cálculo del área del triángulo? ¿Tiene sentido que en los salones de clase se cuestionen este tipo de participaciones? En esta sesión de clase no se cuestionó, sin embargo me parece que sí es conveniente hacerlo, dado que es el momento para conflictualos y ayudarles a entender cómo funciona el operador multiplicativo fraccionario en casos muy focalizados, como el del ejemplo que pone el profesor, o bien los que apreciamos en la 7ª. Clase donde retoma la actividad del taller de matemáticas.

Retomemos la actividad que el maestro les plantea para comentar el significado de la fracción como operador multiplicativo:

Alumnos.- si

Mo. ¿Leyeron las hojitas que les di?

Alumnos.- si

Mo. Ahí explica eso

Ao. Multiplicarlo por $\frac{1}{5}$

Mo. Tendríamos que multiplicar los datos por $\frac{1}{5}$, entonces tendríamos las medidas acá, entonces lo que mide aquí 7 m, lo vamos a multiplicar por, $7 \times \frac{1}{5}$, lo que acá mide 7, acá va a medir $\frac{7}{5}$ (pone la operación en el dibujo del rectángulo que hizo en el pizarrón) lo que acá mide 9, acá va a medir $\frac{9}{5}$

AO. $\frac{9}{5}$

Mo. ¿Entonces cuál es el operador? $\frac{1}{5}$,

Aa. $\frac{1}{5}$

Mo. Y aquí aparecen otra vez las fracciones, pero en un contexto muy diferente al que hemos estado viendo,

Ao. 2, $\frac{1}{2}$

Mo. 2 o $\frac{1}{2}$, pero si dijéramos vamos hacer este terreno, pero ahora a la mitad (señala el dibujo), o sea más pequeño

Ao. sería $\frac{1}{2}$

Mo. este (1 cm) sería $\frac{1}{2}$, entonces vamos a multiplicar el $7 \times$

Aa. $\frac{1}{2}$

Ao. Lo complicado aquí es hacerlo grande

Siguiendo a Kieren (1980), citado en Perera Dzul & Valdemoros (2007), el papel de la fracción como operador es el de transformador de un conjunto en otro conjunto, esta transformación se puede pensar como la ampliación o reducción de una figura geométrica en otra figura a/b veces más grande o a/b veces menor; este es el planteamiento que hace el profesor desde el momento que retoma el análisis de este significado de las fracciones: el terreno mide 7 metros a lo ancho y 9 metros a lo largo, entonces se trata de hacerlo 5 veces más pequeño, el operador aplicado es $1/5$ y con ello tenemos una longitud de sus lados en relación $1/5$ del original, lo cual no significa que el área de la figura se haya reducido en $1/5$ parte. En este caso el problema está en la consigna, es decir, al indicar que la figura resultante será “5 veces más pequeña que la original”, lo que debe afectarse en su superficie y se requiere encontrar el operador que transforme la superficie original en $1/5$ parte, es decir, si el área original es $7 \times 9 = 63$, el área final estará dada por la relación $\frac{63}{5} = \frac{7 \cdot 9}{x \cdot x} = \frac{63}{x^2}$ y si $x^2 = 5$, entonces $x = \sqrt{5}$, con lo cual tenemos que las longitudes de los lados serían: $\frac{7}{\sqrt{5}}$ y $\frac{9}{\sqrt{5}}$.

Siguiendo con el análisis, ahora se plantea una situación para poner en juego el significado de la fracción como razón:

Mo. Mmm cuando es más grande, cuando es más grande, pero cuando es más pequeño el operador sería una fracción, si, su tarea para salir, entonces es que digan ahora ¿cómo es la fracción como razón?

Aa. En proporcionalidad

Mo. Ahí está,

Ao. Se expresa en una comparación

m.- A ver hace rato decían que el ejercicio que les puse estaba muy sencillo, eh, necesito como algo más complicado

Aa. Es que por ejemplo el problema que planteó ahí

Mo. A ver este

Aa. Es que el problema que plantea ahí es de que los 3 jóvenes trabajan en un taller, si el taller dura 12 horas abierto, los jóvenes se van a repartir las ganancias según el tiempo que ellos trabajan, o sea venía siendo como una proporcionalidad, no?

E3.- Es una comparación entre el total y la parte que le toca a cada quién

Mo. el número de horas que trabaja cada quién

E3.-Si

Mo. Si, eso es lo que dice el ejercicio ahí

E3.- Porque por ejemplo se puede sacar de otra manera ese ejercicio, sería dividir las 12 horas, sacar el cociente de 1 sobre 12 y esa sería la constante de proporcionalidad que nos diría cuanto les tocaría a cada uno pero en número fraccional, bueno en número que no fuera fracción pues, en número decimal, sería 1 entre 12 y se multiplica por 2 y es la parte que le toca, es como una relación de proporcionalidad.

Mo. Muy bien muy bien, a ver de lo que se refiere E3 es algo muy interesante, para sacarlo necesitamos identificar a cuánto equivale 1, 1 hora, a cuánto equivale en

ese ejercicio que venía en esa hojita, entonces encontraríamos lo que es el valor unitario, para con eso contestar cualquier pregunta y si trabaja 7 horas, u 8 horas o 9 horas o las que sean, es el valor de 1

E3.- Es una constante

Mo. El valor de 1, ese 1, ese valor unitario sería la respuesta

E3.- Es como cuando saca de kilómetro por horas o por minutos, sería constante, una razón

Mo. Si, muy bien E3, ha salvado usted el honor de este colectivo,

En el caso del significado de la fracción como razón, hacen uso del valor unitario para calcularlo; una acotación es importante en esta parte del análisis, los fragmentos de registro anteriores, como puede inferirse de la frase del profesor, corresponden a la parte final de la tercera sesión, motivo por el cual se retoman de manera rápida, sin embargo, como veremos más adelante, vuelven a tocarse en otras sesiones de clase, por ejemplo en la 4^a, 5^a, 7^a y octava clases, con lo cual a estas alturas, lo aquí analizado es provisional, es decir, la aplicación de la fracción como operador multiplicativo no se reduce al caso de la ampliación o reducción de figuras geométricas.

En los siguientes párrafos sintetizaremos la representación que se genera o se puede inferir que se genera, en función del tipo de actividades con las cuales se presenta el significado de la fracción como operador multiplicativo y como razón, por supuesto para ello recuperaremos los fragmentos de registro de las clases del profesor.

De la lectura y comparación de las transcripciones de clase donde aparece explícitamente este significado de la fracción (operador multiplicativo), se puede detectar que son dos los contextos de uso; en primer lugar el que ya habíamos citado, de agrandar o reducir una figura geométrica y en segundo lugar, un contexto de medición de longitudes (distancias).

Después del primer acercamiento al significado aludido (en la 3^a clase ya mencionada) y ante las imprecisiones que aún pervivieron, se hace un nuevo acercamiento, pero ahora siguiendo la estrategia de extensión del concepto, del campo de los números naturales al campo de los racionales, el siguiente fragmento es ilustrativo de lo que digo

Mo. Antes de intentar de buscarle a los nuevos materiales, a los materiales que no operan a partir de estas lecciones, son 3 lecciones de 3er grado y 3 lecciones de 4º grado, pero antes de hacer eso, antes, antes permítanme como intentar acercarnos más a lo que estuvimos trabajando la sesión anterior, si, la sesión anterior hablábamos de 2 significados de las fracciones que se les dificultaban a ustedes, que son las más difíciles, que se les dificultan a todos más bien dicho, es el asunto, eran las fracciones el significado como operador o el significado como razón, hay

una parte no sé si nos haya quedado en ese sentido trabajar más fácil la idea, pero decíamos que en el asunto del operador si tenemos una figura, puede ser cualquier figura y pensemos que aquí mide 9 y acá mide 7 (dibuja un rectángulo y escribe esas medidas)

Aa. no, no se puede

Mo. 12 ¿verdad?, si no, no sale, que acá midiera 12 y quisiéramos hacer una reproducción de ella, a ver fíjense bien como está el asunto a ver si nos vamos acercando, si quisiéramos hacer el doble de esto (señala el rectángulo que dibujó en el pizarrón con las medidas 9×12); una figura que tuviera el doble que estas medidas, entonces simplemente tomaríamos el 9 y ¿qué le haríamos?

Alumnos.- 9×2

Mo. 9×2

Ao. 18

Mo. Y luego sería 12×2 , si quisiéramos que fuera el cuádruple sería ¿el 9×2 ?

Alumnos.- 4

Mo. 12×4 , etc, pero es exactamente la misma idea para lo siguiente, si quisiéramos no que fuera 3 veces más grande, sino que fuera 3 veces más pequeño, sería $9 \times$

Ao. $1/3$

Mo. $9 \times 1/3$ exacto, entonces quiere decir que

Ao. 9×1 , 9, $9/3$

Mo. Sería $9/3$, si, entonces quiere decir que lo que mide aquí (señala la parte de la figura que mide 9 del pizarrón), sería la tercera parte de lo que mide arriba, igual el 12 lo multiplicaríamos por $1/3$, ($12 \times 1/3$); bueno si esto fuera la tercera parte, ¿a ver entonces cuál es el operador aquí?,

Aa. Un entero

Ao. un entero

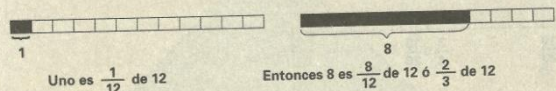
Mo. El operador, o también lo llaman, algunos autores lo llaman el escalar, entonces si lo estamos haciendo de esta manera ($9 \times 2 =$, $12 \times 2 =$) ustedes se fijan que el operador es un número natural, no es una fracción, entonces ¿en qué momento aparecen las fracciones? en este tipo de problemas las pusimos como operadores, cuando en ésta ($9 \times 1/3 = 9/3$, $12 \times 1/3 =$), no se trata de agrandar, sino de reducir esta es una manera de cómo aparecen, hay otras, si, pero estas son las que llevamos hasta ahorita, entonces este es el problema (señala lo anotado en el pizarrón), ¿podrá alguno de ustedes pensar en otro problema que tuviera que ver con esto? donde aparecieran los operadores. (CP 4)

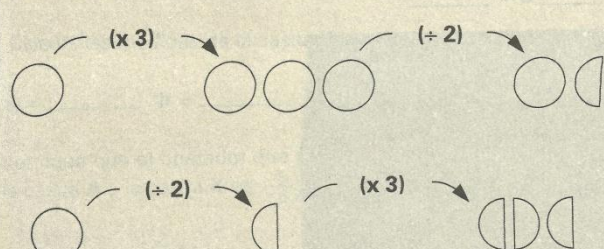
Esta estrategia de extensión del concepto sigue ayudando para la comprensión de este significado, es decir, si para agrandar (en dobles, triples, etc.) usamos los números naturales, cuando ya no se trata de agrandar, sino de reducir es como aparece el operador multiplicativo fraccionario.

Podemos notar en el registro que el profesor toma conciencia de que hay más formas de que aparezca el operador multiplicativo fraccionario, sin embargo hasta este momento de la clase esta es la representación que se genera: “el operador multiplicativo fraccionario aparece al querer reducir una figura geométrica”.

El segundo contexto de aplicación de la fracción como operador multiplicativo, se presenta al trabajar la actividad “Tres y media vueltas” del taller para maestro (Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila, 1999, pág. 68) y que ya hemos citado en varias ocasiones a lo largo de este capítulo; acá reafirmamos porque de una u otra manera, ante un “concepto difícil” es necesario tener claro cuál es la estrategia para su tratamiento didáctico y en tal sentido vemos que en este material del taller, se reafirma sistemáticamente la idea de operador multiplicativos como “veces de”, es decir, aplicar un operador multiplicativo equivale a “multiplicar y dividir sucesivamente (o dividir y multiplicar)”, tal y como lo plantea en varias páginas:

Tabla 22. Proceso explícito para la comprensión del significado de operador multiplicativo: taller para maestros.

La multiplicación $\frac{3}{4} \times 12$ kilómetros, interpretada como $\frac{3}{4}$ de 12 kilómetros, se puede calcular dividiendo 12 entre cuatro y multiplicando lo que resulte por tres: $(12 \div 4) \times 3 = 9$ kilómetros. Es decir, aplicar un operador multiplicativo fraccionario a una cantidad, equivalen a dividir y multiplicar sucesivamente esa cantidad. ¡Está en juego una reconceptualización de la noción misma de multiplicación!	En la página 69 comienza aplicando un operador fraccionario a medidas enteras: el circuito que recorre el tren mide 12 km; en este contexto, como extensión del campo de los números naturales, se incorpora el problema ¿cuánto avanza el tren en $\frac{3}{4}$ de vuelta? Y de igual manera en cierta cantidad de vueltas y una fracción de vuelta. Aparece de manera explícita lo que significa aplicar un operador multiplicativo fraccionario y esta misma idea se sostiene aun cuando se aplican variables al problema: aplicar un operador multiplicativo equivale a dividir y multiplicar sucesivamente.
Estos problemas consisten en determinar el operador multiplicativo que, aplicado a una cantidad, da la otra cantidad. En el último problema, por ejemplo, se trata de averiguar cuántas vueltas de 12 km dio el trenecito al avanzar 20 km. Dio una vuelta más 8 kilómetros, pero ¿qué parte de una vuelta representan 8 km? Para saberlo, necesitamos averiguar qué parte de 12 km son 8 km o “cuántas veces” 8 km es igual a 12 km. Una forma de averiguarlo es ver primero qué parte de 12 es uno:  Así, al avanzar 20 km, el trenecito da $1\frac{2}{3}$ vueltas.	En la página 71 aparece una variable del problema del trenecito, ahora se trata de ver qué parte de una vuelta representan cierta cantidad de kilómetros; esta variable permite que aparezca el valor unitario.

Es decir, aplicar el operador $\times \frac{3}{2}$ es equivalente a aplicar sucesivamente los operadores $(\div 2) (\times 3)$. Si se aplican estos operadores en distinto orden, se obtiene el mismo resultado:  Así, el operador $\times \frac{3}{2}$ es equivalente a $(\times 3) (\div 2)$ ó a $(\div 2) (\times 3)$.	En la página 75, se hace alusión a la conmutatividad en la descomposición del operador multiplicativo.
Observe que aplicar el operador $\times \frac{3}{2}$ o $\frac{3}{2}$ de, equivale a dividir entre 2 y multiplicar por 3: $\frac{3}{2}$ de $= (\div 2)(\times 3)$. Por lo tanto, $\frac{3}{2}$ de $\frac{5}{4} = (\frac{5}{4} \div 2) \times 3$ Como $(\frac{5}{4} \div 2)$ es igual a $\frac{5}{8}$, entonces: $\frac{3}{2}$ de $\frac{5}{4} = \frac{5}{8} \times 3$ Y como $\frac{5}{8} \times 3$ es igual a $\frac{15}{8}$, entonces: $\frac{3}{2}$ de $\frac{5}{4} = \frac{15}{8}$ Así, $\frac{3}{2}$ de $\frac{5}{4}$ es igual a $\frac{3 \times 5}{2 \times 4} = \frac{15}{8}$ Aplicar un operador multiplicativo fraccionario a una medida fraccionaria da lugar a una multiplicación de dos fracciones.	En la página 76 aparece otra variable del problema, ahora se trata de aplicar un operador multiplicativo fraccionario a una medida fraccionaria, lo cual da lugar a la multiplicación de fracciones.
Observe que: $\frac{3}{4}$ de $= (\div 4) (\times 3)$ $\frac{3}{2}$ de $= (\div 2) (\times 3)$ Entonces: $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{2}$ de $= [(\div 4) (\times 3)] [(\div 2) (\times 3)]$ El orden de los operadores se puede cambiar sin alterar el resultado: $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{2}$ de $= [(\div 4) (\div 2)] [(\times 3) (\times 3)]$ $= (\div 8) (\times 9) = \frac{9}{8}$	En la misma página se resalta lo ya trabajado en la página 75 respecto a la conmutatividad en los factores del operador multiplicativo: la composición de operadores.
Para calcular $\frac{3}{4}$ de 60 000, se puede hacer lo siguiente: $\frac{1}{4}$ de 60 000 = $60\,000 \div 4 = 15\,000$ $\frac{3}{4}$ de 60 000 = $15\,000 \times 3 = 45\,000$ Al hacer este cálculo, se pone en evidencia que aplicar el operador "$\frac{3}{4}$ de" a una cantidad, equivale a dividir y multiplicar sucesivamente esa cantidad.	Finalmente, en la página 77 se aplica el operador multiplicativo en un contexto de magnitudes discretas y se resalta el concepto básico que se ha intentado construir: "<i>aplicar el operador $\frac{3}{4}$ de a una cantidad, equivale a dividir y multiplicar sucesivamente esa cantidad</i>"

Notemos que en todo el proceso se sostiene y se escribe en negritas la palabra "de", lo cual es congruente con el posicionamiento de que el significado de la fracción como operador multiplicativo se construye a partir de asociar el " $\frac{3}{4}$ de" entendiéndolo como "veces de".

III.2.1.1.3. La emergencia de representaciones en el conocimiento de un lenguaje didáctico.

A diferencia del conocimiento didáctico del contenido que plantea (Ball, 2011), desde el análisis de los registros vemos sistemáticamente la introducción de un lenguaje didáctico específico a la Teoría de las Situaciones Didácticas, como una forma de hablar sobre lo que acontece en el salón de clase. Es decir, una de las representaciones sociales que se configura desde el salón de clase estaría enunciada en términos de que un profesor requiere un lenguaje específico para hablar sobre lo que acontece en su aula, con lo cual se configura un marco analítico explicativo más amplio que el discurso común, el cual se muestra insuficiente cuando se trata de formar maestros reflexivos sobre su práctica.

Incluso es relevante decirlo, la incorporación de esta representación sobre la necesidad de un lenguaje didáctico, adquiere diferentes matices en tanto formas diferentes de objetivarlo, con la intención de anclarlo en las representaciones de los estudiantes; en tal sentido encontramos, desde el análisis comparativo y transversal de las diferentes sesiones de clase, tres formas diferentes de construcción de esta representación sobre el lenguaje didáctico: desde la práctica vivencial (en la coordinación de las sesiones del profesor y en la coordinación de actividades –juegos– por parte de los estudiantes); como herramienta para la planeación y análisis de la práctica docente de los estudiantes; y desde el análisis de los materiales curriculares (libros de texto).

Ahora bien ¿cuáles conceptos son los que aparecen? ¿En qué medida este tipo de conceptos se convierten en un lenguaje para hablar sobre lo que acontece en los salones de clase tanto de la escuela normal como de la escuela primaria?

Considero que el primer referente que clarifica la representación del profesor, se encuentra sin lugar a dudas en la afirmación que encontramos en el siguiente fragmento de registro:

Mo. A el jueves, según estas cosas les van a servir cuando mencionemos que son las operaciones que les pongo, cuando mencionemos que hubo errores o que les devolví la actividad a los niños, que hice una devolución para ir gestionando los errores, procuren ser un poco más detallados y explicar de qué se trata, si, es decir que no nos quedemos en término de las adecuaciones genéricas si, si no en intentar dar detalles, hubo uno que se distinguió del resto de todos, que fue el texto de Juanjo, Juanjo hizo una cosa mucho más bien todavía, no sólo contestó, sino que puso ahí un fragmento de diálogo para ilustrar cómo había hecho una devolución, la idea es que así como Juanjo le puso esos detalles, así vayan en sus trabajos, sí, yo les puse aquí unas observaciones, me gustó que se refieren ustedes al asunto de los conceptos ayuda a que nos podamos comunicar de una manera más fácil y de una manera más fluida, hubo como 2 ó 3 de ustedes que no se

remiten a los conceptos y por eso todo queda en la ambigüedad, por ejemplo, advierto que en esta vez tuve un mejor desempeño puesto que me conduje de una mejor forma frente al grupo, pues sí, pero ¿qué quiere decir conducirse de una mejor forma?, uno puede conducirse de una mejor forma porque hizo mejores regulaciones, porque hizo mejor las consignas, etcétera, si lo dejamos así, se nos queda en un contexto ambiguo, bueno eso es lo que vamos, lo que les recomendaría ya hay cosas específicas para cada uno de ustedes (señalándoles los trabajos que les va a regresar a sus alumnos). (CP 4)

Es clara la manera como se asume el uso de los conceptos didácticos como un lenguaje que permite la comunicación “*de una manera más fácil y de una manera más fluida*” e incluso, desde esta representación, los conceptos didácticos ayudan a no quedarse en la ambigüedad, a no hablar desde las generalidades propias del “me fue bien en mi clase”. Cabe aclarar que esta afirmación la hizo el profesor, posterior a la revisión de los trabajos de análisis de la práctica docente de los estudiantes y, además, para este momento ya los han estado utilizando de manera constante, incluso desde un semestre anterior al que se grabaron las sesiones de clase objeto de estudio, motivo por el cual se manifiestan muy familiares para los estudiantes, incluso permitiendo ejemplificarlos desde su propia práctica, con fragmentos de diálogo.

Ahora bien ¿cómo se va interiorizando esta representación en los estudiantes? ¿De qué manera se establece un anclaje que permita interiorizarlos, comprenderlos y luego objetivarlos? En líneas anteriores enunciábamos tres formas diferentes de construirlos, en tal sentido, en lo que sigue analizaremos los diferentes conceptos didácticos que configuran este lenguaje didáctico y cómo se presentan de acuerdo a cada una de estas formas de construirlo, con la intención de precisar la manera como esta representación es interiorizada por los estudiantes, en el entendido de que su objetivación en la escuela primaria la analizaremos en el siguiente capítulo de esta tesis, cuando nos refiramos a las reflexiones de los estudiantes y a los procesos metacognitivos derivados de las representaciones que ponen en juego en su práctica docente en la escuela primaria.

La siguiente tabla sintetiza las tres formas principales de construcción de la representación asociada a la necesidad de un lenguaje didáctico y los conceptos que se explicitan en cada caso:

Tabla 23. Lenguaje didáctico: formas de construcción.

Desde la experiencia vivencial de clase	En el análisis de materiales curriculares.	Como herramientas para el análisis de la práctica
- Devolución - Adidáctica - Lógica profana - Contraejemplos - Preparación del medio - Regulaciones - Consigna - institucionalización	- Consigna - Restricciones de la consigna - Preparación del medio	- Regulación - Devolución - Tratamiento de los errores - Variable didáctica - Contrato didáctico - Preparación del medio - Fenómeno epididáctico

Como apreciamos en esta tabla comparativa, varios de los conceptos didácticos aparecen en las diferentes formas de construcción, en tal sentido, para apreciar la fineza del proceso vamos a considerar cada uno de los conceptos y comparar su uso en los tres momentos básicos o tres formas de construcción, con la intención de apreciar la manera como se configura esta representación social en los estudiantes, así como el grado de anclaje que se logra, al momento en que los estudiantes la exteriorizan, es decir, la objetivan en cada uno de los momentos en que se hace necesario su uso.

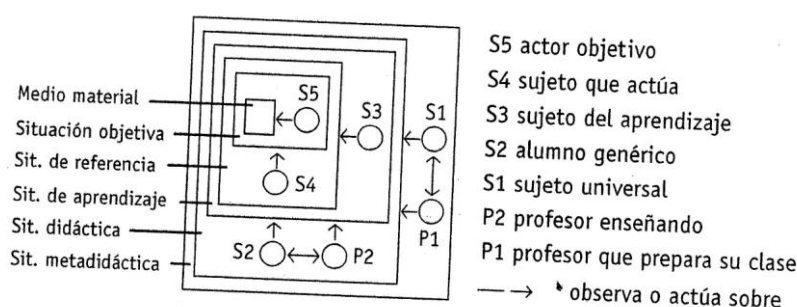
- **La preparación del medio:** En el clásico triángulo de la didáctica (maestro – alumno –saber), se intercala un elemento importante y fundamental, en tanto desde la óptica Brousseauiana, el alumno aprende adaptándose a un medio que es productor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad en general; desde este posicionamiento es que cobra sentido que los docentes en formación conozcan lo que es la “preparación del medio” en tanto elemento previo a su trabajo didáctico.

A decir de Sadovsky, *“el concepto de medio incluye entonces tanto una problemática matemática inicial que el sujeto enfrenta, como un conjunto de relaciones, esencialmente también matemáticas, que se van modificando a medida que el sujeto produce conocimientos en el transcurso de la situación, transformando en consecuencia la realidad con la que interactúa”* (Sadovsky, 2005, pág. 20)

Desde esta primera definición podemos apreciar que en la Teoría de las situaciones didácticas, el medio juega un papel fundamental, en tanto éste se refiere tanto a la situación problemática que el sujeto enfrentará, como al conjunto de relaciones, esencialmente

matemáticas, que se generan para fomentar el proceso de resolución de las problemáticas matemáticas; complementaria a la noción de “medio”, desde la década de los 80’s, Brousseau introdujo la noción de “estructuración del medio”, desde esta óptica, “*el sujeto profesor puede identificarse según dos posiciones (profesor que prepara su clase, profesor enseñando) y el alumno puede adoptar cinco posiciones diferentes, de modo que pueden distinguirse cinco medios con los que puede interactuar según diferentes modos*” (Brousseau G. , 2007, pág. 53)

En la siguiente figura resume esta interpretación de la noción de medio y estructuración del medio, con la cual da la impresión de que en el proceso de organización de las situaciones didácticas se establece una dialéctica entre diferentes “medios” en los cuales los sujetos actuarán según el momento al que se refieran:



De acuerdo con Brousseau (2007), comenzando por el interior permite distinguir que la situación de un nivel se convierte en el medio para un sujeto exterior. Así, el *medio material* y el *actor objetivo* constituyen la *situación objetiva*, la cual se convierte en *medio objetivo* para el sujeto que actúa (S4).

En general, él distingue entre:

- *Medio material*: cuando el profesor prepara su clase, organiza un medio -que incluye las reglas que definen el éxito y el fracaso- llamado “medio material” (aun si no hay objetos concretos). Debe considerar también las interacciones de un sujeto con este medio. A este sujeto simbólico lo llamamos actor objetivo (SS). Este par medio-actor constituye la situación objetiva que se propone efectivamente al alumno y con la que debe interactuar.
- *Medio objetivo*: el sujeto, posicionado como alumno ante la situación objetiva está en posición de sujeto que actúa (S4). Por supuesto, puede imaginarse y representarse a S5, y también identificarse con él. Para un observador externo, no hay diferencia entre un sujeto S5 y un sujeto S4, pero sí para el actor, ya que se distingue a sí mismo de los otros. El medio objetivo es movilizado en una situación de acción donde este es o bien el medio efectivo sobre el cual exige al alumno a actuar o bien un medio ficticio cuyo funcionamiento o transformaciones debe imaginar para responder a una pregunta. En los dos casos es un actor que opera

en función de sus modelos implícitos de acción. En este nivel, las situaciones de formulación o de prueba son situaciones de acción.

- *El sujeto aprende corrigiendo sus acciones y anticipando sus efectos. Las situaciones en las que está comprometido son pues, para él, sujeto del aprendizaje (S3), los medios de referencia sobre las cuales ejerce sus capacidades de construcción de conocimientos y aprendizaje. Estas situaciones de aprendizaje, están en el corazón del dispositivo de construcción de los conocimientos y de su significación. Dichas situaciones con frecuencia se borran espontáneamente de la memoria de quien aprende. Para un alumno en la posición S3, la reflexión sobre la acción (realizada efectivamente o no en S4) es la que le da las posibilidades de aprender.*

- *Ser alumno es gestionar situaciones de aprendizaje (con ayuda del profesor). El profesor comienza a actuar, se convierte en actor, se ubica como profesor que enseña. El alumno se convierte en alumno genérico S2 y el medio con el cual interactúan ambos de manera conjunta es el de las situaciones de aprendizaje. Esas interacciones constituyen el momento de establecer relaciones entre conocimientos o de transformar conocimientos en saberes: son las situaciones didácticas.*

- *El profesor reflexiona sobre las situaciones didácticas, que se convierten en los medios didácticos, y se posiciona como profesor que prepara su clase. En esta situación meta-didáctica, el profesor revisa las decisiones tomadas, examina sus clases, estudia los comportamientos de los alumnos a través de acciones, conocimientos y saberes específicos.*

La relación de un sujeto con un medio de nivel diferente exige conocimientos, conceptos, vocabulario, saberes diferentes. El profesor trata el conjunto de estas sujeciones. Se pueden observar contradicciones flagrantes entre lo que el profesor-dice, muestra y da a comprender a los alumnos y las reglas efectivas de las interacciones con cada medio. Por ejemplo, cuando el profesor enseña una demostración por repetición o analogía, hay una contradicción: la convicción se obtiene a través de un medio ilegítimo. (Brousseau G. , 2007, págs. 54-55)

Estas diferentes dimensiones de la conceptualización de “medio”, evidentemente generan problemáticas cuando se trata de que los estudiantes construyan un lenguaje para reconocer lo que sucede en los salones de clase; ante la complejidad conceptual que plantea Brousseau, recuperada en la cita anterior, otros autores han enunciado conceptos más específicos sobre “medio”, los cuales pueden ser más adecuados para que los docentes en formación comprendan la importancia de éste en el proceso didáctico.

Los siguientes dos conceptos pueden servir para mayor claridad conceptual por parte de los docentes en formación, sobre todo ante la dificultad de construir e interiorizar un lenguaje didáctico para principiantes:

(...) forma parte del medio de una situación didáctica el “medio matemático de los alumnos” (es decir, todos aquellos objetos con los que los alumnos tienen una familiaridad matemática tal que pueden manipularlos con toda seguridad y cuyas propiedades les parecen incuestionables), así como los diferentes dispositivos de ayuda al estudio (“clases de matemáticas”, “libro de texto”, etcétera) a través de los cuales se contextualiza la matemática enseñada (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1998 a, pág. 217)

Por su parte Dávila, define el concepto de “medio” en los siguientes términos

(...) el medio, que favorece el aprendizaje de los alumnos es, en sentido restringido, la tarea específica con la que interactúa el alumno (situación). En este sentido, dicho medio puede ser un problema, un juego, un ejercicio o una secuencia de problemas que favorecen el desarrollo de un conocimiento. En un sentido más amplio, Brousseau considera que el medio incluye también otros elementos como son las acciones directas o indirectas del maestro y la ausencia de sus intervenciones, la consigna, las restricciones que pone para resolver la situación, los materiales que se utilizan (Dávila, 2002, pág. 175)

Con lo escrito hasta el momento creo que puede quedar la idea con claridad de que este concepto cobra mucha importancia dentro de la Teoría de las Situaciones didácticas, en tanto permite (o exige) al docente reflexionar anticipadamente sobre las situaciones problemáticas que les planteará a los alumnos, pero también aparece en el momento mismo del desarrollo de la clase, en tanto con sus acciones el profesor “estructura el medio objetivo” sobre el cual actuará el alumno y finalmente, posterior a la clase se convierte en un referente sobre el cual reflexionar, o en términos de Brousseau en una situación metadidáctica.

Ante esta complejidad reconocida explícitamente, desde el análisis de las transcripciones de clase del profesor, a continuación vamos a analizar las formas como el maestro incide para construir esta representación en los estudiantes, es decir, cómo es que los estudiantes interiorizan este concepto, a la vez lenguaje e instrumento de acción.

En primer término encontramos que, en el proceso mismo de la clase del profesor, denomina a un momento de ésta como preparación del medio, con ello pareciera que se está mandando el mensaje sobre cómo se estructura el medio, al respecto encontramos el siguiente fragmento de registro:

Mo. A mí se me ocurriría a partir de lo que dice este J. presentarle al grupo estos dos procedimientos, el que decía M5 y el que decía E3, si en el grupo aparece uno de los dos procedimientos, el que encuentra que 1 litro es para 4 limones entonces ahora le plantearíamos la diferencia, como decía J. a manera de un contraejemplo, que en el otro grupo dijeron que con 1 limón se ajusta para el agua de $\frac{1}{4}$ de litro, ¿ustedes qué piensan?, entonces para eso sirven los procedimientos, pero luego uno los analiza en los problemas, para ahí poder plantearles los contraejemplos adecuados, ustedes me decían en sus observaciones es que tuve algunos problemas con algunos contenidos de matemáticas, si, de eso se trata de estudiarlos antes, de hacerlos nosotros antes, de resolverlos nosotros antes, incluso de prever los contraejemplos, si, cuales procedimientos pueden usar los niños, ¿para qué? para poder ahí hacer este tipo de devoluciones en el grupo, pero si no tenemos muy claro nosotros el contenido, pues si en efecto ahí van aprendiendo y nos falla a veces algo, a veces hacemos un contraejemplo que no

era, etcétera, pero así es esto es de lo que se trata de ser maestro, todos nos equivocamos en algo, yo le decía hace ratito a Juanjo que yo me equivoqué en la sesión pasada, me hizo una pregunta y yo le contesté algo que estaba mal, si, al final de la clase creo que fue eso, pero nadie está exento de cometer errores en clase pero de lo que se trata es de que los identifiquemos, ahora sí, hecha esta megapreparación del medio, vamos a tratar de juntarnos en binas y ahora si vamos a resolver ésta (señala un cuadro de análisis de lecciones del libro de texto), a diferencia de lo que les decía el otro día, ahora si voy a pedirle que intenten buscar en el cuadro las posibles que son, a cada bina les voy a dar un libro de 3º y uno de 4º... (CP 4)

Cuando el maestro termina su intervención, los estudiantes denotan con su expresión que comprenden a que se refiere la expresión “megapreparación del medio”, en tanto antes de que los alumnos se adentren a la tarea de ese día (análisis de algunas lecciones de los libros de texto), hace un rodeo para resolver una duda que había quedado pendiente de la sesión anterior (la dificultad en la introducción del significado de la fracción como razón y como operador multiplicativo), lo cual aprovecha para vincularlo con la aparición del tema en los libros de texto; le llama “megapreparación” en alusión al tiempo que se llevaron en la discusión previa a la tarea central. Notemos que implícitamente se vuelve a mandar un mensaje: la preparación del medio debe ser breve, en tanto es una actividad que genera las condiciones para el trabajo central de la clase.

Reitero algo que ya había comentado, este concepto les suena familiar y es posible “vivenciarlo”, es decir usarlo como parte de la explicitación del proceso de clase, en tanto en un semestre anterior fue discutido teóricamente.

Ahora bien, el concepto aludido aparece con otros dos usos: para el análisis de la práctica y para el diseño de situaciones didácticas, en esa dimensión que ubica la estructuración del medio por parte del maestro cuando prepara su clase.

Veamos cómo es que estos dos escenarios contribuyen a configurar la representación de este concepto didáctico en tanto lenguaje e instrumento de acción. En primer término, en cuanto al análisis de la práctica, principalmente se usa el concepto con la idea de valorar los avances en la forma de organizarlo, es decir, la manera de observar cómo se va construyendo esta habilidad en los alumnos.

En cuanto a la presencia de reflexiones sobre la “preparación del medio” al momento de hacer análisis curricular, notamos que hay tres variantes, diferentes pero complementarias, para construir esta representación: 1ª. El profesor solicita que los

alumnos anticipen verbalmente una posible preparación del medio; 2ª. El profesor sugiere formas de preparación del medio, ante preguntas explícitas de los alumnos; y 3ª. Se solicita que los alumnos diseñen la preparación del medio que consideren más adecuada a la lección que se analiza.

1ª. Anticipación verbal de la preparación del medio: Ante el análisis de diferentes lecciones de los libros de texto y al notar que el diseño curricular no contempla una progresión secuencial sobre el mismo tema (es decir, hay diferentes lecciones que se intercalan entre una lección y la siguiente donde se toca el tema de las fracciones), el profesor genera la reflexión de los alumnos para que piensen en cuál sería la preparación del medio que genere las condiciones adecuadas para que los alumnos aborden la lección, considerando la posible curva del olvido de los alumnos y la conexión significativa entre el conocimiento “viejo” y los planteamientos nuevos; en el siguiente fragmento podemos ver un ejemplo al respecto:

Mo. Se podría trabajar el asunto de la equivalencia pero la pregunta es, vean aquí, que la lección anterior fue en la pág 85, quiere decir que aquí hay como unas 5 ó 6 lecciones antes de llegar a esta, la pregunta sería ¿qué sabe el niño para poder diferenciar $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{2}$ hasta aquí?, la pregunta interesante a que me dirijo en este momento es a qué preparación del medio sería pertinente para que el niño pudiera contestar esta pregunta, ¿qué estrategias creen que usaría el niño para contestar qué es más grande $\frac{3}{8}$ o $\frac{1}{2}$? ¿Qué creen ustedes que haría?
Aa. $\frac{3}{8}$

Aa. diría que es más grande

Mo. diría que es más grande $\frac{3}{8}$ por los números o que el 8 es más grande que el 2

Ao. La preparación del medio se hace la aclaración entre más mayor sea el número será más chico

E3.- Porque si le decimos en la preparación que el más chico es el más grande como que no es una reflexión no

Aa. No

E3.- El niño se va dando cuenta que no es así

Aa. En la preparación del medio donde ellos ya vieron que entre más grande es el número más chica es la fracción. Pero que ellos la descubran

Mo. Puede ser, pero la otra cosa colectivo y lo que podemos hacer es enfrentar a los niños en esta tarea en la idea de que si no lo pueden resolver, es precisamente los errores que cometen ellos los que nos van a permitir hacer devoluciones, validar plantear estrategias gráficas de cómo diferenciar $\frac{3}{8}$ de $\frac{1}{2}$, verdad, entonces se fijan como trabajar todas estas lecciones nos lleva a hacernos este tipo de preguntas, ¿cómo creemos que los niños van a contestar?, y para ver qué actividades vamos a llevar ya previstas o que material didáctico vamos a usar, algunos de ustedes me decían en el escrito que hicieron que la estrategia, que el reto a lograr sería la elaboración de material didáctico más adecuado
Ao. Yo

Mo. Varios mencionaban esto, la idea es que tenemos que saber cuál es el material didáctico ahora, y esa pregunta sólo se puede contestar analizando lo que implica cada una de las lecciones. (CP 4)

La lección aludida corresponde al 3er. Grado de primaria, denominada “Comparemos fracciones” (SEP, 2011a, pág. 117); como podemos apreciar, la necesidad de reflexionar sobre la preparación del medio se presenta cuando se dan cuenta que la anterior lección, con una temática similar, está en la página 85 denominada “La mitad de la mitad de la mitad...” en tal sentido, este tipo de reflexiones induce a que en el trabajo docente con la asignatura de matemáticas, pero sobre todo con la finalidad de darle significatividad al aprendizaje es necesario hacer una preparación del medio que articule una lección con la siguiente.

Sin embargo, algo que llama también la atención en el anterior fragmento de registro, aparte de generar la necesidad de reflexionar sobre la preparación del medio, es el hecho de que aparece implícitamente una crítica a las formas tradicionales de comenzar una clase y explícitamente aparecen diferentes concepciones sobre la enseñanza, lo cual le da la oportunidad al profesor de cuestionarlas; vemos una diferencia entre una concepción que pretende darles la respuesta a los alumnos: *“en la preparación del medio se hace la aclaración entre más mayor sea el número será más chica la fracción”* y la afirmación de que *“si le decimos en la preparación que el más chico es el más grande como que no es una reflexión”*, lo que configura una concepción de la enseñanza donde el papel protagónico es del alumno. Es este juego de declaraciones contradictorias lo cual permite al profesor reafirmar la representación de un esquema de enseñanza congruente con el enfoque actual, cuando afirma “Mo. Puede ser, pero la otra cosa colectivo y lo que podemos hacer es enfrentar a los niños en esta tarea en la idea de que si no lo pueden resolver, es precisamente los errores que cometen ellos los que nos van a permitir hacer devoluciones, validar, plantear estrategias gráficas de cómo diferenciar $\frac{3}{8}$ de $\frac{1}{2}$, verdad”. De nueva cuenta vemos aquí una oportunidad para la destransposición, para la rectificación de un aprendizaje vivencial que se manifiesta no congruente con el enfoque constructivista.

2°. Representación social sobre la preparación del medio a partir de formas sugeridas por el profesor: Ante las preguntas sugeridas por los estudiantes, respecto a cómo preparar el medio, el profesor proporciona algunas alternativas, con lo cual implícitamente está contribuyendo a la configuración de esta representación.

Ao. Como ahorita ¿cuál sería la preparación del medio que se emplearía?

Mo. ¿En cuál?

Ao. En la que estamos ahorita

Mo. En la que estamos ahorita de comparemos fracciones, todas la derivan de una pregunta, esta está en la pág 56 (¿cuántas caben?), quiere decir que hay 30 páginas de diferencia, 30 páginas, quiere decir que hay alrededor de unas 7, 8 lecciones que se trabajan de esto, llegamos a la siguiente lección, no solo ésta, parece que todas, tendríamos que remitirnos a lo que ya habíamos visto de las fracciones, de tal manera que una buena preparación del medio nos llevaría a remitirnos, ¿se acuerdan cuál fue la lección que vimos? (señala la lección de la pág 56); ¿se acuerdan de la lección?, ¿de qué se acuerdan?, ¿qué aprendimos en esa lección?, y ponerles algunas actividades que se relacionen.

En esta lógica, la preparación del medio incluiría preguntas para reactivar los recuerdos de los niños, para recuperar los aprendizajes previos e incluso plantear actividades que se relacionen con el tema que se trate; evidentemente esto es de manera genérica, pero de una u otra manera contribuye a generar un esquema propicio para este tipo de representaciones sobre lo más adecuado para estructurar una preparación del medio.

Mo. Pág 85, muy poquitos alcanzaron a hacer esta pregunta, entonces mejor vamos a llegar el día de hoy hasta esta, porque no pudimos entrar en detalle, lo que quería con esta actividad es que vieran ustedes que hay una progresión entre las fracciones, que cuando lleguemos a una división tengamos que remitirnos a cuál fue la que se vio antes, porque si no dejamos así, imagínense que empecemos directo con la lección, sin plantearle ninguna pregunta a los niños, entonces como van a relacionar con lo anterior, si nosotros no les ponemos actividades, si nosotros no les preguntamos, sino hacemos esa preparación del medio que hemos discutido, si, es decir dejamos, entramos directo con la lección, vamos hacer responsables a los niños de cómo relacionar esa lección que vimos en la pág 85 con la que está en la pág 47, es decir casi 40 páginas después estamos poniéndoles una lección de las fracciones a los niños y queremos que ellos se acuerden de lo otro, entonces para ayudarles a los niños tenemos que participar como maestros, es el punto fino de la preparación del medio, más claro, para ir dando un paso más en esto, más claro, en esa preparación del medio habrá que explorarlos en lo que hemos denominado aquí como la memoria didáctica, si, hoy más que nunca es necesario dicen algunos autores que si no relacionamos el pasado, o sea lo anterior con lo presente, no hay aprendizaje, hay autores que dicen que hay un porcentaje muy alto en el fracaso en matemáticas, se debe a que los maestros de matemáticas no relacionamos el presente con el pasado y a quien dejamos a que lo van a relacionar son los niños y hay sino lo relacionan ellos, sino se acuerdan, es responsabilidad de ellos, no se trata de eso, si los adultos ya nos dimos cuenta de ese fenómeno didáctico, hay que ser buenos para trabajar la memoria didáctica, más adelante les voy a pasar un texto que yo escribí sobre el tema, sobre esto. (CP 5)

Como apreciamos, de manera explícita hay una articulación entre la preparación del medio y otro de los conceptos que configuran el lenguaje didáctico que aprenderán los estudiantes: la memoria didáctica (del cual más adelante comentaremos).

En el anterior fragmento también apreciamos cómo se está previniendo de las consecuencias del papel del profesor; ante los avances en las investigaciones didácticas, los profesores adquieren responsabilidades que tienen que cumplir, en este caso, no se puede dejar toda la tarea de transferencia de los aprendizajes a los niños, el profesor debe tomar conciencia de ello y actuar en consecuencia. Estas afirmaciones del profesor inciden en ese reconocimiento y directamente cuestionan un enfoque ostensivo de enseñanza.

3°. Diseño de la preparación del medio, objetivación de la representación para la práctica: Le hemos llamado objetivación de la representación para la práctica en tanto, derivado del análisis de las transcripciones, este diseño tiene una clara connotación utilitarista, es decir, se trata de que las reflexiones generadas a partir del diseño de la “preparación del medio” estén orientadas a su posterior puesta en práctica en la escuela primaria, con lo cual este momento adquiere un matiz diferente, dado que ya no se trata de hablar o compartir ideas sobre lo que el concepto implica, sino que se trata de poner en práctica la comprensión sobre el concepto.

A partir de la siguiente consigna, el profesor les devuelve la responsabilidad a los alumnos para que diseñen su “preparación del medio”; cabe aclarar que la actividad se hace en equipos de alumnos y a partir de una lección, previamente analizada, del libro de texto de matemáticas de 4°. Grado:

Mo. “Es mayor a $\frac{1}{2}$ ”, vamos a trabajar en la página 85, sólo vamos a trabajar en la página 85, todos con esa lección, fíjense bien que es lo que van hacer, esta va ser su tarea para salir cada uno, van a hacer la preparación del medio, para cómo trabajar esta lección, sale

Aa. Hay no, no me lo puedo creer (en voz baja)

Aa. Profe ¿no le da miedo viajar de noche? Porque nos vamos a tardar (risas y ruido de todos) (CP 7)

La brevedad de la consigna evidencia que ya los alumnos tienen claro a qué se refiere el profesor con la preparación del medio, recordemos además (como lo hemos analizado en párrafos anteriores) que de diferentes maneras se les ha hecho saber en qué consiste; sin embargo, las dos participaciones, de diferentes alumnas, evidencian que son conscientes de la dificultad que ello implica.

Ahora bien, para poder contextualizar las participaciones de los diferentes equipos y que tengan sentido los fragmentos de registro que recuperamos es importante ver en qué consiste la lección a la cual le van a hacer la preparación del medio.

Significado y uso de los números

Números fraccionarios
Compara fracciones e identifica fracciones equivalentes.

Es mayor a $\frac{1}{2}$

Lo que conozco. Subraya en qué caso hay más agua para cada persona distribuida en partes iguales

a) Al repartir un litro entre dos personas.
b) Al repartir dos litros entre tres personas.

Escribe brevemente cómo puedes comprobar que tu respuesta es correcta.

1. Resuelve el problema siguiente.

El maestro de Matemáticas llevó al salón de clase 6 melones de tamaño y peso similares. Acomodó en filas a sus alumnos y a cada una le entregó un melón. En la primera fila sólo había 2 alumnos; en la segunda, 4; en la tercera, 3; en la cuarta, 6; en la quinta, 8 y en la sexta, 5. El profesor pidió que cada melón se repartiera en partes iguales entre los alumnos de cada fila.

- ¿En cuál de las filas los alumnos recibieron una porción mayor de melón?
- En una de las filas cada alumno recibió la mitad de un melón. ¿De qué fila se trata?
- ¿Qué fracción de un melón le correspondió a los alumnos de la sexta fila?
- Roberto afirma que entre más alumnos haya en la fila, menor porción de melón recibirán. ¿Estás de acuerdo con él? ¿Por qué?

85

(SEP, 2011, pág. 85)

En esta parte del trabajo sólo incluimos la página 85, en tanto fue la indicación explícita del profesor, respecto al número de página en la que debían trabajar, sin embargo incluimos como anexo 12 “lección: preparación del medio”, todas las páginas que contempla el desarrollo de esta lección, correspondiente al bloque 3 del 4°. Grado de educación primaria.

Antes de que los estudiantes se pongan a diseñar, el profesor hace una acotación más:

Mo. Y la idea es, esa preparación del medio que van hacer, tienen que pensarle cómo se relacionaría, esta no es la primer lección, la 85, tienen que pensarle como se relaciona con la anterior y eso implica poner más atención, ahora si muchachos Aa. Si se puede
Mo. Es su preparación del medio, sale, (CP 7)

Esta acotación del profesor genera algunas dificultades, dado que, como podemos apreciar en el siguiente fragmento de registro, los estudiantes no le encuentran una relación directa⁵⁵, sin embargo podemos inferir que al hacer la acotación, implícitamente el profesor está haciendo alusión a la “memoria didáctica”, es decir, les resalta a los alumnos la idea

⁵⁵ La lección anterior a ésta, es la número 11 “Calcula fracciones”, ubicada en la página 47 del mismo libro (SEP, 2011) y al hacer un análisis vemos que el contexto de uso de la fracción es en una situación de medición de superficies.

de que no se olviden que los niños tienen antecedentes que hay que conectar con esta lección, de tal manera que el aprendizaje les resulte más significativo.

Edgar.- cómo vas a hacer la memoria didáctica, tiene que llevar cierta relación ésta con ésta

Ao. La 47

Edgar.- Que a los niños se les va a olvidar

Ao. Es para que recuerden y empiecen a trabajar con lo que es la... (lo interrumpen)

Edgar.- Para que lo recuerden pero como preparación del medio, si, más o menos

Ao. Es que la botella no tiene nada que ve con la otra lección, la otra lección era calcular el terreno

Aa. Y cuando calcular

Aa. son cálculos (CP 7)

Sin embargo, en otro de los equipos sobresale algo muy interesante, en términos de cómo los estudiantes van recuperando su incipiente experiencia docente, para capitalizarla en el diseño de nuevas situaciones didácticas, en este caso, en el diseño de la actividad solicitada.

Ao. Es que aquí la misma, aquí lo que pregunta es la preparación del medio, ¿verdad?

Ao. Tenemos que hacer la preparación del medio de esta lección

Aa. En qué caso hay más agua para cada persona, al repartir un litro entre dos personas...

Mo. Nada más la preparación del medio de todo

Ao. Profe si era la página 85

I4: Se me viene a la mente lo que hice en Jerez, les llevé vasos de un litro, de medio litro y de un cuarto y ya les daba una tina llena de agua y los íbamos llenando.

Ao. ¿Pero que no es mucho?, para la preparación del medio es mucho

I4.- Pues es una actividad,

Ao. Es que nada más hice la preparación del medio de esto

I4.- Por eso, para hacer una preparación del medio es una actividad, porque yo lo que hice esta vez, la maestra me dijo que eran actividades, nomas (sic) lo introducía poquito, o sea una explicación leve y dijo que no, que las actividades eran éstas para que los niños comprendieran

Ao. O.k, entonces, 3 personas 2 litros, 1 litro, obviamente que les va a tocar más en...

a) Al repartir un litro entre dos personas

b) Al repartir dos litros entre tres personas (texto presente en el libro del alumno)

Aa. ¿Cuántos litros? (CP 7)

En este fragmento se hace más explícita la concepción de la alumna sobre lo que es la preparación del medio: **una actividad**; además si recordamos el inicio de la lección, el contexto es el reparto de agua, de ahí que les parezca adecuado, antes de abordar la lección, hacer un ejercicio práctico de reparto efectivo de agua en recipientes de diferente

capacidad. Además se introduce otra variable que poco hemos comentado, en la experiencia docente de los estudiantes se articulan las sugerencias que les hacen los maestros titulares, las cuales al parecer tienen mucha influencia sobre las decisiones en la práctica.

Con cierta coincidencia en cuanto a la forma de preparación del medio, en otro equipo hacen las siguientes valoraciones:

Ao. *Supongamos que mi idea no es muy buena pero...*
 Ao. *Pero de igual forma también llevar una fruta*
 Ao. *¿una qué?*
 Ao. *Una fruta para hacer la repartición ahí*
 Ao. *¿De qué?*
 Ao. *Cualquier cosa que podamos repartir*
 Ao. *yo digo que el agua, qué haces, cómo inicias, pero es igual*
 Ao. *Podemos llevar cualquier cosa que podamos repartir, o que ellos puedan repartir.*
 Ao. *Agua y botellas en equipos que lleven agua potable, o de la llave*
 Ao. *Pero necesitaríamos llevar recipientes*
 Ao. *Lo que tú quieres es que reparta de forma, que quede parejo*
 Ao. *Como llevaríamos una unidad, como representaríamos una unidad, ¿a ver?*
 Ao. *¿Llevaríamos un litro?,*
 Ao. *sí, llevamos vasos de plástico, un paquete, 10, es una forma, tienen líneas, ya ellos que se la compliquen, y este busquen las formas y las estrategias de resolverlo*
 Juan.- *¿con una hoja no se puede?, una hoja dividirla a la mitad y luego esa mitad sería 1/4, ¿no se puede con esa hoja?*
 Ao. *si también, para que ellos tanteen lo que les toque de agua, pero supón que de agua,*
 Juan.- *Entonces con botellas de litro y de 500 mililitros*
 Ao. *Y medios*
 Ao. *Pero para eso necesitarías de llevar tú botellas*
 Ao. *Bueno yo estoy a medias, pues tienen que llevar material, si se les pone fácil*
 Ao. *Esa podría ser mejor porque cada niño podría representar y no tendría que estar atentos a lo que esté haciendo el maestro, que sería lo que haríamos con las botellas de agua, o si llevamos nada mas, tenemos que llevar botellas para todos pues, mejor una hoja cada quien, a ver que en cuanto se dividió la hoja, ah entonces en medios, porque ya tiene la noción (CP 7)*

Cuando el estudiante afirma “*ya que ellos se la compliquen*”, al parecer se asume que son los alumnos quienes tienen que enfrentarse a los problemas, lo cual es congruente con el enfoque oficial, sin embargo ante esta misma dificultad es conveniente que la preparación del medio prevea los materiales adecuados; incluso aparece otra variable de la preparación del medio, la relativa a las implicaciones que tiene, para los estudiantes (incluso para los maestros en servicio), organizar actividades que impliquen llevar mucho material, lo cual puede orientar la toma de decisiones.

En síntesis, esta representación sobre la preparación del medio comienza a anclarse en las prácticas docentes de los estudiantes, recuperando las características que han aprendido, tanto de manera vivencial como por las sugerencias directas del profesor: la preparación del medio es una actividad que recupera la memoria didáctica del profesor, compartida con el grupo de alumnos, mediante la cual se articulan conocimientos aprendidos en lecciones previas; incluye preguntas, previsión de materiales, pero sobre todo comprensión de la secuencia de las lecciones para contribuir a que los alumnos hagan transferencias de aprendizajes previos y consoliden los nuevos aprendizajes.

En el siguiente fragmento de registro se ve cómo, después de la revisión que hace el profesor a las “preparaciones del medio” elaboradas por los estudiantes, se contribuye a fortalecerlas:

Mo. Este es un cover, el otro cover va a ser, van a entregar en limpio su preparación del medio

Ao. Por equipo

Ao. Es el examen más caro que he tenido

Ao. ¿La preparación del medio de qué?

Mo. Con una acotación, a eso le vamos a dedicar ahorita 5 o 10 minutos, todos los que hicieron su preparación del medio decían que les quedó bien, que tenían un acierto, pero todos omitieron una cosa, la lección anterior.

Ao. ¿Cómo?

Ao. Yo sí la tome en cuenta

Mo. ¿Ha sí?, no la alcance a ver entonces,

Ao. ¿omitirla en qué sentido?

Mo. La idea es que en su preparación del medio van a incluir algunas preguntas, alguna actividad, algo que lleve a los niños, a que los niños asocien la lección anterior de la que les tocó ver, si mal no recuerdo (busca en su material cuál es la lección)

Ao. Una articulación

Ao. ¿Cuál lección anterior?

Ao. La que nos dijo, unas páginas antes, que era la primera lección, no

Mo. ¿Cuál es?, díganme cual es la parte en la que...

Aa. 58

Aa. 75

Mo. No la 58 no, la 58 es la anterior, la 58 y la que ustedes contestaron fue

Aa. al revés

Mo. Ahorita sale, espérenme tantito, aquí está, “es mayor a $\frac{1}{2}$ ”, es la página 85, la lección que está en la página 85,

Aa. En la 87

Mo. No, es la 58, ahorita les voy a prestar un libro, para que le incluyan, sí, qué preguntas le harían a los niños para que asociaran con ese problema, porque a todos se les pasó

Ao. ¿Ya te diste cuenta?

Mo. Iban a hacer su preparación del medio de la página 85, lo cual estaba bien, solo ese mínimo...

Ao. Había que incluir lo de la...

Mo. Sí, qué le van a preguntar a los niños para que asocien a lo que ya vieron antes o qué actividades les van a poner para que ellos asocien lo que vieron antes, sale, ¿si están viendo esto?, ¿me explico?, no se lo van a llevar (se refiere al libro de texto que les prestó) (CP 9)

* **Consigna:** Es muy común que se maneje como equivalente la consigna a las instrucciones que da el profesor, para iniciar la actividad, sin embargo, en coincidencia con (Centeno, 1997) la consigna hace alusión a las “reglas del juego”, pero para que estas reglas funcionen tiene que haber una triple devolución: de la regla del juego, del problema y de la decisión.

-La devolución de la regla de juego. Las consignas deben poder ser comprendidas por el alumno, lo que significa que los conocimientos que posee el alumno deben ser suficientes para interpretar correctamente las condiciones y las informaciones que definen la situación. La acción que provoca la situación tendrá que apoyarse en modelos que tienen significación para el alumno a quien se le presenta.

-La devolución del problema. La situación debe plantear un problema que el alumno no sabe resolver con los conocimientos que posee. Si el alumno supiera responder a la situación resolviendo el problema que se plantea, ésta no sería un problema y la situación tendría la condición de ejercicio de aplicación, de refuerzo, de consolidación, etc.

-La devolución de la decisión. El alumno debe poder elegir entre diversas posibilidades y ser capaz de considerar que existe una relación de causa a efecto entre las decisiones que toma y los resultados que obtiene. El maestro debe conseguir que el alumno se sienta responsable de sus decisiones. (Centeno, 1997, pág. 116)

Otro de los conceptos centrales en la construcción de esta representación sobre la importancia de un lenguaje específico para hablar sobre lo didáctico y sobre lo que acontece en el salón de clase, es la consigna, a partir de las consideraciones que hace (Centeno, 1997) de esta triple devolución, apreciamos que la tarea del profesor se complejiza, en tanto en la formulación de una consigna debe haber siempre un problema, unas reglas de juego (esto significa tener claridad de qué sí se puede hacer y qué no, en el proceso de resolución del problema) y la devolución de la decisión, es decir, dejar en manos del alumno el proceso resolutor.

Ahora bien, ¿cómo se logra construir un escenario didáctico para que los estudiantes interioricen esta representación?, volvemos al análisis comparativo de los registros para encontrar que este concepto está presente desde la experiencia vivencial de los estudiantes, a partir de la naturalización del discurso, es decir, su uso en el salón de clase, acompañado del antecedente teórico estudiado en el semestre escolar anterior, le confiere un status de familiaridad que contribuye a su comprensión.

Por ejemplo, coincidió que las primeras dos sesiones que se grabaron (fueron consecutivas, en un horario de 9:50 a 13:20, con un receso de 11:30 a 11:40) los estudiantes acababan de regresar de una jornada de práctica docente en la escuela primaria y la actividad central fue el análisis de lo acontecido en ésta; para ello se implementaron dos estrategias: resolución de 3 preguntas planteadas por el profesor y observación de fragmentos de video de las mismas clases de los estudiantes.

Las preguntas planteadas fueron: ¿en cuál aspecto de sus competencias didácticas consideran que hubo una mejoría o evolución respecto a la jornada de prácticas del semestre anterior? ¿Cuál de los aspectos de sus competencias didácticas consideran que constituye un reto a superar para la próxima jornada de prácticas? ¿Escriban un ejemplo de cómo se presentó, en el periodo de prácticas pasado, cualquiera de los siguientes tres tópicos: regulaciones didácticas, devoluciones y tratamiento de los errores?

Mo. No las van a contestar las 3, o bueno si alguien quiere decir poquito de las 3, pero la idea es que seleccionen una nada más y déjenme le añado algo, una restricción más a la consigna, la idea es que lo digan de que es lo que llevamos nosotros en la clase supuestamente más preparada que era la de las fracciones, en ese cómo le fue con los errores, en el caso de los de primero y segundo recuerdo que fue la de la casita unos, bueno otros hicieron, uno me enseñó el de la casita, otro me enseñó el de los trazos ese de geometría, entonces lo que hayan hecho mejor, los de primero y segundo la que hayan trabajado, los de tercero a sexto vamos a repetir estas preguntas sobre todo pensando en el asunto de las situaciones didácticas que trabajamos sí, no lo contesten en una hoja que no puedan arrancar, eh, contéstenlo en una que puedan arrancar porque me lo van a dar, ahora sí, para esto les voy a dar unos minutos para que lo contesten, si A (varios).- hablan al mismo tiempo

Aa. ¿Qué es eso de tratamiento de los errores?

Mo. ¿A ver a qué nos referimos con el tratamiento de los errores?, A6

A6.- es como si la clase iba por mal camino, de cómo nosotros le hacemos, para conducirla

Mo. ¿Para conducir qué?

A6.- para reconducir de nuevo la consigna

Mo. para reconducir de nuevo la consigna, ¿pero la reconducíamos cuando sucedía qué?, ¿si iba bien para qué la reconducíamos?

A6.- no, cuando, si se estaba desviando, por si se estaba desviando

Mo. no, esto tiene más que ver con las regulaciones, no, el tratamiento de los errores es otra cosa, E3 (CP 1)

Como apreciamos en este fragmento, se usa de manera “natural” el concepto en la marcha cotidiana de la clase, bajo la premisa implícita de que de esa manera se va interiorizando; en las “restricciones” se evidencia lo que (Centeno, 1997) denomina reglas del juego, en este caso, los estudiantes iban a contestar las preguntas pero tomando como foco de análisis sólo una de sus clases.

Por otro lado, en la segunda sesión de clase, se usa el concepto de consigna y restricción de la consigna al analizar fragmentos de video de las clases de los mismos estudiantes

Mo. Si, entonces quien aquí de ustedes aquí concluía que en las fracciones es importante la unidad de referencia,

Ao. Entonces, cuando nos dice repartir pasteles, habrá que poner la restricción de que los pasteles sean iguales, que sean del mismo tamaño

Mo. Así es porque todos los niños se forman la idea, como aquí que $\frac{2}{4}$ es más grande que $\frac{1}{2}$, y es lo que pasó ahorita, es lo que falló, bueno son 2 consignas distintas, vamos a ver en la clase de I4, que I4 les da los pasteles ya hechos, aquí están, aquí Luis les pidió que los dibujaran y lo que pasa es que los niños los dibujaron de diferente tamaño,

Ao. o le hubiera dado las medidas y dibújenlo de verde

Mo. esa pudo haber sido una buena restricción de la consigna

Al observar otro de los videos de clase se aprecia lo siguiente:

Mo. Estamos en otro plano, bueno de hecho esos son los contenidos que se trabajaron en esa semana y ahí ustedes saben que les dimos nuestra situación didáctica de las fracciones para comprobar ese contenido que estamos trabajando aquí, he, aquí ya hay una diferencia en cuanto a lo que vimos con Luis, aquí es una misma consigna para todo el grupo, y vamos a ver, la hipótesis de ustedes era que se pudieran copiar, vamos a ver si se copiaron los niños, eh, acláranos una cosa I4, porque la última restricción, a ver pónganse listos, eh, háganlo con lápiz

Aa. Para que no

Mo. Antes de recordarlo, ¿por qué esa restricción a la consigna?

De nueva cuenta apreciamos que, sin necesidad de establecer una definición formal de lo que es la consigna (no olvidemos que posiblemente pudo haberse trabajado esto en un semestre anterior) los estudiantes la usan para hablar sobre lo que acontece en sus clase.

Finalmente, antes de terminar este apartado sobre el concepto de “consigna”, hay dos situaciones más que es importante recuperar, dado que contribuyen a redondear la comprensión del concepto y por ende su interiorización como una representación social respecto a cómo proceder en la enseñanza de las matemáticas: 1º. En el proceso mismo de conducción de la clase del profesor y, 2º Cuando los estudiantes conducen actividades (en este caso un juego matemático congruente con el tema de las fracciones) en el salón de clases de la escuela normal.

En el proceso mismo de conducción de la clase del profesor, él utiliza la denominación “la consigna es” y luego la enuncia:

Mo. Quiero que platiquen los problemas que están ahí eh, tiene que quedar, a ver hay les va cuál es la consigna, la consigna, aquí ya está la consigna de lo que van hacer (se refiere a que está escrita en las hojas que les está entregando para que revisen), la consigna fundamental de esta actividad, tienen que diferenciar ustedes y eso platíqueno ahí, ¿cómo es ver la fracción como un reparto? Fíjense la fracción como un reparto ¿qué es eso?, y luego la fracción como una medida, ¿qué es eso? y luego la fracción como una razón, ¿qué es la fracción como una razón?, y luego la última que es, la fracción como operador multiplicativo, si, entonces, la fracción como reparto, la fracción como medición, la fracción como operador multiplicativo y la fracción como razón, tienen que sabérselas, son 4 cosas y aquí vienen 4 problemas distintos en función de cada uno, sale, esto es lo que tienen que aprenderse hoy, eh, búsqúenle

Alumnos tratan de resolver la consigna (CP 3)

En este caso, al hacer el profesor un uso explícito de la frase “*la consigna fundamental de esta actividad*”, implícitamente les está mandando el mensaje respecto a cómo enunciarla, sin embargo quedan algunas dudas, al analizar de manera comparativa las afirmaciones teóricas de Centeno (1997) y la consigna enunciada por el profesor, e incluso al compararla con el enunciado escrito en las hojas que les entregó:

Imagen escaneada	Transcripción
Enseguida se presenta una serie de situaciones para aprender algunas propiedades de las fracciones. En binas hagan un análisis de ellas y luego busquen en los libros de texto actividades similares a las que aquí se presentan.	Enseguida se presentan una serie de situaciones para aprender algunas propiedades de las fracciones. En binas hagan un análisis de ellas y luego busquen en los libros de texto actividades similares a las que aquí se presentan.

¿Cuál es el margen de flexibilidad para denominar una consigna fundamental? ¿Qué diferencia podemos establecer entre una consigna propia de una clase donde el centro sea el saber matemático y aquella que tiene como centro el análisis didáctico del conocimiento especializado sobre matemáticas (como es el caso de este ejemplo)? Me parece que en este ejemplo que recuperamos, no es que no se tenga el conocimiento de las características de una consigna y los elementos que la distinguen de las instrucciones en el sentido tradicional, más bien nos remite a un problema de naturaleza distinto y a la vez complementario a las discusiones de la teoría de las situaciones didácticas, es decir, nos remite al problema de cómo diseñar situaciones de aprendizaje cuando está presente un saber didáctico o incluso un conocimiento especializado sobre un saber matemático y cómo formular una consigna congruente para ello.

En la construcción de representaciones sociales, cuenta tanto el contenido como el modo en que se habla sobre él (Moscovici & Marková, 2003), en este ejemplo pareciera

ser que el contenido de la representación “consigna fundamental” se acerca más a una instrucción que a toda la complejidad que el concepto teórico exige.

Sin embargo, en la 5ª. Sesión de clase, vemos una consigna enunciada por el profesor, a partir de la aplicación de un juego con sus estudiantes, donde está presente el conocimiento de las fracciones, la cual remite inmediatamente a la acción y les devuelve la responsabilidad a los estudiantes:

Mo. Ahí mismo, ahí mismo donde están, voy a pedirles que se pongan ahora ya no de a 2, sino de a 3, vamos a jugar.

Ao. ¿de a cuántos?

Mo. De a 4 nos vamos a juntar, más de 4 no, vamos a jugar al dominó (alumnos integrándose a su equipo)

Ao. Eh, le ganaron...

Mo. A ver, escuchen bien cuál es la consigna, yo les voy a pasar un dominó de fracciones, un dominó de fracciones, vamos a jugarlo con lo que conocen del dominó ¿quién es el que empieza el dominó?

Aa. La mula de 6

Mo. Una, se empieza con una mula

Ao. La mula más alta

Mo. La mula más alta, entonces yo se los voy a entregar y les voy a pedir de que antes de que jueguen los pongan ahí en su mesa, con los puntitos hacia arriba para que vean de qué se trata, busquen las mulas, identifiquen cuáles mulas hay, a ver si hay mulas ¿si no hay mulas de qué otra manera podemos comenzar?, a ver fíjense bien cuál es la idea, van a jugarlo primero como se conoce habitualmente el dominó, si, y después en cada equipo van a buscar una variante para este juego. (CP 5)

Como apreciamos, la estructura de esta consigna involucra la organización del grupo y el problema a resolver: después de jugarlo, buscar una variante; de igual manera les devuelve la decisión, dado que no precisa cómo debe ser la variante a encontrar, el reto está precisamente en la creatividad de los estudiantes.

En otra clase del profesor vemos otro tipo de consigna, desde la cual se les devuelve un problema a los alumnos, aunque no propiamente un problema en el sentido clásico de matemáticas, sino más bien en el sentido de la dificultad que implica “inventarse” un problema matemático:

Mo. Para ese día, muy listos porque si no no van a entender la consigna, este es el texto que van a leer (muestra unas hojas a sus alumnos); lo hice con mucho cariño esperando que alguno del colectivo... (Interrumpen)

Ao. Profe yo tengo una duda acerca de usted no ha hecho, escrito, publicado libros, suyos de usted

Mo. Si, míos de mi propiedad,

Aa. ¿Cómo se llaman?

Mo. Hicimos un libro que se llama, la Reforma

Ao. La Reforma agraria

Alumno: La reforma educativa

Mo. Como está la reforma en las escuelas de educación básica, la reforma que está en los salones de clase, me lo publicó la SEP hace poquito, pero dejamos eso, si, este, les voy a pasar este texto, el texto tiene 7 apartados, antes de aquí está uno que se llama el proemio, y al final tiene unas conclusiones

1-1-5
2-6-10
3-11-15
4-16-20
5-21-25
6-26-30
7-31-34

Números escritos en el pizarrón

Mo. los que son de número de lista del 1 al 5, van a leer el apartado 1, nada más el apartado 1, el proemio y las conclusiones, lo van a leer y ¿qué es lo que van a hacer?, su evidencia no va a ser de que digan si lo leí, van a traer un ejemplo como el que viene aquí, un ejemplo pero que no sea igual, o sea que se parezca, son ejemplos de cómo se plantea la, aquí viene ejemplo de cómo se ven las fracciones, un ejemplo como el que está aquí, esa va a ser su evidencia, en una hojita, creo que cabe más o menos en la mitad de una hojita

Aa. ¿Y si no sé qué número soy?

Aa. ¿De la lista nueva o de la vieja?

Aa. De la nueva

Mo. De la nueva, entonces los que son del número 6 al 10, van a leer el apartado 2, junto con el proemio y las conclusiones, ¿ya no es necesario que diga todo lo demás, verdad?

Alumnos.- no

Mo. Entonces todos van a leer el proemio y todos van a leer las conclusiones, pero nada más el numerito que les toca y ¿cuál es la evidencia? traer un número, un número, je,

Alumnos.- un problema

Mo. Un problema como el que está aquí

Aa. Parecido, semejante,

Mo. Parecido, semejante, que dé la idea, equivalente, ahora si les va a dar un aviso Laura, mientras tanto les da el aviso, les voy a revisar su tarea (CP 7)

En este caso, el contexto sigue siendo el análisis de un conocimiento especializado sobre las fracciones: la comprensión de los diferentes significados que éstas adquieren; para ello se analizan diferentes tipos de problemas y se les solicita que traigan un problema semejante; a diferencia de la consigna que recuperamos desde la 3ª clase, ésta se plantea para que los alumnos la resuelvan de tarea, es decir, no es una consigna que devuelva inmediatamente una acción, más bien deja la responsabilidad a los alumnos para que resuelvan la situación planteada, haciendo uso de sus propios medios y conocimientos ya revisados (no olvidemos que ya tienen como antecedente 6 sesiones sobre el tema).

Por otro lado, en la sexta sesión de clase el maestro le pidió a un equipo de alumnos que condujeran un juego con sus compañeros de grupo, y es precisamente aquí cuando se pone en práctica el concepto de consigna; recuperamos un fragmento extenso, en tanto hay

varios momentos presentes, durante el tiempo que dura la formulación de la consigna y consideramos necesario que se vean en secuencia.

En la siguiente tabla, del lado izquierdo aparece el registro y del lado derecho, escribimos las palabras que sintetizan y enuncian el concepto que sobresale desde éste:

Tabla 24. Conceptos didácticos: ejemplificación desde los registros.

Mo. ¿Quién se acercó más?, ya no les voy a decir otra cosa sólo les pido que le pongan atención a ellos, concéntrense, listos pues en lo que les van a platicar sus compañeras, vamos a darle importancia a eso y lo que yo traigo planeado lo vemos enseguida, sale, entonces por favor pórtense a la altura de las circunstancias con sus compañeras y no les estorben la actividad, ahora sí, adelante Cindy R6.- Bueno <u>si se acuerdan estamos trabajando lo de las fracciones</u> verdad, entonces nosotros planeamos una pequeña actividad, para que a lo mejor quede un poquito más claro para los que todavía no le hayan el hilo a esto, si Ao.- Gracias R6.- Para eso vamos a dividir al grupo en 6 equipos, 6 equipos de 5 personas, pero primero para evitarnos la molestia de que cuando ya formamos los equipos nos están hablando porque no entienden lo que van a hacer, primero les vamos a explicar, lo que van a hacer, si, y luego ya se forman los equipos, este, les vamos a dar 4 tiras, 4 tiras si, una en blanco nada más, de un metro y otra va a estar dividida en cuartos y medios Mo. En medios y cuartos R6.- Y la otra en sextos y quintos, entonces se trata de que pongamos la tira en blanco ya sea en el piso o donde quieran, y un integrante del equipo va a tomar una ficha como ésta y la va a poner en el lugar que quiera de la tira en blanco, si, entonces aquí van a calcular todos los demás a qué distancia está, si, si esta tira desde aquí hasta acá por ejemplo, a qué distancia la pusieron, <u>pero la restricción</u> es que nada más lo tienen que adivinar en medios, cuartos, tercios, sextos, quintos, y décimos, si, adivinar al principio y ya después que todos tengan lo que creen que mide, lo van a comprobar midiendo con la regla, por ejemplo si yo digo que mide, que ahí pusieron la tira y yo dije que media $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{5}$, voy a poner aquí (coloca una de las rectas debajo de donde colocó la ficha), y voy a medir, como ven ya me pasé, Ao. Debe ser exactamente en el punto R6.- Se va a poner a partir de ahí hasta acá, (coloca otra recta para completar su medida), o sea que mi medida fue hasta ahí, pueden observar $\frac{1}{5}$, entonces yo me pasé, si, así y gana el que Mo. El que le atine Ao. El que se acerque más, Ao. Maestra R6, entonces la referencia es el punto Ao. aja, es el punto, exactamente desde el principio hasta donde podemos llegar Ao. Podemos utilizar varias por ejemplo $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$ y así Ao. Aja, <u>se suman</u> M5.- Cada quien va a hacer sus estimaciones en cada equipo, va a pasar por ejemplo pasa Tayde, y luego anota lo que haya salido y luego pasa cada integrante y luego ya después de que terminen de pasar	Memoria didáctica Decisión de organización Consigna Restricción a la consigna

R6.- Esta secuencia se repite hasta que todos los integrantes del equipo haya puesto Ao.- Su punto R6.- Su ficha, y todos hayan calculado, gana el que, y por cada uno que se aproxime es un punto, el que se aproxime más gana un punto y ya al final el que tenga más puntos es el que gana, <u>¿quedó claro?, a ver alguien que me explique lo que vamos hacer</u> Ao. ¿Y qué vamos a ganar? J.- Yo, vamos a formar equipos de 6 integrantes pero nos van a dar una tira de un metro blanca, Ao. A ver pongan atención a J. porque luego preguntan J.- Entonces después vamos a poner en el lugar que nosotros queramos en la recta, en la recta donde nosotros queramos, entonces los demás compañeros van a tratar de adivinar con fracciones, es que no me acuerdo cuáles eran Ao. son medios, cuartos, tercios quintos, sextos Mo. Quintos y décimos J.- Y con esas fracciones adivinar la distancia que está el punto, entonces gana el punto no sé, el que diga la aproximación exacta, la medida exacta, o que se aproxime más, en todos, el que se aproxime más y al final el que tenga más aciertos es el que gana, Mo. ¿Y cuántos turnos van a jugar? Ao. Hasta que todos pasen y hayan puesto su ficha, si Aa. ¿Entonces cómo vamos a saber quién tiene más puntos si nada más vamos a...? Ao. El que tenga más aciertos... R6.- porque por ejemplo ya J. puso su corcholata y ya todos calcularon y ganó el que se acercó más y luego supongamos que Ernesto está en su equipo, y luego él volvió a poner su ficha por ejemplo acá (señala un lugar en la recta en blanco) y luego ya van a empezar a calcular todos y el que gane de ahí se anota otro punto Ao. Ha ya, ya V2.- Pues así nomás es poner la tarjetilla en cualquiera de los puntos y ya decir todos que en cual, cuanto más o menos es la medida y ya el que se acerque más es el que gana R6.- Es una competencia en cada equipo, A (c).- Ya ahorita acomodan unas mesas para que se pongan unos cuantos y ya otros irse para fuera, M5.- El material son 4 tiras, una es una tira en blanco, la otra es una tira que está dividida en medios y cuartos, la otra en tercios y sextos, la ultima es en quintos y décimos, son 4 tiras las que se les va a entregar a cada equipo, A6.- M5, aquí no hay quinto malo Mo. A ver, jejeje R6.- ¿Si quedó claro?, bueno entonces formen equipos de 5 personas, Ao. Con una dinámica Aa. Vamos afuera R6: No, todos no, nada más un equipo va a salir afuera, los demás aquí *Alumnos integrándose al equipo* Aa. solo falta uno, alguien alguno, *Les están entregando sus tiras a los integrantes de equipo* M5.- Va a pasar un integrante de cada equipo por el material (CP 6)	Devolución de la consigna

Como apreciamos en el anterior fragmento de registro en ningún momento se usa la palabra consigna, o la frase “la consigna es la siguiente”, sin embargo hice este recorte al registro porque evidencia las decisiones que están tomando los estudiantes cuando han interiorizado un concepto y refleja su comprensión al respecto; inicia con una frase “si se acuerdan estamos trabajando las fracciones”, que ubica y recupera la memoria didáctica compartida en las clases, posteriormente ponen en juego su conocimiento didáctico sobre la forma más adecuada de organizar al grupo y las decisiones que toman respecto a la forma y el momento para enunciar la consigna, en este caso saben que si primero los organizan en equipos, corren el riesgo de que luego no pongan atención a lo que van a hacer, por ello deciden primero enunciar la consigna y luego organizarlos para que realicen el juego.

Enunciada la consigna y sus “restricciones”, en este fragmento de registro sobresale otra acción que no habíamos comentado y que se articula con la necesidad de la devolución, en este caso hay una **“devolución de la consigna”** cuando la estudiante pregunta a todo el grupo “¿Quedó claro? A ver alguien que me explique lo que vamos a hacer”. Esta frase incita a los estudiantes a que interioricen la consigna, a que se comprometan en el proceso de resolución del problema planteado, pero sobre todo a que, a partir de su verbalización se aclaren dudas e imprecisiones que en una primera formulación sigan presentes.

Desde la óptica de la teoría de las representaciones sociales, aquí hay un primer nivel de objetivación de la representación sobre la consigna (siguiendo este ejemplo), es el momento cuando los estudiantes tienen la necesidad de coordinar actividades directamente con un grupo de alumnos, en este caso con sus propios compañeros; un segundo nivel de objetivación lo podremos apreciar cuando analicemos la práctica docente de los estudiantes en la escuela primaria (lo cual será motivo del siguiente capítulo); creo que no es suficiente con que los estudiantes verbalicen un concepto, es necesario que dicho concepto se traduzca en acciones, sin embargo aquí cobra vigencia la idea de que las personas tienen una actitud hacia un objeto, cuando han formado una representación sobre el mismo, en tal sentido, el anterior fragmento de registro manifiesta diferentes actitudes de los estudiantes en congruencia con las representaciones que han construido sobre este momento de la clase, el momento de la consigna.

Por ello es que los estudiantes deciden que antes de organizarlos en equipos primero les dirán lo que tienen que hacer y de la misma manera saben que no es suficiente con que enuncien una consigna para que todos los estudiantes se involucren en la actividad, es necesaria una devolución de la consigna para que el resto del grupo manifieste la comprensión de lo que van a hacer; así mismo saben que no es suficiente con que pregunten “¿quedó claro?”, dado que un posible “sí”, como respuesta colectiva, tampoco garantiza la comprensión de la consigna, por ello le agregan la frase “*a ver alguien que me explique lo que vamos a hacer*”.

Centeno (1997) nos habla de una “triple devolución”, ¿está presente en la forma como los estudiantes enuncian la consigna? En lo general considero que sí, es decir, a partir de un juego (Cfr. Anexo 13. Juego “¿Quién se acercó más?”), los estudiantes les devuelven al grupo un problema: usar sus conocimientos sobre fracciones, suma de fracciones y equivalencias para ubicar una medida de longitud⁵⁶; además en el transcurso de las interacciones comunicativas van planteando las “reglas del juego”, es decir, lo que se vale y lo que no se vale hacer al resolver la situación que plantea el juego; y finalmente, los estudiantes (participantes en el juego) tienen la decisión para ubicar donde quieran sus fichas, con lo cual cada jugada plantea un nuevo problema a resolver.

*** Devolución:** En los párrafos anteriores ya usamos el concepto de “devolución”, tanto para reafirmar lo que nos dice (Centeno, 1997) a propósito de la consigna, como para subrayar la acción presente en los estudiantes cuando se enfrentaron a la conducción de un juego en el salón de clase de la escuela Normal.

Me parece que esta frecuencia y variedad de uso es precisamente lo que hace que vaya lográndose el anclaje de la representación global respecto a la necesidad de un lenguaje específico para comprender el trabajo didáctico de los profesores y por ende es lo que instala una forma de ser profesor de matemáticas.

El concepto de “devolución”, en el marco de la Teoría de las situaciones didácticas, cobra gran relevancia en tanto es precisamente el acto por el cual los profesores hacen responsables a los estudiantes del proceso resolutor, es decir, cuando un profesor logra que sus estudiantes se comprometan y hagan suyo el problema matemático planteado, cuando

⁵⁶ Hay que tomar en cuenta que, dada la heterogeneidad en los conocimientos de los alumnos del grupo, esta situación para muchos puede ser un ejercicio de aplicación o refuerzo, en tanto ya tienen los conocimientos necesarios para resolverla.

logra que se responsabilicen y se comprometan para resolverlo, en ese momento se logra la devolución.

Al respecto, (Centeno, 1997) dice que la devolución *“es la acción por la que el maestro traspasa la responsabilidad al alumno, que es quien debe querer aprender, asumiendo las reglas de juego, tomando decisiones, haciendo anticipaciones y verificando sus conclusiones”* (pág. 116)

Por su parte Brousseau (2007) conceptualiza a la devolución como *“el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esa transferencia”* (p. 87)

Traspasar o hacer que el alumno acepte la responsabilidad, son los elementos básicos de este concepto, sobre todo porque de lo que se trata es de posicionar al sujeto - aprendiz en el centro del proceso didáctico y para ello el maestro debe aceptar las consecuencias de esa transferencia de responsabilidades. Esto no implica de ninguna manera una actitud contemplativa de parte del profesor, en tanto el mismo concepto extiende su significación hacia todo el proceso didáctico y no sólo al momento en que el profesor deja la resolución del problema en manos de los alumnos.

“(...) en la devolución, el profesor se deshace de su responsabilidad específica del saber que debe enseñar. Eso quiere decir en particular que no se retira, no se convierte en espectador de la situación (o no necesariamente).

(...) la devolución parece ser un proceso que dura todo el tiempo de la situación a-didáctica, y no sólo una fase de establecimiento (...). El profesor no sólo es responsable de una disciplina aceptable en la clase, sino también del compromiso persistente del alumno en una relación a-didáctica con el problema. El proceso (dinámico) de devolución es posible por la situación no aislada del profesor. Por consiguiente la fase a-didáctica no es una fase aislada. (Margolinas, 2009, pág. 42)”

Como apreciamos esa transferencia de responsabilidades del profesor hacia el alumno es **“específica del saber a enseñar”**, por ello es que el profesor sigue siendo el responsable de toda la gestión de la clase y en este proceso es que se da una devolución en diferentes momentos, dado que ello es lo que instalaría en los estudiantes una actitud propicia para su propio aprendizaje.

En la transferencia de este concepto hacia el salón de clase y en su interiorización como lenguaje específico por parte de los estudiantes vemos varios momentos clave:

estudio teórico del concepto, experiencia vivencial e identificación de su uso y utilización como herramienta para analizar su práctica.

En lo que sigue, recuperaremos fragmentos específicos de la transcripción de las clases donde explícitamente se evidencia este concepto. Recordamos que el análisis teórico del concepto se hizo en el semestre anterior del curso, lo cual nos deja la posibilidad de identificarlo en los otros dos momentos clave, enunciados en el párrafo anterior.

Desde el análisis de la primera sesión de clase, videograbada para la tesis, se aprecia su uso como una herramienta para el análisis de la práctica docente de los estudiantes:

Mo. Respecto a la jornada de prácticas del semestre anterior, si, ¿en cuál aspecto de sus competencias didácticas consideran que hubo una mejoría o evolución respecto a la jornada de prácticas del semestre anterior?, si, pregunta 2, pregunta 2, ¿cuál de los aspectos de sus competencias didácticas, cuál de los aspectos de sus competencias didácticas consideran que constituye un reto a superar

Aa. ¿un reto a qué?

Mo. Un reto a superar para las próximas, para la próxima jornada de prácticas?, ¿cuál de los aspectos de sus competencias didácticas consideran que constituye un reto a superar para la próxima jornada de prácticas?, este, última, ¿describan un ejemplo de cómo se presentó, en el período de prácticas pasado, en el período de prácticas pasado, cualquiera de los siguientes 3 tópicos:

Aa. ¿3 que?

Mo. 3 tópicos: regulaciones didácticas, o 3 conceptos, regulaciones didácticas

A (varios).- ¿cómo?

Mo. Regulaciones didácticas, devoluciones, tratamiento de los errores, esas son las 3 que vamos a ver, ¿si se entiende esa última? (CP 1)

El fragmento es por sí mismo explícito, se usan los conceptos didácticos para analizar la práctica docente de los estudiantes, para reflexionar sobre lo acontecido en cada una de éstas, lo cual demanda de ellos, no sólo claridad en su conceptualización, sino la habilidad para transferirlo a las situaciones de clase para poder evaluar su propio desempeño.

En esta misma sesión se dio la oportunidad para analizar cómo es que se usa de manera “natural” para involucrar a los estudiantes en el proceso de la clase; al estar analizando algunos acontecimientos de la práctica docente de los estudiantes, uno de ellos manifiesta tener problemas con la disciplina de su grupo y ante ello el profesor aprovecha para devolverle la responsabilidad, aunque aquí no es propiamente un problema

matemático el que tendrá que resolver, es un problema de orden didáctico. Veamos cómo se presentó la situación:

H.- Por ejemplo un ejemplo mío, tenía 20 niños, todos estaban en igual nivel pero tenían como diferente forma de ser, su estado era diferente, entonces unos ya me entregaban las hojas, otros no, entonces no puedes tener un grupo controlado, aparte de que el salón era pequeño, el espacio era muy reducido entre filas, ya uno le jalaba la mochila a otro y ya

Ao. Influye mucho la cantidad, el espacio,

Mo. A mí me corresponde ayudarlos para que encuentren eso, pero hay una parte que dice H. que no creo que sea así, fíjense lo que dice usted, se me dificultó mucho para tenerlos controlados, no estuvieron controlados, yo le devuelvo la pregunta, ¿con qué actividad, con qué estrategia, los niños si estuvieron controlados?, tuvo que haber habido alguna si, esa que encuentre, que la busque en sus evidencias, que la busque en su archivo, en sus anotaciones va a darse cuenta que sí hay una estrategia que al grupo le ayudó,

Ao. yo

Ao. yo

Mo. Edgar y luego ramón, ahorita conteste esa (le dice a H.) (CP 1)

En líneas anteriores decíamos que la devolución opera durante toda la marcha de la clase, en tal sentido, en el fragmento anterior observamos cómo ante un planteamiento del estudiante, el maestro le devuelve la pregunta, de tal manera que lo compromete en la búsqueda de alternativas al problema presentado; en lugar de aportarle una respuesta, lo invita a que reflexione sobre sus mismas acciones y reconozca posibles estrategias que sí le funcionaron.

Este fragmento también llama la atención porque es muy común que las dificultades de aprendizaje se asocien a problemas de disciplina, es decir, habitualmente las quejas de los estudiantes, vinculadas con su desempeño en las escuelas primarias, están asociadas a problemas de disciplina de los niños, por ello vemos que el uso de la devolución, por parte del profesor, le permite conflictuar una representación social en construcción y a la vez incidir en su destransposición. El cambio posible sería en los siguientes términos: los problemas de disciplina en realidad son problemas de devolución de la responsabilidad hacia los estudiantes; en la medida que se diseñan situaciones de aprendizaje cuidadosamente articuladas con los saberes matemáticos que se pretende que adquieran los alumnos y se logra comprometerlos, los aprendizajes serán mejores.

Por otro lado, en el proceso mismo de formación de docentes, la acción de “devolución” del profesor debe contribuir a que los estudiantes profundicen en sus reflexiones; siguiendo con el ejemplo, es básico que en lugar de confirmar la

representación central: “no se puede tener un grupo controlado”, se comprometa a los estudiantes a revisar concienzudamente lo que sí funciona y por qué es que funciona en cada una de las circunstancias de su práctica docente.

Ahora bien, la construcción de una representación, implica de manera dialéctica que los sujetos (en este caso los docentes en formación) interioricen el concepto, lo identifiquen como acción y la ejecuten (de nuevo para este último caso, la ejecución, nos remitiremos al siguiente capítulo); en el siguiente fragmento vemos cómo los estudiantes logran identificar momentos específicos de la devolución, cuando son sujetos partícipes de ella:

Mo. Si, a ver ¿qué es lo que hacemos los maestros con los errores? Los corregimos, a ver así no, acomódelo mejor; yo recuerdo uno que vi y que de ratito vamos a retomar, vamos a ver un video, recuerdo que iban a repartir 1 pastel, no 2 pasteles entre 3 niños y los niños hicieron esto, este fue el tipo de reparto que hicieron (dibuja en el pizarrón 2 círculos y los divide en 3 partes de manera vertical, son considerar la equitatividad entre las partes)

Mo. Bueno de esta manera (señala el dibujo del pizarrón), ¿qué hacemos cuando los niños hacen este tipo de reparto, los corregimos o los dejamos?

Ao. (Varios) los dejamos

Mo. Los dejamos, o les podemos decir no así no es el reparto y corrígelo, pero procura hacer un reparto de lo mismo pero lo vamos a hacer en 4 partes, procura que quede bien, de acuerdo, o le decimos no, o dejamos que el error fluya, y ya después en la validación, entonces ¿qué es el tratamiento de los errores? Cuando un niño se equivoca algo hacemos los maestros, ¿lo ignoramos? la otra el niño les pregunta estoy bien y uno les devuelve la consigna, tú qué crees, al rato lo revisamos; lo ignoramos, lo devolvemos o bien lo hacemos participe del colectivo, a ver niños aquí hay alguien que lo dividió de esta manera, ¿qué piensan ustedes? al colectivo, o bien le preguntamos al niño, ¿por qué dices que de esta manera? ¿Todas las partes son iguales?, ¿si a ti te dieran a escoger una de estas rebanadas de pastel, cuál escogerías? al mismo niño.

Aa. Profe ¿qué es lo correcto hacer?

Mo. ¿Usted qué cree? ¿Cuál le convence más, cuál es el más oportuno?

Ao.- Ah, la devolución.

Ao. (m).- eh

Mo. Y faltó uno que es el más común, ¡ponte listo no estabas poniendo atención!, corrígelo, ya lo habíamos dicho hace rato, pero ahí se nos confunden en los salones de clase, ¿cuál de los que acabamos de decir le parece más convincente a usted? ¿O cuál usó? aunque no le parezca convincente. (CP 1)

En los comentarios respecto al tratamiento de los errores, aparece como una estrategia para “gestionar el error” la devolución: la frase “usted qué cree”, sustituyendo a la respuesta inmediata a la pregunta formulada por los estudiantes, los hace partícipes de la devolución y ellos toman conciencia. Cuando un alumno dice “Ah, la devolución”, aparte de identificarla, está reconociendo lo que ella implica, el mensaje es: tú puedes tomar

decisiones y éstas deben ser congruentes con la situación que se presente; en esta clase se plantearon tres cuestionamientos para analizar su práctica docente, por ello cobra mucho sentido la frase: ¿cuál de los que acabamos de decir le parece más convincente a usted? ¿O cuál usó? aunque no le parezca convincente. De nuevo aparece la devolución, en términos vivenciales y procurando lograr una articulación entre los conceptos revisados teóricamente y la práctica docente en condiciones reales.

*** Variable didáctica y regulaciones:** Conforme avanzamos en el análisis de las clases del profesor va estableciéndose una regularidad en el proceso de instalación de esta representación asociada a la construcción de un lenguaje didáctico; en primer lugar se establece el concepto, desde la revisión teórica y su correspondiente ejemplificación, enseguida se usa de manera cotidiana, vivencial, para organizar el mismo proceso de clase del profesor y finalmente se usa por parte de los estudiantes, en un doble escenario, la escuela normal y la escuela primaria.

La comunicación aparece en el centro de la creación de las representaciones, en los intercambios comunicativos del salón de clase se produce el anclaje, por supuesto con ciertas dificultades e incluso con ligereza en el uso de los conceptos, lo que nos lleva a pensar en la necesidad de la construcción de una didáctica para principiantes, la cual asocie y articule las elaboraciones teóricas con la fenomenología que las dota de sentido. En cierta medida el escenario de la formación de docentes implícitamente contribuye en ello, con la idea de lograr mayor comprensión de los conceptos, si no se tiene precaución se pueden trivializar.

En el caso de los conceptos que dan título a este apartado, y considerando que no es objeto de análisis a profundidad sus definiciones teóricas, sólo apuntaremos que, habitualmente las variables didácticas se aplican al diseño de los problemas, en tanto las regulaciones afectan a la marcha global de la clase.

En términos de Brousseau, citando en Panizza (2003)

“(El docente) puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. La modificación de los valores de esas variables permiten entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes”. (pág. 66)

Por definición, lo “variable” es lo que cambia, en tal sentido, una variable didáctica hace alusión a los aspectos que podemos modificar en el diseño de una situación problema, de tal manera que pueda complejizarse o bien facilitarse.

Por otro lado, el concepto de regulación didáctica está muy vinculado con el de contrato didáctico (en el siguiente apartado tocaremos lo relativo a esta noción y cómo se construye su representación en el salón de clase), en tanto la regulación permite que el contrato didáctico se mantenga en un ámbito de eficacia aceptable.

“Desde su perspectiva sistémica, Brousseau considera que las regulaciones son inherentes a la acción y hay índices sobre los cuales se apoyan para traer nuevamente el resultado de la acción a una zona de aceptación cuando se ha distanciado de ella. La regulación conduce al uso de diversos métodos y, eventualmente, a la celebración de un nuevo contrato (...) Es decir, habrá rupturas del equilibrio en el funcionamiento de la relación didáctica que podrán ser resueltas al interior de las condiciones contractuales prevalecientes, otras, en cambio, conducirán a cambios de sujeción. El rol del profesor es entonces gestionar regulaciones no sólo intra-contratos sino también inter-contratos.” (Ávila, 2001, pág. 16)

Las palabras claves, para distinguir una regulación de una variable didáctica, son “inherentes a la acción”, mientras que una regulación se aplica para atraer el resultado de la acción a una zona de aceptación, la variable didáctica se puede prever con anticipación, en el diseño mismo de las situaciones problemáticas.

Después de esta somera distinción⁵⁷ vamos a ver cómo es que son trabajados estos conceptos en el salón de clase y la representación que generan:

Mo. (...) hay un detalle aquí en esto que espero ustedes se estén dando cuenta, alguien me dijo que si lo íbamos a repartir en unas hojas, decía N., este, si lo íbamos a repartir entre 4, entre 4 partes entre 3, yo lo que les diría es una cosa ¿cuál reparto les parece mejor?, ¿cual forma, si la forma circular o la forma rectangular les parece más sencillo de repartir? (dibuja un rectángulo dividido en tres partes)

Aa. pues la rectangular

Ao. la rectangular

Mo. la rectangular, entonces si les pusimos este, quiere decir que tan solo esta simple modificación (se refiere a la diferencia entre hacer una representación circular y una rectangular), esta simple variante se convierte en

Ao. circular

Mo. no, porque esto ya lo llevábamos previsto desde antes, es una variable didáctica, es una variable didáctica, tan solo hacer esta presentación, entonces ¿cuál es la diferencia entre una variable y una regulación?, (minuto 22:28)

⁵⁷ Para profundizar al respecto, se puede consultar toda la bibliografía en la cual nos hemos apoyado: (Brousseau G. , 1994; Brousseau G. , 2007; Margolinas, 2009; Panizza, 2003; Sadovsky, 2005)

Alan.- en que una variable ya la llevamos
 Mo. ya la llevamos prevista,
 Alan.- y la regulación no
 Aa. surge en ese rato
 Ao. surge en ese momento
 Mo. Entonces son las adecuaciones que hacemos en ese rato, ustedes le pusieron un nombre aquí alguien de ustedes me lo escribió, o lo dijo aquí en el salón, una regulación es una improvisación planeada, una improvisación con sentido, si una regulación es lo que improvisa uno ahí,
 Ao. Pero que tiene que ser para mejorar

En la primera sesión de clase se dio la oportunidad para clarificar estos conceptos, llama la atención que pareciera que la distinción es sólo temporal, es decir, las variables didácticas se planean desde antes y las regulaciones se hacen en el momento, pero en ambos casos son modificaciones o adecuaciones, con la intención de mejorar el proceso de la clase; tal y como apreciamos en el siguiente fragmento de registro

Mo. Todos los maestros hacemos regulaciones para mejorar, ningún maestro hacemos una regulación para complicar las cosas
 Ao. se hace la regulación como sabiendo que se va a hacer para bien porque , no nomas voy a cambiar esto por esto, nada más por cambiarlo, hace una regulación, pero no sabe ni porque, ni sabe con qué fin ni nada
 Mo. la idea es que quien hace buenas regulaciones son para mejorar el proceso de la clase, pero tienen ustedes razón hay veces que hacemos regulaciones, creo que esa es la idea de J., que hacemos regulaciones que en vez de que mejore el proceso de la clase, hay veces que demeritamos, que empeoran, pero todos los maestros hacemos regulaciones en la idea de mejorar, bueno no sé si les quedó claro, quien comentaba, Laisa ¿si quedó claro la diferencia entre una regulación y una variable didáctica?, si
 Aa. yo era la que preguntaba
 Laisa.- si
 Mo. si, cual sería ayúdenos Ramón, ahora sí con sus palabras, cual sería
 Ramon.- que una variable es lo que ya llevamos planeado
 Mo. En el diseño
 Ramón.- y una regulación es lo que se hace así como improvisando
 Mo. Se hace una regulación en el trayecto, por ejemplo si alguien llevaba este tipo de material, no puedes ahí cambiar, decir ahora ya no le voy hacer así, ahora voy a sacar otro material de esta manera, pues no, porque ese ya lo lleva uno elaborado desde antes, por eso se convierte en una variable, no,
 Alan.- cómo

Cuando solicita la intervención de un alumno, se genera la devolución, es decir, cuando solicitamos a los estudiantes que verbalicen sus comprensiones se está contribuyendo a la interiorización del concepto; al verbalizar la distinción entre ambos conceptos, se introducen otros dos elementos, las variables se planean en el diseño de las situaciones didácticas y las regulaciones se hacen en el trayecto

Mo. es más o menos lo de regulación y variable

Alan.- es que como llevaba material para regulación y al último lo improvisé, bueno lo llevaba para la variable y al último improvisé una regulación y lo metí ya con lo que llevaba planeado

Mo. Ah, eso está bonito, quiere decir que también con las variables uno hace regulaciones, voy a poner un ejemplo aquí, alguien llevaba su material de esta manera (en círculos) e iba a poner a que los niños lo resolvieran de forma individual, pero ya llegando ahí se dan cuenta que es mucho mejor si los niños interactúan de 3 de 4, entonces en vez de plantear una relación individual entre el niño con la tarea, planteamos una relación entre 3 niños con la tarea, entonces de esa manera de interactuar es algo que llevaban previsto de otra manera, ahí, lo sugieren de otra forma, eso es una regulación a partir de una variable (...) (CP 1)

“También con las variables se hacen regulaciones” es la frase que sintetiza el fragmento anterior de registro, sin embargo, hay autores que no coinciden con este planteamiento, por ejemplo Bartolomé y Fregona (2003) nos previenen ante la trivialización de los conceptos

“Tal vez sea necesario advertir que no cualquier modificación en el conjunto de condiciones creadas constituye una variable didáctica. Así, volviendo a la actividad de los vasitos y pinceles, si se toma por una parte una colección de cucharas y por otra parte platos, y se conserva la organización de la actividad, esa variación no constituye una variable didáctica. Seguramente habrá comportamientos diferentes –relativos a la manipulación de platos y cucharas en lugar de los pinceles-, pero eso no implica la necesidad de hacer intervenir conocimientos matemáticos diferentes para resolver la tarea asignada”⁵⁸. (Bartolomé & Fregona, 2003, pág. 157)

Si consideramos esta precisión, muy probablemente el solo cambio en la organización no genera una variable, en tanto no se haga necesario que intervengan conocimientos matemáticos diferentes para resolver la situación planteada. Por supuesto que habrá interacciones diferentes y se pondrán en juego los conocimientos matemáticos de los alumnos, pero el saber requerido para solucionar la situación planteada sigue siendo el mismo tanto si lo resuelven de manera individual como si lo hacen en pequeños grupos.

Por otro lado, una regulación permite reorientar la marcha de la clase, con la intención de lograr la meta planteada, que en el caso de la enseñanza de las matemáticas, tal meta es la adquisición de los saberes matemáticos planteados para la sesión correspondiente; bajo esta consideración sí es conveniente cuestionarnos de nueva cuenta en qué medida un cambio en la organización, considerado desde el inicio de la clase, puede considerarse como una regulación.

⁵⁸ El subrayado no aparece en el original.

Más allá de las necesarias precisiones terminológicas, aparecen de nuevo los conceptos desde la experiencia vivencial, e incluso me parece que aplicados de manera más congruente con su definición y precisos en el momento de su aparición; valga como ejemplo el caso de la “regulación” que hace el maestro en la 5ª. Sesión de clase; en su planeación había contemplado la aplicación de un juego “Dominó de fracciones”, sin embargo, previo a éste, estuvieron revisando algunas lecciones del libro de texto de matemáticas, en concreto 3 lecciones de 3º. Grado y 3 de 4º. Grado, relativas al tema de las fracciones:

Mo. Sí, hay un detalle que da la razón de lo que esta comentando E3, hay algunas lecciones que sí están seguidas en el libro de texto, entonces la pregunta sería esa, la que dice M5 ¿a cuáles otras lecciones habrá también que juntar?, entonces ya del libro podríamos juntar algunas, entonces todo depende del propósito que tengamos nosotros.

Ao. También se hablaba de dejar un espacio para la lección, pero también los niños ahí en la página 56 hay un contenido de la lección, pero luego se va hasta la 85, y son como un promedio de 6 semanas y ya para cuando lo quieren retomar ya se olvidó.

Mo. Pues sí, puede ser, aunque a lo mejor la pregunta es más compleja, se trataría de que la lección que sigue ¿de verdad será muy ajena a las fracciones o habrá manera de vincularla? y la otra puede ser que se les olvide a los niños pero es de lo que se trata de que nosotros llevemos a que lo recuerden, si, entonces poner acciones para recordar es una tarea de nosotros los maestros, yo por ejemplo aquí reconozco de los escritos que me han dado y otras más, que ustedes tienen una idea muy clara de los conceptos didácticos y eso ha sido porque los planteamos de una manera y de otra, los asociamos, pues es lo mismo que tendríamos que hacer con el asunto de las matemáticas, relacionar lo pasado con lo presente, hoy se convierte en una competencia didáctica, de todos los profesores, incluyendo los de la reforma, sí, bueno, esta de “es mayor a”, ¿esta qué quedamos que si trabaja suma de fracciones?

Aa. Las fracciones

Mo. ¿Si trabaja suma de fracciones?

Alumnos.- si

Mo. La de “es mayor a $\frac{1}{2}$ ”, yo creo que muy pocos la contestaron, ¿no llegaron? ¿Apenas iban a contestar esa?

Alumnos.- Si

Mo. Miren entonces vamos a hacer una regulación, vamos a dejarlo hasta ahí, si, vamos a volver luego con estas lecciones, pero de otra manera, si, ahí lo que vamos a hacer centrarnos en esas, nada más alcanzamos a llegar, parece ser que con cierto detalle hasta aquí (“calcula fracciones”, página 47) si, dejamos las últimas 2 pendientes, les voy a pedir ahora sí que cerremos nuestro libro, les voy a pedir que me los regresen y vamos a volver a trabajar, teníamos 2 actividades para hacer hoy, de hecho nos faltaban 3...

Como podemos apreciar, el avance en el tiempo didáctico es un factor que obliga a hacer regulaciones, la actividad de análisis de los libros de texto se estaba prolongando, de 6 lecciones que se solicitó que analizaran sólo habían avanzado en 4; en tal sentido el

profesor consideró pertinente hacer una regulación que suspendió la actividad de análisis para dar paso a otra, en este caso el juego matemático.

Derivado del análisis de estos episodios de clase, podemos concluir que es la experiencia vivencial la que contribuye de mejor manera en la instalación de las representaciones sociales. Para fortalecer esta idea y además para cerrar este apartado, vamos a citar dos conceptos más, en tanto están muy presentes en la clase del profesor: institucionalización y contrato didáctico; lo haremos de manera breve, pero intentando ser muy precisos.

*** Institucionalización:** En la teoría de las situaciones didácticas, la institucionalización es el momento de la clase en el cual el profesor confiere estatuto de saber formal a los conocimientos que pudieron haberse trabajado de manera informal; con la institucionalización se cierra un proceso didáctico, pero a la vez, de manera dialéctica se abre el siguiente, en tanto los saberes formales de un nivel de complejidad se convierten en conocimientos para otro nivel de mayor complejidad.

“Tomar en cuenta ‘oficialmente’ el objeto de conocimiento por parte del alumno y el aprendizaje del alumno por parte del docente es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento es el objeto de la institucionalización. ¡El rol del maestro también es institucionalizar!” (Brousseau G. , 2007, pág. 98)

Tomando en consideración esta afirmación, el profesor establece y delimita su rol, al mismo tiempo que indica, implícitamente que ese es el rol de todo profesor.

Mo. si, las fracciones no son un contenido aislado, sino que tienen una relación con otros, si, esa es la idea, si tiene relación con otros contenidos pues hay que intercalarlos, de tal manera que permítanme institucionalizar para seguir avanzando con otra cosa, si, ¿es bueno brincar lecciones, o es bueno juntar lecciones que tienen un contenido similar?, entonces la respuesta es que parece una pregunta mal planteada, si, porque no puede ser ni malo ni bueno en sí, depende lo que hagamos, está bien que dejemos pasar una lección y la abordemos después, salteadas, si, siempre y cuando relacionemos la lección que vamos a ver con la anterior, y si no vamos a relacionar de qué sirve, es evidente que esto está produciendo hoy un problema en matemáticas y un fracaso en matemáticas, el no relacionar los contenidos anteriores

E3.- Tiene que tener un propósito por ejemplo si vas a ver a juntar lecciones, va a ser para reafirmar, o para hacer un conocimiento, a mí se me hace por ejemplo como tedioso, por ejemplo manejar todas las fracciones, pero si una o dos lecciones que se puedan juntar para hacer, para trabajar el contenido más a fondo, porque a veces da uno breves pinceladas y después cuando se retoma la lección, quedaron igual que antes. (CP 5)

Pero no sólo se institucionalizan saberes, de acuerdo con Brousseau (2007, pág 98) también se institucionalizan “formulaciones”, en tal sentido, la institucionalización del profesor lleva a los estudiantes a que se posicionen como sujetos reflexivos, a que tomen decisiones en la práctica y sobre su práctica; la institucionalización que hace el profesor, en este momento de la clase, le permite concluir con la actividad central de la 5ª. Sesión de clase, el análisis de los materiales curriculares y, considero, les manda el mensaje a los estudiantes de que en una institucionalización se establecen convenciones formales, no sólo sobre un saber, sino también de que *“la institucionalización se da tanto en una situación de acción –cuando se reconoce el valor de un procedimiento que va a convertirse en un medio de referencia- como en una formulación. Hay algunas formulaciones que van a conservarse (‘esto se dice así’, ‘estas vale la pena conservarlas’)”* (Brousseau G. , 2007, pág. 98) y eso es lo que los estudiantes tendrán que hacer: en la toma de decisiones sobre la organización curricular y el tratamiento didáctico de las lecciones de los libros de texto pueden hacer ajustes, siempre y cuando tengan un propósito, para trabajar el contenido más a fondo, relacionando conocimientos nuevos con los conocimientos aprendidos con anterioridad.

*** Contrato didáctico:** Al igual que los anteriores conceptos, éste también es objeto de discusión en las clases del profesor y de manera paulatina se integra en el discurso de los estudiantes:

Mo. cuando uno habla de cómo están impuestos, de cómo están acostumbrados, si, cuando uno habla de cómo están acostumbrados, uno habla de otro concepto, las costumbres, lo que es tradicional, lo que es habitual, en el salón de clase, depende de cuál sea el contrato didáctico, siempre cuando llegamos a clase

Ao. (h).- a pero

Mo. a no, pero se van acostumbrando, se van acostumbrando, se va volviendo en un contrato didáctico,

E3.- yo los pasaba al pizarrón para ponerles un ejemplo y luego preguntaba ¿está bien? y dice uno está bien, sí todos a coro ¿seguros?, no,

I4.- yo también hacia eso profe les decía igual que E3 ¿si está bien? y decían si ¿seguros? no, yo digo que si está bien y aunque estuviera mal, yo decía que estaba bien y porque la maestra decía que si estaba bien ellos decían no sí, y cuando si estaba bien yo decía que estaban mal y unos pocos: no si está bien, y uno de ellos no está mal, está mal y ya al último se dejaban ir nada más con lo que yo les decía y ya al último como que me agarraron la honda, y ya veían no nomás porque la maestra dice no, pero ya hasta el final

Mo. si eso fue el ultimo día yo creo que es un gran avance, un gran avance, a ver si hay un avance, a ver si vamos agarrándole el punto fino a esto, si los niños dicen está bien si, está mal, ese tipo de actitudes díganme ¿cuál sería una buena regulación?, (CP 1)

En esta primera parte, de manera inicial, vemos cómo el profesor introduce el concepto de contrato didáctico a partir de las costumbres que hay en el salón de clase, en la medida en que los alumnos se van habituando a ciertas prácticas, se va instalando un contrato didáctico; en primera instancia sirve la analogía para que los estudiantes comprendan el concepto, sin embargo, el ejemplo que ellos ponen le confiere una variante dado que introduce la idea de que el comportamiento del profesor va influyendo en el comportamiento de los alumnos y es lo que instala un contrato; recordemos que en una primera formulación teórica, este concepto fue definido por Brousseau como *“El conjunto de comportamientos (específicos de los conocimientos enseñados) del maestro que son esperados por el alumno y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro”* (Ávila, 2001, pág. 9), en tal sentido cuando la estudiante dice *“se dejaban ir nada más con lo que yo les decía y ya al último como que me agarraron la honda”* está directamente identificando, desde el análisis de su propia experiencia de práctica docente, una manera de cómo se instala un contrato didáctico en su salón de clase.

Al final del fragmento de registro, el profesor hace una devolución para invitarlos a reflexionar respecto al comportamiento específico de los niños y cómo pueden incidir los profesores para transformar el contrato didáctico que se manifiesta en dichos comportamientos, el siguiente fragmento (continuación del anterior) profundiza en ello:

Ao. Que sólo contestara cierto niño

Mo. Uno sería ¿Por qué? ¿El otro cuál sería G.?

G.- que sólo contestara alguno, no, está mal o a ver ¿por qué dices que está mal? ¿A ver por qué dices tú que está bien?

Mo. La siguiente pregunta es ¿por qué? Y la otra es hacer una pregunta directa ¿a ver tú G. por qué dices que está mal?, y la otra es la que acaba de decir aquí N., plantearles un contraejemplo, ahora si J., disculpe

J.-A ver yo hice lo que dice G. ¿si está bien?, si, ¿seguros? y hubo unos dos que dijeron no, y a ver ¿por qué dices que no? y pensaron así como que los estaba regañando, y porque no decían lo que el grupo decía, decían sí, no, entre todo el grupo y porque no, y así como que se cohibían, no ¿a ver dime por qué no?, pensaba que lo iba a regañar, les decía vamos a respetar todo lo que digan aquí y pensaban me van a regañar, para hacerlo formal era parte de la devolución.

Mo. y no participaban

J.- hasta después, yo creo que no estaban acostumbrados yo creo que la maestra no

Mo. no les daba ese tipo de devoluciones

J.- y luego si el niño decía no, la maestra les decía, miren esto y esto les decía todo, los niños no estaban impuestos a eso de la devolución ni a nada, hay nomas por no quedar mal

Mo. la idea es que cuando uno hace devoluciones, hay veces el alumno lo siente como

Ao. una agresión

Mo. si algo así un regaño

Ao. me van a regañar

Mo. un regaño, ahorita Bianca me preguntó y yo le dije ¿usted qué cree? y se oyó así como un: “le pregunto para que me conteste, no para que me regrese la pregunta”, bueno es de lo que se trata, de ir dejando como parte del contrato didáctico la idea de que son necesarias las participaciones en clase, aquí por ejemplo, hay algo que están haciendo, que hoy nos está saliendo bien y que no siempre nos sale así, hoy se están escuchando ustedes, escucharían lo que dijo Bianca,

Ao. es que está la cámara

Ao.- están grabando

Mo. puede ser que ese sea uno de los problemas que tenemos aquí en el salón, pero también es un problema que está con los niños, los niños suponen que las participaciones de ellos son sólo para el maestro

A6.- es que hay que cambiar, pero depende de cómo estén acostumbrados,

M. De cuál sea el contrato

A6.- si van encaminadas todas las respuestas, todo lo que les pregunte uno a ellos pues depende cómo lo tomen los demás, ahí el niño pensaba que si le contestaba sí, a la maestra, entonces él pensaba que lo estaba regañando

Mo. Porque tú, entonces ahí, la devolución era preguntarle pero a alguien, algún alumno de los que era parte de la mayoría, a ver era primero H. y luego N., a ver H.

H.- (solo ríe) no dele chanza a N.

Mo. ¿A ver N.?

N.- yo con los niños vi, ya como el viernes las matemáticas no son fáciles, los niños te conocen, saben cómo trabajas tú, como tu voluntad y como trabajan otros maestros, entonces sus comportamientos son diferentes, conmigo son más inquietos, con la maestra son más inhibidos, más callados, participan menos, como la maestra habla mucho y los niños nada más escuchan, así conmigo todo es más ruido pero participan más, preguntan mucho, con la maestra como que no

En este extenso fragmento se aprecia cómo los alumnos han interiorizado una representación respecto no sólo a lo que implica un contrato didáctico, sino al tipo de contrato didáctico recomendable para la enseñanza en congruencia con el enfoque didáctico oficial; esta representación es fortalecida por el comentario del profesor, en términos de “bueno es de lo que se trata, de ir dejando como parte del contrato didáctico la idea de que son necesarias las participaciones en clase”.

Un aspecto que también sobresale como interesante, en términos de lo que estamos analizando como objeto de estudio en esta tesis, se presenta cuando los estudiantes comienzan a hacer las comparaciones entre lo que están aprendiendo en la Escuela Normal y los esquemas de práctica de los maestros titulares de la Escuela primaria; cuando ellos afirman “la maestra les decía, miren esto y esto les decía todo, los niños no estaban impuestos a eso de la devolución ni a nada” o también en cuando hacen la distinción entre diferentes estilos de docencia “los niños te conocen, saben cómo trabajas tú, como tu voluntad y cómo trabajan otros maestros, entonces sus comportamientos son diferentes, conmigo son más inquietos, con la maestra son más inhibidos, más callados, participan

menos, como la maestra habla mucho y los niños nada más escuchan, así conmigo todo es más ruido pero participan más, preguntan mucho, con la maestra como que no, de una u otra manera esto se convierte en una oportunidad para la reflexión metacognitiva y para la destransposición y a la vez construcción de un saber didáctico.

¿Cómo es que se lleva a cabo esta destransposición? Evidentemente la participación y la reflexión se hizo por parte de algunos alumnos, sin embargo no olvidemos que las representaciones se forman en los intercambios comunicativos y la interacción social, en tal sentido, partimos de la siguiente premisa, los estudiantes han construido, a lo largo de su escolarización previa, diferentes representaciones sobre cómo enseñar, algunas muy posiblemente en coincidencia con lo que se está cuestionando: “la maestra les decía todo”, “la maestra habla mucho y los niños nada más escuchan”, entonces, al abrirse este espacio de discusión en el salón de clase de la Escuela Normal, directamente se está contribuyendo a que los estudiantes (aun los que sólo escuchan) generen reflexiones que les permitan revisarlas y eventualmente modificarlas (cuando sea necesario); el riesgo latente es que sólo se exprese el discurso deseable, sin embargo, la estrategia comparativa permite, desde lo vivencial, reconocer la distancia entre la práctica docente cotidiana y los planteamientos teóricos⁵⁹. Será la constancia de la reflexión metacognitiva la que contribuirá a que se sostengan las nuevas representaciones sociales y ésta es una tarea permanente en la formación docente (tanto inicial como continua).

En el siguiente fragmento de registro, también continuidad del anterior, se remite a la propia vivencia estudiantil para fortalecer esta representación en construcción:

Mo.si pero hay una cosa muy interesante en lo que dice N., y que ustedes lo viven, ustedes lo viven ahora sí como estudiantes, ustedes tienen que desempeñarse o formar parte de diferentes contratos didácticos, cada profesor tenemos uno, siempre es así, yo me pregunto ¿qué pasa en los salones de primaria que sólo hay uno?, se supone que sólo hay un contrato didáctico, y la pregunta sería otra vez esa ¿en verdad sólo hay uno?, en los grupos de primaria, o los maestros actuamos

⁵⁹ Otro problema adicional que dificulta la instalación de nuevas representaciones en el salón de clase de la escuela primaria, es algo que podemos llamar “ruptura de continuidad formativa”, derivada del “mimetismo docente” que suele generarse en el proceso mismo de la formación docente inicial. Llamo ruptura de continuidad formativa al hecho de que estos planteamientos que se presentan como deseables (dar la voz al niño, generar devoluciones, respetar las participaciones de los alumnos, establecer un contrato didáctico constructivista o bien fundado en transformación de saberes previos (Ávila, 2001), etc.), en su enfrentamiento directo al salón de clase tienden a abandonarse o mantenerse latentes, sobre todo porque, en las relaciones asimétricas de poder que se establecen entre maestro titular y maestro practicante, estos últimos pueden llegar a la conclusión de que, ante las dificultades para cambiar el contrato didáctico ya establecido, “mejor uno lo abandona, porque no le funciona” (comentario informal de una de las participantes en esta investigación) y optan por hacer una práctica similar a la que está instalada en el grupo o grupos que les asignen, esto último es lo que llamo “mimetismo docente”.

de una manera cuando enseñamos matemáticas, o actuamos de otra manera cuando enseñamos español o historia, hay autores que dicen que sólo hay un contrato y hay otros que dicen no el profesor es diferente según la asignatura incluso, bueno yo no estoy muy de acuerdo con ellos, pero dicen que dependiendo del contenido es el contrato, es decir cuando voy a enseñar fracciones tengo un contrato, cuando voy a enseñar la división tengo otro contrato, cuando voy a enseñar geometría tengo otro contrato, pareciera ser, eso que cada rato se anda cambiando de contrato, yo creo que no es así, el contrato es algo mucho más fuerte y más difícil de transformar, yo creo que sólo hay uno, no creo que sea tan fácil que cambiemos de contrato, lo que yo creo que se hacen son, otra vez, regulaciones a ese contrato base o contrato fundamental, bueno pero ese es un debate entre los teóricos, inclusive hay quienes lo piensan de una u otra manera, que no se han puesto de acuerdo, son esas las dos maneras de ver el asunto del contrato didáctico y no hay forma de institucionalizar, es sólo un debate yo solo les platico de cómo es el debate, si ustedes me dicen, no sé, este, si los confundo con esta idea del contrato pues no es la intención, si no presentarles estos dos debates que se mueven y la otra es de lo que decía N., la otra pregunta muy, muy interesante, ¿cuánto se tarda uno para instalar un contrato didáctico?, dicen ustedes ya los últimos dos días que me vine ya más o menos los niños se adaptaban, si lo consiguieron ustedes el último día ya fue un avance, un contrato se tarda un poco más.

Evidentemente aquí está en juego la representación que el profesor tiene sobre lo que es el contrato didáctico, llama la atención porque como él mismo afirma hay diferentes posicionamientos al respecto, por ejemplo “Brousseau, en cambio, postula que a cada situación didáctica corresponde un problema y un contrato; este es constitutivo de la situación específica y depende estrechamente del contenido de saber en juego, el contrato es pues ‘perecedero’. Tanto por la evolución natural de la progresión didáctica, como por las necesidades de regulación del sistema, entre un profesor y sus alumnos tiene lugar una sucesión de contratos” (Ávila, 2001, pág. 16). En tal sentido, la representación de “contrato didáctico” que se instala desde el discurso del profesor es que “hay un contrato base o fundamental” y dependiendo de las situaciones didácticas se hacen regulaciones entre diferentes contratos.

Ahora bien, los estudiantes al parecer interiorizan la noción de contrato didáctico, a partir de la relación que logran establecer con los alumnos en términos de sus comportamientos:

N.- yo les comentaba a mis compañeros el lunes me fue bien, el martes ya no tan bien como quisiera
 Mo. Es que como que agarran confianza
 N.- el miércoles fue el día como más bonito, como que te agarran,
 Aa. Como más light,
 N.- ya hubo más confianza, más tranquilidad, el jueves, ya fue como subiendo y el viernes, ya tenía en mi escritorio a los niños, como que fue una curva (CP 1)

Llegados a este momento, es claro que cuando los estudiantes interpretan lo que sucede en el salón de clase y hacen un juicio valorativo al respecto, implícitamente están pensando en el cumplimiento de responsabilidades diferentes, tanto de ellos como profesores, como de sus alumnos; es precisamente esta palabra, responsabilidad, la que contribuyó a la reformulación del concepto

“(En todas las situaciones didácticas) Se establece una relación que determina – explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente- lo que cada participante, el profesor y el alumno, tiene la responsabilidad de hacer y de lo cual será, de una u otra manera, responsable frente al otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato (...) lo que nos interesa de ese contrato es la parte específica del contenido, es decir, el contrato didáctico (Brousseau, 1986, citado en Ávila, 2001)

Me parece que este cambio conceptual, de “conjunto de comportamientos” a “responsabilidades” es fundamental en su transferencia a la formación de docentes (recordemos que el concepto surge del análisis de las interacciones entre profesor y alumno de la escuela primaria), en una triple revisión, como mínimo: la comprensión de los diferentes contratos didácticos de los cuales se es partícipe como estudiante (en su proceso de formación docente inicial), la revisión del contrato didáctico derivado de su escolarización previa y la construcción explícita de representaciones sobre el tipo de contrato didáctico deseable desde una óptica constructivista, así como la reflexión metacognitiva que les permita reconocer los conflictos y contradicciones entre cada una de estas dimensiones, entre su experiencia de escolarización previa y su vivencia como estudiante normalista y entre ambas y los posicionamientos teóricos. El cambio de representaciones sólo puede provenir del conflicto y la crisis que se genera ante la insatisfacción con las formas de proceder didáctico en el salón de clase, pero ésta se da si se tienen referentes de comparación y sobre todo si se es capaz de sostener una visión lo suficientemente flexible como para delegar responsabilidades y asumir compromisos compartidos.

Antes de cerrar este apartado es necesario reconocer que en el proceso de construcción de representaciones en la emergencia de un lenguaje específico, aparecen otros conceptos tratados de manera tangencial, principalmente desde el discurso del profesor: lógica profana, deslizamiento metacognitivo, contraejemplos, fenómeno epididáctico; sin embargo no vamos a profundizar en ellos, en tanto son explicados desde el mismo contexto de uso.

De igual manera vemos que, como estrategia base para la interiorización de un lenguaje didáctico, la vivencia y la familiarización en su uso aparecen como el sello distintivo, lo cual nos lleva a coincidir con Moscovici cuando afirma que

“La repetición de los mismos elementos formaliza el pensamiento. Cuando se alcanza la permanencia representativa del objeto, las relaciones cognitivas se solidifican y se encarnan en el sistema verbal, las palabras se contraen y se diferencian, el pensamiento se convierte en palabra, las partes se reabsorben en las diferentes unidades pertinentes para su uso inmediato y el doble de lo real se convierte en su sello” (Moscovici, 1979, pág. 335)

En otras palabras, considero que a partir del uso cotidiano, no sólo como repetición sin sentido, sino más bien como habituación significativa, valorando los resultados a partir del mismo uso, se va construyendo una representación social compartida y consensada y a la vez se va formalizando el pensamiento. En el caso de la formación docente inicial, los estudiantes están desprovistos de un lenguaje especializado para explicarse lo que acontece en el salón de clase, en tal sentido es un campo propicio para la incorporación de estos elementos representacionales; en la medida en que los estudiantes los interiorizan (anclaje) se convierten en instrumentos de acción (objetivación). En este proceso el lenguaje cotidiano se presenta como una barrera semántica que interacciona con el nuevo lenguaje en la construcción y emergencia de nuevas representaciones. Los estudiantes para profesor deben crearse su papel, la repetición de un lenguaje, vinculado con el análisis de situaciones contextuales de aplicación (como muchos de los ejemplos que hemos puesto en este apartado), configura una representación específica del ser profesor y le confiere una identidad. Por analogía con el médico, quien tiene todo un campo discursivo con el cual se expresa, el profesor requiere un lenguaje que le confiera mayor profesionalismo e identidad. *“El proceso de anclaje es un proceso de elaboración de este mediador verbal, sin el cual no se podría desarrollar ni mantener”*. (Moscovici, 1979, pág. 164)

Todos los conceptos analizados en este apartado son producto de los avances en didáctica de las matemáticas, como lenguaje y como teoría configuran un escenario para la formación docente, sin embargo este escenario aun falta por concretarse, *“la enseñanza de la didáctica a los maestros en formación presenta dificultades que provienen del hecho de que la transposición didáctica de la didáctica misma es, todavía, un trabajo por hacer”* (Brousseau G. , 2007, pág. 117), en tal sentido las estrategias aquí analizadas, para construir esta representación sobre el lenguaje didáctico, son un buen referente de este proceso de transposición didáctica de la didáctica misma, sin embargo, nosotros asumimos

que otra componente fundamental de este mismo proceso de didactificación de la didáctica, es la destransposición de saberes, la revisión y rectificación de saberes que se manifiesten como erróneos o inadaptados.

El Plan de estudio 1997, bajo el cual se formaron estos estudiantes, no contempla de manera explícita el uso de este lenguaje didáctico, en tal sentido su introducción es un acierto para la formación docente inicial, en tanto el lenguaje contribuye a la denominación y la clasificación (Moscovici, 1979) y con estos objetivos se logra *“consumar la transposición de las ideas, actualizarlas en el medio circundante de cada uno y estandarizar las partes de este medio. La cadena de los acontecimientos entonces se hace comprensible y se llega a anticipar los comportamientos”* (Moscovici, 1979, pág. 91), es decir, los estudiantes interiorizan estos conceptos y ello les permite nombrar lo que acontece en su medio docente, además su uso permite anticipar y explicar los acontecimientos cotidianos en su campo profesional: la docencia.

III.2.1.2. Representaciones sobre las matemáticas y su enseñanza que podemos apreciar en la articulación entre lo planeado y el diseño curricular.

III.2.1.2.1. Problemas y saber matemático: ¿cuáles conocimientos sobre las fracciones resignifican los profesores en formación?

Es un lugar común asumir el hecho de que, considerando la escolaridad previa de los estudiantes, ellos tienen conocimientos sobre las fracciones, incluso hay quienes asumen que deben saber lo suficiente como para dedicarse sólo al aprendizaje didáctico (pareciera que ésta es la propuesta del plan de estudios 1997, Cfr. SEP, 2002), sin embargo esta postura también llega a ser cuestionada cuando se aprecian dificultades en la resolución de problemas matemáticos.

Ahora bien, en el proceso de construcción de los diferentes significados de la fracción, cobra mucha importancia la resolución de problemas, en tanto es precisamente de esta actividad de la cual se desprende la fineza de las diferencias entre cada uno de los significados de la fracción, es decir, ante un mismo concepto o algoritmo, es la variedad de contextos y de situaciones problemáticas lo que contribuye a dotarlos de sentido.

De la revisión de las 9 sesiones de clase se desprende con fuerza esta idea y se construye la representación social sobre la importancia de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas y en particular en la enseñanza de las fracciones.

Es por ello que en este apartado nos ocuparemos de revisar cuáles problemas matemáticos se presentaron en cada una de las sesiones, cómo y de dónde se plantearon y en general, cómo contribuyeron a resignificar los conocimientos previos de los estudiantes sobre las fracciones y su enseñanza.

En términos generales hemos de decir que apreciamos un trabajo recursivo y en espiral de crecimiento ascendente, por parte del profesor, con la intención de ir profundizando gradualmente en la comprensión de los diferentes significados de las fracciones, para ello se vale de diferentes fuentes y estrategias; dentro de las fuentes se tiene el material del taller de maestros (Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila, 1999) y los libros de texto⁶⁰ (SEP, 2011; SEP, 2011a; Peltier, Briand, Ngono, & Vergnes, 2009), así como la reconstrucción de textos, elaborados por el mismo profesor; como parte de las estrategias, podemos apreciar: resolución individual y en equipos (binas) de los problemas planteados en el taller para maestros; ejemplificación “al vuelo” de diversos tipos de problemas según el tema que se esté trabajando; invención de problemas por parte de los estudiantes (también con dos variantes: en la marcha de la misma clase y a partir de una consigna ex profeso); y a partir del análisis de los libros de texto.

En un primer vistazo al análisis de los problemas planteados, en todas las dimensiones aludidas en el párrafo anterior, encontramos dos grandes intencionalidades: en un primer momento se resalta la idea de que los estudiantes deben ser, no sólo resolutores de problemas, sino que primordialmente deben ser diseñadores de problemas (ello se resalta sobre todo en la última sesión videograbada), en atención a los diferentes significados de las fracciones.

Frases como las siguientes, evidencian esta primera intencionalidad:

- * Mo. *¿Cómo hubiera sido más difícil esa misma pregunta? (CP 3)*
- * Mo. *¿Podrá alguno de ustedes pensar en otro problema que tuviera que ver con esto? donde aparecieran los operadores (CP 4)*
- * Mo. *Vamos a cambiarle un poco, yo les he planteado los problemas y el contexto, ahora nada más les voy a poner el asunto, digámoslo así matemático y ustedes van a construir el contexto. (CP 4)*
- * Mo. *El asunto es que nosotros podemos buscar diferentes relaciones entre los números. (CP 4)*
- * Mo. *yo lo que le pedía, a ver ahora piensen un problema, donde aparezcan las fracciones como razón, ¿no sé si estamos listos para esa pregunta?” (CP 4)*
- * Mo. *Un efecto topaz, es decir ustedes tendrán que hacerlo, pero yo los voy ayudar, este, vamos a usar este mismo ejemplo, si, es la misma razón hagan de*

⁶⁰ Tanto nacionales como extranjeros.

cuenta que en el 3, se trataba de 3 litros de agua y el 12 eran 12 limones para una agua fresca, para que el agua, yo creo que ya con esto

Aa.Si

Mo. a ver ahora si díganme ¿cómo qué tipo de problema nos podríamos imaginar? (CP 4)

** Mo. ¿Por qué enfatizo eso?, es para que ustedes puedan plantear problemas de este tipo con sus niños (CP 4)*

** Mo. Para que, así es, ahora hay va la pregunta difícil, ¿díganme un problema donde aparezca la división?, difícil (CP 8)*

** Mo. A ver piensen en otro, en otro problema donde aparezca la división de fracciones (CP 8)*

Como apreciamos son múltiples las ocasiones en que el profesor, de manera explícita, incita a que los estudiantes sean diseñadores de problemas, tanto para complejizar un planteamiento inicial (por ejemplo en CP 3), como para “cargar de contexto cotidiano” a una situación puramente matemática y lo que me parece básico, a partir de la lectura teórica de los diferentes significados de las fracciones, inventar problemas ad hoc, con sus posibles variantes (esto sucede en gran parte de la sesión 8 y 9).

Una segunda intencionalidad está dada por la idea de que la enseñanza debe ser gradual y recursiva, de tal manera que los conocimientos de un nivel de dificultad se conviertan en un referente de apoyo para la resolución de problemas de dificultad mayor, para ello en las diferentes sesiones de clase retoma cada uno de los significados de la fracción, para revisarlos y resignificarlos.

Del análisis de los registros, encontramos que a pesar de que se hace un gran esfuerzo por que los alumnos resignifiquen sus conocimientos sobre las fracciones, a partir de la resolución e invención de diferentes problemas matemáticos, pareciera que en los estudiantes se conserva la representación de que los problemas que se inventan en la escuela, tanto por homología como para construir un nuevo significado de la fracción, son problemas escolarizados, es decir, pareciera que pervive la idea que muy posiblemente han construido en su escolarización previa, “los problemas que se plantean en la escuela, son para la escuela”; como ejemplo recuperamos algunas frases, en términos de unidades de información que reflejan esta representación. Todas éstas corresponden a la 8ª. Sesión de clase, en la cual predominantemente estuvieron revisando los problemas inventados por ellos mismos (en la tabla 25 “Análisis de los diferentes tipos de problemas sobre fracciones...” se puede apreciar la frase en su contexto):

Aa. Entonces podría ser nada más la pregunta que cantidad le tocó a cada uno

Ao. Es que yo le puse para que me dijeran de todos

Mo. De todos

Ao. A los maestros les tocó $1/3$, no es que nada más es como un ejemplo
 Aa. Es que ya les diste ese ejemplo, a los alumnos les toca de 3, o sea que ya diste el resultado, a los maestros les
 Mo. Pero si ya está el resultado (CP 8)

O también...

Ao. Si, es que está fácil, nomás $2/1 \div 3/1 =$, es inventarte un problemilla y así, porque yo me eche este y así, es como para primeros de...
Aa. Es como para ahorita...
 Ao. Es que este es como... (No terminan las frases) (CP 8)

De una u otra manera, las frases “no es que nada más es como un ejemplo”, “es inventarte un problemilla y así”, o “es como para ahorita”, evidencian la escolarización del saber y de las relaciones, denotan que la devolución no está completa, al menos no al nivel de un compromiso profesional; sabemos que los estudiantes se comprometen al nivel de su responsabilidad como alumnos, ya lo hemos documentado en apartados anteriores, pero aún quedan dudas respecto a la trascendencia de su compromiso para con su desarrollo profesional, es decir, para que el proceso de transposición y destransposición esté completo implica que los conocimientos revisados en la escuela Normal sean resignificados y se conviertan en saberes para la práctica docente, de lo contrario se repetirán esquemas formativos previos, con sus consiguientes riesgos (cuando sea el caso).

Para mayor claridad de lo que aquí hemos enunciado, se incluyen dos tablas que sintetizan los diferentes tipos de problemas, intentando hacer justicia a la riqueza con que se presentaron en el salón de clase:

Tabla 25. Análisis de los diferentes tipos de problemas sobre fracciones ¿qué tipo de representación social se genera?

No. de situación	Registro de clase	Problema	Fuente principal de donde se plantea			
			Taller para maestros	Libro de texto de primaria	Profesor de la E. N.	Estudiantes
1	Mo. si, estaban trabajando, Luis ahorita me permite las evidencias de lo que hicieron los niños, si quiere pase para que las vean sus compañeros, a ver si alcanzaron a identificar las consignas, la primer consigna era 3 pasteles para Aa. para 2 niños Mo. para 2 niños, 3 pasteles para 2 niños, el segundo era 2 pasteles Aa. para 4 niños Mo. para 4 niños, el último era 1 pastel para 5 niños, los niños que dicen que iban a dividir un pastel para 3 niños recuerdan ese, un pastel para 3 niños Aa. si que no lo hicieron Mo. si, decían los niños que quedaba $\frac{1}{3}$, pero no pudieron dividir los 3 tercios, ¿se fijaron que eran distintos?, y hay una cosa que no se si alcanzaron a percatar porque pasó muy rápido, voy a ponerlo aquí sí, (lo dibuja en el pizarrón), un pastel era de un tamaño y el otro pastel era de otro tamaño, entonces cuando eso sucede, entonces los niños se generan dificultades a veces en la manera de concebir, de concebir la representación gráfica de las fracciones, porque miren se encuentra uno con que ahora resulta con que este podemos decir que es un medio de acuerdo, pero luego resulta con que esto (señala la otra figura de rectángulo que dibujo en el pizarrón), que esto son $\frac{2}{4}$, que noción creen ustedes que se forman los niños de esto, la idea es que estemos utilizando las equivalencias, ¿pero a qué confusión nos llevaría? Ao. en el tamaño de esas Mo. si, entonces quien aquí de ustedes aquí concluían que en las fracciones es importante la unidad de referencia, (CP 2)	* Repartir 3 pasteles entre 2 niños. * Repartir 2 pasteles entre 4 niños. * Repartir 1 pastel entre 5 niños. * Repartir 1 pastel entre 3 niños.				A partir de la revisión de sus clases en video.
2	J.- partes de partes, los problemas en que se aplica una fracción en otra fracción, ayuda a profundizar en	La tercera parte de un terreno se dedicó para la siembra, de esta parte en la mitad se sembró	Actividad 5 "Partes de			

	el significado de la fracción como parte de unidades, resuelve el siguiente problema, la tercera parte de un terreno se dedicó para la siembra, de esta parte en la mitad se sembró maíz, ¿qué parte del terreno se dedico a la siembra del maíz?, $\frac{1}{6}$ Mo. Puede ser que $\frac{1}{6}$, bueno veamos la segunda pregunta porque parece que ahí se aclara gráficamente, sígale Edgar por favor Ao. Observa gráficamente el anterior problema y verifica si esta correcta Mo. Bien, ahí están los 2 esquemitas, dice, parte dedicada a la siembra del maíz y luego la parte dedicada al maíz es un sexto, para saberlo se dividió el terreno en partes iguales, si, entonces esta es la manera gráfica *Muestra 2 gráficas la 1ª, dividida en 3 partes y de una toma la mitad y la otra dividida en 6 partes y toma una* Mo. ¿están ustedes de acuerdo en esa? Alumnos.- si Mo. Que es lo que tiene la primer columna la de la izquierda, primero dividieron todo el terreno, Aa. $\frac{2}{3}$ Mo. y luego la mitad de $\frac{1}{3}$, es la que se dedico a la siembra del maíz, entonces queda evidente ahí que todo el terreno lo dividíamos de acuerdo a la magnitud que fue sembrada de maíz que sería $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, es la que se dedico, la número 3 V2 (CP 3)	maíz, ¿qué parte del terreno se dedicó a la siembra del maíz?	partes”, página 40.			
3	V2.- Resuelve los siguientes problemas, procure utilizar dibujos para resolverlos, un alambre que mide $\frac{2}{3}$ de metro se parte a la mitad, ¿qué fracción de metro mide cada parte?, Mo. La idea es que dice, procure utilizar dibujos para resolverlos, hizo algún dibujo para resolverlo V2 ?, V2.- Profe ahí no le entendí, la 2ª Ao. Yo hice un dibujo Mo. A ver Jhonatan, a ver dibújelo acá (en el pizarrón, ¿a ver cómo le hizo usted? *Alumno pasa al pizarrón* Mo. Dice utilizar dibujo, la idea es que vayamos a profundizar con los gráficos, ¿cómo le hizo? Ao. Hice una recta y luego lo dividí en 3, y coloree	Un alambre que mide $\frac{2}{3}$ de metro se parte a la mitad, ¿qué fracción de metro mide cada parte?	Actividad 5 “Partes de partes”, página 40.			

	arriba, pero los $\frac{2}{3}$ Mo. los $\frac{2}{3}$ Ao. y luego dice que se parte a la mitad, y luego la pregunta dice M-¿Qué fracción del metro mide cada parte? Aa. $\frac{1}{3}$ Ao. $\frac{1}{3}$ Mo. Esta pregunta como que.. . Ao. Da la respuesta Mo. <u>¿Cómo hubiera sido más difícil esa misma pregunta?</u> Ao. $\frac{1}{3}$ de los $\frac{2}{3}$ Mo. Que lo que se pide que se divide sea diferente Aa. Dos terceras partes Mo. Que el denominador hubiera sido diferente, porque dice iluminó $\frac{2}{3}$ y luego dejó $\frac{1}{3}$, Aa. Como $\frac{1}{3}$ de menos (CP 3)	Propuesta de transformación: Un alambre que mide $\frac{2}{3}$ de metro, se parte a la tercera parte ¿qué fracción de metro mide cada parte?	Se puede apreciar un incipiente reconocimiento a las debilidades del planteamiento de un problema en este material del taller.			
4	E3.- Aquí lo que pasa es que el numerador de la primera fracción se convierte en el denominador de la segunda y es más fácil dividirlo así, pero por ejemplo si se pone una fracción que sea totalmente distinta en cuanto al numerador y el denominador de la otra, pues se complica más Mo. Entonces así es bastante obvio (maestro señala la recta dibujada en el pizarrón por el alumno), Ao. Pasa al ejercicio c Mo. Primero pasamos por el B, a ver el B Ramón Aa. yo Mo. Vamos a esto último, si, es $\frac{1}{4}$ de un pliego, Ramón.- $\frac{1}{4}$ de pliego de cartoncillo para hacer una bandera, la tercera parte de ese cuarto se pinto de rojo, ¿qué fracción del pliego de cartoncillo se pinto de rojo?, yo le puse que $\frac{1}{12}$ Mo. $\frac{1}{12}$, si, hizo algún dibujo Ramón Ramón.- si Mo. Lo podría dibujar acá *Ramón pasa al pizarrón* CP 3)	Se usó un cuarto de un pliego de cartoncillo para hacer una bandera. La tercera parte de ese cuarto, se pintó de rojo. ¿Qué fracción del pliego de cartoncillo se pintó de rojo?	Actividad 5 “Partes de partes”, página 40.			
5	Mo. A ver hace rato decían que el ejercicio que les puse estaba muy sencillo, eh, necesito como algo más complicado Aa. Es que por ejemplo el problema que planteó ahí Mo. A ver este	Tres jóvenes se turnan durante el día para atender su taller. Luis trabaja de 8 a.m. a 10 am Mario trabaja de 10 AM a 14 PM José trabaja de 14 PM a 20 PM	Actividad 4 “¿Qué parte de 60 000 es 25 000?”, problema 4 página 79 y 80			

	Aa. Es que el problema que plantea ahí es de que los 3 jóvenes trabajan en un taller, si el taller dura 12 horas abierto, los jóvenes se van a repartir las ganancias según el tiempo que ellos trabajan, o sea venía siendo como una proporcionalidad, ¿no? E3.- Es una comparación entre el total y la parte que le toca a cada quién Mo. el número de horas que trabaja cada quién E3.-Si Mo. Sí, eso es lo que dice el ejercicio ahí E3.- Porque por ejemplo se puede sacar de otra manera ese ejercicio, sería dividir las 12 horas, sacar el cociente de 1 por de 2 y esa sería la constante de proporcionalidad que nos daría cuanto les tocaría a cada uno pero en número fraccional, bueno en número que no fuera fraccional, en número decimal, sería 1 entre 12 y el número decimal 1 por 12 , y se dividiría 1 entre 12 y es la parte que le toca , es como una fracción de proporcionalidad, Mo. muy bien muy bien, a ver de lo que se refiere Edith es algo muy interesante, para sacarlo necesitamos identificar a cuánto equivale 1, 1 hora, a cuánto equivale en ese ejercicio que venía en esa hojita, entonces encontraríamos lo que es el valor unitario, para con eso contestar cualquier pregunta y si trabaja 7 horas , u 8 horas o 9 horas o las que sean, es el valor de 1 E3.- Es una constante Mo. El valor de 1, ese 1, ese valor unitario sería la respuesta E3.- Es como cuando saca de kilómetro por horas o por minutos, la constante es la razón Mo. Si, muy bien E3, ha salvado usted el honor de este colectivo, Alumnos.- Gracias E3 Mo. La única pregunta que yo me haré, le habrán entendido los demás a E3 (CP 3)	Deciden repartirse las ganancias semanales proporcionalmente al tiempo que trabajan. a) ¿Cuántas horas al día permanece abierto el taller? ____ b) ¿Qué parte de las ganancias le tocaron a cada uno? A Luis ____ de las ganancias A Mario ____ de las ganancias A José ____ de las ganancias				
6	Mo. Antes de intentar de buscarle a los nuevos materiales, a los materiales que no operan a partir de estas lecciones, son 3 lecciones de 3er grado y 3 lecciones de 4º grado, pero antes de hacer eso, antes, antes, permítanme como intentar acercarnos, más a lo	Reproducir una figura al doble de sus medidas, al cuádruple; o bien tres veces más pequeña.			El significado de la fracción como operador multiplicativo.	

que estuvimos trabajando la sesión anterior, si, la sesión anterior hablábamos de 2 significados de las fracciones que se les dificultaban a ustedes, que son las más difíciles, que se les dificultan a todos más bien dicho, es el asunto, eran las fracciones el significado como operador o el significado como razón, hay una parte no sé si nos haya quedado en ese sentido trabajar más fácil la idea, pero decíamos que en el asunto del operador si tenemos una figura, puede ser cualquier figura y pensemos que aquí mide 9 y acá mide 7 Aa. no, no se puede Mo. 12 verdad, sino no sale, que acá midiera 12 y quisiéramos hacer una reproducción de ella, a ver fíjense bien como está el asunto a ver si nos vamos acercando, si quisiéramos hacer el doble de esto (señala un rectángulo que dibujó en el pizarrón con las medidas 9 X 12); una figura que tuviera el doble que estas medidas, entonces simplemente tomaríamos el 9 y que le haríamos? 12 9 Alumnos.- 9 X 2 Mo. 9 X 2 Ao. 18 Mo. Y luego sería 12 X 2, si quisiéramos que fuera el cuádruple sería el 9 X? Alumnos.- 4 Mo. 12 X 4, etc, pero es exactamente la misma idea para lo siguiente, si quisiéramos no que fuera 3 veces más grande, sino que fuera 3 veces más pequeño, sería 9 X Ao. 1/3 Mo. 9 X 1/3 exacto, entonces quiere decir que Ao. 9 X 1, 9, 9/3 Mo. Sería 9/3, si, entonces quiere decir que lo que mide aquí (señala la parte de la figura que mide 9 del pizarrón), sería la tercera parte de lo que mide arriba, igual el 12 lo multiplicaríamos por 1/3, (12 X 1/3); bueno si esto fuera la tercera parte, a ver entonces cuál es el operador aquí?, Aa. Un entero					

	Ao. un entero Mo. El operador, oh también lo llaman, algunos autores lo llaman el escalar, entonces si lo estamos haciendo de esta manera ($9 \times 2 =$, $12 \times 2 =$) ustedes se fijan que el operador es un número natural, no es una fracción, entonces en qué momento a parecen las fracciones en este tipo de problemas las pusimos como operadores, cuando en esta ($9 \times \frac{1}{3} = \frac{9}{3}$, $12 \times \frac{1}{3} =$), no se trata de agrandar, sino de reducir esta es una manera de cómo aparecen, hay otras, si, pero estas son la que llevamos hasta ahorita, entonces este es el problema (señala lo anotado en el pizarrón), <u>¿podrá alguno de ustedes pensar en otro problema que tuviera que ver con esto? donde aparecieran los operadores (CP 4)</u>					
7	<u>Mo. Vamos a cambiarle un poco, yo les he planteado los problemas y el contexto, ahora nada más les voy a poner el asunto digámoslo así matemático y ustedes van a construir el contexto</u>, si, estamos en el asunto de las fracciones como, Ao. Como razón Mo. Como razón, esto sí, se trata de ir buscando que algo, sea, sea digamos razón de lo que los otros aportan, pensemos en el siguiente grupo, en el siguiente problema, no les voy a poner el contexto, ustedes van a intentar hacerlo, si, si pensamos, listos, que 2 es a, 2 es a 4, como 6 es a 12, si, hay una razón? 2-4 6-12 Alumnos.- si Mo. ¿Hay una razón? Ao. Si Mo. de 2 Ao. Doble Mo. La razón es, muy bien, tienen que ser múltiplos, muy bien, pero ahí parecería, listos, entonces son los números, pero el asunto ahí todavía no aparece el asunto de las fracciones, si 2 de esas 4, si 6 de esas 12, yo lo que les pregunto, listos, ¿cuál es el número que es a 1? Ao. 2 Ao. Oh el 1 Aa. uno igual que todos	Si 2 es a 4, como 6 es a 12 ¿cuál es el número que es a 1?				

	Ao. Es el 2 Mo. A ver ya me confundieron, son todos, es cualquiera Aa. Es el 2 Ao. Si es como razón es a 2 Mo. Si es como razón es a 2, a ver, porque a ver Ao. Porque es el doble, porque nosotros es el doble del sencillo A](m).-Pero que número es a uno Mo. La idea es que 2 es a 4, y 6 a 12, la pregunta ahora es que número es a 1 Aa. 1/2 Ao. + 1 Alumnos varios.- No, es $\frac{1}{2}$ Mo. 1/2., a ver sería -1? Alumnos.- No, -1/2, no es $\frac{1}{2}$ Ao. El fraccionamiento es $\frac{1}{2}$, .5 Mo. Sería ($\frac{1}{2}$ -1), si es la misma razón de $\frac{1}{2}$ es a 1 como 2 a 4 Aa. Si Mo. ¿Sí? Ao. si Mo. Entonces como que algo de la pregunta no estaba clara, Ao. Si pero ya <u>Mo. El asunto es que nosotros podemos buscar diferentes relaciones entre los números (CP 4)</u>					
8	Mo. El asunto es que nosotros podemos buscar diferentes relaciones entre los números, hagamos la última decíamos que 3 es a 12 como 6 a 24, si, (3-12, 6-24); Alumnos.- Si Mo. volvemos a la misma pregunta cuánto es $\frac{1}{4}$ de 1? Ao. $\frac{1}{4}$ Mo. Cómo encontraron que era $\frac{1}{4}$? Ao. Porque es a 4 Alumnos.- Es a 4, .25 Mo. Este número (12) es 4 veces mayor que éste (3); entonces aquí sería $\frac{1}{4}$ (3), este sería 4 veces menor que el 1, o el 1 sería 4 veces mayor que $\frac{1}{4}$, muy bien, esto, hay una misma razón en 3 es a 4, como $\frac{1}{4}$ es a 1, es la misma razón, bueno pero esto dicho así parece	Si 3 es a 12, como 6 es a 24 ¿cuánto es $\frac{1}{4}$ de 1?			Con la intención de que adecuen un contexto al problema	

	que sólo son números , <u>yo lo que le pedía a ver ahora piensen un problema, esta es la razón, donde aparezcan las fracciones como razón, no sé si estamos listos para esa pregunta</u>, yo esperaré a que nos acerquemos, A6 A6- Es como el que planteó en las hojas, que si trabajan por decir 3 hrs, le pagan 12 euros, si trabajan 6 hrs, le pagan 24, si trabaja $\frac{1}{4}$ de hr Mo. $\frac{1}{4}$ de hr equivale a 1 euro A6 .- Ese se me ocurre ahorita Mo. Ese sería un problema, aunque está muy apegado al contexto que Ao. Es el problema que Mo. Es cierto A6 está bien, si ese es un problema, algún otro que se les pudiera ocurrir (CP 4)	Si trabajan 3 hrs les pagan 12 euros; si trabajan 6 hrs les pagan 24 euros ¿cuánto les pagan si trabajan $\frac{1}{4}$ de hr.?				Por homología al problema planteado por el profesor.
9	Mo. Un efecto topaz, es decir ustedes tendrán que <u>hacerlo, pero yo los voy ayudar, este, vamos a usar este mismo ejemplo, si, es la misma razón hagan de cuenta que en el 3, se trataba de 3 litros de agua y el 12 eran 12 limones para una agua fresca, para que el agua, yo creo que ya con esto</u> Aa. Si Mo. a ver ahora si díganme ¿cómo qué tipo de problema nos podríamos imaginar? Alumnos hablan a la vez Aa. que con esa cantidad le puede dar a ciertas personas, bueno que lleve equivalente Mo. ¿A las personas? Aa. Sería al número de limones Mo. A ver sería... *Alumnos hablan a la vez* Ao. En la Normal hacen 100 litros de agua, ¿cuántos limones necesitan? Mo. A ver bueno espérenme, si hay realmente el asunto de las personas Aa.20 (es la respuesta al problema planteado anteriormente) Ao. a lo mejor sería una etapa Mo. Miguel, no Ao. Sería un doble problema Mo. La idea, déjenme los ayudo poquito más, la idea es que el agua nos quede...	El problema final es: 3 litros de agua se preparan con 12 limones ¿cuántos litros de agua				Con la finalidad de que

	Aa. con el mismo sabor Mo. Con el mismo sabor, ¿cómo le haríamos? E3.- Por ejemplo sería plantearle una cantidad que fuera no múltiplo, una cantidad distinta, por ejemplo 4 limones se necesitan para preparar 7 litros de agua, 7 litros de agua o números diferentes Mo. Muy bien E3.- Y luego viene la segunda parte para plantear el problema, con esos 3 litros de agua se puede dar de tomar a un número equis de personas y ¿cuántos limones se necesitan para darles, para hacer agua para equis número de personas? Un problema simple y después de que lo resuelvan ese, ya con otra interrogante, ya un poco más complicado. Mo. Si, E3 acaba de añadirle un detalle distinto a lo que decíamos hace rato de las fracciones y la razón, ahorita lo voy a profundizar yo sí, con lo que comentó, la clave de lo que dice E3 está en el asunto que no sea múltiplo, si, porque si fura múltiplo pareciera ser que fuera por 4 E3.- Nada más si es múltiplo, nada más se multiplica por 4, y da lo mismo Mo.Nada más 4 y ya, pero E3 añadió un elemento distinto que nos haría que apareciera a fortiori las fracciones, pero antes de señalarlo iba a decir algo Cinthya Cinthya.- Nada más eso que dice E3 y Pablo de que se pueden añadir a las fracciones, o sea que 3 litros a ciertas personas y luego ¿cuántas serían en más personas, cuántos litros y cuántos limones? Mo.A entonces ahí hay un elemento, de acuerdo, dejen ponga lo que dice E3, si, si nada más tuviéramos, ya tenemos los litros, nada más tenemos que hay 7 limones, es a lo que se refería E3, tanto que ya no es un múltiplo, esa es la clave, <u>¿por qué enfatizo eso?, es para que ustedes puedan plantear problemas de este tipo con sus niños</u>, si sólo le planteamos que sólo sea múltiplo, por ejemplo que aquí sólo sea 18, pues no sería tanta dificultad, si, pero por ejemplo si ahora le ponemos que ahora sean 7 limones, ¿cómo se podrá sacar esto? (CP 4)	se preparan con 7 limones?			<u>¿por qué enfatizo eso?, es para que ustedes puedan plantear problemas de este tipo con sus niños</u>	aparezcan las fracciones en la respuesta del problema, la clave está en que los números utilizados no sean múltiplos.

10	M5.- No, nada más que la otra vez yo le comentaba a H. que este tipo de problema le ponían a mi hermana en la prepa, los de proporcionalidad, los que eran directamente proporcionales y los inversamente proporcionales, y se me hace a veces bueno un exceso lo que tienen que hacer para encontrar la respuesta, cuando de una manera así más sencilla lo pueden hacer (alumna señala los ejercicios anotados anteriormente en el pizarrón); por ejemplo tenía un problema que decía que un señor les dejaba una herencia a sus hijos y que conforme al número de hijos que tenían era lo que iban a recibir de herencia, el primer hijo tiene 6 el segundo 3 y así entonces tú puedes decir, pues tuvo el total de los hijos y nada más divido el número de la herencia entre ese total y los multiplico Aa. los hijos M5.- Por el número de hijos para sacar lo que les corresponde a cada uno y él que no, que tenía que sacar X 1, que no sé qué, que sabe cuánto y cuando era totalmente proporcional era venía un caso, era una escuela tenía 2 turnos, entonces los de nuevo ingreso los iban a repartir en esos 2 turnos y tú como los repartiría por ejemplo en el turno de la mañana había 360 y en el turno de la tarde había 450 y los alumnos a repartir eran 400, entonces en forma inversamente proporcional los ibas a repartir en los 2 turnos, o sea que al turno que tuviera más alumnos le iba a tocar menos para que no se saturara y al grupo que tuviera menos alumnos le iba a tocar más para que tuviera un equilibrio y pues Mo. Es muy interesante lo que dice M5, quiere decir que este tipo de problemas más complicados, son los que aparecen matemáticamente más en las preparatorias, por eso resulta que desde la primaria tenemos que ir preparando a nuestros alumnos para que enfrenten las situaciones que van en ese mismo sentido si, ya las fracciones pareciera ser que ya se complejizaron, ya no era el asunto de un pastel dividido en 4 partes, ilumina 1, si ahora pareciera ser que el asunto ya está más complicado, a ver yo les voy ayudar un poquito con el contexto pero les voy a	Un señor les dejaba una herencia a sus hijos y que conforme al número de hijos que tenían era lo que iban a recibir de herencia, el primer hijo tiene 6, el segundo 3 y así entonces tú puedes decir, pues tuvo el total de los hijos y nada más divido el número de la herencia entre ese total y los multiplico Una escuela tenía 2 turnos, entonces los de nuevo ingreso los iban a repartir en esos 2 turnos y tú como los repartirías, por ejemplo en el turno de la mañana había 360 y en el turno de la tarde había 450 y los alumnos a repartir eran 400, entonces en forma inversamente proporcional los ibas a repartir en los 2 turnos				Ejemplifica como crítica al sistema tradicional de enseñanza.

	pedir que ustedes lo complementen, si, sería algo así como un efecto topaz a medias (CP 4)					
11	Ao. Bueno si se acuerdan estamos trabajando lo de las fracciones verdad, entonces nosotros planeamos una pequeña actividad, para que a lo mejor quede un poquito más claro para los que todavía no le hayan el hilo a esto, si Mo. Así es Ao. Para eso vamos a dividir al grupo en 6 equipos, 6 equipos de 5 personas, pero primero para evitar que ya formados los 6 equipos nos estén hablando para ver lo que van hacer, primero les vamos a explicar, lo que van hacer, si, y luego ya se forman los equipos, este, les vamos a dar 4 tiras, 4 tiras si, una en blanco es de un metro y otra va a estar dividida en cuartos, y medios Mo. En medios y cuartos Ao. Y la otra en sextos y quintos, entonces se trata de que pongamos la tira en blanco ya sea en el piso o donde quieran, y un integrante del equipo va a tomar una ficha como ésta y la va a poner en el lugar que quiera de la tira en blanco, si, entonces aquí van a calcular todos los demás a qué distancia está, si, si esta tira esta aquí hasta acá por ejemplo, a qué distancia la pusieron, pero la restricción es que nada más lo tienen que adivinar en medios, cuartos, tercios, sextos, quintos, y décimos, si, adivinar al principio y ya después que todos tengan lo que creen que mide, lo van a comprobar midiendo con la regla, por ejemplo si yo digo que mide, que ahí pusieron la tira y yo dije que medía $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{5}$, voy a poner aquí (coloca una de las rectas debajo de donde coloco la ficha), y voy a medir como ven ya me pasé, Ao. Debe ser exactamente en el punto Ao. Se va a poner a partir de ahí hasta acá, (coloca otra recta para completar su medida), o sea que mi medida fue hasta ahí, pueden observar $\frac{1}{5}$, entonces yo me pasé, si, así y gana el que Mo. El que le atine Ao. El que se acerque más, Ao. Entonces la referencia es el punto Ao. aja, es el punto, exactamente desde el principio	Organizados en equipos, se les entregan cuatro tiras divididas de la siguiente manera: una de un metro, otra dividida en cuartos y medios, la tercera en tercios y sextos y la tercera en quintos y décimos. Un integrante del equipo coloca la ficha sobre cualquier lugar de la tira de un metro; el resto de los integrantes calculan la distancia que hay entre el extremo de la tira y el lugar donde se colocó la ficha usando: medios, cuarto, quintos, décimos, tercios y sextos.				A partir de la organización del juego “¿quién se acercó más?” del libro Juega y aprende matemáticas.

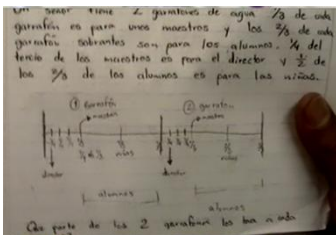
	hasta donde podemos llegar Ao. Podemos utilizar varias por ejemplo $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$ y así Ao. Aja, se suman A (b).- Cada quien va hacer sus estimaciones en cada equipo, va a pasar por ejemplo pasa Tayde, y luego anota lo que haya salido y luego pasa cada integrante y luego después de que terminen de pasar Ao. Esta secuencia termina hasta que cada integrante del equipo haya puesto Mo. Su punto Ao. Su ficha, y todos hayan calculado, gana el que, y por cada uno que se aproxime es un punto el que se aproxime mas gana un punto y ya al final el que tenga más puntos es el que gana, quedó claro, ¿a ver alguien que me explique lo que vamos hacer? (CP 6)					
12	E3.- “Suponga que se trata ahora de un circuito pequeño, de $\frac{3}{4}$ de milla. De esta manera, ambos factores podrán ser fracciones. Calcule, sin convertir a metros o kilómetros, lo siguiente: ¿qué fracción de milla avanza el trenecito, si da $\frac{1}{4}$ de vuelta?”, yo le puse Aa. Yo le puse $\frac{1}{3}$ Ao. Se multiplica también E3.- se multiplican los dos factores Mo. Puede ser, ¿cómo lo resolvieron?, a ver ¿quién lo resolvió cómo le hizo? Ao. Yo nada más le puse lo que decía la pregunta, supuse que fracción de $\frac{3}{4}$ de milla, avanza el trenecito si le da $\frac{1}{4}$ de vuelta, Mo. Es lo mismo, ahora tenemos que el circuito es de $\frac{3}{4}$, E3.- ¿toda una vuelta es $\frac{3}{4}$ de milla? Mo. Ahora el entero si es $\frac{3}{4}$, ahora es una fracción, ¿qué va a pasar si sólo se da una vuelta, $\frac{1}{4}$ de vuelta?, Ao. $\frac{3}{4}$ de milla Ao. Ahí como es $\frac{3}{4}$ de milla, si dice un circuito de $\frac{3}{4}$ de milla es fraccionario Mo. Entonces el resultado no les están pidiendo en términos de kilómetros, o de metros, les están pidiendo en términos de fracciones, y ¿cuál es el resultado de esto? Alumnos.- $\frac{3}{16}$	Suponga que se trata ahora de un circuito pequeño, de $\frac{3}{4}$ de milla. De esta manera, ambos factores podrán ser fracciones. Calcule, sin convertir a metros o kilómetros, lo siguiente: ¿qué fracción de milla avanza el trenecito, si da $\frac{1}{4}$ de vuelta?	Tema 4. Las fracciones como operadores multiplicativos. Actividad 1. Tres y media vueltas.			

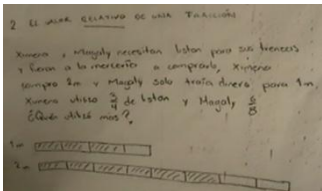
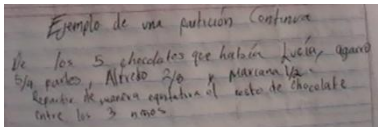
	Mo. 3/16, 3/16, hay les va 3/16 de kilómetro Aa. 1/6 Mo. No es $\frac{3}{4}$ de milla Ao. Es a lo que me refiero de la pregunta, ¿qué fracción de milla? Ao. yo le puse 0.25 Mo. 3/16 de $\frac{3}{4}$ E3.- Es que en la pregunta no especifica si se va a tomar de $\frac{3}{4}$ de milla o de milla, pero esto ya se aclaró en la consigna anterior Ao. Ya si les dice profe que $\frac{3}{4}$ de milla de manera fraccional, entonces aquí A6 dice que habría un resultado, que fracción de $\frac{3}{4}$ de milla Er.- Pero es que ahí mismo dice que $\frac{1}{4}$ de vuelta, y una vuelta son $\frac{3}{4}$ de milla, Mo. Siempre se ha estado hablando de una fracción de milla, $\frac{3}{4}$ de milla, no guiarnos del total, entonces esta fracción, lo interesante aquí es que no son, ¿son 3/16 de milla? Aa. no, es $\frac{1}{4}$ Mo. Son 3/16 de $\frac{3}{4}$ Ao. yo no le entendí Ao. Es que yo le entendí así como dice A6, es que no, yo creo que no puse atención, que fracción de milla si da $\frac{3}{4}$ de vuelta, y como ahí ya tenía $\frac{1}{4}$, yo pensaba que iba a ser en decimales, y le puse 0.25 Mo. Ah, es $\frac{1}{4}$ de vuelta, Ao. 0.25 vuelta de milla como que yo puse el equivalente Mo. el equivalente del total, pero no te diste cuenta que era una fracción, la idea es que se resuelve de la misma manera (CP 6)					
13	<u>Mo. Para que, así es, ahora hay va la pregunta difícil, ¿díganme un problema donde aparezca la división?, difícil</u> Aa. Pues es como la que yo hice, le puse que era una tina que media $\frac{3}{2}$ y se tenía que llenar con recipientes de $\frac{1}{4}$, y que cuántos íbamos a necesitar, Mo. $\frac{3}{2}$ equivale a cuantos recipientes de $\frac{1}{4}$, cuantos recipientes vamos a ocupar, si, $\frac{3}{2} / \frac{1}{4} = 12/2$ Ao. Serían 6/2 Mo. 3×4	Una tina que media $\frac{3}{2}$ y se tenía que llenar con recipientes de $\frac{1}{4}$, y que ¿cuántos íbamos a necesitar?				Inventado para usar la división de fracciones

Ao. 12 Mo. 2×1 Ao. 2 Mo. Ocupamos Aa. 6, 6, pues 6 veces vaciar el recipiente Aa. Entonces cuantos vamos a ocupar Ao. Son 6 de $\frac{1}{4}$, o sea la división ahí te cubre el valor de los 6 litros, son 6 recipientes Mo. Eso sería igual a 6, ¿que sería igual a cuánto? A $12 \times 2 = 24/4$ Ao. 24 Mo. eso es lo que faltaría para responder al problema que uso salva Ao. Hay salva Mo. <u>A ver piensen en otro, en otro problema donde aparezca la división de fracciones</u> Aa. Porque 24 Ao. Porque lo convirtieron a 4 Mo. Porque lo convertimos a cuartos, la pregunta de Laura es cuantos cuartos caben en 4, Ao. 6 no profe Ao. No Ao. 24 entre 4 Ao. Raro no Aa. ¿Cuántos pues? Mo. Ya se los había dado Ao. Pero es que es que Aa. 6 veces el recipiente de $\frac{1}{4}$ Ao. Solo se no hay necesidad de convertirlos a cuartos, porque solo faltan 6 recipientes de $\frac{1}{4}$ para completar $3/2$ Mo. Exacto, es la primera parte que estaba mal, entonces cuantas veces cabe $\frac{1}{4}$ en $3/2$ Ao. 6 Mo. 6, este era el resultado Aa. Es que $3/2$ es como $\frac{1}{2}$ Mo. $\frac{1}{2}$ Aa. Luego $\frac{3}{4}$ es como $4/4$ Mo. Esta parte era la que estaba mal, a ver, vamos pensando que tenemos ahora, vamos a usar el mismo ejemplo, que tenemos 6 metros de tela, si y vamos hacer blusas y cada blusa ocupa $1/3$, ¿cuántas blusas	Vamos pensando que tenemos ahora, vamos a usar el mismo ejemplo, que tenemos 6 metros de tela, si y vamos a hacer blusas y cada blusa ocupa $1/3$, ¿cuántas blusas se pueden hacer con 6 metros de tela?				Inventado, usando la división de fracciones

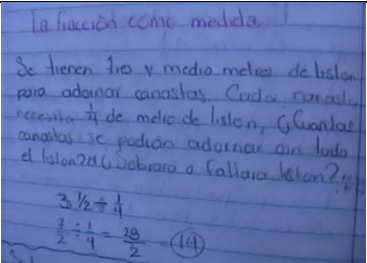
se pueden hacer con 6 metros de tela? Aa. 18 Mo. Otra vez volvemos a la idea original, si 4 veces cabe $\frac{1}{3}$, Ao. En 6 Mo. Si me siguen en ese ejemplo, si Ao. si Ao. Veo oscuro Mo. Vamos a poner otro, tenemos 8 metros de tela, 8 Ao. 8 Mo. Y vamos hacer blusas que ocupan $\frac{1}{3}$ de tela cuantas blusas se buscaron para hacer 8 Ao. 24 blusas Mo. Volvemos a la idea original, cuantas veces cabe $\frac{1}{3}$ en 8, que serían cuántas? Aa. 24 Ao. 24 enteros y cuando sería Mo. Ahora sí, este está bien ya no lo vamos a convertir, Ao. Cuando tiene que dividir $\frac{1}{3}$ entre $\frac{1}{2}$ u otro tercio, por ejemplo si tiene tantos metros de tela y tomo $\frac{1}{3}$, de ese tercio se hicieron blusas de $\frac{1}{4}$ de ese tercio, lo conflictua más Aa. Se puede dividir y dividir Ao. La mitad de la mitad Ao. Que parte del total de la tela se utilizó para hacer blusas Aa. De ahí se toma Ao. Esta cuarta parte de un tercio, Ao. Yo hice un problema así Mo. La idea es, que tenemos que cambiar el contexto si tuviéramos $\frac{4}{8}$ de tela Ao. $\frac{4}{8}$ de tela Mo. Y vamos hacer calcetines que ocupan Ao. di que calzones Ao. $\frac{8}{9}$ Mo. $\frac{1}{6}$, no $\frac{1}{12}$, cuantas veces cabe $\frac{1}{12}$ en Ao. 48 Mo. 48, este es igual a Ao. 6 Mo. Si, se ajustan 6 calcetines, equivale a 3 pares, Ao. Son 6 calcetines de 3 pares	Si tuviéramos $\frac{4}{8}$ de tela y vamos a hacer calcetines que ocupan $\frac{1}{12}$ de tela ¿cuántos calcetines se pueden hacer?				Como ejemplificación de la división de fracción entre fracción.	Problema por homología con otro

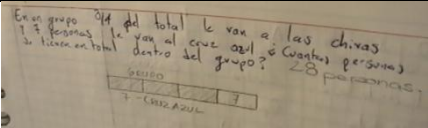
	Ao. No de $\frac{4}{8}$ Mo. De $\frac{1}{12}$ de tela de $\frac{4}{8}$, Ao. Pero una tela más grandota, Ao. De $\frac{1}{12}$ de tela que es de $\frac{4}{8}$ Mo. A ver podemos pensar en un problema que no fuera de tela Aa. De agua Mo. Nos ayudaría más a comprender Ao. Es como el problema que nos puso usted del alambre, que teníamos un metro de alambre y de eso no sé quien agarró la mitad, de la mitad, tú te llevaste $\frac{1}{3}$ para tender la ropa, y luego lo que sobró el abuelo se lo llevó para no sé, la leña, te pregunta ¿cuántos, cuántos metros de alambre se llevó el abuelo? Es una fracción de otra fracción Mo. Podríamos seguir con este mismo ejemplo si para ilustrarlos, a lo mejor queda más claro así, tenemos $\frac{4}{8}$ de metro de listón Aa. De listón Mo. De listón y vamos hacer moños de $\frac{1}{12}$, cuantos moños debemos de hacer? Ao. Tenemos que hacer Ao. Como si fuera la unidad no profe Mo. Exacto, exacto, es que esto sería $\frac{4}{8}$ (CP 8)	Teníamos un metro de alambre y de eso no sé quien agarró la mitad, de la mitad, tú te llevaste $\frac{1}{3}$ para tender la ropa, y luego lo que sobró el abuelo se lo llevó para no sé, la leña, te pregunta ¿Cuántos metros de alambre se llevó el abuelo? Tenemos $\frac{4}{8}$ de metro de listón y vamos a hacer moños de $\frac{1}{12}$ ¿cuántos moños debemos de hacer?				previamente planteado; cambio de contexto; fracción entre fracción.
14	M5.- dice, la fracción como parte - todo, Carlos y Lupito se encontraron en la tienda de la esquina, Carlos le pide a Don Juan que le dé $\frac{5}{8}$ de harina y Lupito le pide $\frac{3}{4}$ de lo mismo ¿Quién de los dos compró más harina?, Lupito le llevó los $\frac{3}{4}$ de harina a su mamá, quien tenía que repartirlos para elaborar cinco pasteles ¿de cuanta harina le toca a cada pastel? Equipo 2.- en eso se puede utilizar un ejemplo de división Ao. ¿Si le entendiste?, Es que el cociente es lo que como el resultado, nomás es como poner la pregunta, a cuanto les tocó a cada uno, A 2.- Por ejemplo si tengo 4 chocolates y tengo 3 niños de cuantos Aa. Que no leíste ahí A 2.- Es lo que estoy leyendo, Ao. Tienes que hacer uno, pero primero con la división, el cociente es el resultado,	Carlos y Lupito se encontraron en la tienda de la esquina, Carlos le pide a Don Juan que le dé $\frac{5}{8}$ de harina y Lupito le pide $\frac{3}{4}$ de lo mismo ¿Quién de los dos compró más harina?, Lupito le llevó los $\frac{3}{4}$ de harina a su mamá, quien tenía que repartirlos para elaborar cinco pasteles ¿de cuanta harina le toca a cada pastel? Repartir $\frac{3}{4}$ de un terreno entre 5 personas				Problema inventado por los estudiantes, a partir de la lectura del texto “Las fracciones: mecanismos constructivos y formas de presentación”.

	A 3.- Era repartir $\frac{3}{4}$ de un terreno entre 5 personas, Aa. Ha yo lo tengo así, yo lo puse $\frac{1}{5}$ entre 5 (CP 8)					
15	Ao. Este si estará bien (le pregunta al profe) Mo. Una división como un reparto Mo. Un señor tiene 2 garrafones de agua, Aa. Léalo, léalo Mo. $\frac{1}{3}$ de cada garrafón es para unos maestros y los $\frac{2}{3}$ de cada garrafón sobrantes son para los alumnos, $\frac{1}{4}$ del tercio de los maestros es para el director y $\frac{1}{2}$ de los $\frac{2}{3}$ de los alumnos es para los niños Aa. ¿Y cuál es la pregunta? Mo. Pero la pregunta aquí A 2.- ¿no tiene la pregunta? Mo. La pregunta está aquí Ao. ¿qué parte de los 2 garrafones les tocó a cada uno? Aa. Entonces podría ser nada más la pregunta que cantidad le tocó a cada uno Ao. Es que yo le puse para que me dijeran de todos Mo. De todos Ao. A los maestros les tocó $\frac{1}{3}$, <u>no es que nada más es como un ejemplo</u> Aa. Es que ya les diste ese ejemplo, a los alumnos les toca de 3, o sea que ya diste el resultado, a los maestros les Mo. Pero si ya está el resultado (CP 8)					Es un problema inventado, el cual implica varias relaciones: parte todo, multiplicación de fracciones.
16	Aa. Tenemos 2 manzanas Ao. Tenemos 2 manzanas, tenemos 2 manzanas, pero es que es un ejemplo Aa. Tenemos que hacer una división, Ao. $\frac{1}{3}$ de manzana, digo, tienes 2 manzanas, quieres que les toque a 3 niños igual y son 3 niños, ¿cuánto le tocará a cada niño?, es que haz de cuenta que vas a hacer, entonces 3×1 Ao. Entonces esto sería el resultado Ao. <u>Si, es que está fácil, nomás $\frac{2}{1} \div 3/1 =$ es inventarte un problemilla y así, porque yo me eche este y así, es como para primeros de...</u> Aa. <u>Es como para ahorita...</u> Ao. Es que este es como...(no terminan las frases) (CP 8)	Tienes 2 manzanas, quieres que les toque a 3 niños igual ¿cuánto le tocará a cada niño?,				“es que está fácil, nada más es inventarte un problemilla y así...” “Es como para ahorita” (Se refiere a que sirve, el diseño del problema, para resolver la tarea planteada en la clase)

17	Aa. No es que escribí esto pensando en una persona, cuando estaba leyendo mis hojas, ya, ya completamos nuestros problemas de verdad, te leo el mío, Jimena y Magali necesitan listón para sus trenzas y fueron a la mercería a comprarlo, Jimena compró 2 metros y Magali sólo traía dinero para 1 metro, Jimena utilizó $\frac{3}{4}$ de listón y Magali $\frac{6}{8}$, ¿quién utilizó más? Y el problema es el valor relativo de una fracción. J. a ¿qué horas llegaste?, ¿qué fue lo que grabaste? *Alumnos en la plática* J.- Momentos adidáticos (filma a dos alumnas fuera del salón) Aa. Y las fracciones... Mo. Recuerden que a los niños se les complica esto, no es tan sencillo, al decir que está sencillo, Aa. Al decir que está muy bien también es equivalente, Aa. La maestra los sacó a jugar al parque que queda a 10 km de la escuela, Javier avanzó $\frac{4}{16}$, Esteban $\frac{1}{4}$ y Joel 0.20 km, indica en el camino dónde se localizan los 3 alumnos, y ya los niños lo iban a indicar Mo. Los niños muy bien y tiene un añadido este problema, además que aquí no nada más vamos a ver las fracciones, además también los números decimales Aa. Los números decimales, salvo que Mo. Más adelante hay que irlos metiendo también porque forman parte de la misma Aa. A veces los niños Mo. Ahora sí que del mismo campo, si (CP 8)	Jimena y Magali necesitan listón para sus trenzas y fueron a la mercería a comprarlo, Jimena compró 2 metros y Magali sólo traía dinero para 1 metro, Jimena utilizó $\frac{3}{4}$ de listón y Magali $\frac{6}{8}$, ¿quién utilizó más?  La maestra los sacó a jugar al parque que queda a 10 km de la escuela, Javier avanzó $\frac{4}{16}$, Esteban $\frac{1}{4}$ y Joel 0.20 km, indica en el camino dónde se localizan los 3 alumnos.				Problemas inventados: comparación de fracciones Ubicación de fracciones. Operador multiplicativo.
18	Ao. Yo, ya de los 5 chocolates, que había Aa. Sigue Ao. De los 5 chocolates que había Lucía agarró $\frac{5}{4}$ partes, (todo lo siguiente dice en el problema escrito en su cuaderno) Alfredo $\frac{2}{8}$ y Mariana $\frac{1}{2}$, repartir de manera equitativa el resto de chocolate entre los 3 niños (CP 8)					“Ejemplo de una partición continua” Reparto con magnitudes continuas. Suma
19	Aa. Otro ejemplo decía, se hacía más calcetines, $\frac{4}{8}$ se hacía más calcetines, de esos $\frac{4}{8}$ se hacían calcetines de $\frac{1}{12}$ R.- Y el dos, quien es el dos, Aa. De que trataba	De una tela de $\frac{4}{8}$ se hacían calcetines de $\frac{1}{12}$ “María gastó la cuarta parte de su dinero. Juan gastó la mitad del suyo. ¿Es posible que María			Lo planteó en el	Problema incompleto

	R.- El valor relativo de la fracción, Ao. Por ejemplo sabemos que $\frac{1}{2}$ es igual a $\frac{2}{4}$ ya pero dice que el valor relativo de la fracción en cuanto a R.- La unidad de referencia Ao. La unidad de referencia, Ao. que no es lo mismo Ao. que no es lo mismo R.- Aquí entonces, $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son equivalentes, pero al representarlo gráficamente no son iguales Aa. No son iguales R.- Porque la unidad de referencia es diferente Ao. Y ya se les planteo el problema “María gastó la cuarta parte de su dinero. Juan gastó la mitad del suyo. ¿Es posible que María haya gastado más que Juan?” (lee del texto propuesto) R.- Verdad Ao. ¿Es posible que María haya gastado más que Juan?, si pues así es porque ya era más y M5 puso un problema cuanto es la unidad de referencia, era como este, verdad, pero M5 sí hizo uno con unidades de referencia, fue este, Jimena y Magali necesitan listón para las trenzas fueron a la mercería a comprarlo, Jimena compró 2 metros , y Magali sólo traía dinero para un metro, Jimena utilizó $\frac{3}{4}$ del listón y Magali $\frac{6}{2}$ del listón, ¿quien utilizó más? Aa. Ha porque una utilizo más Ao. Hey R.- ¿pero aquí son $\frac{6}{8}$, no? (se refiere al enunciado del problema), Aa. Tenía que ser $\frac{6}{8}$ para que sean igual, hey Ao. Son $\frac{6}{8}$ (corrige el enunciado del problema), entonces las fracciones son equivalentes, pero la unidad de referencia es diferente Ao. Entonces si son $\frac{6}{8}$ Ao. Cámbienlas, devuélvanme las hojas, devuélvanme mis hojas Aa. La agarro chifas Ao. Jonathan dame mis hojas (CP 8)	haya gastado más que Juan?” Jimena y Magali necesitan listón para las trenzas fueron a la mercería a comprarlo, Jimena compró 2 mts , y Magali sólo traía dinero para un metro, Jimena utilizó $\frac{3}{4}$ del listón y Magali $\frac{6}{8}$ del listón, ¿quien utilizó más?			texto “Fracciones: mecanismos constructivos y formas de representación”	Corrigen el problema como producto de las reflexiones colectivas; en esta parte está compartiéndolo otro estudiante, no quien lo inventó

20	Aa. Ha, la fracción como medida, de hecho se trata de ver cuántas veces cabe la unidad en Aa. Lo que se va a medir, la cantidad que se va a medir Aa. Bueno, yo hice un ejemplo que dice, se tienen tres y medio metro de listón, para adornar canastas, cada canasta necesita $\frac{1}{4}$ de metro de listón, ¿cuántas canastas se podrán adornar con todo el listón? Ya se, pues es de división, nada más convertir los 3 y $\frac{1}{2}$ a una fracción R.- No estabas grabando, a ver y como era el problema, como es el problema? Aa. Es de división, es como $3\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ $7/2 \div \frac{1}{4} = 28/2 = 14$ Ao. Como cuantas veces cabe $1/4$ de metro de listón en 3 metros y medio de listón, es como el de Laura, de cuantos recipientes de $\frac{1}{4}$ se ocupaban para llenar $3/2$ de, de agua Aa. ¿Los tenemos que escribir todos? (CP 8)	 Se tienen tres y medio metro de listón, para adornar canastas, cada canasta necesita $\frac{1}{4}$ de metro de listón, ¿cuántas canastas se podrán adornar con todo el listón?				La fracción como medida
21	Ao. El que a mí me tocó es el 5, pero me tocó el más difícil, con una división, el cociente cuál es el resultado pues Ao. ¿Cómo, como cómo? Ao. Es que has de cuenta que a mí me tocó, <u>el cociente es el resultado, que sale del problema, del, pero es con una división, ahí el papel que, tiene que ser con puras divisiones, no, los cocientes de lo que salga del problema, pero el problema necesita la división y ya el resultado</u>, es lo que a mí me tocó, el resultado, les voy a leer el problema, Aa. Nos lo dictas Ao. <u>Está difícil, es como para un niño de...</u> Ao. De prepa Ao. Aja, un señor tiene 2 garrafones de agua, $\frac{1}{3}$ de cada garrafón es para unos maestros, y los $\frac{2}{3}$ de cada garrafón sobrantes son para los alumnos, $\frac{1}{4}$ Ao. (alumno se arrima a preguntar sobre el problema a su compañero) Ao. Es el resultado, <u>es que el cociente es el resultado de la división del problema</u>, es el resultado (le explica a otro alumno y continua dictándole a sus compañeros	Un señor tiene 2 garrafones de agua, $\frac{1}{3}$ de cada garrafón es para unos maestros y los $\frac{2}{3}$ de cada garrafón sobrantes son para los alumnos, $\frac{1}{4}$ del tercio de los maestros es para el director y $\frac{1}{2}$ de los $\frac{2}{3}$ de los alumnos es para las niñas ¿qué parte de los dos garrafones le toca al director y a las niñas?				Este problema ya se había planteado en otro equipo, por parte del mismo estudiante, sin embargo aquí se vuelve a recuperar en tanto denota no tener claro el significado de la fracción como cociente. “El cociente es el resultado que sale del problema, del, pero es con una división, ahí el papel que, tiene que ser con

	de equipo), del tercio, $\frac{1}{4}$ del tercio de los maestros, ponle $\frac{1}{4}$ de tercio, $\frac{1}{4}$ del tercio de los maestros, es para el director, y $\frac{1}{2}$ de los $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$ de los $\frac{2}{3}$ de los alumnos es para las niñas, entonces la pregunta es, ¿qué parte de los dos garrafones le toca al director y a las niñas? Ao. Que parte Ao. Es que ese es como otros que viene que partes de otra parte, así como al director le va a tocar $\frac{1}{4}$ de un tercio de un garrafón, $\frac{1}{4}$ de tercio (CP 9)					puras divisiones, no, los cocientes de lo que salga del problema, pero el problema necesita la división y ya el resultado”
22	Ao. En un grupo $\frac{6}{8}$ del total le van a las chivas, y 7 personas le van al cruz azul. ¿Cuántas personas se tienen en total dentro del grupo?, ¿Mariana en qué te quedaste? Mo. En cuantas personas Ao. Se tienen en total dentro del grupo? (CP 9)					
23	Ao. Es el futbol y como todos en su familia lo sabe, siempre le regalan balones y pelotas que guarda en su casa, de diferentes tamaños. Para ordenarlos los acomodó por colores y tamaños. Al terminar se dio cuenta de que $\frac{1}{5}$ del total de los balones son de color rojo, $\frac{2}{5}$ de color azul y el resto de color blanco. De las pelotas, $\frac{4}{6}$ (hasta aquí se grabó, porque la toma se pasó a otro equipo) (CP 9)	El deporte favorito de Magda es el futbol y como todos en su familia lo saben, siempre le regalan balones y pelotas, que guarda en su casa. Para ordenarlos los acomodó por colores y tamaños. Al terminar se dio cuenta de que: $\frac{1}{5}$ del total de los balones, son de color rojo, $\frac{2}{5}$ de color azul y el resto de color blanco. De las pelotas, $\frac{4}{6}$ son más chicas que un balón de futbol profesional y $\frac{1}{6}$ es más grande. El resto son del mismo tamaño que un balón. ❖ ¿Qué fracción representan los balones de color blanco del total de balones? ❖ ¿Cuál es la fracción que representa las pelotas que son del mismo tamaño que un balón? ❖ ¿Qué operaciones realizaste para contestar las preguntas? ❖ Describe lo que haces para realizar sumas de fracciones.			Este problema se recupera del libro de texto de 4°. Grado de educación primaria, página 58; el análisis tiene como objetivo diseñar una “preparación del medio”	

Como podemos apreciar en la tabla anterior, hay cuatro sesiones de clase donde se presentó con más fuerza el planteamiento y resolución de problemas que involucran conocimientos sobre las fracciones: las 3ª, 4ª, 8ª Y 9ª Sesiones; es importante hacer un comentario que me parece relevante, en la 8ª sesión de clase, habiéndoles encargado previamente que inventaran problemas como respuesta a la revisión del texto “Fracciones: mecanismos constructivos y formas de representación”, la actividad se mostró productiva, en tanto efectivamente “inventaron” problemas, sin embargo la fase de validación se dio predominantemente entre pares, con intervenciones del profesor, me parece que haya sido muy productiva una validación colectiva en la cual se resolvieran algunos de los problemas que el consenso indicara como con buen nivel de dificultad o bien que el profesor los identificara como tal; esta posibilidad haya enriquecido el aprendizaje, al permitir construir relaciones importantes entre los diferentes elementos del campo de problemas de las fracciones.

Quiero ser un poco más explícito, para ello en la columna de la izquierda le asignamos un número a cada situación de clase de la cual recuperamos él o los problemas, en lo que sigue me referiré a éstos para ejemplificar; uno de los primeros significados, con los cuales se introduce la fracción, es el de “reparto”, sin embargo, al comparar el planteamiento de la situación 1, con la 14 y la 16, nos podemos dar cuenta que hay diferencias cualitativas que es necesario resaltar.

En la situación 1, se presenta el ya clásico reparto de pastel: “Repartir 3 pasteles entre 2 niños; 2 pasteles entre 4 niños; 1 pastel entre 5 niños; y 1 pastel entre 3 niños. La variable que se modifica es cantidad de pasteles y cantidad de niños, en su proceso de resolución deja la oportunidad de la representación gráfica y el reparto biunívoco. En cambio, la situación 14, la cantidad a repartir ya no es un número entero, es una fracción:

** Lupito le llevó los $\frac{3}{4}$ de harina a su mamá, quien tenía que repartirlos para elaborar cinco pasteles ¿de cuanta harina le toca a cada pastel?*

** Repartir $\frac{3}{4}$ de un terreno entre 5 personas*

Este cambio en el dividendo aumenta el nivel de complejidad y obliga a implementar otras estrategias, de entre las cuales una será el procedimiento convencional: la división de una fracción entre un número entero. Resaltamos esto porque al comparar el ejemplo de la situación 16, vemos cómo un estudiante aplica el algoritmo convencional a una situación de reparto. El problema es “Tienes 2 manzanas, quieres que les toque a 3

niños igual ¿cuánto le tocará a cada niño?'", en el intento de resolución se establece la relación $2/1 \div 3/1$, la cual encierra en su planteamiento la comprensión de que todo número entero también es un número racional.

En tal sentido, es muy importante resaltar con los estudiantes las diferencias que se establecen cuando en el reparto se involucran sólo enteros (sean magnitudes continuas o discretas) y cuando la cantidad a repartir es una fracción, sobre todo porque hay un cambio en la unidad de referencia y ello requiere operaciones del pensamiento más complejas; en los ejemplos que involucran repartir $3/4$ (harina o de un terreno) entre 5 (pasteles o personas, según cada caso) se hace necesaria una transformación entre diferentes registros de representación, lo que Duval [citado en (Fandiño Pinilla, 2009, pág. 134)] llama "transformación de tratamiento", es decir, el pasaje de una representación semiótica a otra en el mismo registro semiótico: $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ y con ello la resolución del problema se facilita; por supuesto que también se puede recurrir a la representación gráfica, aunque luego el problema es la interpretación del resultado.

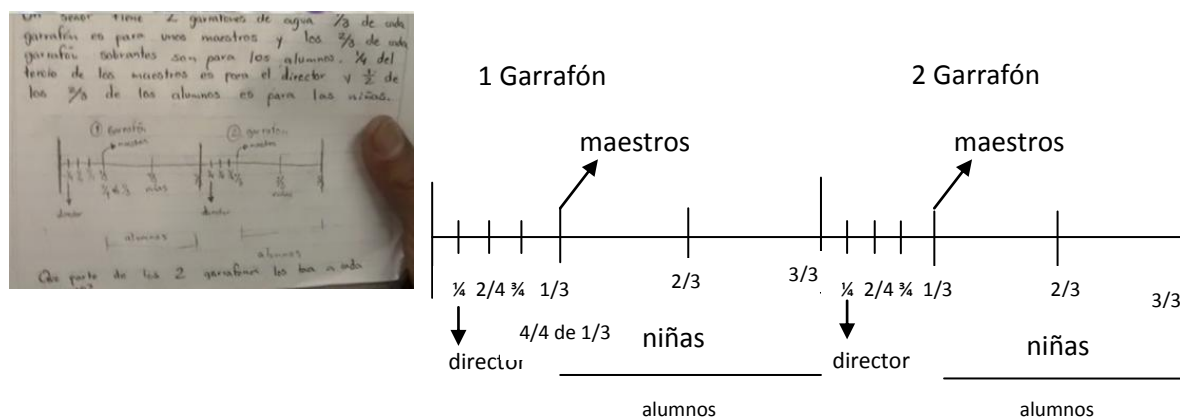
Y es precisamente en esto último, la interpretación del resultado, donde se suelen cometer los errores que pueden dar la oportunidad para la reflexión y por ende para la destransposición del saber.

En otro orden de ideas, si ponemos atención en la estructura de los problemas, tanto los que plantea el libro del taller (al menos los que se recuperaron en clases) como los que se fueron inventando durante el transcurso de las clases y los inventados ad hoc para la construcción de algún aspecto o significado de la fracción, vemos que responden al esquema enunciado – pregunta y en su mayoría establecen una relación directa entre los datos (con excepción de la situación 11 y la 15); sin embargo me interesa resaltar precisamente la situación 15, dado que en el momento de que el estudiante que la inventó, la comparte con sus compañeros, ellos manifestaron su reconocimiento como una situación compleja; veamos a cuál situación me refiero:

Un señor tiene 2 garrafones de agua, $1/3$ de cada garrafón es para unos maestros y los $2/3$ de cada garrafón sobrantes son para los alumnos, $1/4$ del tercio de los maestros es para el director y $1/2$ de los

2/3 de los alumnos es para las niñas ¿qué parte de los dos garrafones les tocó a cada uno⁶¹?

En el mismo cuaderno del estudiante se ve el siguiente proceso de resolución:



Llama la atención este problema, en tanto como sabemos es el cálculo relacional lo que complejiza un problema y en este caso, en la dinámica de la discusión de la clase (véase el fragmento de registro que está en la tabla Análisis de los diferentes problemas) les queda a los estudiantes la impresión de que en el mismo planteamiento del problema está la respuesta, sin embargo no es así y todavía es más cuestionable la representación que usó el estudiante. Vayamos por partes, en primer término, la representación utilizada (la cual no fue confrontada colectivamente –ni siquiera en los equipos, sólo se centraron en el enunciado del problema- ni mucho menos cuestionada), una recta numérica, duplica información, en tanto su presentación continua para representar los dos garrafones no es la adecuada; de igual manera apreciamos un uso impreciso de la fracción, en tanto número como punto en la recta, porque del lugar indicado con $3/3$, se vuelve a indicar la fracción $1/3$ en una división de la recta que se supone equitativa, sin considerar que ésta, como sistema de representación, implica que cada punto está indicado por una y sólo una fracción. Lo recomendable era hacer una recta por cada garrafón que se pretendía simbolizar; en el análisis en clase de este problema se haya presentado una buena oportunidad para volver a un punto sobre el cual ya habían reflexionado: la importancia de la unidad de referencia y su representación gráfica adecuada.

⁶¹ Aunque en la situación 21 se cambia la pregunta y queda ¿Qué parte de los dos garrafones le tocó al director y a las niñas?

En segundo término, ante la apariencia de que el problema ya contiene la respuesta, recuperamos la pregunta: ¿qué parte de los dos garrafones les toca a cada uno?, siguiendo la lógica del estudiante, entonces al director le toca $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ de los dos garrafones, es decir, $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{12}$ y $\frac{1}{12}$ + $\frac{1}{12}$ = $\frac{2}{12}$ de los dos garrafones. En tanto a las niñas les toca $\frac{1}{3}$ de cada garrafón y en total $\frac{2}{3}$ considerando los dos garrafones.

Desafortunadamente el tiempo didáctico de la clase y la lógica de organización de las actividades no dieron oportunidad para reflexionar sobre este problema, a pesar de ello sostenemos que momentos como éste son propicios para construir estrategias que permitan que los estudiantes rectifiquen sus errores y por ende contribuir en la destransposición del saber matemático, en el caso de este ejemplo, relativo al tipo de representación utilizada y sus consecuencias para la comprensión de la fracción y en general del número racional.

En esta misma situación se generó la confusión sobre uno de los significados, la fracción como cociente (véase situación 21 de la tabla anterior); recordemos que los estudiantes inventaron problemas a partir de la lectura de un texto aportado por el profesor:

Ao. El que a mí me tocó es el 5, pero me tocó el más difícil, con una división, el cociente cuál es el resultado pues

Ao. ¿Cómo, como cómo?

Ao. Es que has de cuenta que a mí me tocó, el cociente es el resultado, que sale del problema, del, pero es con una división, ahí el papel que, tiene que ser con puras divisiones, no, los cocientes de lo que salga del problema, pero el problema necesita la división y ya el resultado, es lo que a mí me tocó, el resultado, les voy a leer el problema. (CP 9) (Véase el problema de la situación 21)

Cuando el estudiante se refiere a que le tocó el 5, hace alusión a que en la dinámica de organización para la lectura del texto aludido, le tocó el apartado 5 y en éste se toca el tema relativo al significado de la fracción como cociente, bajo los siguientes términos:

Cociente

En este tipo de interpretación de las fracciones, un todo (con una unidad interna diferente del todo, para no caer de nuevo en la interpretación parte-todo) es subdividido en partes equivalentes, el número de las cuales está determinado por la cantidad de objetos a los cuales se les va a hacer la repartición (nuevamente aquí la fracción aparece como un fracturador). Por ejemplo la fracción “tres cuartos” podría ilustrarse como “si tres pizzas son repartidas entre cuatro niños, ¿qué cantidad de pizza recibe cada uno?”

En este caso, la fracción (n/d) se interpreta como un cociente partitivo ($n \div d$): el numerador representa la cantidad que se va a repartir, el denominador el número de partes en las cuales se va a subdividir esta cantidad. El valor de la fracción representará la cantidad que cada una de las partes recibe. La fracción $\frac{3}{5}$ en *cociente* se podría ver por ejemplo como el reparto de una cuerda de 3 metros entre 5 personas, cada una de las cuales recibiría $\frac{3}{5}$ de metro. La misma fracción en

parte-todo sería dividir una cuerda de cualquier tamaño (aquí el todo es la unidad de referencia) en 5 partes iguales y tomar 3 de ellas.

Mientras que la fracción en *cociente* puede ser mayor que uno (ya que es relativa a la unidad interna), en *parte-todo* tiene sólo sentido si la fracción es menor o igual a uno (“ocho tercios”, por ejemplo, sería tomar ocho de las tres partes en las que se dividió el todo!) (Mendoza, 2011)

Es decir, el estudiante tenía esta información y a partir de ahí dedujo que el significado de la fracción como cociente es “el resultado que sale del problema, pero con una división”, el problema se genera si se extiende esta interpretación a que en los problemas matemáticos que se resuelven con una división de fracciones está presente el significado de la fracción como cociente, en tanto una interpretación más adecuada del significado de cociente viene dada por la frase “división indicada” (Fandiño Pinilla, 2009, pág. 109).

Complementario a la tabla anterior, en la siguiente vemos cómo en el diseño de los problemas hay una participación muy consistente de los estudiantes, lo cual confirma la representación enunciada al principio de este apartado: los estudiantes –maestros- deben ser tanto diseñadores como resolutores de problemas⁶²:

Tabla 26. Origen de los problemas y concepto matemático central.

Problema	Número de sesión	¿Quién los plantea?	Concepto matemático central
* Repartir 3 pasteles entre 2 niños. * Repartir 2 pasteles entre 4 niños. * Repartir 1 pastel entre 5 niños. * Repartir 1 pastel entre 3 niños.	2	Desde la clase de un estudiante.	Reparto
La tercera parte de un terreno se dedicó para la siembra, de esta parte en la mitad se sembró maíz, ¿qué parte del terreno se dedicó a la siembra del maíz?	3	Taller para maestros	Parte- todo
Un alambre que mide $\frac{2}{3}$ de metro se parte a la mitad, ¿qué fracción de metro mide cada parte?			Partes de partes
Propuesta de transformación: Un alambre que mide $\frac{2}{3}$ de metro, se parte a la tercera parte ¿qué fracción de metro mide cada parte?			Multiplicación de fracciones
Se usó un cuarto de un pliego de cartoncillo para hacer una bandera. La tercera parte de ese cuarto, se pintó de rojo. ¿Qué fracción del pliego de cartoncillo se pintó de rojo?			Partes de partes
Tres jóvenes se turnan durante el día para atender su taller. Luis trabaja de 8 a.m. a 10 am Mario trabaja de 10 AM a 14 PM José trabaja de 14 PM a 20 PM			Razón

⁶² No es objeto de estudio en esta tesis el proceso, ni las características, específicas para que los estudiantes sean diseñadores de problemas, por ello sólo resaltamos que del análisis de las diferentes sesiones se aprecia la intencionalidad de construir la representación sobre la importancia de saber diseñar problemas, predominantemente por homología a los diseñados por el profesor y/o a los propuestos por los materiales curriculares.

Deciden repartirse las ganancias semanales proporcionalmente al tiempo que trabajan. a) ¿Cuántas horas al día permanece abierto el taller? ____ b) ¿Qué parte de las ganancias le tocaron a cada uno? A Luis ____ de las ganancias A Mario ____ de las ganancias A José ____ de las ganancias			
Reproducir una figura al doble de sus medidas, al cuádruple; o bien tres veces más pequeña.	4	Profesor	Operador multiplicativo
Si 2 es a 4, como 6 es a 12 ¿cuál es el número que es a 1?			Razón
Si 3 es a 12, como 6 es a 24 ¿cuánto es ¼ de 1?		Profesor	Razón
Si trabajan 3 hrs les pagan 12 euros; si trabajan 6 hrs les pagan 24 euros ¿cuánto les pagan si trabajan ¼ de hr.?		Estudiante	
El problema final es: 3 litros de agua se preparan con 12 limones ¿cuántos litros de agua se preparan con 7 limones?		Estudiante	Razón
Un señor les dejaba una herencia a sus hijos y que conforme al número de hijos que tenían era lo que iban a recibir de herencia, el primer hijo tiene 6, el segundo 3 y así entonces tú puedes decir, pues sumo el total de los hijos y nada más divido el número de la herencia entre ese total y los multiplico Una escuela tenía 2 turnos, entonces los de nuevo ingreso los iban a repartir en esos 2 turnos y tú como los repartirías, por ejemplo en el turno de la mañana había 360 y en el turno de la tarde había 450 y los alumnos a repartir eran 400, entonces en forma inversamente proporcional los ibas a repartir en los 2 turnos			Impreciso No necesariamente implica fracciones
Organizados en equipos, se les entregan cuatro tiras divididas de la siguiente manera: una de un metro, otra dividida en cuartos y medios, la tercera en tercios y sextos y la tercera en quintos y décimos. Un integrante del equipo coloca la ficha sobre cualquier lugar de la tira de un metro; el resto de los integrantes calculan la distancia que hay entre el extremo de la tira y el lugar donde se colocó la ficha usando: medios, cuarto, quintos, décimos, tercios y sextos.	6	Estudiantes a partir del libro “juega y aprende matemáticas”	Equivalencias, suma de fracciones
Suponga que se trata ahora de un circuito pequeño, de ¾ de milla. De esta manera, ambos factores podrán ser fracciones. Calcule, sin convertir a metros o kilómetros, lo siguiente: ¿qué fracción de milla avanza el trenecito, si da ¼ de vuelta?		Taller para maestros	Operador multiplicativo
Una tina que medía 3/2 y se tenía que llenar con recipientes de ¼, y que ¿cuántos íbamos a necesitar? Vamos pensando que tenemos ahora, vamos a usar el mismo ejemplo, que tenemos 6 metros de tela, si y vamos a hacer blusas y cada blusa ocupa 1/3, ¿cuántas blusas se pueden hacer con 6 metros de tela? Si tuviéramos 4/8 de tela y vamos a hacer calcetines que ocupan 1/12 de tela ¿cuántos calcetines se pueden hacer? Teníamos un metro de alambre y de eso no sé quien agarró la mitad, de la mitad, tú te llevaste 1/3 para tender la ropa, y luego lo que sobró el abuelo se lo llevó para no sé, la leña, te pregunta ¿Cuántos metros de alambre se llevó el abuelo? Tenemos 4/8 de metro de listón y vamos a hacer moños de 1/12 ¿cuántos moños debemos de hacer?	8	Estudiante	División de fracciones
		Profesor	
		Profesor	
	Estudiante - profesor		
	Profesor		
Carlos y Lupito se encontraron en la tienda de la esquina, Carlos le pide a Don Juan que le dé 5/8 de harina y Lupito le pide ¾ de lo mismo ¿Quién de los dos compró más harina?, Lupito le llevó los ¾ de harina a su mamá, quien tenía que repartirlos para elaborar cinco pasteles ¿de cuanta harina le toca a cada pastel?		Estudiante	Comparación de fracciones
Repartir ¾ de un terreno entre 5 personas			División de fracción entre número natural
Tienes 2 manzanas, quieres que les toque a 3 niños igual		Estudiante	Reparto

¿cuánto le tocará a cada niño?, Jimena y Magali necesitan listón para sus trenzas y fueron a la mercería a comprarlo, Jimena compró 2 metros y Magali sólo traía dinero para 1 metro, Jimena utilizó $\frac{3}{4}$ de listón y Magali $\frac{6}{8}$, ¿quién utilizó más? La maestra los sacó a jugar al parque que queda a 10 km de la escuela, Javier avanzó $\frac{4}{16}$, Esteban $\frac{1}{4}$ y Joel 0.20 km, indica en el camino dónde se localizan los 3 alumnos.	8	Estudiante	Comparación de fracciones: fracciones equivalentes, unidad de referencia diferente. Comparación y ubicación de fracciones.
De los 5 chocolates que había, Lucía agarró $\frac{5}{4}$ partes, Alfredo $\frac{2}{8}$ y Mariana $\frac{1}{2}$. Repartir de manera equitativa el resto de chocolate entre los 3 niños.		Estudiante	Suma de fracciones con diferente denominador. Reparto equitativo
Se tienen tres y medio metros de listón para adornar canastas. Cada canasta necesita $\frac{1}{4}$ de metro de listón. ¿Cuántas canastas se podrán adornar con todo el listón? ¿Sobraré o faltará listón?		Estudiante	División de fracciones
Un señor tiene 2 garrafones de agua, $\frac{1}{3}$ de cada garrafón es para unos maestros y los $\frac{2}{3}$ de cada garrafón sobrantes son para los alumnos, $\frac{1}{4}$ del tercio de los maestros es para el director y $\frac{1}{2}$ de los $\frac{2}{3}$ de los alumnos es para las niñas ¿qué parte de los dos garrafones le toca al director y a las niñas?		Estudiante	Multiplicación de fracciones
En un grupo $\frac{3}{4}$ del total le van a las chivas y 7 personas le van al cruz azul ¿cuántas personas se tienen en total dentro del grupo?		Estudiante	Parte todo
El deporte favorito de Magda es el fútbol y como todos en su familia lo saben, siempre le regalan balones y pelotas, que guarda en su casa. Para ordenarlos los acomodó por colores y tamaños. Al terminar se dio cuenta de que: $\frac{1}{5}$ del total de los balones, son de color rojo, $\frac{2}{5}$ de color azul y el resto de color blanco. De las pelotas, $\frac{4}{6}$ son más chicas que un balón de fútbol profesional y $\frac{1}{6}$ es más grande. El resto son del mismo tamaño que un balón. ❖ ¿Qué fracción representan los balones de color blanco del total de balones? ❖ ¿Cuál es la fracción que representa las pelotas que son del mismo tamaño que un balón? ❖ ¿Qué operaciones realizaste para contestar las preguntas? ❖ Describe lo que haces para realizar sumas de fracciones.	9	Libro de texto	Suma y resta de fracciones

En síntesis, queda clara la importancia de la resolución de problemas en la enseñanza de las fracciones y cómo a partir de esta actividad se va configurando la representación social sobre el papel del maestro en la enseñanza, como diseñador y resolutor de problemas; creemos que hay un proceso de anclaje y un primer nivel de objetivación sobre esta representación, sobre todo en la última de las sesiones cuando se les pide a los estudiantes que diseñen de tarea un problema en atención a cada uno de los significados que puede tener la fracción; un segundo nivel de objetivación lo apreciaremos en su traducción al salón de clase de la escuela primaria. La “habitación significativa”, como le nombré en páginas anteriores a este proceso de naturalización con el que de manera vivencial se va interiorizando una representación, me parece que es un paso fundamental en el proceso de transformación de representaciones no congruentes con el enfoque deseado para la enseñanza.

En otras palabras, en la medida en que los estudiantes participan activamente de todo su proceso formativo y a su vez éste manifiesta congruencia con ciertos principios constructivistas, dando oportunidad al cuestionamiento, la reflexión metacognitiva y la interacción comunicativa diversa, se dará oportunidad a la reformulación de conocimientos erróneos o mal aprendidos y por ende a procesos de destransposición del saber; en este proceso el planteamiento y resolución de problemas es fundamental.

III.2.1.2.2. Análisis curricular como proceso didáctico ¿de qué manera contribuye a la destransposición del saber matemático?

Al hacer el análisis de las 9 clases del profesor, también pudimos apreciar cómo es que en diferentes ocasiones recupera los libros de texto, tanto los nacionales como extranjeros e incluso los libros actuales comparándolos con un libro de texto del año 1960.

En este apartado vamos a hacer el análisis correspondiente, bajo dos preguntas principales ¿cuál es la representación social que los estudiantes construyen a partir del conocimiento y análisis de los libros de texto? Y segunda ¿de qué manera este análisis contribuye a la destransposición del saber matemático?

Creemos que esto es importante en tanto desde la óptica de la Teoría de las representaciones sociales, los textos escritos son documentos en los cuales se plasma una representación que luego dada su permanencia, precisamente por su carácter de “documento escrito” puede llegar, sin la transformación que implica el lenguaje verbal, a mayores sectores, considerando la población a la que van dirigidos, en este sentido recuperamos el análisis realizado en el marco teórico, relativo a los libros de texto y la pervivencia de representaciones sociales sobre este saber matemático: las fracciones.

Por otro lado, si consideramos y estamos de acuerdo con Liping Ma (2010), el análisis colectivo de los materiales curriculares influye fuertemente en el logro de un conocimiento profundo de las matemáticas fundamentales, lo cual salva una de las viejas disputas en la formación de profesores, relativa a qué tantas matemáticas deben saber los profesores; desde la opinión de Ma (2010), los profesores deben saber de manera profunda las matemáticas fundamentales, entendiendo por fundamentales como, “*elementales, fundacionales y primarias*” (Ma, 2010, pág. 150) y derivado de ello, la comprensión profunda de las matemáticas fundamentales “*es más que una comprensión sólida de las matemáticas elementales, es tener conciencia de la estructura conceptual y las actitudes*

básicas hacia las matemáticas inherentes a las matemáticas elementales y la capacidad de dar una base a la estructura conceptual e inculcar dichas actitudes básicas en los alumnos. Una comprensión profunda de las matemáticas tiene amplitud, profundidad y rigurosidad” (Ma, 2010, pág. 151). En este proceso, también desde el análisis de las clases del profesor, coincidimos con Liping Ma en la importancia otorgada al análisis de los materiales curriculares, en concreto el libro de texto, para lograr una mayor comprensión del contenido matemático.

En México, con el objeto de proporcionar de manera gratuita libros y material de apoyo básico a los niños de las escuelas de enseñanza primaria de todo el país, se creó el 12 de febrero de 1959 —siendo presidente Adolfo López Mateos— la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG). La Comisión surgió como una dependencia de la Secretaría de Educación Pública, durante la gestión del escritor y diplomático Jaime Torres Bodet. Se nombró director a Martín Luis Guzmán, quien se encargó de hacer realidad dicha idea proyectada como un derecho social. La creación del libro de texto gratuito pretendía romper con las barreras económicas y buscaba garantizar la equidad educativa a partir de la unificación de contenidos temáticos auspiciada por el Estado; sin embargo, al mismo tiempo que contribuye a generar equidad en el acceso a los materiales, evidentemente contribuye también a la unificación de un discurso y un esquema de formación⁶³ y por supuesto en la transmisión de ciertas representaciones sobre el saber, en nuestro caso de análisis, sobre el saber matemático. Por ello, es de mucho interés ocuparnos de su análisis y romper con la ilusión de transparencia con que suelen usarse, incluso sin cuestionarse su pertinencia.

III.2.1.2.2.1. Análisis comparativo: Plan 2011 v/s plan 1993

Durante el desarrollo de las diferentes sesiones de clase, apreciamos tres grandes intencionalidades del profesor: Revisión de los libros de texto para identificar un tema determinado, análisis del contenido específico de algunas lecciones (comparando épocas y contextos) y análisis para tomar decisiones de planeación y práctica docente.

⁶³ Con ello no queremos decir que la influencia sea decisiva, por supuesto que también media, en el proceso de transposición didáctica, la formación profesional y las representaciones de los maestros.

En este apartado sólo nos vamos a ocupar de las dos primeras intencionalidades, en tanto la tercera ya la abordamos cuando hablamos de su importancia para la “preparación del medio”.

La primera intencionalidad, identificar un tema determinado, permite contextualizar el trabajo de análisis posterior

Mo. A ver les voy a pasar su libro de 4º grado, de 4º grado para que ahí mismo intenten buscar, la consigna, eh la primer, la consigna es muy sencilla, quiero que busquen una lección que hable de las fracciones (CP 3)

Esta actividad inicial de exploración les permite a los estudiantes reconocer un campo de conocimiento al interior de los materiales curriculares, lo cual en esencia no será desconocido por ellos en tanto han sido alumnos y el libro de texto es de carácter nacional.

Cuando se dice sumariamente “el libro de texto lleva a la acción” o cuando asumimos que “el libro de texto proporciona los contextos para los problemas matemáticos”, se crean actitudes colectivas, se puede entender: el libro de texto incita a la acción, produce actitudes, mediante la creación o modificación de la representación de lo real. Ello explica porqué, de 9 sesiones analizadas, en 4 se trabaja explícitamente el análisis de los libros de texto de educación primaria; adicional a ello agregamos que está en la intencionalidad didáctica que los estudiantes analicen y comprendan la forma de organización de los materiales, tanto como la progresión didáctica de los temas:

Mo. Pág 85, muy poquitos alcanzaron a hacer esta pregunta, entonces mejor vamos a llegar el día de hoy hasta ésta, porque no pudimos entrar en detalle, lo que quería con esta actividad es que vieran ustedes que hay una progresión entre las fracciones, que cuando lleguemos a una división tengamos que remitirnos a cuál fue la que se vio antes, porque si no dejamos así, imagínense que empezamos directo con la lección, sin plantearle ninguna pregunta a los niños, entonces ¿cómo van a relacionar con lo anterior, si nosotros no les ponemos actividades, si nosotros no les preguntamos, sino hacemos esa preparación del medio que hemos discutido? (CP 5)

En tanto, como ya dijimos, la intencionalidad es que los estudiantes vean que hay progresión en el tratamiento de las fracciones, desde el análisis de las sesiones de clase, encontramos que en tres de ellas se analizan los libros de texto de dos planes de estudio diferentes (SEP, 1994; SEP, 2011a y SEP, 2011), correspondientes a tercero y cuarto grados (para el caso del Plan 1993, sólo se analiza el de 3º grado) considerando los mismos

indicadores en cada sesión de clase, observar si en la lección se trabaja: suma de fracciones, resta de fracciones, comparación de fracciones o equivalencia de fracciones.

El esquema de análisis propuesto es una tabla de doble entrada, en la columna de la izquierda se coloca el nombre y la página en que se ubica la lección y en el resto de las columnas los indicadores que se van a revisar; posterior al análisis en pequeños equipos, se completa la tabla palomeando el cuadrado en la intersección de la lección y el indicador, cuando éste se presenta en ella.

Las lecciones propuestas para su análisis son:

Tabla 27. Análisis comparativo de lecciones: 1993 v/s 2011.

Cuarto grado, Plan 1993	Tarjetas de papel, página 64 Galletas redondas, página 82 Más galletas y más niños, página 94
Tercer grado, Plan 2011	¿Cuántas caben?, página 56 La mitad de la mitad de la mitad, página 85 Comparemos fracciones, página 115
Cuarto grado, Plan 2011	Calcula fracciones, página 47 Es mayor a $\frac{1}{2}$, página 85 El doble de una fracción, página 90

Ahora bien, si la intención es que se aprecie la progresión de los temas y las actividades, lo cual evidentemente envía dicho mensaje a partir del análisis de las lecciones, veamos cómo es que esto se logra; retomamos para ello y remitimos al lector al capítulo del marco teórico donde profundizamos en el análisis de los libros de texto, aquí sólo vamos a recuperar las lecciones que fueron objeto de análisis de manera explícita en clase y resaltamos algo que el mismo profesor afirmó en la 5ª sesión, “no podemos analizarlas todas por el asunto de economía de tiempo”, en nuestro caso analizaremos las partes medulares y procuraremos resaltar las representaciones que se van construyendo.

Desde el plan 1993, el maestro recupera el análisis de las siguientes tres lecciones (SEP, 1994):

9. TARJETAS DE PAPEL

La maestra de Jaime usa tarjetas de papel de distintos tamaños. Las más grandes son para enviar recados, las medianas para anotar problemas y las más chicas para hacer sorteos.



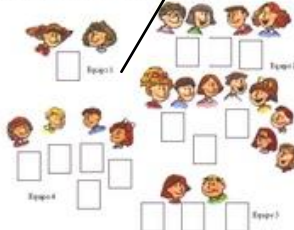
- La maestra partió tres hojas, una para tarjetas grandes, otra para tarjetas medianas y otras para tarjetas chicas. ¿Cuántas tarjetas grandes obtuvo? ¿Cuántas tarjetas medianas? ¿Cuántas tarjetas chicas? Utiliza tres hojas y recorta tarjetas de los tres tamaños para comprobar tus respuestas.

- El dibujo de la derecha representa una hoja entera. Divide la hoja para que puedas colorear una tarjeta grande, una mediana y una chica.

- ¿Cuántas tarjetas medianas se obtienen si se parte una tarjeta grande? ¿Cuántas tarjetas chicas se obtienen si se parte una mediana? ¿Cuántas tarjetas chicas se obtienen si se parte una grande?

- Completa las siguientes expresiones. Si necesitas, usa una hoja. La tarjeta grande es $\frac{1}{4}$ de la hoja. La tarjeta mediana es $\frac{1}{8}$ de la hoja. La tarjeta chica es $\frac{1}{16}$ de la hoja. Un cuarto de la hoja es igual a $\frac{1}{2}$ octavos de la hoja. Un octavo de la hoja es igual a $\frac{1}{4}$ dieciseisavos de la hoja.

- La maestra formó equipos de dos, cuatro y ocho niños. Después entregó algunas hojas a cada equipo para que se las repartieran en partes iguales.



- Divide los rectángulos para indicar lo que le toca a cada niño en su equipo. ¿Cuántas hojas tiene el equipo 2? ¿Entre cuántos niños se repartieron? ¿Cuánto le tocó a cada niño? Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

Equipo	Hojas	Niños	A cada niño le tocó
1			
2			
3			
4			
5	3	2	$1 + \frac{1}{4}$ hoja

18. GALLETAS REDONDAS

Raúl, Sonia y Yoatzin juegan a los repartos. Cada quien dibuja un reparto y tratan de adivinar en cuál le tocará más galletas a cada niño.

- Observa los dibujos. Cada dibujo muestra un reparto de galletas entre niños. Luego trata de contestar las preguntas.



- ¿Quién dibujó más galletas? ¿Quién dibujó más niños? ¿En cuál de los tres repartos le tocará más galletas a cada niño? ¿Por qué? ¿En cuál de los tres repartos le tocará menos galletas a cada niño? ¿Por qué? ¿En cuál de los repartos le tocará más de una galleta a cada niño? ¿Por qué?

- Realiza los repartos de Raúl, Sonia y Yoatzin para que compruebes tus respuestas. Escribe con una o con varias fracciones cuánto le toca a cada niño en cada reparto. Reparto de Raúl: Reparto de Sonia: Reparto de Yoatzin:

- Ordena de menor a mayor los resultados que encontraste.



- En otra ronda, Raúl, Sonia y Yoatzin hicieron estos dibujos. ¿En cuál reparto le tocará más de una galleta a cada niño? ¿En cuál reparto le tocará menos de una galleta a cada niño? ¿En cuál reparto le tocará exactamente una galleta a cada niño?

- Realiza los repartos de Raúl, Sonia y Yoatzin. Escribe, con una fracción o con varias, lo que le tocó a cada niño en cada reparto. Reparto de Raúl: Reparto de Sonia: Reparto de Yoatzin:

- Ordena de menor a mayor los resultados que encontraste.

- Lee lo que dicen Raúl, Sonia y Yoatzin:



- Dibuja en tu cuaderno tres repartos: uno que corresponda a lo que dice Raúl, otro a lo que dice Sonia y otro a lo que dice Yoatzin. Realiza cada reparto.

3. MÁS GALLETAS Y MÁS NIÑOS

Raúl, Sonia y Yoatzin volvieron a jugar a los repartos y sucedió algo interesante.

- Observa el dibujo de Sonia para que hagas el de Yoatzin y el de Raúl.



- ¿En cuál de los repartos crees que le toca más galleta a cada niño? Comenta tu respuesta con tus compañeros y tu maestro.

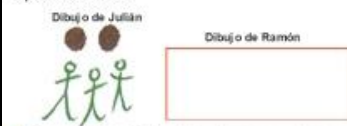
- Al realizar sus repartos, Sonia encontró que a cada niño le toca $\frac{1}{2}$ de galleta. Yoatzin encontró que a cada niño le toca $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ de galleta. Raúl encontró que a cada niño le toca $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ de galleta.

- Realiza los repartos para ver si encuentras lo mismo que Sonia, Yoatzin y Raúl.

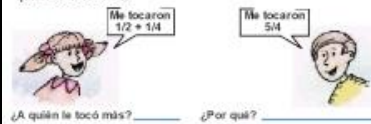
- Julían dice que en el reparto de Sonia, en el de Raúl y en el de Yoatzin, le toca la misma cantidad de galleta a cada niño. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Julían?

- ¿Por qué?

- Julían y Ramón quieren dibujar repartos en los que le toque la misma cantidad de galleta a cada niño. Dibuja el reparto de Ramón.



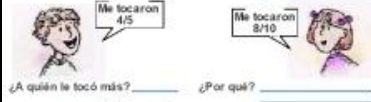
- Sonia, Yoatzin, Raúl y Jaime formaron parejas con otros niños y jugaron a adivinar a quién le toca más galleta. Lee lo que dicen y averigua, como tú quieras, a quién le toca más.



- ¿A quién le tocó más? ¿Por qué?



- ¿A quién le tocó más? ¿Por qué?



- ¿A quién le tocó más? ¿Por qué?



- ¿A quién le tocó más? ¿Por qué?

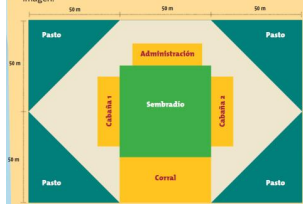
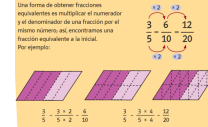
Antes de la lección “Tarjetas de papel” hay 5 lecciones con el tema de números fraccionarios y en este grado escolar (4º.) de este plan de Estudios, en total se trabaja el tema en 22 lecciones (Cfr. Anexo 14. “Fracciones 4º grado, Plan 1993), en tanto, como antecedente de 3º grado ya han revisado 13 lecciones (Cfr. Anexo 15. “Fracciones 3º grado, Plan 1993). Como apreciamos en este caso sí hay progresión en los contenidos trabajados, incluso, como podemos ver en la flecha continua se recuperan tanto los tipos de preguntas (“¿en cuál de los repartos les toca más...?”) como la representación utilizada en la relación cantidad que se reparte entre niños a los cuales se les reparte; mientras que con la flecha punteada se ve la extensión de la estrategia que lleva del lenguaje verbal a la representación gráfica. Explícitamente en los contenidos también hay progresión, se va del

conocimiento de “Las fracciones en situaciones de reparto”, a la “Comparación de fracciones” (SEP, 1994).

Por otro lado, en la siguiente sesión, con la misma estrategia de análisis de los libros de texto y los mismos indicadores usados en la sesión 3, comparan 3 lecciones del libro de texto de 3º grado (Anexo 16) y 3 del libro de texto de 4º grado (Anexo 17), pero ahora del Plan de estudios 2011; a continuación ponemos las partes de las lecciones donde explícitamente se aprecia la progresión de los contenidos, estrategias y formas de representación de las fracciones (para no hacer tan denso el contenido de la tesis, remitimos a los anexos para ver las lecciones completas):

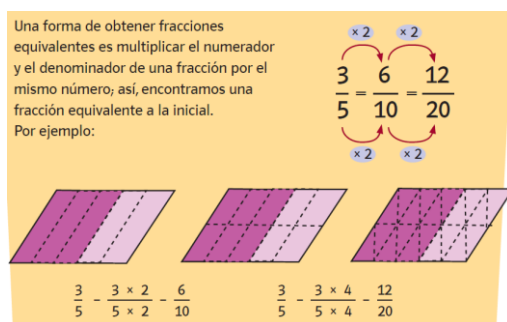
Tabla 28. Comparación de lecciones entre grados: 3º y 4º, 2011.

G ra d o	Lección	Contenido	Rango de las fracciones	Ejemplo de problemas	Institucionaliza ción.
3º.	16. ¿Cuántos caben?	Utiliza las fracciones (medios, cuartos y octavos...) para expresar oralmente y por escrito medidas diversas.	Medios, cuartos, octavos y mixtas (un entero y medio)	• ¿Cuánta crema juntarás si tu mamá te pide que compres $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ de crema? • En el mercado compraste $1\frac{1}{2}$ litro de leche para preparar un pastel y te obsequiaron $\frac{1}{2}$ litro más. ¿Qué cantidad de leche llevaste a casa? • En la tienda de don Enrique venden crema a granel. Patricia desea comprar 2 litros, pero sólo tiene recipientes de $\frac{1}{2}$ y de $\frac{1}{4}$ litro. Escriban dos maneras diferentes en que Patricia puede llevar la crema que compró: _____ y _____	Suma de fracciones con igual denominador. Ejemplo: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$ _____ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$ _____ $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} =$ _____ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$ _____ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$ _____ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$ _____ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$ _____
	26. La mitad de la mitad de la mitad.	Utiliza fracciones (medios, cuartos y octavos...) para expresar oralmente y por escrito el resultado de repartos.	Medios, cuartos, octavos y dieciseisavos	La tía de Felipe tiene un melón en su frutero. Cuando Ana y Mariana fueron a visitarla, lo repartió entre las dos en partes iguales. Como después llegaron Antonio y Felipe, le pidió que lo repartieran en partes iguales otra vez. • ¿Qué cantidad de melón tenían Ana y Mariana antes de que llegaran los niños? • Después de la segunda repartición, ¿con cuánto se quedó cada quien? Ana dice que cada uno recibió la mitad de la mitad del melón, mientras que Felipe asegura que cada quien recibió una cuarta parte. • ¿Es correcta la afirmación de Felipe? • ¿Por qué? • ¿Y lo que dijo Ana? • ¿Por qué?	La fracción es un número que se puede representar en diferentes maneras por ejemplo: $\frac{3}{4}$. A la cifra de arriba se le llama numerador y representa el número de partes que se tomaron de un conjunto. A la cifra de abajo se le llama denominador, el total de partes en una totalidad. A la cifra de abajo se le llama denominador porque las divisiones se hacen con que se divide el conjunto. Por ejemplo, si divides tres cosas en cuatro partes iguales y tomas tres de esas partes, se tienen $\frac{3}{4}$ de todo. Una forma de calcular la mitad de una fracción es multiplicar el denominador de la fracción por 2. Por ejemplo, si la fracción es $\frac{3}{4}$ debes multiplicar el denominador, que es 4, por 2, y obtienes $\frac{3}{8}$.
	35. Comparemos fracciones	Identifica fracciones equivalentes para compararlas.	$2\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ y $3\frac{1}{4}$	• Cecilia fue al mercado con Alberto y Antonio a comprar $1\frac{1}{2}$ kilogramo de fresas. El vendedor ya tenía preparadas bolsas de $1\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ de kilogramo. ¿Cómo distribuyó el vendedor las bolsas para que los tres cargaran el mismo peso? • ¿De qué otra manera el vendedor podría haber acomodado las fresas en las bolsas para que los tres cargaran de manera equitativa? • En el mercado se encontraron con Alicia, que podía ayudarles a cargar las fresas, así que Cecilia decidió comprar más para completar 3 kilogramos. Si se dividen las fresas en partes iguales, ¿cuánto carga cada uno? • Dibujen las bolsas de fresas de cada uno y escriban cuánto pesa cada bolsa.	Las fracciones que representan la misma cantidad reciben el nombre de fracciones equivalentes.

4 ^o .	11. Calcula fracciones	Calcula fracciones de magnitudes continuas (longitud, superficie de figuras) y, recíprocamente, establece qué fracción es una parte dada de una magnitud.	cuartos, sextos, octavos, doceavos	El rancho donde vive Mauricio, tiene las medidas que se muestran en la imagen.  Los fines de semana Mauricio, Luis, Juan y Pedro podan el pasto; a cada uno le corresponde un área verde. ¿Cuánto mide el área total del rancho? ¿Qué fracción del total del terreno le corresponde podar a cada uno? - Del total del terreno, ¿qué fracción representa el pasto? El sembrado es un cuadrado y está en el centro del rancho. ¿Qué fracción del total del terreno representan el pasto y el sembrado juntos? ¿Qué fracción del rancho ocupa el corral? Consideren que las longitudes de las cabañas son de 10 m por 30 m. ¿Cuál es la superficie de las cabañas? ¿Qué fracción del total del rancho corresponde a las cabañas?	Problema con lenguaje complejo: abaten Una ventana en forma de octágono regular, las secciones que se abaten tienen forma de triángulos y representan $\frac{3}{8}$ partes del área total de la ventana. ¿Cómo podría estar dividida la ventana?																																				
24. Es mayor a $\frac{1}{2}$	Compara fracciones e identifica fracciones equivalentes.	Medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, octavos, dieciseisavos,	El maestro de Matemáticas llevó al salón de clase 6 melones de tamaño y peso similares. Acomodó en filas a sus alumnos y a cada una le entregó un melón. En la primera fila sólo había 2 alumnos; en la segunda, 4; en la tercera, 3; en la cuarta, 6; en la quinta, 8 y en la sexta, 5. El profesor pidió que cada melón se repartiera en partes iguales entre los alumnos de cada fila. ¿En cuál de las filas los alumnos recibieron una porción mayor de melón? - En una de las filas cada alumno recibió la mitad de un melón. ¿De qué fila se trata? ¿Qué fracción de un melón le correspondió a los alumnos de la sexta fila? - Roberto afirma que entre más alumnos haya en la fila, menor porción de melón recibirán. ¿Estás de acuerdo con él? ¿Por qué? Completen la tabla y contesten las preguntas. <table><thead><tr><th>Figura</th><th>Fracción coloreada</th><th colspan="3">Fracción equivalente expresada en:</th></tr><tr><th></th><th></th><th>Cuartos</th><th>Octavos</th><th>Dieciseisavos</th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td></td><td>$\frac{3}{4}$</td><td>$\frac{6}{8}$</td><td>$\frac{9}{12}$</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table> - Con respecto a la figura 1, ¿qué fracciones representaron la misma parte coloreada? ¿De cuántas formas diferentes se representa la fracción $\frac{3}{4}$ en la tabla? - Observa la figura dividida en octavos y contesta: ¿Cuántos equivalen a un cuarto?	Figura	Fracción coloreada	Fracción equivalente expresada en:					Cuartos	Octavos	Dieciseisavos	1		$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{9}{12}$	2					3					4					Dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad. Una forma de obtener fracciones equivalentes es multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número, así encontramos una fracción equivalente a la inicial. Por ejemplo: 							
Figura	Fracción coloreada	Fracción equivalente expresada en:																																							
		Cuartos	Octavos	Dieciseisavos																																					
1		$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{9}{12}$																																					
2																																									
3																																									
4																																									
25. El doble de una fracción	Determina expresiones equivalentes y calcula el doble, mitad, cuádruplo, triple, etcétera, de las fracciones más usuales ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, etcétera).	Medios, cuartos, sextos, octavos, décimos, doceavos	El profesor de Matemáticas pidió a sus alumnos que buscaran cartulina de reúso suficiente para que cada uno formara el equivalente a $\frac{1}{2}$ pliego de cartulina. Óscar llevó dos piezas de cartulina de $\frac{1}{4}$ de pliego, Liliana tres de $\frac{1}{6}$, Gabriela cuatro de $\frac{1}{8}$ y Felipe cinco de $\frac{1}{10}$. ¿Cuántas porciones de $\frac{1}{2}$ de pliego de cartulina llevó Jazmín para formar $\frac{1}{2}$ pliego?	4. Completen la tabla siguiente. <table><thead><tr><th>Fracción</th><th>Mitad</th><th>Tercio</th><th>Doble</th><th>Triple</th><th>Cuádruple</th></tr></thead><tbody><tr><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{2}{3}$</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td></td></tr><tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td></td><td>$\frac{1}{9}$</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$\frac{1}{4}$</td><td></td><td></td><td>$\frac{2}{3}$</td><td></td><td></td></tr><tr><td>$\frac{2}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td></td><td>$\frac{4}{3}$</td><td></td><td></td></tr><tr><td>$\frac{3}{4}$</td><td></td><td></td><td></td><td>$\frac{9}{4}$</td><td></td></tr></tbody></table> - Observa los denominadores de las fracciones de las columnas "Mitad" y "Tercio", y compáralos con los de la columna "Fracción". ¿Qué relación encuentras? ¿Cómo se determina la mitad o un tercio de cualquier fracción? ¿Cómo se obtiene el doble o el triple de una fracción?	Fracción	Mitad	Tercio	Doble	Triple	Cuádruple	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{9}$				$\frac{1}{4}$			$\frac{2}{3}$			$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{4}{3}$			$\frac{3}{4}$				$\frac{9}{4}$		¿Cuántas partes de $\frac{1}{2}$ sumamos para formar $\frac{1}{2}$ pliego? Usando sólo fracciones y el signo de suma, escribe la operación que represente la pregunta anterior. ¿Cómo se puede representar $\frac{1}{2}$ utilizando varias veces $\frac{1}{4}$? Una fracción puede expresarse de diferentes maneras, ya sea sumando una misma fracción o diferentes fracciones. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ puede expresarse como $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ o $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, entre muchas otras formas.
Fracción	Mitad	Tercio	Doble	Triple	Cuádruple																																				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$																																					
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{9}$																																							
$\frac{1}{4}$			$\frac{2}{3}$																																						
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{4}{3}$																																						
$\frac{3}{4}$				$\frac{9}{4}$																																					

El principal indicador de la progresión y aumento en la complejidad se puede apreciar en la columna “rango de las fracciones” dado que, como apreciamos, en todas las lecciones comparadas se usan prácticamente las mismas y el aumento en el rango está en función de las posibilidades de ir calculando las fracciones equivalentes, a partir de la estrategia de duplicación, o en los términos de lo que plantea la lección 25 “El doble de una fracción”, de 4º grado.

De manera semejante, en la columna que titulé “Institucionalización”, apreciamos cómo en la lección 35 de 3º grado se formaliza el concepto de fracciones equivalentes: “Las fracciones que representan la misma cantidad reciben el nombre de fracciones equivalentes” y es el mismo concepto que se sostiene en la lección 24 de 4º grado, “Dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ ”, sin embargo en esta última lección se aumenta el nivel de conocimientos de los alumnos, dado que se propone de manera formal, y a través tanto de una representación simbólica como gráfica, un procedimiento canónico para obtener fracciones equivalentes.



Complementario a lo anterior, en la lección 25, también de 4º grado, se avanza un poco más, ahora no sólo a la equivalencia una a una de las fracciones, sino a otro aspecto que es fundamental en la comprensión matemática, la determinación de expresiones matemáticas equivalentes: $\frac{3}{4}$ puede expresarse como $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ó $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ó $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, entre otras.

Otro saber matemático presente, es la suma de fracciones, tanto a partir de la resolución de problemas como a nivel puramente simbólico (lección 16 de 3º grado); este mismo conocimiento es recuperado para establecer la igualdad entre ambos miembros de una expresión, con lo cual se llega a la comprensión de las “expresiones matemáticas equivalentes” (lección 25 de 4º grado).

Ahora bien, más allá de analizar cada aspecto contenido en las diferentes lecciones, hago un alto en esta parte para volver a resaltar que la intencionalidad planteada por el profesor logra construir esa representación en los estudiantes; la enunciaríamos en los siguientes términos: como profesores debemos tener clara la progresión didáctica de los diferentes contenidos, tanto al interior de un grado escolar, como en la articulación con grados sucesivos. Esto lo ha ido resaltando el profesor en diferentes sesiones de clase, incluso como una necesidad para la preparación del medio (como enunciamos en apartados anteriores) o también como elemento básico en la memoria didáctica, usando el concepto

de manera flexible, dado que en sentido estricto, ésta se refiere a la recuperación de experiencias compartidas entre profesor y estudiantes, sin embargo, cuando me refiero a la flexibilidad del concepto, hago alusión a que, al reconocer los estudiantes para profesor, las articulaciones entre diferentes lecciones al interior de un grado escolar, como entre diferentes grados, estarán en mejores condiciones de organizar sus planes de clase y por ende, de realizar una gestión didáctica significativa.

Un aspecto más merece ser resaltado, en la construcción de representaciones sociales la forma es contenido, y el análisis de los libros de texto, en tanto “discurso” oficial, refleja la representación social sobre las matemáticas y el enfoque de enseñanza que la institución diseñadora desea que sea perpetuado, en tal sentido, congruente con el enfoque de resolución de problemas, se aprecia su articulación con situaciones cotidianas pero sin quedarse en ellas, se avanza hacia la formalización de un saber [o en términos de la Teoría de las situaciones didácticas, hacia la institucionalización; Cfr. Brousseau G. , 2007].

Los problemas matemáticos planteados son un avance hacia lo que (D’Àmore, 2006) denomina situaciones problema, las cuales se manifiestan congruentes con el enfoque oficial del plan de estudios 2011, un enfoque basado en el logro de competencias; los ejemplos recuperados lo evidencian:

* ¿Cuánta crema juntarás si tu mamá te pide que compres $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ de crema? _____

* En el mercado compraste $1\frac{1}{2}$ litro de leche para preparar un pastel y te obsequiaron $\frac{1}{2}$ litro más. ¿Qué cantidad de leche llevaste a casa? _____

* En la tienda de don Enrique venden crema a granel. Patricia desea comprar 2 litros, pero sólo tiene recipientes de $\frac{1}{4}$ y de $\frac{1}{2}$ litro. Escriban dos maneras diferentes en que Patricia puede llevar la crema que compró: _____ y _____

* Cecilia fue al mercado con Alberto y Antonio a comprar $1\frac{1}{2}$ kilogramo de fresas. El vendedor ya tenía preparadas bolsas de $1, \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ de kilogramo. ¿Cómo distribuyó el vendedor las bolsas para que los tres cargaran el mismo peso? _____

* ¿De qué otra manera el vendedor podría haber acomodado las fresas en las bolsas para que los tres cargaran de manera equitativa? _____

* En el mercado se encontraron con Alicia, que podía ayudarles a cargar las fresas, así que Cecilia decidió comprar más para completar 3 kilogramos. Si se dividen las fresas en partes iguales, ¿cuánto carga cada uno? _____

* Dibujen las bolsas de fresas de cada uno y escriban cuánto pesa cada bolsa.

La tía de Felipe tiene un melón en su frutero. Cuando Ana y Mariana fueron a visitarla, lo repartió entre las dos en partes iguales. Como después llegaron Antonio y Felipe, les pidió que lo repartieran en partes iguales otra vez.

* ¿Qué cantidad de melón tenían Ana y Mariana antes de que llegaran los niños? _____

* Después de la segunda repartición, ¿con cuánto se quedó cada quien? _____

Ana dice que cada uno recibió la mitad de la mitad del melón, mientras que Felipe asegura que cada quien recibió una cuarta parte.

* ¿Es correcta la afirmación de Felipe? _____

* ¿Por qué? _____

* ¿Y lo que dijo Ana? _____

* ¿Por qué? _____

El profesor de Matemáticas pidió a sus alumnos que buscaran cartulina de reúso suficiente para que cada uno formara el equivalente a $\frac{1}{2}$ pliego de cartulina. Óscar llevó dos piezas de cartulina de $\frac{1}{4}$ de pliego, Liliana tres de $\frac{1}{6}$, Gabriela cuatro de $\frac{1}{8}$ y Felipe cinco de $\frac{1}{10}$. ¿Cuántas porciones de $\frac{1}{12}$ de pliego de cartulina llevó Jazmín para formar $\frac{1}{2}$ pliego? _____



El maestro de Matemáticas llevó al salón de clase 6 melones de tamaño y peso similares. Acomodó en filas a sus alumnos y a cada una le entregó un melón. En la primera fila sólo había 2 alumnos; en la segunda, 4; en la tercera, 3; en la cuarta, 6; en la quinta, 8 y en la sexta, 5. El profesor pidió que cada melón se repartiera en partes iguales entre los alumnos de cada fila.

- ❖ ¿En cuál de las filas los alumnos recibieron una porción mayor de melón?
- ❖ En una de las filas cada alumno recibió la mitad de un melón. ¿De qué fila se trata?
- ❖ ¿Qué fracción de un melón le correspondió a los alumnos de la sexta fila?
- ❖ Roberto afirma que entre más alumnos haya en la fila, menor porción de melón recibirán. ¿Estás de acuerdo con él? ¿Por qué?

Como apreciamos, el contexto “cotidiano” se resalta en todos los problemas y es desde éste que se dota de significado a los saberes matemáticos, es evidente que la representación social que se genera es esa: el planteamiento de problemas matemáticos debe recuperar el contexto cotidiano; decíamos en líneas anteriores que se aprecia el planteamiento de “situaciones problema” entendidas como *“situación de aprendizaje concebida de manera tal que los estudiantes no puedan resolver la cuestión por simple repetición o aplicación de conocimientos o competencias adquiridas, sino que se necesita la formulación de nuevas hipótesis”* (D’Àmore, 2006, pág. 295) En este sentido, planteamientos como “escriban dos maneras diferentes...”, “de qué otra manera...” o “¿estás de acuerdo con...?”, reflejan un papel activo del sujeto resolutor de los problemas y a su vez le obligan a la “formulación de nuevas hipótesis” lo cual caracteriza a las situaciones problema.

En esencia, si los estudiantes logran interiorizar estos planteamientos, necesariamente tendrán que conflictuar, o bien revisar sus experiencias previas como resolutores de problemas y ante ello el libro de texto, al transmitir esta representación, se convierte en una potencial fuente para la destransposición de saberes matemáticos y didácticos, sobre todo porque no es lo mismo que los estudiantes revisen el libro de texto como aprendices (en su condición de alumnos), que como aquellos que van a formar a otros aprendices, es decir, el análisis de los libros de texto debe incorporar un análisis

sobre el saber matemático, sin embargo, en el análisis de los libros de texto en las clases analizadas no se planteó este propósito, motivo por lo cual no abundaremos al respecto.

III.2.1.2.2.2. Formas de iniciar el tratamiento del tema de las fracciones, desde los libros de texto: diferentes épocas, diferentes contextos ¿diferentes representaciones?

En el análisis de los libros de texto, en la 6ª y 7ª sesión (son consecutivas, el mismo día) apreciamos la intención de hacer un comparativo entre un par de actividades de los libros de 3º y 4º grado de la época de 1960 y la primer lección de un libro de texto francés.

En el caso de la actividad de 3º grado del libro mexicano de 1960, también es la primer actividad donde se trabajan las fracciones y si recordamos, en la 4ª sesión se analizó también la primer lección que plantea el libro de texto de 3º grado del plan 2011, en México, en tal sentido, esto nos brinda una buena oportunidad para hacer un ejercicio comparativo entre los tres materiales⁶⁴, con la intención de apreciar cuáles son las representaciones que sobre las fracciones transmiten cada uno de ellos: como saber matemático y desde su enfoque de enseñanza.

En primer lugar vamos viendo cómo se plantea cada una de las actividades; para iniciar el análisis del libro de texto de 1960, se plantea de la siguiente manera:

Mo. (...) bien ahora voy a pedirles que nos regresemos en el tiempo, vamos a regresar a una época, a la época prehistórica, jóvenes a alguno de ustedes les resulta familiar estos libros, me refiero si los han visto en sus casas, pongan atención jóvenes en nuestro país se creó la comisión, la comisión se llama CONALITEG

Aa. Comisión Federal

Mo. Esta se creó en 1959, que es esto

Alumnos.- Comisión Nacional de Libros de texto gratuitos

Mo. Se creó esta Comisión en 1959, en 1960 aparecieron estos libros, de tal manera que son los primeros libros de texto gratuito que se hicieron, y nosotros vamos a hacer un comparativo, vamos analizar dos cosas, les traigo la primer actividad que contienen estos libros en tercer grado sobre las fracciones y les traigo la primer actividad de cuarto grado sobre las fracciones, lo que quiero es que adviertan la diferencia, cómo hemos evolucionado ahora, cuál es la noción de cómo se plantean las fracciones, vamos a ver esto y en un segundo momento mientras ustedes hacen esto, quiero que las lean, que le pongan atención, que revisen cómo se plantea la actividad, qué aprenden los niños, qué les demandan, eso, si, mientras ustedes hacen eso, yo voy a anotar unas frases en el pizarrón, porque luego vamos a analizar una lección, de las primeras lecciones que les ponen en Francia; ya vimos nuestros libros nacionales, ya vimos los libros

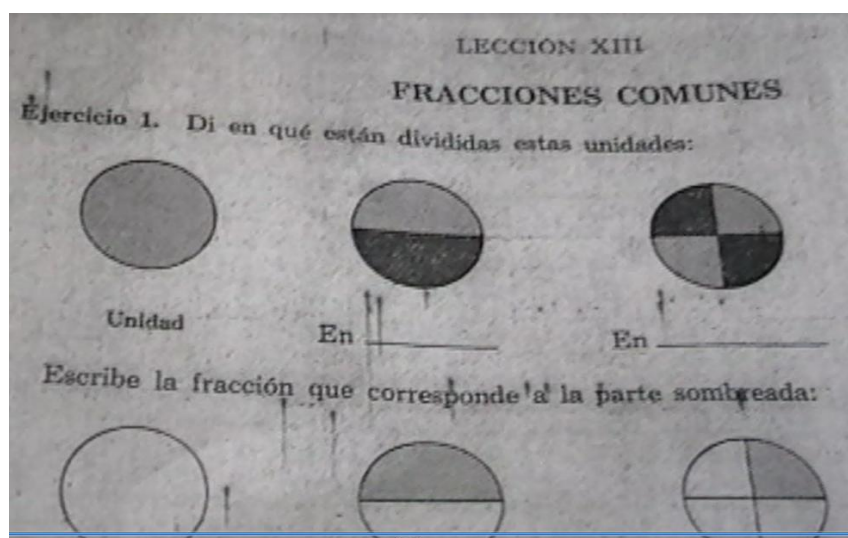
⁶⁴ Este ejercicio comparativo se planteó, por el profesor, sólo en el caso del libro de texto de 1960 y el libro francés.

históricos, ya vimos los textos vigentes, vamos a hacer un comparativo nada más con una lección de Francia. (Mientras reparte las hojas) Uno cada quien, estos son los de tercero; miren les van a dar dos hojitas, una no está contestada, es la de tercero, una si está contestada, la semana pasada estuve en los, en esa comisión y no me pudieron prestar un libro que no estuviera contestado, de tal manera que si les voy a dar uno ya contestado

Aa. ¿es de cuarto grado profe?

Mo. Si, la que está contestada es de cuarto, la que les está dando ahora, es una de tercero y una de cuarto, les reparten la hojita y vamos a hacer un ejercicio (CP 6)

Los ejercicios planteados en el libro de 3º grado, de México son los siguientes:



En el fragmento de registro, cuando el profesor se refiere a “regresar a la época prehistórica” me parece que debe leerse con la ironía que se requiere para contextualizar su análisis con jóvenes, sin embargo también puede denotar la intencionalidad de contextualizar una producción escrita anterior a las discusiones más formales en el contexto internacional respecto a la Didáctica de las matemáticas; recordemos que es la década de los 70’s la que marca una época de discusiones más sistemáticas sobre la Didáctica de las matemáticas.

En esta consigna también se plantea el sentido de la actividad, en los siguientes términos: *“lo que quiero es que adviertan la diferencia, cómo hemos evolucionado ahora, cuál es la noción de cómo se plantean las fracciones”, (...), quiero que las lean, que le pongan atención, que revisen cómo se plantea la actividad, qué aprenden los niños, qué les demandan (CP 6) y anticipa que van a hacer un comparativo con la lección del libro de Francia.*

Para poder atender esta consigna, los estudiantes tendrán que recordar el análisis que hicieron la sesión anterior y a partir de ahí, los indicadores que plantea en la consigna, de una u otra forma incitan a los estudiantes a profundizar en el análisis, está presente la

idea de cambio, pero también está presente la idea de que se advierta cuál es el saber matemático y cómo se plantea, de la misma manera que se recupera el papel de los niños, es decir, hay una clara intencionalidad del profesor, porque los estudiantes revisen las lecciones desde la óptica de enseñantes, ya no sólo como alumnos.

Esta afirmación que hago se sostiene porque, aunado a que se les da tiempo para que exploren la lección y durante éste los estudiantes aprovechan para ir resolviendo las actividades, en determinado momento el profesor, hace una regulación a la actividad y reorienta el sentido de la misma, con lo cual se confirma la idea de que, más que posicionarse como alumnos resolviéndolas, se posicionen como profesores, analizándolas para proponer alternativas y formarse un juicio comparativo; el siguiente fragmento de registro refleja lo aquí señalado:

Mo. *A ver jóvenes la pregunta no es cómo resolvieron cada ejercicio, eso no lo vamos a ir explorando, la pregunta es ¿qué piensan de esta manera de presentarles a los niños?, ésta que vieron aquí es la primera lección con la que los niños se van a encontrar, de fracciones, ¿qué piensan ustedes de esta actividad?, que esto no es como lo hemos visto nosotros en los libros de texto, en los actuales, si, aquí digamos ¿hay un contexto de un problema para esto?*

Ao. no

Mo. *¿Cuál es el problema cotidiano que tienen los niños con lo que se puede asociar esta actividad?*

Ao. con los pasteles

Ao. Lo presentas directo, lo presentas directo,

Mo. *Directo de las fracciones, verdad, y lo manda directo al asunto de, aquí hemos visto varios significados que tienen las fracciones, aquí al significado de una parte de un todo, esta idea que está aquí es lo que mencionaban alguno de ustedes en una de las sesiones, es la idea de quebrar, esto lo que está presente aquí, es la idea de las fracciones como un quebrado, es decir de una parte de un todo no es otro contexto tan espeso que veíamos hace rato en las fracciones como números, como una razón o como un cociente, aquí es mucho más sencillo, sí, bueno ¿qué les parecen las actividades que están ahí?*

Aa. Muy fácil

Mo. *Así como ustedes están muy entretenidos iluminando, así también los niños están,*

Ao. Profe pero

Mo. No si acabaron

Ao. Pero si es razonamiento,

Mo. Espérenme tantito, a ver H.

H.- No llevan razonamiento estas porque ya están divididas (CP 7)

Varias cosas sobresalen del registro, en primer lugar, tal y como lo hemos visto en diferentes ocasiones y también en diferentes clases, el profesor les devuelve una responsabilidad profesional, para este caso, la responsabilidad de analizar los libros de texto; las preguntas *¿qué piensan de esta manera de presentarles a los niños? Y ¿qué*

piensan ustedes de esta actividad?, los ubica como sujetos reflexivos y les está diciendo la importancia que tiene que ellos tomen un posicionamiento respecto a lo que plantean los materiales curriculares.

Ahora bien, el poder hacer una buena reflexión y tomar un posicionamiento claro al respecto está mediado por, como mínimo, dos circunstancias: sus conocimientos matemáticos y didácticos que tienen y el conocimiento completo de la lección que se analiza; por el lado del conocimiento matemático y didáctico, al ser ésta la 7ª sesión de clase, ya han revisado (y recordado) gran parte de los conocimientos sobre fracciones que se juzga conveniente para el profesor de educación primaria [desde la óptica del Plan 1997 (SEP, 2002)], de igual manera los diferentes significados y contextos en los que aparece la fracción (aunque se amplía esto en la 8ª y 9ª sesiones), por ello es que el profesor anticipa que lo que está presente en la lección, es el significado de parte – todo y la idea de las fracciones como un quebrado⁶⁵, en tanto es un conocimiento compartido con los estudiantes; en cuanto al conocimiento completo de la lección que se analiza, el profesor ya había anticipado la dificultad para conseguir estos materiales, sobre todo por la fecha en que se editaron, sin embargo, hay un planteamiento que merece la pena recuperar: ¿hay un contexto de un problema para esto?; Ao. no; Mo. ¿Cuál es el problema cotidiano que tienen los niños con lo que se puede asociar esta actividad?, así como está planteada la actividad esta es la representación que se genera: en los libros de matemáticas de 1960 no hay un contexto de un problema cotidiano con el cual se pueden asociar los contenidos de matemáticas; representación que en este caso es fortalecida por los comentarios del profesor:

Mo. 3 pasteles entre 3 niños, pareciera ser que esta actividad comparada con este ejercicio de iluminar ¿cómo lo ven?, no seamos exigentes, yo lo que les digo es que quisiera subrayar la idea de Edgar, es que esto fue hace 50 años, si, la idea es que tendrían que haber evolucionado, y en esta idea todavía no estaba presente que los problemas deben ser la base para el aprendizaje de las matemáticas, aquí no les puse cuál fue la última actividad, pero la última actividad son problemas, si, entonces primero que hagan ese tipo de ejercicios y los problemas, esos ya vienen después, si, lo que quiero es que ustedes identifiquen esto, y aquí nosotros hemos planteado lo contrario, hay que ponerles un problema, dividan 3 pasteles entre 2 niños, si y esa es una primer actividad de las, podría ser una muy buena primera actividad de las fracciones. (CP 7)

⁶⁵ Muy probablemente la memoria didáctica apresura los juicios que se hacen sobre la lección, por parte del profesor; en este caso haya sido muy interesante esperar a que fueran los alumnos los que identificaran, mediante preguntas, cuál es el significado de la fracción que está presente en las lecciones.

Efectivamente, parece ser que oficialmente el planteamiento y resolución de problemas no era el enfoque de enseñanza de las matemáticas en esa época, sin embargo, haciendo una revisión más amplia de los materiales para el alumno, encontramos que, complementario al “Cuaderno de trabajo” (de donde se obtiene esta actividad que analizamos), se editó “Mi libro de tercer año. Aritmética y Geometría” (SEP, 1964) y en éste sí aparece un contexto cotidiano de surgimiento de la fracción, tal y como podemos ver en las siguientes imágenes:

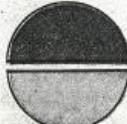
LECCIÓN XIII
FRACCIONES COMUNES
El Día del Niño

La maestra preparó una merienda para obsequiar a todos sus alumnos. Luego nos dijo que este día venía a ser algo así como el cumpleaños de cada uno de nosotros. Adornó el salón con rehiletes, cadenas de papel de China y banderitas caladas de todos colores.

En el centro de la mesa puso un gran pastel. Lo partió Tito, que es el alumno más pequeño. ¡Todos aplaudimos muy contentos! La mitad del pastel era de chocolate, y la otra mitad, de fresa.



Al partir el pastel a la mitad, resultan dos partes iguales:



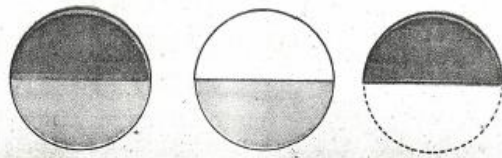
Dos mitades = $\frac{2}{2}$



Una mitad = $\frac{1}{2}$



Una mitad = $\frac{1}{2}$



$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Si dividimos dos manzanas por la mitad, resultan cuatro mitades.

Si partimos cinco jaletinas a la mitad, el resultado será



$$\frac{10}{2} = \frac{\text{diez}}{\text{medios}}$$

Fíjate que para expresar la mitad siempre se escribe el número 2 debajo de la línea que indica división

$$\frac{\quad}{2}$$

Ejemplos:

$\frac{\quad}{2}$
 $\frac{\quad}{2}$
 $\frac{\quad}{2}$
 $\frac{\quad}{2}$

Este número se llama **denominador** y nos indica en cuántas partes se ha dividido la unidad.

$\frac{1}{2}$
 $\frac{4}{2}$
 $\frac{5}{2}$
 $\frac{7}{2}$
 $\frac{3}{2}$

El número que va encima de la raya se llama **numerador** y expresa el número de partes que se toman de la unidad.

$\frac{5}{2}$
 5 numerador
 2 denominador

$\frac{5}{2}$
 5 cinco
 2 medios

FUENTE: (SEP, 1964, págs. 49 - 50)

Está presente el contexto de reparto de pastel, sin embargo no es difícil darnos cuenta, al analizar toda la lección, que el problema sólo aparece como una justificación de inicio, no como el centro de la reflexión para dar sentido a la fracción, rápidamente se pasa a la parte abstracta de dividir cualquier “unidad”, sin hacer referencia a ningún objeto concreto, sólo usando la representación icónica (predominantemente círculos divididos en “n” partes; en el caso de 3º grado, el rango de fracciones va de medios a décimos, en la siguiente secuencia: primero se dividen en medios, cuartos y octavos, luego tercios y sextos, finalmente quintos y décimos, para dar paso a la lección sobre las fracciones

decimales) y considerando a la fracción en la relación parte – todo, tal y como se resaltó en la clase que se analiza.

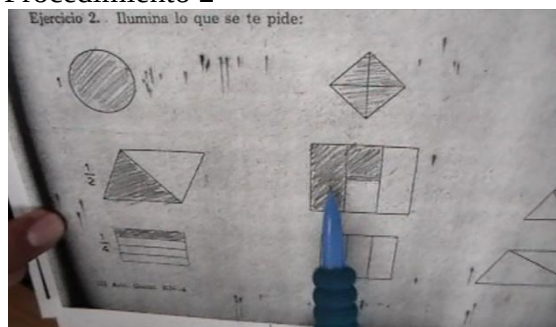
Decía en párrafos anteriores que un elemento de juicio para poder profundizar en el análisis es el conocimiento completo de los materiales que se analizan y las articulaciones que entre ellos se pueden dar, en este caso los estudiantes no revisaron estos materiales y ante ello se fortalece la representación compartida verbalmente en el grupo.

En el registro también se resalta la importancia que tiene para el aprendizaje de los alumnos el “razonamiento”, es decir, pareciera ser que de un primer análisis se resalta que en las actividades del libro de 1960 no se fomenta, dado que a decir de uno de los estudiantes, las actividades que están analizando *“No lleva razonamiento éstas porque ya están divididas”*, refiriéndose al hecho de que ya están divididas las figuras que les plantean a los niños y por ello no se hace necesario razonar para dar respuesta a los ejercicios; sin embargo, al observar lo que pasó en clase podemos apreciar que en el *“Ejercicio 2. Ilumina lo que se te pide”*, aparecieron como mínimo cuatro procedimientos diferentes para representar la fracción $\frac{1}{2}$, cuando la figura sobre la que había que hacerlo estaba dividida previamente en tercios:

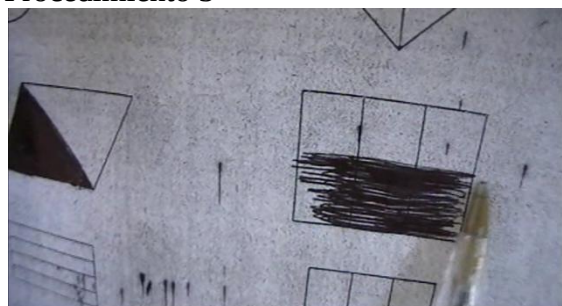
Procedimiento 1



Procedimiento 2



Procedimiento 3



Procedimiento 4



Resaltamos este ejercicio porque guarda mucha similitud con un principio que sigue presente en las propuestas actuales (Cfr. Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila,

1999), para generar reflexiones y el razonamiento en los alumnos, ante ejercicios donde tienen que colorear una fracción, es conveniente no darles la fracción dividida en las partes exactas sobre las que van a representar, y este ejercicio es precisamente lo que hace: les da un rectángulo dividido en tercios y les pide que representen $\frac{1}{2}$; evidentemente esta forma de plantearlo le demanda a los niños la puesta en práctica de diferentes conocimientos, no sólo la necesidad de colorear una de las dos partes en que se puede dividir la figura y es en la puesta en práctica de sus conocimientos donde se hace necesario el razonamiento.

En las cuatro producciones de los estudiantes, podemos ver tres tipos de razonamientos; las producciones 1 y 2 contienen el mismo razonamiento y éste se discutió en el salón de clase

Ao.- ¿Cómo sabes que aquí es $\frac{1}{2}$? (señalando el procedimiento 1)

Aa. ¿Aquí?

Ao. Si

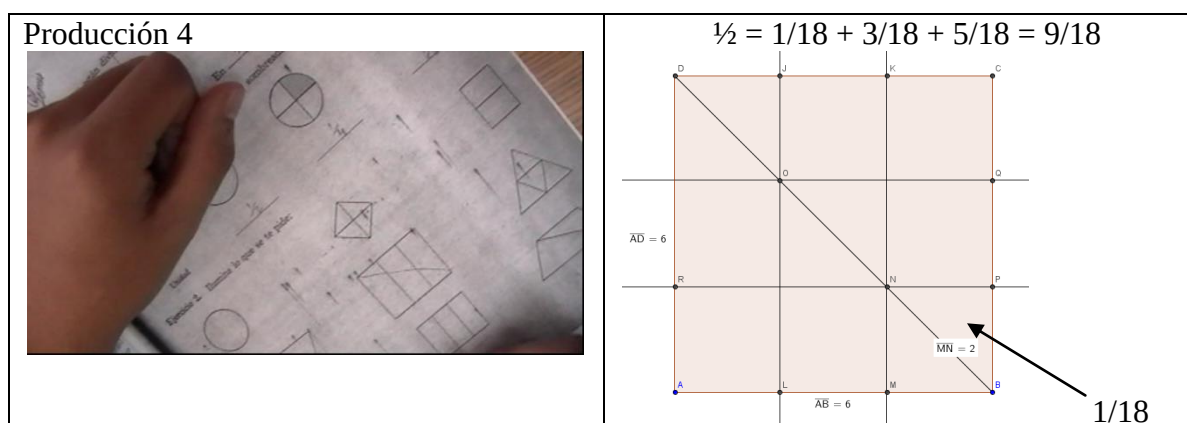
Aa. Porque aquí es la mitad, está dividida en tres tercios, entonces $\frac{1}{2}$ sería $\frac{1}{3}$ y la mitad de $\frac{1}{3}$ (CP 7)

Es decir, $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + (\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$; como vemos se aplica la equivalencia de fracciones (o en un nivel más formal la multiplicación de fracciones) para saber a cuánto equivale la mitad de un tercio y eso se aleja de la aplicación mecánica del ejercicio, consistente en sólo colorear 1 de las dos partes en que ya está dividida la figura. En realidad parece que el estudiante haya tomado uno de los tercios en su mitad coloreada, quedando en contraposición otro tercio en blanco, y luego ha coloreado la mitad del tercio restante. Es decir, podríamos hablar de la siguiente operación: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3}$, que es previa a la escrita anteriormente, quedando $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$.

En la producción 3, ante la demanda de iluminar $\frac{1}{2}$, pareciera que no se hace necesaria la división previa en tercios y se procede a dividir la figura por la mitad de manera horizontal; como el ejercicio no solicita que se represente de manera simbólica el resultado, hasta ahí queda resuelto, sin embargo, en términos del análisis de la actividad en el contexto de la formación de profesores, sí es posible reflexionar sobre ello, ¿cuál es la representación simbólica de la respuesta? Lo cual nos llevaría a que $\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$. De nueva cuenta la habilidad para dividir en mitades hace transparente la división en tercios, actuando el alumno como si la figura no estuviera previamente dividida.

Finalmente, la producción 4 tampoco considera las divisiones previas y divide en medios pero en forma diagonal, la pregunta es ¿cuál es la representación simbólica del resultado, considerando la división previa en tercios? ¿Cómo verificar empíricamente que cada parte es $\frac{1}{2}$? Aquí surge un campo interesante para la reflexión y eventual destransposición de saberes, en tanto habitualmente no se hacen este tipo de repartos en el salón de clases. La verificación empírica se resuelve por comparación de áreas, pero la representación simbólica, considerando la división previa en tercios se complejiza de tal manera que escaparía al trabajo con y a los conocimientos de los alumnos de tercer grado de primaria y con mayor razón en los inicios del tema de fracciones. Pero, si reformulamos la pregunta, en la reflexión con los profesores en formación, y solicitamos que digan cuál es la representación simbólica y la interpretación de las nuevas fracciones implicadas ¿cuáles conocimientos tendrán que resignificar? ¿Seguirá quedando la idea de que el ejercicio no implica razonamiento?

Una primera interpretación de la fracción resultante puede ser la siguiente: al trazar la diagonal en el rectángulo, previamente dividido en 3 partes equitativas, la longitud de cada una de las líneas que divide las tres partes queda a su vez dividida en una razón de 1:3, en tal sentido, si ahora trazamos líneas auxiliares, perpendiculares a las dos primeras pero que intersecten con el punto de cruce entre éstas y la diagonal, queda dividido el rectángulo en 9 partes equitativas, con lo cual vemos que cada triángulo construido representa $\frac{1}{18}$ del rectángulo unidad. De acuerdo a este procedimiento, $\frac{1}{2} = \frac{1}{18} + \frac{3}{18} + \frac{5}{18} = \frac{9}{18}$



Como apreciamos, el problema nos remite a la fracción como partes de partes y su expresión simbólica ya no es tan simple como sólo estar iluminando lo que se indica; por supuesto que con ello no queremos decir que esto se trabaje con los niños, pero sí hay que

ser enfáticos en cuanto a las posibilidades que brinda para profundizar en las reflexiones con los estudiantes y generar la recuperación de diferentes saberes matemáticos que se interrelacionan para comprender totalmente el problema, sobre todo si, como sospechamos, puede ser que el estudiante simplemente haya ignorado la división previa en tercios y usado la diagonal como uno de los múltiples segmentos posibles que dividen un rectángulo en dos partes de igual área.

A pesar de ello, la crítica que se plantea en la clase del profesor que analizamos cobra vigencia en tanto no sabemos qué tanto pudieron profundizar los profesores de primaria al trabajar este tipo de actividades, muy probablemente se quedaron sólo en el trabajo con el procedimiento 3 y bajo una estrategia didáctica donde se conduce paso a paso el proceso de resolución.

Ahora bien, recordemos que esta actividad se plantea de manera comparativa con la siguiente lección de Francia

Libro del alumno
Libro del profesor

53 CALCUL MENTAL
Le compte est bon.

Fractions au quotidien

Objectifs : évoquer des situations quotidiennes dans lesquelles des fractions sont utilisées.
Recenser le vocabulaire (quart, tiers, moitié).

7 DÉCOUVERTE

Lella, Théo, Qwang et Alice veulent se partager équitablement cette plaque de chocolat.

1. Propose plusieurs manières de couper cette plaque de chocolat pour donner une part égale à chaque enfant.
Représente ces partages.

2. Combien de carrés de chocolat y a-t-il dans chaque part ?

3. Comment couper la même plaque de chocolat pour la partager équitablement entre trois enfants ?
Dessine plusieurs manières de la couper.
Vérifie en comptant le nombre de carrés de chaque part.

Dans le partage en 4, chaque enfant a « le quart » de la plaque de chocolat.
« Un quart » est une fraction. On l'écrit $\frac{1}{4}$.

Dans le partage en 3, chaque part représente « le tiers » de la plaque.
« Un tiers » est une fraction. On l'écrit $\frac{1}{3}$.

7 EXERCICES

1. Une heure c'est 60 minutes.
Combien de minutes y a-t-il dans un quart d'heure ?
Dessine un cadran d'horloge, puis représente $\frac{1}{4}$ d'heure sur ce cadran.

2. Combien de minutes y a-t-il dans une demi-heure ?
Dessine un cadran d'horloge, puis représente $\frac{1}{2}$ heure sur ce cadran.

3. a. Combien de minutes y a-t-il dans trois quarts d'heure ?
Dessine un cadran d'horloge, puis représente $\frac{3}{4}$ d'heure sur ce cadran.
b. Combien de minutes y a-t-il dans $1\text{ h } \frac{3}{4}$?

« Trois quarts » est une fraction qui s'écrit $\frac{3}{4}$.
C'est trois fois un quart.

136 • cent trente-six

4. Quelle phrase correspond à chaque partage ?

1. La part jaune, c'est le quart de la tarte.
2. La part jaune, c'est le tiers de la tarte.
3. La part jaune, c'est trois quarts de la tarte.

5. Lella a 36 timbres. Qwang en a la moitié.
Combien de timbres Qwang a-t-il ?

6. Alice a 44 timbres. Théo en a le quart.
Combien de timbres Théo a-t-il ?

7. Ont-ils raison ?

J'ai 42 billes. J'en ai trois fois plus que toi.
J'ai 14 billes. J'ai le tiers de ce que tu as.

8. a. Quel est le quart de 28 ?
b. Quels sont les trois quarts de 28 ?
c. Quelle est la moitié de 28 ?

9. a. Quelle est la moitié de 80 ?
b. Quels sont les deux quarts de 80 ?
c. Que remarques-tu ?

10. Alice veut découper ce ruban en 6 morceaux de même longueur.
Aide-la à faire ce partage, dessine le ruban et chaque morceau.
Quelle fraction du ruban chaque morceau représente-t-il ?

Remue-ménages

Quelle fraction de tout le dessin représente la partie orange ?

cent trente-sept • 137

ÉTAPE 53

Fractions au quotidien

MANUEL P. 136-137

Objectifs

- Évoquer des situations quotidiennes dans lesquelles les fractions sont utilisées.
- Recenser le vocabulaire connu : quart, tiers, moitié.

Pourquoi cette étape ?

Les fractions sont utilisées dans des activités de la vie de tous les jours. Elles fonctionnent comme des indicateurs de partage équitable.

Cette étape a pour but de faire le point sur les savoirs que les élèves ont construits le plus souvent implicitement et en dehors de l'école et que l'on désigne en didactique par l'expression « savoirs déjà là ».

1 SÉANCE
MATÉRIEL • Par élève : des photocopies avec 5 ou 6 schémas de plaques de chocolat dans un format agrandi par rapport à celui du manuel pour qu'on puisse directement les afficher.

Calcul mental

Le compte est bon. Avec un seul tirage (ex. : 7, 9, 5, 4) et différents nombres-cibles donnés successivement (ex. : 36, 56, 73, 38, 149) ; pour chaque nombre-cible, faire écrire les calculs avec les parenthèses.

Voir étape 51.

Découverte

Lecture silencieuse de l'ensemble de la découverte.

■ Question 1
 Cette question a pour but de s'assurer que les élèves comprennent ce qu'est un partage équitable.

Travail individuel. Distribuer aux élèves des feuilles photocopiées sur lesquelles figurent plusieurs schémas de la plaque de chocolat.

Leur demander de prévoir un partage de la plaque de chocolat et de le représenter sur un des schémas, puis un nouveau partage à représenter sur le schéma suivant, etc.

Aide possible : les élèves peuvent faire les découpages effectifs des parts (voir ci-dessous).

Correction collective : des élèves dessinent leurs partages. Les laisser affichés sur le tableau.

Certains associent partage équitable et partage en surfaces superposables. D'autres peuvent déjà penser le morceau donné à chacun non comme un tout, mais comme un ensemble de « carrés » de chocolat (le mot est utilisé dans la vie courante bien que cela soit rarement des carrés).

Exemples de découpage






■ Question 2
 Travail collectif.

Procédures observées

- Certains élèves dénombrent, dans chaque partage qu'ils ont effectué, les « carrés » de chocolat.
- Un plus grand nombre d'élèves dépassent le support géométrique de la plaque pour l'émulser comme un ensemble de « carrés » ; ils disent qu'il y a 24 « carrés » de chocolat visibles sur la plaque, donc chaque enfant recevra 6 « carrés ».

Cette question permet donc de s'assurer collectivement que, pour tous les partages équitables, le nombre de « carrés » de chocolat est le même.

■ Question 3
 C'est une reprise du travail des deux premières questions avec un nouveau partage.

Exercices

Déroulement habituel (voir p. 54).

• **Exercices 1, 2 et 3**
 Ils permettent de réactiver les connaissances des élèves relatives à la lecture de l'heure sur un cadran à aiguilles. La représentation qui est demandée s'appuie sur un découpage fractionnaire de nature géométrique du cercle.

Réponse à la question 3b : 105 min.

• **Exercices 4, 5, 6, 7, 8**
 Ils traitent de l'usage des termes relatifs aux fractions dans des situations familières : une situation géométrique pour l'exercice 4 et des situations numériques pour les exercices 5, 6, 7 et 8.

ÉTAPE PAR ÉTAPE • ÉTAPE 53 | 165

CONCLURE AVEC LES ÉLÈVES

Longue l'on partage équitablement une quantité, on utilise des fractions pour dire comment on a partagé.

On pourra faire écrire ce que dit le furet dans les bulles : « un quart » est une fraction que l'on écrit $\frac{1}{4}$; « un tiers » est une fraction que l'on écrit $\frac{1}{3}$; « trois quarts » est une fraction que l'on écrit $\frac{3}{4}$; on pourra ajouter $\frac{1}{2}$ dont il est question dans l'exercice 2.

• **REMUE-MÉNAGES**
 Il annonce des activités que l'on retrouvera à l'étape 61 et peut faire l'objet d'une activité collective de fin de séance.

FUENTE: (Peltier, Briand, Ngono, & Vergnes, 2009, págs. 165-166)

A diferencia del texto mexicano, en éste por razones obvias se hace una “devolución dosificada” de las actividades, de tal manera que las van revisando a la par que lo traducen; la consigna fue la siguiente:

Mo. Vamos viendo, a ver qué es lo que dice esto, sí, intenten ver ahí los dibujitos cuando menos y ahorita les voy a ayudar con la otra parte, para que entiendan de lo que se trata, si, primero la 53 y luego la otra, usen sus estrategias de lectura, a partir de los dibujitos y a partir de algunas palabras que se dicen que son transparentes, este, vamos ir intentando comprender el significado,

E.- ¿En qué grado es?, ¿tercero?

Mo. Ha buena pregunta, ahorita lo vemos

Alumnos tratando de traducir el texto

Ao. Profe ¿por qué no lo lee usted?

Mo. Si, nada más que quiero que ustedes vean un poco por los dibujitos

E.- Profe como que el diseño del libro es parecido al que tienen ahorita los libros mexicanos no, el número de la lección, el título que maneja, el nombre y el objetivo de la lección

Mo. si son un poco similares, ellos han trabajado muy bien el asunto de las fracciones, pónganse listos, vamos a intentar ver el seguimiento, si, este asunto, para que vean que este asunto de ponerle problemas a los niños y que repartan pasteles o barras de chocolate, es un asunto que está más allá de nuestras fronteras, si, ésta es la lección, la lección número 53, y es la primer lección que se

enfrenta, que cursan los niños para aprender las fracciones, es la primera, ahora preguntaba aquí Edgar ¿de qué grado es esta lección?, en Francia, la educación que equivale a la educación primaria, lo que están en primer año, se llama así *cours preparatoire*, equivale a primero; *cours elementaire 1*, el segundo; *cours elementaire 2*, (du) tercero, y esta es del *cours Mayen* que es 4º grado y *cours Mayen* (du), que equivale a 5º grado, hasta aquí se acaba la educación primaria, lo que sigue es la secundaria, pero lo equivalente el *college*, entonces aquí con nosotros, los niños que cursan esta lección, equivale más o menos por la edad, niños de 4º grado, si y esa es una diferencia, de que grado es, pues allá es del *cours Moyen*, aquí con nosotros es el equivalente a 4º grado, entonces ahora sí, dice mero arriba ¿qué le entienden ustedes fracción o cotidian?

Alumnos.-Cotidianas

Mo.Cotidianas o en la cotidianidad, si luego viene un “objective”, dice “evoquer”... (CP 7)

Como primer punto de análisis, se reconocen similitudes y diferencias, por un lado la reflexión sobre las similitudes en el diseño, que hace uno de los estudiantes, denota que conocen los materiales, de igual manera, de manera explícita se reconocen las semejanzas en la utilización de los contextos en los cuales aparecen las fracciones, cuando el profesor afirma: “para que vean que este asunto de ponerle problemas a los niños y que repartan pasteles o barras de chocolate, es un asunto que está más allá de nuestras fronteras”; si vamos más a profundidad, me parece que esta misma frase denota las coincidencias que se van dando en términos de la influencia teórica de la corriente francesa en el diseño de los materiales mexicanos y al mismo tiempo una representación social compartida y transmitida a través de los intercambios internacionales de los diferentes grupos de investigación.

Una diferencia que sí nos parece importante es que, en México las fracciones comienzan a enseñarse en 3º grado, mientras que en Francia, según la “tabla Equivalencias de grados escolares”, se inicia hasta el 4º grado; pareciera ser que la decisión obedece a la intención de brindar una mejor preparación previa, haciendo repartos con cantidades discretas, antes de abordar el tema de las fracciones.

Tabla 29. Equivalencia de grados escolares: México – Francia.

MÉXICO	FRANCIA
PRIMARIA	EDUCACIÓN BÁSICA O PRIMARIA
1	11 CLASE CP
2	10 CLASE CE1
3	9 CLASE CE2
4	8 CLASE CM1
5	7 CLASE CM2
6	6 CLASE

FUENTE: http://www.dgb.sep.gob.mx/tramites/revalidacion/Estruc_sist_edu/Estud-FRANCIA.pdf

La lección que se analiza en esta clase es la primera de una serie de 8 lecciones (Peltier, Briand, Ngono, & Vergnes, 2009) prácticamente consecutivas (sólo se intercalan 4 lecciones que corresponden a otros temas, en el lapso de la lección 53 a la 64) en las cuales se toca el tema de las fracciones, en tanto en el libro mexicano de 1960 (SEP, 1964) es una sola lección contenida en 12 páginas consecutivas y en el libro del alumno, tercer grado actual (SEP, 2011a), para la educación primaria, el tema de fracciones aparece en diferentes lecciones a lo largo del ciclo escolar.

En tanto, como dijimos en líneas anteriores, la actividad se hace por “devolución dosificada”, es el maestro quien recapitula las partes esenciales de la lección:

Mo. Bueno permítanme recapitular de esta, si, hay repartos, aquí hay repartos de cantidades continuas y discretas, se manejan asuntos de tiempos, se manejan repartos de una, de una unidad, y se manejan repartos a una hora y $\frac{3}{4}$, las fracciones también se usan en contextos no sólo donde las fracciones son menos que una unidad, sino también más que una unidad, y luego no pierdan de vista una cosa, es la primer lección, es la primera, tienen algunas actividades muy parecidas a las que usamos nosotros como esta (muestra el libro a sus alumnos) de qué cantidad es la que está ahí iluminada, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, algo así, $\frac{1}{3}$

Ao. Es universal, lo que es las matemáticas,

Mo. ¿Cómo?

Ao. Si, por ejemplo que si aquí $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{4}$ en otra parte también lo es

Mo. Ha sí, tienes razón, ahora nosotros, nuestros libros de texto, a ver si encuentran esto, nuestros libros de texto ¿cuáles son las fracciones que sugiere inducir? ¿Con cuáles empieza?

Alumnos.- Medios, cuartos

Mo. Medios, Cuartos

Ao. Octavos

Mo. Luego octavos, de hecho esa es la misma idea que nos proponían en la actividad de la mañana (se refiere al juego ¿quién se acercó más? (Fuenlabrada, Block, Balbuena, & Carvajal, 1991), del equipo, así está, primero medios, cuartos y octavos, aquí ellos están poniendo medios, cuartos y ya incluyeron uno que es más difícil, que regularmente se pone más adelante, que son los tercios, los niños lo van a poder hacer aquí por lo que ustedes dijeron, los niños ya trabajaron antes muchos repartos, si no hubiera repartos no podrían hacer esto, también entrarían en conflicto ahí, es el antecedente, este, ahí, y luego hay repartos como aquel de barrita de chocolate y reparto de cantidades continuas como ésta de la cinta en 6 pedazos, entonces todo esto son los aprendizajes esperados de ésta lección, de ésta lección, de ésta primera lección, si es la lección 53... (CP 7)

La afirmación del estudiante respecto a la “universalidad del conocimiento matemático” evidencia la representación sobre las matemáticas “si aquí $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{4}$, en otra parte también lo es” y no necesariamente por la simplicidad de la afirmación, sino porque entre líneas podemos hacer otra pregunta ¿entonces qué es lo que hace la diferencia en los planteamientos de los libros de texto? ¿Cuáles son las diferencias entre las formas de

iniciar el tratamiento del tema en diferentes épocas y en diferentes contextos? La pregunta que hace el profesor y que es resuelta a partir de lo que han revisado, pero sin más comparación que sus recuerdos previos sobre el tema, la vamos a retomar, pero con otra visión ¿cuál es el saber matemático que está presente en la forma de iniciar el tema? ¿Qué representaciones sociales se generan? ¿Cuáles cambiaron y cuáles perviven?, para ello vamos a hacer un ejercicio comparativo entre la primer lección del libro de texto de 1960, la primer lección del libro de texto del 2011 y la primera del libro de texto de Francia.

En la siguiente tabla sintetizamos los aspectos básicos de la comparación entre las tres formas de iniciar, utilizando como indicadores: Estructura de la lección, tipo de representaciones que utiliza, contexto, significado de la fracción que se construye; remitimos al anexo 18 “Comparativo entre libros de texto, 1960 y 2011 de México, 2009 de Francia” para visualizar las páginas de las lecciones que comparamos.

Tabla 30. Formas de iniciar el conocimiento formal de las fracciones: México – Francia.

Libro de texto		Estructura de la lección	Tipo de representaciones	Rango de fracciones	Contexto	Significado de la fracción (subconstru cto)
M é x i c o	1960	Presenta la resolución de 2 ejercicios	Gráficas y simbólicas	Medios, cuartos y octavos.	División de figuras geométricas: círculos, rectángulos, romboides.	Parte - todo
	2011	Valoración de conocimientos previos: “lo que conozco”. Actividad práctica de medición de capacidad de recipientes, para lo cual se usan las fracciones. Resolución de ejercicios de uso de las fracciones, en el mismo contexto anterior. Operaciones de números fraccionarios: suma	Enactivas, gráficas y simbólicas	Medios, cuartos y octavos.	Medición de la capacidad de recipientes.	Medida

		de fracciones con igual denominador				
F r a n c i a	2009	Resolución de un problema de reparto: una barra de chocolate entre 4 y luego entre 3 niños. Formalización de los términos $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$. Representación gráfica de fracciones en diferentes contextos: tiempo, pasteles. Resolución de problemas con magnitudes discretas. Interpretación de fracciones representadas gráficamente.	Gráfica – concreta. Simbólica	En orden de aparición: cuartos, tercios, medios y sextos y veintiochoavos (sin representación simbólica).	Reparto de chocolate; tiempo, pasteles. Magnitudes continuas y discretas.	Diversos: parte – todo; medida; razón.

En este comparativo podemos ver varias coincidencias, a la vez que algunas diferencias; como coincidencia tenemos el rango de fracciones, los medios y los cuartos aparecen como las primeras fracciones que deben conocer los niños, evidentemente esto coincide con la estrategia de recuperar los conocimientos que comúnmente traen los niños desde su contexto cotidiano; esta misma situación podría explicar otra coincidencia internacional, los pasteles y los chocolates como contexto principal de uso.

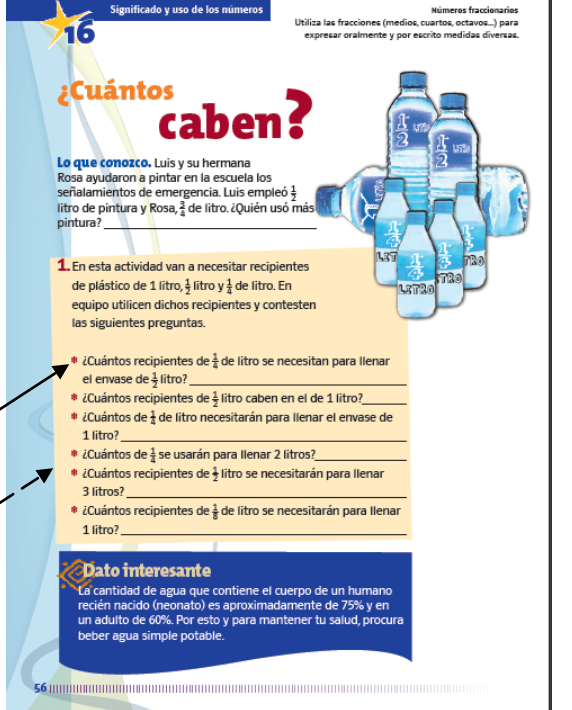
Hay tres aspectos que hacen la diferencia entre cada uno de los planteamientos y que evidentemente instalan también representaciones diferentes; en primer lugar ante la introducción del mismo rango de fracciones se podría pensar que nada ha cambiado, lo cual es parcialmente cierto si nos enfocamos al saber matemático, $\frac{1}{2}$, por ejemplo, se sigue representando simbólicamente igual desde que Fibonacci lo usara en 1202 (Fandiño Pinilla, 2009, pág. 38), sin embargo, es precisamente en los aspectos vinculados con la estructura de las lecciones, los contextos de uso y el significado con que se introducen, lo que marca un cambio sustancial en su aprendizaje y su enseñanza.

El hecho mismo de que el profesor sólo presentara la hoja con ejercicios detonó e instaló en los estudiantes una representación sobre la enseñanza de las fracciones en 1960: se trataba de resolver ejercicios de división de figuras geométricas sin conexión entre el

saber matemático y la resolución de problemas (lo cual como vimos en párrafos anteriores no fue totalmente cierto). La fracción aparece con el significado de parte todo, lo cual restringe su contexto de uso y nos remite a la idea original del concepto: fracturar, romper.

En cambio, al analizar la lección del Plan 2011, desde la misma estructura marca un cambio importante, cuando recupera conocimientos previos a través de una actividad denominada “Lo que conozco”, está directamente remitiendo a eso que en las mismas clases del profesor hemos analizado como la “memoria didáctica” e incluso a lo que los japoneses llaman extensión del concepto; esta afirmación se sostiene en tanto que, aunque se asume que ésta es la primer lección donde se introducen las fracciones, en realidad tiene un antecedente, en 2º grado de educación primaria, que debemos considerar porque conecta directamente un aprendizaje nuevo, con experiencias “viejas”, es decir, si los profesores conocemos la estructura y organización curricular y ésta está bien formulada, podemos lograr aprendizajes significativos con nuestros alumnos, en este caso el libro de texto lo favorece directamente.

Tabla 31. Antecedentes conceptuales para introducir las fracciones.

Libro del alumno 2º grado (SEP, 2011b, pág. 178)	Libro del alumno 3º grado (SEP, 2011a, pág. 56)
 46 ¿Me da un litro? Lo que conozco. Dibuja en el recuadro lo que se te pide. Para llevar a cabo las siguientes actividades necesitarás envases o botellas de plástico de dos litros, un litro, medio litro y un cuarto de litro. Marca los recipientes con su capacidad (dos litros, un litro, etcétera). 1. Formen equipos y contesten las preguntas. ¿Con cuántas botellas de un cuarto de puedes llenar una de medio litro? ¿Cuántas botellas de un cuarto de litro puedes llenar con una de medio litro? - A una botella de medio litro, ¿le cabrá lo mismo que a dos botellas de un cuarto de litro? ¿Por qué?	 16 ¿Cuántos caben? Lo que conozco. Luis y su hermana Rosa ayudaron a pintar en la escuela los señalamientos de emergencia. Luis empleó $\frac{1}{2}$ litro de pintura y Rosa, $\frac{1}{4}$ de litro. ¿Quién usó más pintura? 1. En esta actividad van a necesitar recipientes de plástico de 1 litro, $\frac{1}{2}$ litro y $\frac{1}{4}$ de litro. En equipo utilicen dichos recipientes y contesten las siguientes preguntas. ¿Cuántos recipientes de $\frac{1}{2}$ de litro se necesitan para llenar el envase de $\frac{1}{4}$ litro? ¿Cuántos recipientes de $\frac{1}{2}$ litro caben en el de 1 litro? ¿Cuántos de $\frac{1}{4}$ de litro necesitarán para llenar el envase de 1 litro? ¿Cuántos de $\frac{1}{4}$ se usarán para llenar 2 litros? ¿Cuántos recipientes de $\frac{1}{2}$ litro se necesitarán para llenar 3 litros? ¿Cuántos recipientes de $\frac{1}{4}$ de litro se necesitarán para llenar 1 litro? Dato interesante La cantidad de agua que contiene el cuerpo de un humano recién nacido (neonato) es aproximadamente de 75% y en un adulto de 60%. Por esto y para mantener tu salud, procura beber agua simple potable.

Las imágenes son en sí mismas explicativas, es el mismo contexto (medición de la capacidad de recipientes) pero son diferentes intencionalidades didácticas, la lección de 2º

grado corresponde al eje temático “Forma, espacio y medida⁶⁶” y la de 3° al eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico”, en una se pretende estimar capacidades y en otra, la de tercero, usar las fracciones para expresar una medida; como apreciamos, esta forma de introducir la fracción difiere de la de la época de 1960, de entrada en el contexto de uso: la fracción como un número que me permite expresar el resultado de una medición.

Llama la atención, en esta misma lección, que aunque es la primera de este grado escolar (3°.) se trabaja de manera simbólica la suma de fracciones, utilizando medios, cuartos, octavos y entero más fracciones, derivadas éstas de la situación problemática inicialmente planteada. En esa lógica de la estructura es claro que demanda la intervención del maestro de grupo para orientar a los estudiantes en la escritura simbólica, pero a la vez al operar con suma de fracciones de igual denominador se fortalece la idea de que la fracción es un número y no un número sobre otro separado por una línea horizontal.

El texto francés marca una diferencia importante, al incorporar en una misma lección diferentes contextos de uso de la fracción: reparto de chocolate y pastel, tiempo, magnitudes discretas y continuas, manda la idea de que la fracción es un conocimiento de uso cotidiano y que a pesar de las diferentes formas de manifestarse se puede sintetizar en un número con el cual podrán operar y representarse esas mismas situaciones.

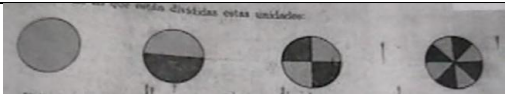
Al igual que el texto mexicano actual, la resolución de problemas es el eje sobre el cual se organiza el aprendizaje de las fracciones, sin embargo, acá aparece una diversidad de problemas en una misma lección.

Ahora bien, al comparar el tipo de representación con que se introducen, vemos que en 1960 se prioriza el paso de la representación gráfica a la simbólica, de manera gradual y mecánica: primero medios, luego cuartos y octavos; a partir de 2011 en México, vemos, como inicio para el aprendizaje de este concepto, una actividad práctica de trasvasado de líquidos en recipientes, con lo cual las medidas son aproximadas y sólo permiten un tipo de división de la fracción, es decir, al verter líquido sólo hay una forma de medir los cuartos, medios, etc. de cada litro; en cambio, desde el 2009 en Francia, la representación gráfica rectangular de la barra de chocolate [en el libro para el maestro se pide que se le entregue a los niños varias copias de ella (Peltier, Briand, Ngono, & Vergnes, 2009)], como parte de

⁶⁶ La enseñanza de las matemáticas en la educación primaria en México, de acuerdo al Plan 2011, se organiza en tres ejes temáticos: Forma, espacio y medida; Sentido numérico y pensamiento algebraico; y Manejo de la información. (SEP, 2011)

una situación matemática realista, favorece la aparición de diferentes formas de hacer el reparto y por ende se enriquece la variedad de representaciones equivalentes de un mismo concepto.

Tabla 32. Formas de representación inicial del concepto de fracción.

México		Francia
1960	2011	2009
		
¿De cuántas formas diferentes se puede representar la fracción $\frac{1}{4}$, usando estos materiales?		

Si bien es cierto que no debemos confundir el significante con el significado, en el inicio del aprendizaje de un concepto, entre mayor sea la cantidad de significantes con los cuales se construya un significado, la aprehensión del concepto es más fuerte y permite mayor flexibilidad del pensamiento para cambiar entre diferentes sistemas de representación y por ende operar con el significado construido; en esta breve comparación que hacemos, respecto a los materiales con los cuales interaccionan los alumnos para construir el significado de las fracciones, resaltamos el hecho de cómo una “barra de chocolate”, así presentada, puede contribuir a generar una variedad de representaciones sobre un mismo concepto (en el ejemplo, $\frac{1}{4}$) y a la vez planteamos la posibilidad de que estas cuestiones sean tomadas en cuenta por los diseñadores, en tanto los profesores (en general) no se han puesto a diseñar situaciones problema para editarlas en un libro de texto.

Finalmente, pareciera ser que la idea central, respecto a la enseñanza de las fracciones, que subyace a cada lección podría enunciarse en los siguientes términos: 1960, te voy a enseñar mostrándote cómo se hace; 2011, aprendes a partir de la actividad práctica y en la interacción con tus compañeros; 2009 Francia, es un conocimiento cotidiano que necesitas aprender a partir de sus múltiples manifestaciones; aunque en los tres casos se intenta contextualizar desde lo cotidiano y, sobre todo en los dos últimos libros de texto, se plantea que el papel activo en la resolución de los problemas sea del niño, como sujeto que aprende.

No se trata de valorar cuál texto es mejor que otro, considero que, tal y como planteó el profesor la actividad de análisis de los libros de texto logró su cometido: establecer como una actividad básica del profesor el análisis curricular y a la vez seguir aprendiendo a partir de reconocer los cambios que ha sufrido la enseñanza de un concepto a lo largo de los años. Esta es una representación social muy importante, sobre todo en un contexto como el nuestro en el cual el libro de texto es un recurso de uso cotidiano. Adicional a lo anterior, y ello se ve muy bien en el análisis de clase, está el reconocimiento de los avances y aún limitaciones de los estudios sobre didáctica de las matemáticas, en su intento por aportar sugerencias para la práctica.

III.2.1.3. La destransposición del saber: construyendo una cultura de la provisionalidad del saber.

Uno de los elementos fundamentales para generar la destransposición del saber es el hecho de que ante un nuevo saber, los saberes anteriores devienen en conocimientos básicos para la construcción y comprensión del saber nuevo. En este sentido, cuando en este subtítulo hablamos de cultura de la provisionalidad del saber nos estamos refiriendo a que ante la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas es conveniente construir una cultura del aprendizaje permanente, donde los conocimientos no se consideren acabados, ni mucho menos como verdades inmutables, sobre todo porque aún la investigación didáctica no nos ha provisto de las herramientas conceptuales para interpretar gran parte de los acontecimientos del salón de clase e incluso, ante las subjetividades de todos los que interactúan en el mismo, cada solución que se construya ante determinado problema o situación de aprendizaje es única e irrepetible en las mismas condiciones que se originó la primera.

En coincidencia con Antibí & Brousseau (2002), *“los conocimientos y los saberes aprendidos por el alumno por adaptación a situaciones que le han sido propuestas, son colocadas en un contexto escolar, en el tiempo escolar y puede estar fuertemente influenciada por la historia personal del sujeto. Estos conocimientos deben ser nuevamente descontextualizados, liberados del tiempo escolar y de la historia personal del sujeto. Debe olvidar cómo aprendió lo que sabe, para no ser más el receptor y formular su propio pensamiento y no una cita”* (pág. 49).

En general esta idea de “olvidar cómo aprendió”, no necesariamente sucede así en el escenario de la formación inicial de profesores, sin embargo, lo que hemos analizado hasta aquí contribuye a generar una cultura de la provisionalidad del saber, sobre todo porque el análisis de las prácticas de los estudiantes, la interacción entre pares y la revisión de materiales curriculares contribuye a reflexionar y cuestionar sus aprendizajes previos y los obliga a reconceptualizarlos, en tal sentido los aprendizajes que se han ido construyendo en las diferentes sesiones de clase interactúan con (y en ocasiones contra) los saberes aprendidos en etapas anteriores.

Un ejemplo de cómo se hace patente la provisionalidad del saber, lo vemos en el siguiente fragmento

Mo.- El operador, o también lo llaman, algunos autores lo llaman el escalar, entonces cuando, si lo estamos haciendo de esta manera ($9 \times 2 =$, $12 \times 2 =$) ustedes se fijan que el operador es un número natural, no es una fracción, ¿entonces en qué momento aparecen las fracciones en este tipo de problemas? ¿las fracciones como operadores?, cuando en ésta ($9 \times \frac{1}{3} = \frac{9}{3}$, $12 \times \frac{1}{3} =$), entonces ya no se trata de agrandar, sino se trata de reducir, esta es una manera de cómo aparecen, si, hay otras, si, pero son las que llevamos hasta ahorita, entonces este es el operador, señala lo anotado en el pizarrón), ¿podrá alguno de ustedes pensar en otro problema que tuviera que ver con esto? donde aparecieran los operadores (CP 4)

Al enunciar la frase “*esta es una manera de cómo aparecen, si, hay otras, si, pero son las que llevamos hasta ahorita*”, explícitamente se está indicando que éste no es un saber definitivo, ni acabado, debe considerarse provisional, como una de las formas, pero no todo el sentido que puede tener el concepto.

Más adelante, se reafirma esta idea de cómo los conocimientos previos, al mismo tiempo que provisionales, son básicos y fundamentales para saberes de un mayor nivel de complejidad...

Mo.- Es muy interesante lo que dice M5, quiere decir que este tipo de problemas tanto más complejizados, son los que aparecen luego matemáticamente más en las preparatorias, por eso resulta con que desde la primaria tenemos que ir preparando a nuestros alumnos para que enfrenten las situaciones que van en ese mismo sentido si, ya las fracciones pareciera ser que ya se complejizaron, ya no era el asunto de un pastel dividido en 4 partes, ilumina 1, si ahora pareciera ser que el asunto ya está más complicado (CP 4)

En este caso, la estudiante reflexionaba sobre cómo es posible que algunas cuestiones matemáticas se aborden desde la primaria y se profundicen en niveles posteriores de la escolarización, con sus consiguientes riesgos.

Así por ejemplo, los estudiantes, en su mayoría, han vivido clases caracterizadas por la ostensión de saberes matemáticos y aprendizaje descontextualizado, este antecedente choca con el esquema básico de las clases que hemos analizado, en las cuales los alumnos trabajan en equipo, validan resultados ante sus compañeros, analizan los cómo y los porqué de los saberes que enseñarán y en general vivencian una forma alternativa de enseñar y por supuesto de aprender matemáticas.

En el siguiente apartado profundizaremos en el esquema de enseñanza del profesor y en cómo se da la construcción social del saber matemático y dentro de éste las representaciones sociales que se generan.

III.2.1.4. La construcción social del saber matemático para la enseñanza: el papel del “Alter”.

Conforme fuimos analizando las clases de matemáticas, fue emergiendo una representación social muy importante, en el proceso de formación docente inicial, la interacción con los otros es fundamental, a diferencia de esquemas transmisivos de enseñanza, donde el profesor explica, dicta su cátedra y los alumnos toman nota o reciben pasivamente las informaciones que se les transmiten, en el caso que analizamos sobresale como un aspecto fundamental la importancia que tienen los intercambios comunicativos entre todos los agentes, ya no sólo entre el profesor y los alumnos, sino entre ellos mismos y ambos con el saber matemático que se está estudiando en cada caso.

Al respecto, derivado de la Teoría de las representaciones sociales, encontramos que el énfasis en lo colectivo y en la comprensión de la realidad social a partir de su construcción social, son elementos centrales que nos ayudan a comprender que el proceso de formación docente inicial es un proceso social, mediado por la construcción colectiva de conocimientos y saberes y un ethos particular de lo que significa ser profesor para la educación primaria.

“Moscovici (1991) indica que en la interacción sujeto – objeto, no existe un solo sujeto, sino que intervienen otros sujetos, a los que el autor les llama Alter, que

además de relacionarse estrechamente entre ellos y ellas, guardan también íntima relación con el objeto social” (Araya Umaña, 2002, pág. 17)

En coincidencia con ello, es habitual que en la relación de estudio de las matemáticas se establezca una relación triádica: maestro – alumno – saber; bajo esta lógica, todos los procesos de construcción del conocimiento, en un contexto institucional, están mediados por el Alter, es decir, son procesos sociales de interacción entre sujetos, quienes son portadores de sus propias representaciones sociales y las ponen en juego en los intercambios comunicativos e incluso condicionan sus actitudes ante cada circunstancia.

A decir de Araya Umaña (2002), Moscovici plantea un esquema triádico, en el proceso de construcción del conocimiento: sujeto – objeto – alter; en este esquema da más supremacía a la relación sujeto – grupo (otros sujetos), porque *“a) los otros y las otras son mediadores y mediadoras del proceso de construcción del conocimiento y b) la relación de los y las otras con el objeto –físico, social, imaginario o real- es lo que posibilita la construcción de significados”* (Araya Umaña, 2002, pág. 18); partiendo de ello, en el proceso de formación docente inicial, considerando como sujeto formativo a los estudiantes, como objeto de estudio al saber matemático (las fracciones, en nuestro estudio), el Alter tendremos que considerarlo en un doble sentido, por un lado las interacciones entre alumnos configuran una dinámica específica para la construcción de representaciones sociales sobre la enseñanza de las matemáticas⁶⁷, y por el otro, las interacciones con el profesor, no olvidemos que la interacción maestro – alumno (s) está mediada por la posición social de cada uno de ellos y de la autoridad moral formalmente instituida.

Bajo estas consideraciones, en la siguiente tabla vamos a apreciar cómo la estructura misma de las clases del profesor, configura un escenario para la construcción social del conocimiento y cómo, de nueva cuenta, la experiencia vivencial conforma una representación social dual, por un lado destranspone una representación respecto a cómo se enseñan las fracciones (el papel del Alter –la interacción entre iguales- y el conflicto y/o

⁶⁷ Aunque no es objeto de estudio en esta tesis, es importante mencionar que desde la experiencia cotidiana como formador de profesores, hemos observado cómo es que en muchas ocasiones tienen mayor influencia los comentarios y las sugerencias que entre alumnos se hacen, en escenarios informales, que las estrategias de análisis implementadas en el salón de clases, sobre todo cuando ello está vinculado con experiencias de práctica docente, es decir, cuando entre ellos se dan sugerencias de cómo hacerle en su práctica y éstas van acompañadas de la frase “yo le hice así... y me funcionó...”, el receptor de la sugerencia tiende a aceptarla y probar su eficacia en el salón de clase. Creemos que ello puede obedecer también a la incompletitud de las sugerencias que, por falta de tiempo o por la dinámica misma del diseño curricular, se discuten en el salón de clase de la escuela Normal.

choque que se genera entre lo que vivieron los estudiantes en su escolaridad previa y lo que están vivenciando en las clases) y simultáneamente instala la representación que explícitamente se quiere compartir respecto a lo que implica ser profesor de matemáticas.

Tabla 33. Estructura de las sesiones de clase.

1ª y 2ª sesión, de 9:50 a 13:20 con un receso de 11:30 – 11:40		3ª sesión, de 15:30 a 17:10	4ª y 5ª sesión, de 9:50 a 13:20 con un receso de 11:30 – 11:40	
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
- Recapitulación de aprendizajes previos sobre las fracciones. - Planteamiento de 3 preguntas para el análisis de su práctica docente. - Clarificación de dudas sobre los conceptos que se incluyen en las preguntas: gestión del error, variable didáctica, regulación, contrato didáctico. - Resolución individual de las 3 preguntas (no las comentan, sólo entregan la hoja donde las resolvieron). - Comentarios sobre las características del informe de práctica docente.	- <u>Observación de fragmentos de video de clase de los estudiantes.</u> - Comentarios específicos sobre lo observado en los videos: dinámica de la clase, forma de plantear la consigna, saber matemático implicado y tipo de representaciones utilizadas.	- Memoria didáctica: recuerda aprendizajes previos en sesión de clase compartida. - Consigna de la actividad: en una sola emisión anuncia la resolución de actividad del taller, la lectura de un texto, el análisis de los libros de texto y la aplicación del juego dominó de fracciones. - Resolución colectiva de la actividad “Partes de partes” - Consigna: lectura de una ficha didáctica “los cuatro significados de las fracciones”; <u>trabajo de análisis en binas.</u> - Consigna: análisis del libro de texto de 4º grado,	- Planteamiento de la actividad de análisis de los libros de texto de 3º y 4º grados, Plan 2011. - Recapitulación sobre los significados de las fracciones: centrado en operador multiplicativo y razón (megapreparación del medio) - Análisis de los libros de texto, <u>organizados en binas.</u> - Confrontación en colectivo.	- Continúa la confrontación colectiva del análisis de los libros de texto. - Juego: Dominó de fracciones. <u>Organizados en equipos de 4 alumnos.</u> - Análisis de las características y potencialidades del juego; trabajo colectivo. - Propuestas de los alumnos sobre variantes del juego.

		Plan 1993; <u>siguen trabajando en binas.</u> - Confrontación colectiva del análisis del libro de texto, a partir de los indicadores diseñados ex profeso: suma de fracciones, resta, comparación y equivalencia. - Recuperación del análisis del texto de la ficha: sólo el significado de operador multiplicativo.		

6ª y 7ª sesión, de 9:50 a 13:20 con un receso de 11:30 – 11:40		8ª y 9ª sesión, de 9:50 a 13:20 con un receso de 11:30 – 11:40	
6ª	7ª	8ª	9ª
- <u>Un equipo de alumnos implementa el juego “¿Quién se acercó más?”; el grupo se divide en 6 equipos de 5 personas cada uno.</u> - Momento adidáctico: se desarrolla el juego en diferentes partes de la escuela y dentro del salón. - Análisis colectivo de las características del juego “¿Quién se acercó más?”. - Resolución de problemas a partir de la actividad de la página 70 del taller para maestros;	- Análisis de dos actividades de los libros de texto de matemáticas, Plan 1960. <u>Trabajo en equipos.</u> - Análisis colectivo, a partir de las opiniones de los alumnos, sobre las actividades de los libros de texto revisados. - Análisis de dos páginas del libro de texto de matemáticas, 4º grado, Francia. Estrategia “devolución dosificada”. - Comentarios	- Revisión de la tarea: diseño de un problema por cada significado de las fracciones. - Síntesis colectiva de los diferentes significados de las fracciones. - Clarificación del concepto de “densidad” en las fracciones. - Análisis, <u>por equipos, de los problemas-ejemplos diseñados.</u> Los comparten y escriben en sus cuadernos.	- Continúa el análisis de los problemas diseñados; <u>trabajo por equipos.</u> - Retoman, para reformularla, el diseño de su “preparación del medio”, iniciada en la 7ª sesión de clase, tomando en cuenta las sugerencias aportadas por el profesor. <u>El trabajo es en equipos.</u>

<u>trabajo en binas.</u> - Preparación del medio para el análisis de dos actividades de los libros de texto de matemáticas, Plan 1960: <u>organización del grupo en equipos</u> y reparto de material.	grupales y comparación entre los libros de texto analizados. - Elaboración, <u>en equipos de trabajo</u> , de una “preparación del medio”, a partir del análisis de la página 85 del libro de texto de 4º grado, Plan 2011. Tarea: lectura del texto “Las fracciones: mecanismos constructivos y formas de presentación”. Elaboración de un problema por cada significado de las fracciones.		

Como podemos apreciar, en prácticamente todas las sesiones de clase se favorece la interacción entre pares, ya sea en binas o en equipos de trabajo, pero la dinámica más frecuente es el trabajo colectivo; asumimos que hay una representación social que subyace a esta intencionalidad: en la formación inicial de profesores, el intercambio entre pares es fuente de aprendizaje.

En líneas anteriores también decíamos que en la docencia la forma es contenido, por ello decidí presentar en la anterior tabla la estructura de las clases del profesor, dado que en conjunto configuran un proceso que va desde la valoración de conocimientos previos hasta la institucionalización de saberes formales en torno a las fracciones y sus diversos significados.

Por ejemplo, en la primera sesión de clase, se hace una recapitulación de aprendizajes, posteriormente se revisa la práctica de los estudiantes y se hacen los comentarios pertinentes; en la tercera sesión se comienzan a formalizar los diferentes significados que puede tener la fracción (como un primer acercamiento) y se localizan algunos de ellos en un libro de texto de un plan de estudios anterior (SEP, 1994), posteriormente se comparan los mismos indicadores pero ahora en la revisión de dos libros

de texto actuales (SEP, 2011a) y (SEP, 2011); el comparativo entre un libro mexicano (SEP, 1964) y uno francés (Peltier, Briand, Ngono, & Vergnes, 2009) brinda un contraste extremo para valorar los avances en el conocimiento didáctico, y finalmente, las sesiones 7ª, 8ª y 9ª le permiten al profesor redondear el proceso de comprensión de los significados de las fracciones al solicitar a los estudiantes que diseñen problemas y elaboren una “preparación del medio” en atención al tema. Digo que permite redondear porque en el proceso de formación docente, desde la representación social inferida del análisis de las clases del profesor, se entiende que la práctica docente tiene que estar vinculada completamente con la revisión teórica que se haga en los salones de clase de la escuela Normal.

Ahora bien, en este proceso, el papel del Alter es fundamental, al menos así podemos inferirlo al observar cómo en prácticamente todas las sesiones se hace escuchar la voz de los estudiantes, tanto en el trabajo colectivo, como al interior de pequeños equipos de trabajo (véase fragmentos del doble subrayado); ya no es el profesor quien hace uso de la voz durante toda la sesión y los estudiantes escuchan atentamente, es claro que es el estudiante quien debe compartir sus conocimientos y en este proceso los reafirma o los modifica según sea el caso.

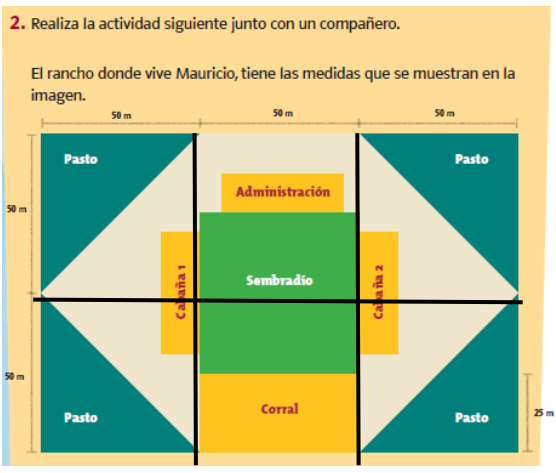
De manera concreta podemos decir que, son cuatro las grandes actividades donde se pueden apreciar mayores interacciones de los estudiantes entre sí: 1ª Participación en equipos de trabajo; 2ª Exposición y análisis de videos sobre sus clases; 3ª Organización y rediseño de juegos didácticos; y 4ª Validación de procedimientos y resultados.

Con la intención de no repetir fragmentos de registro que hemos usado con otra intencionalidad a lo largo de los diferentes apartados, aquí sólo vamos a ejemplificar cada una de las actividades, resaltando momentos específicos en los cuales la interacción entre pares contribuya a la comprensión de los conocimientos que se estén revisando en ese momento de la clase.

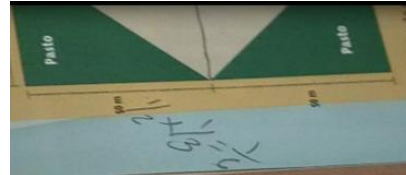
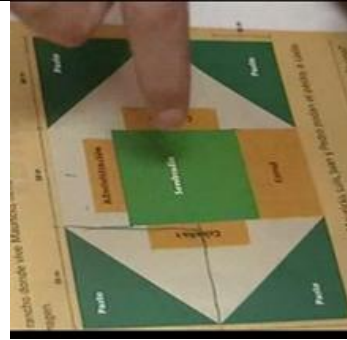
1ª. Participación en equipos de trabajo: Al revisar las 9 sesiones de clase, vemos que, excepto en las dos primeras (las cuales son consecutivas el mismo día), en el resto se trabaja siempre en equipos: resuelven problemas del taller de matemáticas (Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila, 1999), analizan los libros de texto, analizan problemas diseñados individualmente, diseñan y analizan su “preparación del medio” y participan en juegos.

La colaboración y aclaración de dudas es una constante al trabajar en equipos, por ejemplo, al analizar los libros de texto (de lo cual ya hablamos en un apartado anterior), y resolver las actividades se generan momentos importantes de discusión y es la interacción entre ellos la que contribuye a despejar las dudas. La situación problema sobre la que trabajan corresponde al 4º grado, la lección “Calcula fracciones” (SEP, 2011, pág. 48):

Tabla 34. Intercambios comunicativos mediante el trabajo en equipo.

Registro, Clase del profesor No. 4	Problema del libro de texto
Aa. Esto representa a, es como la 6ta parte Aa. (Dice a su compañera) es la mitad del pasto, no, es como la mitad, mira se divide así y luego estos 2 pedazos Aa. A no es $\frac{1}{3}$, si Aa. Bueno si están comparando entre todas estas cual es la... Mo.- Equivalente a... Ao. ¿Le entendieron a ese? Aa. No Ao. M5 ¿ya le entendieron a ese? M5.- ¿A cuál? E3.- ¿A este?, estoy atorado Ao. Güero levántate para sacar esta Aa. Acomodas como en el tangram, por ejemplo el pasto son triangulitos, con esos 2 triangulitos me hacen un sembradío, entonces los 4 pedacitos del pasto me hacen $\frac{1}{3}$, y como dos pedacitos me hacen un sembradío, la mitad de $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{6}$, por eso el sembradío es la 6 parte del terreno total Ao. Una parte entra aquí Mo. (Le dice), a ver, yo le hice así, a cada uno le corresponde un área verde, aquí van a entrar las 12 y luego esto (señala su figura del libro), es lo mismo que un cuadradito de esto, o sea son, 1, 2, 3, 4, 5, 6, $\frac{1}{6}$, yo así lo hice, si esto lo cambias para acá y va hacer esto E3.- Entonces ahí es comparación Mo. No es comparación es tomar la fracción como medida E3.- Pero claro que estas comparando, estás haciendo como medida, la estás comparando, y haciendo equivalencias, haces equivalencias porque tienes que descubrir que este triángulo equivale a un cuadrado, Mo. Ya E3, así ya vete, E3.- Ya le entendí, ya le entendí con la ayuda de M5 (regresa a su equipo y les explica a sus compañeros) haz de cuenta que si divides esto aquí a la mitad, Mo. De hecho es hasta aquí E3.- Bueno, esto es un cuadro, esto es un	Los fines de semana Mauricio, Luis, Juan y Pedro podan el pasto; a cada uno le corresponde un área verde. ❖ ¿Cuánto mide el área total del rancho? ❖ ¿Qué fracción del total del terreno le corresponde podar a cada uno? ❖ Del total del terreno, ¿qué fracción representa el pasto? El sembradío es un cuadrado y está en el centro del rancho. ❖ ¿Qué fracción del total del terreno representan el pasto y el sembradío juntos? ❖ ¿Qué fracción del rancho ocupa el corral? Consideren que las longitudes de las cabañas son de 10 m por 30 m. ❖ ¿Cuál es la superficie de las cabañas? ❖ ¿Qué fracción del total del rancho corresponde a las cabañas?
	2. Realiza la actividad siguiente junto con un compañero. El rancho donde vive Mauricio, tiene las medidas que se muestran en la imagen.  Las líneas negras son las líneas adicionales para la resolución de los problemas

cuadro entero,
 Mo. El sembradío
 E3.- El sembradío, entonces el terreno total se divide en 6, 6 sembradíos,
 Aa. Estos 2 son aparte
 Aa. Estos son 2/6
 E3.-y esto son 2/6
 Aa. Los 4, los 3
 Mo. Te digo que a mí me salió 1/6 pero yo le hice diferente
Aa. Esta loca le hizo que $\frac{1}{2}$, de aquí sacó $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$ que es de acá, le salió $\frac{1}{6}$ (escribe al margen del libro la multiplicación $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$)
 E.- Pero en todo caso el pasto es $\frac{1}{6}$,
 Mo. Es que sabes, yo pienso que no es $\frac{1}{6}$, porque es 1, 2, 3, 4, 5, y estos son 6 verdad, entonces el cuadro completo sería $\frac{1}{6}$,
 E3.- Por eso
 M5.- Y nada más estamos hablando de esto (señala uno solo de los triángulos de pasto)
 E3.- Por eso el pasto son $\frac{2}{6}$
 Mo. y yo lo dividí entre 2 y me salió que, $\frac{2}{12}$
 E3.- Pero si le pones
 Mo. Pero nada más es esta parte, por eso, $\frac{1}{6}$
 E3.- Por eso, no, es $\frac{1}{12}$ sí es eso,
 Mo. Por eso
 E3.- Por eso $\frac{1}{12}$
 Mo. Entonces no es $\frac{1}{6}$
 E3.- No es $\frac{1}{6}$, son $\frac{2}{6}$, el pasto, no esto señorita, está hablando, te pregunta ¿cuánto mide el área total del rancho?, mucho
 Mo. 1500, ya se te fue el avión,
 Ao. ¿qué fracción del total de terreno le corresponde podar a cada uno?
 Mo. A cada uno y mira son 1,2, 3, 4
 Mo.- A ver jóvenes, les propongo que intentemos comparar algunas de las cosas que encontramos, si
 E3.- Por eso
 Mo. Entonces esto
E3.- Es un $\frac{1}{12}$
Mo. Es $\frac{1}{12}$,
E3.- $\frac{1}{12}$
 Mo. Ya ves
 E3.- Pero después te pregunta
 Mo. Es que yo estaba hablando de esa
 E3.- Del total del terreno ¿qué fracción representa el pasto?
 Mo. Yo estaba hablando de esta que tiene $\frac{1}{12}$
E3. Si juntas los 4 pedazos de pasto, si se hacen 2 enteros (a cada cuadrado auxiliar en que dividieron la figura, le denomina entero), entonces son $\frac{2}{6}$
 Mo.- si no alcanzaron a contestarlas todas, así



como hayan dejado, si, hasta donde hayan llegado, si...	

Esta situación me pareció representativa respecto a cómo es que la interacción en equipos fortalece el aprendizaje de los estudiantes; como apreciamos el profesor no interviene en ningún momento de la discusión. Ante la duda que aparece en un equipo, uno de sus integrantes recurre con otra compañera de otro equipo, quien con su procedimiento

Aa. Acomodas como en el tangram, por ejemplo el pasto son triangulitos, con esos 2 triangulitos me hacen un sembradío, entonces los 4 pedacitos del pasto me hacen $1/3$, y como dos pedacitos me hacen un sembradío, la mitad de $1/3$ es $1/6$, por eso el sembradío es la 6 parte del terreno total

en realidad le está dando un esquema general de resolución de todo el problema, al mismo tiempo que le resuelve qué parte representa el sembradío, pero no le dice qué parte representa cada uno de los triángulos del pasto, con lo cual quedan varias preguntas de la actividad sin resolver; esta situación es la que genera la discusión posterior cuando se enfrentan directamente a las preguntas del libro de texto: “Del total del terreno, ¿qué fracción representa el pasto?”

E3.- Pero en todo caso el pasto es $1/6$.

Mo. Es que sabes, yo pienso que no es $1/6$, porque es 1, 2, 3, 4, 5, y estos son 6 verdad, entonces el cuadro completo sería $1/6$,

E3.- Por eso

Y más adelante rectifica...

E3.- Por eso, no, es $1/12$ sí es eso,

Mo. Por eso

E3.- Por eso $1/12$

Mo. Entonces no es $1/6$

E3.- No es $1/6$, son $2/6$, el pasto

Es claro cómo los estudiantes reconocen una función de ayuda en sus compañeros y cómo efectivamente ésta contribuye a generar representaciones parciales, pero adecuadas, para resolver los problemas planteados. La extensión de un esquema geométrico (cuando afirma la estudiante “acomodas como en el tangram”), a la vez que facilita el proceso de resolución, oculta procedimientos formales al hacerlos aparentemente innecesarios para ello; aunque surgen no son tomados en cuenta y hasta parecen fuera de lo ordinario (véase en el registro, el subrayado ondulado doble).

A pesar de las grandes ventajas que representa el trabajo en equipo, cuando tenemos de por medio la videograbación de una sesión de clase, para analizarla, nos damos cuenta que surgen cuestiones complejas difícilmente recuperables en el momento de confrontación colectiva, por ejemplo la última afirmación que hace uno de los estudiantes en el registro anterior:

E3. Si juntas los 4 pedazos de pasto, si se hacen 2 enteros (a cada cuadrado auxiliar en que dividieron la figura, le denomina entero), entonces son 2/6

Como apreciamos, en este juego de palabras hay una doble significación del concepto de “entero”, por un lado se concibe todo el terreno como el entero, sin embargo al hacer los trazos auxiliares para resolver el problema y quedar dividido el terreno en sextos, a cada uno de ellos lo vuelve a denominar “entero”, lo cual es incorrecto en el contexto del problema; esta afirmación, siguiendo la lógica de la sesión de clase no es retomada en colectivo, por ello afirmo que de este tipo de cuestiones sólo nos damos cuenta cuando hay una filmación de por medio, dado que si no es expuesta por el mismo estudiante en el colectivo, es difícil que el profesor, ante la cantidad de equipos que se integran en el grupo, se percate de ello.

2º Exposición y análisis de videos sobre su clase: Como parte del análisis de la práctica docente de los estudiantes, les solicita que permitan ver un fragmento de video sobre sus clases y en ese momento se generan interacciones que permiten valorar sus avances y dificultades sobre lo que implica la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria.

Mo.- (...) Acláranos una cosa I4, ¿por qué la última restricción?, “a ver pónganse listos, eh, háganlo primero con lápiz”

I4. para que no

Mo.- Antes de recordarlo, ¿por qué esa restricción a la consigna?

I4.- porque lo iban a hacer mal y lo iban a cortar y ya no lo iban a poder corregir, y así lo hicieron

Mo. De acuerdo, hay una cosa que aclaró como 2 veces I4, les dice a cada uno de los 3 les tiene que tocar lo mismo, y fíjense en los equipos, ya se dieron cuenta de cómo están integrados los equipos

J.- de a 3

Mo.- todos los equipos son de a 3, salió exacto entonces puede ser que a todos les toque lo mismo, yo opino por esta parte, E3 ¿qué opinas de cómo los integró I4?, ¿qué hubiera pasado si en vez de a 3 los hubiera armado de a 4?, o pónganle un número que no sea igual de la cantidad que se va a repartir, ¿eso hubiera ayudado?

Ao. yo pienso que pensó muy bien

Mo.- de ser de 3 y que son 3, o 3 pasteles entre 2 niños

J.- Porque ya ve que dos en la hipótesis de la primera y luego ya ésta, entonces para mí era muy difícil hacerles entender a los niños que eran 2 pasteles entre 3, porque los equipos eran en parejas, al principio eran entre 2, y decían un pastel cada quien maestro, no es que es entre 3, entonces así como lo hizo ella es más fácil, lo divide entre 3 y pues es más fácil, más palpable, más factible que entre 4

I4. De hecho un niño me dijo que si no podía ser entre 2 o entre 4, no recuerdo bien, porque se le hacía más fácil,

Mo.- 4 partes

I4. 4 partes entre cuatro personas, y ya les dije que no, pero entre ellos es más fácil entre un número par,

Mo.- Bueno van a observar ustedes las diferentes formas, a ver si identifican cuántas, cuántas diferentes formas de repartir 2 pasteles entre 3 niños hay, porque hay varias y ahí los niños, y la otra es que I4 captó muy bien la atención porque hizo muy buena consigna, porque hizo buena preparación del medio, les planteó bien la consigna, y además el material les llamó la atención a los niños, por eso funcionó, ahora veamos cómo fueron los repartos, porque no crean que fue tan sencillo, la cosa emocionante viene ahorita (CP 2)

En este ejemplo hay dos interacciones principales, ambas con una connotación evaluativa, una por parte de un estudiante y otra por parte del profesor; al estudiante le permite contrastar lo observado en el video de su compañera con sus propias acciones ante situaciones similares e incluso le permite reflexionar sobre la pertinencia de una u otra estrategia. Parece que esta estrategia de observación de videos de clase de los propios estudiantes se manifiesta como una posibilidad para cuestionar, analizar y/o rectificar los saberes didácticos, en tanto la práctica del “otro” puede ser el espejo en el cual veo reflejada mi propia práctica.

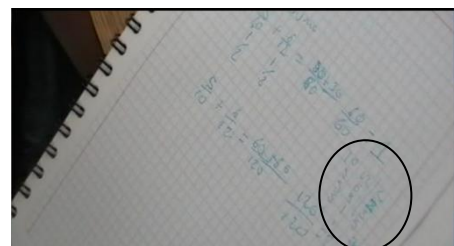
La interacción del profesor consolida y sintetiza los avances que ha tenido la estudiante, en congruencia con el proceso de enseñanza – aprendizaje que se pretende en el salón de clase y simultáneamente fortalece una representación social respecto al enfoque de enseñanza deseable, al decir: “*I4 captó muy bien la atención porque hizo muy buena consigna, porque hizo buena preparación del medio, les planteó bien la consigna y además el material les llamó la atención a los niños*”; esta afirmación, acompañada de la observación del video de la práctica de una compañera, contribuye a establecer una dialéctica entre el anclaje de la representación y una objetivación que podríamos llamar “diferida”, en tanto los sujetos -docentes en formación- ven objetivados en la práctica del “otro”, los conceptos estudiados de manera teórica, pero ese “otro” a la vez es un semejante, con lo cual el mensaje es más claro: los conceptos revisados teóricamente tiene su objetivación en la práctica y con esto queda demostrado.

3° Organización y rediseño de juegos didácticos: Esta actividad tuvo dos variantes, primera, al participar en un juego (“Dominó de fracciones”) organizado por el profesor y en el cual al final les solicita que piensen en alguna variante para los niños de la escuela primaria y segundo, cuando un equipo de alumnos prepara el juego ¿Quién se acercó más? y posteriormente organiza al grupo para ponerlo en práctica.

Ambas situaciones manifestaron una riqueza de interacciones y discusiones que confirman sus potencialidades en la construcción social del saber matemático; aunque el nivel de dificultad de los conocimientos matemáticos requeridos para participar en estos no rebasaba los conocimientos propios de la escuela primaria, las interacciones logradas manifestaron cómo se puede profundizar y avanzar hacia un conocimiento profundo de las matemáticas, a partir de los intercambios comunicativos entre pares y de la discusión y reflexión sobre el mismo.

En la 5ª clase, el profesor organiza al grupo en equipos para jugar al “Dominó de fracciones” y en uno de ellos se dan las siguientes interacciones, con reflexiones sencillas pero centradas en el saber matemático presente en el juego:

Ao. 60 entre 12, son 5, por 6, son 30, son 60
 [operación en el cuaderno $5/10 + 6/12 = (30+30)/60 = 60/60 = 1$]
 Ao. un entero
 Aa. un entero
 Aa. ¿Esto es un entero?
 Aa. si
 Aa. no pero sería mucho trabajo para los niños
 Aa. Eso lo aprendí ya hasta en 6º, y ¿tú cómo lo ibas hacer?
 Ao. 10×12
 Ao. 120
 Ao. 120, deja hago la operación
 Aa. 120 y luego
 A(a) y luego son 10 entre 60
 Aa. 120, 120
 Aa. Igual sale un entero, pero con otras cantidades aquí, [operación en el cuaderno $5/10 + 6/12 = (60+60)/120 = 120/120 = 1$]
 Aa. Es más fácil ésta (señala la primer operación), ambas son lo mismo,
 Ao. Sumando estos 2
 Aa. A pues si, 5 de 10, es $\frac{1}{2}$ y 6 de 12 es $\frac{1}{2}$ (se lleva las manos a la cabeza en señal de “¿cómo no lo vi antes?”)
 Ao. Pero el punto era sumarlos, para saber cómo.



En el curso de las interacciones, en el mismo equipo, se discuten tres procedimientos para sumar fracciones, el primero involucra el cálculo del mínimo común denominador, a partir de la descomposición de los denominadores en factores primos (véase el óvalo en la imagen anterior); el segundo procedimiento considera la multiplicación de los denominadores entre sí, con lo cual se obtiene el denominador común y luego éste se divide entre el denominador de la primer fracción y se multiplica por el numerador de la misma, con lo cual se obtiene el primer numerador para hacer la suma, se repite el procedimiento con la segunda fracción y ya obtenido el segundo numerador se suman ambos y se recupera el denominador común; el tercer procedimiento, surge como insight en una de las estudiantes (aunque da la impresión que el alumno que propuso los dos primeros procedimientos, ya lo tenía claro desde antes), al notar que la fracción irreducible, para $5/10$ es $1/2$ y para $6/12$ también es $1/2$, con lo cual el problema se reduce a una suma de fracciones con igual denominador y además siendo ésta la suma intuitiva básica de las fracciones (dos mitades hacen un entero).

Adicional a la discusión sobre el saber matemático, quiero resaltar dos reflexiones más de los estudiantes, primero el reconocimiento de las dificultades asociadas al aprendizaje de la suma de fracciones a partir de la estrategia de descomposición de los denominadores en sus factores primos para encontrar el mínimo común denominador; éste reconocimiento debe ser una resignificación de saberes para quienes dominan el procedimiento, pero a la vez se convierte en una situación de aprendizaje para quienes no lo aprendieron con claridad ni comprensión.

En segundo lugar, en congruencia con la dificultad ya enunciada, el reconocimiento del grado escolar posible para trabajarlo y cuándo fue que se aprendió.

En el caso de la aplicación del juego “¿Quién se acercó más?”, aparte de la motivación que genera el juego en sí mismo, es importante resaltar que, desde la óptica de la Teoría de las situaciones didácticas, aquí está presente lo que se denominan “momentos adidácticos”, es decir, aquellos momentos en que los alumnos aprenden sin percatarse de que lo están haciendo, debido a que se hace desaparecer la intencionalidad didáctica mediante el juego, sin embargo hay aprendizajes y sobre todo es la interacción entre pares lo que permite validarlos. El siguiente fragmento de registro ilustra lo anterior:

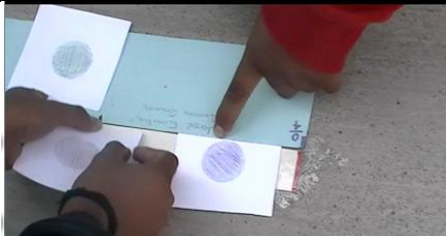
Equipo 2

Ao. Dijiste $2/5$ de $1/4$

Ao. Esto es $1/4$ se divide entre cinco

Ao. ¿no hay quintos?
 Ao. No es el quinto completo
 Ao. Hazle una marquita
 Ao. esto se divide entre 5 (señalando la tira en blanco) empiézalo de acá (se refiere a la dirección de la medida con la tira que representa la fracción $1/5$)
 Ao. Aquí está el centro, te pasaste
 Ao. A ver sigue Juan, es $\frac{1}{2}$ de $1/5$,
 Ao. Esto es un décimo
 Ao. Pero ya lo moviste Juan
 Ao. Esto es un quinto
 J.- $\frac{1}{2}$ de $1/5$ es un décimo
 Ao. no, ya se la limó ganó Juan,
 Ao. Dijo que $1/10$
 Ao. A ver también Miguel dijo eso
 Ao. Pero no se acercó tanto como el tuyo (Juan)
 Ao. Es que le movió, $\frac{1}{2}$ de $1/5$
 Ao. O sea que todos le atinaron, somos la mera
 Ao. No, yo dije otra cosa $1/5$ de $\frac{1}{2}$,
 Ao. Pues igual $\frac{1}{2}$ de $1/5$, la mitad
 Ao. La mitad de $1/5$, es $1/10$
 Ao. Por eso,
 Ao. A ver, Miguel dijo $\frac{1}{2}$ menos $\frac{1}{4}$, menos $2/10$
 Aa. no alcanza,
 Ao. A ese cuarto le quitamos $2/10$,
 Ao. A ver $\frac{1}{2}$ menos $\frac{1}{4}$ menos $2/10$, a ver quítale ahí, menos $2/10$, estás bien loco
 Ao. no le atinó, no le atinó
 Ao. Nada más faltó yo de poner (CP 6)

En este juego se puede apreciar que, dado que les dieron material manipulable, en lugar de recurrir al cálculo numérico, utilizan la superposición del material correspondiente para resolver la situación que se presenta, por ejemplo, en la primer medición, cuando el estudiante dice: $2/5$ de $\frac{1}{4}$, en lugar de recurrir a la multiplicación de fracciones, simplemente señalan, en la tira dividida en cuartos, el punto donde llega la medición de los $2/5$, pero no se genera la necesidad de formalizar que $2/5 \times \frac{1}{4} = 2/20$

	En la primera tira consideran $\frac{1}{4}$ y luego van contando hasta dónde llegan los $2/5$ y los señalan.

También en el fragmento de registro podemos ver otra cuestión interesante, sin formalizar aparece la conmutatividad en la multiplicación de fracciones, cuando uno de los estudiantes enuncia que su medida es $\frac{1}{2}$ de $1/5$, rápido anticipan que la mitad de $1/5$ es $1/10$, sin embargo otro de los estudiantes afirma que él dijo otra cosa “ $1/5$ de $\frac{1}{2}$ ”;

evidentemente aunque el resultado del cálculo es el mismo, matemáticamente implican procesos diferentes. Por un lado, $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{5}$ se interpreta como la mitad de $\frac{1}{5}$ y entonces los estudiantes buscan la fracción equivalente a $\frac{1}{5}$, en décimos ($\frac{2}{10}$) y rápido deducen que al dividir entre $\frac{1}{2}$ o extraer la mitad, el resultado es $\frac{1}{10}$; en cambio, en la expresión $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$, mentalmente se busca cómo extraer la quinta parte de $\frac{1}{2}$ y no resulta tan evidente que haya que recurrir a los décimos, aunque ello es la solución del problema.

Matemáticamente las expresiones quedarían de la siguiente manera:

1ª expresión: $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{5}$

2ª expresión: $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

En la última de las mediciones aparece la resta de fracciones, en la siguiente expresión: Miguel dijo $\frac{1}{2}$ menos $\frac{1}{4}$, menos $\frac{2}{10}$, sin embargo en el proceso de resolución de nueva cuenta se recurre a la resta a partir de ir disminuyendo la unidad de medida que representa los décimos (usando el material manipulable) y no se genera la necesidad de enunciar la medición final, la cual en este caso nos tendría que llevar a una expresión como la siguiente: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4} - \frac{2}{10} = \frac{5-4}{20} = \frac{1}{20}$.

4ª Validación de procedimientos y resultados: En todos los casos en que los alumnos resuelven problemas, se genera un espacio para la validación de las respuestas, incluso esta misma validación contribuye a la clarificación de dudas; como ejemplo citamos lo siguiente:

Alumnos comparan respuestas a sus problemas

Aa. Es que dice que la mitad de

Mo.- A ver explíquese los a sus compañeros

Aa. Es que dice que la mitad de una pared se cubrió con mosaico, la dividí en 2 y esta mitad (señala su dibujo dividido en 2 partes y una de ellas dividida a la vez en 3), fue la que se cubrió con mosaico, y luego dice unos lisos y otros con dibujos, los mosaicos con dibujo abarcan $\frac{1}{6}$ de la pared, o sea si la dividimos en 6, quedarían en 3 y 3, y ya está la mitad, entonces ¿qué fracción del total de los mosaicos tiene dibujos?, o sea ¿qué fracción del total de los mosaicos?, o sea que nada más de la mitad, $\frac{1}{3}$

Ao. Esa es la que no entendía muy bien

Aa. yo tampoco

Ao. Es que yo me confundí con la pregunta ¿del total de los mosaicos...?

Alumnos hablan a la vez

Ao. Es algo interesante

Mo.- ¿si le entendió? (CP 3)

En este fragmento de clase, la participación de la alumna es fundamental en la comprensión del procedimiento y de la respuesta; en este momento se están validando colectivamente las respuestas dadas a los problemas de la actividad “Partes de partes” del taller para maestros (Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila, 1999).

Una validación diferente, pero que me parece fundamental, en tanto puede ir instalando una representación sobre el papel y el valor de los aprendizajes previos y sobre todo del aprendizaje a partir de la vivencia en la práctica lo vemos en el siguiente registro:

Ao. Tenemos que hacer la preparación del medio de esta lección

Aa. En qué caso hay más agua para cada persona, al repartir un litro entre dos personas...

Mo. Nada más la preparación del medio de todo

Ao. Profe si era la página 85

I4: Se me viene a la mente lo que hice en Jerez, les llevé vasos de un litro, de medio litro y de un cuarto y ya les daba una tina llena de agua y los íbamos llenando. (CP 7)

Este fragmento ya lo habíamos citado en el apartado III.2.1.1.3, relativo a la preparación del medio, dado que en esencia es en esta actividad donde surgen estas interacciones, sin embargo aquí lo volvemos a resaltar en tanto sirve para ilustrar cómo los estudiantes empiezan a validar sus experiencias prácticas como antecedente para la conformación de sus concepciones, en primera instancia, y al compartirlo con sus compañeros, tal y como vemos en este registro, van configurando una representación social sobre algún aspecto en particular; la interacción con sus compañeros le permite validar lo que en esencia es su apreciación, pero no sólo desde su creencia, sino desde su vivencia, y es este escenario de trabajo con los otros (el Alter) que se generan los procesos de destransposición de un saber didáctico, al verse avalada su intervención se comienza a anclar una representación.

Finalmente, para concluir este apartado es conveniente decir que, a pesar de las ventajas que representa el trabajo en equipos en el proceso de construcción del conocimiento matemático, en diferentes ocasiones se notó la ausencia de un proceso más formal de institucionalización de saberes, es decir, en la interacción entre pares, las actividades tienen que estar diseñadas de tal manera que, desde la misma consigna se haga patente la necesidad de ir formalizando saberes. Esta acotación es válida para el caso de la aplicación de actividades propias de la escuela primaria, con los docentes en formación, de

lo contrario se puede diluir toda la riqueza de las discusiones en las interacciones de los momentos a-didácticos.

Pareciera ser que, la diferencia en la aplicación de situaciones propias de la escuela primaria, con los docentes en formación, puede estar en la intencionalidad con que se trabajen; asumimos que no deben aplicarse sólo para que las vivencien, se deben aplicar como situaciones que recuperen todo el potencial analítico sobre el saber matemático que se puede construir a partir de ellas. Considero que los ejemplos recuperados en este apartado dan cuenta de las potencialidades que no se pudieron rescatar debido a la misma dinámica de la clase y a su diseño.

III.3. La gestión del error como base de la destransposición del saber matemático y didáctico.

En este apartado vamos a discutir el papel del error, pero desde una doble vertiente: 1ª La construcción de una representación social sobre el papel del error en la enseñanza de las matemáticas; y, 2ª La gestión misma de los errores que aparecen en el proceso de formación docente inicial y las oportunidades que a partir de ello se generan para destransponer el saber matemático relativo a las fracciones.

Reconocemos de entrada que en las mismas propuestas didácticas oficiales aparece la alusión al papel del error y su importancia en la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo en el Plan 1993, se planteó en los siguientes términos:

“Los intentos fallidos o los errores de los alumnos al resolver un problema forman parte de su proceso de aprendizaje y deben ser aprovechados para que, a partir de ellos, avancen en sus conocimientos” (SEP, 1994, pág. 18)

En el Plan 2011 se hace alusión a que *“el reto del diseño didáctico consiste en lograr que el estudiante enfrente el problema o el desafío y pueda producir una solución, en la que confíe, pero –y esto es lo fino del diseño– que su solución sea errónea. Sólo en ese momento, el niño y la niña estarán en condiciones de aprender”* (SEP, 2012, pág. 342).

Aunque se puede entender que, cuando se habla de que su solución sea errónea, ello no implica que necesariamente sea errónea, también puede ser mediante procedimientos no

formales o con un nivel de formalización menor al esperado, pero correcta. Pareciera más bien que, en este Plan se alude al hecho de que

Es, ante un fracaso controlado, que el alumno se plantea la pregunta ¿por qué? ¿Qué falló? Esto significa que el diseño conducido por el docente debe permitir al estudiante un proceso de “recorrido a la inversa”, un proceso de reflexión sobre sus propias producciones. El pensamiento humano opera de este modo cuando el estudiante aprende (SEP, 2012, pág. 342)

Esta idea de fracaso controlado demanda una fuerte tarea a los profesores, en tanto deben anticipar el tipo de soluciones factibles e incluso los posibles errores ya documentados por la literatura en torno al aprendizaje de una noción o concepto.

En tal sentido, en la formación docente inicial y derivado de la coincidencia y asunción de este enfoque por parte del profesor, apreciamos de entrada cómo, a partir del mismo discurso, se instala gradualmente esta representación en los estudiantes, son los principios del anclaje que posteriormente se objetivará en su práctica.

Ahora bien, desde el mismo título de este apartado se desliza un posicionamiento Bachelardiano, asumimos que el error rectificado contribuye a consolidar los saberes matemáticos de los estudiantes y a la vez asumimos que, en la medida que los estudiantes tomen conciencia de la vinculación entre sus conocimientos y la representación sobre las matemáticas y su enseñanza que tengan, la revisen y rectifiquen lo que haya que rectificar, estarán en mejores condiciones de hacer una práctica eficaz en las escuelas primarias.

Al volver sobre un pasado de errores, se encuentra la verdad en un verdadero estado de arrepentimiento intelectual. En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización. (Bachelard, 2000, pág. 15)

Evidentemente esta cita es muy amplia, ¿en mi tesis, por qué volver a Bachelard? consideramos que siempre hay que estar en permanente vigilancia y ésta no se va a lograr si no hay un diálogo consigo mismo, un diálogo metacognitivo que permita tomar conciencia de los conocimientos erróneos, de las lagunas en los aprendizajes y sobre todo de la forma como ello puede influir en su proceso de formación como profesor. El didacta debe apoyar, en escenarios formales de estudio, al reconocimiento de esos conocimientos “mal hechos”, de esos errores que se han cometido, pero al mismo tiempo debe saber identificarlos. En este proceso resalta el papel del formador de profesores en tanto gestiona

los errores que pueden cometer sus estudiantes, pero al mismo tiempo contribuye a que los estudiantes reconozcan formas de gestionarlos en su práctica. Es decir, se forma una representación sobre la gestión del error, hablando sobre él, pero sobre todo viviendo formas de gestionarlo.

Hablamos de error cuando los sujetos (docente o estudiantes) actúan o responden de maneras que no son válidas o congruentes con el consenso formal en torno a determinada cuestión matemática o didáctica.

III.3.1. Formas de gestión del error verbalizadas y formalmente reconocidas. Anclaje de su representación.

Si consideramos toda la historia social respecto al error y la satanización que alrededor de éste se ha generado, estaremos en condiciones de apreciar la urgencia que tiene cambiar, desde el escenario de la formación docente inicial, la representación social comúnmente asociada e instalar representaciones alternativas; más allá de las tipologías al respecto, pero sin desconocerlas, es importante que los estudiantes para maestro interioricen representaciones alternativas, dado que serán ellos los que contribuyan a objetivarlas en los salones de clase, es decir, dependiendo de la representación que tengan los estudiantes sobre el error, será la forma de gestionarlo en el salón de clase de la escuela primaria.

En coincidencia con Moscovici (1979) *“El proceso de anclaje es un proceso de elaboración de este mediador verbal, sin el cual no se podría desarrollar ni mantener. El estudio de la representación social de una ciencia comprende, además de lo que tiene relación con su contenido y sus principios, el análisis de la penetración de su lenguaje”* (pág. 164).

Entonces, lograr un anclaje respecto al papel del error en el aprendizaje y la importancia de su gestión desde una óptica constructivista, implica revisar cómo se construye una mediación verbal para nombrarlo, interpelarlo y en general reconocerlo en los procesos didácticos.

Al revisar las clases objeto de análisis encontramos que, en primera instancia es evocado por el profesor como uno de los indicadores para el análisis de la práctica docente

de los estudiantes, sin embargo ante la evidencia de que algunos no tenían claro el concepto, se da la oportunidad para hablar sobre ello:

Aa. ¿Qué es eso del tratamiento de los errores?

Mo.- ¿A ver a qué nos referimos con el tratamiento de los errores?, a ver A6

Ao. Es como si la clase iba por mal camino, de cómo nosotros le hacemos, para reconducir la

Mo.- ¿para conducir qué?

Ao. para reconducir de nuevo la consigna

Mo.-para reconducir de nuevo la consigna, ¿pero la reconducíamos cuando sucedía de nuevo qué?, ¿si iba bien para qué la reconducíamos?

Ao. para cuando se iba a desviar, por si se estaba desviando

Mo.- No, eso tiene que ver más con la regulación, el tratamiento de los errores es otra cosa, eh

Ao. No es ¿cómo aprovecha los errores de los niños durante la clase? O sea cuando le ponen un ejercicio y alguien lo hace mal, o lo contesta mal, ¿cómo aprovechas tú ese error?

Mo.- la idea es que en todos los salones de clase hay errores, ¿verdad?

Aa. si

Mo.-si, a ver ¿qué es lo que hacemos los maestros con los errores? Los corregimos, así no, acomódalo mejor; yo recuerdo uno que vi y que al ratito vamos a retomar, entonces dijimos que iban a repartir, 1 pastel, no 2 pasteles entre 3 niños y los niños hicieron esto (maestro dibuja en el pizarrón 2 círculos y los divide en 3 partes iguales los dos pasteles)

Ao.- si podemos hacer algo de lo que se hace con hojas si

Mo.-bueno de esta manera y el maestro señala el dibujo del pizarrón, ¿qué hacemos cuando los niños hacen este tipo de reparto?, ¿los corregimos o los dejamos?

Ao. (varios) los dejamos

Mo.- ¿Los dejamos?, tú puedes decir, no así no es un reparto, y procura hacer un reparto de lo mismo pero decimos vamos a hacer un reparto pero lo vamos a hacer en 4 partes, procura que quede bien, de acuerdo no, o le decimos o lo dejamos que el error fluya, y ya después, con la validación, entonces a ver ¿qué es el tratamiento de los errores? Cuando un niño se equivoca algo hacemos los maestros, ¿lo ignoramos?, ¿lo devolvemos? y otra el niño les pregunta estoy bien, y uno les devuelve la consigna, tú qué crees, al rato lo revisamos, lo devolvemos o bien lo hacemos participe del colectivo, a ver niños aquí hay alguien que lo dividió de esta manera, al colectivo, o bien le preguntamos al niño, ¿por qué dices que de esta manera? ¿Todas las partes son iguales?, ¿si a ti te dieran a escoger una de estas rebanadas de pastel, cual escogerías? Le preguntas al mismo niño

Aa. profe ¿qué es lo correcto hacer?

Mo.- ¿Usted qué cree? ¿Cuál le convence más, cuál es el más oportuno?

Aa. Ah, la devolución...

Mo.-Y faltó uno que es el más común, ponte listo no estás poniendo atención, ya lo habíamos dicho hace rato, pero ahí se nos confunde, ¿cuál de los que acabamos de decir le parece más convincente a usted? ¿O que no lo usó o que no le parece convincente?

Aa. yo haría el colectivo

Mo.- al colectivo, a ver niños aquí tenemos a uno que hizo este reparto, en vez de preguntarle al mismo niño, recuerden la otra es dejarlos, dejarlos y no decirles en el momento de la fase a didáctica sino en la validación hacerlo así

Ao. porque así, le decimos llévatelo ahorita revisamos y en el momento que hacemos la validación ellos corrigen.

Mo.- aquí lo que se trata en el salón de clase es generar, los errores tan son parte en la enseñanza, recuerden que son, tan son parte los errores en el aprendizaje, que los profesores tenemos que inducir el error, nosotros y hacerlos que duden, un niño me dijo que si lo repartíamos éste de esta manera quedaba mejor, ¿ustedes que creen?, si los niños están mal, si los niños lo hicieron bien, si los niños lo hicieron de esta manera el contraste sería al revés, sería éste (maestro señala los círculos divididos en el pizarrón) para hacerlos dudar (CP 1)

Como podemos notar, está clara la representación sobre la importancia del tratamiento de los errores; en la secuencia de la primera clase, posterior a una jornada de práctica docente, con la intención de generar momentos de reflexión, el profesor les había planteado una pregunta para que describieran un ejemplo de cómo hicieron el “tratamiento de los errores” y esto fue lo que ocasionó que un estudiante preguntara “¿Qué es eso del tratamiento de los errores?”; llama la atención que el profesor no aporta una respuesta inmediata, al contrario les devuelve la responsabilidad a los estudiantes para que ellos, con sus conocimientos previos, intenten formular lo que entienden por ese concepto; además, notemos que no valida directamente la segunda aportación, pero en cambio sí ubica la primera respuesta en atención a que corresponde a otro de los conceptos que han ido estudiando, es decir, “reconducir de nuevo la consigna es una regulación”. De pronto podríamos ver, en las primeras dos respuestas que dan los estudiantes, que la atención sobre el “tratamiento de los errores” se posiciona en dos sujetos diferentes:

- En este primer posicionamiento el estudiante asumió que los profesores tienen que corregir sus errores:

Ao. Es como si la clase iba por mal camino, de cómo nosotros le hacemos, para reconducir la

Mo.- ¿para conducir qué?

Ao. para reconducir de nuevo la consigna

Sin embargo es claro que, cuando se da este tipo de “errores”, atribuidos a la marcha global de la clase, lo que se genera es una regulación, pero no entra en el campo propiamente dicho del tratamiento de los errores.

- El segundo posicionamiento es más congruente con la idea del tratamiento de los errores que se intenta construir en el salón de clase:

Ao. No es ¿cómo aprovecha los errores de los niños durante la clase? O sea cuando le ponen un ejercicio y alguien lo hace mal, o lo contesta mal, ¿cómo aprovechas tú ese error?

Ahora bien, se parte de una premisa básica “en todos los salones de clase hay errores”, entonces los profesores hacen algo ante ello y ese hacer es lo que están conceptualizando como el “tratamiento de los errores”. ¿Cuántas y cuáles opciones les aporta el profesor?

Desde el registro podemos destacar algunas opciones: lo ignoramos, lo corregimos directamente, les devolvemos la responsabilidad (individual, mediante preguntas para que se den cuenta de donde estuvo su error o colectiva, con lo cual se genera una respuesta compartida), lo postergamos para la fase de validación y “el más común, ponte listo, no estás poniendo atención”; seis estrategias posibles para darle tratamiento a los errores son verbalizadas en el salón de clase, con la intención de ir generando una representación social sobre ello.

Al final del registro vemos cómo es que se fortalece la coincidencia con los enfoques oficiales de los planes de estudio y de una perspectiva constructivista del aprendizaje, sostenida por el profesor en los siguientes términos:

Mo.- aquí lo que se trata en el salón de clase es generar, los errores tan son parte en la enseñanza, recuerden que son, tan son parte los errores en el aprendizaje, que los profesores tenemos que inducir el error, nosotros y hacerlos que duden

Es decir, se transmite una representación social desde los enfoques curriculares, vía la formación inicial y los intercambios comunicativos cuyo contenido central podríamos sintetizar en tres frases: aprovechar los errores de los estudiantes para hacerlos avanzar en su aprendizaje; diseñar situaciones de aprendizaje para inducir al error; pero, todo ello como parte de un “fracaso controlado”, que no descalifique al niño o sujeto de aprendizaje, sino que le potencie en su mismo proceso, de ahí la variedad de opciones estratégicas que se comentan en esta sesión de clase, incluso, de ahí la postura del mismo profesor ante la pregunta de un estudiante

Aa. profe ¿qué es lo correcto hacer?

Mo.- ¿Usted qué cree? ¿Cuál le convence más, cuál es el más oportuno?

Les devuelve la responsabilidad a los estudiantes en su proceso de reflexión y a la vez se va configurando un escenario formativo donde ellos saben que también pueden cometer errores, pero será su decisión elegir la opción más adecuada a las situaciones que se les presenten.

Esta misma dinámica de clase es la que les permite reconocer y ubicarse como profesores, al mismo tiempo que recuperan sus propias vivencias para socializarlas en clase:

Ao. pasa en el salón de clase y dice uno ¿está bien? Si, todos a coro ¿seguros?, no.

Aa. yo también hacia eso profe les decía igual que E3 ¿si está bien? y decían si ¿seguros?, no, yo digo que si está bien y aunque estuviera mal yo decía que estaba bien y yo decía, no porque la maestra decía que estaba bien y cuando estaba bien yo decía que estaba mal y unos pocos decían, no si está bien, y uno de ellos, no, está mal, está mal y ya al último, se dejaban ir nada más con lo que yo les decía y ya al último como que me agarraron la honda, y ya decían no nomás (sic) porque la maestra dice pero no, pero ya hasta el final.

Mo.- si eso fue el ultimo día yo creo que es un gran avance, un gran avance, a ver si hay un avance, a ver si vamos encontrándole el punto fino a esto, si los niños dicen ¿está bien? si, ¿está mal? no, ese tipo de actitudes a ver, ¿díganme cuál sería una buena regulación?

Ao. que sólo contestara cierto niño

Mo.- ¿Uno sería por qué? ¿Otro sería cuál G.?

Ao. que sólo contestara alguno, no está mal o a ver ¿por qué dices que está mal? a ver, ¿por qué dices tú que está bien?

Mo.- La siguiente pregunta es ¿por qué? Y la otra es hacer una pregunta directa a ver tu G. ¿por qué dices que está mal?, y la otra es la que acaba de decir aquí N, plantearles un contra ejemplo, ahora si J., disculpe

Ao. a ver yo hice lo que dice G. si está bien, si, ¿seguros? y hubo unos dos que dijeron no, y a ver ¿por qué no? y empezaron así como que los estaba regañando, y porque no decían lo que el grupo decía, decían sí, no entre todo el grupo y ¿por qué no?, y así como que se cohibían, ¿no a ver dime por qué no?, pensaba que lo iba a regañar, digan porque no, vamos a respetar todo lo que digan aquí y pensaban, me van a regañar. para hacerlo formal, era parte de la devolución.

Mo.- y no participaban

Ao. como que los primeros días no, hasta después, yo creo que no estaban acostumbrados yo creo que la maestra no

Mo.- no les daba ese tipo de devoluciones

A(o.) Y luego si el niño decía no, la maestra para no, les decía, miren esto y esto les decía todo, los niños no estaban impuestos a eso de la devolución ni a nada, hay nomas por no quedar mal (CP 1)

Es decir, como aprendices de cómo gestionar el error en sus salones de clase, han observado que los niños responden a un contrato didáctico donde el saber y las relaciones están escolarizadas, de tal manera que si el profesor pregunta “¿está bien?”, los alumnos asumen que sólo espera su afirmación, porque infieren que sí está bien; el problema se genera ante seudopreguntas del tipo “¿seguros?”, las cuales en el discurso de los profesores pretenden invitar a la argumentación, a la validación, sin embargo a los alumnos los desarma, sobre todo si no participaron en el proceso de resolución del problema planteado.

Es ante este dilema, que parte de un reconocimiento implícito parte del profesor, de que no están gestionando bien el error, que los induce a reflexionar: “***¿Díganme cuál sería una buena regulación?***”, y ello los remite a asociar lo que ya habían discutido en la parte inicial de la clase respecto a las estrategias para el tratamiento de los errores

Ao. que sólo contestara cierto niño

Mo.- ¿Uno sería por qué? ¿Otro sería cuál G.?

Ao. que sólo contestara alguno, no está mal o a ver ¿por qué dices que está mal? a ver, ¿por qué dices tú que está bien?

Mo.- La siguiente pregunta es ¿por qué? Y la otra es hacer una pregunta directa a ver tu G. ¿por qué dices que está mal?, y la otra es la que acaba de decir aquí Noerick, plantearles un contra ejemplo,

En tal sentido, la reflexión respecto a la superación de la dificultad que se genera cuando se gestiona colectivamente el error y los alumnos sólo responden a las cláusulas del contrato didáctico instalado, lleva a los estudiantes a situar las estrategias discutidas y otorgarles el papel de herramientas viables para utilizarlas en su práctica.

El reconocimiento de las cláusulas del contrato didáctico instalado, que previene contra el error, se presenta con frases como las siguientes: *¿no a ver dime por qué no?, pensaba que lo iba a regañar, digan porque no, vamos a respetar todo lo que digan aquí y pensaban, me van a regañar; yo creo que no estaban acostumbrados yo creo que la maestra no les daba ese tipo de devoluciones; la maestra les decía todo, los niños no estaban impuestos a eso de la devolución ni a nada, hay nomás por no quedar mal;* derivadas del mismo registro anterior.

Y cuando los estudiantes lo reconocen, al mismo tiempo se pueden reconocer en él o bien tomar la debida distancia a partir de la reflexión que al interior del salón de clase se pueda generar (ello lo veremos en el siguiente subapartado, cómo el profesor cuestiona a una estudiante cuando detecta la presencia de esta actitud de prevenir contra el error).

Consideramos que este doble juego, entre la verbalización y el análisis de un concepto y su identificación en situaciones concretas de su práctica, contribuye al anclaje de la representación social, en este caso, una representación alternativa al esquema tradicional sobre la gestión o tratamiento de los errores, donde el profesor es la fuente única de la verdad, para configura un escenario en el cual la verdad no proviene de la autoridad, sino que ésta proviene del mismo proceso de construcción del saber matemático y la autoridad se delega en las convenciones sociales de la institucionalización posterior a su construcción con sentido, significado y funcionalidad.

III.3.2. Triple dimensión en la gestión del error: formador, docente en formación y gestión del saber en la escuela primaria.

En el subapartado anterior vimos cómo se comienza a instalar –proceso de anclaje– una representación social sobre el “tratamiento de los errores” a partir de su reconocimiento como lenguaje, las posibles estrategias que se pueden poner en juego para ello y cómo los estudiantes comienzan a identificarlo en situaciones de su práctica docente; de igual manera vimos una dificultad adicional a la identificación de los errores por parte de los estudiantes, la que tiene que ver con la dificultad que tiene gestionarlos en su situación de “practicantes” sobre todo cuando hay un contrato didáctico instalado en las escuelas primarias y éste no favorece al enfoque que preconiza “el fracaso controlado”; finalmente apreciamos cómo el profesor contribuye a que los estudiantes relacionen el concepto y las estrategias con escenarios posibles de actuación.

En este subapartado vamos a revisar cómo es que se da lo que llamo triple dimensión de la gestión del error, primero cuando aparece el error circunstancial desde el formador de docentes, segundo, la gestión del error cometido por los estudiantes, y tercero, cuando se analiza la práctica docente de los estudiantes y aparecen momentos propicios para que, a partir de la gestión del error, se generen opciones para la destransposición del saber matemático y didáctico. Dada la articulación presente en estas tres dimensiones, vamos a estructurar esta parte del análisis en dos apartados que en conjunto dan cuenta de cómo se da esta triple dimensión a la que hemos aludido.

III.3.2.1. El lenguaje temático (normalización y motivación) como fuente de errores.

En el caso del formador de profesores y dado que la intención no es documentar los errores, sino más bien, apreciar el tipo de representación que se construye a partir de su gestión, pero sobre todo las oportunidades que se dan para la destransposición, en lo que sigue vamos a recuperar dos situaciones que nos parecieron relevantes, después de la revisión exhaustiva de las diferentes sesiones de clase; el interés en estas dos situaciones, integradas por varios episodios de clase, está puesto en el hecho de que son ilustrativas de un ejercicio de cambio de representación, al mandar un mensaje explícito respecto al papel del profesor en la enseñanza.

La primera situación proviene de un “descuido” momentáneo al nombrar cada una de las partes de una fracción (numerador y denominador); asumimos que es un descuido momentáneo en tanto no hay dificultad en el saber puesto en juego:

Mo.- Hay repartos que a los alumnos les puede tocar de a más de una unidad o menos de una unidad, alguien lo cito por aquí, en un reparto cuánto le toca, pongan un ejemplo en que le toque más de una unidad

Aa. cuando la cantidad a repartir sea mayor

Ao. que la de niños

Mo.- cuando la cantidad a repartir sea mayor a la cantidad de niños, cuando hemos visto que es mayor el

Ao. cuando es mayor el denominador

Mo.- denominador que

Ao. numerador

Mo.- que el numerador, el clásico que hemos visto aquí y que ustedes pusieron en práctica fue el de vamos a repartir 3 pasteles

Ao. entre 2 niños

Mo.- entre 2 niños, ese es un ejemplo de un reparto que le toca más de una unidad y que es un ejemplo de magnitudes continuas, un ejemplo de reparto con magnitudes discretas, un ejemplo vamos a ver, vamos a partir del mismo ejemplo, 36 canicas entre 4 niños, ¿cuántas canicas le van a tocar a cada niño?, estaríamos haciendo reparto con magnitudes discretas

Ao. por ejemplo lo que nos dijo con las fracciones es invertido no, dijo cuando es mayor el denominador, más bien es cuando es mayor el numerador

A(a) el numerador

Mo.- cuando es mayor, el numerador, cundo lo que les toca es mayor el numerador, es al revés de acuerdo (CP 1)

Como apreciamos en la secuencia de clase, para ejemplificar los tipos de reparto, el profesor sigue la secuencia de respuesta que da un alumno y la valida, concluyendo con ello en que en un reparto para que les toque más que la unidad el denominador debe ser mayor que el numerador, sin embargo, vemos en la misma secuencia de la clase que uno de los estudiantes se ha percatado del error momentáneo y se lo hace saber.

Esta situación podría haber quedado diluida en la inmediatez de la clase, sin mayor importancia, pero al comparar con el siguiente episodio ocurrido en la 5ª clase nos damos cuenta que la aceptación del error por parte del profesor influye en la destransposición del saber y en la instalación o cambio de una representación sobre el papel del profesor en la enseñanza...

Mo. (...) ustedes me decían en sus observaciones es que tuve algunos problemas con unos contenidos de matemáticas, si, de eso se trata de estudiarlos antes, de hacerlos nosotros antes, de resolverlos nosotros antes, incluso de prever los contraejemplos, si, cuales procedimientos pueden usar los niños, ¿para qué?, para poder hacer ahí este tipo de devoluciones en el grupo, pero si no tenemos muy claro nosotros el contenido, pues si en efecto ahí van aprendiendo y nos falla a

veces algo, a veces hacemos un contraejemplo que no era, etcétera, pero así es esto es de lo que se trata de ser maestro, todos nos equivocamos en algo, yo le decía a Gustavo hace ratito que yo me equivoque en la sesión pasada me hizo una pregunta y yo le conteste algo que estaba mal, si, al final de la clase creo que fue eso, pero, nadie está exento de cometer errores en clase pero de lo que se trata es de que los identifiquemos (...) (CP 4)

Definitivamente la reflexión sobre los errores y su aceptación por parte del formador de profesores manda el mensaje explícito de que el éxito en la enseñanza no está en no cometer errores, éste está puesto en su identificación y su tratamiento, a partir de una sólida formación profesional, a través del estudio previo de los contenidos que se van a trabajar y si esta idea logra instalarse en los estudiantes, como mínimo se estarán modificando dos ideas básicas que desde la óptica tradicional aún perviven en la enseñanza: 1ª Los profesores no se equivocan, ellos lo saben todo; esta idea se transforma en, los profesores no están exentos de errores, pero entre más sólida sea su formación profesional menores oportunidades se da a la aparición del error e incluso, le agregaríamos, esta misma formación profesional puede contribuir a que la inducción al error sea más consciente y controlada; 2ª Los alumnos no pueden corregir a los profesores; se transforma en, si aparece al error, los alumnos pueden y deben construir argumentos matemáticos para validar su respuesta y aportarlos en el proceso de clarificación conceptual.

La segunda situación aparece en varios episodios de clase, desde diferentes sesiones, y les sigue generando confusiones; en la 1ª sesión de clase habían comentado la necesidad de que las fracciones se utilicen en contextos con magnitudes continuas y discretas y se aclara por parte del profesor en qué consiste cada una de dichas magnitudes (Cfr. Apartado III.2.1.1.2.), sin embargo, en la 7ª sesión de clase, al estar analizando una actividad del libro de texto francés (Peltier, Briand, Ngono, & Vergnes, 2009), la siguiente representación es la que ocasiona la confusión:



Mo. Leila, Théo, Qwang y Alicia quieren repartirse equitativamente esta barra de

Ao. chocolate

Mo.- ¿Si me siguen ahí?, esto es de lo que se trata, estos alumnos ¿cuántos son?

Alumnos.- 4

Mo.- Quieren repartirse esta barra de chocolate, si, ahora lo que les preguntan en la actividad 1, “Propón varias maneras de cortar o de dividir, de cortar esta placa de chocolate para dar (habla en francés) una parte igual a cada niño? O ¿a cada quien?, o a cada quien

Mo.- un pastel, o reparto de cantidades discretas, canicas, lápices, y aquí pareciera ser que, ¿qué es ésta, una cantidad continua o una cantidad

discreta?

Aa. continua

Ao. continuamente discreta,

Aa. Continua, porque es una barra de chocolate y les va a tocar $\frac{1}{4}$,

Mo.- No, la idea es que esta sería un reparto en una cantidad

Ao. Continua

Mo.- Discreta, continua hubiera sido si le dieran una barra de chocolate a cada niño, aquí sería la cantidad, pero aquí sería darles los pedacitos de chocolates, y lo que les pregunta ahora es, la combinación es muy interesante, porque es un ejercicio, este ejercicio no aparece en nuestros libros de texto, no está, y yo creo que es hasta una buena idea a la que enfrentan a los niños, bien, como harían este reparto si es para 4 niños, una forma ideal sería la más fácil, en hileras (CP 7)

Como dijimos, la forma de representación genera la confusión e incluso uno de los estudiantes intenta salvar la situación al construir la categoría “continuamente discreta”, con lo cual se exime de toda responsabilidad; más adelante vemos una clarificación conceptual de este error:

Mo.- Si, Entonces, búsqúenle ahí abajito, dice ¿cuál es la cuarta parte de 28?,

Ao.7

Mo.-7 ¿verdad?, volvemos a los repartos con cantidades

Ao. Continuas

Mo.- Discretas, canicas

Ao. Pero es $\frac{1}{4}$ de 28

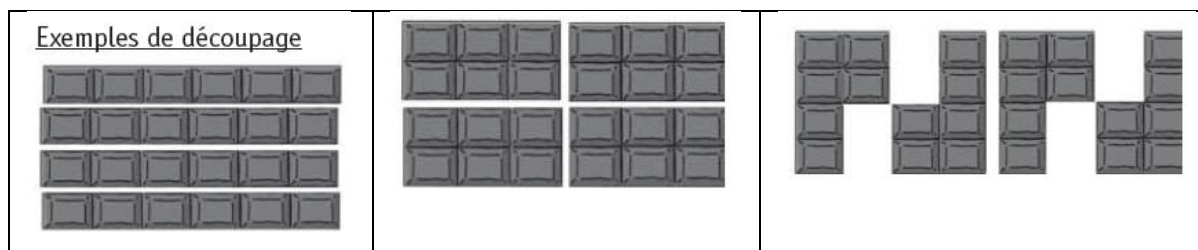
Ao. A ver me repite, ¿las continuas son?

Mo.- Las discretas son las que se pueden contar, canicas lápices

Ao. Crayolas

Mo.- Crayolas, frijoles, las discretas y las continuas son las que no se pueden contar, y aquí el asunto es que ésta que es una cantidad continua, una barra de chocolate con las divisiones, la convierte en una cantidad discreta, bueno dice ahí, cuantas son las $\frac{3}{4}$ partes de 28, ¿cuáles son $\frac{3}{4}$ de 28? (CP 7)

¿Qué diferencias puede haber si la barra de chocolate no haya tenido las divisiones? Obviamente hayan aparecido las clásicas formas de dividir una figura rectangular en cuatro partes, ¿el hecho mismo de que tenga las divisiones la transforma en una “cantidad discreta”? evidentemente no, desde los diseñadores se asumió que la estrategia de presentar las divisiones tenía como propósito fomentar diferentes formas de hacer el reparto, o como ellos lo dicen: “*Cette question permet donc de s’assurer collectivement que, pour tous les partages équitables, le nombre de « carrés » de chocolat est le même*”. (Peltier, Briand, Ngono, & Vergnes, 2009, pág. 165)



Como vemos, la presentación del chocolate dividido en cuadrados tenía la intención de asegurar que en el reparto equitativo, a todos los niños les tocara la misma cantidad de cuadros de chocolate, aunque la estrategia de reparto fuera diferente, sin embargo ello no transforma el tipo de magnitud utilizada.

Ahora bien, ¿con esto que apreciamos en el fragmento anterior se resolvió el error? En la siguiente sesión aún pervive, es decir, en la 8ª sesión vemos cómo aún preguntan por esta distinción:

Ao. Profe a mí se me confunde todavía, ¿las continuas son las que se van a contar, no, son las continuas?

Mo.- ¿A ver Jonathan?

Jonathan.- yo creo que las continuas son las que se pueden contar por ejemplo las canicas y todo eso, no

Aa. no, al revés

Mo.- Las discretas son las que se pueden contar canicas, lápices, alumnos y las continuas

Aa. Pasteles

Mo.- No es posible contarlas, solo repartirlas, como el pastel, una barra de chocolate,

Aa. La leche

Ao. Y hay combinadas como el problema de una barra de chocolate pero dividida en 3

Mo.- Ándele (CP 8)

Finalmente parece ser que la idea con que se quedaron es que hay tres tipos de magnitudes bajo las cuales se pueden trabajar las fracciones: continuas, discretas y combinadas. Sin embargo notemos una dificultad adicional, cuando el estudiante afirma que las magnitudes continuas, son las que se pueden contar, pareciera ser que es la palabra “continua” la que genera el error, ello nos lleva a pensar en la posibilidad de que, al incluirse un “lenguaje temático” (Moscovici, 1979, pág. 171), en este caso un lenguaje con cierta especialización (los tipos de magnitudes a considerar en las fracciones), es necesario revisar los dos mecanismos de construcción que le son asociados: la normalización y el proceso de motivación.

En cuanto al primero, la normalización, se da cuando las categorías, continuo y discreto, pasan al lenguaje corriente y se instalan como parte del discurso de los profesores; el proceso de motivación es el que explica el error cometido en la interpretación de la magnitud continua, dado que “*un signo lingüístico está motivado por una palabra cuando ésta evoca las partes que lo componen y otras que están asociadas a él*” (Moscovici, 1979, pág. 171) y en la interpretación de la palabra, al estudiante parece evocarle la idea de contar, aunque en sí misma (continuo) no encierra la misma “motivación” que la palabra “diecinueve”, por ejemplo, donde sí se aprecia la composición de “diez-y-nueve”.

III.3.2.2. Gestión del error con los estudiantes: del saber matemático a su práctica docente.

En el caso de los errores vinculados con el desempeño de los estudiantes, encontramos dos dimensiones básicas, la primera atribuida a la puesta en juego del saber matemático (dominio del contenido y comprensión de los significados de las fracciones) y la segunda, vinculada con los inicios de su práctica docente (prevención del error y errores en la gestión de los recursos), reconocidos a partir de la revisión de videos sobre sus clases.

Pareciera ser que en el dominio del contenido, los errores aparecen en cuanto éste se complejiza, como es el caso de las situaciones de razón y en la comprensión del concepto de “densidad” de los racionales.

El siguiente ejemplo proviene de la 4ª sesión de clase, en el momento en que el profesor descontextualiza el saber e intenta que los estudiantes establezcan relaciones entre los números, se presentan los errores; veamos cómo se gestiona su solución:

Mo. Si 2 de esas 4, si 6 de esas 12, yo lo que les pregunto, listos, ¿cuál es el número que es a 1?

Ao. 2

Ao. O el 1

Aa. uno igual que todos

Ao. Es el 2

Mo.- A ver ya me confundieron, ¿son todos?, ¿es cualquiera?

Aa. Es el 2

Ao. Si es como razón es a 2

Mo.- Si es como razón es a 2, a ver, ¿por qué a ver?

Aa. Porque es el doble, porque nosotros es el doble del sencillo

Aa. Pero ¿qué número es a uno?

Mo.- La idea es que 2 es a 4, y 6 a 12, la pregunta es ahora es ¿qué número es a 1?

Aa. $1/2$
 Ao. más 1
 Alumnos varios.- No, es $\frac{1}{2}$
 Mo.- $1/2$, a ver ¿sería -1?
 Alumnos.- No, $1/2$, es $\frac{1}{2}$
 Ao. fraccionalmente es $\frac{1}{2}$, .5
 Mo.- ¿Sería?, estamos en las fracciones ($\frac{1}{2}$ -1), si es la misma razón de $\frac{1}{2}$ es a 1 como 2 a 4
 Aa. Si
 Mo.- ¿sí?
 Ao. si
 Mo.- Entonces como que algo de la pregunta no estaba clara (CP 4)

Plantear una pregunta al colectivo, sin restricciones de quien conteste, evidentemente ocasiona que sean varios alumnos quienes lo intenten, el problema es que ante la inmediatez, habitualmente se dice la primer respuesta que viene a la mente, aunque ésta en principio no sea correcta, pero encierra una interpretación del problema; en el fragmento citado, la respuesta “2” refleja que el estudiante invirtió el lugar de la incógnita en el problema, en lugar de buscar el estado inicial: “x es a 1”, encontró el estado final: “1 es a x”, conservando la razón de que una cantidad sea el doble de la otra.

En las primeras partes de este apartado vimos cómo en la 1ª sesión de clase, comentaron diferentes estrategias para darle tratamiento a los errores, en este caso el profesor pone en juego la estrategia de devolución al colectivo, con preguntas del tipo: ¿por qué, a ver?, ¿sería? (aludiendo a las respuestas) e incluso con un “¿sí?” que cuestiona la afirmación aportada por los estudiantes; de nueva cuenta vemos a los estudiantes vivenciando estrategias que luego podrán poner en práctica en la escuela primaria.

El segundo caso, de errores en el dominio del contenido, en parte ya lo habíamos comentado cuando citamos la clase donde están comprendiendo el concepto de densidad (Cfr. III.2.1.1.2. inciso b) sin embargo aquí lo retomamos para resaltar la gestión del error por parte del profesor; al respecto notamos 3 tipos de estrategias diferentes:

1ª. Retoma las respuestas, las anota en el pizarrón y posteriormente, mediante devolución dosificada, van corrigiendo el error:

Mo. (...) ¿Díganme una fracción que sea mayor de $\frac{1}{4}$, pero sea menor de $\frac{1}{3}$?
 Ao. $\frac{1}{5}$
 Ao. $\frac{1}{2}$
 Aa. No al revés
 Mo.- Déjenme la anoto aquí, ustedes me dijeron $\frac{1}{2}$ y me dijeron $\frac{1}{5}$,
 Ao. ¿Que sea cómo?

Ao. Que sea mayor que $\frac{1}{4}$ y menor que $\frac{1}{3}$
 Ao. No hay
 Mo.- ¿ $\frac{1}{2}$ es menor que $\frac{1}{3}$?
 Ao. Si
 Alumnos.- No, es mayor
 Aa. Es mayor (CP 8)

2ª. Usa el ¿por qué? Tanto en respuestas correctas como en incorrectas, para fomentar la reflexión:

Mo.- ¿ $\frac{3}{8}$ es la fracción que es mayor de $\frac{1}{4}$?
 Ao. Si
 Mo.- ¿Es menor que $\frac{1}{3}$?, ¿es menor que $\frac{1}{3}$?
 Ao. No
 Mo.- ¿Por qué no?
 Aa. Si
 Mo.- ¿Si es menor o no?
 Ao. Es mayor que $\frac{1}{3}$
 Mo.- ¿Es mayor que $\frac{1}{3}$?, si es $\frac{1}{4}$ sería igual a $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$ si es mayor que $\frac{1}{4}$, pero no es mayor que $\frac{1}{3}$ (CP 8)

Como apreciamos las preguntas del profesor, tanto en respuestas correctas como incorrectas, instalan otra forma de gestión del error, sin embargo es él mismo quien al final cierra las reflexiones y establece una conclusión que descalifica al número propuesto como respuesta al problema planteado.

3ª. Genera la duda con la pregunta “¿será?” para provocar la argumentación de los estudiantes:

Aa. $\frac{3}{10}$
 Mo.- Pareciera ser que $\frac{3}{10}$ si seria
 Aa. si
 Mo.- ¿si es mayor que $\frac{1}{4}$?
 Ao. Si
 Mo.- ¿Será?
 Ao. Si
 Mo.- ¿Es mayor que $\frac{1}{4}$?
 Ao. Si
 Mo.- ¿Si es menor que $\frac{1}{3}$?
 Aa. Uuuuu
 Ao. ¿ $\frac{3}{10}$ es mayor que $\frac{1}{4}$?
 Mo.- si, porque $\frac{1}{4}$ es
 $\frac{3}{12}$
 (...)
 Ao. Esa si aplica, si es más grande que $\frac{1}{4}$
 Mo.- A ver hay que usar los decimales para validar, porque en números decimales a cuanto equivale $\frac{1}{4}$,
 Ao. a 5

Aa. .25

Mo.- $\frac{1}{4}$ es igual a, en decimales, 0.25, $\frac{3}{10}$ es igual a 0.30, $\frac{1}{3}$ es igual a 0.33 y si es cierto que es mayor que $\frac{1}{4}$ pero es menor que $\frac{1}{3}$,

Aa. Si (CP 8)

En realidad hay un intento de argumentación de los estudiantes, cuando convierten $\frac{1}{4}$ a doceavos, sin embargo no lo continúan y es el profesor el que aporta una estrategia que cierra el proceso, es decir, al convertir las tres fracciones a números decimales la comparación se facilita y a la vez abona el terreno para profundizar en la comprensión de este concepto: la densidad.

En el mismo aspecto, de errores vinculados al saber matemático, también se presentan situaciones vinculadas a la comprensión de los significados de las fracciones; para ejemplificar vamos a utilizar dos situaciones, la primera la encontramos desde el análisis de los libros de texto, sobre todo cuando al parecer los significados se interrelacionan, como en el siguiente fragmento de registro:

Ao. ¿esto es comparación de fracciones, no? si dice que $\frac{1}{4}$ es igual a tantos octavos ¿es comparación de fracciones? (pregunta al profesor)

Mo.- $\frac{1}{4}$ es igual a tantos octavos, es comparación

Ao. si la tarjeta grande es un cuarto de la hoja, la tarjeta mediana es un octavo de la hoja y la chica es un dieciseisavo de la hoja y luego dice $\frac{1}{4}$ de la hoja es igual a dos octavos de la hoja ¿si es comparación de fracciones?

Mo.-Si, lo primero que me dijo que $\frac{1}{4}$ es igual a, lo primero que me preguntó ¿eso qué es?

Ao. Es comparación, no, $\frac{1}{4}$ de la hoja es igual a $\frac{2}{8}$ de la hoja,

Mo.- Es equivalencia

Ao. Es equivalencia, ¿pero los está comparando, no?, ¿o comparando es cuando dice es más qué o menos qué? (CP 3)

La duda surge porque se puede apreciar que los significados se interrelacionan, en tal sentido se puede establecer tanto una comparación como una equivalencia en las fracciones aludidas, según sea el planteamiento que se haga; al principio el profesor valida la idea de que es comparación, pero reflexiona de que si la situación plantea que $\frac{1}{4}$ es igual a $\frac{2}{8}$ es comparación. Lo importante es que el error rectificado permite clarificar los significados que se intentan construir.

Por otro lado, en la 4ª sesión de clase, trabajando también con los significados de las fracciones, vemos otra estrategia para corregir el error, en este caso mediante una corrección directa

Mo. (...) ¿Podrá alguno de ustedes pensar en otro problema que tuviera que ver con esto? donde aparecieran los operadores
 Ao. Que fuera por ejemplo
 Mo.- Déjenme los aproximo a uno, a ver E3
 E3.-Este de repartos, por ejemplo que digamos se tiene que repartir 4 litros de agua, o de algo, donde ellos se fijaran, decir por ejemplo a cada quién le toca $\frac{1}{3}$, ¿cuánto le tocará a cada quién?
 Mo. Bueno este si es un problema, este si es un problema de fracciones, pero no es de operador
 Ao. De números
 Mo. El que nos puso una vez del terreno
 Mo.- ¿cuál fue M5?
 Mo. Que yo lo resolví con una división
 Mo.- ¿cuál era M5? recuérdenos a todos
 Mo. El que decía por ejemplo que se tenía un terreno y la mitad se utilizaba para la siembra, que de esa mitad que se destino para la siembra, de esa parte, se destino para chile
 Aa. Si
 Mo. Luego dijo usted que esa se resolvía multiplicando por ejemplo $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$
 Mo.- si, si
 Mo. Y yo lo resolví dividiéndolo
 Mo.- Dividiéndolo $\frac{1}{2}$ entre 6, ese es un problema de fracciones, a ver hasta ahorita llevamos sólo una aplicación de las fracciones como operador en las escalas (...) (CP 4)

Como apreciamos el error se genera ante la falta de claridad sobre el significado de la fracción como operador, pero principalmente la dificultad que conlleva inventar problemas que lo involucren; en este caso la corrección es directa: “este sí es un problema de fracciones, pero no es de operador”; en este caso, ante la dinámica de la clase, no se hace devolución al colectivo, simplemente se hace la aclaración directa, no es el tipo de problema buscado, hay que seguir pensándole, y, los estudiantes lo saben, forma parte del contrato didáctico ya instalado, por ello es que otra de las alumnas aporta su respuesta, la cual tampoco corresponde al significado de operador multiplicativo, ante ello, el profesor retoma la actividad para aclararlo.

Por otro lado, los errores vinculados con los inicios de su práctica docente (prevención del error y errores en la gestión de los recursos), son reconocidos a partir de la revisión de videos sobre sus clases; aquí es donde se aprecia mayor claridad en la intencionalidad por destransponer y/o cuestionar una representación social sobre el error.

Al estar analizando fragmentos de video de las clases de una estudiante, se generan las siguientes interacciones:

Mo. (...) acláranos una cosa I4, ¿por qué la última restricción?, “a ver pónganse listos, eh, háganlo primero con lápiz”

I4. para que no

Mo.- antes de recordarlo, ¿por qué esa restricción a la consigna?

I4. porque lo iban a hacer mal y lo iban a cortar y ya no lo iban a poder corregir, y así lo hicieron

Mo. de acuerdo, hay una cosa que aclaró como 2 veces I4, les dice a cada uno de los 3 les tiene que tocar lo mismo, y fíjense en los equipos, ¿ya se dieron cuenta de cómo están integrados los equipos?

J.- de a 3

Mo.- todos los equipos son de a 3, salió exacto entonces puede ser que a todos les toque lo mismo, yo opino por esta parte, E3 ¿qué opinas de cómo los integró I4?, ¿qué hubiera pasado si en vez de a 3 los hubiera armado de a 4?, o pónganle un número que no sea igual de la cantidad que se va a repartir, ¿eso hubiera ayudado?

Ao. yo pienso que pensó muy bien

Mo.- de ser de 3 y que son 3, ¿o 3 pasteles entre 2 niños?

J.- Porque ya ve que dos en la hipótesis de la primera y luego ya ésta, entonces para mí era muy difícil hacerles entender a los niños que eran 2 pasteles entre 3, porque los equipos eran en parejas, al principio eran entre 2, y decían un pastel cada quien maestro, no, es que es entre 3, entonces así como lo hizo ella es más fácil, lo divide entre 3 y pues es más fácil, más palpable, más factible que entre 4

I4. De hecho un niño me dijo que si no podía ser entre 2 o entre 4, no recuerdo bien, porque se le hacía más fácil,

Mo.- 4 partes

I4. 4 partes entre cuatro personas, y ya les dije que no, pero entre ellos es más fácil entre un número par (CP 2)

Dos situaciones sobresalen del registro, primero la intención de prevenir a los niños contra el error y la segunda, el reflejo de la concepción de aprendizaje que subyace en algunos de los estudiantes. En cuanto a la primer situación, apreciamos cómo el profesor, al cuestionar la actitud de prevención contra el error, al mismo tiempo está incidiendo para instalar la representación que hemos venido comentando, los errores son parte del proceso de aprendizaje y hay que dejarlos que aparezcan, de tal manera que al darles un tratamiento adecuado, se fortalezca el mismo aprendizaje.

En segundo término, hay un cuestionamiento explícito a la representación social de aprendizaje que dice que entre más fácil sea la situación problemática, los niños estarán en mejores condiciones de enfrentarla; este cuestionamiento obedece a un posicionamiento constructivista que resalta el papel del conflicto en el aprendizaje y las variables didácticas del problema generan el conflicto cognitivo, de ahí las preguntas del profesor “¿qué hubiera pasado si en vez de a 3 los hubiera armado de a 4?”, en alusión a que no haya una correspondencia entre cantidad a repartir y personas entre las que se reparte, con lo cual se complejiza el problema, pero a la vez se generan mayores oportunidades de aprendizaje, al darse la posibilidad de mayor cantidad de procedimientos. Esta es pues una oportunidad

para la destransposición de un saber didáctico muy común en el escenario magisterial, la tendencia a diseñar situaciones que no generen conflicto cognitivo o problemas con todos los datos completamente explícitos.

A pesar del intento de prevenir a los niños contra el error, pareciera que se confirma la idea de que éste es inherente al proceso de aprendizaje, y los mismos estudiantes lo reconocen, tal y como vemos en el siguiente fragmento:

Mo.-2 pasteles para 3 niños, platíquenlos I4, dígale a sus compañeros cómo le hicieron los niños

Aa. Aquí está el de, que lo repartieron así con rayitas, como si fuera un pastel rectangular (muestra un círculo dividido con líneas verticales), yo lo que hice fue que si a la persona que le iba a tocar este pastel, no se iba a enojar porque a él le tocó más (señala la división mayor que coincide con la línea del diámetro) y muchos equipos hicieron esto, unos sí me decían y yo les decía, ¿a ver cuál elegirías tú para que te toque más?, y decían que uno de estos, (I4 señala a sus compañeros su material con el que trabajo con los niños, refiriéndose a las divisiones mayores), pero no sé porque decían que uno de estos, ya después cuando les dije que si no se enojarían hicieron éste (fig. 1)



, y pues sí está bien, entre 3, (en forma circular), medio chueco, y luego este el que dice el profe que estaba atrás, el ultimo es éste (muestra un círculo incompleto), por eso yo les decía que no lo recortaran porque les iba, aquí hasta le rellenaron con otro pedazo, al momento que hicieron el reparto y lo recortaron, y luego les dije a ver fórmense otra vez el pastel y ya no lo pudieron formar y yo dije cómo me llevo las evidencias, y les di otro papel para que lo pegaran aquí y ya no lo pudieron formar, de hecho una, de hecho una rueda la recortaron para que quedara

Ao. parejo

Aa. para que quedara la rueda, y este también (muestra un círculo todo mal, que reconstruyeron los niños), uno me dijo que como que algunos niños, el niño que les cae mas mal del equipo, le daban los pedazos mas chiquitos y así lo hicieron este



también(fig. 2) y no lo pudieron formar otra vez el pastel y que más, pues fueron los repartos así, de 9, cosa que no, pues no da porque pues no, un equipo lo hizo y son 8 pedazos con líneas, y ellos hicieron 9 pedazos, no se puede

Aa. es un rompecabezas,

Ao. ¿Ninguno usó un transportador?

Aa. No, estas son las niñas que lo hicieron a la primera vez(muestra los círculos divididos por las niñas), y les quedó bien, estos hicieron de nueve pedazos, y estos que no están iguales y otros que si se la mancharon, no quedó nada, por eso es que yo les decía que no lo recortaran para que pudieran corregir, y ya no tenía material, pero si muchos hicieron lo del reparto, como si fueran rectangulares y al final les dije que si se les hacía más fácil y dijeron que, pues a unos sí y a otros no porque no podían, y les puse actividades, y les puse pasteles, 2 pasteles rectangulares y pase a unos a que lo dividieran igual y les dije que era igual y fue

de bolada que lo dividieron, les puse otro pastel entre más personas y lo repartían igual, era más fácil, pero con esto (círculos), si batallaron mucho. (CP 2)

La estudiante que explica los diferentes procedimientos que siguieron los alumnos es la misma estudiante que planteó la restricción a la consigna de que lo hicieran primero con lápiz, es decir, antes de recortar los círculos que les dio como material didáctico, que hicieran una representación gráfica en su cuaderno, sin embargo, como podemos ver en el registro anterior, los niños fueron directo a la utilización del material y cometieron los errores ya analizados; en la primera parte del registro vemos que el tratamiento que le dio al error manifestado en el primer procedimiento (división inequitativa del círculo con líneas horizontales, como si fuera un rectángulo), consistió en poner a los niños en contexto, es decir, si les dieran a ellos uno de los “pedazos de pastel” ¿cuál elegirían?, con la finalidad de generar la reflexión sobre el concepto de reparto equitativo; esta estrategia dio resultado, en tanto al corregir, los niños lograron hacer un reparto equitativo y exhaustivo, recuperando para ello la estrategia de dividir en cuartos, luego darle una parte a cada uno de los tres niños, al notar que sobra una parte, ésta se vuelve a dividir entre tres y con ello cumplen las condiciones del problema.

“Por eso es que yo les decía que no lo recortaran para que pudieran corregir”, es la frase que intentaba prevenir contra el error, sin embargo, en situación escolar los niños se fueron directo a la ejecución de su hipótesis del reparto, cometiendo los errores previsibles por la estudiantes en su situación de práctica docente.

El profesor, con la intención de que los estudiantes observen los diferentes procedimientos y a la vez tomen conciencia de los errores que cometen los niños, con la intención de darles tratamiento, resalta aspectos poco visibles pero que no deben pasar desapercibidos; uno de ellos es el siguiente:

Mo.-Es que no sabían cómo hacer las particiones cuando es un pastel circular ¿si verdad?, una cosa que no se alcanza a ver en los equipos, pero hacen muchas partes, muchas rebanadas, que lo hacen primero en 4, luego de a 8, luego de 16, de a 16 partes, pero como en el equipo nada más son 3, entonces les toca de a 5 a cada niño y hay una que sobra y regularmente es lo que hacen los niños, como sobra una que es la más chiquita los niños la sacan, si es la más chiquita ¿para qué?, a fin de que a todos les tocara lo mismo para cumplir la consigna que les dio la maestra, la maestra les pidió que fuera todos la misma parte, entonces a todos les daban 5 rebanadas y les sobraba una (CP 2)

De manera implícita se genera una crítica a los mismos errores generados por el tipo de material utilizado, dado que las formas circulares permiten con más facilidad los repartos en divisiones múltiplos de dos y cuando en el problema no se da esta coincidencia, aparecen inevitablemente los errores; la gestión de los recursos (tipo de material utilizado) debe anticipar los posibles errores, no para prevenirlo, pero sí para controlarlos.

Finalmente, en la triple dimensión del error, aludida desde el título de este apartado, vemos cómo paulatinamente se articulan los aprendizajes vivenciales en la escuela normal, con las experiencias de práctica docente para ir configurando una representación social sobre el tratamiento de los errores y simultáneamente se generan oportunidades para destransponer conocimientos previos y formas de proceder en la enseñanza vinculados a los antecedentes formativos de los estudiantes, por ejemplo la tendencia a prevenir y evitar los errores, como una forma de garantizar el éxito de los aprendizajes de los niños.

Síntesis del capítulo

En este capítulo, derivado del análisis de la información (9 sesiones de clase videograbadas, plan de clase del formador de profesores y análisis de los materiales curriculares que fueron utilizados durante las sesiones de clase) nos interesó precisar que a diferencia de los procesos de transposición didáctica en el escenario de la formación escolarizada durante la educación básica e incluso durante la educación media superior, en el proceso de transposición del saber en el escenario de la formación docente inicial, deben hacerse explícitos procesos de “destransposición del saber”, pero bajo la condición de una doble destransposición: la destransposición del saber matemático (para nuestro caso y focalización, las fracciones, como una parte del conjunto de los números racionales) y la destransposición de conocimientos didácticos.

La instauración de la destransposición no consiste en intentar destruir los conocimientos anteriores ni cuestionarlos como erróneos per se, sino más bien en reconocerlos y apoyarnos en ellos para llevar a los estudiantes a conocimientos y prácticas matemáticas más amplias y auténticas, entendiendo por prácticas “amplias y auténticas” aquellas donde el centro de la discusión sea el saber matemático, donde se usen las matemáticas como un lenguaje y una herramienta que se hace necesaria para modelizar y resolver diferentes tipos de problemas.

Para lograr construir una transposición didáctica fundada en la transformación de saberes previos es necesario que los formadores de profesores tengan una sólida formación matemática y didáctica que les permita interactuar con el “texto de saber”, es decir, con los materiales curriculares, de tal manera que las adecuaciones permitan generar procesos explícitos de destransposición de saberes; al respecto, en las clases del formador de profesores vimos cómo se fortalece un esquema formativo predominantemente por homología pero con fuerte tendencia a la transformación de saberes previos y ello lo apreciamos en los recurrentes intentos por romper el contrato didáctico propio de la vida estudiantil, con frases como “¿usted qué piensa?”, “¿ustedes qué harían?”, las cuales son el principio de la devolución de la responsabilidad y a la vez el paso obligado para la reflexión metacognitiva tendiente a poner en conflicto las representaciones y los saberes previos.

Al ir comparando la información proveniente de las diferentes sesiones de clase se hizo pertinente la recuperación del esquema de Ball (2011) como referente que coincidió

con la intencionalidad del esquema formativo del profesor, sin embargo sólo retomamos las partes que nos fueron útiles para profundizar el análisis e incluso pudimos apreciar una diferencia importante, cuando fue emergiendo la categoría “lenguaje didáctico” (vinculado a los conceptos de la Teoría de las situaciones didácticas) como elemento central en el proceso didáctico, a partir de tres escenarios: la práctica docente del formador de profesores, como herramienta para el diseño y análisis de situaciones didácticas en la práctica docente de los estudiantes y como herramienta para el análisis curricular.

En el proceso de revisión y análisis del conocimiento común y el conocimiento especializado del contenido aparece como un elemento fundamental el análisis de los libros de texto a través de una representación social que se explicita: las lecciones del libro de texto van a facilitar los contextos para el aprendizaje de los diferentes significados de las fracciones; sin embargo esto se manifiesta complejo cuando triangulamos el análisis y comparamos esta intencionalidad con el diseño mismo de las lecciones de los libros de texto, de tal suerte que ello nos permite apreciar el porqué de las dificultades en los procesos didácticos y la debilidad en los aprendizajes matemáticos (al respecto remitimos al análisis de los libros de texto consignado en el capítulo I) de los niños de la escuela primaria.

La comprensión de los diferentes significados de las fracciones (parte todo, medida, cociente, operador multiplicativo y razón; Kieren, 1980), desde el esquema formativo del profesor, involucra cuatro estrategias didácticas básicas: el planteamiento, análisis y resolución de problemas matemáticos, el análisis de los libros de texto de la educación primaria, la revisión del Taller para maestros (Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila, 1999) y el proceso de institucionalización a partir de su revisión teórica; estas estrategias trabajadas de manera articulada configuran un proceso didáctico que dota de sentido, significado y funcionalidad a los aprendizajes, a la vez que permite su revisión integral.

A través de la lectura de este capítulo también podemos apreciar la intencionalidad explícita porque los estudiantes no sean sólo resolutores, sino también diseñadores de problemas, sin embargo es en este momento cuando se debe mantener una mayor vigilancia epistemológica que permita cuestionar la transparencia de los saberes matemáticos, sobre todo en los momentos de uso cotidiano, por ejemplo cuando al dividir por fracciones, los estudiantes hacen alusión a la frase “invierto y multiplico” para referirse al uso del recíproco de una fracción, o cuando usan representaciones gráficas inadecuadas

(cfr. Pág 350) para resolver problemas, si en el proceso de formación docente inicial esto no es cuestionado, reformulado y no se toma conciencia del porqué funcionan o no funcionan los procedimientos y los saberes, se permite inconscientemente que se sigan reproduciendo, instalando de manera simultánea una representación social de uso de los saberes matemáticos de manera imprecisa, aproximada y alejada del saber de referencia.

El papel del alter cobra sentido desde el análisis de las clases, de tal manera que aparece como una constante el trabajo en equipo, con diferentes intencionalidades: resolución de problemas, organización de juegos didácticos, conducción de actividades en las clases, validación de procedimientos de los compañeros, diseño de algunas partes de la situación didáctica, confrontación de formas de trabajo en los salones de clase de la escuela primaria, análisis de los materiales curriculares, etc., cuestiones todas congruentes con el énfasis puesto desde la teoría de las representaciones sociales a la importancia de los intercambio comunicativos y la interacción social; es decir, la organización de un escenario de esta naturaleza (construcción social del saber matemático) posibilita la construcción de representaciones sociales alternativas y/o congruentes con el enfoque didáctico que se pretende asumir y al mismo tiempo se configura como un escenario potencial para la destransposición de los saberes matemáticos y didácticos, en los casos necesarios.

En escenarios como éste, no sólo se permite que aparezca el error, sino que incluso se provoca, bajo la premisa de que su reconocimiento y superación es lo que consolida los aprendizajes y les confiere significatividad, de tal manera que al hacer el análisis comparativo de las sesiones de clase, pudimos reconocer varias dimensiones al respecto: verbalización y reconocimiento de la importancia del tratamiento de los errores en el trabajo con los niños de la educación primaria; la comprensión del lenguaje temático como fuente de errores; la gestión del error de los estudiantes cuando se presenta en el transcurso de las sesiones de clase; el reconocimiento de los errores cometidos en sus prácticas docentes; e incluso el reconocimiento de los propios errores cometidos como formador de profesores. Se discute en este capítulo el papel del error desde una doble vertiente: 1ª La construcción de una representación social sobre el papel del error en la enseñanza de las matemáticas; y, 2ª La gestión misma de los errores que aparecen en el proceso de formación docente inicial y las oportunidades que a partir de ello se generan para destransponer el saber matemático relativo a las fracciones.

El formador de docentes debe apoyar, en escenarios formales de estudio, al reconocimiento de esos conocimientos “mal hechos”, de esos errores que se han cometido, pero al mismo tiempo debe saber identificarlos. En este proceso resalta su papel en tanto gestiona los errores que pueden cometer sus estudiantes, pero al mismo tiempo contribuye a que los estudiantes reconozcan formas de gestionarlos en su práctica. Es decir, se forma una representación sobre la gestión del error, hablando sobre él, pero sobre todo viviendo formas de gestionarlo.

CAPÍTULO IV.

*Reflexiones de los estudiantes:
metacognición y devolución de la
responsabilidad.*

CAPÍTULO IV.

REFLEXIONES DE LOS ESTUDIANTES: METACOGNICIÓN Y DEVOLUCIÓN DE LA RESPONSABILIDAD.

Cuando se presenta ante la cultura científica, el espíritu jamás es joven. Hasta es muy viejo, pues tiene la edad de sus prejuicios. Tener acceso a la ciencia es rejuvenecer espiritualmente, es aceptar una mutación brusca que ha de contradecir a un pasado. (Bachelard, 2000, pág. 16)

En este capítulo, después de haber apreciado la forma en que se explicitan algunos de los procesos de transposición y destransposición en el salón de clase de la Escuela Normal, donde por supuesto están muy presentes las representaciones sociales de los estudiantes y del formador de profesores, ahora nuestra atención está puesta en los momentos en que los estudiantes resignifican esos saberes en su práctica docente con un contenido muy específico, las fracciones.

El proceso de recuperación de datos nos llevó tres momentos fundamentales, el primero, después del diseño de su situación didáctica (de aquí se recuperó también el diseño previo, por equipos de trabajo, de una “preparación del medio” como antecedente al diseño de su situación didáctica que aplicarían en la escuela primaria), se les aplicó una entrevista previa a la grabación de su clase; el segundo momento es la grabación y análisis individual de su clase, lo que dio lugar a la producción de un ensayo por cada estudiante; y

el tercer momento fue la aplicación de una entrevista posterior a la clase (en los términos que ya comentamos en el capítulo “Diseño metodológico”).

Para iniciar el análisis correspondiente a estos instrumentos y apoyándonos de nueva cuenta con el programa Maxqda, hicimos un primer proceso de codificación de las entrevistas y de los documentos (ensayos y texto de “preparación del medio”) que nos arrojó el siguiente sistema de códigos (los que están en la fila inferior de la tabla)

Tabla 35. Codificaciones de las entrevistas y los cuestionarios

Diseño	Planeación	Expectativas	Dificultades	Gestión EN
Tipo de contenido	Ajustes a lo planeado	Expectativas previas	Previsiones	Apoyo curso
Estrategia	Modificación al plan	Logro de propósitos	Dificultades previstas	Retos fracciones
didáctica	Momento de la modificación	Satisfacción posterior	Dificultades al proceso de planeación	Aprendizajes consolidados
Estructura	Metacognición	Nueva puesta en práctica	Imprevistos	Destransposición
Diseño de SD			Dificultades niños	
			Activ no funcionaron	

Sin embargo, considerando las similitudes entre los planteamientos decidimos agruparlos en 5 categorías (fila superior de la tabla); la primer categoría, denominada “diseño”, agrupa las respuestas a las preguntas que tienen que ver con las consideraciones previas al diseño de la planeación, pero no sólo ello, en tanto comparamos la entrevista previa a la práctica, con la entrevista posterior, en esta categoría también analizamos la respuesta a una pregunta que aunque tiene que ver con el diseño de la situación didáctica, más bien está referida a los logros que los estudiantes identifican para el diseño de éstas, después de su aplicación en la escuela primaria; en la segunda categoría “planeación” se recuperan las respuestas a las preguntas referidas tanto a las posibles modificaciones que anticipa en su planeación, como a las que realmente se hicieron; la categoría “expectativas” permite recuperar su nivel de optimismo previo a la práctica, así como, de manera comparativa, el nivel de satisfacción posterior y los ajustes que le harían a su planeación en caso de una nueva puesta en práctica; las “dificultades” hacen alusión a la necesidad de que los estudiantes prevean el campo de comportamientos posibles de los niños y las dificultades tentativas, pero sobre todo que tomen conciencia de que al no considerarlas o

ser demasiado optimistas al respecto se generan más dificultades al momento de la implementación de las actividades en el salón de clase, aquí es necesario resaltar los casos en que la dificultad es asociada al contenido (obstáculo epistemológico) y su influencia en el logro de los propósitos planteados, en una doble vertiente: tanto si el problema es del estudiante (docente en formación) por su falta de dominio del contenido, como si las dificultades tienen que ver con la comprensión de éstos por parte de los niños, al momento de las interacciones didácticas (aunque esto lo apreciaremos con mayor claridad en los siguientes apartados, cuando analicemos los ensayos como el lugar donde se aprecian las decisiones que tomaron los estudiantes); y finalmente, la categoría “gestión EN” tiene que ver con recuperar las apreciaciones de los estudiantes respecto a lo que han aprendido en la Escuela Normal y los retos que les quedan después del proceso seguido.

Hecha la codificación y construidas las categorías de análisis, a continuación vamos a dar cuenta de los resultados encontrados desde el análisis de los instrumentos ya mencionados; cabe hacer una aclaración, uno de los propósitos de esta investigación tiene que ver con apreciar de qué forma los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico inciden en la conformación de nuevas representaciones sociales y a su vez se contribuye a lograr una transformación en las prácticas docentes cotidianas de la escuela primaria, en tal sentido, en este capítulo pondremos atención a estas relaciones entre lo que vivieron y aprendieron en el curso de matemáticas (documentado en el capítulo III de esta tesis) y la práctica docente de los estudiantes.

Hablo de “relaciones” en el entendido de que no asumimos un proceso de “aprendo – aplico”, sino más bien un proceso de “aprendo – aplico – resignifico – re-aprendo (error rectificado)” lo cual implica relaciones recursivas en una espiral de crecimiento; con esta mirada vamos a ir apreciando y analizando la información obtenida.

IV.1. Del escenario de la formación docente a las prácticas escolares.

Es habitual la crítica al desfase entre lo aprendido en la Escuela Normal y lo que los docentes en formación requieren para desempeñarse con eficiencia en la Escuela Primaria, incluso es una representación social muy difundida la que se traduce en que “en la Normal se aprende la teoría y en la primaria la práctica”, lo cual dificulta la construcción de representaciones alternativas que permitan visualizar una articulación más dialéctica entre

ambos escenarios formativos y a la vez ello nos lleve a una reformulación de la visión respecto a la teorización didáctica necesaria para la formación docente inicial.

En términos de la Teoría de las representaciones sociales, es precisamente en los escenarios microgenéticos el lugar para la conformación y/o transformación de las representaciones sociales, es decir, en el caso específico que nos ocupa, la formación docente inicial para la enseñanza de las matemáticas, consideramos dos escenarios microgenéticos básicos tanto para el anclaje como para la objetivación de las representaciones, el primero es el escenario de la Escuela Normal (del cual ya dimos cuenta en el capítulo III) y el segundo es el escenario de la Escuela Primaria.

En este capítulo, a partir del análisis de la información, vamos a dar cuenta de cómo las representaciones sociales, que paulatinamente se fueron construyendo en la Escuela Normal, son objetivadas en el escenario de la Escuela Primaria, en una actividad curricularmente diseñada [los periodos de práctica docente, aunque sólo consideramos uno de los dos que se contemplan en el tercer semestre de la Licenciatura en educación primaria (SEP, 2002)] pero que adquiere matices según sea el profesor que la coordine.

De manera simultánea centraremos también la mirada en dos categorías básicas: el proceso de destransposición de saberes matemáticos y didácticos, en el entendido de que el enfrentamiento directo con las problemáticas propias de la docencia contribuye a conflictuar los aprendizajes de los docentes en formación; y la metacognición, partiendo de la premisa de que en este mismo escenario (la práctica docente) el estudiante tiene que reflexionar a profundidad y autoregularse para ser consciente del tipo de decisiones que toma en el momento mismo de la acción docente.

IV.1.1. El diseño de la situación didáctica: preparándose para la experimentación a partir de diseños de los expertos. Una alternativa de formación docente inicial.

Partimos de la consideración de que el momento del diseño de una situación didáctica requiere que el estudiante haga un ejercicio serio de reflexión, es el momento en el cual aceptan la devolución de su responsabilidad como docentes, requiere además que ellos vean su actuación desde la perspectiva del enseñante, es decir, si en la Escuela Normal siguen asumiendo su papel de alumnos, insertos muchas de las veces en un contrato didáctico que les indica sus responsabilidades desde una visión de alumno (el

profesor plantea la clase y los alumnos estudian para aprender ciertos contenidos, en el mejor de los casos) propia de los niveles inferiores de la escolarización, con muchas probabilidades tendrán dificultades al momento de que se enfrenten a los grupos de la escuela primaria; en tal sentido, el momento del diseño debe ser un momento de ruptura con sus propias representaciones sociales, dejar de verse como alumnos y ponerse en la situación de enseñantes y ello implica una fuerte reflexión metacognitiva, dado que como señalaron *“Brown y Borko (1992), uno de los aspectos más difíciles de aprender a enseñar es pasar de una visión personal de la materia a una organización que facilite que los alumnos comprendan los contenidos. Indican, además, que muchos de estos profesores no son conscientes de la importancia de este problema”* (Muñoz Catalán, 2009, pág. 54). Como apreciamos, el dilema es fuerte, primero la toma de conciencia por parte de los estudiantes, acompañado de ese cambio de visión entre sus saberes que aprendieron como estudiantes y la asunción de éstos como objetos de enseñanza, lo cual evidentemente implica un reposicionamiento, ya no es suficiente que sepan sobre fracciones, es necesario que sepan cómo enseñarlas.

Es precisamente cuando los estudiantes se enfrentan a este dilema (mediados por el formador de profesores) que deben hacer esa reflexión metacognitiva y, cuando sea necesario, una destransposición del saber, de tal manera que se den cuenta de cómo aprendieron y qué saben sobre el tema que van a enseñar, para que puedan tomar las previsiones correspondientes, tanto en términos de dominio o falta de éste en torno al saber matemático, así como con relación a las estrategias didácticas que permiten hacer comprensible dicho saber por los niños, en sí que logren los aprendizaje esperados.

Ahora bien ¿cuáles son las decisiones que tomaron los docentes en formación para el diseño de su situación didáctica? ¿Qué representaciones sociales se aprecian en estas decisiones? En primer lugar tenemos que hacer la aclaración de que hubo una delimitación totalmente intencionada, dado que cuando se gestiona la autorización para que los estudiantes realicen sus prácticas docentes, éstas pueden hacerse con cualquiera de los contenidos del programa oficial de estudios y puede o no ser que les toque trabajar con el tema de fracciones, en tal sentido y dada la intencionalidad de nuestra investigación, se les pidió a los estudiantes que gestionaran con los profesores titulares de los grupos de práctica para que les permitieran aplicar su planeación con los contenidos indicados e incluso con los diseños previamente elaborados y retomados de la tesis de maestría de David Block

(Block, 1987), tal y como pudimos constatar en las declaraciones de los estudiantes, derivadas de la entrevista previa a su práctica.

La hipótesis que subyace a esta decisión tiene que ver con el hecho de que si es un tema que se está revisando en la Escuela Normal y de manera paralela tienen la oportunidad de ponerlo en práctica en la escuela primaria, ello les da la posibilidad de revisarlo de manera recursiva y a la vez tienen la oportunidad de contrastar sus experiencias prácticas con los contenidos teóricos del curso.

Aunque se pidió al grupo completo que elaborara un plan de clase con un contenido de fracciones, para fines de un análisis más fino se eligieron a 7 estudiantes, bajo el criterio de “relevancia para la investigación” y procurando que estuvieran cubiertos todos los grados escolares de la escuela primaria, incluso tenemos dos alumnos que practicaron en 6°. grado; en tal sentido, a continuación vamos a enunciar los contenidos con los cuales les correspondió practicar:

Tabla 36. Delimitación del contenido de práctica.

Docente en formación	Grado de práctica	Contenido
EPrP1 ⁶⁸	1°.	Una resolución de problemas con fracciones.
EPrV2	2°.	Conocimiento de repartir cosas de modo que sea un reparto equitativo y exhaustivo.
EPrE3	3°.	Identificación de la fracción $\frac{1}{2}$.
EPrI4	4°.	Resolver problemas que impliquen suma o resta de fracciones en casos sencillos con distintos procedimientos. Elaborar e interpretar representaciones gráficas de las fracciones.
EPrM5	5°.	Construir el entero ⁶⁹ .
EPrR6	6°.	Resuelve problemas con números fraccionarios, empleando

⁶⁸ En lo sucesivo, cuando encontremos este tipo de código nos referimos a lo siguiente: EPrP1 significa, Entrevista previa a la práctica (EPr) de la estudiante cuyo nombre empieza con la letra P y que realizó su práctica docente en 1°. Grado de educación primaria; lo mismo aplica para los otros seis estudiantes que colaboraron en la investigación.

⁶⁹ Este es el título de la situación didáctica original de Block, en realidad el estudiante no identificó ningún contenido asociado con esta situación que trabajó, ello lo afirmamos desde la revisión de su planeación, en la cual conserva como “aprendizaje esperado” el mismo que trabaja durante su semana de práctica y éste es referido a “Resuelve problemas que implican leer e interpretar mapas.-Resuelve problemas que implican conversiones entre múltiplos y submúltiplos del metro, litro y kilogramo”, el cual como apreciamos no es congruente con el tema de fracciones.

		los algoritmos convencionales.
EPrA6	6º.	Situación didáctica 2.2 ⁷⁰

Como apreciamos, los contenidos elegidos van desde lo más sencillo en primero y segundo grados de primaria hasta el momento de la institucionalización de las operaciones con fracciones; cabe aclarar que el centro de la investigación no es el proceso de tratamiento didáctico de las fracciones a lo largo de la escuela primaria, más bien como lo hemos venido diciendo, el centro del análisis es el proceso de destransposición del saber, en tal sentido lo que aquí nos interesa tiene que ver con apreciar la manera como los estudiantes reflexionan sobre su práctica y a partir de ello logran reconocer errores y/o dificultades inherentes a su trabajo didáctico.

Después de haber analizado las planeaciones de los estudiantes, comparándolas con su ensayo de análisis de su práctica, se aprecia la necesidad de poner más atención a la articulación entre la puesta en práctica (experimentación) de situaciones didácticas previamente diseñadas por otros y el contenido o saber matemático al cual se le está abonando en su comprensión, es decir, podemos apreciar que los estudiantes pusieron atención a las adecuaciones que tenían que hacerle al diseño original (incluso transformando la consigna con el riesgo que ello implica, por ejemplo darles parte de la respuesta – volveré sobre ello más adelante) y a la preparación del medio congruente para trabajarla, pero descuidaron la articulación entre la consigna – problema central a resolver y el contenido matemático.

Esto lo podemos detectar a partir de la respuesta que dan a la pregunta de la entrevista previa, formulada en los siguientes términos ¿cuál es el contenido que está presente en la planeación?, los estudiantes titubean para dar la respuesta e incluso, como podemos constatar en la tabla “Delimitación del contenido de práctica”, el hecho mismo de que la situación didáctica a trabajar la hayan recuperado de un reporte de investigación (Block, 1987) generó dificultades para focalizar el contenido al relacionarla con los contenidos del Plan de estudios 2011 de Educación Primaria.

La principal importancia que tiene el hecho de que los estudiantes tomen conciencia del contenido está vinculada con el desarrollo del conocimiento metacognitivo relativo a

⁷⁰ Tampoco, el estudiante, logra identificar con claridad el contenido asociado con esta situación didáctica.

“la tarea”, en tanto *“esta categoría de conocimiento metacognitivo se refiere al conocimiento que tenemos de los objetivos de la tarea y de todas aquellas características de la misma que influyen sobre su menor o mayor dificultad. Es muy importante conocer qué se pretende con cada tarea pues este conocimiento ayuda al sujeto a elegir la estrategia más adecuada”* (Mateos, 2001, pág. 56); una hipótesis muy plausible es el hecho de que a mayor control metacognitivo de la tarea, mayores son las posibilidades de éxito al momento de desarrollarla, de ahí que llama la atención que no se aprecie una buena articulación entre el contenido y la situación problema al momento de organizar la situación didáctica, pero sobre todo que al cuestionar a los estudiantes manifiesten confusiones en cuanto al contenido central que van a trabajar.

Como ejemplo de esto que afirmamos recuperamos los siguientes fragmentos de entrevista:

EPrM5	E.- La que les propusieron, al momento de leer esa situación, esa situación que les propusieron, ¿cuál conocimiento matemático detecta, que es necesario o que está presente en esa situación? ¿Qué conocimiento matemático está presente ahí? M5. ¿Qué conocimiento matemático? E.- Ajá M5. El de fracción mixta E.- Fracción mixta, ¿cuál más? M5. También puede estar el de sumar fracciones, E.- ajá M5. O también puede ser ...
EPrR6	E.- 6° grado, bien, ¿cuál es el contenido que va a trabajar en su planeación?, R6. Este E.- Podemos verlo si gusta en su planeación R6. claro que si, este, bueno lo que se busca es que los niños resuelvan problemas aditivos con números fraccionarios empleando los algoritmos convencionales
EPrA6	E.- O.k. cuando planeaste esto, ¿cuál es el contenido que vas a trabajar aquí en esta planeación? A6. ¿El contenido? E.- El contenido, ¿hay algún contenido así en específico? por ejemplo las fracciones en el reparto, suma de fracciones A6. Son el reparto de las fracciones
EPrA6	E.- Muy bien, ¿cuál es el saber matemático con el que se van a quedar los niños en esta planeación?, ¿qué van aprender de matemáticas al término de esta planeación? A6. Repartos E.- Mju A6. Reparto de fracciones, este, interpretarlo como conceptos E.- Ajá, ¿entonces qué es lo que van aprender los niños aquí?, ¿qué es lo que visualizas que van aprender los niños aquí? A6. Este E.- ¿No te queda muy claro exactamente qué es lo que van aprender?, o sea, la actividad es que van a comparar algunas fracciones, con tiras de catón en equipos de 4 integrantes, y se

	vale que corten, etcétera, inclusive me decías hace un momento que usen la regla para medir
	A6. Ajá
	E.- Entonces mi pregunta ¿qué es lo que van aprender esos niños aquí?, ¿con qué se van a quedar en términos de las matemáticas?,
	A6. Pues es como, así no
	E.- No te ...
	A6. <u>Si se van a quedar con algo pero necesito llevar más actividades, por así decir si fuera toda la semana</u>
	E.- A o.k, de esta planeación ¿podríamos decir que es inicial para introducir algún otro concepto?
	A6. Ajá, es que por decir <u>con ésta se pueden quedar con que es fructífero el uso de fracciones</u>
	E.-a o.k, o.k
	A6. Podría ser uno y hay más cosillas,
	E.- Identificas ahí algunas otras cosillas, tocaste alguna otra
	A6. <u>Lo que es la atención de las consignas</u>
	E.- O sea ya situaciones ya más de atención del grupo,
	A6. Si también eso de atención

Como apreciamos, en ambos casos se denota imprecisión en la articulación entre la situación didáctica que eligieron para aplicar y el contenido matemático al cual se hace alusión; podríamos pensar que ello también puede obedecer al desfase temporal entre los diseños originales (1987) y el plan de estudios vigente al momento de volver a aplicarlos (2011), sin embargo al ser el conocimiento del currículo una de las componentes del conocimiento profesional del profesor, se debe procurar no generar la sensación de que esto puede ser irrelevante, es decir, cuidar el proceso de diseño de tal manera que de manera articulada se experimenten situaciones didácticas originales pero a la vez éstas estén vinculadas explícitamente con un saber matemático de referencia plenamente identificado por quien las aplique.

Por otro lado, en las afirmaciones de EPrA6 encontramos algo que puede ser el indicador de la representación social sobre el papel de los estudiantes en sus periodos de práctica, cuando dice “A6. Sí se van a quedar con algo pero necesito llevar más actividades, por así decir si fuera toda la semana”; este tipo de afirmaciones, en el escenario normalista llegan a generalizarse al grado de que no se logra la devolución de la responsabilidad y su aceptación por parte de los estudiantes, en tanto los periodos de práctica son cortos (dos semanas en los semestres en que se lleva el curso de Matemáticas y su enseñanza) no sienten que sea un compromiso el aprendizaje de contenidos, generalmente se queda la sensación de que se contribuye en algo, pero el trabajo fuerte con el contenido es de los maestros titulares; de igual manera, en la afirmación de EPrA6

también se encuentra implícita una crítica velada al hecho de que apliquen esa situación didáctica, el “*si se van a quedar con algo*” le indica que efectivamente ¡algo deben aprender!, pero no es suficiente con esa actividad, “*si fuera toda la semana*” es una declaración que puede comenzar a reflejar la idea de que se requiere continuidad en las actividades para que los alumnos aprendan un contenido.

De cualquier manera no debemos perder de vista también que, como actividad de experimentación didáctica, no tenía la intención de explorar todo el proceso didáctico de aprendizaje de la noción de fracción, en tal sentido el análisis lo restringiremos a los acontecimientos durante su aplicación, resaltando los aprendizajes de los estudiantes ante un tema que ya han reconocido como complejo.

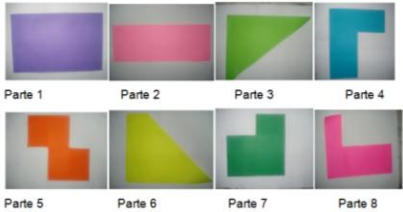
Ahora bien, desde el título de este apartado ya vislumbrábamos la idea de que hay una representación asociada a esta alternativa de experimentación didáctica, ésta tiene que ver con el reconocimiento de las dificultades para diseñar “situaciones didácticas originales” y por ello se opta porque los estudiantes apliquen diseños previamente elaborados, en el entendido de que se pueden convertir en un referente para elaborar posteriormente sus propios diseños.

Sin embargo podemos preguntarnos ¿los estudiantes aplicaron las situaciones didácticas tal y como estaban previamente diseñadas? ¿Qué modificaciones le hicieron? ¿Lograron clarificar la intencionalidad de cada una? Partiendo de dichos diseños ¿cuáles diferencias se aprecian entre los resultados reportados por la investigación y los que lograron los estudiantes en su aplicación? En la siguiente tabla hacemos un comparativo entre las situaciones didácticas originales y el planteamiento escrito de los estudiantes:

Tabla 37. Comparativo entre diseños de situaciones didácticas.

Estudiante	Situación didáctica original (Block, 1987)	Situación didáctica propuesta por los estudiantes.
PcP1 ⁷¹	Contenido: Repartir 3 pasteles entre 2 niños. Consigna 1: En las clases que siguen vamos a estudiar cómo repartir pasteles. En esta clase cada equipo va a repartir 3 pasteles iguales a éste (muestra la hoja entera) entre dos niños. A cada equipo le debe tocar lo mismo de pastel y no debe de sobrar nada de pastel. Cuando se	Aprendizaje esperado: Una resolución de problemas con fracciones. Los niños resolverán el problema siguiente: “La abuelita de María y Juan compró 3 manzanas y quiere repartirlas entre sus nietos de manera que les toque lo mismo ¿Cómo le podrá hacer?” este problema tendrá plasmado el dibujo de los dos niños y se les dará las tres

⁷¹ Durante todo el capítulo usaremos la denominación PcP1 para referirnos al plan de clase (Pc) de la estudiante P que practicó con un 1º grado de primaria y así sucesivamente.

PcV2	hayan repartido los pasteles, marcan lo que le toca a cada uno con un color diferente.	manzanas para que las repartan. Aprendizaje esperado: Conocimiento de repartir, cosas de modo que sea un reparto, equitativo y exhaustivo. Consigna: cada equipo va a repartir los tres pasteles que se les entregaron entre los miembros de la bina de modo que a cada niño le debe tocar lo mismo de los tres pasteles y no debe sobrar nada de los pasteles.
PcE3	Consigna: Vamos a entregar a cada equipo un pastel entero y varios pedazos. Se trata de que ustedes nos ayuden a escoger todos los que son mitades. Segunda consigna: Lo que queremos ahora es que nos ayuden a escoger los pedazos que tienen la misma cantidad de pastel. Material: A cada equipo una hoja tamaño carta (± 21 cm x 28 cm) y un juego de 8 partes de hoja, algunas de las cuales son mitades de la hoja y otras no (el maestro tendrá un sobrante de cada una de estas partes por si los niños las necesitan).  (hoja tamaño carta) (Los pedazos a, b, c, d, e, son mitades de la unidad (U). Los pedazos g, h, i, no son mitades).	Identificación de la fracción $\frac{1}{2}$. Este es el objetivo de la nueva situación, en una primera parte de la consigna discriminar de entre un conjunto de 8 pedazos de pastel cuales son la mitad y cuáles no. Y en una segunda consigna, que averigüen cuáles de los 8 pedazos contienen la misma cantidad de pastel. Los 8 pedazos son los siguientes:  Parte 1 Parte 2 Parte 3 Parte 4 Parte 5 Parte 6 Parte 7 Parte 8
PcI4	Juego ¿Quién se acercó más? (Fuenlabrada, Block, Balbuena, & Carvajal, 1991, pág. 83)	Conocimientos y habilidades: Resolver problemas que impliquen suma o resta de fracciones en casos sencillos con distintos procedimientos. Elaborar e interpretar representaciones gráficas de las fracciones. Mediante la dinámica de números seguidos formaremos equipos de 5 integrantes. Se les entregará dos tiras con numeración de 1 m, medios, tercios y cuartos de metro para que calculen la medida de una longitud con fracciones de metro. Se les entregará una tarjeta para que alumnos por alumno la ubique en el lugar que quiera de la tira en blanco y los demás calcularán con sumas de fracciones la llegada al punto desde el punto cero hasta el punto deseado por el alumno; ganara el alumno que más se acerque.
PcM5	Contenido: Asociar progresivamente los datos (n, m) del reparto con el tamaño del pedazo. Consigna: Dos niños fueron al cine y con el dinero que les sobró compraron 3 barritas de chocolate que se repartieron	Preparación del medio: Comenzar la clase recapitulando la situación didáctica que se realizaron las prácticas pasadas. Se acuerdan de los 5 niños que fueron a la feria de San Francisco y que sólo habían ajustado 2

	en partes iguales. Juntando todo lo que le tocó a un niño, se obtuvo un pedazo de este tamaño (muestra la tira de cartoncito de 6 cm de largo). Averiguar de qué tamaño eran los chocolates que compraron. Material: 2 tiras de cartulina de 6 cm x 3 cm y 1 tira de cartulina de 40 cm x 3 cm	barras de chocolate, pues resulta que de esos 5 niños se perdieron 3 niños y los dos niños restantes de la desesperación les dio hambre y se fueron al puesto de dulces. Acción y Formulación: Ahora resulta que esos 2 niños se compraron 3 barras de coco y al repartírselas a cada uno le tocó un pedazo de 6 cm y quieren saber ¿cuál era la medida de cada barra de coco? Se explicará que a cada equipo tendrá las dos tiras de cartoncillo de 6 cm cada una, las cuales representan los pedazos que les tocaron a los dos niños. Para esto se pondrán en binas volteándose con el compañero de atrás, a cada bina se le entregará el material antes mencionado y una hoja cuadriculada con el problema escrito y se les indicará que hagan ahí sus procedimientos.																																																																																	
PcR6	Dado el entero y el pedazo, determinar los datos del reparto. 2. <i>Trabajo en equipos:</i> Se entrega un entero (tira de 12 cm) a cada equipo, pedazos de diferente tamaño (como sólo hay 8 pedazos distintos, cada pedazo será trabajado por tres equipos). Se les indica que pueden tomar más enteros de los que les tocó. Los pedazos se reparten de la siguiente manera: <table><tr><th>pedazos equipos</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th><th>f</th><th>g</th><th>h</th></tr><tr><td>1</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td>7</td><td></td><td></td><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td>x</td><td>x</td></tr><tr><td>8</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>x</td><td>x</td></tr></table> Organización: Equipos de 4 niños Material: Para 8 equipos: - más o menos 40 enteros (tiras de 12 cm x 3 cm) - 8 pedazos de distinto tamaño (ancho: 3 cm): a: 6 cm (1/2 del entero) ± 6 piezas b: 5 cm (5/12 del entero) ± 40 piezas c: 9 cm (3/4 del entero) ± 15 piezas d: 8 cm (2/3 del entero) ± 12 piezas e: 16 cm (4/3 del entero) ± 10 piezas f: 10 cm (5/6 del entero) ± 20 piezas g: 18 cm (3/2 del entero) ± 8 piezas h: 24 cm (2 enteros) ± 5 piezas.	pedazos equipos	a	b	c	d	e	f	g	h	1	x	x	x						2				x	x	x			3						x	x	x	4		x		x	x				5	x	x	x						6				x	x	x			7			x				x	x	8	x						x	x	Aprendizaje esperado: Resuelve problemas con números fraccionarios, empleando los algoritmos convencionales. Comenzaré por escribir las consignas en el pizarrón: <u>equipo 1</u>: encontrar cuántos niños y cuantos chocolates son de acuerdo a: chocolate entero: (muestra la barra de 12 cm), pedazo que le tocó a cada niño: (muestra la barra de 6 cm).ahora encontrar cuántos niños y cuantos chocolates si el chocolate entero es (muestra la barra de 12 cm) y el pedazo que le tocó a cada niño es de 5 cm. Y por ultimo calcular cuántos chocolates y cuántos niños si el chocolate entero es de 12 cm y el pedazo para cada niño fue de 9 cm. <u>Equipo numero 2</u>: calcular cuántos niños y cuantos chocolates si el chocolate entero es de 12 cm y el pedazo para cada niño es de 8 cm; luego cuántos niños y cuantos chocolates serán si el chocolate completo es de 12 cm y el pedazo para cada niño fue de 16 cm y por ultimo calcular cuántos chocolates y cuántos niños si el chocolate completo es de 12 cm y el pedazo que le tocó a cada niño es de 10 cm. <u>Equipo 3</u>: calcular cuántos niños y cuantos chocolates si el chocolate entero es de 12 cm y el pedazo para cada niño es de 18 cm; luego cuántos niños y cuantos chocolates serán si el chocolate
pedazos equipos	a	b	c	d	e	f	g	h																																																																											
1	x	x	x																																																																																
2				x	x	x																																																																													
3						x	x	x																																																																											
4		x		x	x																																																																														
5	x	x	x																																																																																
6				x	x	x																																																																													
7			x				x	x																																																																											
8	x						x	x																																																																											

		completo es de 12 cm y el pedazo para cada niño fue de 24 cm y por ultimo calcular cuántos chocolates y cuántos niños si el chocolate completo es de 12 cm y el pedazo que le tocó a cada niño es de 8 cm.
PcA6	Misma situación didáctica de PcM5	No precisó el contenido... ¿Recuerdan la otra semana cuando usamos popotes?, ¿Alguien sabe para qué los ocupamos?, ¿Qué es lo que hicimos con ellos?, etc. Luego les comentaré que esta vez fueron sólo dos niños al circo y que con el dinero que les sobró del boleto de entrada compraron tres barritas de chocolate que se repartieron en partes iguales, juntaron lo que compraron y se obtuvo un pedazo de este tamaño (les mostraré una tira de cartoncillo de 6 cm de largo). Les diré que tenemos que averiguar de qué tamaño era cada uno de los chocolates que compraron.

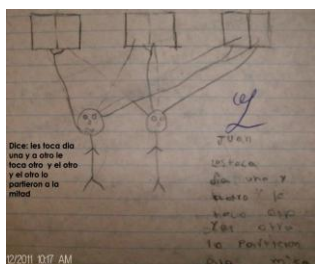
Tanto PcP1 como PcV2 retomaron la situación “Repartir 3 pasteles entre 2 niños” y en lo general respetan la estructura original, incluso podemos notar que en PcV2 es prácticamente la misma consigna, sin embargo, al analizarla con más detenimiento, contrastándola con el ensayo de análisis de su práctica podemos notar algunas diferencias importantes.

* PcP1: la situación original sólo implica repartir 3 pasteles entre dos niños y el material utilizado son hojas de papel; en el diseño de la estudiante apreciamos una preocupación por darle un contexto más cotidiano, lo cual la obliga a cambiar de “pasteles” a manzanas, conservando la forma de éstas en el diseño del material (es decir son dibujos de manzanas y se incorporan dibujos de niños), además agrega “personajes” al planteamiento del problema (aunque como veremos en el apartado “IV.1.4.2. Modificaciones previstas y realizadas”, hace un ajuste y retoma como preparación del medio el contexto de los pasteles y el problema principal lo plantea usando “manzanas”).

Este cambio del material utilizado es relevante en tanto el uso de un dibujo de una manzana, que sería lo que se van a repartir, genera el problema de la equitatividad en el reparto y las dificultades para su comprobación dado que la forma de la manzana no es totalmente circular.

* PcV2: En este caso la consigna es la misma, sin embargo al momento de trabajarla no se les entrega el material, sólo se dibujan tanto los niños como los rectángulos que representan los “pasteles”, con lo cual se limitan las posibilidades de hacer el reparto tanto como las posibilidades de comprobar la equitatividad en los resultados.

La siguiente evidencia recuperada desde el documento ApV2 fortalece la afirmación anterior, sólo hicieron un reparto aproximado, aunque el estudiante en su plan de clase y en la entrevista previa manifestó claridad en la intención didáctica de esta actividad: “realizar el reparto conservando la equitatividad y la exhaustividad”.



Una situación similar a los casos anteriores se presenta en PcE3, las consignas son las mismas que la situación original, sin embargo también hay cambios en el material utilizado.

La estudiante PcI4, decidió no trabajar una situación didáctica prediseñada, en cambio organizó su situación didáctica a partir del juego “¿Quién se acercó más?” (Fuenlabrada, Block, Balbuena, & Carvajal, 1991); la forma de enunciar la consigna no precisa con claridad cuál es el problema a resolver, de tal manera que si así se enuncia anticipamos dificultades al momento de querer devolverles la responsabilidad a los niños en el proceso resolutor (esto lo documentaremos en los apartados siguientes).

PcM5 recupera también la consigna original, pero en ella podemos apreciar dos cambios importantes, el primero tiene que ver con sus aprendizajes respecto a la “preparación del medio” y por ello remite a los niños a una situación didáctica trabajada con anterioridad (memoria didáctica): “*Se acuerdan de los 5 niños que fueron a la feria de ...y que sólo habían ajustado 2 barras de chocolate*”, con lo cual a la vez contextualiza el nuevo problema; el segundo cambio se articula con el primero, como ya habían trabajado con chocolates, ahora son barras de coco; este último cambio en realidad no es muy relevante en tanto el recurso utilizado para representarlas sigue siendo el mismo: tiras de cartoncillo de 6 cm.

En el caso de PcR6 es la misma situación didáctica, que la original, pero presentada con adecuaciones en atención a la cantidad de alumnos que tuvo en su grupo (15 alumnos) por lo cual sólo retoma tres de las 8 variables del problema. Y PcA6 sólo cambió el contexto, del cine al circo, pero el planteamiento es el mismo que la situación didáctica original.

IV.1.2. La estrategia global para el diseño de la situación didáctica.

En otra de las preguntas se les pidió a los estudiantes que describieran de manera global la estrategia que iban a utilizar para trabajar el contenido; la intención explícita es que, en la medida que los estudiantes son capaces de verbalizar su estrategia, ello implica y los obliga a reflexionar metacognitivamente al volver atrás sobre sus propios pasos y mirar retrospectivamente lo que hicieron.

La naturalización del lenguaje, de la que hablamos en el capítulo III, fortalece su anclaje no sólo en el discurso de los estudiantes, sino que contribuye paulatinamente a generar un esquema mental que orienta las decisiones que toman, tanto al planear como al momento de llevar a la práctica el diseño de su situación didáctica; en tal sentido, y como parte de ese ejercicio de reconocimiento metacognitivo que ya apuntábamos desde las respuestas a la entrevista previa, en concreto a la pregunta por ¿cuál es la estrategia didáctica que vas a seguir para trabajar tu situación didáctica? hemos encontrado lo siguiente:

* En su estrategia didáctica subyace una orientación de las situaciones problema hacia el contexto cotidiano, es decir, asumen como un elemento motivacional que les permite devolverles el problema a los niños, las situaciones cotidianas, las cuales cargan de sentido agregando “personajes” que en el diseño original no se contemplaron.

* Se aprecia bastante claridad en los momentos didácticos que han estudiando durante el curso y que ahora retoman para planear, de tal manera que ubican y delimitan las acciones que tendrían que ejecutar en cada uno de ellos, por ejemplo, en la preparación del medio recuperan la memoria didáctica, en la fase de acción reconocen la necesidad de que los alumnos se enfrente al problema con sus propios conocimientos, en la validación saben que deben confrontar los procedimientos de los alumnos y plantear preguntar para provocar la necesidad de argumentar por parte de los niños.

* Hay una coincidencia en los estudiantes de que, como parte de la memoria didáctica, deben conectar los conocimientos que quieren que aprendan en esta planeación, con los que aprendieron en la jornada de práctica anterior, bajo su misma coordinación.

* Manifiestan claridad respecto a posibles dificultades atribuibles a la estrategia didáctica y/o al mismo diseño didáctico (esto lo profundizaremos en el siguiente apartado).

Ahora bien, ¿qué es lo que manifiestan en su estrategia didáctica? ¿Cómo es que se manifiesta la claridad en los diferentes momentos didácticos? Para dar respuesta a estas preguntas vamos a apoyarnos en los fragmentos de entrevista, principalmente en la entrevista previa a la práctica, sin embargo recuperaremos algunos fragmentos de la entrevista posterior y de sus ensayos de análisis de la práctica, sobre todo en los que se manifiesta una clara alusión a la reflexión sobre la estrategia didáctica utilizada.

IV.1.2.1. El contexto cotidiano como motivación inicial: las estrategias de EPrP1, EPrV2, EPrE3, EPrM5 y EPrA6.

Al estar analizando de manera comparativa las entrevistas de los siete estudiantes, tanto las aplicadas previamente como las posteriores a la práctica, nos damos cuenta que hay similitudes en el planteamiento de la estrategia didáctica, de ahí que el título de este subapartado haga referencia a una de ellas, es decir, cinco de los siete estudiantes se remiten al contexto cotidiano como el elemento que les permite involucrar a los niños en el proceso de resolución de los problemas planteados.

La situación didáctica de EPrP1 está centrada en el reparto de 3 pasteles entre 2 niños, es decir, en el reparto les toca más de un entero; el contexto de aplicación es un grupo de primer grado de primaria y en nuestro país en este grado escolar no se trabaja de manera formal el conocimiento de las fracciones, de ahí que sea perfectamente entendible la sensación que manifestó en la siguiente afirmación que escribió en su ensayo de análisis de la práctica:

En mi caso como tengo primer grado cuando nos dieron la situación didáctica de las fracciones para aplicar se podría decir que el mundo se me cerró ya que pensé el cómo los niños de primero trabajarían con fracción, lo que hice al principio fue ponerme en el lugar de los niños y pensar en algo que les llamara la atención a lo que se me vino a la mente las imágenes o dibujos así que decidí aplicarles dos problemas el primero que tuviera los dibujos de las personas a quien se les fuera a repartir las frutas y aparte darles las frutas a repartir pero también por medio de dibujos, enseguida se les leería el problema para que por medio de los dibujos dados pudieran ir haciendo el reparto de las frutas, el segundo problema también

consistiría en reparto de frutas sólo que la diferencia sería que este problemas no iba a tener dibujos así vería la reacción de los alumnos y que es lo que harían con este problema, al momento de llevar acabo esto lo que pasó fue que algunos de los niños con facilidad y sin ayuda de plantear en su hoja el problema pudieron deducir la cantidad a lo que me sorprendió mucho y quedé satisfecha del problema planteado, pero con la inconformidad de que algunos de los niños si batallaron para poder realizarlo puede que haya sido demasiado difícil para ellos o la consigna no haya estado bien planteada. (ApP1)

La primera parte denota su conocimiento de que curricularmente no se trabajan las fracciones en este grado escolar, en tal sentido se hace necesario pensar en función de los sujetos con los que trabajará; llama la atención la manera como considera que los niños de primer grado hacen uso de los dibujos e imágenes para poder visualizar la resolución del problema, pareciera ser que la representación que se presenta tiene que ver con su conocimiento de las características de los niños a esta edad: motivación mediante el dibujo y las imágenes, pero además darles el material; sin embargo en la segunda parte de su estrategia es precisamente ésta la variable que complejiza el problema (adicional al aumento en las cantidades, como veremos más adelante).

El caso de EPrP1, como decíamos al inicio de este apartado, comparte con sus compañeros la intencionalidad explícita de remitirse al contexto cotidiano como una forma de involucrar a los alumnos en el proceso de resolución del problema (devolución del problema en términos de la Teoría de las situaciones didácticas); el siguiente fragmento de registro es ilustrativo al respecto (recordemos que la situación didáctica original, sólo hacía referencia a “pasteles” y los protagonistas del reparto eran los mismos niños de la clase):

E.- Ah, o.k, ¿cómo decidió este orden?, o ¿qué estrategia es la que va a trabajar para su planeación?

P1. Mi estrategia es como llegar a decir a los niños, como llegar platicándoles, que ayer mi abuelita llegó con 3 manzanas y me gustaría repartírselas a mis primos pero como no saben cómo, quisiera que ustedes me ayudaran cómo, así, introducirlas al problema de forma comunicativa, así, charlando con ellos, primero charlando con ellos,

E.- Ajá,

P1. Ya después espero que la respuesta de ellos sea afirmativa

E.- Claro

P1. Ya les daría yo el problema en una hoja de máquina, pero a ese problema le introduciré los 2 monitos que significaría el niño y la niña

E.- Ajá

P1. Y aparte les llevaría simbolizando las manzanas, para que ya al momento que les esté dando a ellos las indicaciones

Como podemos apreciar esta idea de “introducirllos al problema de forma comunicativa” va acompañada con la introducción de “personas” que generan un ambiente amable y familiar para los niños, adicional a ello, es importante señalar que se busca generar la necesidad de resolver el problema a partir del acercamiento de la situación con los agentes de la clase, es decir, el papel de los niños es ayudar a la maestra a resolver un problema: repartir tres manzanas entre sus dos primos. Este doble juego, la aparente necesidad real y el contexto cotidiano familiar, se consideran los elementos que contribuirán a la devolución del problema hacia los niños y por ende al logro de su implicación en su resolución.

De igual manera EPrV2 hace alusión al contexto cotidiano para motivar la resolución del problema. En este caso, prácticamente retoma la consigna del problema original, sin embargo al momento de la entrevista y cuestionarle sobre su estrategia es donde incorpora, como “preparación del medio”, el contexto cotidiano:

V2 Con la preparación del medio que es, como plantearles las fiestas de cumpleaños, que cosas les dan pasteles, y así de los pasteles hablar de y luego decirles que van a repartir, que unos niños fueron que tenían 3 pasteles y que se los querían repartir entre los 2, pero que no sabían cómo repartirlos E.- De modo que les tocará lo mismo a los 2 de ese pastel

V2 Ajá, los niños pueden contestar que lo reparten, que parten el pastel en varios pedazos, para cada uno, y a partir de ahí, les ayudaría a estos niños a repartir los pasteles, bueno les pintaría unos pasteles en unas hojas de colores,

En este caso, al no modificar la consigna original, se opta por agregarle un contexto familiar para los niños y, claro, donde hay pasteles hay fiesta de cumpleaños, de nuevo la alusión al contexto cotidiano, acompañado de la necesidad de ayudar a otros a resolver un problema, los niños que “no sabían cómo repartirlos”.

Adicional a esta situación, la alusión al contexto cotidiano como motivación inicial, apreciamos en el fragmento anterior que el estudiante anticipa la posible estrategia de resolución de los niños, la cual es sencilla en tanto el problema matemático planteado no amerita algo más complejo.

El caso de EPrE3, aparte de que también recupera el contexto cotidiano como elemento inicial y motivador, al revisar su ensayo de análisis de la práctica encontramos una explicación muy clara del porqué hacerlo de esta manera, tal y como apreciamos en el siguiente fragmento de registro:

3 pasteles entre 2 personas.

Esta situación fue trabajada en la primera jornada de Observación y Práctica Docente en la escuela primaria Justo Sierra, de Pedregoso, Pinos, Zac. Con el grupo de 3° B, dicha situación consistía en el planteamiento de un problema en el que estaba implicado un reparto, el cual consistía en repartir 3 pasteles entre 2 personas, donde correspondía, $1 \frac{1}{2}$ pastel para cada uno.

Los niños respondieron de buena manera ante la situación. La preparación del medio fue exitosa, hablamos sobre las fiestas de cumpleaños y sobre qué hay en ellas, los niños se mostraron participativos e interesados en este tema, posteriormente el planteamiento del problema fue el siguiente: el día 1° de Octubre fue mi cumpleaños, y fueron a visitarme las maestras Bianca, Verónica y Daniela, y cada una me llevó un pastel pequeño de regalo, pero después fueron a visitarme mis amigos Manuel y Toño, como le haríamos para repartir esos pasteles entre mis amigos .

Ante esta situación planteada en un contexto bastante real y significativo, debido a que la fecha en que fue aplicada la clase era muy cercana a la fecha real de mi cumpleaños, elemento central de problema y también, porque los nombres de las maestras que usé en el problema, eran los nombres de mis compañeras de equipo de prácticas, las cuales los niños identificaron de inmediato, lo que permitió que la situación estuviera centrada en hechos muy cercanos a la realidad. (ApE3)

Varias cosas sobresalen del fragmento del ensayo, en primer lugar, la “preparación del medio” se plantea en un contexto familiar para el niño “*hablamos sobre las fiestas de cumpleaños y que hay en ellas*”, lo cual contribuye a meterlos en la situación, creando un ambiente común y familiar para los niños, con lo cual se logra el propósito motivacional: “*los niños se mostraron participativos e interesados en el tema*” y permite generar las condiciones para plantear el problema.

En segundo lugar, como parte de esa reflexión metacognitiva que le permitió al estudiante reflexionar sobre lo hecho (recordemos que el fragmento de registro es de su análisis posterior a la práctica), el reconocimiento explícito de que el contexto cotidiano es un elemento que al incorporarlo al planteamiento del problema le da mayor significatividad y además permite centrar su estrategia didáctica dentro de los enfoques oficiales para la enseñanza de las matemáticas.

Y, en tercer lugar, aunque eso lo retomaremos más adelante cuando hablemos de las dificultades que se pueden presentar en el diseño de los problemas, vemos que éste (el problema) a la vez que recupera el contexto cotidiano, lo deja fuera al momento de operar con los datos, dado que ya enunciados éstos, sólo considera los tres pasteles y los dos amigos como datos para resolver el problema, es decir, ni las tres maestras, ni el festejado (el del cumpleaños) son considerados en el reparto del pastel, lo cual en un “contexto cotidiano” no sucedería.

A partir de la comparación entre las afirmaciones de los tres estudiantes entrevistados podemos detectar cómo es que se fortalece esta representación en ellos, sobre todo en el tercer caso, es decir, la representación social estaría enunciada en los siguientes términos, en el proceso de planteamiento y resolución de problemas, la vinculación con el contexto real y significativo, para los resolutores, contribuye al devolverles la responsabilidad en el proceso resolutor; adicional a ello encontramos un elemento más que caracteriza esta representación, el problema está atribuido a personajes cercanos a los niños, de tal manera que se genera la necesidad de resolverlo para ayudar a otros, pero esos otros me significan algo (familiares, amigos, el profesor, etc.) lo cual me “obliga” a ayudarlos.

El caso de EPrM5 también fortalece esta representación, y como ejemplo sólo recuperamos el siguiente fragmento desde su planeación de clase:

Comenzar la clase recapitulando la situación didáctica que se realizaron las prácticas pasadas. Se acuerdan de los 5 niños que fueron a la feria de San Francisco y que sólo habían ajustado 2 barras de chocolate, pues resulta que de esos 5 niños se perdieron 3 niños y los dos niños restantes de la desesperación les dio hambre y se fueron al puesto de dulces. Ahora resulta que esos 2 niños se compraron 3 barras de coco y al repartírselas a cada uno le tocó un pedazo de 6 cm y quieren saber ¿cuál era la medida de cada barra de coco?

En las partes subrayadas resaltamos las características comunes a los anteriores fragmentos de entrevistas, principalmente el asunto de la “memoria didáctica” (subrayado sencillo), la alusión al contexto cotidiano, el lugar de la “feria” es un pueblo cercano a donde viven los niños (subrayado doble) y el alejamiento del contexto cotidiano ante cuestiones que no corresponden (por ejemplo el que “se pierdan 3 niños”; -subrayado ondulado).

Finalmente, en la articulación entre el contexto cotidiano y un contexto matemático propio de la situación problema encontramos las declaraciones de EPrA6, quien sólo recupera una situación cotidiana como inicio pero inmediatamente se centra en los datos que aporta el diseño original de la situación problema:

A6. Para trabajar la memoria didáctica, es lo que estamos viendo ahorita y como el otro día les apliqué una situación didáctica similar, recuerdan la otra semana que trabajamos con los popotes, usamos los popotes, o alguien sabe para que los usamos.

E.- Mju

A6. ¿Qué hicimos con ellos?, luego les contaré que sólo 2 niños fuimos al circo, con el dinero que les sobró de los boletos de entrada compramos 3 barritas de chocolate entre los dos, los repartieron en partes iguales y luego juntaron lo que

compraron y les tocó un pedazo de cartoncillo como de 6 cm, tendríamos que investigar qué, ¿cuál era el tamaño de cada uno de los chocolates que compraron cada uno?, y luego ya las fracciones van a formar equipos de 4 integrantes, se enumeran para que cada uno se integre en el equipo que le tocó, y ahí faltan chavillos como unos dos, se le entregaría a cada equipo 2 tiras de cartón de 6 cm y una tira de cartulina de 40 para que la manipulen, una hoja de papel también por si la necesitan y unas tijeras, ahora les pediría que dentro del equipo resuelvan el problema sin copiarle a los demás equipos, podrán cortar la tira de 40 cm y que ellos hagan, luego los dejaría que interactúen entre sí, y que con sus métodos resuelvan el problema construyendo el chocolate completo

La frase “y luego ya las fracciones” es la que nos permite apreciar la articulación y la toma de distancia entre el contexto cotidiano y el campo de las matemáticas, de tal manera que el contexto cotidiano se recupera sólo como un elemento tangencial para ubicar la situación, pero el centro está puesto en que los alumnos usen su material para determinar el tamaño de la barrita de chocolate o el “chocolate completo”.

De manera global, en todos los casos que coinciden en esta estrategia didáctica hay un elemento más que la caracteriza, al hacerle ligeros cambios a la situación didáctica original (en el contexto, en la organización de equipos, en la forma de presentación) al mismo tiempo están asumiéndola como propia, es decir apropiándose de la situación y comprometiéndose en su aplicación; esto que parecería irrelevante, no lo es en el contexto de la formación docente inicial, sobre todo si asumimos la formación de un docente reflexivo quien no aplica acríticamente las propuestas oficiales (aunque en este caso son diseños experimentales de experto), al contrario, las reinterpreta y adecua a las circunstancias contextuales en las que las aplicará, considerando las características de su grupo, el tipo de materiales con que pueden interactuar, pero sobre todo la conexión con situaciones anteriores (memoria didáctica) de tal manera que esta extensión de los conceptos matemáticos es lo que permite el logro de aprendizajes significativos. Esto no es casual, obedece al proceso de transposición didáctica efectuado durante el curso de Matemáticas y su enseñanza II, y nos atrevemos a decirlo a partir de las evidencias que hemos trabajado en el capítulo III y las que aquí vamos incorporando, sobre todo a partir de observar cómo se van objetivando en el escenario de la práctica docente, tanto en el rediseño de su situación didáctica, como al hablar sobre la estrategia didáctica que utilizarán para concretarla y el lenguaje didáctico específico se convierte en herramienta de diseño y análisis, configurando un esquema mental (y al ser compartido, una representación social) que destranspone el esquema tradicional de enseñanza de las

matemáticas (entendiendo por ello la práctica mecánica de algoritmos desprovistos de significado, sentido y funcionalidad).

IV.1.2.2. La situación problema define el contexto y la estrategia didáctica. El caso de EPrR6.

Esta estudiante centra su estrategia didáctica en la aplicación de la situación didáctica prácticamente en los términos que fue diseñada originalmente; al igual que sus compañeros le añade el contexto de los “chocolates”, sin embargo el centro está puesto con mayor énfasis en las relaciones numéricas entre los datos, por ello la ubicamos en esta categoría, la situación problema define el contexto y la estrategia; para mayor claridad retomamos sólo un fragmento de registro:

R6. (...) ya en la acción y formulación voy anotar varias consignas, voy a dividir al grupo en 3 equipos, porque son muy pocos niños, porque la situación nos comenta que son equipos de 4 y son como 8 equipos los que se tienen que hacer, pero mis niños son muy poquitos

E.- 15 niños

R6. Mju, entonces los voy a dividir en 3 equipos nada más, entonces en el pizarrón les voy a poner la consigna para el equipo 1, la consigna para el equipo 2, y la consigna para el equipo 3, entonces cada equipo se va a centrar en la consigna que está en el pizarrón.

En el apartado anterior afirmamos que en la medida que los estudiantes se apropian de la situación didáctica, la incorporan y toman conciencia de sus implicaciones, se van formando como maestros reflexivos sobre su práctica, en este mismo sentido, en el anterior fragmento de entrevista podemos ver cómo el reconocimiento del contexto le posibilita para hacer los ajustes necesarios y en lugar de retomar la organización del grupo en 8 equipos, sólo forma 3.

En lo general la diferencia es muy sutil entre esta estrategia y la de los anteriores casos, convendría explorar en otra ocasión las decisiones que toma y la estrategia que construye cuando no se vea condicionada por un diseño previo, sino que tome en cuenta sólo el contenido, pero eso por el momento no lo podemos determinar, sólo afirmamos que el mismo diseño orienta la estrategia a seguir.

IV.1.2.3. La estructura del juego “¿quién se acercó más?” como base de su estrategia didáctica. El caso de EPrI4.

A diferencia de los otros seis participantes en la investigación, quienes retomaron una situación didáctica diseñada por un experto (Block, 1987), ella prefiere explorar qué sucede con la aplicación de un juego que previamente trabajaron en el salón de clase de la Escuela Normal; aunque previamente a la aplicación del juego hace una “preparación del medio”, al momento de articularla ésta resulta artificiosa, es decir, no hay vinculación entre la preparación del medio y la situación que plantea el juego “¿Quién se acercó más?”.

En el siguiente fragmento de registro podemos apreciar lo que afirmamos:

E.- ¿cuál es la estrategia didáctica que va a llevar usted en su clase? Primero que hace luego que hace

M5. Pues primero les tengo aquí un problema, voy a comprar 3 litros de agua y sólo hay botellas de tanto, para que ellos me lo, lo resuelven, vamos a tratar que cada uno lo resuelva y luego ya entre todos ya después los voy a formar en equipo

E.- ajá

M5. Y ya después les voy a entregar unas tarjetas, las tarjetas, no las tiras

E.- Las tiras

M5. Las tiras, son de metro, una es de 1 metro y en la otra ya vienen los medios y los cuartos

E.- Ha en una sola tira vienen las 3 medidas

M5. Ajá, y ya ahí les voy a dar las indicaciones, les voy a dar también una tarjetita donde tenga un punto, una fichita o así, una piedrita para que ellos le pongan una fichita donde ellos quieran del punto cero a donde quieran, entonces de ahí con la medida, con la otra tira de medios y de cuartos y de tercios van a ellos calcular, no pues $\frac{1}{2}$, más $\frac{1}{4}$, más o $\frac{2}{4}$, para llegar al punto donde está la ficha y ya van anotar, bueno el niño va a poner, un niño va a poner la fichita en un punto donde él cree

E.- En un punto

M5. Y los demás van a poner en su cuaderno cuanto creen, usando las fracciones todas las fracciones, ya después que todos lo tengan, van a, no pues yo dije $\frac{3}{4}$, van a sumar, van a con las tiras van a verificar hasta donde llega $\frac{3}{4}$ y el que se acerca más va a ser el que gane, el juego va a terminar cuando todos ya hayan, bueno dado la ronda de todo y ya

E.- Bueno esa sería la segunda parte y ¿Luego de ahí que sigue?, hacen ese juego y luego

M5. Vamos a revisar las sumas que hicieron

E.- Ajá, ajá

M5. Vamos a verificarlas, las que estén bien, porque capaz que le dijeron a uno que estaba mal y estaba bien, vamos a verificar las operaciones

En primer lugar, es necesario decir que el problema que plantea de entrada corresponde a un diseño previo elaborado como parte de un ejercicio de clase en la Escuela Normal; dicho problema fue congruente como preparación del medio para la lección 24 “Es mayor a $\frac{1}{2}$ ” de la página 85 de 4º grado de educación primaria, dado que el contexto

de la misma contemplaba el cálculo de la capacidad de recipientes usando fracciones (Cfr. Apartado III.2.1.1.3), sin embargo se desarticula este diseño cuando el nuevo contexto de trabajo, a partir del juego (Cfr. Anexo 13 Juego ¿quién se acercó más?), es la medición de longitudes expresando sus cálculos con una suma de fracciones.

Por otro lado, en este caso la estructura del juego es lo que va guiando la estrategia didáctica y al parecer la estudiante conserva esa estructura, aunque no precisa la versión del juego que utilizará, lo cual complejiza su aplicación dado que en la versión de su planeación incluye medios, tercios y cuartos, en tanto en el diseño original, la primer versión sólo incluye medios y cuartos, y es hasta la tercera versión que se incluyen los tercios y sextos.

En sí, esta estrategia refleja las características de la misma representación que orienta a los estudiantes hacia la necesidad de recuperar el contexto cotidiano como elemento motivador base para devolverles la responsabilidad a los estudiantes, sin embargo al mismo tiempo se convierte en un anticipo de la necesaria vigilancia epistemológica que deben tener los docentes en tanto la ubicación del tipo de situación didáctica hace o no pertinente la necesidad del contexto cotidiano en el diseño de la estrategia didáctica.

IV.1.2.4. El recurso a la “memoria didáctica” para lograr aprendizajes significativos.

Cuando nos preguntamos por el impacto de los cursos en la formación de docentes para la enseñanza de las matemáticas, surgen incertidumbres y en muchas ocasiones la sensación de que no hay tal impacto o influencia, sin embargo recuperando lo que analizamos en el capítulo anterior, principalmente el apartado donde se discuten las formas de “preparar el medio”, una de las cuestiones que ahí resaltamos tiene que ver con la recuperación de la “memoria didáctica” como una estrategia no sólo para vincular el nuevo aprendizaje con los conocimientos anteriores, sino sobre todo con la intención de que los docentes en formación tomen conciencia de las relaciones entre diferentes contenidos del currículo y de que en la medida que conozcan esto pueden centrar su papel como docentes en el logro de la transferencia de los aprendizajes de los niños; es decir, la tarea de establecer las conexiones entre diferentes contenidos (y por ende aprendizajes) no debe ser sólo del sujeto que aprende, al contrario, en la medida que los profesores logren explicitar

esas articulaciones estarán en condiciones de que sus alumnos logren aprendizajes significativos.

Al revisar las entrevistas previas de los estudiantes vemos que hay una constante en la preparación del medio, con excepción de los dos estudiantes que practicaron en primero y segundo grados de primaria, el resto considera de suma importancia que antes de plantear el problema principal de la clase, se recuperen las experiencias anteriores del trabajo didáctico con un contenido similar.

En la siguiente tabla recuperamos los fragmentos de entrevista donde se hace alusión a ello:

Tabla 38. Memoria didáctica.

EPrE3	EPrI4	EPrM5
E3.- Porque ya comparando eso como que si se me aclaró un poco más la idea de la consigna, en realidad no tuve ninguna dificultad, nada más era la preparación del medio pero <u>me remití a la situación anterior</u> , la situación anterior es que era mi fiesta de cumpleaños y que me habían regalado 3 pasteles y que los iba a dividir, <u>ahora me remonte a una misma situación de un cumpleaños, pero ya con otra compañera pues ya la situación es diferente</u>	I4. <u>Pues lo voy a trabajar con las sesiones pasadas</u> E.- Ajá, I4. <u>Con lo que ya vieron con la maestra</u> E.- Ha I4. Y ya, si recuerdan la lección E.- Ajá, ajá I4. Se llama, que, suma y resta de fracciones, y <u>les voy a preguntar si se acuerdan de esa lección, ¿qué vieron de ahí?</u> , E.- Ajá, ajá I4. <u>También en la vez pasada les lleve que me dividieran 2 pasteles entre 3 niños y también lo voy a relacionar</u>	<u>La preparación del medio era una breve recapitulación de la situación que se aplicó en la jornada anterior.</u> Después se les planteará el nuevo problema a resolver y los materiales que utilizarán...
EPrR6	EPrA6	
R6. Ah, o.k, bueno desde preparación del medio como le comentaba, <u>pues primero inicio preguntándoles a los niños si recuerdan lo que hicieron, bueno el trabajo que hicieron la vez anterior</u>	A6. <u>Primero a los niños, para trabajar la memoria didáctica, es lo que estamos viendo ahorita y como el otro día les aplique una situación didáctica similar, recuerdan la otra semana que trabajamos con los popotes, usamos los popotes, o alguien sabe para que los usamos</u> E.- Mju A6. <u>qué hicimos con ellos, luego les contaré que sólo 2 niños fuimos al circo...</u>	

Este proceso de recuperación de la experiencia didáctica compartida es lo que se ha llamado “memoria didáctica”

Esta memoria “[...] se manifiesta en el proceso de enseñanza por la utilización de informaciones y datos personalizados, contextualizados, temporalizados y no universales, (Brousseau y Centeno; 1991; 203). La memoria didáctica conduce al profesor a modificar sus decisiones en función de su pasado escolar común con sus alumnos, sin cambiar su sistema de decisión (el contrato en curso). El carácter “didáctico” de la memoria, deriva de que las decisiones modificadas conciernen a las relaciones de cada alumno con el saber en general y/o con un saber particular (Ávila, 2001, pág. 13)

La “*utilización de informaciones y datos personalizados, contextualizados, temporalizados y no universales*”, a decir de Ávila (2001) es lo que caracteriza la memoria didáctica, de tal manera que al revisar los fragmentos de la entrevista podemos percatarnos que estas informaciones fueron utilizadas de dos maneras complementarias; en primer lugar, la información que proviene de las experiencias compartidas previamente, es decir, cuando el estudiante (en su papel de profesor) trabajó un contenido similar con el mismo grupo que ahora va a practicar, ello le da la oportunidad de “recapitular”, “remitirse a la situación anterior” o bien “preguntar si se acuerdan de lo que vieron anteriormente” y todas estas acciones tienen la intención de generar la memoria didáctica.

En segundo lugar, como nos dice EPrI4 “les voy a preguntar si se acuerdan de esa lección, ¿qué vieron de ahí?”, en tal sentido la memoria didáctica está asociada ya no sólo a experiencias compartidas, sino también a progresión curricular. En este caso se aprecia la comprensión que la estudiante tiene respecto a los contenidos y lecciones que se trabajan en este grado escolar y le parece oportuno recuperar ese conocimiento para establecer la conexión con el nuevo aprendizaje. En sentido restringido esta recuperación de los recuerdos en torno a una lección podría escapar a la definición de memoria didáctica, sobre todo cuando se hace alusión al “*pasado escolar común*” entre profesor y alumnos, sin embargo dada la circunstancia de los estudiantes en tanto “*practicantes*”, considero que esta alusión al tratamiento de lecciones anteriores que los niños trabajaron con su maestro titular sí puede ser considerada dentro de la memoria didáctica grupal.

Ahora bien, a partir de la experiencia en formación docente inicial y desde la recuperación y análisis de los datos que aquí estamos trabajando, encontramos que esta alusión a la memoria didáctica, configura una representación social respecto a cómo iniciar las clases y una estrategia didáctica muy congruente con una óptica constructivista

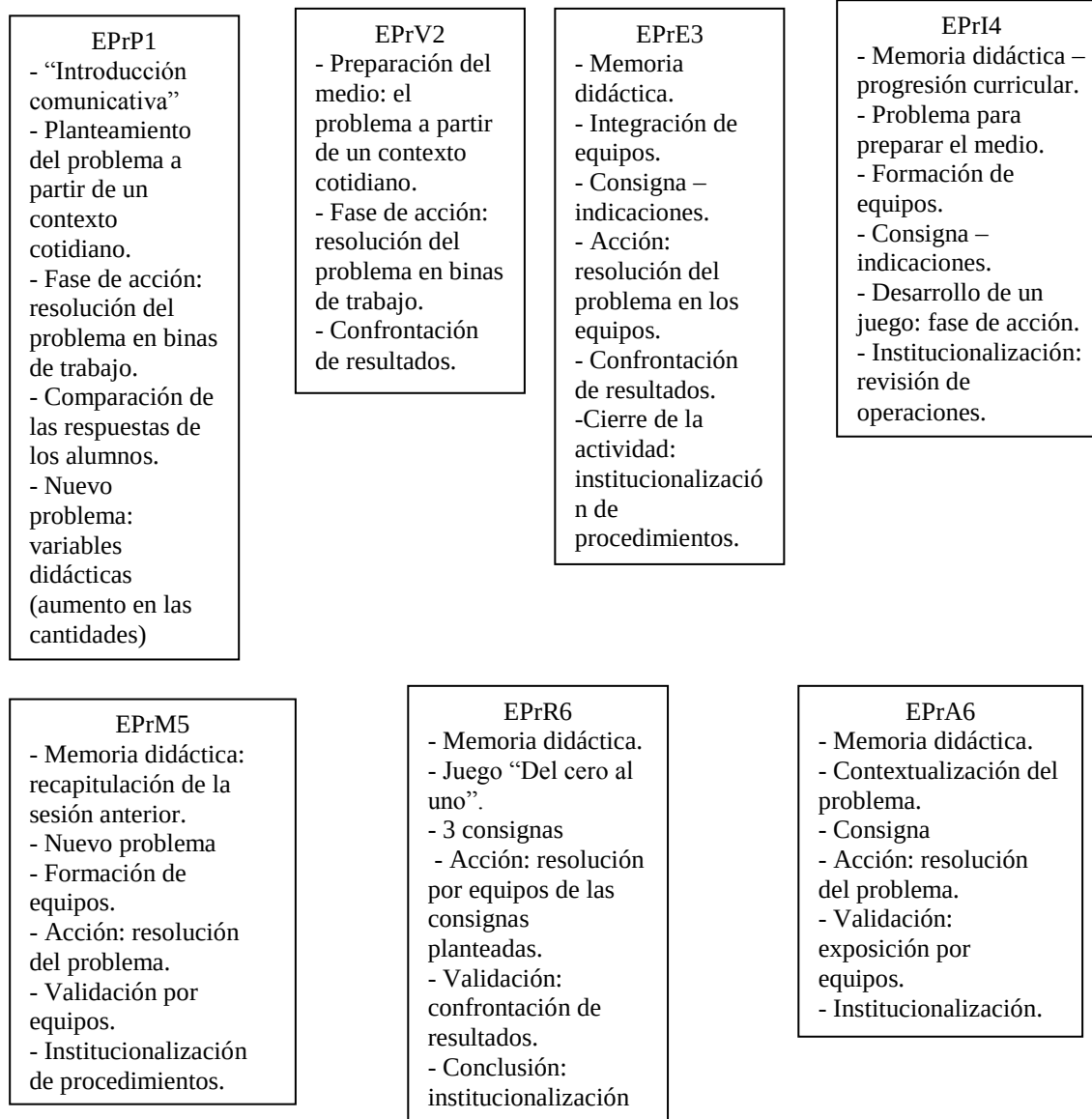
favorecedora de aprendizajes significativos que requerimos fortalecer; históricamente se ha hecho alusión al aprendizaje desvinculado de contenidos y a la tarea de los alumnos respecto a la transferencia de los conocimientos matemáticos a situaciones contextuales, en tal sentido, el hecho mismo de que los docentes en formación integren dentro de sus estrategias didácticas la memoria didáctica y logren establecer conexiones entre saberes “antiguos” y saberes “nuevos” es un acierto que debemos potenciar.

IV.1.2.5. Síntesis de la estructura de su estrategia didáctica: momentos didácticos.

En el capítulo III, dejamos claro que el posicionamiento didáctico que atraviesa el esquema formativo del profesor es totalmente congruente con los planteamientos de la Teoría de las situaciones didácticas y, de igual manera, también dejamos claro que hay una intencionalidad explícita por utilizar los conceptos teóricos como herramientas tanto para el diseño de situaciones didácticas, como para el análisis de la práctica docente. En este momento vamos a revisar, a partir de los datos, en qué medida se logran objetivar los conceptos teóricos revisados durante el curso.

Los conceptos teóricos se convierten en los elementos que ayudan a configurar las estrategias para llevar a cabo una tarea, en este caso la tarea es el diseño de una situación didáctica; este momento del diseño y la clarificación sobre la estrategia está vinculado con un ejercicio de reflexión metacognitiva que le permite al estudiante tomar conciencia y autoregular los límites y las posibilidades de su acción. Aquí es importante mencionar que el momento mismo de la entrevista se convirtió en un momento para la reflexión metacognitiva, hecho que se evidenció en las respuestas titubeantes, de algunos, cuando se les pidió que verbalizaran de manera sintética su estrategia didáctica, al parecer no es habitual este tipo de reflexión.

Desde el análisis de los datos podemos sintetizar la estrategia didáctica, de cada uno de los estudiantes, de la siguiente manera:



En síntesis, la representación social sobre la estrategia didáctica, que se evidencia desde el análisis de la información, podría incorporar los siguientes elementos:

- a) **Preparación del medio:** En este componente, los estudiantes procuran remitir a los niños a un **contexto cotidiano** que es el que le da sentido al problema planteado, adicional a ello se genera la necesidad para resolverlo. La introducción comunicativa a la que se ha referido EPrP1 se traduce en el hecho de narrar una historia cotidiana de la cual se hace surgir el problema.

Se recupera la **memoria didáctica** y dentro de ésta la articulación entre el saber viejo y el nuevo, a partir del reconocimiento de la progresión curricular.

La misma preparación del medio involucra la **organización de equipos** (presente en todas las estrategias didácticas verbalizadas) y el **reparto de materiales**⁷², generalmente manipulables.

- b) **Consigna**: Este componente presenta dos variantes, en el primer caso, la consigna se combina con la misma narración de la situación problema y se funde en ella, de tal manera que no necesariamente se cumple la triple devolución a que alude (Centeno, 1997), quedando imprecisas las “reglas del juego”⁷³; el segundo caso es una consigna que se queda en la instrucción propia de la actividad, es decir, en decirles qué van a hacer y cómo lo van a hacer.
- c) **Fase de acción**: Hay coincidencia en todos los estudiantes de que en este momentos es la interacción de los alumnos entre sí y con el problema lo que contribuirá al logro de los aprendizajes; se ha instalado la idea de que aquí los alumnos tienen que poner en juego sus propios conocimientos y que el profesor debe dejarlos que resuelvan los problemas “como puedan”, porque ello da oportunidad de trabajar el siguiente momento o fase didáctica.
- d) **Validación**: Este momento adquiere algunos matices, desde la comparación de resultados, hasta la confrontación y/o la exposición de los procedimientos utilizados en la resolución de los problemas. En términos del lenguaje utilizado para entender este momento sí es importante establecer las diferencias, dado que éstas son las que determinarán la acción, por ejemplo, cuando se habla de comparación de procedimientos, ello se puede quedar en una valoración superficial, sin argumentación matemática, en cambio la confrontación hace alusión al debate y la argumentación (depende del maestro y de los conocimientos de los alumnos, el nivel de construcción de los argumentos) y la exposición por equipos corre el riesgo de sólo mostrar los procedimientos encontrados.
- e) **Institucionalización**: Por definición alude a la formalización de saberes, sin embargo, desde el análisis de la información nos queda claro que los estudiantes reconocen cuándo se está en condiciones de formalizar saberes y cuándo sólo se institucionalizan procedimientos o formas de proceder.

⁷² Incluso en este caso se ha reconocido por parte de EPrR6 que el hecho mismo de proporcionar suficiente material manipulable contribuye a potenciar procedimientos matemáticos que de lo contrario no surgirían.

⁷³ Entendidas como lo que se vale o no hacer para resolver el problema.

Como podemos apreciar, estos elementos coinciden con los conceptos teóricos que desde la Teoría de las Situaciones Didácticas se han trabajado en el curso de matemáticas y su enseñanza, además de que al considerarse como una fase de experimentación (en el entendido de que están experimentando con situaciones didácticas diseñadas por un experto en el campo), la estrategia didáctica se adecua, en lo general, a la articulación entre los elementos teóricos revisados y el diseño que se va a experimentar.

Ahora bien, desde finales de los 90's, Peltier había afirmado que los estudiantes para maestro *“con frecuencia reproducen una forma de enseñanza relativamente poco alejada de la que vivieron cuando ellos eran niños. Incluso, si declaran que su concepción de la enseñanza de las matemáticas ha evolucionado, esta evolución sólo debió alcanzar las capas más superficiales de la representación construida desde la infancia. En situación de clase, el concepto inicial vuelve a surgir con frecuencia”* (Peltier, 1999, págs. 21 - 22); sin embargo, a partir de la revisión no sólo de sus declaraciones en las entrevistas, sino también de su participación en las clases de la Escuela Normal (incluida la revisión de fragmentos de videos de sus propias clases) y del análisis de sus ensayos producto de sus prácticas docentes, podemos constatar que, en los casos objeto de análisis, sí hay un esfuerzo sistemático de reflexión para acercarse a enfoques de enseñanza de corte constructivista y alejarse del modelo “aprendo – aplico”. Este esfuerzo comienza con la clarificación y experimentación de una estrategia didáctica alternativa, por supuesto que producto de la construcción o propuesta en el escenario de las clases en la Escuela Normal.

Se podría objetar que es la exigencia propia del curso lo que provoca tales actitudes y en gran parte hay razón, sin embargo no debemos olvidar que en el proceso de cambio de las representaciones sociales debe generarse lo que los alemanes llaman “kulturstreit”, es decir un conflicto de ideas y un debate explícito entre las representaciones previas, en términos de Peltier “construidas desde la infancia”, principalmente a partir de la vivencia como alumnos, y las representaciones alternativas, desde la nueva visión de profesores. Este debate entre representaciones es lo que, además de los intercambios comunicativos y construcción de consensos, debe generarse en función de la construcción de un nuevo tipo de transposición didáctica, muy cercano a lo que Antibi llama “destransposición de saberes”.

Ahora bien, el hecho mismo de que los estudiantes reconozcan y apliquen esta estrategia didáctica que han aprendido en el curso de Matemáticas, aunque manifiesta un

cambio en sus esquemas formativos previos, ello no está exento de dificultades; en esta parte coincidimos parcialmente con lo ya reportado por (Peltier, 1999), y decimos que parcialmente porque encontramos que los estudiantes “*se escudan tras los obstáculos del terreno y los hábitos del grupo*”, como ella lo afirmaba, sin embargo considero que reconocer las presiones de una realidad, en la cual se ha documentado que aún perviven confusiones y tradicionalismo (Cfr. Ávila, 2001; Ávila, 2004; Ávila, 2011; además de la vivencia cotidiana) no necesariamente es un escudamiento negativo, al contrario, este incipiente reconocimiento debe hacerse objeto de estudio en el escenario de la Escuela Normal, porque es el enfrentamiento directo el que contribuirá a superar las problemáticas y es el intercambio de visiones el que negociará con las nuevas representaciones hasta instalar una más congruente con el enfoque constructivista.

IV.1.3. Dificultades al planear y valoración posterior ¿cuáles son las características de la representación finalmente construida?

Aunque en el apartado anterior ya adelantábamos algunas de las dificultades, principalmente atribuibles a la experiencia formativa previa de los estudiantes y algunas de las coincidencias que vamos encontrando con estudios previos, en este apartado vamos a ir un poco más finos hacia las dificultades que los estudiantes enfrentan al planear, en el entendido de que la toma de conciencia sobre ellas contribuirá para ir construyendo alternativas de formación que las anticipen, pero a la vez el equilibrio entre las dificultades al planear y el éxito obtenido, o viceversa, así como el correspondiente análisis de sus consecuencias, puede contribuir en el proceso de “naturalización”, anclaje y objetivación de la representación que se quiere construir.

De entrada queremos aportar un dato que nos parece muy interesante y que no hemos visto considerado en algún otro reporte de investigación; como parte del cierre de la recuperación de datos, y a un año de distancia del desarrollo del curso de Matemáticas y su enseñanza II, les aplicamos una entrevista colectiva (Véase Anexo 19. “Transcripción de la entrevista colectiva”), a manera de análisis colaborativo de lo que recordaban de sus aprendizajes del curso, y al hacer la pregunta sobre la pertinencia de la estrategia didáctica de planeación que han utilizado, sobresale la siguiente afirmación:

Aa. Yo creo que sí, porque es la única forma en que he planeado desde que entré aquí, o sea ya es con la nueva reforma, uno ya está acostumbrado a trabajar de esa manera y no conoce alguna otra forma de trabajo. (EC 3).

Al analizar esta afirmación inferimos algo que, aunque se pueda ya saber previamente, muy poco se capitaliza como opción formativa, hay actividades que los estudiantes para maestro realizan por primera vez, por ejemplo el diseño de planes de clase, y de lo cual no han construido una representación social previa que pueda conflictuar la que se pretenda construir; esta circunstancia puede generar un campo de oportunidades para instalar (proceso de anclaje en la terminología de la Teoría de las representaciones sociales) una representación congruente con el enfoque que se quiera asumir.

El mismo reconocimiento de la alumna, en el fragmento anterior, implica un ejercicio de reflexión metacognitiva para tomar distancia entre esta forma de planear y la representación que pudo construir acerca de la enseñanza de las matemáticas.

Ahora bien, el proceso mismo de construcción de esta representación no está exento de dificultades, sobre todo

Porque una progresión didáctica no transcurre linealmente, conforme a una intención inicial derivada de la postura pedagógica del profesor. Si bien es él quien en principio define los términos del contrato que celebra con los estudiantes, la participación de los alumnos define la viabilidad, la ineficacia o incluso la obsolescencia del contrato en curso. Ante la contingencia y los desequilibrios en la relación didáctica, el profesor se ve obligado a actuar, a realizar acciones para regular el equilibrio didáctico y, en el límite, a cambiar de contrato (Ávila, 2011, pág. 45).

En tal sentido el reconocimiento de las dificultades, tanto como el éxito obtenido, es lo que les va dando elementos valorativos respecto a la pertinencia del cambio de una representación por otra y a la postre va definiendo los matices de la representación construida, es decir, configura los límites de la “normalización y la motivación⁷⁴” del lenguaje que acompaña a la representación finalmente construida.

Desde el análisis de los datos encontramos la referencia a cuatro campos de dificultades, las tres primeras están asociadas al “triángulo didáctico”: maestro, alumno y saber, y aparece una cuarta alusión de dificultades, atribuida al “tiempo didáctico”. Vamos

⁷⁴ la normalización y la motivación; mediante el primero los conceptos científicos pasan al lenguaje corriente y se emplean sin que se haya establecido una relación precisa con los otros términos del vocabulario; en tanto por el proceso de motivación, el concepto científico pasa al lenguaje corriente sin perder su primera función de designación, pero su estructura puede cambiar, y agregarse significados más comunes a su significado original, en tal sentido “se puede hablar de motivación cuando se produce una recombinación de una lengua por medio de un aporte nuevo, el que puede dar una coloración ‘científica’ a palabras de uso corriente e imponer una versión ‘corriente’ a palabras de la terminología científica” (Moscovici, 1979, pág. 171).

a analizar cada uno de estos casos, utilizando para ello los datos de los diferentes instrumentos utilizados.

IV.1.3.1. En el triángulo didáctico: dificultades atribuidas al desempeño del maestro; dificultades de los niños y dificultades atribuibles al saber en juego.

Cuando nos referimos al triángulo didáctico nos estamos refiriendo a esa red de interacciones entre los tres componentes principales de la relación didáctica: maestro, alumno y saber⁷⁵; es precisamente en esta red de interacciones que pueden generarse algunas dificultades al planear.

Cuando cuestionamos a los estudiantes al respecto, pudimos constatar que, a pesar de lo que ya afirmamos en párrafos anteriores, respecto a las posibilidades que pueden tener los formadores de profesores para instalar representaciones sociales congruentes con un enfoque constructivista, en tanto no han elaborado planes de clase previamente a su ingreso a la escuela Normal, de cualquier manera al enfrentarse a dicho proceso se entrecruzan las representaciones que sobre la enseñanza ya han construido en su escolaridad previa; la siguiente afirmación es ilustrativa al respecto:

M5. No, pues que es difícil, para mí ha sido difícil, este, diseñar clases con este modo, porque en primera no tienes que decirle al niño si está bien o si está mal, no le, no le puedes decir como quien dice cómo, no, tienes que dejar que el niño lo descubra, entonces aquí el papel del maestro es en cómo diseña sus preguntas, que preguntas hace a los alumnos, este, incluso el material que le lleva, como, cómo poder sacarle mayor fruto, no sé y pues si para mí, yo imaginaba que una clase de matemáticas era como a lo mejor las que me dieron a mí, o la más fácil, darles el algoritmo y que ellos lo apliquen

E.- Ajá

M5. Entonces diseñar clases así, a mí si se me ha dificultado (EPrM5)

En este fragmento de registro podemos ver cómo entran en conflicto las dos representaciones de la estudiante, por un lado, la representación producto de su experiencia como alumna, de una enseñanza centrada en el algoritmo y su aplicación, es decir, en el modelo aprendo – aplico, y por el otro la representación que se comienza a construir desde el mismo curso, donde se espera que los alumnos construyan sus conocimientos (aunque la estudiante se refiere a que “el niño lo descubra”, lo cual entra en contradicción con el

⁷⁵ En una conferencia dictada en la Universidad de Navarra, Brousseau ya habla del “hexágono de la didáctica”, en el cual incluye elementos contextuales en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Cfr. <http://upnatv.unavarra.es/fpdi/bro>

enfoque constructivista) y el maestro diseñe la situación didáctica para prever “*qué preguntas hace a los alumnos, incluso el material que les lleva*”.

Este reconocimiento de la diferencia es el primer paso para la transformación, aunque el camino aún es largo, dado que implica, siguiendo este ejemplo, la clarificación de las perspectivas epistemológicas que subyacen a cada representación: de un modelo centrado en la ostensión, a un esquema platonista de entes preexistentes y de ahí a una epistemología constructivista que dé paso a un modelo de enseñanza fundado en la transformación de saberes previos (Artigue, 1995).

Ahora bien, para fines analíticos vamos a clasificar las declaraciones sobre las dificultades al planear, en este apartado, en tres categorías: dificultades atribuidas al maestro, sus conocimientos, posibles descuidos o errores; dificultades atribuidas al alumno, desde la visión de los estudiantes; y, dificultades inherentes al saber matemático.

IV.1.3.1.1. Gestión didáctica y devolución del problema: dificultades reconocidas por los docentes en formación.

Para poder enunciar las dificultades que los mismos estudiantes reconocen, vamos a triangular la información de tres instrumentos: la entrevista previa y la entrevista posterior a la práctica, y el ensayo de análisis.

Antes de la práctica y a partir de la elaboración de su plan de clase, los estudiantes son optimistas en cuanto a no sentir o prever dificultades significativas en su aplicación posterior; en este caso podemos atribuirlo también a que era la segunda ocasión que iban a practicar con el mismo grupo, en tal sentido tenían la confianza del conocimiento previo de algunas características de los niños y sobre todo el antecedente de haber trabajado algunas situaciones problemáticas similares a las que ahora tenían que abordar.

En sí, desde su calidad de maestros, la dificultad más visible es atribuida a la comunicación de la consigna

E.- La elaboración de las consignas dice que es un reto

R6. sí, porque a lo mejor a veces no me doy a entender con los niños

E.- Ha o.k

R6. Entonces intento ser lo más clara posible para que entiendan bien lo que van a hacer

E.- ¿Qué es lo que se escribe en una consigna?

R6. Las indicaciones, lo que los niños van a hacer, por ejemplo ahora vamos a resolver un problema y se les da el problema, intento que lo resuelvan de ésta manera así, éstas son las instrucciones

E.- El problema, las instrucciones es lo que va en la consigna

R6. La devolución de la misma (EPrR6)

Sin embargo, sabemos desde la Teoría de las situaciones didácticas, que el momento de formulación de la consigna es un momento muy importante porque en esencia es el que instala prácticamente el rumbo de la clase; cabe aclarar que a esta dificultad la enuncio como de comunicación de la consigna, porque recordemos que están recuperándolas desde el diseño de un experto, en tal sentido es el momento de comunicación hacia los niños el que puede generar dificultades.

Para evitarlas, lo más natural, es lo que hizo uno de los estudiantes “A6. *Pues primero tuve que analizar bien la situación en lo que era la tesis didáctica, cómo respondían los niños a este problema. (EPrA6)*”.

A partir de la entrevista posterior a la práctica podemos encontrar de nuevo la alusión a la consigna, como una de las dificultades, con diferentes matices:

*** Se emite la consigna pero no se genera la devolución:** aunque durante el curso se habló de la importancia de la “devolución de la consigna”, esto es el momento en el cual no se deben conformar los estudiantes con un “sí” ante la pregunta a sus alumnos de si entendieron lo que van a hacer, parece ser que hay un olvido al momento de emitir la consigna y entonces vienen las dificultades; al respecto los estudiantes reconocieron que, a pesar de tener seguridad en su planeación al momento previo a la práctica, cuando ya se enfrentaron a ésta se vuelven a repetir las problemáticas, por ejemplo en ApI4...

La manera en que le lancé la consigna no fue la mejor manera pues al parecer no hubo claridad porque fue de la siguiente manera:

- MA6. Vamos a trabajar en equipos y les voy a entregar unas tiras que miden un metro, pero en ellas hay divisiones de medios, cuartos, quintos y décimos, uno de ustedes dentro del equipo va a poner una piedra en cualquier punto de la tira en blanco de esta manera, (haciendo el ejemplo en una tira blanca) entonces si queremos llegar a hasta la piedra utilizando las fracciones de las demás tiras, por ejemplo ¿en qué parte del entero se encuentra la piedra?

Y más adelante precisa...

MA6. muy bien, pero si tenemos que utilizar dos fracciones ¿cuáles utilizaríamos para llegar a $\frac{3}{4}$ que es donde se encuentra la piedra?

- Aos.- $\frac{1}{2}$ más $\frac{1}{5}$

Los alumnos al parecer comprendieron con el ejemplo que realizamos frente a todos, pero al momento de estar en los equipos ningún equipo sabía que era lo que teníamos que hacer.

En este caso, al ver que los niños aparentemente entendieron con el ejemplo que realizaron de manera grupal, no se hace una devolución de la consigna y es hasta que están los alumnos en la fase a didáctica que se da cuenta de que no estaba claro qué es lo que iban a hacer.

Prácticamente la misma situación se presentó tanto en ApE3, como en ApA6, ambos se dieron cuenta que aunque la consigna ya había sido dictada, los niños no tenían claro lo que iban a hacer:

ApE3: Como apreciamos en el fragmento de registro, los alumnos no sabían que iban a realizar aunque la consigna ya haya sido vertida, esto se aprecia con las preguntas o devoluciones que hace el maestro hacia los alumnos, las cuales son fallidas en varios intentos, ya que ninguno de los alumnos sabía que se realizaría, hasta que una de ellas recuerda la consigna y responde: vamos a ver cuáles son mitades, lo cual es retomado y aprovechado por el maestro para establecer nuevamente las reglas de la situación.

Dentro del análisis de este incidente en el que nadie recuerda que es lo se realizará, podemos encontrar como justificación a esto, el prolongado tiempo (7 min aproximadamente) que transcurrió desde que el maestro planteó la situación y dio la consigna, hasta el momento en que realizó la devolución, esto aunado al constante ruido provocado por la mala organización de los equipos en la clase y la tardanza en repartir el material, dieron como resultado el que la mayoría no entendiera el procedimiento. Pero con una sola alumna que logró captarlo, el maestro pudo retomar el rumbo de la clase y seguir haciendo más devoluciones y finalmente, los mismos alumnos fueron quienes se explicaron mutuamente la consigna.

Una ventaja comparativa de este caso con el anterior es que, aunque ambos reconocen problemas al enunciar la consigna, ApE3 intenta construir una incipiente explicación del porqué sucedió esto: mala organización de los equipos, tardanza en repartir el material, pero principalmente el hecho de que se dice la consigna y la devolución se genera tardíamente. En sus declaraciones también podemos ver entre líneas un aprendizaje muy importante, aprovecha la comprensión que puede tener una alumna para que se expliquen entre ellos la consigna, al parecer subyace la idea de que los alumnos entre sí, con su mismo discurso pueden generar mayor entendimiento de las instrucciones o consignas.

En el siguiente caso vemos una actitud de reconocimiento de las propias dificultades, con el afán de superar la culpabilidad que habitualmente se atribuye a los alumnos cuando algo no funciona en la clase:

ApA6: *En conclusión, creo que lejos de que el grupo no trabajaba a menudo con matemáticas y mucho menos con fracciones, tuve fallas al momento de dar la consigna, aunque después de dárselas una y otra vez parecía que lo que se buscaba estaba completamente entendido, al ver la reacción al momento de que los equipos trabajaban me di cuenta que aún así no había quedado completamente clara.*

Se nota un avance en la sensibilidad didáctica para observar las reacciones de los alumnos y por ende tomar decisiones sobre la marcha, esto es lo que se ha llamado “reflexión en la acción”, lo cual además de ser una competencia profesional es una actitud básica en el proceso de reflexión metacognitiva.

*** Un descuido que deviene en dificultad para la gestión didáctica del saber:** En este caso encontramos dos variantes de la dificultad para la gestión del saber didáctico, en primer término atribuida a la falta de previsión de materiales, lo cual aunque no cambia la consigna planeada sí se quedan los niños con ideas confusas y por ende no logran resolver el problema.

EPpM5: (...) yo llevaba, a lo mejor ahí fue una irresponsabilidad mía, pero llevaba el problema para imprimirlo ahí,

E.- Ha

M5. No lo tenía impreso y resultó que no había luz, entonces no, ya se los dicté, y les va a servir porque los niños también tienen muchas dificultades en la escritura, pero a lo mejor la forma de llevarlo ya adecuado es ya evolucionado pues, no tanto el dictado son otras estrategias, pero dije no pues se los dicto y muchos niños incluso la pregunta central, no pues de que tamaño era la barra, ellos le cambiaban a como era, ¿de qué tamaño era el pedazo que le tocó a cada niño?, y no era nada de lo que les había dictado, no tenía nada que ver con lo que yo les había dictado, de todas formas se fueron con esa finta y pues sí, eso fue lo que no me funcionó, pero pues debí de haberlo llevado mejor ya impreso

Evidentemente el cambio en el soporte del problema, es decir, el cambio del material impreso al dictado ocasionó que los alumnos no lograran resolver el problema y a la vez que la gestión didáctica de la maestra se complicara.

Un segundo ejemplo es el que se presenta en dos casos, EPpP1 y ApV2, cuando por un descuido en el momento mismo de la clase se ven obligados a hacer regulaciones a lo planeado para recuperar el equilibrio en la relación didáctica y por ende retomar el rumbo de la clase:

EPpP1: *P1 Si al momento de hacer la preparación del medio me equivoqué al momento de plantearles el problema, la preparación, como que no supe al principio como solucionarlo, ya después tuve que improvisar y les fui aumentando lo que fue con pasteles y personas, después se las disminuía con la finalidad de que quedaran 2 personas, y 3 pasteles, para repartir los 3 pasteles entre las 2 personas, y como no lograban entenderme les dibujé los pasteles en el pizarrón y ya fue de modo que aunque yo no les dibujaba monitos ellos decían, no que de 2, no de medio, empezaron que de 5, y eso que nomás eran 2 pasteles, ya nomás de repente salió un niño y me dijo 1 y la mitad, $\frac{1}{2}$, ya fue cuando yo me quedé como que si saben, era algo que yo no me esperaba*

Algo similar sucedió y fue reportado en ApV2, en los siguientes términos:

Después cometí un error el material (los pasteles) que traía preparados para entregar a cada equipo de tres, pero no había formado los equipos y se los entregue a los niños, por como estaban en las bancas (por bina), pero pues ya había entregado el material y no podía volver a empezar así que hice una modificación, les dije que ese pastel que les había entregado lo habían de repartir entre los dos de modo que les toque lo mismo a los dos y que no debía sobrar nada, un miembro de la bina, pasaba para mostrar su reparto ...

Como apreciamos, en ambos casos un descuido provoca cambios en la gestión didáctica, regulaciones para las cuales los profesores deben estar preparados, con la intención de recuperar el propósito de la actividad; parece ser que en estos casos que analizamos se logra recuperar el rumbo de la clase.

Adicional al avance en las competencias didácticas de los estudiantes, la reflexión sobre lo acontecido en sus clases y el reconocimiento de sus propias dificultades paulatinamente va fortaleciendo una actitud que les devuelve la responsabilidad por su propia formación, es decir los hace conscientes de la importancia de autoregularse y tomar decisiones sobre la marcha de la clase.

*** La importancia del diseño del problema y de las situaciones didácticas:**

Como hemos venido leyendo a lo largo del análisis, las situaciones didácticas que aplicaron los estudiantes no fueron diseñadas por ellos, aunque sí hubo elementos que ellos incorporaron, por ejemplo las “preparaciones del medio”, algún juego complementario o bien otra situación problemática adicional o complementaria.

Es en este último caso cuando se reconocen las problemáticas que se pueden generar como consecuencia del diseño de los problemas; como ejemplo citamos el caso de EPpP1:

E.- Hey, aja, ¿de las actividades que llevaba planeadas, hubo algunas que no funcionaran como usted esperaba?

P1. La última, es que el último problema era con dibujos

E.- Aja,

P1. Ya estaban los dibujos ilustrados y hasta les lleve las manzanas aparte para que las recortaran y las dividieran, y ya en el último problema, nomás era el problema planteado, y yo se los leí y era para ver que hacían los niños, y varios niños me dibujaron las 10 naranjas, otros me dibujaron hasta las veintitantas naranjas, porque pensaron que iban a repartir las 10 naranjas a cada uno de los niños y eran a 4 niños, así que le ponían 10 naranjas a 1 niño, 10 a otro, 10 a otro, a lo mejor no me di a entender en el problema, pero hubo como 3 niños que si me lo resolvieron así, me dibujaron 2 naranjas y después vimos la mitad de 3 naranjas,

E.- Ajá, el problema dice, Miguel, Carlos, Juana y Carolina fueron a comprar 20 pesos de naranjas y les dieron 10, ¿de cuántas naranjas le tocará a cada uno, sin que sobre una?; ¿Y dónde vemos que está la dificultad aquí?, ¿en la forma de plantearlo?

P1. A lo mejor aquí donde decía fue a comprar 20 pesos de naranja, y les dieron 10, 10 que, a lo mejor aquí no me especifiqué que

Este problema, a diferencia de la situación problema que fue el centro de la clase aumentaba la dificultad como consecuencia del aumento de las cantidades y además agregaba otra variable que podía generar confusión, el dato del dinero que pagaron por las naranjas; como apreciamos esto no fue previsto (aunque en la entrevista previa a la práctica sí evidenció estar consciente de que este problema iba a generar dificultades, pero no se precisó en qué términos) desde el momento del diseño de la planeación y dado que son niños de primer grado de primaria, su primer respuesta alude al agrupamiento y la frase “les dieron 10” les remite a que a cada uno le tocan 10, por ello dan ese tipo de respuestas.

Aquí lo importante sería que este aprendizaje se capitalice para posteriores momentos de planeación y se anticipen las posibles respuestas, como una estrategia básica, es decir, que se genere en los docentes en formación la actitud de cuestionamiento permanente al diseñar problemas matemáticos (o recuperarlos de otros materiales), bajo la pregunta ¿cuáles son las posibles respuestas que los niños pueden aportar a este problema?

*** Gestión de las fases didácticas:** Hemos visto que como parte de la formación didáctica del curso de matemáticas y su enseñanza II, derivada de las modificaciones efectuadas por el profesor formador, los estudiantes utilizan para diseñar sus planes de clase las fases de la Teoría de las situaciones didácticas [acción, formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 2007)]; el momento de la gestión de estas fases genera dificultades, de las cuales algunos toman conciencia, mientras que en otros pareciera que aún perviven sus esquemas formativos previos.

En el siguiente fragmento de entrevista vemos los dilemas que enfrentan los estudiantes, en su papel de profesores, ante el contrato didáctico ya instalado en la clase...

Con este pedazo de fragmento me pude dar cuenta que a pesar de repetirles varias veces que tenía que tocarle la misma cantidad de manzanas a los niños hubo varios que no entendieron a lo que varias veces se acercaban y despistadamente preguntaban que si ¿así? A ver si le podían atinar al resultado pero tal vez fue culpa mía a lo mejor no encontré las palabras adecuadas para explicarles y hacerlos entender a la primera y en un pedazo de fragmento mencione una frase mal (a dos niños les vas a repartir tres manzanas) lo que pudo hacer que los niños se confundieran mas, pero al fin y al cabo uno de los niños se acerca y me dice el resultado del problema no me conformo con que un niño me lo diga si no que no esperaba que me diera el resultado de esa forma (una manzana y la mitad) cuando los demás niños a pesar de que la partían decían 3 manzanas y otros decían tres pedazos lo cual también estaba bien. (ApP1)

Generalmente el contrato didáctico instalado en los salones de clase “obliga” a que los alumnos requieran la aprobación del profesor ante las respuestas que dan al problema planteado, es parte de la escolarización de las relaciones áulicas, sin embargo, la frase “*tal vez fue culpa mía a lo mejor no encontré las palabras adecuadas para explicarles y hacerles entender a la primera*”, a la vez que denota un autoreconocimiento de las dificultades presentadas, evidencia lagunas de comprensión en las fases didácticas, dado que una posible respuesta ante las preguntas de los niños en busca de aprobación del resultado, es precisamente el planteamiento de más preguntas (en el caso del problema planteado, preguntas del tipo ¿cuántas manzanas son? ¿Entre cuántos niños se van a repartir? ¿Les tocará más o menos que...?), lo cual nos lleva a la “devolución” de la responsabilidad del control de la solución por parte de los propios alumnos.

La palabra “explicarles”, en el contexto de la frase anterior, bien podría referirse a la clarificación de la consigna, sin embargo también hay que tener cuidado con su uso, no porque no sea necesaria la explicación, sino porque en el esquema didáctico que se está intentando objetivar, ésta adquiere matices diferentes a un modelo ostensivo de los saberes, y se reubica en el momento de la institucionalización.

Por otro lado, los estudiantes que reconocen que una mala gestión de las fases didácticas ocasiona dificultades, paulatinamente van interiorizando este esquema de planeación y gestión didáctica, es decir, toman conciencia de las acciones que se alejan de la representación sobre la enseñanza que se ha construido y las posibles consecuencias.

Dos ejemplos fortalecen la afirmación anterior:

ApE3: Como vemos los resultados presentados no son del todo de los niños, el maestro intervino en varias ocasiones proponiendo soluciones a los conflictos de los alumnos lo que, de cierta manera, estropeó ese momento a-didáctico que toda situación requiere. Lo cual trajo como consecuencia, que la validación careciera de importancia, porque el maestro validó a los alumnos en cada equipo y la supuesta fase de validación, pareció más sólo una exposición de resultados, debido a que todos los equipos estaban correctos (hasta cierto punto), entonces no se generó esa discusión de si es o no es mitad, entre todo el grupo.

Y

EPpM5: M5. a lo mejor también las dificultades se me presentaron a mí también, al momento de hacerles, de plantearles preguntas para que ellos también reflexionaran, y el hecho de que a los niños también se les dificulta mucho explicar el procedimiento y a lo mejor por ejemplo había uno que me decía no pues que el entero mide 12 cm, pero la barra mide 4 y yo a ver cómo que la barra mide eso, no es que ya todos juntos hacen 12 cm, y ya fue del modo que le entendía mejor E.- Claro

M5. Y yo decía no es que al decir entero me das a entender que es la barra, y ya decía la niña no es que son 4 cm, entonces la dificultad es eso que a los niños les hace más falta exponer o expresar su pensamientos, para que avancen E.- ¿Ese es uno de los propósitos de la validación no? Que ellos expongan sus procedimientos

M5. Hey

E.- E intenten expresarse lo mejor que puedan

En ApE3 vemos con claridad una toma de conciencia respecto a su papel, intenta alejarse (aunque sin lograrlo aún) del papel protagónico del maestro en el salón de clases, para generar momentos a-didácticos, sin embargo es hasta la reflexión posterior a su práctica que toma conciencia de ello, por supuesto que no es tarde, con una adecuada retroalimentación esta actitud generará la ruptura y la reflexión en la acción, para devolver la responsabilidad a los niños. Aquí vemos cómo esa actividad de análisis de su práctica le permite reconocer que su intervención “estropeó” otro momento muy importante de la clase, la validación, lo cual en el escenario de la formación docente inicial es un gran avance, no sólo el reconocimiento de la importancia de esta fase didáctica, sino sobre todo el reconocimiento de que debe haber un cambio en el papel del maestro y ello lleva consigo un cambio en las representaciones previamente construidas (más adelante veremos si esta actitud se sostiene a lo largo de su reflexión sobre la práctica, es decir, si en otro de sus ensayos habla de cómo logró instalar momentos a didácticos en su clase).

Por su parte EPpM5 reconoce lo complejo que es plantear preguntas a los niños para hacerlos que reflexionen en las fases a-didácticas, pero a la vez reconoce las dificultades que enfrentan los alumnos al querer argumentar sus respuestas, es decir,

validar los procedimientos y resultados encontrados, así como dificultades de ellos mismos para hablar sobre el saber matemático, por ejemplo la confusión que se genera ante la comprensión del significado de “entero”, manifestado en la siguiente frase: *“había uno que me decía no pues que el entero mide 12 cm, pero la barra mide 4 y yo a ver cómo que la barra mide eso, no es que ya todos juntos hacen 12 cm, y ya fue del modo que le entendía mejor”*

IV.1.3.1.2. Conocimiento del contenido y de los alumnos. Dificultades de los alumnos reconocidas por los docentes en formación.

En esta categoría ubicamos todas las declaraciones de los estudiantes en las cuales anticipan posibles dificultades que los niños pueden tener al enfrentarse a las situaciones que les plantean, de igual manera, analizamos las posibles alternativas de superación de esas dificultades que prevén, en el entendido de que ante este tipo de reflexiones se puede construir un escenario que supere los conflictos propios de la inmediatez de los acontecimientos de las clases.

El reconocimiento e identificación de las dificultades de los alumnos, así como de sus posibilidades de acción, como otra de las componentes del conocimiento profesional del profesor cobra importancia en el escenario de la formación docente inicial, porque en la medida que los estudiantes logran reconocerlas están en mejores condiciones de elaborar diseños didácticos que las atiendan, cada vez más acercados a su realidad y en congruencia con los aprendizajes que se pretende lograr.

Durante el desarrollo de las clases del formador de profesores (analizadas en el capítulo III) en repetidas ocasiones se hizo alusión a la articulación entre los aprendizajes, estrategias, actividades, etc. que estaban estudiando y su concreción en el salón de clase de la escuela primaria; a partir de esta sugerencia explícita y reconociendo que esta actitud genera una representación social respecto al papel activo del niño, los docentes en formación, a partir de sus reflexiones (en este caso inducidas a partir de las entrevistas y de la demanda por un trabajo de análisis de su práctica) toman conciencia de la relación entre las previsiones que toman, a partir de la claridad que tienen de lo que van a hacer en sus salones de clase y el logro de los aprendizajes de los niños.

En la siguiente tabla sintetizamos las principales ideas, a partir de fragmentos de entrevista y/o de su ensayo de análisis, respecto a las dificultades que observaron en los niños al aplicar su situación didáctica e incluso apreciamos la construcción de alternativas

de superación de las mismas, en unos casos en el momento mismo que se presentan, en otros casos, como aprendizajes para atender una futura situación similar.

Tabla 39. Dificultades de los niños, previstas y confirmadas por los estudiantes.

Instrumento Estudiante	Entrevista previa	Entrevista posterior	Ensayo de análisis de la práctica.
P1	E.- Ha o.k, ¿hay alguna dificultad que usted prevea al trabajar esta situación con los niños? P1 Si yo creo si E.- ¿Que dificultades prevé? P1 Yo me imagino en lo último al repartir las 10 naranjas a los 4 niños, que al principio si les pongo poquito, 3 a 2, pero me gustaría saber qué es lo que hacen, a lo mejor en eso si se les va a dificultar E.- Ha, o.k P1 O nada más uno que otro me lo va a saber responder	E.- Es decir los niños de primer grado ¿si pueden hablar del concepto de fracciones, pero todavía no lo escriben, o en su caso en su grupo ya lo escriben? P1 No, todavía no, saben repartirlo, pero nada más ponen que 1 y la mitad, no ponen 1 $\frac{1}{2}$, o así el símbolo E.- 1 y con palabra la mitad P1 Hey, 1 con sus propias palabras 1 y la mitad	Las dificultades de los niños las asume como un problema ocasionado por la forma de enunciar la consigna.
V2	E.- Ajá, ¿crees que haya alguna dificultad con los niños al resolver esto? ¿Prevés alguna dificultad ahí, que tipo de dificultad prevés tú? V2 Aun los niños todavía no entran a lo de fracciones en sí, se les hace que pueden hacer repartos porque en su vida cotidiana hacen repartos de cosas, pero ya al momento de plantearles todo este tipo de problemas no saben qué hacer, todo, a veces, los enteros nada más lo reparten a la mitad y lo entregan así o no hacen repartos, nada, sin hacer nada E.- ¿Lo hace equitativo? Podría ser la pregunta, y cómo esperas que reaccionen los niños cuando hagan eso, cuando se confunden ¿qué esperas que hagan? V2 Pues ahí sería ya usando, si no saben el cómo repartir los pasteles E.- Ajá, ajá V2 Podría poner así un ejemplo, como un ejemplo de traer a 2 niños y haber tenemos los 3 pasteles, si los tenemos aquí, como ustedes se los reparten, le damos uno a cada quien y luego este que sobra, que la mitad del pastel que quede E.- ¿Esperas que ellos reaccionen utilizando ya el concepto de mitad? V2 Eh, si, no como medios, sino como si, la mitad,	E.- Y que diferencia notaste tú a cuando lo que es los repartos los niños tienen el material manipulable como pueden ser las hojas de fomi que pueden doblar y sobreponer tu que decías que para comparar que eran equivalentes los niños ponían una encima de la otra, en cambio la otra actividad es sólo el dibujo en el pizarrón, ¿qué diferencias notaste en cuanto a la participación de los niños al nivel de comprensión de los niños? V2 Ha con el material del fomi pues si hicieron la partición y lo recortaban E.- ajá, si V2 Y ya si se les dificultó un poco la repartición de los 3 pasteles a los 2 niños, porque no los hacían los dibujos hacen como si fuera un pastel, le ponían todo velitas E.- Jaja V2 Y no eran algunas del mismo tamaño, también en las reparticiones decían que les tocaba de uno y de la mitad del otro, y también ahí no decían que era uno y medio, decían uno y la mitad del otro E.- ¿Alguna otra dificultad que haya notado en los niños al momento de trabajar esta clase? V2 Pues dificultades creo que no hubo, pero los que estaban en la clase sí, porque ahí había niños que se la pasaban en el desorden y son de los que no pudieron hacer el reparto bien E.- ¿Y a que se atribuía ese desorden de los niños? V2 Que a lo mejor no les interesó esa clase o porque son yo siempre los observé a esos niños y son de los niños que no hacen nada y les pongo cosas que a ellos les gustan y de todos modos E.- ¿De todos modos no lo hacen? V2 A veces si se las pasan sentados, bueno si están sentados no haciendo desorden, pero no hacen nada	Después pase a algunos niños para que pasaran y que explicaran como habían hecho los repartos, la mayoría de los niños decían que un pastel para cada niño y el que sobraba lo partían a la mitad, pero la mayoría no sabía cómo llamarle a la parte del pastel que dividieron en dos, decían que eran dos pasteles los que les tocaban, hacían bien el reparto uno para cada uno y el otro a la mitad pero decían que les tocaban 2, o también decían que 1 y la mitad como se muestra en las siguientes evidencias.
E3	E.- Lo que queremos ahora es escoger los pedazos que tiene la misma cantidad de pastel y que	E3 Aja, ahí si los niños dijeron que ninguno representaba la misma cantidad debido a que tenían figuras	Haciendo un análisis a priori de la situación, estos son los resultados espero arroje:

	esperas tu que los niños hagan, cual reacción esperas que los niños tengan ante esta consigna E3 Eh, como los pedazos son de diferente forma, por ejemplo uno va partido verticalmente a la mitad, otro a lo horizontal, otro va a estar en zigzag, <u>creo que los niños van a creer que no son iguales</u>, que no representan la misma cantidad, por la representación gráfica que tienen que en las fracciones es algo que se presenta constantemente la confusión, la representación gráfica con el valor que representa E.- Claro E3 Que $\frac{1}{2}$ puede ser así, $\frac{1}{2}$ puede ser así, $\frac{1}{2}$ puede ser así, es lo que creo que va a pasar que los niños van a decir no es que ninguno es lo mismo porque como están divididas en diferentes formas se van a confundirse E.- Ajá, si presentan esa dificultad los niños de que no encuentran la equivalencia de las formas de partir en este caso una hoja, como podría tu esperar esa dificultad en caso que los niños la tengan E3 Les busco otro ejemplo, plantearles, bueno la situación es concreta que son pasteles que le quedaron a una de mis compañeras maestras practicantes y en su cumpleaños, E.- Ajá E3 Entonces ellos tienen que ayudarnos a saber cómo, que cantidad le entregamos a cada quien, el reparto del pastel, entonces sería darles un contraejemplo, no es que la maestra Daniela se los repartió así, por ejemplo presentarles de otra forma y darles, presentarles la hoja y las partes que le falten, creen que esto es la mitad, o creen que no es la mitad, darles un contraejemplo de lo que pudieron haber hecho otros niños o la maestra	diferentes, entonces dijeron no, ninguno tiene lo mismo, E.- Y como lo, como lograron superar esa dificultad? E3 Les, bueno la primera vez que fui los niños no tenían, no habían trabajado las fracciones, no conocían lo que era $\frac{1}{2}$ ni $\frac{1}{3}$ ni $\frac{1}{4}$, esta vez que fui, ya vi las láminas que ya manejaban $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, entonces les dije en la fase de validación de la segunda parte hable con los niños de que si ese pedazo de hoja era la mitad, no pues dijeron que si y este, no pues que también es la mitad, y este no que si, y esta mitad en fracción como se le llama, no pues que es $\frac{1}{2}$, y les dije en todos es $\frac{1}{2}$, no pues que si, entonces no creen que es la misma cantidad, y me dijeron a no pues si es $\frac{1}{2}$, si es la misma cantidad, entonces les dije, mi demostración fue mostrarles a los niños que había mitades que aunque parecían mitades que no eran mitades, o sea que si eran mitades E.- ¿Y ellos cómo lo verificaron que si eran mitades? E3 Mmm, les puse los complementos de la hoja, les di la parte y ya al momento de ver pasaba cada uno y le decía vea esta es la parte que sobró de cortar, véalo es la mitad sí o no, no pues que si, y ya había una figura que era un trapecio E.- Y el proceso de aprendizaje de los niños, ¿tienes claro cómo va evolucionando el aprendizaje de los niños? E3 Con respecto a E.- al aprendizaje E3 Pues sí, si creo que los niños tienen mucha dificultad, bueno es un tema de los más complicados, este y el de los decimales, porque los niños, bueno lo que hemos visto es que aunque sea una fracción es más chica entre los dos números son más grandes o el denominador es más grande, los niños tienden a confundirlo, tienden a tomarlo al revés, tienen por ejemplo que $\frac{1}{4}$ es más pequeño por ejemplo que digamos, E.- $\frac{1}{8}$ E3 $\frac{1}{8}$, porque el 4 es más chico E.- Más chico que el ocho	· En la primera consigna, los niños tendrán facilidad para encontrar las mitades más comunes (parte 1, 2 y 3) · No considerarían mitades a las partes que no resultaran de doblar la hoja exactamente (parte 4 y 5). · Confundirán la parte 3 con la 6. Y la parte 4 con la 8, por su figura aparentemente igual. · En la segunda consigna, creo que será difícil que los alumnos identifiquen cuales partes contienen la misma cantidad, pero la respuesta más probable será que las partes 4 y 8, 3 y 6, tienen la misma cantidad, por la semejanza en sus figuras. Como vemos, los alumnos tuvieron dificultad para identificar una mitad que no resultara de una partición con ejes de simetría, pero con ayuda y guía del profesor, utilizando otra estrategia, los alumnos pudieron darse cuenta que aunque la parte 5, no parecía la mitad, si lo era. Al tratar de resolver el ejercicio los niños buscaban partes que fueran complementarias, es decir, que al sobre ponerlas resultara la hoja, completa, el problema con esto, es que ninguna de las figuras encajaba, siempre sobraba o faltaban pequeños pedazos para completar la hoja, lo cual acababa con la idea de los alumnos. Después de determinado tiempo de trabajo, el maestro cuestiona a los alumnos nuevamente y lanza la pregunta al aire. Mo.- A ver niños, cuáles pedazos tienen la misma cantidad. Aos.- Ninguno. Mo.- ¿Seguros? Aos.- Síiii. Mo.- A ver y por qué dicen eso. Ao.- Psss porque ninguno es igual. Como se aprecia, los alumnos no fueron capaces de encontrar pedazos con la misma cantidad, <u>su argumento fue, que ninguno era igual, lo que denota la poca capacidad de reflexión de los alumnos para descubrir que todas las partes que encontraron mitades contenían la misma cantidad de pastel porque eran $\frac{1}{2}$.</u>
14	E.- Porque, aparte que van atrasados, porqué se les dificultaría la suma de fracciones? M5. Por lo de digamos que los números son más grandes, van a pensar que es más porque ya me pasó, les puse una, que era una actividad de fracciones, unos si me dijeron <u>que $\frac{10}{5}$ era más grande que $\frac{4}{5}$ y por eso lo decidí mas</u>, ya si veo que si lo están realizando bien, que si lo están comprendiendo les voy a llevar con quintos, pero ya aparte por si, si, E.- Ha M5. si veo que están E.- Esa es una posible modificación, que se anticipa, si los	Al momento de la entrevista reconoce que tuvo que suspender la aplicación de la situación didáctica a los 15 minutos de iniciada por factores que atribuye a su propio desempeño: I4. No creo, no creo yo digo que si estaba bien, porque cuando fui a observar si la maestra estaba trabajando con eso y si es como que si, los niños quizá era el ejemplo que les daba pero si más o menos si contestaban, yo lo que me atribuyo mucho es a mí, la consigna como la di, la forma de trabajo no, yo digo que fue eso.	La actividad de ¿Quién se acercó más? Requiere del total dominio del uso de las fracciones y al ver que mis alumnos no dominaban el tema resultado difícil que llegarán al final de la misma con un resultado favorable

	niños hacen bien, pues ahora van los quintos. Y vámonos, en términos del contenido ¿si se pide que lleguen a quintos?, M5. Si E.- Es cuarto grado verdad, eh, ¿alguna otra dificultad que anticipe que puedan tener los niños? M5. Que no lo entiendan jajaja E.- El juego M5. Ajá		
M5	E.- Aún así prevé alguna dificultad en esto?, M5. Pues yo pienso que <u>si se les va a dificultar por el planteamiento del problema.</u> E.- Ajá M5. Porque el planteamiento del problema es algo que los niños no están acostumbrados a escuchar E.- Podría leer el problema por favor (hay una interrupción a la entrevista) E.- Ajá, si, haber entonces estamos hablando sobre las dificultades, verdad, si, prevé alguna otra dificultad M5. Si pues lo que era el planteamiento del problema, es algo que no están acostumbrado ellos, y previendo eso, por eso estoy dando la consigna, antes de formar los equipos E.- ha, o.k M.- Porque luego, di la consigna antes de formar los equipos pero a lo mejor no hice una buena devolución, o no expliqué el material, eso fue lo que sucedió, no di bien el material, entonces también eso tomarlo en cuenta, entonces aquí lo explico E.- Ajá, le había solicitado que si podía leer el problema, para ver porque, donde está la dificultad del problema, M5. Este, 2 niños fueron al cine y con el dinero que les sobró compraron 3 barritas de chocolates que se repartieron en partes iguales, juntando todo lo que le tocó a un niño, se obtuvo un pedazo de este tamaño, ya ahí marca la tira de cartoncillo de 6 cm de largo E.- Ajá M5. Averigua de que tamaño eran los chocolates que compraron	M5. Y luego no pues a poco nomas esto es lo que le tocó a cada niño, y yo si esto es lo que le tocó a cada niño, pero decían es que si son 3 barras y son dos niños, <u>les toca de una y media</u>, y donde está el otro pedazo, o sea que se los diera así practico y les dije, no es que implícito aquí dentro de este pedacito ya está la barra y media, yo quiero saber cuánto mide una barra y ya ahí, como que se les quedaba eso y ya se les resolvía, pero yo pensé que nada más lo presentaban algunos equipos, y ya al momento de estar cerciorando el trabajo, no, muchos casi que todos los equipos tenían esa duda, y todos estaban haciendo que estaban pensando que esta era la barra, o estaban pensando que toda la barra se completaba juntando los dos pedacitos de barra que faltaban y no, yo siento que a lo mejor no preví tanto esa situación, si me imaginé que iban a decir hay pues estas son las barras luego las divido luego ya las junto, pero no no resultado eso que yo creí, no resultado tanto que dijeran no pues estas son las dos barras que juntaran, no resultado nada, no pues nomás la mido mide 6 cm, y otros decían no pues les toca de una barra y media, y otros ya como M5. Pues a mí me gusto en particular, porque por ejemplo los niños están acostumbrados hacer eso de los repartos, ya se lo había comentado la vez pasada E.- Ajá, si M5. Pero <u>están acostumbrados a ver eso de los repartos como un reparto simple</u>, que dijeron los equipos, entonces al momento que tu les planteas algo diferente al grupo, yo pienso que si haces crecer su razonamiento, a lo mejor no sé, necesitan más ayuda o más apoyo E.- O.k M5. <u>Igual necesitan que practiquen más esto para que les sirva</u> E.- Claro, muy bien	En principio creí que los niños iban a recordar algo de la situación anterior, pero resultado ser que en lugar de hablar de los chocolates, los niños me hablaron de manzanas y en consecuencia les recapitule la esencia del problema anterior cuidando no mencionar cómo lo habían resuelto o la manera que les expliqué, la cual consistía en hacer una suma y una división, temía que recordarían esa estrategia pues si la hacían de esta manera dejaban de lado las fracciones, pero a pesar de <u>que para mí fue sencillo explicarlo</u> creo que ni lo entendieron porque de haber sido así por lo menos un equipo habría resuelto el nuevo problema usando dicha estrategia. En contraste con lo anterior y lo que se aplicó de 3 barras y 2 niños el momento que mejoró fue el de la validación, pues en la situación 5 (2 barras/5 niños y 4 barras/ 3 niños) la validación sólo se pudo hacer de la primera consigna debido a que <u>ningún equipo logró llegar a la respuesta correcta de la segunda consigna a causa del tiempo o la confusión y además de que hicieron falta más preguntas de mi parte para que los niños logaran reflexionar el procedimiento.</u> Además de que en la primera consigna todos los equipos coincidieron en la respuesta lo cual no fue atractivo para los niños pues daban por hecho que esa era la respuesta correcta
R6	E.- Esto le, ¿al momento de planear ese contenido, le generó alguna dificultad? R6. Pues, si, me parece que eso <u>está, pues es un grado de dificultad muy alto, este pero bueno es un reto para los niños, para ver si lo pueden resolver.</u> E.- ¿En qué está esa dificultad muy alta, en qué? R6. Pues es que no se saben ni los chocolates que compraron ni el número de niños, entonces	E.- En algunas clases también hay dificultades, ¿usted encontró algunas dificultades o vio algunas dificultades que manifestaran los niños al resolver el problema? R6. Es que bueno, al principio si, al principio como que no se apropiaban del problema, porque un niño me dice, no maestra eso no, porque les escribí la primer consigna, equipo 1, encontrar cuantos chocolates y esperarse nada más el gris y no les puse los otros colores, para que no se	Aunque también hubo niños que encontraron la respuesta de otra forma (tomado del registro de clase): : Niño: como eran tres los chocolates que se repartieron, tomé un pedazo café que era lo que le había tocado a cada uno y lo dividí en tres, pero como eran cuatro los niños a los que se les repartió, volví a dividir otra tira café en tres y tomé de ahí el que me faltaba, los junte estos cuatro pedacitos que era el tamaños del chocolate y los compare con el

	representa doble dificultad se podría decir, porque no conocen 2 datos fundamentales, o uno de esos datos es fundamental E.- O.k, alguna vez ha habido otro problema que le haya generado, o sea, ese es el problema visualice ese problema para los niños, R6. Ajá, Le preguntaba respecto al tipo de respuestas que usted prevé en ese tipo, en ese tipo de problemas? R6. Pues yo lo hago en la idea de que en <u>el análisis a priori</u>, creo que los niños se van a ir por la misma, por la misma idea de resolver, de resolverlo como la vez anterior E.- Por ejemplo, en ésta hoja vamos a poner, vamos a visualizar, ésta podría ser la primer barrita R6. La entera, bueno la E.- el entero R6. El chocolate entero de 12 cm E.- Estos no fallan, a ver ese es el chocolate entero, 12 cm mide, y ésta es, éste dibujo más o menos a la mitad, porque la medida ahí, es la mitad R6. Ajá E.- Verdad, la medida dice 6 cm, 6 cm eso es lo que le toca a cada niño R6. A cada niño, E.- a cada niño, entonces la pregunta es, cuántos niños pueden ser y cuántos chocolates pueden ser? Si, no sé si así visualizó la tabla R6. Si, la tabla que representa, ya cuando estén todos juntos o a que se refiere? E.- Sí, la que van a concentrar la respuesta que R6. La respuesta, bueno la respuesta no intento que la pongan al principio en una tabla, sino que nada más saquen el resultado E.- Ajá R6. <u>De cada ejercicio, a lo que, la repuesta que yo me supongo que los niños van a tratar de hacer es la que le comentaba por ejemplo si este es el entero y este es el pedazo del niño van a ir juntándolos para que les dé completamente los chocolates que son, se podría decir que pueden encontrar que sea 1 chocolate</u> E.- Ajá R6. Y 2, y 2 niños E.- Ajá R6. O se pueden ir por la finta que a lo mejor es muy poquito, que a lo mejor es un chocolate para un niño, y entonces se pueden ir hasta este extremo que sean 2 chocolates y 4 niños, E.- Ajá R6. Y aquí e podría ver la equivalencia se podría decir, E.- Ajá R6. Porque es lo mismo que a 2 niños le toque la mitad del chocolate, si $\frac{1}{2}$ se podría decir, $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{4}$,	confundieran con tanta información, entonces el niño vio y dijo <u>cómo vamos a encontrar 4 chocolates entre tantos niños y yo pues no se ustedes intenten resolverlo como puedan y dicen no es que ni el maestro le entiende se queda con una cara de así</u>, y yo, si se puede y ya cuando les hice la devolución fue cuando se quedaron pensando y <u>un niño me dijo se puede resolver pero lo dijo a toda la clase y no sé si eso influyó</u>, en que todos lo resolvieran de la misma manera, porque dijo ha se puede resolver como la otra vez pues y ya empezó hacerlo y dijo ya encontré la respuesta y fue rapidisisisismo E.- Claro, claro, alguna otra dificultad, aparte de mencionar la consigna R6. Pues no E.- Nada R6. No, bueno quizá algo <u>de lógica profana</u>, de que lo resolvieron rápido, porque se suponía que íbamos a salir a ensayar una, una tabla rítmica de un programa que íbamos a presentar y pues los iba a sacar a ensayar un ratito, ya les había dicho desde la vez anterior, entonces me decían a qué horas vamos a salir a ensayar y yo cuando terminemos aquí, y luego no pero que ya, entonces fue que también influyó en la fase de validación y de institucionalización, que fue rápido, fue muy rápido E.- La presión	tamaño de los tres chocolates diferentes y el rojo era el que media lo mismo que los cuatro pedacitos. <u>Este procedimiento es muy ingenioso, sin embargo tampoco se tenía contemplado que los niños llegarían a tal procedimiento, esto demuestra que son muy aptos para los ejercicios con matemáticas</u> Dentro de la formulación los niños después de apropiarse del problema no tardaron ni diez minutos en resolverlo. <u>Las hipótesis hechas en el análisis a priori resultaron ciertas pues los alumnos encontraron la respuesta juntando varios pedazos que le tocó a cada niño y varios chocolates enteros hasta que coincidían en la medida exacta. Pero lo sorprendente de esta fase es que uno de los equipos logro llegar a uno de los saberes a institucionalizar:</u> descubrir que se podían encontrar varios repartos de acuerdo a que fueran equivalentes, por ejemplo; si encontraron: ocho chocolates y seis niños también podría ser cuatro chocolates y tres niños e inclusive lo comprobaron con el mismo método y resulto correcto.

A6	E.- Ha o.k, pensando en el aprendizaje de los niños A6. Aja <u>aquí como que ellos construyen el aprendizaje por la manipulación</u> E.- Esta forma de trabajo como ayuda en que parte o como, ¿cuál es la parte principal que ayuda que los niños construyan el aprendizaje? A6. <u>Bueno la principal creo que es la de formulación, donde interactúan entre ellos</u> E.- <u>Ajá</u> A6. <u>Porque ahí ya intercambian ideas</u>, todas, por así decir tienen su función, la preparación del medio, esa también ayuda mucho E.- Aja, ahorita ya la tienen planeada, ¿tú al momento de organizar esa planeación vas pensando con más detalle hacer cosas o con lo que tienes aquí ya es suficiente? A6.No, cuando estoy enfrente del grupo voy pensando por así decir, si voy hacer regulaciones hacerlas ahí, o si tengo chanza con el análisis a priori, si faltan niños, en la formación de equipos, si eso surge que es hora de educación física y no está planteado, o si no hay espacio suficiente en el salón, hay muchas cosas que se pueden modificar E.- Ajá, en tu salón de clase con toda seguridad, ahorita te preguntaba si provees alguna dificultad, o cómo esperas que los niños reaccionen, espero que los niños reaccionen de diferentes maneras al darme diferentes respuestas, que eso hace la clase más interesante, pero también puede haber niños o no lo hay, niños que tengan dificultades en el aprendizaje, tienes alguna previsión para ese tipo de niños A6. No, todavía no, es que ésta no, tenía otra pero se me hacía más complicada para aplicar a los chavitos, <u>entonces ésta apenas ayer la hice, esta planeación, pero si estoy pensando, tengo 2 chavos que si están más atrasadillos y estoy pensando en traerles algo para ellos</u> E.- Si, si, entonces tú prevés que ahí pueda haber alguna dificultad con los niños, como tienen, o que han llevada un aprendizaje podríamos caracterizar de mecánico, es lo que me estás diciendo en este ejemplo, porque han aprendido los procedimientos pero no el sentido de porque el procedimiento, entonces ahí puede haber alguna dificultad para que trabajos de esta manera A6. Si, supongo, la otra vez vi que los niños le tomaron más importancia a las acciones, y los niños ya así, la otra vez fue porque el profe era para que salieran a hacer eso	E.- ¿Que sientes tú qué fue lo que falló ahí? A6. Pues como que <u>no me pusieron atención, pero es que como que no entendían bien la consigna</u>, se las repetí muchas veces y no sé si andaban muy distraídos o nunca les plantea problemas el profesor E.- De esa manera, entonces una dificultad que manifiestan los estudiantes es que están distraídos, pero aparte ¿ya al momento que manipularon las tira, ellos manifestaron alguna otra dificultad con las tiras al trabajar con las tiras? A6. Pues la única que noté más en todos los equipos es, el salón está muy pequeño, entonces casi siempre trato de evitar que se copien las ideas, entonces notan que unos ya pues juntaron las barritas y como no están impuestos a que el profesor, bueno ahí <u>no están impuestos a que el profesor, el maestro les diga que si o que no están bien, entonces los dejaba que estén así un rato y los otros pensaban que les había dicho que estaban bien</u> E.- Ha o.k A6. Hacían lo mismo E.- copiaban A6. Entonces decían no pues ya terminé también	Durante <u>la validación no obtuve lo que pretendía</u>, los niños por más que les pedía que le pusieran atención a quien estaba exponiendo sus resultados en frente, <u>se distraían mucho con otra cosa</u> y no le tomaban importancia al resultado de otro equipo aunque fuera un resultado distinto.

¿Qué podemos apreciar del análisis de estos fragmentos de entrevista y del análisis de sus ensayos? En primer lugar, como se puede ver en la tabla (siguiendo la progresión de las flechas), son varios los casos en que se confirman las predicciones de los estudiantes, es decir, el conocimiento que van adquiriendo respecto a los procesos de aprendizaje de los niños, en congruencia con el grado escolar que cursan, les permite anticipar un campo de comportamientos posibles.

Por ejemplo, en el caso de los estudiantes que practicaron con 1º y 2º grados, donde curricularmente no se trabajan las fracciones, no les fue difícil anticipar que al aplicar las situaciones didácticas diseñadas, el mayor problema iba a ser la apropiación del lenguaje para nombrar la fracción resultante; en ambos casos se cruza su conocimiento de lo cotidiano con el incipiente conocimiento de los niños y sus procesos de aprendizaje, de tal manera que, a partir de su conocimiento experiencial era fácil determinar que los niños iban a usar el concepto de “mitad”, más que el de “medio”, aunque en el contexto cotidiano se pueden usar los dos términos, por ejemplo al pedir es más común decir “me das la mitad” de algo, pero en situaciones de medición es muy común el uso del término “medio”, como en “medio kilo”, “medio litro”, etc.

Por otro lado, el caso de V2, al analizar su entrevista previa, vemos el reconocimiento de la diferencia que tiene el que los niños sepan hacer repartos, considerando una sola unidad, a cuando se les plantea un problema de reparto que involucra varias unidades a repartir entre varias personas; cuando afirma *“los enteros nada más los reparten a la mitad y lo entregan así o no hacen repartos”*, entre líneas hay un reconocimiento a una de las problemáticas propias de la edad de los niños de 2º grado de primaria y que fue determinante para excluir los contenidos de fracciones de este grado escolar, me refiero al problema de la “equitatividad y la exhaustividad”.

El caso de E3 es el que me parece que en esta ocasión nos aporta más información respecto al reconocimiento de las dificultades de los niños y a la vez de las posibles lagunas de conocimientos de los docentes en formación; la situación didáctica implicaba comparar superficies para determinar cuáles representaban la mitad de una unidad de referencia: el entero.

En primer lugar debemos destacar las habilidades que el estudiante manifiesta en su proceso de diseño, en tanto derivado de su ensayo de análisis de la práctica, vemos una parte muy importante en el proceso de planeación de acuerdo a esta perspectiva que van

adoptando los estudiantes: el análisis a priori. Este análisis consiste en anticipar el campo de comportamientos posibles ante el trabajo con la situación didáctica; en este caso la dificultad más visible tocaba el asunto de la “conservación del área”, es decir, el estudiante anticipaba que por percepción geométrica se les iba a dificultar identificar como “mitades” a las partes que no resultaban de una “partición con ejes de simetría”.

En la segunda parte de la actividad los niños tenían que determinar cuáles de los pedazos tenían la misma cantidad de pastel, es decir, asociar que al ser “mitades”, todos tenían la misma cantidad de pastel; como apreciamos claramente se involucra el concepto de “conservación del área”, sin embargo el estudiante no logró “ver” en esta situación la dificultad que le es asociada, se quedó en la idea de que *“los alumnos no fueron capaces de encontrar pedazos con la misma cantidad, su argumento fue, que ninguno era igual, lo que denota la poca capacidad de reflexión de los alumnos para descubrir que todas las partes que encontraron mitades contenían la misma cantidad de pastel porque eran $\frac{1}{2}$ ”*, sin cuestionarse los porqué los alumnos no eran capaces de generar ese tipo de reflexiones. La siguiente cita de K. Lovell, donde se describe un experimento, contribuye a entender esta dificultad

En otro importante experimento se enseñaba al niño dos rectángulos , a) y b), que él reconocía como iguales. Entonces se dividía diagonalmente el rectángulo a) en dos partes iguales, que se colocaban juntas formando un triángulo c). Se preguntaba al niño si las dos figuras b) y c) eran del mismo tamaño. Los sujetos entre cinco y seis años de edad no creían que el área se conservase igual, mientras que entre los seis y siete años algunos percibieron la igualdad, al parecer, intuitivamente. Desde los siete años en adelante se daban cuenta operativamente de la conservación del área cuando se alteraban las figuras; pero hasta los ocho o nueve años de edad no entendían completamente la aplicación de una unidad de medida (1 cm cuadrado, por ejemplo) para medir la superficie total. (Lovell, 1986, pág. 139)

Como resaltamos en la cita (el subrayado es mío) a partir de los siete años se dan cuenta “operativamente” de la conservación del área, por ello es que en la aplicación de la situación didáctica, los niños asociaron igualdad de forma con magnitud de la superficie y fue necesario que hicieran la comparación práctica, con material manipulable, para que visualizaran la equitatividad en las superficies.

Lamentablemente ni de los datos de la entrevista posterior, ni en su ensayo de análisis se ve alguna referencia a la explicación teórica de esta dificultad, parece ser que el estudiante se quedó con la idea de que es la poca capacidad de reflexión de los niños lo que

ocasionó la dificultad, cuando hay regularidades que nos dicen que a la edad de 8 años (3º grado de primaria aproximadamente) los niños tienen aun dificultades para conservar el área y por ende van a dar respuestas erróneas ante situaciones de comparación de figuras con igual área pero diferente forma.

Otra de las dificultades identificadas, tanto por E3 como por I4, es la idea de “n-distractores”, es decir, cuando los niños comparan fracciones y que no tienen bien construido el concepto, su conocimiento del campo de los números naturales se convierte en un distractor y fuente de errores; es lo que sucede cuando los estudiantes afirman que los niños se equivocan al comparar, por ejemplo $\frac{1}{4}$ con $\frac{1}{8}$ y concluyen en que $\frac{1}{4}$ es menor porque el cuatro es “más chico” que el ocho.

En la fila de datos de I4, vemos un cierto optimismo en la entrevista previa, recordando cómo habían actuado ante una situación de comparación de fracciones, definió que los niños tenían conocimiento suficiente para enfrentarse a un juego que implicaba suma de fracciones, sin embargo al aplicarlo se le salió de control y tuvo que suspenderlo, sin lograr el propósito planteado. En su ensayo de análisis reconoció que el juego que aplicó *“requiere del total dominio del uso de las fracciones y al ver que mis alumnos no dominaban el tema resultó difícil que llegaran al final de la misma con un resultado favorable”*, este aprendizaje y el conflicto cognitivo que le generó debe llevarla a estructurar mejor sus situaciones didácticas y hacer un buen análisis a priori, tanto como un análisis epistemológico para determinar la complejidad de la actividad en función del saber en juego que está implicado.

M5 reconoce que una de las variables importantes en el diseño de problemas tiene que ver con el cálculo relacional, y aunque no le llama de esa manera, sí hace alusión a que la dificultad es *“por el planteamiento del problema”*, en tanto los niños sí *“están acostumbrados a ver eso de los repartos como un reparto simple”* y cuando en el problema la incógnita no está en el resultado, sino en uno de los operadores, la dificultad aumenta.

La alusión a “reparto simple” remite a la idea de la fracción en su sentido parte – todo, el cual plantea problemas más sencillos que el que le tocó aplicar a la estudiante.

Finalmente, los casos de R6 y A6, aunque practicaron con el mismo grado, aplicaron situaciones didácticas distintas, por ello las dificultades que se les presentaron,

obviamente fueron diferentes. R6 decidió aplicar un problema que en su planteamiento se sale de los esquemas clásicos de resolución de problemas con fracciones, es un problema de respuesta abierta, dado que con los datos pueden encontrar varias soluciones y todas son correctas.

En el ejemplo que pone en la entrevista previa vemos que un chocolate entero mide 12 cm y lo que le toca a cada niño mide 6 cm, entonces al preguntar ¿cuántos niños y cuantos chocolates pueden ser? El campo de respuestas se puede diversificar de la siguiente manera: 1 chocolate, 2 niños; 2 chocolates, 4 niños; y así sucesivamente en un crecimiento proporcional. La estrategia de respuesta que anticipó ella, se confirma al momento de la puesta en práctica de la situación: los niños compararon varias “partes que les tocó a cada niño” hasta completar varios enteros y a partir de ahí construyeron la respuesta. Esta circunstancia denota su comprensión de los procesos de razonamiento de los alumnos y en cierta medida contribuye a objetivar la representación que han construido del niño como sujeto pensante, es decir, de un niño que aprende al enfrentarse a la resolución de problemas con sus propios conocimientos...esto es algo de lo que se trabajó durante el curso de matemáticas.

La situación que aplicó A6 fue la misma que la que aplicó M5, esta es: repartir 3 barritas de chocolate entre 2 niños; quizá el mismo diseño le lleve a concluir que *“ellos construyen el aprendizaje por la manipulación”*, como una concepción de un niño activo que aprende a partir de sus acciones, sin embargo hay cierta contradicción en sus declaraciones, porque asume un sujeto que aprende a partir de la manipulación, pero en su entrevista previa le da más importancia al intercambio de ideas, cuando por congruencia pudo plantearse la idea de la abstracción reflexiva a partir de sus acciones y posteriormente el intercambio de ideas.

Me parece que estas confusiones que se manifiestan son las que hacen que ante la pregunta por las posibles dificultades de los niños, se deslice su identificación hacia aspectos más organizativos y contextuales: por ejemplo el tipo de contrato didáctico instalado en los salones de clase, el espacio de los mismos, la distracción de los niños, o como decía R6 “la lógica profana” que tiende a instalarse en clase y desliza el tratamiento de los contenidos, pero sin considerar dificultades propias del saber en juego.

IV.1.3.1.3. Conocimiento del contenido para la enseñanza. Dificultades en los casos objeto de estudio.

Son varios los autores que coinciden en que el conocimiento disciplinario de matemática de un profesor difiere del de una persona que no enseña (Blanco & Contreras, 2012; Climent, 2002; Shulman, 1986; Shulman, 2005; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Sosa & Carrillo, 2010; Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013), las características especiales del conocimiento disciplinario del profesor derivan de la especificidad de su tarea, la promoción del aprendizaje del alumno.

En coincidencia con Ma (2010), *“el conocimiento de los profesores desempeña un papel muy importante en cómo se seleccionan e interpretan los contenidos de los textos escolares. Incluso la enseñanza de un tema puede tener una amplia variación”* (pag. 180), a partir de esta idea básica, en este apartado vamos a documentar cómo es que reflexionan los estudiantes tanto previamente como posterior a su práctica docente, en algunos casos a partir de las mismas preguntas de la entrevista, en torno a las dificultades que visualizan respecto al dominio del contenido que subyace a la situación didáctica que van a experimentar. Aunque no es objeto de esta investigación documentar las características del conocimiento profesional que ponen en juego los docentes en formación al momento de su práctica docente si nos interesa vislumbrar algunas relaciones entre los conocimientos que manifiestan tener (así como las dificultades que reconocen) y los resultados que obtienen en la experimentación de su situación didáctica.

Consideramos que entre más claridad tengan de lo que van a enseñar, son más conscientes de cómo es que van a enseñarlo, aquí también coincidimos con Ma (2010, pág. 185) en cuanto a que *“el verdadero pensamiento matemático que ocurre en un aula, de hecho, depende enormemente de la comprensión que tiene el profesor de matemáticas”* y ello no porque asumamos que deba desplazar a los niños (alumnos) de la tarea fundamental de construir sus conocimientos matemáticos, sino por el tipo de tareas matemáticas que es capaz de elegir (el “medio” matemático que organiza, siguiendo la terminología de la teoría de las situaciones didácticas) para potenciar la actividad matemática de los alumnos, del tipo de conexiones entre diferentes saberes que facilita y en sí de la forma de organizar el currículo que efectivamente se transpone en los salones de clase.

En este vértice del triángulo didáctico, el saber matemático, al que le hemos dado seguimiento (las fracciones) tiene características muy particulares que le confieren mayor complejidad que el resto de los contenidos de la educación primaria y si a ello le agregamos el que los estudiantes experimentaron situaciones didácticas que en esencia no están contenidas dentro de la progresión curricular de los maestros titulares de los grupos de práctica, la complejidad aumenta; en tal sentido tanto en la entrevista previa como en la posterior se les preguntó a los estudiantes sobre las dificultades que consideraban tener en el dominio del contenido matemático.

Considerando que la pregunta por las dificultades con el saber matemático estuvo asociada al saber que le subyace a la situación didáctica que eligieron experimentar, de primera impresión todos los alumnos declararon no tener dificultades con ello, incluso una de ellas dijo: *“R6. Este tipo de contenidos no, estos no, quizá algo más fuerte, algo donde se tenga que institucionalizar, algo más elevado, a lo mejor sí, porque no sé con qué palabras dirigirme a los niños (EPpR6)”*; como vemos, al parecer no hay dificultades, sin embargo en el análisis producto de la triangulación de la información pudimos detectar algunas dificultades y lagunas de conocimiento que sí inciden en la selección de las situaciones didácticas y sobre las cuales hay que tomar las precauciones debidas.

*** Dificultades asociadas a la comprensión conceptual del saber:** Durante el transcurso de la entrevista previa y asociado con la situación didáctica que puso en práctica EPrI4, el saber matemático que implicaba es la suma de fracciones, se dio la siguiente situación que evidenció la dificultad con el contenido

I4. Si, por ejemplo voy a poner la operación en el pizarrón y voy a pedir quien la pasa, o ya viéndola yo a los niños que uno pase a realizarla, y ellos van a, ellos mismos van a ver si están bien, porque ha pasado que en varios lugares nos las enseñan diferente y si yo les enseño una que a mí me enseñaron, los voy a reburujar y si ellos ya tienen una específica mejor que con esa E.- ¿Cuál es una forma que usted aprendió?

I4. Bueno a

E.- A la suma de fracciones

I4. A la suma de fracciones se multiplica no, o sea

E.- no usted dígame

I4. jaa, si,

E.- Usted dígame que aprendió

En esta primera parte la estudiante centra una estrategia que pareciera que desliza la responsabilidad por la institucionalización de los saberes a los alumnos, cuando afirma que ante los procedimientos de los alumnos ellos mismos van a compararlos y “ver si están

bien” sobre todo ante el desconocimiento que tiene de los saberes formales que los niños han aprendido, por ello, confrontar sus respuestas le permite detectar lo que saben y se convierte en una plataforma de avance para posteriores saberes.

La afirmación “*si yo les enseño una que a mí me enseñaron, los voy a reborujar*”, nos da la oportunidad de preguntar por la forma en que aprendió la suma de fracciones, y es en este momento donde aparece el error: “a la suma de fracciones se multiplica”. Ante ello se solicita que explique su procedimiento y el entrevistado, a partir de una serie de reflexiones, la lleva al reconocimiento de dónde está el error.

E.- Y en el caso de la suma de fracciones ¿cuál es el procedimiento que usted hace?, por ejemplo, $3/2$

I4. $3/2$ más

E.- Más

I4. $2/5$, es multiplicado, no

E.- No, a ver usted dígame (hace lo siguiente: $3/2 + 2/5 = 15/4$ y luego afirma)

I4. No, aquí hay un error

Como apreciamos sigue sosteniendo que para sumar fracciones se multiplica y en su procedimiento vemos que se multiplica cruzado, no en línea como sería el procedimiento formal de una multiplicación de fracciones; ante el error y como una forma de motivar la reflexión sobre la importancia del conocimiento común de las fracciones para lograr una buena enseñanza, se generan las siguientes interacciones:

E.- Si, a ver si está sumando $3/2$ más $2/5$, antes de ver el resultado, ¿cuál será el resultado, mayor o menor que 1, que 2, que 3?,

I4. jajaja

E.- ¿Qué anticipa usted ahí?, ¿menor que, qué?

I4. no mayor

E.- ¿Mayor qué?

I4. Mayor que un entero

E.- ¿Mayor que un entero y menor que cuanto?

I4. Mmm

E.- ¿Será a 2 como resultado o es mayor que 2?,

I4. Hay no, no me pregunte eso jajaja

E.- No, yo le pregunto porque el contenido que va a trabajar es suma de fracciones

I4. si pero como que estoy jajaja

E.- Tenemos $3/2$ más $2/5$, el resultado ya me dijo que es mayor que 1,

I4. Ajá

E.- Pero la pregunta es, será mayor que 2

I4. No

E.- No, ¿por qué no?

I4. Porque aquí digamos que $1/2$, 1 y $1/2$

E.- 1 $1/2$

I4. Y aquí $2/5$ es la mitad de $1/2$,

E.- ¿La mitad de $1/2$?

I4. Si, ¿no?

E.- Sabe yo en estos casos se me olvida

I4. Jajaja, a mi también

E.- ¿ $2/5$, es la mitad de $1/2$?

I4. No de medio, es menos que medio, que $1/2$

E.- Es menos que $1/2$, entonces no se acerca a 2, verdad

I4. No, le falta

E.- Le faltaría un poquito, ahorita determinamos cuánto, $15/4$ que me puso como resultado, cuánto sería, mayor, menor que 2, porque si $15/4$ es el resultado de $3/2$ más $2/5$, entonces esto debe de ser poquito menor que 2. ¿tengo razón, o no tengo razón?

I4. Ja

E.- Si, ¿qué pasó aquí?,

I4. Está lleno de errores ¿verdad?

En la secuencia de reflexiones lo que se pretende es que antes de pensar en un procedimiento formal, la estudiante controle el resultado a partir de las relaciones entre los datos, con lo cual se contribuye a generar una estrategia para enfrentarse al saber matemático, es decir, no sólo aplicar un algoritmo de manera mecánica, sino regular la serie de razonamientos que llevan a controlar la respuesta (reflexión metacognitiva), con o sin su aplicación; sin embargo, la debilidad de los conocimientos lleva a errores como el que se vuelve a presentar: “ $2/5$ es la mitad de un medio”, aunque éste rápido se reconoce y se corrige.

El error se reconoce por la estudiante, pero al mismo tiempo se denota que un procedimiento mal aprendido se ha convertido en un obstáculo epistemológico y es precisamente en estos casos que se hace necesaria una transposición didáctica alternativa, es decir, una destransposición de saberes que lleve no sólo al reconocimiento y toma de conciencia de los errores, sino a una nueva forma de aprender matemáticas, **desde la perspectiva del profesor que va a promover la construcción del aprendizaje por los propios alumnos.**

En esta parte coincidimos con Blanco & Contreras (2012) cuando afirman que en casos como éste

No se trata tan sólo de una reconstrucción de conceptos que deberían haber sido correctamente aprendidos durante la educación obligatoria; es también, y sobre todo, una forma distinta de saber y saber hacer matemáticas. No se trata solamente de tomar conciencia de los errores, sino de iniciar un camino que conduzca a una nueva enculturación matemática, una nueva forma de entender qué es saber matemáticas. A veces, las nuevas concepciones que comienzan a generarse en este proceso formativo, parecen llegar tarde para el profesor en formación desde su perspectiva de aprendiz matemático, pero son una fuerte

inversión de futuro en su papel como educador matemático (Blanco & Contreras, 2012, pág. 119).

Sin embargo es precisamente la construcción de ese “camino” lo que le da vigencia a las investigaciones sobre la formación inicial de profesores, donde aparece como una de las opciones formativas la articulación de diferentes marcos teóricos para configurar los componentes del conocimiento base del profesor de matemáticas⁷⁶ y donde, desde lo que hemos estado analizando en esta tesis, aparecen las oportunidades para la destransposición de los saberes, sobre todo porque hemos constatado que algunos saberes formales no los habían revisado en algún momento de su escolarización previa, por ejemplo la propiedad de “densidad de los racionales”⁷⁷.

Finalmente se le preguntó a EPrI4

*E.- ¿Entonces cómo se hace una suma de fracciones?
M5. Pues ya la tenía así en ese concepto, no, pero no*

Al final de la entrevista se clarifican dos de los procedimientos formales más comunes para su realización, el que se realiza a partir de encontrar fracciones equivalentes y el que se hace a partir de la obtención del común denominador.

En otro de los casos encontramos también que, al no reconocer el tipo de números que involucramos en el planteamiento del problema es más difícil tomar conciencia de las dificultades que implica su resolución; una de las consignas que planteó EPrR6 al equipo 1, fue: “Encontrar cuántos niños y cuantos chocolates son de acuerdo a: chocolate entero: (muestra la barra de 12 cm), pedazo que le tocó a cada niño: (muestra la barra de 6 cm). Ahora encontrar cuántos niños y cuantos chocolates si el chocolate entero es (muestra la

⁷⁶ En este caso no desconocemos las propuestas que al respecto existen (Shulman, 1986; Ball, Thames, & Phelps, 2008) o las reformulaciones que se han hecho de ellas (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013; Blanco & Contreras, 2012), sin embargo siguen sin impactar en el escenario de la formación docente inicial, con resultados tangibles.

⁷⁷ Desde la entrevista de EPrR6 encontramos que:

E.- ¿Cuando estaba en el curso hubo algún contenido que usted dijera hay caray ese contenido yo lo sabía de otra manera o yo no me lo sabía?

R6. La densidad de fracciones no me la sabía

E.- La de números decimales

R6. Aja, si o sea que dentro de dos fracciones había fracciones infinitas

E.- O.k

R6. O sea lo sabía con decimales, pero no con fracciones, algo raro, porque te preguntas cuantas fracciones puede haber

E.- Claro

R6. Entonces eso era lo que no sabía, la verdad ni por aquí me pasaba

E.- A lo mejor es porque eso no se trabajó en ningún grado escolar

R6. Si, exactamente

barra de 12 cm) y el pedazo que le tocó a cada niño es de 5 cm. Y por último calcular cuántos chocolates y cuántos niños si el chocolate entero es de 12 cm y el pedazo para cada niño fue de 9 cm.

Subrayamos la parte de la consigna que implica las medidas 12 y 5 cm, porque es precisamente en este caso donde se generan las reflexiones que llevan a la comprensión de la importancia de tener bien claro el tipo de números involucrados en el problema y las consecuencias que generan en el tipo de procedimientos utilizados.

E.- ¿Y cuál es la respuesta que usted visualiza ahí?

R6. Este, la respuesta bueno yo, la sacaría multiplicando un número, para no hacer este tipo de ejercicios, multiplicando un número que multiplicado por 5, nos de lo que sería 24, 36, por ejemplo, 5×7 , 35, bueno es que tengo las respuestas en otra

E.- ¿Y ahorita no las recuerda?

R6. No, no las recuerdo ahorita, pero bueno sería nada más encontrar 2 números, que estén igual en 5 y en 12

E.- ajá, 5, 12, ¿qué nota usted en estos números? ¿Qué tipo de números son?

R6. Se podría decir que no es igual que el 6 y el 12, que no son divisibles se podría decir

E.- Ajá. Ajá

R6. Entonces a lo mejor

E.- ¿Qué tipo de número es el 5?

R6. El 5, es un número menor que el 12

E.- ¿Y recuerda otra clasificación?, si es menor que el 12,

R6. ajá

E.- A lo mejor también podríamos decir que es impar

R6. Ha o.k

E.- Pero tiene otra característica el número 5

R6. Pues no

E.- ¿Cuáles serían los divisores del número 5?

R6. Ha del 5, son el 20

E.- No, no, divisores, divisores

R6. ¿divisores?

E.- ¿Qué número es el que los divide?

R6. Ha entonces no tiene, el 1 nada más, es el que lo divide al 5 y el mismo número

E.- ¿Y cómo se llama a ese número?

R6. Es un número impar, es un número

E.- Primo

R6. Ajá, es un número primo

E.- Es un número primo, entonces de ahí la dificultad que de pronto se le presentó para encontrar un número que sea a la vez múltiplo de 5 y de 12

R6. Ya lo tengo

E.- Como este es primo, entonces a lo pronto que número podríamos encontrar aquí que con toda seguridad va hacer igual

R6. El mínimo,

E.- Común denominador, ajá

R6. Serían 24 en 36 y de 36 que sigue, 36, 37, 48, sería 5 por, no todavía no

E.-No, 9×5 son 45

R6. O.k, este del 36 dijimos 48 y del 48, 60, hasta el 60 se fue la cuenta,

E.- ¿Y cómo salió ese número?

R6. Este, multiplicando, bueno encontrando 2 números que nos den el mismo resultado en 5 y en 12

E.- Ajá, 5 y 12

R6. 5 X 12

E.- 5 X 12,

R6. Serían 60

E.- 60

E.- o sea que serían 12 niños y serían cuánto

R6. 5, entonces serían 5 chocolates completos y 12 niños

E.- Ajá, ¿esto ya lo había considerado ahí?

R6. Sí, sí, bueno desde el punto de vista que usted me dice que es un número

E.- Primo

R6. Primo, ajá no lo había considerado, pero en la respuesta ya lo había contemplado, de hecho antes de planear

En la primera parte (subrayado sencillo) apreciamos cómo es que a partir de las preguntas de la entrevista se genera la reflexión sobre el tipo de números involucrados, como consecuencia de una exigencia explícita porque el profesor, antes de plantear un problema a los alumnos tome en cuenta las respuestas que pueden dar los niños y las dificultades asociadas al mismo. El tipo de respuestas que da EPrR6 denota que no se había percatado de esta circunstancia, dado que no tenía claro el tipo de números involucrados (subrayado doble), lo cual obliga al entrevistador a qué reformule la pregunta, orientando la respuesta en función de la cantidad de divisores que tiene el número 5; es en ésta cuando se manifiesta otra imprecisión en el saber:

E.- ¿Cuáles serían los divisores del número 5?

R6. Ha del 5, son el 20

E.- No, no, divisores, divisores

R6. ¿divisores?

E.- ¿Qué número es el que los divide?

Llegados a este punto pareciera que ya estaba la respuesta, por el tipo de número, sin embargo no es así, motivo por el cual se hace la aclaración y reflexión definitiva: al ser el 5 un número primo se dificulta para encontrar el mínimo común múltiplo a 5 y 12. “Hasta el 60 se fue la cuenta” parece decir sorprendida al reconocer el nivel de complejidad implícito en el problema, sin embargo con ello clarifica la respuesta (subrayado cursivo y en negritas).

Esta dificultad ya no permite tan fácilmente que aparezcan estrategias como la de ir poniendo las tiritas que representan tanto a los chocolates enteros como a la parte que le tocó a cada niño, lo cual se convierte en una variable que extiende las estrategias de lo

“concreto” a lo simbólico. Cuestiones como esta necesitan tenerlas claras, los estudiantes, antes de enfrentarse a situaciones concretas de enseñanza y deben ser objeto de análisis en los cursos de matemáticas y su enseñanza en la Escuela Normal.

*** Dificultades vinculadas con el saber procedimental:** En este caso se hace alusión a situaciones en las que el tipo de procedimientos utilizados cambia el problema planteado o bien da lugar a interpretaciones que conceptualmente son adecuadas pero no necesariamente en los términos del diseño del problema.

Por ejemplo, en el caso de EPpM5, el problema que trabajó fue:

“Ahora resulta que esos 2 niños se compraron 3 barras de coco y al repartírselas a cada uno le tocó un pedazo de 6 cm y quieren saber ¿cuál era la medida de cada barra de coco?”

Este problema, excepto por el contexto (como ya habíamos comentado en un apartado anterior) se retoma de la tesis de (Block, 1987, pág. 117)⁷⁸; desde la intencionalidad del diseño se tiene pensado que los niños se centren en la longitud, más que en el ancho: *“Hicimos las tiras suficientemente angostas (3 cm) para propiciar que centren su atención en la longitud”* (Block, 1987, pág. 119), sin embargo, al momento de poner en práctica esta situación en la escuela primaria, es la misma docente en formación la que fomenta, como una alternativa de respuesta, el que los niños se centren también en el ancho.

M5. Hey y ya lo dividieron entre 3, y ese fue el caso de la niña que me decía mide 2, pero cada barra mide 4 cm, incluso para los niños que me decían que 6 cm, yo les expuse

E.- Un contraejemplo

M5. Bueno una posible solución, que si podría medir 6 cm la barra pero si su grosor era menor, por ejemplo en vez de poner las barras así (a lo largo), poner las barras así (a lo ancho), y dividir las entre 3 cada una, para poderlas juntar

E.- Si pero ahí ya estaba tomando en cuenta otra solución, ya no es la longitud de la barra, sino el ancho y eso cambiaba el problema ¿no?

Como vemos sí hay un cambio en la intencionalidad original del diseño de la situación didáctica y, matemáticamente es adecuado, en tanto se conserva el área y por ende la equitatividad en el reparto, aunque visualmente esta estrategia es un poco más compleja; cuando se cuestiona a EPpM5 respecto a la pertinencia de este cambio, lo justifica de manera adecuada, poniendo el siguiente ejemplo

⁷⁸ En el apartado IV.1.1 se hizo un análisis del problema original y del rediseño que hacen los estudiantes.

M5. Yo pienso que no, porque es por ejemplo cuando a uno le dicen que divida, tienes un rectángulo,

E.- ajá

M5. Y si lo divides en medios, lo que tenemos por ejemplo, donde puedo hacer esto

E.- Aquí mismo

M5. Por ejemplo tenemos el rectángulo, lo dividimos, nomas como hacer esto (división vertical)

E.- Ajá, la mitad

M5. Pero también podría ser así

E.- Horizontal y tiene un medio

M5. Ajá

Usando esta misma comprensión la traslada al problema original y explica:

M5. no, por ejemplo lo que yo les planteaba era que también la podíamos dividir en tercios así (se refiere a una división con líneas horizontales)

E.- Ajá

M5. Así, entre 3

E.- Ha o.k de acuerdo

M5. Entonces ya juntando 2, como eran 3 barras

E.- Ajá, si,

M5. Y dividiendo entre 3 me salen 6, cada barra va a tener 2 pedacitos de este

E.- Hey

M5. Los cuales medirían 6×2 cm

E.- Hey

M5. Entonces esta sería una barra, ésta sería otra barra y ésta sería otra barra,

E.- Hey

M5. Pero

E.- ¿Y ahí cuál sería la respuesta del niño? En este caso, la pregunta que usted les formula es ¿cuál era la medida de cada barra de coco? y aquí ¿cuál sería la respuesta?

M5. De 6×2 cm

E.- 6×2 cm

M5. La otra la común, es de 4×3 cm

E.- Exacto, exacto

M5. Entonces la otra era $6 \text{ cm} \times 2$

E.- 6×2 y eso es equivalente

M5. Es equivalente

Como apreciamos, siguiendo el principio de “conservación del área” el problema se resuelve, sin embargo se transforma de un reparto, donde se quiere que aparezcan las fracciones y sus relaciones: ver que en la parte que le tocó a cada niño está contenido un entero y la mitad de otro, y que una estrategia para resolverlo es dividir en tres cada parte que le tocó a cada niño y quitar una, para obtener el entero original, a un problema de cálculo de áreas; matemáticamente es correcto, porque se conserva el área, pero en términos de la aparición de las fracciones el camino se prolonga.

Aunque en el curso de Matemáticas se ha revisado el concepto de restricción de la consigna, me parece que en este caso la restricción básica de no usar “regla graduada” o

bien las medidas de la tira, para fomentar estrategias de uso de las fracciones (o informales, como el doblado de las tiras) no se utilizó, por eso es que en este momento de la entrevista identificamos la aparición de una dificultad de orden procedimental, en tanto es aquí precisamente donde el saber matemático que se quiere construir (fracciones) se diluye ante un cambio de referente matemático: la equivalencia numérica 6×2 y 4×3 del cálculo de la superficie por las relaciones propias de las fracciones, a una tira hay que quitarle $\frac{1}{3}$ de sí misma para definir el entero, y ese tercio equivale a $\frac{1}{2}$ del segundo entero.

En otra situación, al hacer el análisis del ensayo de ApE3, encontramos el siguiente fragmento que nos llamó la atención, tanto por la forma de plantear el problema (que ya fue analizado en un apartado anterior), como por la afirmación que hemos subrayado

El día 1° de Octubre fue mi cumpleaños, y fueron a visitarme las maestras Bianca, Verónica y Daniela, y cada una me llevó un pastel pequeño de regalo, pero después fueron a visitarme mis amigos Manuel y Toño, como le haríamos para repartir esos pasteles entre mis amigos.

Ante esta situación planteada en un contexto bastante real y significativo, debido a que la fecha en que fue aplicada la clase era muy cercana a la fecha real de mi cumpleaños, elemento central de problema y también, porque los nombres de las maestras que usé en el problema, eran los nombres de mis compañeras de equipo de prácticas, las cuáles los niños identificaron de inmediato, lo que permitió que la situación estuviera centrada en hechos muy cercanos a la realidad. Frente al problema, con la validación que se realizó, se encontró lo siguiente:

- De los 7 equipos formados, los 7 resolvieron el ejercicio.
- De los 7 equipos, 4 utilizaron el mismo procedimiento consistente en dividir cada uno de los pasteles a la mitad, y hacer un reparto uno a uno, hasta que se agotaran las partes, **correspondiendo 3 mitades a cada uno, es decir $1 \frac{1}{2}$ pastel o $\frac{1}{3}$ del total.** Los repartos de estos equipos fueron equitativos y exhaustivos. (ApE3)

Reflexionando sobre lo que quiso decir con “ $\frac{1}{3}$ del total”, pensamos en que quisiera establecer una razón en el reparto, pero la adecuada es que a los “amigos” les toca $\frac{1}{2}$ del total, en tal sentido asumimos que la frase puede ser más un “error de dedo” que un error en la comprensión del funcionamiento de las fracciones y las razones.

En síntesis, las dificultades asociadas al saber matemático están vinculadas con su puesta en práctica en la escuela primaria y los estudiantes comienzan a tomar conciencia de ello, de tal manera que piensan el saber asociado a cómo enseñarlo; cuando se les cuestiona respecto al conocimiento matemático que poseen, hacen alusión a la búsqueda del “*método más fácil para los niños (EPpR6)*” en términos de que no es suficiente con que el maestro tenga el conocimiento matemático, sino que éste debe estar vinculado con las estrategias de enseñanza.

Adicional a ello, vemos que se manifiesta la representación del enfoque formativo que se ha trabajado en la Escuela Normal, cuando una estudiante dice ***“aparte el profe nos da como si fuéramos niños de primaria (EPpM5)”***, con lo cual denota una estrategia formativa por “homología” (Artigue, 1995), al configurarse la representación social respecto a cómo enseñar, pero al mismo tiempo se manifiesta la aparente facilidad del conocimiento matemático que los profesores necesitan para la enseñanza.

IV.1.3.2. El tiempo didáctico: dificultades para su gestión.

Cuando hablamos del tiempo didáctico nos referimos al tiempo realmente utilizado en la enseñanza, se distingue del tiempo de aprendizaje, en tanto este último depende exclusivamente del sujeto que aprende, de sus ritmos y las condiciones bajo las cuales aprende. El tiempo didáctico viene establecido por las exigencias curriculares, en términos de la cantidad de conocimientos que los estudiantes tendrán que aprender en determinado grado escolar, pero también, en un nivel micro, está determinado por la implicación de los estudiantes en la actividad, es decir, de una clase con duración de una hora, por ejemplo, en cuánto de este tiempo realmente los estudiantes están implicados en la actividad y cuánto sólo está transcurriendo pero utilizado en cualquier otra cosa, menos en el estudio del tema correspondiente a esa clase.

Al hacer revisión de los instrumentos aplicados a los estudiantes, encontramos como un aspecto que dificultó el logro del propósito planteado, el tiempo, con las siguientes variables:

- a) **El momento de la aplicación de la situación didáctica no es muy propicio, se deja para el final de la jornada de práctica:** En cuanto al uso del tiempo natural de la semana de práctica, desde la vivencia cotidiana hemos apreciado una especie de curva, a la manera de una campana de Gauss, en la cual el lunes es considerado como el día de acercamiento o conocimiento del grupo, ambos (docente en formación y alumnos) se están cuidando mutuamente porque del contrato didáctico que instalen dependerá el resto de la semana, martes, miércoles y jueves podríamos decir que son los más productivos y aptos para la aplicación de las partes medulares de sus planes de clase, y el viernes, como cierre de la semana, en el extremo de la curva, implica un estado de soltura del compromiso, en tanto ya se terminaron las prácticas. De ahí que cuando nos

dice ApE3 que “la clase se llevó a cabo...la última clase de matemáticas de la semana, a las 8:30 aproximadamente” se anticipan dificultades en el tiempo de aplicación. Aunque es el inicio del último día de la semana, cuando los estudiantes van a sus prácticas docentes, este día suele estar caracterizado por la informalidad y la organización de actividades socio-culturales que distraen la atención de los niños, con lo cual se generan los consabidos problemas de disciplina.

Por ejemplo, en EPpR6, vemos cómo las presiones o actividades extracurriculares influyen en la toma de decisiones y en la concreción de los objetivos de la clase, de tal manera que, a pesar del esfuerzo que se pueda hacer porque el tiempo efectivo se aproveche didácticamente, las condiciones del medio generan limitaciones, afectando la marcha global de toda la clase:

R6. Porque los niños estaban muy inquietos y se la pasaban hablando de eso, no todo el tiempo, pero por ejemplo desde que empezó la clase, si pero a qué horas vamos a ensayar, pues terminando, entonces como que se dieron prisa para salir más rápidamente a ensayar

E.- O.k, la presión del tiempo didáctico fue medio correteado

R6. Eso fue

Como apreciamos, este tipo de actividades lesionan el tiempo didáctico de una asignatura, sobre todo si no se logra organizar bien el conjunto de la vida institucional.

Confirma esta aseveración la afirmación de EPpP1, en los siguientes términos:

P1. Por cuestión de tiempo ya era el último día y todavía había un café que hacer con los niños

En casos como este se presenta el dilema caracterizado por la disyuntiva entre cumplir todo lo planeado para las diferentes asignaturas o completar un proceso didáctico, lamentablemente parece ser que en la mayoría de los casos, los docentes en formación optan por intentar cumplir con lo programado, aunque no se fortalezcan completamente los procesos didácticos; la presión institucional llega a ser más fuerte que la creciente convicción por concretar un enfoque didáctico.

Esta misma dificultad se presenta, afectando los procesos didácticos, cuando ApA6, nos dice “pasó más tiempo del que supuse necesario por lo que aunque faltaba un equipo de terminar empecé con la validación”.

- b) **Previsiones inadecuadas del tiempo requerido:** Tanto por la consideración que hace quien diseña, como por el momento formativo, muchas de las veces se tiende a considerar bastante tiempo de duración de una situación didáctica y sin embargo al momento de aplicarla no se requiere, ante lo cual los docentes en formación suelen quedarse “desarmados”.

Por ejemplo EPrV2, establecía un tiempo aproximado de duración de su actividad de 40 minutos, antes de la práctica, sin embargo al momento de aplicarla se dio cuenta que requirió sólo la mitad del tiempo.

- c) **El tiempo didáctico y los problemas de disciplina:** En muchas ocasiones se aprecia que la falta de control del tiempo didáctico es fuente de indisciplina, sobre todo en las primeras prácticas de los docentes en formación; la duración de la actividad ocasiona que los alumnos se distraigan frecuentemente y si a ello le agregamos que en ocasiones la clase se trabaja cuando ya casi termina la jornada del día, los problemas de gestión del aula (disciplina) se agudizan.

Está demostrado que nadie puede estar mucho tiempo realizando la misma actividad, se supone que el esquema didáctico de la teoría de las situaciones didácticas favorece que los alumnos estén implicados en la actividad, dado que su misma estructura plantea el cambio de actividades conforme la sensibilidad didáctica de los profesores lo consideren conveniente, por supuesto que todo dentro del logro de los propósitos de aprendizaje.

Por ejemplo, si como consecuencia de la dificultad de la situación problema planteada, el profesor ve que los niños no se involucran con la actividad (“falta de devolución”), su sensibilidad didáctica le debe llevar a hacer una regulación en la marcha global de la clase y aplicar una variable didáctica al problema para volver a mantener el equilibrio didáctico y por ende recuperar la marcha de la clase, logrando que el tiempo sea realmente utilizado con fines didácticos.

Sin embargo esta situación parece ser compleja de lograr por los estudiantes, aunque comienza a haber un reconocimiento de su necesidad, tal y como apreciamos en la siguiente reflexión de ApM5:

No se puede afirmar que todos comprendieran la esencia de este asunto⁷⁹ pues ya estaban con ansias de salir y me hizo falta una cronogénesis y una sensibilidad didáctica para darme cuenta de que ya no tenía la atención de la mayoría y era preferible haberlo explicado en un mejor momento, pues no siempre se tiene que institucionalizar al final de una clase.

En este fragmento vemos cómo se recuperan conceptos del lenguaje didáctico de la Teoría de las representaciones didácticas, muy ad hoc para que la estudiante explique lo que aconteció en su clase y ellos por sí mismos se convierten en elementos de un esquema que le permite reflexionar y nombrar las problemáticas que se le presentan; cuando se refiere a la cronogénesis hace alusión a ese control del tiempo para poder trabajar todas las fases didácticas, es decir,

“La distinción del enseñante y del enseñado se afirma por lo tanto específicamente, no en relación con el saber sino en relación con el tiempo como tiempo del saber: el despliegue temporal del saber en el proceso didáctico ubica como tales a enseñante y enseñados, en un mismo movimiento, en sus posiciones respectivas y sus relaciones específicas con respecto al antes y al después (con respecto a la anticipación). Ya incluso en ese sentido se distinguen el tiempo de la enseñanza, en el que es esencial la anticipación, y el tiempo del aprendizaje, en el que se operan ciertos tipos de retroacciones dado que manifiestan distintas relaciones con la duración” (Chevallard, 1991, pág. 83)

El reconocimiento de esta necesaria anticipación del tiempo didáctico se complementa con la “sensibilidad didáctica”, dado que ésta la asume como una actitud de permanente alerta ante lo que acontece en su clase, para encontrar índices que le indiquen si la actividad está funcionando o si debe modificar su acción.

Es claro que, desde su discurso, no logró controlar el tiempo didáctico, sin embargo su reflexión le permite tomar las precauciones debidas para posteriores planeaciones y jornadas de práctica.

En el caso de EPpA6, se presenta una situación similar, el tiempo se prolonga, está la exigencia de aplicar una planeación tal y como se elaboró, ello ocasiona aburrimiento y falta de atención por parte de los niños:

*A6. No, que otras, una fue la del tiempo que se me salió de control, no quería dejar la actividad sin institucionalizar y como se prolongó mucho, se les hizo aburrida a los niños, ya acabamos
E.- ¿Cuánto tiempo más o menos?*

⁷⁹ Aquí se refiere al tema de su situación didáctica y si recordamos, se refiere a la estrategia alternativa que utilizó para que comprendieran el reparto de 3 barras de coco entre 2 niños.

A6. Creo que no, no lo sentí bien

En el mismo sentido del fragmento anterior se expresaron ApI4 y EPpM5, es decir, como consecuencia de la falta de control del tiempo didáctico, los niños se “separaban de sus equipos para molestar” o también “había un momento en el que sí ya estaban haciendo desorden y, ya déjenle hasta ahí”, es decir se optaba por terminar la actividad.

En general, el reconocimiento de los estudiantes, respecto a los diferentes tipos de dificultades asociadas a las interacciones dentro del triángulo didáctico, contribuye a una toma de conciencia respecto a lo que implica la labor de ser maestro para la enseñanza de las matemáticas y a la vez contribuye en el doble proceso, tanto en la objetivación de una representación social que se transforma al mismo tiempo que se va conformando, como en la generación del conflicto sociocognitivo propicio para que a partir de una fuerte reflexión metacognitiva se logre la destransposición del saber en todos los casos que sea necesario.

Desde las declaraciones de los estudiantes vemos cómo, en todos los casos analizados, el esquema que genera la representación social respecto a su trabajo didáctico en el salón de clases, derivado de la Teoría de las Situaciones Didácticas y analizado durante el curso, logra anclarse y objetivarse; reconocen sus ventajas, pero también su complejidad, aunque al final pareciera ser que se quedan con una valoración muy positiva. Al respecto la afirmación de ApE3, sintetiza las afirmaciones de los casos analizados:

Aunado a estas ideas descubrí también la situación didáctica, como medio infalible para la enseñanza de las matemáticas, así como las fases de las que se compone, dentro de las que se encuentran: la preparación del medio, fase de acción, fase de formulación, fase de institucionalización y de aplicación. Todo esto con el propósito de transmitir el saber sabio hacia los alumnos, mediante la transposición didáctica que hacemos.

Aprendí a utilizar el juego como una herramienta para el aprendizaje con desafíos como, del 0 al 1, Dominó de fracciones, etc. Además de utilizar diferentes materiales que complementan, de buena manera la adquisición del saber

IV.1.4. La metacognición regula el orden de lo planeado: ¿mayor claridad previa – mejores resultados?

Aunque al precisar la estrategia didáctica, entre líneas van definiendo un orden de lo planeado, en la pregunta 2 de la entrevista previa, se les solicitó que lo definieran de manera más precisa; este ejercicio de reflexión, que te permite mirar atrás, va configurando

una habilidad metacognitiva, entendida como conocimiento y capacidad de regulación de cualquier actividad cognitiva, y el diseño de la situación didáctica implica que los estudiantes pongan en juego sus habilidades cognitivas y su imaginación pedagógica para tomar decisiones fundamentadas respecto a cómo van a desarrollar el contenido al estar frente al grupo de alumnos de la escuela primaria.

La pregunta se planteó en los siguientes términos

¿Por qué el orden de lo planeado y su organización? ¿Hay alguna estructura o lógica que te haya llevado a esa organización? (Contemplas, por ejemplo, como organizadores la dificultad del contenido, su estructura conceptual, el tipo de actividades, los principales objetivos que pretendes conseguir).

Cuando titulamos este apartado y afirmamos que la metacognición regula el orden de lo planeado, no significa que tenga mayores habilidades metacognitivas, para este caso en específico, quien tiene mayor claridad en el orden de sus actividades, lo que asumimos es que, en la medida en que nos permitimos hacer este ejercicio metacognitivo, a la manera del “vigilante interno” que sugería Flavell (1976) y nos preguntamos constantemente los porqués, los profesores tendremos mayor claridad de nuestros procesos didácticos y por ende ello tendrá que impactar en los salones de clase.

Ahora bien, considero de fundamental importancia que desde el escenario de la formación docente inicial se vaya generando esta actitud en los estudiantes, lo que les devuelve la responsabilidad y los compromete con lo que planean, de tal manera que lo hacen con total conciencia de las implicaciones didácticas que ello acarrea y no por demandas externas, es decir, sólo por cumplir con el profesor en la búsqueda de una calificación.

La pregunta es ¿se logra este nivel de conciencia desde el escenario de la formación docente inicial? Me parece que sí hay avances muy significativos, los estudiantes interiorizan un esquema de planeación y de trabajo docente, que en principio surge de las discusiones y análisis en las clases de los formadores, pero posteriormente se lo apropian para concebirlo como parte de su forma de ser maestro.

De tal manera que, cuando cuestionamos a EPrR6 respecto al porqué de ese orden de su planeación, con la intención de valorar su grado de apropiación de la propuesta, ella afirma lo siguiente:

R6. A, porque primero es una actividad introductoria, para que recuerden, vamos a empezar desde lo que saben

E.- ajá

R6. Para de ahí repartir lo que es ya el desarrollo y ya ver como se concluye

E.- Se habla de consigna, se habla de una parte de validación en que los niños confrontan y se habla de una parte de institucionalización, donde le da estatuto de saber a los conocimientos que los niños han construido o han explorado en ese momento de la situación, eso obedece a una lógica, o ¿usted está consciente de que ahí hay una lógica de planeación?,

R6. Pues para mí yo creo que si es lo más conveniente empezar así y continuar con la clase

E.- ¿Por qué le parece que es lo más conveniente?

R6. Porque como le digo primero intento saber lo que el niño sabe, y de ahí sigue construyendo para que llegue al saber,

E.- Ha o.k, ¿no podría ser que primero le diéramos el conocimiento y luego ya...?

R6. No, no bueno es que lo que se busca es como la competencia, dice acá resuelve problemas de manera autónoma, entonces se intenta que los niños tengan momentos a didácticos, que ellos, vaya se comuniquen entre el equipo, y pues lleguen al resultado, y para eso es la fase de validación para ver si están bien, para comprobar en que fallaron, que ellos mismos vayan descubriendo en que fallaron.

Como apreciamos, las preguntas del entrevistador intentan precisar las claridades de la estudiante; en una primera parte EPrR6 asume que lo primero es que los niños “recuerden”, es decir, la memoria didáctica que ya hemos comentado en un apartado anterior; esta actividad de recuerdo es la plataforma para iniciar el proceso de aprendizaje. En su discurso vemos una concepción de niño, como un sujeto con conocimientos, dado que afirma “*vamos a empezar desde lo que saben*” y desde ahí lleguen a un nuevo saber.

Cuando se le cuestiona respecto a la posibilidad de que primero se les haga llegar a los niños el saber formal y luego lo apliquen a la resolución de problemas, su respuesta es inmediata, “*no, lo que se busca es como la competencia, resuelve problemas de manera autónoma*”; a partir de esta afirmación nos queda clara su perspectiva de aprendizaje, la representación social de aprendizaje está asociada a una perspectiva constructivista donde el papel activo es del niño y el maestro debe generar “momentos a didácticos”, “comunicación entre el equipo” y “validación” de procedimientos y resultados.

Resolver problemas de manera autónoma, es la competencia principal del actual enfoque oficial de enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria (SEP, 2011), en tal sentido, su identificación por parte de la estudiante, denota el avance en sus aprendizajes y la comprensión del enfoque, ya que

“A lo largo de la educación básica se busca que los alumnos sean responsables de construir nuevos conocimientos a partir de sus saberes previos, lo que implica:

- * Formular y validar conjeturas.
- * Plantearse nuevas preguntas.
- * Comunicar, analizar e interpretar procedimientos de resolución.
- * Buscar argumentos para validar procedimientos y resultados.
- * Encontrar diferentes formas de resolver los problemas.
- * Manejar técnicas de manera eficiente. (SEP, 2011, pág. 42)”

Con excepción de “manejar técnicas de manera eficiente”, el resto de los elementos aparecen en su discurso, por ello podemos afirmar que, la claridad que manifiesta en el orden de lo planeado es una manifestación de la objetivación de la representación social que en el desarrollo del curso de Matemáticas se fue construyendo y que responde de manera articulada al enfoque oficial para su enseñanza, tanto como a la perspectiva teórica que le subyace.

En este mismo orden de ideas, EPrA6, encuentra incluso una justificación de las ventajas que brinda planear de acuerdo a este enfoque de la Teoría de las Situaciones Didácticas, nos dice

E.- Esta forma de planear desde tu óptica, esta forma de planear ésta situación, tu identificas que hay un problema a resolver, que hay un momento en que los niños van a discutir, y que hay un momento en que tú vas a sintetizar, a darle estatuto de saber formal a lo que ahí haga, ésta forma de planear, ¿consideras que el niño aprenda matemáticas con sentido, con significado?

A6. Si, si uno prevé bien todo, y va manejando lo que son las fases, de lo que hasta ahorita debe de manejarse la situación, creo que si hay mucho más efecto

E.- Ajá ¿por qué? Porque aparte de manejar las fases, ¿qué podría garantizarla?

A6. Porque bueno al manejar las fases y no modificarlas y así, darle seguimiento sistemático y manejar bien las fases, uno está previendo todo lo que van a hacer los niños, haciendo análisis de los míos, por así decir, a priori, entonces uno se da cuenta aquí van a hacer esto los niños, en otra fase, entonces acá ya prevés de otra manera podrás ver si reaccionan de otra manera o de ésta, para modificar, pero si es muy diferente que si uno usa un procedimiento matemático

E.- O.k, ¿habrá algo más que contribuya a éste tipo de planeación a lograr aprendizaje consentido a los niños o sólo tiene que ver por planear de manera sistemática una cosa tras otra?

A6. No es que usted se refiere a que si la aplico así es lo mismo que..

E.- No, más bien la pregunta es, tú me dices que esto permite que el niño aprenda con mayor sentido, en la ocasión anterior que se trabajó una situación similar, los niños si le tomaron mayor sentido al aprendizaje de las fracciones, porque lo estaban aprendiendo como reglas ciegas, aprendizajes mecánicos, o porque el niño decía, pues me salió mayor, pero no sé porque, y luego te pregunto, ¿esto garantiza, que si van a aprender con sentido las fracciones?, es sólo el hecho que haya estas fases, o habrá algo más, que ayude que los niños aprendan con sentido las fracciones,

A6. Pues también el desenvolvimiento en el grupo, hay cosas que no se anotan aquí, pero que uno también tiene que manejarlas

Dos cosas resaltan de sus afirmaciones, la primera tiene que ver con la posibilidad de anticipación y control que brinda esta forma de planear, es decir, el estudiante asume que si se llevan de manera sistemática cada una de las fases de una situación didáctica, se pueden prever posibles comportamientos de los niños y ello le da la posibilidad al profesor de anticipar alternativas de solución, con lo cual se encuentra en mejores condiciones de trabajo didáctico.

Sin embargo, como segundo aspecto importante, también resalta el desenvolvimiento del profesor en el grupo, parece ser que está consciente de que, la inmediatez de los acontecimientos del salón de clase hace imprevisibles muchas cosas, en tal sentido es relevante que, aunque en el diseño de un plan de clase no se anote todo lo necesario, sí deben contemplarse aspectos que ayuden al desarrollo de un buen proceso didáctico, por ejemplo las preguntas que se formularán, algunas variables didácticas a aplicar a los problemas o bien, la sensibilidad didáctica para controlar el tiempo o determinar cuándo hacer una regulación didáctica.

Y es que, profundizando en el análisis de su entrevista, nos damos cuenta que esta forma de planear tiene para él una buena valoración en tanto *“es lo más conveniente para que los mensajes se den de mejor forma o para que el saber les llegue como tal y no sea retención de la información nada más”* (EPrA6).

Ahora bien, dando respuesta a la pregunta de este subtítulo, y considerando las reflexiones que ya hicimos en el apartado IV.1.2.5, relativo a la estructura de su estrategia didáctica para planear, podemos decir que al parecer sí hay una relación directa entre mayor claridad se tenga del orden de lo planeado y el logro obtenido en la aplicación práctica, es decir, en la medida que los estudiantes reflexionan previamente a su práctica respecto a lo que van a hacer, identifican la progresión hipotética, dejando márgenes de flexibilidad ante lo imprevisible, están en mejores condiciones al momento de ir a la práctica docente, porque desarrollan la capacidad de anticipar posibles dificultades y prevén alternativas de solución, tanto en el plano didáctico (organización del grupo, materiales, preguntas, variables didácticas, etc.), como en el plano del conocimiento del contenido [dificultades inherentes, comprensión del horizonte matemático (Ball, Thames, & Phelps, 2008), conexiones con conocimientos anteriores, etc.].

Y para el logro de esta consciencia es necesaria una reflexión metacognitiva, potenciada por el formador de profesores y/o por los mismos compañeros del grupo,

considerando a los intercambios comunicativos y la interacción social como el referente básico para ayudar a “mirar” lo que no se es capaz de hacer de manera individual; esta nueva mirada requiere acompañarse de referentes teóricos, en tal sentido la referencia a la Teoría de las Situaciones Didácticas, se incorporó como una alternativa superadora de la visión empirista de análisis de la práctica y a la vez como una⁸⁰ alternativa de articulación entre la teoría y la práctica.

En lo que sigue vamos a profundizar un poco más en algunos aspectos básicos de la práctica docente de los estudiantes y sus avances en la comprensión de su incidencia tanto en su proceso formativo, como en la configuración de sus representaciones sociales sobre lo que implica ser docente para la enseñanza de las matemáticas.

IV.1.4.1. Toma de consciencia respecto al escenario de la práctica docente: imprevistos.

Ser profesor implica, además de lo enunciado por diversos autores (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Shoenfeld & Kilpatrick, 2008), el conocimiento de los imprevistos propios del contexto donde se desarrolla la práctica docente y los cuales no necesariamente están asociados al saber en juego, sin embargo llegan a influir negativamente al momento de la aplicación de las situaciones didácticas sobre todo cuando los docentes en formación no logran reconocerlos y/o controlarlos.

Al respecto vamos a enunciar los imprevistos que se les presentaron a los estudiantes y que se integrarán a su conocimiento sobre el contexto donde se realiza la enseñanza, de ninguna manera asumimos que son los únicos que pueden presentarse, pero son de los que pudimos obtener evidencias:

* **Reducción del tiempo laboral:** En el apartado IV.1.3.2, ya analizamos como una dificultad que reconocen los estudiante, el control del tiempo didáctico, sin embargo en este caso de los imprevistos ya no nos referimos al tiempo didáctico, sino más bien a la reducción del tiempo natural, traducido en que, de las 5 horas diarias de trabajo, éstas se reduzcan a 3 horas, por diversas circunstancias, con lo cual se afecta el tratamiento didáctico de las asignaturas; esta situación se presentó en EPpI4, con lo cual no pudo

⁸⁰ Decimos “una” alternativa y no “la” alternativa, en atención al conocimiento de otras opciones para la formación de maestros de matemáticas (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Blanco & Contreras, 2012; Godino, 2009; Shoenfeld & Kilpatrick, 2008), sin embargo dadas las finalidades para las que fue utilizada en el curso que analizamos, se mostró muy productiva para generar representaciones y práctica alternativas al esquema tradicional, caracterizado por la ostensión de saberes formales.

aplicar lo planeado y ello redundó en una afectación casi completa de su situación didáctica:

E.- Pero esa era la parte principal, antes de ello había otra parte que era con botellas de litro, medio, cuarto y tercio de litro y ahí van pero mi mamá me encargó que trajera 3 litros de agua y que trajera botellas de distintas maneras, ¿qué botellas puedo comprar para ajustar los 3 litros?

I4. Aja

E.- ¿Si trabajó esa partecita?

I4. No la pude trabajar porque como ya era viernes nada más íbamos a trabajar hasta la hora del recreo

*** Combinación de diversas actividades:** En esa vinculación entre el tiempo natural y el tiempo didáctico, cuando no se logra concretar una buena organización se tienden a combinar varias actividades, con lo cual se genera una ruptura de la progresión didáctica y muy posiblemente una ruptura del sentido de las actividades dado que se pierde el interés al ir de una a otras de diferente naturaleza y luego querer regresar al centro de la actividad principal.

Desde los 90's Gary Davis, asumía como uno de los problemas de “gestión del aula”, las “idas y venidas” (Davis & Thomas, 1992), entendiendo por ello el hecho de cambiar de un tema a otro y luego regresar al primero, con lo cual se rompe la uniformidad y el ritmo tan necesario para completar los procesos didácticos.

En muchas ocasiones la combinación de varias actividades escolares y/o la no consideración de su presencia puede ocasionar la pérdida del sentido de la actividad matemática central atribuible al cambio entre una y otra tarea de naturaleza muy diferente; algo en este sentido se presentó en EPpM5

E.- Usted lleva esta planeación que elaboró previa a su práctica docente, ¿hubo algunos imprevistos al momento de aplicar la planeación?

M5. Pues sí

E.- Ha sí

M5. Lo primero fue lo de la cámara

E.- Sí, sí, ¿pero ya en términos del trabajo?

M5. La conseguí prestada y pues no sabía cómo se utilizaba, entonces yo creí que ya estaba grabando la preparación del medio y no, tuve que seguir con mi preparación del medio y todo y ya tenía planteado el problema, y resultó que les tocaba a esa hora inglés

E.- Ha

M5. Les tocaba inglés, entonces ahí no supe si decirle a la chava, no pues espérese que yo terminé y mejor le dije no usted siga, luego inglés, luego educación física, bueno inglés, luego ya receso, luego educación física, total que la continuación fue

después

E.- Fue dos horas no

M5. Fue como a la una,

E.- A la una de la tarde y ¿a qué hora salían los niños?

M5. a las, el programa el que está ahí en la escuela donde practicaba eran que salieran a las 3 de la tarde creo.

Este tipo de circunstancias, evidentemente demandan mayor atención de los docentes en formación, primero para prever las condiciones organizativas y planear en congruencia con ellas, y segundo, para retomar la actividad y ganar la atención para “devolverles la responsabilidad” a los niños.

*** Aspectos comportamentales de los niños:** El logro de la disciplina en los salones de clase es imprescindible para poder concretar los enfoques y aplicar las situaciones didácticas tal y como se diseñen; el desarrollo de esta competencia forma parte de lo que Ball, Thames, & Phelps (2008) han llamado “conocimiento del contenido y los alumnos”.

En los casos analizados, este imprevisto (que teóricamente estaba previsto dentro del conocimiento de las características de los niños que los estudiantes han revisado en sus cursos de psicología, a la par del curso de matemáticas), se presenta como problemas al repartir el material con el cual van a trabajar:

E.- ¿qué otras dificultades manifestaron los niños?, ¿aparte de esa ya no manifestaron otra dificultad?

E3 En cuestiones disciplinarias se peleaban por las hojas, es que son más, no es que las hojas son

E.- Para el equipo

E3 Para el equipo, todos deben de participar, entonces eran cuestiones de participación de cada equipo que se peleaban por las hojas, nada más (EPpE3)

Al parecer la falta de consideración del sincretismo infantil ocasiona dificultades que luego pueden conflictuar el desarrollo de la situación didáctica, si se le escapa de las manos la situación al docente en formación.

O en la organización de los equipos:

E3 Nada más hubo uno, no dificultad, sino mal organización por parte mía, que a lo mejor sí hizo que la actividad fuera un poco más tardada, porque en principio si se manejaba la planeación que hice de dar un dulce, un dulce a cada niño, pero son muy difíciles los niños de que trabajen en equipo, no trabajan todos con todos, el grupo es un grupo muy indisciplinado, entonces lo que trate fue de formar los

equipos, por afinidad fue lo más fácil porque si los formaba de otra manera, me pasó en las prácticas pasadas se hacía un descontrol total y no trabajaban absolutamente nada, entonces lo que hice fue formar los equipos, tu aquí, tu quédate aquí con ellos, pero si me tarde un poco, porque había niños que no querían integrarse a ningún equipo

E.- Y con ellos se resolvió la situación de que los niños trabajaran bien en equipo, E3 No,

E.- No

E3 Más o menos si, por ejemplo las niñas muy integradas en su equipo muy listo, y los niños que eran más inquietos con todo y problemas pero si trabajaron la actividad, solo un niño que no, que no se quiso integrar en ningún equipo, no se quiso integrar en ningún equipo, ni la maestra lo convenció, y se quedó ahí viendo la actividad nada más (EPpE3)

Este enfrentamiento del docente con la realidad es lo que contribuye a dotar de sentido a los conocimientos teóricos, si en un curso se analizan las características de los niños, en casos como éste es donde se deben poner en juego y tomar las decisiones pertinentes para construir las estrategias que posibiliten que ningún niño se quede sin involucrarse en el proceso didáctico.

IV.1.4.2. Modificaciones previstas y realizadas: elementos desde la reflexión metacognitiva.

Siguiendo con otro de los aspectos vinculados a la relación entre la metacognición, la regulación del orden de lo planeado y la toma de decisiones, cuestionamos a los estudiantes respecto a las modificaciones que contemplaban en su diseño de Situación didáctica; la información obtenida en la entrevista previa, la triangulamos con las respuestas a la misma pregunta en la entrevista posterior y con los datos que ellos libremente escribieron en su ensayo de análisis de la práctica docente.

De entrada asumimos que al cuestionar de esta manera a los estudiantes los estábamos invitando a que reflexionaran desde su poco conocimiento de las características de su grupo (cuando la entrevista previa) y lo que estaban planeando, así como desde lo realizado y el por qué de las modificaciones (en la entrevista posterior), además de que, en esta última entrevista, también se les cuestionó de manera futurista, a partir de que ya aplicaron la situación y de los resultados obtenidos, ¿qué modificaciones le harían, pensando en una aplicación posterior?

En la tabla “Modificaciones previstas – modificaciones realizadas” sintetizamos y documentamos con fragmentos de información, las reflexiones que hacen los estudiantes y cómo van tomando conciencia de las implicaciones que tienen sus previsiones, tanto como

el grado de articulación entre lo previsto y lo realizado; entre líneas también se configura una representación social relativa al grado de flexibilidad que puede tener un plan de clase:

Tabla 40. Modificaciones previstas – modificaciones realizadas.

Instrumento Estudiante	Entrevista previa	Entrevista posterior		Ensayo de análisis de la práctica.
		Modificaciones realizadas	Modificaciones prospectiva	
P1	P1 <u>no he previsto, hasta ahorita no he previsto nada</u> , E.- ¿considera que así ya se puede desarrollar de buena manera toda la planeación?, P1 Eso espero	P1.Si, la empecé, <u>la preparación del medio</u> , iba a empezar con el problema igual que les iba a plantear en la fase de formulación y como que no me gustó, porque les iba a dar ya la respuesta E.- Ajá, a eso es P1. Y mejor se las quise <u>plantear con pasteles, lo de la vida cotidiana</u> , diciéndoles que ayer fui a una fiesta con mis tías, y que llevaron tales pasteles, y así los fui involucrando aquí a la preparación del medio	P1. Ya pasar a los niños a que me digan como resolvieron el problema, que aquí para la validación <u>o el cierre</u> , como se llama, no lo, o sea <u>que me explicaran aquí ante el grupo como le hicieron o porque le hicieron y ya al momento de saber eso ya llevaría el material didáctico como manzanas más grandes, que se puedan partir o algo, para que puedan partirlas ante el grupo, hacen la validación</u>	No hace referencia a modificaciones realizadas...
V2	V2 <u>Si en la preparación del medio, porque si de repente los niños, pueden decir que también en la fiesta les dan dulces</u> E.- Ajá, ajá V2 Puede ser que si hacen rápido esto, puede ser que les diga si les dieron dulces, y tuvieron tantos dulces y se los quisieron repartir, ya es otra repartición que continua o algo así E.- Ajá, V2 <u>Continua si, se los pueden repartir y ya continua</u>	V2 Funcionó y si luego después hice, <u>como ya les repartí los 3 pasteles, como ya les había entregado el material pues ahora se los dibuje en el pizarrón</u> E.- Ha órale, V2 A ver ahora nada más estos 3 pasteles ahora hay que dividirlos entre 3 niños, y ya háganlos en su cuaderno y ya pasábamos de nuevo a la validación y pues no pero después otra vez retome la planeación como estaba	V2 A lo mejor sería un grado más de, <u>ponerles, un problema más, un poco más difícil, de partir 3 pasteles entre 2 niños, a lo mejor sería ahora 2 pasteles entre 3 niños,</u> ↓ V2 a lo mejor en la forma de los repartos, hacer más, sería <u>hacer más repartos para generar más dificultad o duda a los niños para ver si son igual a los repartos que se hacen</u> , ahora haciendo como en un pastel y ahora a la mitad y se reparten ese y partir ese otra vez a la mitad, con estos dos pedazos decirles, este es igual a este, ¿por qué?	No hace referencia a modificaciones realizadas...
E3	E3 <u>Yo creo que es suficiente, si acaso en lo que se puede modificar es en la formación de los equipos</u> , porque es un problema que yo tenía en mi jornada anterior E.- Ajá, ajá E3 Que los niños se rehusaban a conformar equipos que no fueran de su agrado pues, que no estuvieran con sus amigos, pero pues <u>lo resolví dejando al final que se juntaran como ellos quisieron</u> E.- Por afinidad	E.- Al final ¿tuviste necesidad de modificar algo de tu planeación o así se aplicó tal y como la habías pensado desde el inicio? E3 No, si se aplicó como <u>la había pensado</u>	E3 Lo que me acaba de decir ahorita de que <u>recortaran las figuras o darles por ejemplo más hojas en blanco, para que ellos manipularan más y pudieran cortar y dibujar más y comparar las figuras,</u>	Posteriormente el colectivo demoró más de 5 minutos en formar los equipos. En el plan de clase aparece que se formarían equipos entregando dulces de diferentes colores y los que tuvieran colores similares deberían conformar un equipo, <u>pero con el trabajo previo con los niños se detectó que es difícil que colaboren en equipo cuando muchos de los alumnos se rechazan</u> , por dicho, motivo <u>la formación de equipos fue de carácter libre y por afinidad de los alumnos, aunque el maestro intervino cambiando a ciertos alumnos de equipo para que estos estuvieran algo</u>

				equilibrados en cuanto a número de integrantes y trabajo.
I4	M5. Si por ejemplo decía que metiera quintos, quintos y ya decimos, pero mis niños van, yo digo que mis niños no, siento que no me van a, como le digo, o sea que van muy atrasados E.- O sea no comprenderían, no lograría sumar fracciones M5. No, ajá	No se logró trabajar completa la situación didáctica...	I4. <u>No, yo me vine mucho con eso de la ranita,</u> E.- Si I4. Que si se emocionaron y si, a pesar de que si se emocionaron con el material y si, si, pero no al máximo porque cuando les dije de la ranita y así y así como que si entendieron E.- ¿Sólo la parte del material sería lo que se modificaría? I4. Y la consigna? E.- La consigna, ¿pero que de la consigna? I4. Pues E.- Por ejemplo ahora ¿cómo les diría la actividad? I4. <u>Pues que hay varias ranitas, unas grandes otras chicas y las más grandes dan saltos de $\frac{1}{2}$, y ya necesitamos que pongan una comida en tal parte y necesitamos, pero necesitamos varias ranitas que lleguen a ese punto, cuántas, cual y cual ranita vamos a usar</u> E.- Aja, porque una da un salto de un medio, otra de I4. Así diferentes	Estando recorriendo equipo por equipo y al ver que no comprendían <u>les mencione que había diferentes cuatro ranitas y que cada una daba saltos diferentes una de medios, otra de cuartos, otra de quintos y la ultima de decimos y que si teníamos la piedra en tal lugar cuales ranitas deberían de saltar para llegar al punto</u> <u>Aquí me di cuenta que no hubo sensibilidad didáctica y debí hacer modificaciones desde el principio de la actividad para que no se asustaran totalmente con las fracciones.</u> Esto para que la actividad fuera comprendida desde el inicio, de manera <u>que la consigna al menos tuviera devoluciones</u> y tratar de que la actividad fuera llamativa para los alumnos, porque no lo fue.
M5	M5.No si hace falta por ejemplo la formación de equipos, al momento de la validación que preguntas hacer porque no sé qué procedimientos van a resultar, pero tampoco no puedo preparar todas las preguntas que podría haber en ese momento E.- ¿Desde ahorita con ese problema como está planteado puede prever los procedimientos que los niños van a realizar, o no se puede? M5. Puedo prever el que hice el otra vez el de la película, hace lo mismo van a juntar los dos pedacitos y los dividen entre 3	M5. En la modificación yo nada más tenía contemplado que pasarían 5 o 6 equipos y al final pasaron todos, como que todos los niños yo quiero pasar, que yo lo hice mejor que él E.- Ajá M5. Y eso que puse al final que no se si entendieron, ya lo puse aquí E.- Hey M5. Que explicara esa forma E.- Esa otra relación, esas modificaciones fueron previstas, o hasta el momento de la clase se le ocurrieron ahí, es decir que pasaran más niños, más equipos, el que hubiera un cambio de patrón de diferencia, en lugar de dividir vertical, lo dividían horizontal, eso, <u>¿esas modificaciones las pensó ahí mismo en la clase o desde antes las planeó?</u> M5. El dividir horizontal, por ejemplo yo se lo planteo a una persona y le dije tu como lo resolvería y ya me dijo no pues yo lo dividiría así, se me hizo interesante, pero no creo que lo hagan los niños, y ya al momento que bueno yo no había visto, yo no había formulado, pero	M5. <u>Pues a lo mejor la preparación del medio</u> E.- Ajá, ¿esa porque? M5. Porque yo al principio dije o pues a lo mejor se acuerdan poquito, y no comenzaron diciendo que eran manzanas, que habían trabajado la vez pasada, como que nada que ver, y luego les dije no se acuerdan que les puse fomis y que trabajaban en equipo y no, no como que no la captaban muy bien, pero de todos modos me ayudó porque se acordaban de todo lo que habíamos hecho E.- Aja M5. Pues se iban acordar de cómo se las institucionalicé yo, eran nomás a base de puras medidas, multiplicación y división, entonces cuando yo lo recapitulo, porque en si yo fui quien lo recapitulé no lo recordaron, nada más lo esencial del otro problema que fue que eran 5 niños y 2 barras y entonces ya les dije no eran 5 niños y perdieron 3 y nada más me quedaron 2, y ya como que se les iba dando una idea pero yo pienso que se les pueda dar <u>un comentario no sé más</u>	No hace referencia a modificaciones realizadas...

		al momento de presentarlo a los niños, se me ocurrió, opté para hacerlo para aquellos niños que decían que era 6, que estaban seguros que era 6 y ya al momento que les dije que era 4, ya luego decían hay para que trabajo si siempre lo hago mal o algo así E.- Ha M5. Entonces como que fue un modo de aliento hacia ellos pero no se si se confundirían	interesante,	
R6	R6. Pues yo creo que siempre se tiene que, <u>una planeación no se aplica exactamente como uno la tiene, depende de las características, o de las reacciones que los niños tengan en ese momento</u>, por ejemplo si me doy cuenta que los niños recuerdan sobre la versión anterior, sobre lo que se hizo, en el caso pasado, a lo mejor no va hacer tanto necesario ponerlos a jugar la segunda versión del cero al uno E.- claro, R6. <u>a lo mejor se reduciría más la preparación del medio para darle más oportunidad aquí</u> E.- O.k, entonces si hay mucha flexibilidad en la planeación, de tal suerte que usted diga bueno esto ya lo dominan R6. si ya lo dominan no es necesario	R6. Pues como que sí, bueno aquí en la validación y en la institucionalización, creo que hice la fase, se podría decir que dentro de la validación hice la fase, lo institucionalice porque íbamos llenando el cuadro, la tabla y ahí mismo los niños ya, como en la formulación ya habían descubierto algunos de los <u>saberes yo dije para que apartar la fase de la validación con la de institucionalización como que las relacioné</u>, me iban diciendo los resultados y ya los ibas analizando de uno por uno y porque y esto	R6. Qué modificaciones, quizá <u>separar poquito más la validación de la institucionalización</u>, eso, que quedara primero bien claro cómo lo resolvieron, pero es que depende de los niños, porque <u>si todos lo resolvieron de una misma manera yo pienso que no tiene tanto caso validar</u>, o sea ya la validación se trata de confrontar los resultados y del porque, el porque de los diferentes procedimientos y llegar a ver cuál es el que está bien y cuál no, la lógica de reflexión en el niño, <u>pero pues todos lo resolvieron también, porque todos se juntaron lo resolvieron de la misma manera</u>, entonces no creí que tuviera tanto sentido validar, o darle mucho énfasis a la validación E.- no se trabajó algoritmos convencionales con los niños verdad R6. No,	Para esta situación en el análisis a priori (antes de) el aplicador se dio cuenta que en la preparación del medio no se tenía contemplado la vinculación con la situación didáctica anterior, es decir, <u>no se tenía vislumbrada la memoria didáctica para esta actividad así que antes de aplicar la situación se incluyó en la planeación</u> porque como regularmente en esta época las fracciones no se ven y los niños están con otro contenido ajeno a las fracciones no es conveniente llegar al aula y hablarles directo a los niños sobre las fracciones, es más apropiado iniciar recordando lo último visto de fracciones.
A6	A6.No, <u>si lo tengo previsto, pero no lo he anotado, por ejemplo si no hay espacio ahí, saco los niños afuera</u> A6. Ha, si, es que yo de lo que tengo previsiones es de lo del tiempo, por decir si los niños no dan con el clavo, <u>tratar de dar más pistas para sacar el resultado correcto, así como encaminándolos para ir metiéndolos en duda acá con los contraejemplos</u>	A6. a lo planeado, <u>pues lo de los equipos es uno</u> E.- Es uno A6. La formación de equipos, pero lo de lo demás E.- ¿Está todo como lo habías planeado? A6. si nada más las regulaciones pequeñas como <u>plantearles de nuevo la consigna porque si es algo</u>	A6. Entonces usted dice si <u>volviera trabajar en las fracciones tendría que adentrarme en todos los niños las fracciones un día antes y ya vemos problemas y así como uno ni sabe si andan bien en las fracciones entonces se dificulta mucho el trabajo</u> Cambiar el problema de 3 chocolates entre 2 niños, a 2 chocolates entre 3 niños.	Para continuar con lo planeado <u>hice una regulación con la formación de equipos</u>, los invité a jugar afuera a la dinámica del barco se hunde y resultó mejor de lo que esperaba, así formé los equipos de 4 y después de entrar rápido al aula ellos comprendieron que tenían que trabajar con los compañeros que les había tocado y no hubo los problemas de las prácticas pasadas donde no querían trabajar con fulanita porque los golpeaba, porque no se peinaba, porque no hacía nada, etc.

De una revisión global de esta tabla podemos inferir que hay un continuo entre quienes afirman que no tienen contemplada o prevista ninguna modificación, hasta quien asume un buen nivel de flexibilidad en la planeación, en términos de que la aplicación de

una planeación depende también de condiciones contextuales y el profesor debe estar preparado para trabajar en la complejidad y la incertidumbre.

Otro aspecto que resalta, desde EPpA6, es el relativo a que, para poder prever posibles modificaciones a lo planeado, se debe tener un buen conocimiento del grupo con el cual se va a practicar (con lo cual las previsiones se convierten en variables didácticas ante casos “especiales” perfectamente identificados, por ejemplo niños muy inteligentes o en el otro extremo, niños con necesidades educativas especiales), dado que de lo contrario la planeación se elabora para un grupo hipotético y en tal sentido la primera opción es aplicarla tal cual, las modificaciones se dan sobre la marcha y en atención a cierta sensibilidad didáctica, como es el caso de EPpM5.

Llama la atención que, en lo general, las modificaciones previstas por los estudiantes, en la práctica no se realizaron, fueron las circunstancias y las decisiones sobre la marcha las que orientaron los cambios y en estos se refleja el aumento en la sensibilidad didáctica para poder realizarlos; cuando no se logra esta reflexión en la acción, la frustración se hace presente y queda un estado de insatisfacción que se proyecta hacia situaciones futuras como previsión de lo que se debió de hacer. Si asumimos que el error rectificado es fuente de aprendizaje, entonces podríamos plantear como hipótesis que el cambio se va a efectuar, sobre todo en los estudiantes que tuvieron mayores conflictos en su práctica.

Con todo ello, ¿cuáles y de qué naturaleza son las principales modificaciones que se hicieron durante la aplicación de sus situaciones didácticas? ¿En qué medida éstas son producto de una reflexión metacognitiva? O ¿en qué medida podríamos inferir que obedecen más a representaciones sociales que se acercan a las prácticas culturalmente aceptadas como cuestiones cotidianas del aula?

Desde el análisis de la información sintetizada en la tabla anterior, detectamos modificaciones en cuatro aspectos de su planeación:

- a) **En la preparación del medio:** Tanto de manera previa (el caso de EPrV2), cuando anticipan posibles variables en el cambio del contexto de los problemas (de magnitudes continuas a magnitudes discretas), como en el momento mismo de la aplicación de la situación didáctica (EPpP1 y EPpV2), cuando por descuido (se reparte mal el material y ello obliga a reformular la consigna) o por

decisión consciente (se cambia el contexto del problema para evitar dar respuestas anticipadas y por ende romper la dinámica de la siguiente fase didáctica); y de igual manera, como proyección a futuro (EPpM5), se reconoce que la preparación del medio tiene un papel importante en el proceso didáctico y por ende debe cuidarse.

De las cuatro situaciones citadas, en una de ellas (EPpP1) se denota una decisión producto de la reflexión en la acción y consciente de las consecuencias de ésta para el éxito de su situación didáctica. Dos de los casos, que corresponden al mismo estudiante, denotan un ajuste “obligado” por las circunstancias, aunque recompone la marcha de la clase, al retomar su planeación. Y el último caso, reflexiona sobre la necesidad de modificar la preparación del medio para lograr un inicio de la clase “más interesante”, es decir sobresale el aspecto motivacional por sobre un interés intelectual.

- b) **En el momento de la validación:** En otras partes de esta tesis ya hemos comentado a que se refiere la validación, desde la propuesta didáctica de la Teoría de las Situaciones Didácticas, en tal sentido, los estudiantes reconocen que tuvieron necesidad de modificar esta fase, aunque sólo EPrM5 anticipó posibles dificultades en ésta, “qué preguntas hacer porque no sé qué procedimientos van a resultar” y ella misma la modificó, al permitir que todos los equipos explicaran los procedimientos de resolución encontrados.

En el caso de EPpR6, se denota que sus reflexiones van acompañadas de la circunstancialidad de lo cotidiano que se genera cuando no se controla bien el proceso didáctico, porque si se promueven momentos a didácticos ¿qué es lo que ocasiona que todos los alumnos tengan una misma manera de resolver los problemas? La riqueza de la validación viene precisamente de las restricciones impuestas en las fases de acción o formulación, de tal manera que la aparición de diferentes procedimientos de resolución y su argumentación y posterior formulación, contribuyen a generar una representación social sobre el conocimiento matemático, (como un producto de construcción social) y sobre su aprendizaje (como un proceso de construcción colectiva a partir del enfrentamiento directo con las situaciones problema).

Parece ser que en EPpR6 se manifiesta el conflicto entre su experiencia en la articulación o fusión de la fase de validación con la institucionalización y los fundamentos teóricos que definen y caracterizan a cada una de ellas, de tal

manera que al cuestionarle respecto a posibles cambios para una aplicación futura, declara la necesidad de darle su lugar a cada fase, es decir, reconoce que tienen su momento y su importancia dentro del proceso didáctico.

- c) **En la organización del grupo (formación de equipos):** Es parte del discurso común de los docentes en formación, la dificultad para que los niños trabajen en equipo y sin embargo, al mismo tiempo, está considerada como una estrategia necesaria desde el enfoque didáctico y los estudiantes la retoman al momento del diseño de sus situaciones didácticas.

Tres de los alumnos, a partir de su experiencia previa con el grupo, anticipan que ello les puede ocasionar problemas, sin embargo es en ApE3 donde vemos con mayor claridad cómo se presenta esta situación: anticipa la dificultad para formar equipos, pero la fortalece cuando los deja que se integren “por afinidad”, en lugar de que, ante el conocimiento que ya tiene, investigue o prevea alternativas que equilibren su integración (por ejemplo, nivel de conocimientos, género, etc.); la reflexión sobre el porqué su maestro titular intervino y modificó la organización de sus equipos le podrá llevar a capitalizar sus aprendizajes y superar esa dificultad.

- d) **En las variables didácticas:** Una modificación importante, para complejizar o facilitar los problemas planteados a los alumnos, se da al momento de aplicar variables didácticas, incidiendo en el aumento de las cantidades principalmente.

Ahora bien, sin ánimo de ser deterministas, pareciera ser que la mayoría de las modificaciones que los estudiantes realizaron a su situación didáctica obedeció más a la circunstancialidad del aula, que a la reflexión previa a partir de sus conocimientos sobre los niños y los contenidos; ello nos lleva a pensar en la necesidad de fortalecer los procesos de análisis posteriores a la práctica, de tal manera que las evidencias recuperadas sean fuertemente analizadas con la utilización de un corpus teórico bien delimitado, y desde el cual se detecten momentos clave de la reflexión-en-la-acción que contribuyen a la destransposición del saber matemático y didáctico; al respecto la Teoría de las Situaciones Didácticas sigue siendo una buena opción.

IV.1.4.3. Expectativas v/s satisfacción posterior.

A partir de las declaraciones de los estudiantes, en torno a las expectativas que se plantean, podemos inferir el horizonte en el cual se ubican y a la vez ubican y conciben la

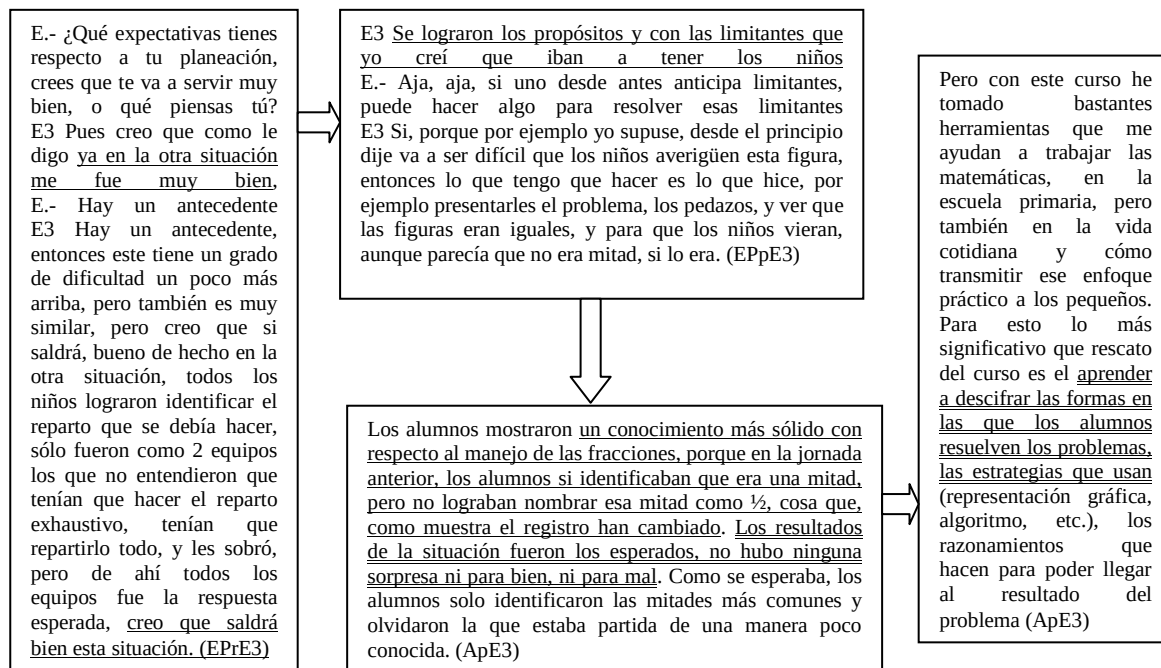
práctica docente, *“porque el modo de enfocar los objetos y los acontecimientos que pueblan nuestro mundo cotidiano apela a sistemas de representaciones trans-subjetivas que modelan y matizan nuestras representaciones (Jodelet, 2008, pág. 55);* en tal sentido cuando los estudiantes se plantean expectativas sobre su práctica, desde ellas podemos inferir un horizonte posible de ubicación, es decir, entre aquellos estudiantes que manifiestan seguridad y comprensión de lo que van a realizar en su práctica, hasta quienes pueden asumir un nivel mínimo de compromiso, sobre todo en la consideración de que no son los responsables directos del proceso de enseñanza – aprendizaje de los niños a su cargo.

A partir del análisis de los instrumentos aplicados, podemos detectar que todos los estudiantes, sujetos de la investigación, tienen buenas expectativas sobre su posterior desempeño, se sienten confiados y seguros sobre la planeación que van a trabajar, incluso reconocen que los niños sí pueden tener los conocimientos necesario para enfrentarse a la situación problema que les plantearán.

Algo que llama la atención es el proceso dialéctico de confirmación de las expectativas, que podemos inferir a partir del análisis en diferentes momentos, de las declaraciones de E3 y que, paulatinamente van configurando una representación de lo que implica ser profesor para la enseñanza de las matemáticas. Este proceso dialéctico inicia con la interiorización de su campo experiencial, el cual configura su pensamiento sobre la enseñanza y le permite recuperarlo para objetivarlo en situaciones posteriores; en otras palabras, las experiencias que ha tenido en momentos de práctica anteriores, se convierten en referentes para tomar decisiones y ellos configuran sus expectativas al momento de volver a enfrentarse a la enseñanza de un nuevo contenido, con el mismo grupo pero con nuevas circunstancias, de tal manera que si, desde su experiencia, los niños presentaban limitaciones en sus conocimientos, sus expectativas también son pobres, dudará respecto a las posibilidades de plantear situaciones complejas.

En otra dimensión del campo experiencial, la confirmación de las expectativas configura un horizonte de potencialidades posibles, es decir, pareciera ser que si se confirman las expectativas previas de los estudiantes, el grado de satisfacción incide en su autoconfianza y se opera un proceso de retroalimentación mutua: confirmación de las expectativas - satisfacción posterior - aumento de la autoconfianza.

Recuperamos un ejemplo, el cual nos parece ilustrativo de este proceso de confirmación de las expectativas y de la satisfacción que brinda el autoreconocimiento del logro de los propósitos planteados; creemos que las reflexiones generadas a partir del cumplimiento de las expectativas inciden en el fortalecimiento de las representaciones que van construyendo los estudiantes, de tal manera que los posicionan como docentes capaces de gestionar aprendizajes significativos o bien los obligan a revisar con mayor profundidad su actuación para construir alternativas de cambio.



Como apreciamos, en esta trayectoria que reconstruimos, hay una expectativa positiva que se nutre del antecedente previo que el estudiante tiene al haber trabajado con el mismo grupo, pero sobre todo de su conocimiento respecto a los aprendizajes con que cuentan sus alumnos (EPrE3), esto le permite anticipar un campo de comportamientos posibles ante la nueva situación, lo cual se ve confirmado en su práctica y al mismo tiempo le permitió anticipar estrategias de solución ante las posibles dificultades detectadas (EPpE3) y finalmente reconocer cómo van avanzando en sus aprendizajes los alumnos (ApE3). Todo este proceso se completa con el autoreconocimiento de sus aprendizajes durante el curso de Matemáticas y su enseñanza II.

El modo de enfocar los acontecimientos, como decíamos en líneas anteriores, obedece a representaciones sociales que en su origen pueden ser transubjetivas, pero que en situaciones concretas pueden ser intrasubjetivas, en tanto los docentes en formación

actúan y se ven reflejados en el autoreconocimiento de sus expectativas y el cumplimiento de las mismas; el problema es que en ocasiones este dimensionamiento genera culpas personales, sobre todo cuando no se logra descentrar el análisis de los acontecimientos en la práctica docente, de tal manera que los estudiantes pueden sentirse los únicos responsables de que no haya tenido éxito la aplicación de su situación didáctica, sin tomar en consideración el resto de los factores que pudieron incidir, por ejemplo, la dificultad inherente al contenido, las características de aprendizaje de los niños (o la distancia conceptual entre los conocimientos anteriores y el nuevo aprendizaje) e incluso el tipo de contrato didáctico instalado en los salones de clase.

En esta circunstancia se colocó EPpI4 cuando, al cuestionarle sobre el grado de satisfacción posterior, afirma lo siguiente:

E.- Bueno vamos a comenzar con esta entrevista posterior a su práctica, ya estuvimos comentando ahorita unas cosa que quedaron grabadas vamos a ver qué tal le fue, después de haber practicado su tema ¿cómo considera su grado de satisfacción, respecto a los logros de su planeación?

I4. No, no muy buenos,

E.- Ajá, ¿por qué?

I4. Porque mi consigna no fue clara y si batalle mucho para que los niños me entendieran y como hice varios equipos y mi salón no estaba tan grande para quedarnos ahí, se salieron, entonces era difícil estar explicando y estarme metiendo y saliendo y no, ya después si porque de pronto se me vino a la mente una ranita, tengo una ranita, varias que brincan, y tiene que llegar a este punto y así, y fue de la manera que un poco más me entendieron, pero si ya fue tarde

El juego que aplicó, en su diseño original, no incluye más que las tiras divididas en algunas unidades fraccionarias y la tira para colocar una piedra y adivinar la distancia entre el origen y el lugar donde se colocó la piedra o cualquier objeto, para enunciar la distancia los niños tienen que usar la suma de fracciones (Cfr. Anexo 13. “Juego ¿quién se acercó más?”), además no hay una formulación de la consigna de manera clara, ni en el diseño del juego, ni en la planeación que elaboró la estudiante; a partir de estas consideraciones es entendible que, cuando se le pregunta por qué no fueron buenos sus resultados, a lo primero que se hace referencia es a un problema en la consigna. A pesar de que no se tuvo el éxito esperado, ella reconoce que ubicando el problema en un contexto familiar para los alumnos, es posible que se impliquen en la actividad; la frase “*se me vino a la mente una ranita*” muy probablemente refleja la representación sobre el trabajo con fracciones en su escolarización previa, donde a partir de ejemplos de ese tipo se contextualizaban los conocimientos.

Sin embargo, esta insatisfacción posterior la interioriza culpabilizándose por los resultados:

E.- *¿Qué sentimiento le quedó ese día después de haber trabajado?*

I4. Desilusión, no, pues me desesperé mucho

E.- *aja*

I4. Me decepcioné de mí porque no

E.- *¿Pero a estas alturas ya lo superó?*

I4. *Si, bueno poco*

E.- *¿Como logra superar esos problemas?*

I4. *Pues*

E.- *¿Cómo se logran superar esos problemas?*

I4. Próximo teniendo más, pues si, pensando más en los niños, bueno fue lo que no pensé que no, no me puse en el papel de los niños en ese momento

Incluso este mismo sentimiento, que afirma que le quedó, le genera una imagen sobre su propio desempeño, al afirmar en el transcurso de la entrevista, que aún no se siente preparada para trabajar con los contenidos de fracciones

E.- *En cuanto, si yo ahorita le preguntara, porque el curso de matemáticas ya se termina prácticamente, esta es la última semana que estamos aquí, si yo le preguntara, ¿ya está lista Usted para trabajar el tema de fracciones en la escuela primaria, usted que diría?*

I4. No

E.- *¿Por qué?*

I4. Porque, bueno es que me quedó muy mal, muy mal sabor de boca, quizá a lo mejor es con la práctica, ya estar más con los niños, pero es por eso que yo digo que no, me quedó muy mal sabor de boca

E.- *Claro, claro*

I4. *Y por eso digo que no*

Entonces, a partir de esta articulación entre diferentes ideas, derivadas de sus declaraciones, podemos apreciar cómo se hace una generalización ante una pregunta que tiene que ver con el grado de formación profesional que asume tener la estudiante, y a la vez en su respuesta se desliza una representación social muy recurrente en relación a los escenarios de la formación de profesores, cuando afirma **“a lo mejor es con la práctica, ya estar más con los niños”**, entre líneas recupera la representación de que “la práctica hace al maestro”, a pesar de que es precisamente ésta la que se quiere superar con el esquema formativo del plan de estudios 1997 (SEP, 1997).

Entre estos dos ejemplos de la articulación entre las expectativas y la satisfacción posterior, tenemos el caso de EPpA6, quien previo a la práctica esperaba un grupo

participativo, donde los niños “discutan”, sin embargo, en la entrevista posterior denota que

A6. *Todavía no, no quedé muy satisfecho porque no salió como yo esperaba*
 E.- *O.k y ¿por qué no salió como tú esperabas?*

A6. *Porque hubo muchas cosas que iban cambiando por ejemplo las fases hubo muchos imprevistos o cosas que hacían que cambiara*

E.- *Pero ¿los imprevistos eran atribuidos a qué? ¿o qué?, o entraba gente o*

A6. *No haga de cuenta conforme las fases, cuando se me alargó mucho la actividad y los niños a lo que vi, porque no lo había visto antes, no han visto fracciones, casi nada y ya están en 6º, los niños de 6º y entonces yo le pregunté al profe (se refiere al formador de docentes) que los niños estaban muy atrasados la primera vez que lo hicieron y dijo aplica una de 5º y apliqué la de 5º y aun así los notaba como incarentes*

Ubicamos estas afirmaciones como intermedias, entre la satisfacción de éxito y la desilusión, porque se aprecia un equilibrio entre la gestión del profesor (“se me alargó mucho la actividad”) y el nivel de conocimientos que los niños manifestaron (“los niños estaban muy atrasados”).

IV.1.5. El lenguaje didáctico aprendido y su puesta en práctica: anclaje y objetivación.

En el capítulo anterior analizamos la manera en cómo dentro del salón de clase de la escuela normal se construye una representación social sobre la importancia de un lenguaje didáctico y cómo se fue logrando un anclaje e interiorización del mismo en los estudiantes, en tal sentido, con ese marco referencial, en este apartado vamos a revisar cómo es que se objetivó éste tanto para el diseño, como para el análisis de su práctica.

Siguiendo a Berger & Luckmann (2001, pág. 57), “*Como sistema de signos, posee la cualidad de la objetividad. El lenguaje se me presenta como una facticidad externa a mí mismo y su efecto sobre mí es coercitivo*”, en tal sentido, construida la representación propia del lenguaje de la Teoría de las Situaciones Didácticas, en sí mismo se presenta como coercitivo, en la medida que su semántica configura una forma de pensar y de actuar y establece unos límites desde los cuales se interpreta la realidad, dado que proporciona una posibilidad ya hecha para las continuas objetivaciones que necesita la experiencia para desenvolverse y con ello adquiere un sentido y una pertenencia compartida por una comunidad de práctica profesional.

“El lenguaje también tipifica experiencias, permitiéndome incluirlas en categorías amplias en cuyos términos adquieren significado para mí y para mis semejantes. A la vez que las tipifica, también las vuelve anónimas, porque por principio la experiencia tipificada puede ser repetida por cualquiera que entre dentro de la categoría en cuestión” (Berger & Luckmann, 2001, pág. 57).

Y es por ello que los estudiantes ahora pueden hablar con soltura de que emitieron una consigna, citan las diferentes fases con toda normalidad e incluso al momento de analizar su práctica incorporan conceptos que no usaron para el diseño de la situación didáctica (porque no son necesarios para ello), por ejemplo, lógica profana, efecto topaz, contraejemplos, cronogénesis y sensibilidad didáctica.

Ahora bien, desde los casos estudiados, ¿Cuáles conceptos son los más utilizados? ¿Se usan con la profundidad que éste requiere? Ya anticipábamos una triple dimensión en el proceso de su construcción, el primer momento se llevó a cabo en el escenario de la formación docente inicial, es decir las clases de la Escuela Normal, el segundo momento es el diseño de la situación didáctica y su puesta en práctica y el tercer momento es el análisis posterior a la aplicación de ésta. La dialéctica ocasionada por el hecho mismo de que tuvieron la oportunidad de poner en práctica esta representación y luego discutir sobre ella, permite reformular los conceptos estudiados y afinar sus características.

Cabe mencionar que al hacer revisión de los tres instrumentos principales con que se recuperó la información, la tendencia mayoritaria en el uso del lenguaje se orienta hacia la terminología propia de la Teoría de las Situaciones Didácticas, muy poco se usa un lenguaje propio del saber matemático; en este caso sólo recuperamos dos citas al respecto.

En la primera, cuando en la entrevista previa se hizo alusión a las condiciones que debe cubrir un reparto, EPrV2, aclara los conceptos básicos:

V2 Equitativa, pues que a todos le toque lo mismo y exhaustiva que todo se reparta

Y el segundo caso, en EPrM5, cuando se refiere a la intencionalidad de su planeación, cita uno de los significados de la fracción:

M5. Por ejemplo ver la fracción como parte todo, que van incluso en diferente nivel

Esta circunstancialidad no significa que no se haya discutido y aprendido la terminología correspondiente al saber matemático de referencia, en nuestro estudio, las

fracciones y sus diferentes significados, lo que aquí resaltamos es que hay una predominancia, como herramientas de análisis, de los conceptos didácticos propios de la Teoría de las Situaciones Didácticas, dado que todos los usan, en mayor o menor medida, con algunos matices que vamos a precisar enseguida.

Cuando se hizo la entrevista previa, los conceptos que más aparecieron en su discurso fueron los vinculados con el diseño de la situación didáctica: preparación del medio, consigna, memoria didáctica, las fases (acción, formulación, validación e institucionalización) y, tangencialmente, la idea de contraejemplos.

Sin embargo, como herramientas para el análisis, adicional a los anteriores, aparecen referenciados conceptos como: devolución, análisis a priori, topogénesis, lógica profana, cronogénesis, equilibrio didáctico, efecto topaz, regulaciones, sensibilidad didáctica y contrato didáctico.

Nos preguntábamos en líneas anteriores si los conceptos se usan con la profundidad que implica su definición o hay ajustes; al respecto queremos decir que, la recombinación de lenguajes que se opera en el proceso de construcción de esta representación, lleva a que cada estudiante vaya interiorizando las partes que considera medulares de cada concepto, en atención a su campo experiencial y/o en la articulación del concepto con sus conocimientos y representaciones previas sobre la enseñanza de las matemáticas, aunque con ciertas coincidencias entre varios de ellos no logra configurarse un discurso común, pero sí un discurso consensual: estos son los conceptos con los cuales me entiendo en una comunidad de práctica profesional compartida y por ende confirman mi pertenencia e identidad.

Vamos a ir poniendo algunos ejemplos para evidenciar esto que argumentamos, para ello recuperaremos fragmentos de diálogo en los cuales se pueda obtener la representación que acompaña al concepto; dejaremos de lado los momentos en los cuales sólo se cita como parte ya del lenguaje cotidiano de los estudiantes, con frases como *“luego de la organización del grupo se vuelve a emitir la consigna (EPpR6)”*, *“aquí me di cuenta que no hubo sensibilidad didáctica (EPpI4)”* o *“no siempre se tiene que institucionalizar al final de una clase (EPpM5)”*, de las cuales aunque podemos extraer inferencias, como por ejemplo la comprensión que tienen de las características y el papel de cada una de ellas, no contienen la verbalización o alusión explícita a su representación e interiorización por ellos.

Con esta delimitación, los conceptos a que hicieron alusión son los siguientes:

* **Preparación del medio**⁸¹: En un primer caso, la preparación del medio se asume como un momento para que los niños se adentren a la clase pero, al menos desde la declaración de EPrV2, no se precisa la manera como esto se logra.

V2 Una preparación del medio adecuada lleva a una, a trabajar a los niños que se adentran, trabajar en si lo que habíamos visto y luego dar conocimiento al aprendizaje e ir comparando los resultados de todos, para que todos apoyen y al final ver la aplicación de esa

En un segundo caso, ésta se acompaña de la memoria didáctica, con dos variantes: como situaciones de recuerdo y como recapitulación de lo visto, en los casos de EPrR6 y ApM5, respectivamente.

EPrR6.- Ha o.k, bueno desde preparación del medio como le comentaba, pues primero inicio preguntándoles a los niños si recuerdan lo que hicieron, bueno el trabajo que hicieron la vez anterior

y

ApM5.- La preparación del medio era una breve recapitulación de la situación que se aplico en la jornada anterior.

* **Consigna**: En este caso una pregunta directa fue lo que aclaró el concepto, dado que lo usan de manera muy natural; en EPrR6 y en ApR6, dos momentos de reflexión de la misma estudiante, podemos encontrar una complementariedad en sus ideas que le ayudan a comprender el concepto y a nosotros a inferir la representación construida.

EPrR6: E.- La elaboración de las consignas dice que es un reto

R6. sí, porque a lo mejor a veces no me doy a entender con los niños

E.- Ha o.k

R6. Entonces intento se lo más clara posible para que entiendan bien lo que van hacer

E.- ¿Qué es lo que se escribe en una consigna?

R6. Las indicaciones, lo que los niños van hacer, por ejemplo ahora vamos a resolver un problema y se les da el problema, intento que lo resuelvan de ésta manera así, éstas son las instrucciones

E.- El problema, las instrucciones es lo que va en la consigna

R6. La devolución de la misma

Y en ApR6

⁸¹ Aquí ya no vamos a hacer alusión a sus definiciones teóricas, para ello remitimos al lector, al capítulo III de esta tesis y a la bibliografía básica sobre la Teoría de las Situaciones Didácticas que hemos referenciado.

Luego de la organización del grupo se vuelve a emitir la consigna, aunque se tiene que poner en claro la misma, para eso existen las devoluciones: para que el niño se apropie del problema y comprenda lo que está realizando; sin embargo dentro de la claridad también incluye las restricciones de las mismas, es decir, lo que se espera que los alumnos no realicen.

En síntesis, pareciera ser que su representación de la consigna es que ésta contiene las instrucciones de la actividad que van a realizar los niños, la cual a través de las devoluciones se clarifica y se precisan las restricciones a las que se sujetarán. El hecho de que en su definición haya incluido la apropiación del problema por parte del niño, con la intención de que lo comprenda, la acerca a la definición formal que ya citábamos en el capítulo anterior; una consigna implica una triple devolución: del problema, de las reglas del juego (restricciones) y de la decisión (“apropie del problema”).

* **Fases didácticas:** Desde la Teoría de las Situaciones Didácticas, son cuatro las principales fases didácticas, acción, formulación, validación e institucionalización, sin embargo al analizar la información, nos damos cuenta que los estudiantes hacen mayor referencia a dos de ellas, la validación y la institucionalización, ello obedece al hecho de que se aprecia más compleja su concreción en el aula. La acción y la formulación tienden a combinarlas y ambas son potenciadas por la consigna.

En cuanto a la validación, rescatamos cuatro declaraciones

- **EPpP1.-** *Ya pasar a los niños a que me digan cómo resolvieron el problema, que aquí para la validación o el cierre, como se llama, no lo, o sea que me explicaran aquí ante el grupo como le hicieron o porque le hicieron y ya al momento de saber eso ya llevaría el material didáctico como manzanas más grandes, que se puedan partir o algo, para que puedan partirlas ante el grupo, hacen la validación*

- **EPrM5.-** *Por ejemplo en la validación pues ya los niños no estaban poniendo atención, la hice muy corta, nada más pasaron 2, 3 equipos a presentar sus procedimientos*

- **EPrR6 R6.** *Bueno les pido a los niños que, después de eso en la fase de validación, este yo voy a colocar una tabla sobre los diferentes procedimientos que se, de los resultados más bien que van a encontrar los niños*

E.- ha o.k, los resultados esperados

R6. Ajá, entonces voy a pasar a un niño de cada equipo a que nos diga que resultado sacó y que nos explique cómo sacó ese resultado, entonces ya después de que nos platique y de los niños estén seguros de que ese es el resultado, lo vamos a ir poniendo en la tabla

- **ApA6** *Durante la validación no obtuve lo que pretendía, los niños por más que les pedía que le pusieran atención a quien estaba exponiendo sus resultados en frente, se distraían mucho con otra cosa y no le tomaban importancia al resultado*

de otro equipo aunque fuera un resultado distinto. Ya casi para terminar, cuando pasó el penúltimo niño al frente, le pregunté en voz alta a la niña que acababa de pasar que qué se sentía que no le pusieran atención a uno cuando estaba hablando en frente y conforme a su respuesta y a la seriedad con la que estábamos tratando ese punto, los niños se pusieron serios y sólo así dio resultado la validación porque empezaban a confrontarse los resultados y tanto los que estaban sentados como el que estaba exponiendo defendían su resultado.

En las cuatro afirmaciones hay coincidencias, la validación implica que los niños expongan sus procedimientos ante el grupo, pero que convengan o argumenten cómo le hicieron para llegar al resultado y, aunque sólo en el último caso está explícito, quien presenta los resultados debe defenderlos con argumentos.

Para el caso de la institucionalización, por definición es tarea del maestro, y de acuerdo a la Teoría de las Situaciones Didácticas corresponde a la parte final del proceso didáctico; a partir del análisis de la información vemos que esta representación está clara en los estudiantes, tal y como apreciamos en EPrE3, cuando afirma “la institucionalización sería como el cierre” o EPrR6 quien dice “ya para institucionalizar, vamos a llegar a la conclusión”; adicional a ello, existe la tendencia a fusionarla con la validación, en tanto se conecta con ésta, los límites se diluyen, es decir, cuando ya están validando, de manera simultánea se formaliza el saber. Con todo ello, logramos apreciar un ligero matiz, relativo al mayor o menor protagonismo del maestro.

En las declaraciones de EPrR6, se hizo una institucionalización de procedimientos y en esta lógica pareciera ser que el protagonismo del profesor es menor:

R6. Por ejemplo hay repartos en los que se podría decir, a los niños, se van a encontrar que son más chocolates y menos niños, y en otros son más niños y menos chocolates, entonces ya para institucionalizar, vamos a llegar a la conclusión, bueno en caso de que los niños lleguen a la conclusión de que en cuanto a la cantidad a repartir es mayor de las personas a que se les va a repartir, les toca más de la unidad, y cuando es por el contrario, son más las personas a repartir la cantidad, les toca menos a la unidad

En cambio desde EPrA6, aparece más explícitamente el protagonismo del profesor, aunque bajo la consideración de la discusión previa de los diferentes procedimientos y la búsqueda de consensos a partir de las diferencias en los procedimientos (esto último lo afirmó en su ensayo de análisis de la práctica):

A6. Pues ya trataremos de institucionalizarlos por si corresponde o no, por decir el resultado que yo tenga si es el resultado que se le plantea

En otro orden de ideas, decíamos al principio de este apartado que, como herramientas de análisis de la práctica docente, además de los conceptos ya analizados, aparecen otros de manera complementaria; llama la atención la manera en que los estudiantes lograron la habilidad de integrarlos en su discurso y objetivarlos, por supuesto que esto es un buen aprendizaje del curso y denota otro nivel conceptual, ya no se habla de y sobre la práctica docente desde el sentido común, al contrario, se utilizan los conceptos aprendidos y con ello se configura un incipiente lenguaje didáctico especializado del profesor de matemáticas.

Decimos incipiente, en términos de la novedad que implica para los docentes en formación, no porque sea un lenguaje nuevo en la comunidad de didactas de la matemática, el cual tiene su génesis en los años 70's y sistematizado en los 80's (Al respecto Cfr. Brousseau, 1986 y Brousseau, 2007).

Citamos como ejemplo, fragmentos recuperados desde sus ensayos de análisis, elaborados después de la aplicación de su situación didáctica y en los cuales encontramos índices de esa reflexión metacognitiva deseable no sólo para tomar conciencia de lo realizado, sino también para autoregular sus posteriores decisiones antes, durante y después de sus prácticas docentes.

ApP1: Al aplicar la preparación del medio de esta situación se derivaron varios conceptos de la misma el principal fue el de las pregunta las cuales yo les estaba haciendo a los niños mientras les planteaba el problema de la preparación pero al momento de estarlo planteando surgieron varios errores lo que me llevo a la improvisación de una parte la preparación del medio aquí puse unos contra ejemplos ya que la cantidad a repartir era 3 pasteles entre dos personas y yo les dije que 2 pasteles entre 3 personas después entre cuatro y enseguida entre cinco a lo que los niños solo respondían al azar así que decidí darles el ejemplo de los tres pasteles entre las dos personas y empecé a dibujar los pasteles en el pizarrón a lo que varios niños entendieron el problema y dieron la respuesta, después seguí con la formulación del problema mientras le iba entregando el material les iba leyendo el problema en donde varios niños terminaron rápido y me validaron el problema explicándome cómo le habían hecho, pero también de la formulación a algunos niños les surgieron dudas y se acercaban conmigo para que les explicara qué era lo que iban hacer aquí implemente lo que fue la devolución de la consigna fue del medio en que los niños me explicaban que eran lo que iban hacer y con base a esto les daba ejemplos para que pudieran resolver su problema.

ApM5: Previendo la confusión que se había tenido la vez anterior con el material, además de que me esperaba que los niños iban a pensar que los cartoncillos eran las barras de coco en lugar de el pedazo que le había tocado a cada niño del problema, en ésta ocasión opté por utilizar el efecto topaze y que ellos mismos dedujeran el uso que iba a ejercer dicho material, para esto pregunté

¿Cuántas tiras de cartoncillo les voy a entregar? ¿Cuántos niños se mencionan en el problema? ¿Entonces, la tira de cartoncillo qué me representa?

Sin embargo, la mayor riqueza y variedad de conceptos la manifestó R6, quien articula varios conceptos en un discurso coherente para interpretar y explicar su experiencia de práctica docente:

- *En la topogénesis el trabajo es en equipo durante todas las fases de la situación didáctica. Sólo que antes de la formación de éstos se dio la consigna de la preparación del medio.*
- *Esto funcionó para activar los conocimientos previos y para que los niños se fueran adentrando de nuevo en el mundo de las fracciones. En este momento la topogénesis era individual pero a partir de ahí cambia a equipos. Sin embargo puede criticarse hacer tanto énfasis en la memoria didáctica porque al parecer en el desarrollo de la situación se denota que todos los equipos lo hicieron de acuerdo a la situación didáctica anterior así que surge una interrogante ¿funcionó la memoria didáctica o limitó la reflexión de los niños?*
- *Luego de recordar se organiza al grupo en equipos y vuelve a surgir el problema: prefieren el trabajo individualizado que el trabajo colectivo; esto hace referencia al contrato didáctico que tanto el maestro como el alumno ha establecido dentro del salón de clases sin embargo el plan de estudios 2009 en su versión 2011 enmarca el trabajo colectivo así que en esta ocasión la sensibilidad didáctica se deja de lado.*
- *Aunque es de mencionarse que un riesgo al formar equipos es que se presente el fenómeno que Brousseau llama lógica profana en donde los alumnos tienden a hablar de cosas u objetos que están fuera del saber en juego; afectando la cronogénesis de las actividades, especialmente en su prolongación.*
- *Pero a pesar de la lógica profana y el juego siempre se tiene que tener un equilibrio didáctico, es decir, un control en el proceso de enseñanza aprendizaje.*

A partir de lo hasta aquí expuesto podemos apreciar cómo se ha logrado la objetivación de la representación sobre el lenguaje didáctico, como herramienta para el diseño y análisis de la práctica docente de los estudiantes. Notamos además cómo es que los utiliza para generar reflexiones más allá de su aplicación acrítica, por ejemplo cuando se pregunta por la pertinencia de la “memoria didáctica” ya que al haber recuperado una experiencia de trabajo con un contenido previo similar al que va a experimentar en esta ocasión, nota cómo es que los niños recurren a la estrategia ya conocida para resolver el problema, cuando su intención era que exploraran nuevas estrategias, por ello su reflexión respecto a que si esto se convirtió en una limitante o realmente sirvió.

En teoría, la memoria didáctica debe permitir las conexiones entre el nuevo conocimiento y los saberes ya aprendidos, pero si en su diseño didáctico el profesor no logra plantear una situación problema con las variables suficientes como para que los saberes anteriores sólo sean el antecedente necesario, entonces al recordarlos se estará dando la solución al planteamiento actual, que sólo será nuevo por la temporalidad en que se plantea, pero no por el avance conceptual en los aprendizajes.

Finalmente y sin soslayar el resto de los conceptos didácticos que incorpora, debemos resaltar el uso que les da para reconocer el porqué de muchas de las complejidades del proceso didáctico en los salones de clase de la escuela primaria: contrato didáctico, ruptura del equilibrio didáctico e instalación de la lógica profana, conceptos que se explican desde la misma lectura de los fragmentos de análisis y que en ese escenario cumplieron su función: son herramientas de análisis de la práctica docente, y a partir de su uso *“mis propios significados subjetivos se me hacen accesibles objetiva y continuamente, e ipso facto se vuelven ‘más reales’ para mí”* (Berger & Luckmann, 2001, pág. 56)

IV.2. Destransposición del saber: entre el horizonte formativo y el horizonte conservativo.

Cuando iniciamos este trabajo de investigación, la preocupación por buscar una explicación del porqué los estudiantes parecían “olvidar” lo aprendido en sus cursos de matemáticas, de tal manera que cuando ingresaban a los últimos semestres de la carrera de Licenciado en Educación primaria, se encontraban imprecisiones en los enfoques, debilidad en los conocimientos comunes sobre matemáticas y sobre todo en el conocimiento especializado del contenido, nos llevó a pensar en la necesidad de que en los cursos de matemáticas se generara un nuevo tipo de transposición didáctica, más acercado a la idea de “transformación de saberes previos”; acompañado a esta idea, también concebimos necesario que el tipo de reflexión que se generara antes, durante y después de la práctica docente de los estudiantes, debería ser más a profundidad, es decir, una reflexión metacognitiva, porque es a partir de ella que los sujetos – docentes en formación- pueden controlar su propio proceso formativo y por ende autoregularse en la toma de decisiones, con saber y con conciencia.

Sin embargo, en la configuración de esta forma alternativa de transposición didáctica que, recuperando a Antibí & Brousseau (2002) podríamos denominar

“destransposición de saberes”, se cruza un elemento formativo muy importante, las representaciones sociales de los estudiantes y del formador de profesores, de ahí que por ello las analizamos de manera articulada; es decir, cómo es que éstas inciden en los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico que se construye en la Escuela Normal.

En este apartado, después de haber revisado los diferentes instrumentos de recuperación de la información y caracterizado las representaciones sociales de los estudiantes, vamos a recuperar indicios más concretos de esos incipientes procesos de destransposición del saber, para ello vamos a incluir cuatro instrumentos más que hasta el momento no habían sido considerados: la revisión en progresión de sus planes de clase, desde el que fue objeto de estudio en esta tesis, hasta el último que han elaborado (diciembre del 2012) antes de cerrar el proceso de recuperación de la información; los diferentes ensayos de análisis de su práctica, correspondientes a los periodos de aplicación de los planes de clase anteriores; una entrevista colectiva, planeada con la intención de recuperar su visión a un año de distancia de llevado el curso de matemáticas; y, finalmente, un cuestionario con problemas matemáticos (los mismos problemas revisados en el curso de matemáticas), con la finalidad de valorar algo tan simple como su “memoria didáctica” respecto al recuerdo de su experiencia cuando los trabajaron, pero además valorar algo más profundo, la pervivencia de los aprendizajes realmente obtenidos a partir de lo que se analizó durante el curso.

Recuperamos de Jodelet (2008) la categoría de horizonte, bajo el siguiente posicionamiento, *“la noción de horizonte, tomada de la fenomenología, designa aquí los ámbitos en relación con los cuales puede situarse un mismo objeto. El objeto que un sujeto observa puede ser considerado en horizontes diferentes. (...) Porque el modo de enfocar los objetos y los acontecimientos que pueblan nuestro mundo cotidiano apelan a sistemas de representaciones trans-subjetivas que modelan y matizan nuestras percepciones”* (Jodelet, 2008, pág. 55); en tal sentido, en el título de este apartado apreciamos una disyuntiva, entre el instinto formativo y el instinto conservativo, porque a partir del análisis de la información, apreciamos por momentos la construcción de un horizonte formativo en los estudiantes y en otros la emergencia de un instinto conservativo, sobre todo en la consideración de que durante los años que dura la formación profesional, posterior al desarrollo de los dos cursos de matemáticas, los estudiantes están sujetos a distintos

contratos didácticos, los cuales tienden a escolarizar las relaciones y en tal sentido se llegan a diluir los saberes matemáticos formalizados en éstos.

Por ejemplo, al recuperar sus ensayos de análisis en progresión podemos ver cómo es que, ante un cambio en las demandas de los formadores de profesores, los estudiantes optan por un horizonte conservativo, es decir, responden al contrato didáctico que se instala y a las demandas propias de los diferentes cursos a lo largo de su formación, y por muy buenas y fructíferas que sean las herramientas conceptuales no se les da seguimiento y poco se recuperan, optando por cumplir los requisitos de acreditación planteados por los nuevos cursos; en el caso del esquema de planeación se conservan los elementos de una Situación Didáctica, como dijo uno de los estudiantes, ya sin tanta exigencia.

Cuando se cuestionó a los estudiantes con la intención de encontrar indicios explicativos al respecto del porqué sus ensayos no tenían las características y el nivel de exigencia de los elaborados durante el curso de matemáticas, las afirmaciones son coincidentes:

E.- ¿los últimos de sus ensayos ya no los hicieron en el mismo estilo que cuando estaban en el curso de matemáticas, por qué?

Ao. por qué las

Ao. ¿por qué no lo hicimos como cuando estábamos en el curso de matemáticas?

E.- aja

Ao. porque simple y sencillamente las especificaciones que nos pedían en el ensayo eran distintas, los puntos, por ejemplo con el profe “M” revisábamos fase por fase y que pasó en cada fase y aquí, el ensayo que ya le entregamos al Profe “H” era algo muy, muy general y de temas muy generales y no.

Aa. exacto, y luego aparte ahí ya no pedían que nos enfocáramos en matemáticas, o sea ya era general, exacto.

E.- Es decir, en el último ensayo ya no había necesidad de recuperar cosas específicas de alguna asignatura, si no hablar de cuestiones generales.

Ao. Hablar más sobre la práctica en sí, no sobre, no sobre algún, sobre la práctica en sí.

E.- aja, ¿qué otra razón hay para eso?, lo planteo de otra manera, las, **¿la forma de analizar que aprendieron en el curso de matemáticas ya no es factible para posteriores cursos?**

Aa. es que ya uno se adapta al estilo del maestro, a lo que uno espera del maestro, o lo que ellos esperan de uno, bueno lo que ellos pidan más bien, bueno si el específica pues algo, algo diferente a lo que nosotros estábamos haciendo pues nos adaptamos a ese perfil

E.- hay algún problema que recuperan de aquellas cosas después, en alguno de los trabajos si se recuperan algunas ideas si dice, es que me falló la consigna o a lo mejor no hice la devolución bien, entonces.

Aa. los términos que se quedan con uno, si salen dentro de lo mismo que pide el maestro.

Varias cosas sobresalen de estas afirmaciones, en primer lugar, es innegable que los estudiantes juegan un rol formativo básico y están inmersos en una serie de contratos didácticos – tantos como cursos formativos llevan durante la carrera- , en tal sentido la tendencia predominante es a responder a las demandas de ese contrato, si les piden un nivel de exigencia lo cumplen, pero si no se les exigen, también hasta ahí se quedan.

El instinto conservativo, propio de la sobrevivencia estudiantil, sale a relucir por sobre el instinto formativo: *“es que ya uno se adapta al estilo del maestro”*, o como dicen más adelante *“uno se adapta a las necesidades que le exige la escuela”*, es decir, el juego de estudiantes los ubica en una posición de sujetos didácticos, bajo lo cual responden más a las demandas institucionales que a un posicionamiento de sujeto epistémico, no porque este último rol no aparezca, sino porque las exigencias institucionales hacia allá los orientan y llega a resultar más cómodo adecuarse a ello.

Sin embargo, aparece una afirmación muy significativa, *“los términos que se quedan con uno si salen dentro de lo mismo que pide el maestro”*, pero aquí aparece un problema, y es el de las demandas institucionales posteriores al aprendizaje de un esquema de análisis didáctico, el tipo de análisis sobre la práctica es *“muy general”*, *“ya no pedían que nos enfocáramos en matemáticas”* o, por extensión, ya no se pide que se hagan análisis didácticos, lo que ocasiona que los aprendizajes se diluyan ante la diversidad de opciones metodológicas y discursivas para analizar la práctica: el discurso de las competencias o posicionamientos descriptivos genéricos (el regreso a las generalidades, aún y cuando fueron cuestionadas durante el curso de matemáticas y ello dio lugar a la necesidad de recuperar un lenguaje didáctico⁸² específico).

El conocimiento de esta situación puede abrir un campo muy importante y a la vez una exigencia básica, reconocida pero muy pocas veces concretada, en torno a la formación inicial de profesores, en una dimensión dual: la revisión de los planteamientos curriculares para lograr una articulación más explícita y una progresión ascendente en torno a la visión formativa de los profesores de matemáticas que se desee lograr y, en segundo lugar, una organización colegiada para potenciar la comprensión de los elementos

⁸² Al respecto volvemos a retomar la siguiente afirmación: “M. (...) me gustó que se refieren ustedes al asunto de los conceptos ayuda a que nos podamos comunicar de una manera más fácil y de una manera más fluida, hubo como 2 ó 3 de ustedes que no se remiten a los conceptos y por eso todo queda en la ambigüedad (CP4)”

de la propuesta, pero sobre todo el trabajo que se tendría que hacer en cada curso para concretar el perfil formativo⁸³.

Otro de los aspectos sobre los cuales también les cuestionamos fue sobre el esquema de planeación por situación didáctica; en este caso sí hay una tendencia a conservarlo como opción de planeación, bajo la siguiente idea:

Aa. Yo creo que, que sí, porque es la única forma en que he planeado desde que entré aquí, o sea ya es con la nueva reforma, o sea uno ya está acostumbrado a trabajar de esa manera y no conoce alguna otra forma de trabajo

En tal sentido, aquí aparece un momento fundamental para concretar una representación social sobre cómo diseñar e intentar gestionar la comunicación de los saberes en la escuela primaria, de tal manera que se destranspongan esquemas formativos previos que no sean congruentes con un enfoque basado en la transformación de saberes previos, porque, aunque se afirma que “no conocen alguna otra forma de trabajo”, el matiz está puesto en que no conocen otra forma de diseñar el trabajo con matemáticas, pero sí conocen otra forma de trabajo entendida como la vivencia con algunas formas de enseñanza de las matemáticas.

A pesar de afirmar que sí seguirían planeando por situación didáctica, en la concreción de esta idea también se operan transformaciones, y éstas son reconocidas por los estudiantes; la pregunta es ¿a qué obedecen estas transformaciones? ¿Cuáles y de qué naturaleza son estas transformaciones del esquema original propuesto durante el curso y justificado conceptualmente?

Desde el discurso de los estudiantes, cuando se les cuestiona, afirman:

⁸³ Reconocemos que en la Licenciatura en Educación primaria, Plan 1997, al ser una formación generalista, la atención sobre la formación matemática sólo estaba puesta en dos cursos: Matemáticas y su enseñanza I y II (SEP, 1997); adicional a ello, en los cursos del Área de acercamiento a la práctica docente, se le solicitaba al coordinador que siguiera fortaleciendo el análisis sobre los saberes matemáticos y didácticos, sin embargo ello no siempre se da, habitualmente los formadores de docentes se remiten a la coordinación de las temáticas propias de su curso.

Aunque en el Plan 2012 (SEP, 2012 a), recién generalizado a nivel nacional, para la formación de Licenciados en Educación Primaria, se aumentaron de 2 a 4 cursos de matemáticas, sólo 2 de éstos tienen una orientación explícitamente didáctica hacia la escuela primaria, los otros dos (Álgebra, su aprendizaje y enseñanza; y, Procesamiento de información estadística), aunque establecen vinculaciones con la educación primaria, su contenido rebasa los conocimientos fundamentales de ésta y se orientan en un ámbito formativo amplio e incluso como herramienta para la investigación, textualmente se dice “se pretende que los futuros docentes apliquen estos conceptos y procedimientos en la realización de proyectos de investigación y en la elaboración de su documento recepcional” (SEP, 2012, pág. 6), con lo cual también se corre el riesgo de que los estudiantes en su tránsito por la Licenciatura tiendan a diluir los saberes formativos, pero ello todavía no lo podemos afirmar.

E.- ¿ustedes encuentran diferencia, es decir, en el mismo estilo de planeación de situación didáctica, entre las que hacían cuando estaban en el curso y las que hicieron ahora que ya no están en el curso de matemáticas?

Ao. yo sí

Aa. yo pienso que más leve

E.- que, ¿cómo más leve?

Aa. O sea como ya no es tan estricto

(Hablan todos)

Aa. Como que a veces ahí mismo metía al análisis a priori y ahora no

Ao. lo que yo pienso es que eran más detalladas, como dicen más detalladas, más así, voy a hacer esto puede pasar esto y esto, y esto, y ahorita nada más, voy a hacer que me salga esto y esto, realizar esto, no se va tan a fondo de la planeación.

E.- aja, ¿Ea6 ibas a decir algo también?

Ea6: no pues que ya no están tan detalladas porque, de hecho hasta algunas partes como que ya las, o nos las brincamos porque ya no las tomo tanto en cuenta, o las juntamos todas.

Se eliminan partes o se fusionan (“las juntamos todas”), se las “brincan”, al no tomarlas en cuenta, ya no son tan detalladas, son “más leve”, en fin, el esquema se diluye, sobre todo porque “ya no es tan estricto”. Esto último puede obedecer a tres circunstancias, primero, curricularmente se afirma que una manifestación de la competencia didáctica, tiene que ver con la habilidad para el diseño de planes de clase, en tal sentido los formadores de profesores tienden a permitir que los estudiantes vayan tomando sus propias decisiones de tal manera que elaboren un plan de clase que sea un instrumento ágil y sencillo, pero sobre todo que “*comprendan en qué consiste y cómo se expresa el carácter flexible de la planeación (...)*” (SEP, 2003, pág. 14), lo cual no riñe con el esquema de la Teoría de las Situaciones Didácticas, sin embargo ante otras opciones de planeación, al parecer se recombina ideas, conservando el esquema pero incorporando una secuencia de actividades que no necesariamente recuperan una situación problema.

En segundo lugar, al ubicar el centro en la complejidad de la planeación de “la práctica”, en general, y conforme los estudiantes tienen el compromiso de planear todas las asignaturas del plan de estudios de Educación primaria (Cfr. SEP, 2011, pág. 34), el nivel de exigencia es menor, ante el mayor compromiso por el diseño didáctico.

Y, tercero, la complejidad misma del diseño de una Situación didáctica (recordemos que no “inventaron” la situación didáctica, la recuperaron del diseño de un experto), lleva a reconocer que no todas las clases deben trabajarse con la complejidad que ello implica, sin embargo, hecha la propuesta de esquema de planeación, se planteó con

algunas exigencias que conforme fue pasando el tiempo sufrieron transformaciones, en tal sentido, veamos algunos ejemplos de éstas.

En la tabla “Ejemplos de Situaciones didácticas”, vemos los diseños que hicieron los estudiantes, a partir de las propuestas en (Block, 1987) y que aplicaron en el periodo de práctica del cual recuperamos información que analizamos en esta tesis.

Tabla 41. Ejemplos de situaciones didácticas.

P1	V2
DÍA: 2 de Diciembre MAESTRA PRACTICANTE: P MATEMÁTICAS BLOQUE II EJE Sentido numérico y pensamiento algebraico. TEMA Situación didáctica APRENDIZAJES ESPERADOS Una resolución de problemas con fracciones. MATERIAL *Hojas de máquina con problemas TIEMPO APROXIMADO 45 min. PROCEDIMIENTO DIDÁCTICO PREPARACIÓN DE MEDIO Se les llegará diciendo como en forma de conversación que: "ayer mi abuelita compro 3 manzanas y quiere repartirlas a mis dos primos de manera que les toque lo mismo y ¿Ustedes me podrían ayudar a repartir las manzanas?" FACE DE ACCIÓN Se les pedirá que pongan mucha atención porqué se le dará lectura al problema, (si alguno de los niños se encuentra distraído se hará la devolución de la consigna) FACE DE FORMULACIÓN Los niños resolverán el problema siguiente: "La abuelita de María y Juan compro 3 manzanas y quiere repartirlas entre sus nietos de manera que les toque lo mismo ¿Cómo le podrá hacer?" este problema tendrá plasmado el dibujo de los dos niños y se les dará las tres manzanas para que las repartan. FACE DE VALIDACIÓN Compararan sus respuestas con sus compañeros y entre todos lo revisaremos, se pasaran alguno de los niños a que expliquen cómo le hicieron. CIERRE Para terminar les entregare otro problema el cual dice: "Miguel, Carlos, Juana y Carolina fueron a comprar 20 pesos de naranja y les dieron 10 de cuantas naranjas les tocara a cada uno sin que sobra ni una" este problema se los recogeré sin decirles si están bien o están mal con el fin de ver como lo resuelven sin presentarles algún medio para realizarlo como fueron los niños y las manzanas en el problema anterior.	Grado: 2º Grupo: "A" Asignatura: Matemáticas Fecha: Eje: Aprendizaje esperado: Conocimiento de repartir, cosas de modo que sea un reparto, equitativo y exhaustivo. Conocimientos y habilidades: Situación didáctica: Repartir 3 pasteles entre 2 niños Tema: Fracciones Subtema: Situación didáctica PREPARACIÓN DEL MEDIO Preguntar a los niños sobre las fiestas de cumpleaños, plantear que dos niños tenían tres pasteles, pero que no sabían cómo repartirlos entre los dos, de modo que les tocara lo mismo a los dos, entonces que deben hacer los niños, los niños pueden contestar que lo reparten o parten el pastel en varias pedazos para dar uno a cada niño. Apartir de esto les diré que les entregare unos pasteles, para que les ayuden a esos niños a repartir los pasteles, se formaran en binas entregando a algunos niños pasteles de diferentes colores y los demás niños se juntarán con el niño que quieran. FASE DE ACCIÓN Consigna: cada equipo va a repartir los tres pasteles que se les entregaron entre los miembros de la bina de modo que a cada niño le debe tocar lo mismo de los tres pasteles y no debe sobrar nada de los pasteles. FASE DE VALIDACIÓN Cada equipo elegirá un integrante, para que pase a mostrar sus repartos al grupo, el grupo dirá si el reparto es correcto. Seleccionaré deberán pasar, escogiendo participaciones diferentes y en particular participaciones erróneas. Si el grupo no hace preguntas, diré las siguientes preguntas. ¿Cómo podemos saber que los pedazos son iguales? ¿Cómo podemos saber que no sobra pastel?, los equipos participaran según la diversidad de repartos, errores encontrados y la motivación del grupo. FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN Si aparecen repartos de diferente forma, Cuestionar ¿son iguales o desiguales? Y si no aparecen realizare repartos diferentes, lo muestro frente al grupo y verificar si es correcto o no, si es igual cantidad o cual es más grande, realizare repartos de varias formas para preguntar si son correctos. Evaluación: Material:
I4	M5

Sesión: 5, Viernes 2 de Diciembre. Asignatura: Matemáticas Bloque: II Lección: ¿Quién se acercó más? Tema: Significado y uso de las operaciones Subtema: Problemas aditivos Conocimientos y habilidades: Resolver problemas que impliquen una resta de fracciones en casos sencillos con distintos procedimientos. Elaborar e interpretar representaciones gráficas de las fracciones. Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico PREPARACIÓN DEL MEDIO Para iniciar la actividad preguntaré si recuerdan la lección suma y resta de fracciones de su libro de matemáticas mostrándoles la página. Una vez ya recordadas las fracciones les entrega una hoja donde venga el siguiente problema: En la tienda de don con hay botellas de agua de litro, de medio, cuarto, y tercio de litro, pero mi mamá me encargó que trajera tres litros de agua y que trajera botellas de distintas medidas, ¿Qué botellas puedo comprar para ajustar los tres litros? FASE DE ACCIÓN (CONSIGNA) Mediante la dinámica de números seguidos formaremos equipos de 5 integrantes. Se les entregará dos tiras con numeración de 1 m, medios, tercios y cuartos de metro para que calculen la medida de una longitud con fracciones de metro. Se les entregará una tarjeta para que alumnos por alumno la ubique en el lugar que quiera de la tira en blanco y los demás calcularán con sumas de fracciones la llegada al punto desde el punto cero hasta el punto deseado por el alumno; ganará el alumno que más se acerque. FORMULACIÓN (COMUNICACIÓN) Cuando ya estén en equipo cada alumno anotará la suma de fracción que piensen que es para llegar al punto en su cuaderno, después verificarán cual es la que se acercó más y entre ellos dirán quién es el que gana. VALIDACIÓN Los alumnos verificarán en el turno de cada alumno, pues sumaran las fracciones que hayan anotado y así dirán quién es el que más se acerca. INSTITUCIONALIZACIÓN Cuando ya hayan terminado el juego verificaremos en grupo las sumas que realizaron para llegar al resultado para ver si estuvieron bien.	Grado: 5º Grupo: "B" Maestro titular: Maestra Practicante: M Asignatura: Matemáticas Bloque II Eje: Forma, espacio y medida Tema: Ubicación espacial y medida Subtema: Representación y unidades Conocimientos y habilidades: Leer mapas de zonas urbanas o rurales, conocidas o desconocidas. Realizar conversiones entre los múltiplos y submúltiplos del metro, del litro y el kilogramo. Aprendizajes esperados: Resolver problemas que impliquen leer e interpretar mapas. Resolver problemas que impliquen conversiones entre múltiplos y submúltiplos del metro, litro y kilogramo. SITUACIÓN DIDÁCTICA LUNES 28 DE NOVIEMBRE DEL 2011 Preparación del medio: Comenzar la clase recapitulando la situación didáctica que se realizaron las prácticas pasadas. Se acuerdan de los 5 niños que fueron a la feria de San Francisco y que sólo habían ajustado 2 barras de chocolate, pues resulta que de esos 5 niños se perdieron 3 niños y los dos niños restantes de la desesperación les dio hambre y se fueron al puesto de dulces. Acción y Formulación: Ahora resulta que esos 2 niños se compraron 3 barras de coco y al repartírselas a cada uno le tocó un pedazo de 6 cm y quieren saber ¿cuál era la medida de cada barra de coco? Se explicará que a cada equipo tendrá las dos tiras de cartoncillo de 6 cm cada una, las cuales representan los pedazos que les tocaron a los dos niños. Para esto se pondrán en binas volteándose con el compañero de atrás, a cada bina se le entregará el material antes mencionado y una hoja cuadrícula con el problema escrito y se les indicará que hagan ahí sus procedimientos. Validación: Después de que la mayoría de las binas hayan terminado, indicar que acomoden su banca y pedir que uno de los integrantes pase a explicar su respuesta. Preguntar quién tiene un procedimiento diferente, qué levanten su mano y elegir a uno para que pase a explicarlo. Hacer esto 5 o 6 veces según la variedad de procedimientos. En caso de que no surgieran dificultades plantear la siguiente situación: Mi hermano me dijo que la respuesta se sacaba cortando la tira en dos y que ese era el tamaño de la barra de coco, ustedes ¿qué opinan? Institucionalización: ¿Cuáles procedimientos también son correctos? ¿Cuál de los procedimientos de sus compañeros es el más rápido y fácil de seguir? El tamaño de la barra de coco entera ¿es más grande o más chico que el pedazo que le tocó a cada niño? ¿A qué creen que se deba esto? Hubiera resultado más difícil: qué les diera el tamaño de las barras de coco y la pregunta hubiera sido ¿qué parte de barra de coco le tocó a cada niño? Se comentarán las respuestas. Material: -2 pedazos de cartoncillo de 6cm x 3cm por equipo. -1 tira de cartoncillo de 40 cm x 3cm. -lápiz, tijeras y hoja cuadrícula.
R6	A6
Grado: 6º Grupo: "B" Asignatura: Matemáticas Fecha: Viernes 02 de Diciembre del 2011 EJE: Sentido Numérico y pensamiento Algebraico APRENDIZAJE ESPERADO: Resuelve problemas con números fraccionarios, empleando los algoritmos convencionales. COMPETENCIA: Resolver problemas de manera autónoma. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones, por ejemplo, problemas con solución única, otros con varias soluciones; problemas en los que sobren o falten datos; SECUENCIA DIDÁCTICA Preparación del medio: Se les preguntará a los niños si recuerdan la semana de prácticas anterior, enseguida cuestionaré si recuerdan cuando resolvimos un problema con chocolates y que si aun recuerdan como lo resolvimos, después de un momento hacer memoria didáctica, se les comentará que si recuerdan que también jugamos al dominó, esta vez jugaremos a la baraja "del cero al uno", se les comentará que este juego trata de repartir todas las cartas de la baraja entre los integrantes del equipo y en el primer juego por turnos pondrán una carta en el centro de la mesa y así sucesivamente cada integrante, cuando todas hayan terminado de poner su carta verifican cual es la mayor de estas y la persona que la puso recoge todas las cartas (estas cartas ya no valen para los siguientes turnos) al final del juego gana quien logro recolectar mas cartas. Después de dar las instrucciones se organizará al grupo en equipos de cinco personas. Para la segunda versión jugarán al memorama: que trata de voltear todas las barajas al revés y tendrán que encontrar pares de fracciones equivalentes. Fase de acción y formulación: después de terminar de jugar se les pedirá el material a los niños y que se sienten y guarden silencio. Comenzaré por escribir las consignas en el pizarrón: equipo 1: encontrar cuántos niños y cuántos chocolates son de acuerdo a: chocolate entero: (muestra la barra de 12 cm), pedazo que le tocó a cada niño: (muestra la barra de 6 cm) ahora encontrar cuántos niños y cuántos chocolates si el chocolate entero es (muestra la barra de 12 cm) y el pedazo que le tocó a cada niño es de 5 cm. Y por ultimo calcular cuántos chocolates y cuántos niños si el chocolate entero es de 12 cm y el pedazo para cada niño fue de 9 cm. Equipo numero 2: calcular cuántos niños y cuántos chocolates si el chocolate entero es de 12 cm y el pedazo para cada niño es de 8 cm; luego cuántos niños y cuántos chocolates serán si el chocolate completo es de 12 cm y el pedazo	Escuela Primaria: 4277 Clave: Grado: 6º Grupo: "A" Maestro Titular: Maestra Practicante: [Asignatura: Matemáticas Bloque: Eje: Tema: Aprendizajes esperados: Ira SESION "Situación didáctica 2.2 de la tesis de maestría de David Block" Preparación del medio: Para trabajar la memoria didáctica iniciaré la clase platicando con los niños sobre lo visto en matemáticas la semana de prácticas anterior, donde trabajé otra situación didáctica similar pero diferente, les preguntaré: ¿Recuerdan la otra semana cuando usamos popotes?, ¿Alguien sabe para qué los ocupamos?, ¿Qué es lo que hicimos con ellos?, etc. Luego les comentaré que esta vez fueron sólo dos niños al circo y que con el dinero que les sobró del boleto de entrada compraron tres barritas de chocolate que se repartieron en partes iguales, juntaron lo que compraron y se obtuvo un pedazo de este tamaño (les mostraré una tira de cartoncillo de 6 cm de largo). Les diré que tenemos que averiguar de qué tamaño era cada uno de los chocolates que compraron. (7 min) Fase de acción: Haré una actividad para formar equipos de 4 integrantes (se enumerarán del 1 al 4 para que cada uno se integre al número de equipo que le tocó), les entregaré a cada equipo dos tiras de cartón de 6 cm x 3 cm, una tira de cartulina de 40 cm x 3 cm, una hoja de papel por si la necesitan y unas tijeras. Ahora les pediré que dentro del equipo resuelvan el problema sin copiarle a los demás equipos, podrán cortar la tira de 40 cm y hacer lo que ellos creen pertinente. Fase de Formulación: Dejaré que interactúen entre sí y que con sus métodos resuelvan el problema construyendo un chocolate completo. Fase de validación: Cuando los niños terminen de debatir dentro de su mismo equipo y cuando ya hayan sacado sus conclusiones, expondrá cada equipo o un miembro del mismo sus resultados al pleno en frente del grupo, donde su pieza de chocolate estará pegada con cinta en el pizarrón. Luego se abrirá a discusión para que cada equipo defienda su producción. Si hay procedimientos distintos trataré de que todos sean explicados Fase de Institucionalización: Comprobaremos si los resultados corresponden o no con el problema planteado.

para cada niño fue de 16 cm y por ultimo calcular cuántos chocolates y cuántos niños si el chocolate completo es de 12 cm y el pedazo que le tocó a cada niño es de 10 cm. Equipo 3: calcular cuántos niños y cuántos chocolates si el chocolate entero es de 12 cm y el pedazo para cada niño es de 18 cm; luego cuántos niños y cuántos chocolates serán si el chocolate completo es de 12 cm y el pedazo para cada niño fue de 24 cm y por ultimo calcular cuántos chocolates y cuántos niños si el chocolate completo es de 12 cm y el pedazo que le tocó a cada niño es de 8 cm. Fase de validación: El maestro colocará en el pizarrón una tabla para llenar de acuerdo a los resultados obtenidos por los niños, se les pedirá a un integrante de cada equipo que pase a comentar como resolvieron sus problemas y anoten en el cuadro su resultado, se comentará si los resultados son los correctos y porque. Fase de institucionalización: después de analizar el cuadro se propiciará la reflexión para culminar con que cuando en un reparto la cantidad a repartir es mayor que el numero de objetos o personas a repartir esa cantidad les tocará más de una unidad y cuando la cantidad a repartir es menor que el numero de objetos o personas a repartir esa cantidad les tocará menos de la unidad. MATERIAL: una baraja fraccionaria, tiras de fomi que representen los chocolates completos y los pedazos.	

Este vistazo completo a 6 de los 7 diseños de Situaciones didácticas⁸⁴ contribuye para precisar el argumento respecto al nivel de exigencia que se les había planteado, no sólo en términos de la conservación de las partes del esquema básico: preparación del medio, acción, formulación, validación e institucionalización, que coinciden en todos los casos (aunque P1 conserva la denominación “cierre”, consideramos que no obedece a una ruptura con el esquema, sino más bien a un conocimiento de las características de los niños a la edad de 6 años, con lo cual ve difícil hablar de institucionalización, por lo que ella implica), sino también a la precisión en el contenido de cada una de las fases.

El diseño del problema, lo hemos dicho en varias partes, se recupera de un experto, pero deja en claro que toda situación didáctica tiene como centro un problema matemático congruente con el saber en juego que se quiere construir y desde el cual se dota de sentido al mismo; la preparación del medio, contextualizando el problema o bien articulándolo con los conocimientos previos; los momentos adidácticos, la formulación, aunque en algunos casos se fusiona con la acción; la validación, con la recuperación de las preguntas que serán planteadas para potenciar la discusión de los niños (V2) o bien con la precisión de que se favorecerá la confrontación entre diferentes procedimientos, y finalmente la institucionalización, con sus variantes según el contenido y el grado escolar.

No omitimos decir que, en esta fase de aprender a planear, se observan dificultades, por ejemplo la no articulación precisa entre el contenido matemático y el problema planteado; sin embargo, en lo general, hasta este momento los estudiantes han construido una representación de cómo se planea de acuerdo a esta propuesta.

⁸⁴ Por cuestiones técnicas no logramos recuperar el diseño de la situación didáctica de E3.

Ahora bien, con la revisión de la progresión en los diseños de uno de los estudiantes (Esquema 12 “Progresión en las transformaciones de la situación didáctica”) vamos a documentar cómo es que se van dando las transformaciones en el esquema de planeación; plantearemos sólo como hipótesis las posibles consecuencias que estos pueden tener para la concreción del enfoque oficial para la enseñanza de las matemáticas.

El mapa conceptual del primer recuadro a la izquierda denota que, antes de la experimentación de la situación didáctica de diciembre de 2011, ya tenían un acercamiento sistemático a los conceptos de la Teoría de las Situaciones Didácticas y en lo general se nota claridad sobre el proceso didáctico (con excepción del esquema que ubica el “El juego en la enseñanza” como origen de las relaciones). Posteriormente a la aplicación de la situación didáctica experimental (diciembre de 2011), el curso de matemáticas termina y la responsabilidad por la revisión de los planes de clase se traspasa curricularmente al curso de Observación y práctica docente, de tal manera que las sucesivas planeaciones se hacen desde ahí.

Al revisar el diseño de marzo de 2012, notamos que aún conserva el estilo de planeación, con todos sus componentes e incluso, ante el cambio de grupo de práctica (del semestre anterior que practicó en 6°. Grado, a este en el que va a 2°. Grado) toma la decisión de aplicar la situación didáctica previamente diseñada por V2, con ligeras modificaciones, principalmente de forma. ¿Qué lo llevó a tomar esta decisión? Al respecto sólo planteamos la hipótesis de que pudo parecerle factible su aplicación en tanto la planeación es congruente y además tiene el criterio de “autoridad”, con lo cual se puede garantizar su funcionalidad.

Ante la presencia de esta situación (la aplicación de una situación didáctica diseñada por un compañero) se plantea una disyuntiva, por un lado la tendencia individualista de que no está permitido retomar las planeaciones de los compañeros, porque se estaría copiando, y por el otro, las posibilidades que brinda el trabajo colaborativo, la evidencia de que comparten experiencias que muchas de las veces no se comentan en los salones de clase; considero que sin limitar las posibilidades de compartir, esta situación se podría sistematizar y darle mayor formalidad de tal manera que se integrara un banco de situaciones didácticas validadas empíricamente, por supuesto que mediante un sistema de control que garantizará su confiabilidad.

En el diseño de mayo de 2012, comienzan a notarse las transformaciones, no al esquema en sí (porque se conservan las partes), pero sí al contenido de cada una de ellas; en lugar de un problema matemático central⁸⁵, aparece la preocupación por seguir la lógica de las actividades del libro de texto, con lo cual la devolución del problema se diluye en tanto ahora la responsabilidad recae en la estructura del libro de texto. Notemos además cómo en una misma fase se incorporan actividades de diferente naturaleza, por ejemplo en la fase de acción, se plantea la resolución individual de una actividad en el libro de texto, posteriormente en binas resuelven otra actividad del mismo libro, sin que se retome la anterior; comentan resultados grupalmente, lo que pareciera una pseudovalidación, para dar paso a una “devolución dosificada⁸⁶” (Ávila, 2006) al momento de responder grupalmente las preguntas del libro.

El caso de la institucionalización, en esta planeación, sí recupera su esencia, dado que la atención está puesta en el saber matemático: unidades, decenas y centenas como parte de la descomposición aditiva de números.

En el diseño de octubre de 2012, ya no se incorpora en el esquema la fase de validación y se integran en un mismo apartado la consigna y las fases de acción y formulación; el enunciado de las actividades pareciera ser que previene contra el error, en lugar de dejar que éste aparezca: “*iremos contestando la página 37 puesto que se les dificultará*”. Además se incorpora al esquema un apartado que en los anteriores no se consideraba, la evaluación.

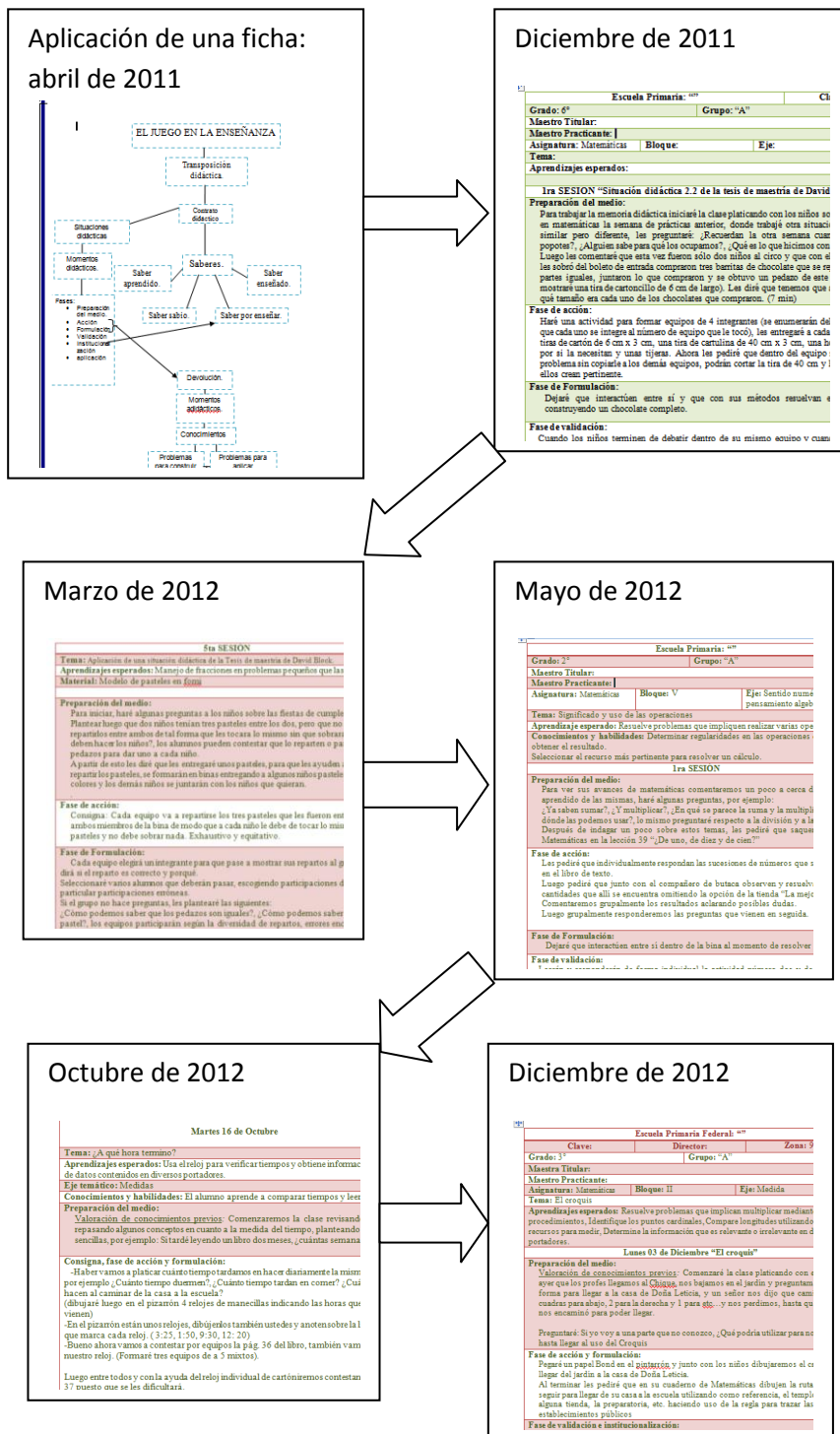
En el diseño de diciembre de 2012 recupera, en la preparación del medio, una idea básica de las situaciones didácticas: una situación problema que involucra un contenido matemático y que su resolución le dotará de sentido a éste. Vuelve a fusionar las fases, acción y formulación, y validación e institucionalización respectivamente; ello pareciera reflejar una inquietud que también se presentó en R6, cuando se preguntaba sobre la pertinencia de fusionar la validación con la institucionalización, en los casos que ante la unificación de procedimientos de resolución no hay mucho que discutir o argumentar.

⁸⁵ No nos centramos en el análisis del tipo de contenido, en tanto éste es asignado por los maestros titulares de las escuelas primarias y para respetar la secuencia que ellos llevan, los estudiantes diseñan en función de ello, además no siempre coincide que cuando se programan los periodos de práctica se están trabajando contenidos de fracciones.

⁸⁶ “El contrato que regula las acciones en la clase se anuda alrededor de una idea: los niños pueden hacerse responsables de su aprendizaje en tiempos adidácticos relativamente breves. Es decir, el profesor realiza una devolución dosificada y para generar los tiempos adidácticos se apoya en las preguntas y los problemas incluidos en el libro de texto” (Ávila, 2006, pág. 239)

Finalmente podemos notar que, conforme pasa el tiempo, los estudiantes reinterpretan el esquema aprendido y opera esa recombinación de lenguajes que carga de contenido los conceptos en atención a las necesidades que se van presentando: mayor cantidad de planeaciones, menor exigencia y uniformidad con otros esquemas a partir de los nuevos aprendizajes de los cursos subsecuentes al de matemáticas y su enseñanza.

Esquema 12: Progresión en las transformaciones de la situación didáctica



A pesar de esta recombinação de lenguajes y flexibilización en el contenido de los diferentes componentes del esquema de planeación, de cualquier manera es necesario destacar las siguientes afirmaciones de los estudiantes cuando se les pregunta qué sería lo básico en una planeación por situación didáctica.

Aa: la de formulación

Aa: el trabajo autónomo del niño, la consigna y el trabajo del niño

E.- el trabajo autónomo del niño, aja

Aa: aunque bueno todas

Ao: es que no, va ligada no, esa situación

Aa: pues que gana uno con que el niño trabaje si ya no va a validar, si ya no va a dar, no va a haber una reestructuración, entonces pues si

Ao: y cómo va a permitir que los niños trabajen si no se hace una preparación del medio adecuada y por ejemplo a mí lo que me pasa en matemáticas es que me apego, me apego a la planeación entonces digo, tengo que preparar el medio, tengo que hacer esto, tengo que validar y todo, y se me extiende, se me extienden las actividades por eso, yo siento que no puedo dejar una clase de matemáticas a medias, desde que empiezo con la preparación del medio, desde el trabajo con los niños, lo validamos, cerramos en algo, quedamos en algo y siento que así tiene que ser la clase de matemáticas, porque si la dejo suspendida, como que pierde sentido.

Y más adelante, en la misma entrevista colectiva, se confirma la interiorización del esquema de planeación de las situaciones didácticas:

Ao: yo lo tengo como un esquema, yo digo matemáticas es por situación didáctica y no concibo otro, y eso si lo tengo presente y más o menos identifico las partes, pero ya algo más específico como esto de las fracciones, lo tiene uno como más escondido acá en el cerebro, como que no lo tiene acá fresco, lo tiene como que más encerrado, porque van llegando nuevas cosas y como no lo vas estudiando, se va cerrando, se va cerrando, y hasta que no puedes encontrar esto...

En esas dos interacciones comunicativas, podemos apreciar cómo a un año de distancia del curso de matemáticas, en sus afirmaciones aún están convencidos de la representación construida: “yo lo tengo como un esquema”... “no concibo otro”, aunque los saberes matemáticos, principalmente en cuanto a los diferentes significados de las fracciones les sigan generando dificultades, la representación construida en torno a una propuesta de saberes didácticos se confirma.

En la entrevista, este tipo de afirmaciones nos llevó al reconocimiento de que, trabajada sistemáticamente, una propuesta didáctica sí logra destransponer los saberes construidos previamente, aunque requiere de mayor tiempo que el que se tuvo en los dos cursos, para que haya el reforzamiento necesario que permita que los estudiantes comprendan todas las razones que justifican la nueva elección didáctica; si estas razones

sólo se quedan en las que se encuentran en el curso, pero luego ante “contratos didácticos” diferentes éstas no se fortalecen, al contrario se diluyen al combinarse con otras propuestas, el resultado puede ser como el que aquí documentamos: se conserva un esquema, pero se carga de sentido con actividades más directivas.

A pesar de ello, los estudiantes reconocen que las reflexiones generadas durante el curso de matemáticas, les permitieron guardar distancia entre las propuestas didácticas ahí discutidas y sus experiencias formativas previas, de tal manera que ante la pregunta por ¿cómo pensaban la enseñanza de las matemáticas antes del curso? Lo primero que se les viene a la mente es que las pensaban “como nos las enseñaron” y al indagar por cómo se las enseñaron, salvo ligeras alusión a las situaciones problema, las experiencias formativas previas se vuelven a remitir a experiencias rutinarias, algorítmicas; dice una de las estudiantes al recordar “*ya cuando uno llegaba ya estaba el pizarrón lleno de ejercicios y ya decía, no pues ya pónganse a hacer eso...*” o en otros casos, la secuencia de la clase iba del libro de texto, a las operaciones y luego a los problemas:

Ao: yo al contrario de R6, yo recuerdo que generalmente siempre comenzábamos con el libro, siempre veíamos el libro íbamos leyendo, contestando o lo que sea solos, ya después que trabajábamos el libro nos dejaba hacer unas cuantas operaciones o nos dictaba algunos problemas y ya los resolvíamos ahí o en casa y ya, a veces si los contestaba uno entre todos pero casi por lo general nada más revisaba

En otras circunstancias, estas afirmaciones sólo caracterizarían prácticas de enseñanza denominadas “tradicionalistas”, sin embargo en la ubicación temporal de la formación previa de los estudiantes, en las escuelas primarias estaba vigente el Plan de estudios 1993, desde el cual se puso el centro en “aprender matemáticas al resolver problemas” con lo cual se pretendía que éstos fueran, fuente, lugar y criterio del aprendizaje en matemáticas, de tal manera que lo que ellos nos dicen se convierte en una denuncia y un indicador de que no se estaba concretando el enfoque en sus escuelas primarias. “*El pensamiento reformula lo que nuestras condiciones de existencia nos imponen, y lo hace válido para una comunidad de seres humanos, y no únicamente para una persona. (Jodelet, 2008, pág. 58)*”

IV.2.1. Representación sobre las fracciones.

Ya documentamos en apartados anteriores que parece ser que les resultó más significativo durante el curso los conocimientos didácticos aprendidos, en tanto fue lo que les permitió construir un lenguaje específico para hablar sobre su práctica docente, sin embargo, y dado que el centro de análisis fue el bloque de estudio del tema de fracciones, y la práctica docente analizada también correspondió a esta temática, en este apartado consideramos necesario recuperar, en primer término, ¿cuál fue al final la representación que sobre las fracciones construyeron durante el curso?, y en segundo término, ¿en qué medida se conservan los aprendizajes, a un año de distancia, respecto al contenido matemático?, con énfasis en la revisión de los temas vistos durante el curso.

Para el primer propósito utilizamos la información proveniente del análisis de sus ensayos contruidos a partir de la reflexión sobre la aplicación de su situación didáctica, y para el segundo propósito, utilizamos la información proveniente de la entrevista colectiva y de los problemas aplicados en un cuestionario que, como ya decíamos en párrafos anteriores, fueron los mismos problemas trabajados y resueltos durante el curso.

En cuanto a la representación sobre las fracciones, se conserva la representación social compartida en los ámbitos sociales cotidianos: “*son el quebradero de cabeza de muchos*”, “*es uno de los temas más difíciles*” o “*se sabe que es uno de los contenidos más complicados*”; hasta aquí no hay novedad, comparten y reproducen una representación social, sin embargo, en este proceso de destransposición hay una diferencia con la representación social de la cotidianidad, los estudiantes construyen explicaciones en la búsqueda del porqué de esta dificultad, una de éstas tiene que ver con el reconocimiento de la influencia de las formas de enseñanza en la construcción de esta representación.

Dice R6

Si se llegasen a enseñar las demás significación de las fracciones, por ejemplo la multiplicación o división, se hace únicamente enseñando el algoritmo y la resolución de éstas con el método más apropiado pero sin explicar el porqué de $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$, por ejemplo; ¿qué función funge la primer fracción y la segunda?, Me preguntó ¿cuántos de los que lean este texto saben la respuesta?, puedo asegurar que serán pocos los que la conozcan, debido a que en su infancia fueron mecanizadas la ejercitación sin conocer el uso de éstas en un problema de la vida diaria, que al fin para eso se crearon las matemáticas, para facilitar la vida del ser humano. Solo que habría que recordárselo a la escuela porque al parecer se le ha olvidado (ApR6).

Aunque en su declaración se refleja la predominancia de un posicionamiento utilitarista, no deja de llamarnos la atención la claridad que al final del curso manifiesta respecto a la vinculación del saber matemático con las situaciones problema, y se aleja del posicionamiento desde lo cotidiano en torno a la complejidad de las fracciones, al construir un argumento que explica el porqué, es decir, si en la escuela no se construye el sentido de los saberes, se aprenden de manera mecanizada, implícitamente se está reproduciendo la misma representación, con las consecuencias que ello acarrea: mayores dificultades para conectar con los nuevos aprendizajes, errores y obstáculos difíciles de superar y que requerirán de procesos de destransposición más complejos, e incluso el desánimo de los aprendices al sentirse incapaces para el aprendizaje de las matemáticas.

Complementario a R6, en el ensayo de A6, se fortalece el reconocimiento de algunos de los porqués de la complejidad de la enseñanza de las fracciones:

El tema de las fracciones ha sido siempre uno de los temas más complicados de manejar en las escuelas primarias o en escuelas de cualquier nivel, primeramente porque los docentes no dominamos bien el contenido y en consecuencia no podemos enseñarlo, en segunda porque al contenido no se le dedica el tiempo requerido para que se llegue al saber aprendido y en tercera porque no se manejan los distintos tipos de repartos de fracciones (continuas y discretas) ni sus propiedades (comparación, orden, representación gráfica y equivalencia) o simplemente se estanca o se enfatiza mucho sobre alguno. (ApA6)

Como apreciamos, este tipo de reconocimientos no pretende culpar a nadie, al contrario valorar algunas de las aristas que hacen que la enseñanza – aprendizaje de las fracciones sea un proceso complejo.

Ahora bien, al revisar sus ensayos de análisis, los estudiantes manifiestan las siguientes conceptualizaciones respecto a la fracción:

Tabla 42. Representación sobre las fracciones

ApP1	¿Fracción? Al escuchar esta palabra en el ámbito matemático se nos suele venir a la mente un sinnúmero de cosas pero las más comunes son: <u>problemas con fracción al igual que las operaciones de la misma</u> , pero en nuestro caso el problema es saber cómo impartirla puede que con solo un repaso podamos plantearlo a nuestros alumnos, esto suena un poco fácil pero para los que tienen de tercer grado en adelante, pero para primero y segundo suena difícil porque los niños en estos grados aun no ven estos temas de <u>reparto</u> .
ApV2	En las fracciones lo que predomina en el pensamiento de las personas sobre esto, es que <u>la fracción es una parte de un todo, pero que en realidad pueden adoptar diferentes formas.</u>
ApE3	Desde mi punto de vista, <u>una fracción es una parte de un todo, pero las fracciones van más allá de ésta definición, son un sistema de usar los números que poco usamos en la vida diaria.</u>

	Ésta representación de los números no enteros, es unas de las que cuesta más trabajo enseñar y aprender en la escuela primaria y durante las posteriores. Dicha dificultad se presenta por diferentes razones: · <u>La concepción de que las fracciones sólo se usan para repartir pasteles, chocolates, etc.</u> Dejando de lado múltiples usos que resultan útiles y aplicables a la vida diaria. · <u>La confusión que se genera en los alumnos y en nosotros mismos al ver que un número con bastantes cifras representa menos de 1.</u> Ejemplo, 25/200, 156/10000, etc. · Otro conflicto que se presenta es que dependiendo de la unidad de referencia diferentes fracciones como un $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, o $\frac{1}{4}$ aunque representan dicha cantidad, en su <u>representación gráfica</u> no son del mismo tamaño, lo que genera bastante confusión en los alumnos. Dichas situaciones aunadas a una mala didáctica por parte de los profesores, hacen que el uso de las fracciones resulte un verdadero problema para los niños.
ApI4	<u>Las fracciones son la forma de expresar partes de un entero.</u> Un entero puede ser cualquiera de los números naturales o de alguna cosa u objeto factible de ser dividido. También se podría decir que <u>las fracciones son cada una de las partes iguales en que se divide una unidad.</u> Son también llamados quebrados. Son las partes menores en que puedes dividir un entero. Si lo divides a la mitad, cada fracción las llamas medios ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$), si lo divides en tres partes, llamas a las fracciones tercios ($\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$), si lo divides en cuatro partes, a las fracciones le llamas cuartos ($\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$)
ApM5	<u>Fraccionar significa segmentar, partir, dividir y lo más común compartir un todo entre cierto número de personas o bien por la unidad secundaria,</u> pero la realidad es que preferimos hacer repartos inequitativos y nada exhaustivos a fin de complacer algunos intereses o bien solo por sacarle la vuelta a los famosísimos quebrados. <u>Existe una relación entre números decimales y las fracciones, pues los dos nos representan la parte de un entero o bien uno o varios enteros acompañados de fragmentos de éste,</u> reflejan lo incompleto que muchas veces se vuelve difícil de diferenciar de los números enteros y si a esto le agregamos el hecho de que las fracciones aparecen mucho después de haber asimilado y reacomodado las relaciones que hacen los niños al respecto de los números naturales. Por ejemplo: se les enseña que el 5 es mayor que el 3, o que la multiplicación agranda o que la división reduce y al afrontar esto con las características que ahora tienen las fracciones o los números decimales demanda un nuevo desequilibrio y reacomodo para los niños lo que además genera confusión. Para esto es indispensable que <u>las estrategias de enseñanza de las fracciones relacionen representaciones gráficas y numéricas, además de la aplicación a problemas reales y no sólo la vana memorización del algoritmo</u> lo cual dificulta aún más su aprendizaje.
ApR6	Pero como se menciona en un principio <u>las fracciones son un mundo imperecedero que tiene múltiples comportamientos</u> es por eso que el mismo Block crea una serie de situaciones didácticas en las que las fracciones aparecen de diferente maneras, <u>alejadas de la cotidianeidad en que estas se utilizan en la escuela.</u> (...) repartos y las propiedades y comportamientos de las fracciones (...)
ApA6	<u>Distintos tipos de repartos de fracciones (continuas y discretas) ... sus propiedades (comparación, orden, representación gráfica y equivalencia)</u>

Dentro de las coincidencias, que es lo que configura la representación social, sobresale la idea básica y fundacional del concepto de fracción, a decir de (Fandiño Pinilla, 2009, pág. 37) la palabra “fracción” deriva del término latino “fractio”, es decir, “parte obtenida rompiendo”; en tal sentido no es de extrañarnos que históricamente perviva la representación social básica de la fracción, como “partes de un entero” y esta misma se vea reflejada en las representaciones de los estudiantes.

Sin embargo, hay frases en sus declaraciones que nos llevan a pensar en el hecho de que, como producto de las discusiones durante el curso de matemáticas, la representación básica se amplía, en la definición de fracción no se incluye la idea de equitatividad y exhaustividad, tampoco se incorporan los diferentes significados que puede tener, por ello, cuando los estudiantes afirman *“la fracción es una parte de un todo, pero que en realidad pueden adoptar diferentes formas”* o también cuando aseguran que *“las fracciones son un mundo imperecedero que tiene múltiples comportamientos”*, están denotando su comprensión de que el campo de las fracciones es más amplio que la idea de reparto de una unidad y a la vez anticipan su conocimiento de los diferentes significados que pueden tener (este conocimiento no implica su dominio o el diferente nivel de claridad que tienen de ello).

Incluso, a un nivel más formal (aunque sólo se anticipa pero no se explicita), en el ApE3, vemos que concibe a la fracción como *“son un sistema de usar los números que poco usamos en la vida diaria”*, ante la predominancia del campo de los números naturales y la emergencia de los números decimales como alternativa de solución a los problemas de fracciones.

Por otro lado, ¿en qué medida se conservan los aprendizajes matemáticos, a un año de distancia de haber llevado el curso? Para dar respuesta a esta pregunta decidimos elaborar un instrumento que denominamos “Anexo 4. Cuestionario de problemas con fracciones” y en el cual recuperamos los mismos problemas que se resolvieron en el curso (incluso algunos de los inventados por ellos mismos); la hipótesis era que al leerlos, rápidamente los iban a identificar y aunque probablemente tuvieran algunas dificultades para recordar algunos conocimientos, sobre todo en los problemas que implicaban un significado de la fracción como operador multiplicativo o la división de fracciones, en lo general los resolverían sin mayores complicaciones.

Dada la extensión del instrumento se les dejó por escrito para que los resolvieran en un tiempo razonable y posteriormente se les convocó para comentar colectivamente sus apreciaciones al respecto, pero sin cambiar ninguna de las respuestas que ya traían por escrito en éste.

Lo primero que se resaltó de la aplicación de este instrumento es que, contrario a lo supuesto, les generó muchas dificultades, incluso no identificaron el problema matemático que ellos habían “inventado”. De los 7 estudiantes participantes en la investigación, sólo

recuperamos 6 cuestionarios, uno de ellos argumentó que necesitaba más tiempo para contestarlo bien, pero luego ya no lo entregó.

En un primer nivel de análisis global, podemos apreciar cómo, a pesar de haber sido partícipes del mismo proceso didáctico, hay marcadas diferencias, incluso extremas; mientras que dos alumnas (M5 y R6) contestaron ampliamente, no sólo en términos del saber matemático, sino en términos de los significados de las fracciones asociados al problema resuelto, hubo una alumna que de plano escribió con letras grandes la frase “No me acuerdo”, con algunos intentos de solución de los problemas, usando estrategias gráficas predominantemente, aunque no necesariamente acertadas. Los otros tres estudiantes sólo resolvieron los problemas, combinando procedimientos algorítmicos con representaciones gráficas, pero sin explicar el significado de las respuestas.

Haciendo un análisis más fino, nos damos cuenta de que la debilidad más fuerte se manifiesta en la identificación del significado de la fracción asociado al problema, incluso entre quienes los resuelven correctamente.

Una primera hipótesis que planteamos para explicar estos resultados tiene que ver con el grado de implicación de los estudiantes durante las clases, es decir, analizando de manera comparativa los videos de clase con los resultados del cuestionario, hay una fuerte tendencia a que, en la medida que él o la estudiante participaron activamente discutiendo, proponiendo soluciones, inventando problemas, reflexionando sobre las lecturas sugeridas, etc., sus resultados son mejores; no es sólo una cuestión de buena memoria, es un asunto de buena comprensión a partir de las conexiones de varios conocimientos propios de un saber matemático. En este caso, la comprensión del problema planteado los lleva a seleccionar la herramienta matemáticas más adecuada para resolverlo (suma, resta, multiplicación, división, de fracciones), el tipo de representación más pertinente y la comprensión del resultado en su mismo contexto.

Como ejemplo de esta aseveración vamos a retomar dos de los problemas planteados, mismos que vamos a denominar “calcetines” y “moños”, para facilitar el análisis.

Problema: “calcetines”	Si tuviéramos $\frac{3}{8}$ de tela y vamos a hacer calcetines que ocupan $\frac{1}{12}$ de tela ¿cuántos calcetines se pueden hacer?
Problema:	Tenemos $\frac{4}{8}$ de metro de listón y vamos a hacer moños de $\frac{1}{12}$

“moños”	¿cuántos moños debemos de hacer?

En la 8ª clase del profesor se plantearon ambos problemas de manera verbal, usando las mismas fracciones: $\frac{4}{8}$ y $\frac{1}{12}$ con la intención de que el cambio de contexto, de “tela” a “listones”, de superficies a longitudes, permitiera mayor claridad y comprensión del significado de la división de fracciones, sin embargo por un “error de dedo” al capturarlo en el cuestionario se colocó $\frac{3}{8}$ en lugar de $\frac{4}{8}$ en el problema “calcetines”; esta cuestión circunstancial, se convirtió en una variable didáctica que nos dio la oportunidad de explorar la comprensión del significado de la fracción en el contexto de la respuesta.

El cuestionario lo organizamos en 5 columnas, en la primera se escribió el problema, las siguientes las iban a completar los estudiantes, bajo los siguientes criterios: Resolución, ¿qué conocimientos sobre las fracciones se ponen en juego?, significado de la fracción que está presente, y comentarios sobre el diseño del problema. En las dos tablas siguientes recogemos las respuestas dadas a cada uno de ellos, cuando se recupera sólo una parte de las columnas ello obedece a que en el resto el estudiante no escribió nada, lo cual también es un indicador para el análisis.

Tabla 43. Respuestas al problema “calcetines”

P1	Si tuviéramos $\frac{3}{8}$ de tela y vamos a hacer calcetines que ocupan $\frac{1}{12}$ de tela ¿cuántos calcetines se pueden hacer?			
V2	4 calcetines			
E3	$\frac{3}{8} \div \frac{1}{12} = \frac{36}{8} = 4\frac{4}{8} = 4\frac{1}{2}$		La fracción como medida	
I4	$\frac{3}{8} \div \frac{1}{12} = \frac{36}{8} = 4\frac{4}{8} = 4\frac{1}{2}$			
M5	Si tuviéramos $\frac{3}{8}$ de tela y vamos a hacer calcetines que ocupan $\frac{1}{12}$ de tela ¿cuántos calcetines se pueden hacer?	$\frac{3}{8} \div \frac{1}{12} = \frac{36}{8} = 4\frac{4}{8}$ Se pueden hacer solo 4 calcetines y te sobra la mitad de $\frac{1}{8}$ de tela.	- División de fracciones y equivalencia - equitatividad - posición - unidades de	La fracción como medida La solución brevemente con fusión.

R6	$\frac{3}{8} \div \frac{1}{12} = \frac{36}{8} = 4\frac{4}{8}$	igual que el problema anterior con la división de fracciones: cuántas veces cabe $\frac{1}{12}$ en $\frac{3}{8}$	Como medida	el planteamiento es más complicado ahora el entero es una fracción a lo que se le saca esta fracción

Respecto a este problema, podemos decir que P1 no logró resolverlo; V2, sólo escribió la respuesta (el 4 indicando la cantidad de calcetines que se pueden hacer) pero sin indicar ningún procedimiento; E3 lo resuelve usando el algoritmo convencional de la división de fracciones y sólo ubica el contexto en el que está planteado el problema; I4 utiliza el mismo procedimiento que E3 y no escribe nada en el resto de las columnas; M5 y R6 son quienes aportan respuestas completas, ubican el contexto del problema y el tipo de conocimiento matemático necesario para resolverlo, pero además, M5 propone una interpretación de la respuesta, con lo cual no deja lugar a dudas respecto a la comprensión del problema; es decir, mientras que en el resto de los estudiantes podemos asumir que comprendieron el problema y saben un procedimiento de resolución, sólo podemos suponer que comprenden el significado de los números en la respuestas, en cambio M5 no deja lugar a dudas: “se pueden hacer sólo 4 calcetines y te sobra la mitad de $\frac{1}{12}$ ”, con ello hace una transferencia entre saberes que no es fácil de comprender para muchos docentes en formación, en la fracción $4\frac{4}{8}$, el 4 nos da la respuesta de la cantidad de calcetines y el $\frac{4}{8}$ es la cantidad de tela que hace la diferencia para completar $\frac{1}{12}$ (otro calcetín), esto es equivalente a $\frac{1}{24}$. Otra forma de abordar el problema es convirtiendo las fracciones a sus correspondientes equivalencias, con denominador común: $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ y $\frac{1}{12} = \frac{2}{24}$, con lo cual la división, en el sentido que se abordó durante el curso, de cuántas veces cabe $\frac{2}{24}$ en $\frac{9}{24}$ es más evidente: 4 y sobra $\frac{1}{24}$.

Al observar los procedimientos de resolución al problema “moños”, nos damos cuenta de que la hipótesis con que lo planteó el profesor (que el cambio de contexto favoreciera la comprensión del problema y de su respuesta) realmente dio resultado (en el video de clase sólo se traza una línea que simboliza el listón que se va a cortar, pero no se continúa el procedimiento en tanto con el ejemplo “calcetines” ya se tenía la respuesta), dado que los estudiantes recurren a la división de una recta que simboliza el “listón” que se va a cortar para hacer los “moños”.

Tabla 44. Respuestas al problema “moños”

P1	Tenemos $\frac{4}{8}$ de metro de listón y vamos a hacer moños de $\frac{1}{12}$ ¿cuántos moños debemos de hacer?		
V2	$\frac{1}{2}$ $\frac{6}{12}$ 6 moños		
E3	$\frac{4}{8} \div \frac{1}{12} = \frac{48}{8} = 6$ 6 moños.		La fracción como medida.
I4	$\frac{4}{8} \div \frac{1}{12} = \frac{48}{8} = 6$		
M5	Tenemos $\frac{4}{8}$ de metro de listón y vamos a hacer moños de $\frac{1}{12}$ ¿cuántos moños debemos de hacer?		- la partición, unidades divisibles División de fracciones - equivalencia La fracción como medida falta acercar en la medida
R6		Como fraccionador, unidades divisibles de la fracción, la partición, equivalencia Así el reparto es equitativo para cada moño.	Como medida el entero es una fracción lo que lo vuelve más complicado.

En la resolución de este problema, de nueva cuenta P1 no logró resolverlo; en el caso de V2, inferimos un posible procedimiento: se alcanza a apreciar que fue de $\frac{4}{8}$ a $\frac{1}{2}$ pasando por la conversión intermedia $\frac{2}{4}$ y de ahí a que $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$, y, como para cada moño se requiere $\frac{1}{12}$, la conclusión es simple, se pueden hacer 6 moños. E3 e I4 vuelven a utilizar el algoritmo convencional para dividir fracciones, sin mayor complicación; de nueva cuenta son M5 y R6 quienes manifiestan mayor comprensión del problema e incluso un dominio de diferentes formas de representación del procedimiento de resolución.

Aunque en el cuestionario planteamos 25 problemas matemáticos, después de la lectura de las respuestas que dieron los estudiantes, consideramos que con los dos ejemplos anteriores se ve la regularidad en el tipo de respuestas aportadas, es decir, quien no contestó así lo hizo en todo el instrumento, de igual manera quien sólo dio las respuestas sin justificación también conserva la misma estrategia y así mismo quienes contestaron con amplitud y certeza, conservaron ese criterio (remitimos a los lectores a los anexos 20.1 a 20.6: “Cuestionario de problemas con fracciones. Respuestas de los alumnos”).

Ante ello, decíamos que una posible explicación a estas diferencias puede estar en el grado de implicación durante las sesiones de clase, sin embargo ¿qué es lo que ellos mismos dicen ante estas dificultades y ante esta situación que se presentó?

En primer lugar, durante la entrevista colectiva EcE3, ante la pregunta expresa de ¿qué encontraron en los problemas? Y ¿por qué las dificultades para distinguir los significados de las fracciones?

EcE3: yo bueno los problemas uno que otro, la mayoría de los problemas no se me dificultó resolverlos, o sea resolver los problemas no fue difícil todo lo demás sí, porque ya no recordaba bien cuales eran el significado de las fracciones y cuáles eran los conocimientos de las fracciones, o sea, definitivamente no recordaba hasta que las niñas, ellas sacaron las tortas y fue cuando empezamos a recordar, a recordar y a leer, pero aun así yo estoy confundido, se me confunden los, los, las fracciones totalmente, no se distinguir y eso el profe “M” se dio cuenta porque en el examen en ese aspecto yo salí bajo,

Es decir, si en su momento se quedó con esa confusión, no hay duda de que se conserva a un año de distancia y muy probablemente conforme pase el tiempo la confusión se agudice, a menos por supuesto que se retome su estudio por otras vías; en otro momento de la entrevista vemos cómo aunque no tienen claros los distintos significados de la fracción (4 de 6 estudiantes así lo manifestaron), sí logran distinguirlos por su nivel de complejidad:

E: bueno, ese es de un libro de texto, así como plantearon el problema, ¿podrían dar una secuencia para el aprendizaje de las fracciones y sus significados? Que primero realizara problemas de reparto, cierta cantidad entre ciertos niños, y luego

Alumna: si pero ya hasta el último el de operador

E: ¿cuál? El de operador, ¿por qué hasta el último?

Alumna: mire incluso pues

Alumno: a mí se me hace más difícil como razón y como medida, el de operador

Alumna: si te fijas el de operador casi no lo ves en la primaria, por ejemplo el de, un alambre que mide $\frac{2}{3}$ de metro, reparte la tercera parte, ¿qué fracción de metro mide cada parte? En esos casos no se agota en la primaria y no lo ves, como que no se ve así, como estructurado de que cada problema tiene distinto significado la fracción, como que vemos la fracción y en todos lados, en todos los problemas es lo mismo

Alumna: en la primaria nomas aprende a sumar, restar y ya, en la secundaria en primero, bueno yo hasta la secundaria aprendí a

E: multiplicar y dividir

Alumna: multiplicar, dividir también aprendí en la primaria

Alumno: yo también aprendí en la primaria

Alumna: multiplicar no, multiplicar aprendí hasta la secundaria

En la construcción de un posible proceso didáctico, ubican hasta al final a la multiplicación y división de fracciones, aunque con variantes a partir de su experiencia formativa, ya no sólo como alumnos, sino como maestros practicantes.

Los porqué de estos olvidos en el aprendizaje los ubican en diferentes lugares: en la insuficiencia del tiempo del curso (dos semestres: *“yo pienso que dos semestres de matemáticas son insuficientes en la Normal”*), en las exigencias de los trayectos formativos (*“no veo como aplicar esto en los siguientes cursos de aquí de la Normal”*, refiriéndose a la vinculación entre lo aprendido en el curso de matemáticas y el de Ciencias naturales o historia, por ejemplo), en los cambios de *“estilo de enseñanza”* de los profesores (no se hace necesario lo aprendido), en la circunstancialidad de la coincidencia de que los toque enseñar estos temas (como no les toca practicar con temas de fracciones, no tienen necesidad de seguirlo repasando) y todo ello englobado bajo la idea de que *“faltó reforzamiento”* y en los siguientes cursos no se logra.

IV.2.2. Destransposición reconocida como aprendizaje en el curso de matemáticas.

Es obvio decir que cuando los estudiantes ingresan a la Escuela Normal, llevan un buen caudal de conocimientos matemáticos y representaciones sobre la enseñanza a partir de su vivencia como alumnos; algunos de ellos aprendidos de manera errónea, como producto de una enseñanza ostensiva que intentó simplificarlos ante una imagen social de erudición: se enseñan las técnicas (algoritmos) y los padres de familia están contentos con esa demostración de saber, aunque luego no se vincule con la resolución de problemas.

En tal sentido, cuando se les preguntó, en la entrevista previa *¿qué tanto ha cambiado tu forma de ver las matemáticas? Y ¿qué tanto ha avanzado tu aprendizaje de matemáticas a partir de estos dos cursos?* con la finalidad de que este ejercicio de reflexión metacognitiva nos diera indicadores del control de sus procesos de aprendizaje y el grado de devolución de la responsabilidad de su proceso formativo, encontramos lo siguiente.

Cuando hago el análisis comparativo de las diferentes respuestas que dan los estudiantes, lo primero que se me viene a la mente es la máxima socrática *“yo sólo sé que no sé nada”* y sabemos que esta frase no alude a la ignorancia en sí misma, sino a la configuración de procesos de aprender a desaprender para volver a aprender, es decir, este reconocimiento a la incertidumbre y provisionalidad de los aprendizajes, acompañado de la

imposibilidad de aprehender todo el conocimiento en su complejidad y ante la celeridad de los cambios, es lo que hace que miremos en las respuestas de los estudiantes cuestiones aparentemente contradictorias, porque mientras son capaces de valorar y dimensionar sus logros, al mismo tiempo reconocen y son capaces de dimensionar la magnitud de su ignorancia ante la enseñanza de temas vinculados a las fracciones, por ejemplo reconocen que ha cambiado su visión respecto al tipo de estrategias que pueden implementar para enseñarlas, pero cuando se les pregunta si a esas alturas de su formación (al término del curso, III semestre de la Licenciatura en Educación primaria) ya están preparados para ello, responden negativamente, porque les falta conocer “estrategias” de enseñanza.

E.- ¿Qué cree usted que faltaría por ahí?

M5. Estrategias

E.- ajá

M5. Porque a lo mejor yo las domino, yo tuve otro tipo de enseñanza o no se

E.- Lo que usted quiera agregar

M5. Porque al principio para ver las equivalencias yo que recuerdo hacíamos puras multiplicaciones, teníamos un 4, no pues multiplicarlo todo por 4, por 4

E.- Ajá

M5. Y así se baso mi equivalencia y aun así lo comprendo, a lo mejor yo siento que soy muy mecánica, pero a comparación de cómo nos lo plantea “M” de que los niños se tienen que acercar a las fracciones, pues eso sería a base de problemas y pues no sé, yo digo que si me faltaría como que más creatividad, más estrategias para poder plantearles a los niños (EPpM5)

Es decir, reconoce que sabe una estrategia para encontrar fracciones equivalentes a una dada, pero al mismo tiempo reconoce la distancia que hay entre ésta y el enfoque oficial para la enseñanza, desde el cual ubica la suya en un momento posterior del proceso y ahí es donde encuentra la necesidad de “más estrategias para plantearles a los niños”.

La afirmación de EPpR6 es ilustrativa del proceso global de reconocimiento de la destransposición, a partir de los aprendizajes del curso, cuando ella dice

R6. En el dominio de contenido y en la enseñanza de ese contenido, porque antes del curso yo no sabía cómo trabajar las fracciones, tanto como ahorita, ahorita ya es más de dominio, pero igual antes, yo aseguro que si no hubiera tenido ese curso de fracciones hubiera hecho los mismos procedimientos con los que fui enseñada, o sea como mas mecánico, pura suma, pura resta de fracciones

Parece ser que estos dos elementos, dominio del contenido y su enseñanza, son reconocidos como los aspectos medulares que contribuyen al cambio y a la destransposición de los saberes, con el reconocimiento de que ante su ausencia es más fácil

reproducir esquemas formativos previos. Este resultado coincide con las preocupaciones presentes en gran parte de la literatura sobre formación de profesores de matemáticas, sin embargo la diferencia es que aquí el reconocimiento no es por parte de los investigadores, es por parte de los propios estudiantes, toman conciencia de que necesitan ampliar su campo de saberes para evitar reproducir prácticas mecánicas y algorítmicas.

De manera similar, en un fragmento de la entrevista de EPpP1, encontramos elementos que nos dicen que la resignificación de saberes opera a partir del autoreconocimiento del cambio en las responsabilidades dentro del triángulo didáctico, del vértice de alumnos, al vértice de docentes:

E.- La diferencia, para recordar un poco, la diferencia entre lo que aprendió en primaria, tal vez en secundaria sobre fracciones luego en la prepa no se toca tanto, a menos las fracciones comunes, este, la diferencia con lo que aprendió allá y lo que vio en este curso, ¿cuál le pareció más significativo y por qué?

P1. el de este curso porque estando en primaria pues somos aún niños y no le vemos razón a las fracciones, pero ya ahorita aquí en la normal, es más significativo eso porque yo voy a ir a enseñarle a los niños, y si yo no tengo el dominio de llevar el contenido, no tendría valor que yo fuera a planteárselos a ellos, porque si no lo sé yo, entonces ellos tampoco lo van a saber

E.- ¿En alguna de las sesiones del curso de aquí de la normal, usted se dio cuenta de que algo no lo había aprendido de manera adecuada cuando estaba en la primaria?

P1. Todo

E.- ¿Todo?

P1. Tal vez porque no ponía mucha atención cuando estaba en la primaria, o no me acordaba, no me acordaba en si como se hacían la una suma, una resta, no me acordaba de nada, nada, nada, aunque si se me hizo un poco más fácil aquí porque

E.- ¿Qué es lo que lo hizo fácil aquí?

P1. Porque a lo mejor como tenía ya la responsabilidad de que los niños aprendieran, lo que hizo más fácil es que estaba poniendo atención para poder aprendérmelo porque sino

Cuando se es niño, la atención está puesta en jugar el rol de alumno y hay aprendizajes, por supuesto, pero se quedan en el conocimiento común del contenido, sin vislumbrar el horizonte de los saberes matemáticos, en cambio cuando se está en el escenario de la formación docente inicial, este cambio de rol obliga a repensar los saberes desde la óptica de su papel como enseñantes y con la “responsabilidad de que los niños aprendan”, esto por supuesto que transforma el contrato didáctico y fortalece el acercamiento de los estudiantes con los saberes en su doble dimensión: matemáticos y didácticos.

* **Destransposición del saber matemático:** En un fragmento anterior, cuando le preguntamos a EPpP1 si se había dado cuenta de algo que no hubiera aprendido bien en su escolarización previa, su respuesta es contundente “Todo”; evidentemente esto no sucede así, es decir, es muy difícil que todo se aprenda de manera incorrecta, en tal sentido este proceso de destransposición, los estudiantes lo reconocen más bien como un **proceso de reaprendizaje o de volver a recordar** y/o reconceptualizar los saberes previamente estudiados.

EPrA6: No también he aprendido por así decir, muchas cosas ahí, con la clase, por ejemplo la primera vez que el profe “M” nos ponía las fracciones yo no me acordaba de ninguna, bueno así de cómo se hacían, de cómo se resolvían, entonces ahí aprendí de nuevo, era como aprender de nuevo

O bien en términos de recordatorio de lo que se aprendió pero está olvidado:

P1 No, si, porque en cuestión de fracciones no me acordaba ya

E.- ¿De nada?

P1 Tenía uh, que no veía eso de fracciones y pues el curso si me ayudó para

E.- ¿Qué aprendió por ejemplo? En este curso de fracciones

P1 Pues recordé la suma, la resta, aja, porque no me acordaba nada, también recordé los repartos, que se puede repartir

El aprendizaje del **conocimiento especializado** sobre las fracciones (los diferentes significados, o como dijo EPrM5 “yo no sabía que las fracciones tienen diferentes ángulos”) también es un elemento que contribuye a poner en vigilancia epistemológica los procesos de enseñanza y por ende contribuye a la superación de prácticas tradicionales:

Eh como le digo sabía no las matemáticas, las que nos enseñan en la escuela, la suma, la resta, la división, la multiplicación, la raíz, pero no tenía esa capacidad de desglosarlas, de desglosarlas y ver en sí que es la suma, que es la multiplicación y ver también como transmitirla, es lo que me ha dejado, como transmitirla, como plantearles situaciones a los niños, es lo que he aprendido en el curso de matemáticas (EPrE3)

La **reconceptualización de la representación sobre las fracciones** y su forma de operar como saber matemático abstracto, también aparece como un aprendizaje del curso que encierra una destransposición, de la fracción como un reparto a la fracción como una relación:

M5. Y eso a mí me llamo la atención porque por ejemplo si decían no pues que 3 pasteles entre 5 niños, cuánto le va a tocar y como unos, yo estaba acostumbrada a

los

E.- Hacer dibujo

M5. Ajá, y ahora me doy cuenta que es una relación, la fracción es una relación en sí, la respuesta ahí está

E.- Ajá

M5. 3 pasteles entre 5 niños la fracción ahí está son $3/5$

E.- Ajá

M5. Para cada niño, 3 entre 5, sí ahí está

E.- Ajá y ¿eso lo aprendió en el curso?

M5. Ajá, bueno eso lo reflexioné

* **Destransposición del saber didáctico:** En este caso hacemos alusión a que los aprendizajes del curso contribuyen a la destransposición del saber didáctico, entendido como ese proceso que permite reconocer la distancia entre su experiencia formativa previa, la tentación de “enseñar, como les enseñaron” y la ruptura que implica reconocer la inadecuación con los enfoques propuestos de manera oficial.

En este caso encontramos dos campos de aprendizaje, uno vinculado al cómo (estrategias, planeación, procesos de aprendizaje de los alumnos) y otro al conocimiento del enfoque (la diferencia entre cómo lo concibe el maestro y cómo puede aprenderlo el niño; la valoración de la vinculación de los saberes con su utilidad en lo cotidiano; y, cómo no hacerlas tediosas).

De ambos casos vamos a citar brevemente para ejemplificar; en primer término, relativo al aprendizaje del cómo, de amplia tradición en la formación inicial, se resaltan:

* **Estrategias:** Se reconoce a la resolución de problemas como la estrategia básica del aprendizaje en matemáticas y se valora su ubicación, previa a la formalización de saberes.

E.- Si lo comparas en cómo te enseñaron a ti por ejemplo ¿qué diferencias notas?
V2 Las estrategias de enseñanza, antes era como que ponían problemas pero si uno veía que no le hallaba la función para nada más realizar que una multiplicación, sin ninguna preparación de un problema, para ver que esto nos sirve en la vida para resolver problemas y ahora lo que se pretende es plantear problemas para abrir, resolverlos, no como antes (EPrV2)

* **Planeación** (diseño de situaciones didácticas): La estrategia formativa de partir del análisis y aplicación de diseños de expertos, contribuyó a generar el esquema básico de planeación, pero fue su interiorización lo que lo consolidó; los estudiantes reconocen que

este acercamiento con lo curricular y su puesta en el diseño didáctico, ubica los márgenes de su tarea. Dice EPrP1 “yo no tenía ni idea de qué ponerle a los niños”.

* **Conocimiento de los niños y sus procesos de aprendizaje:** En esta dimensión aparece la alusión a un aspecto que es medular en el esquema del formador de profesores, para que los estudiantes comprendan cómo se construye el conocimiento en los niños, se les pone en situación semejante al proceso de resolución de ellos, con la idea de que se genere la empatía y se haga la transferencia de experiencias.

E3.- Eh, mucho de lo que ayuda es el analizar de el cómo trabajan los niños, como responden los niños a las situaciones, en las clases pues primero nos ponen, nos ponen como si fuéramos nosotros los niños, en la situación la plantean, hacemos las consignas y después analizamos, eh ustedes lo trabajaron así, cómo lo trabajarían los niños, ese contraste creo es el que ayuda que uno vaya quedándose como trabajan los niños (EPrE3)

En cuanto al **conocimiento del enfoque**, resaltamos un reconocimiento del proceso de descentramiento del papel hasta ahora asumido por los docentes en formación (el de alumno) y su acercamiento al rol que paulatinamente van asumiendo, el rol docente.

M5 No, pues que es difícil, para mí ha sido difícil, este, diseñar clases con este modo, porque en primera no tienes que decirle al niño si está bien o si está mal, no le, no le, no le puedes decir como quien dice cómo, no, tienes que dejar que el niño lo descubra, entonces aquí el papel del maestro es en cómo diseña sus preguntas, que preguntas hace a los alumnos, este, incluso el material que le lleva, como, como poder sacarle mayor fruto, no sé y pues si para mí, yo imaginaba que una clase de matemáticas era como a lo mejor las que me dieron a mí, o la más fácil, darles el algoritmo y que ellos lo apliquen

Además vemos la reflexión en torno a una clara contradicción, entre el cómo se imaginaba una clase de matemáticas (aunque en realidad se hace alusión a la representación que ha construido, desde su vivencia formativa) y los elementos propuestos desde el enfoque: no darles respuestas a los alumnos (en principio), dejar que ellos descubran si están bien en sus respuestas (idea de confrontación de procedimientos), el maestro como diseñador y gestor de buenas preguntas y la importancia del material didáctico en la preparación del medio con el cual interactuarán los alumnos.

Complementa este aprendizaje la referencia explícita, en el enfoque, a la vinculación de los saberes matemáticos con situaciones de la vida cotidiana (Fazio & Siegler, 2012), bajo el argumento de que

E.- Esta forma de la enseñanza de las matemáticas que tú planteas aquí, ¿se parece a la forma como a ti te enseñaron?

E3 no, la forma que me enseñaron era a la tradicional, de contestar su libro, de hagan esa operación en su cuaderno, pero yo digo eso a mí no se me hacía pero yo lo aprendí así de esa forma, pero si limita de un lado tu capacidad de reflexión, como que solamente mecanizas los, y es lo que a mí a veces me pasa, solamente mecanizo el procedimiento, el algoritmo, pero me falta la parte racional de eso

E.- Y ¿por qué en esa forma de planear no sucede eso, no se mecanizó? No se mecaniza perdón

E3 Porque desde el enfoque se busca que los niños reflexionen en torno a esas situaciones y que lo apliquen a su vida, entonces creo que con esto más o menos está adecuada la realidad que viven los niños, y puede ser útil la idea de partir un pastel, repartir chocolates de manera equitativa, algo que es real, que lo pueden, que lo viven diariamente, y que no representa ningún ejercicio mecánico, se puede tomar algo más cotidiano y que a ver resuelvan todas estas operaciones, resuelvan estas fracciones, es más fácil ponerles la realidad a los niños que mecanizar (EPrE3)

Finalmente, aunque se reconocen aprendizajes importantes, que los han llevado a reconceptualizar sus saberes previos, es decir, a pensar en la necesaria transformación de sus representaciones construidas desde su experiencia formativa previa, inevitablemente reconocen sus limitaciones, lo cual es una gran ventaja desde el escenario de la formación inicial, ya lo hemos dicho en varias ocasiones, esta toma de conciencia es el motor principal del cambio y si el curso ha logrado incidir en ello, desde ahí podemos encontrar indicadores para configurar nuevos esquemas de transposición del saber, en la doble dimensión, didáctica y disciplinaria.

Cierro este apartado con la afirmación de ApE3

Pero este aprendizaje no apareció de la nada, fue necesario revisar diferentes textos que, al principio parecían indescifrables por la gran cantidad de conceptos que se manejaban y que resultaban desconocidos, pero que con la revisión más detallada y guía de nuestro Gurú matemático el Prof. "M" fueron aclarándose. Textos de autores como Guy Brousseau, David Block y Alicia Ávila, personajes que con los estudios que han realizado, contribuyeron enormemente al desarrollo de la enseñanza de las nuevas y buenas matemáticas.

Con la revisión de los textos y la puesta en práctica de algunas situaciones didácticas se ha afianzado más el conocimiento matemático.

La delimitación a los autores citados, como es obvio, obedece al campo de estudio más cercano al estudiante, por supuesto que no se pretende hacer alusión a una visión unívoca del saber y mucho menos monopolizada en un grupo de autores, pero esta visión dialéctica supera la disyuntiva tradicional entre teoría y práctica.

Síntesis del capítulo

De manera paralela al tratamiento de los temas del bloque II, Números racionales, y en específico de las fracciones, se plantea en el programa de Matemáticas y su enseñanza II la asistencia a la Escuela Primaria, durante una semana, para realizar actividades de práctica docente; con ese antecedente, en este capítulo pusimos atención a las relaciones entre lo que vivieron y aprendieron durante el curso y lo realizado en su práctica docente, pero además le dimos énfasis a la revisión del proceso de objetivación de las representaciones sociales que se iban construyendo.

Se destaca la idea de que ante las dificultades de los estudiantes para diseñar una Situación didáctica, una alternativa potencial es la aplicación de algunos elaborados por expertos, con lo cual los estudiantes harán las adaptaciones necesarias, una de las cuales es el diseño de una “preparación del medio” en congruencia con la situación didáctica original; apreciamos que, en la medida en que los estudiantes se apropian del diseño elaborado ex profeso, logran aplicarlo con éxito y obtienen mejores resultados.

Al momento del rediseño de su situación didáctica se ponen de manifiesto al menos dos cuestiones importantes: 1º La reflexión de los estudiantes para articular sus diferentes componentes, a partir del esquema que han revisado en el curso; y 2º La representación social sobre la enseñanza del tema (fracciones). En cuanto al primer aspecto, cobra importancia el hecho de que al ser una actividad que realizan por primera vez, se presenta una oportunidad inmejorable para construir una representación alternativa sobre la planeación (en la propuesta del formador de profesores, la derivada de la Teoría de las situaciones didácticas) y a la vez un esquema mental de trabajo docente diferente a los esquemas tradicionales de enseñanza que vivenciaron en su escolarización previa.

El segundo aspecto, la representación social sobre la enseñanza de las fracciones, se manifiesta cuando los estudiantes diseñan su “preparación del medio”, evidenciada a partir del énfasis que se le da a la resolución de problemas y a la incorporación del contexto cotidiano como motivación inicial; en general encontramos evidencias de los conflictos que los estudiantes atraviesan al intentar objetivar en la escuela primaria el esquema didáctico que se les propone (congruente con la Teoría de las Situaciones Didácticas) y esto obedece precisamente a la crisis en que se ponen sus representaciones previas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; retomamos para ejemplificar, uno de los fragmentos de EPrM5

No, pues que es difícil, para mí ha sido difícil, este, diseñar clases con este modo, porque en primera no tienes que decirle al niño si está bien o si está mal, no le, no le puedes decir como quien dice cómo, no, tienes que dejar que el niño lo descubra, entonces aquí el papel del maestro es en cómo diseña sus preguntas, que preguntas hace a los alumnos, este, incluso el material que le lleva, como, cómo poder sacarle mayor fruto, no sé y pues si para mí, yo imaginaba que una clase de matemáticas era como a lo mejor las que me dieron a mí, o la más fácil, darles el algoritmo y que ellos lo apliquen

Con evidencias como ésta nos damos cuenta de las posibilidades que se abren en las instituciones formadoras de docentes para concretar un enfoque de transposición didáctica que permita que los estudiantes superen esta crisis inicial y al mismo tiempo se les ofrezcan alternativas que les permitan destransponer sus conocimientos e integrar saberes matemáticos y didácticos más cercanos a los conocimientos formales.

Este proceso no se da sin contratiempos, por eso en este capítulo también damos cuenta de las dificultades y los logros que tuvieron los estudiantes al poner en juego algunos de los componentes del conocimiento profesional para la enseñanza, por ejemplo su conocimiento curricular, el conocimiento de los niños y sus procesos de aprendizaje, la gestión didáctica del proceso de enseñanza y aprendizaje (fases didácticas), el control del tiempo didáctico, etc.

Un elemento que sobresalió con fuerza en el capítulo III fue la construcción y anclaje de un lenguaje didáctico específico, recuperado desde la Teoría de las Situaciones Didácticas; durante el proceso de diseño, aplicación y análisis de su situación didáctica se manifestó como una buena herramienta que cumplió su función, es decir, a partir de la recuperación de la información con los diferentes instrumentos, así como la recuperada desde los documentos analizados, podemos constatar que efectivamente se logró una interiorización del lenguaje temático, aunque implicó una recombinação de lenguajes entre las formas como cotidianamente se les llaman a los diferentes momentos de una clase, por ejemplo, y la terminología en proceso de aprendizaje.

De nueva cuenta este proceso no está exento de dificultades, incluso a un año de distancia de haber llevado el curso de Matemáticas se aprecia una fuerte tendencia a mantener un horizonte conservativo por sobre el horizonte formativo, es decir, a pesar de que reconocen las ventajas y posibilidades que tienen los aprendizajes del curso, manifiestan presiones del contexto de práctica docente, tanto como aquellas derivadas de los cambios de contrato didáctico a lo largo de los semestres subsecuentes que les obligan

a recombinar lenguajes y aprendizajes, de tal suerte que responden a las nuevas exigencias curriculares y mantienen en estado de latencia lo aprendido previamente.

El conocimiento de esta situación puede abrir un campo muy importante y a la vez una exigencia básica, reconocida pero muy pocas veces concretada, en torno a la formación inicial de profesores, en una dimensión dual: la revisión de los planteamientos curriculares para lograr una articulación más explícita y una progresión ascendente en torno a la visión formativa de los profesores de matemáticas que se desee lograr y, en segundo lugar, una organización colegiada (en la Escuela Normal) para potenciar la comprensión de los elementos de la propuesta curricular, pero sobre todo el trabajo que se tendría que hacer en cada curso para concretar el perfil formativo.

V. CONCLUSIONES

V. CONCLUSIONES

El verdadero pensamiento matemático que ocurre en un aula, de hecho, depende enormemente de la comprensión que tiene el profesor de matemáticas. (Ma, 2010, pág. 185)

V.1. Principales conclusiones de la investigación.

Cuando se cierra un ciclo, voltea uno hacia atrás para apreciar el camino recorrido y se da cuenta que aunque termina un proceso, éste sólo es el comienzo de una nueva aventura, porque ahora con nuevos referentes, nuevas comprensiones, pero sobre todo más preguntas que respuestas se sigue enfrentando una realidad en permanente construcción.

En el caso de la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas, el debate sigue abierto, hay propuestas derivadas de resultados de investigaciones, pero sobre todo hay posicionamientos, producto de las diferentes representaciones sociales que se producen y se reproducen en diferentes contextos culturales y profesionales (Brousseau, 2007; Chevallard, 1991; Vergnaud, 1996; Shulman, 1986; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz Catalán, 2013; Ma, 2010; Cantoral, Farfán, Lezama, & Martínez-Sierra, 2006) ¿Cuáles son más correctas? ¿congruentes?, etc. Indiscutiblemente que la respuesta a esta pregunta está mediada por el grado de empatía entre los posicionamientos teóricos y las representaciones de los sujetos que las asuman

como parte de su bagaje profesional, además de la comprensión que tengamos del objeto de estudio que cada una de éstas focaliza.

En 2001, cuando recién terminaba mis estudios de Maestría en Educación, mis preguntas de investigación se fijaban en el por qué a pesar de que había tanta literatura teórica con la pretensión de orientar a los profesores en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en la escuela primaria su impacto se veía muy reducido, en ese momento nos decidimos por estudiar las concepciones del docente de educación primaria y cómo éstas influyen en las decisiones que toma sobre su práctica; a más de 10 años de distancia, nuestro posicionamiento se traslada de una mirada cognitiva a una mirada sociocultural y en tal sentido recuperamos el concepto de representaciones sociales como un componente fundamental para entender los procesos por los cuales los profesores se apropian paulatinamente de las innovaciones; pero además de este giro conceptual, a partir de diferentes evidencias empíricas que parecen confirmar la idea de la dificultad que tiene cambiar las concepciones de los profesores en servicio cuando éstas están validadas por la experiencia práctica y teniendo en mente siempre que no es posible aceptar ningún determinismo y menos en el caso de procesos tan complejos como éste, dimos otro giro a nuestra mirada, ahora hacia los procesos de formación docente inicial en las Escuelas Normales, a partir de la hipótesis de que si el problema del cambio de representaciones se debía a la validación empírica del hacer profesional, entonces cuando esta variable no está presente sí se pueden generar condiciones para lograrlo. De entrada asumimos que, cuando ingresan a una institución formadora de docentes, los estudiantes ya han construido representaciones sociales sobre las matemáticas y su enseñanza, producto de su vivencia como alumnos y que éstas también pueden tener cierto nivel de cosificación e influir en los procesos de transposición didáctica en los salones de clase de la Escuela Normal, por ello también es necesario estudiarlas; es decir, durante el desarrollo de la tesis planteamos que las interacciones en torno al saber matemático y didáctico están permeadas por las representaciones que tanto el formador de profesores como los estudiantes han construido, cada quien en su ámbito, pero que manifiestan puntos en común que son los que finalmente permiten el entendimiento y la configuración de una identidad específica a una tarea profesional, la docencia.

La investigación que hemos concluido es una muestra de ello, a través del análisis de los procesos de transposición didáctica cuando se trabaja un tema en específico (las fracciones) se puede ver cómo se van generando momentos específicos para la

destransposición de saberes y al mismo tiempo cómo se intersectan, se construyen y se transforman las representaciones sociales, de los formadores y de los profesores en formación, respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.

Dicho lo anterior, este apartado de conclusiones lo vamos a estructurar de la siguiente manera:

- El papel de las representaciones sociales en la formación inicial de profesores para la enseñanza de las matemáticas.
- El diseño curricular y su contribución a la conformación de nuevas representaciones sociales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tanto al nivel de la formación inicial como en la formación permanente de los profesores.
- La importancia de la construcción de procesos de transposición didáctica que posibiliten momentos intencionales de destransposición de saberes matemáticos y didácticos como estrategia para la consolidación de los saberes profesionales de los docentes en formación.
- El diseño y análisis de la práctica docente como momento central para generar el conflicto sociocognitivo que favorece el cuestionamiento de las representaciones previas y la posibilidad de anclaje y objetivación de representaciones alternativas.
- El lenguaje temático como punto medular en el anclaje y objetivación de las representaciones sociales: necesidad y utilidad del lenguaje didáctico. Proceso de construcción de una representación específica.

Considero que estos cinco aspectos sobresalen del proceso de investigación y nos permiten fortalecer la idea básica inicial planteada en la pregunta central de la misma, es decir, la incidencia de las representaciones sociales de los estudiantes en los procesos de transposición y destransposición del saber matemático y didáctico durante el trayecto de su formación inicial.

V.1.1. El papel de las representaciones sociales en la formación inicial de profesores para la enseñanza de las matemáticas.

Concepciones y representaciones sociales, dos conceptos que se suelen usar incluso como sinónimos, sin embargo nosotros establecemos una diferencia fundamental, no sólo en términos de su origen individual o social, sino sobre todo en términos del carácter

explicativo que tienen: las representaciones sociales apelan a la transubjetividad y a la dialéctica misma de su configuración como proceso instituido e instituyente, esto es, no se trata sólo de cambiar el foco de lo individual a lo social, sino sobre todo estudiarlas en términos de los determinantes tanto como de las posibilidades que ofrecen para transformar el escenario sociogenético de la cultura matemática que se hereda y nos preexiste pero al mismo tiempo se reconstruye y se transforma.

Como decíamos en líneas anteriores, algunos investigadores han documentado que la transformación de las concepciones de los profesores en servicio se dificulta sobre todo porque éstas están validadas desde su experiencia vivencial; por ejemplo, desde finales de los 80's Fuenlabrada lo reconocía en los siguientes términos

...no hemos logrado diseñar situaciones didácticas que permitan de manera más efectiva una reconceptualización didáctica que apele a los principios teóricos que subyacen a la experiencia con la que se enfrenta a los maestros en los cursos – taller; ésta no va más allá de ser aceptada por los maestros, pero no todavía lo suficientemente comprendida y entendida como para que ellos mismos después de un curso – taller puedan llevar a cabo replanteamientos fundamentales sobre su quehacer didáctico (Fuenlabrada & Nemirovski, 1988, pág. 10)

Desde otros contextos también se ha reconocido esta dificultad (Contreras, 2002; Peltier, 1999) incluso en el caso de los profesores noveles, los cambios aparentes producidos durante la formación no siempre se ponen en práctica o se plantean justificaciones para no cambiar, dentro de éstas los obstáculos de la práctica docente (conflictos con otros docentes, los directores o supervisores, el cambio de contratos didácticos durante la formación, etc.).

Sin embargo el reconocimiento de estas variables es precisamente lo que nos llevó a estudiar las representaciones sociales en la formación docente inicial, lo que le da vigencia e importancia en tanto vemos una disyuntiva: en primer término -los resultados de esta tesis lo avalan -, el momento mismo de la formación docente inicial se puede configurar como un escenario para la instalación de representaciones sociales alternativas, en la medida que el formador de profesores tenga la competencia suficiente para hacerlo (en términos de conocimientos y habilidades para incidir en el anclaje y la objetivación de las nuevas representaciones, de preferencia como una obligación contractual de pertenencia, a partir de la devolución de la responsabilidad hacia los estudiantes y la valoración de las ventajas que ello les representaría en su labor profesional).

En segundo término, y no por ello menos importante, vemos cómo aparece un “horizonte conservativo” (Jodelet, 2008), después de un año de haber llevado el curso de Matemáticas y su enseñanza, los estudiantes manifiestan olvido de saberes y dificultades para seguir aplicando las herramientas conceptuales aprendidas durante éste, vuelven a escudarse en las condiciones contextuales de la práctica y en los contratos didácticos de su trayectoria formativa, sin embargo, nosotros asumimos que más que conformarnos con aceptar estas consideraciones, ello debemos hacerlo objeto de estudio para ir desvelando paulatinamente las diferentes variables que inciden en el proceso de configuración de las representaciones y práctica de los formadores de profesores y su incidencia en la transformación de las representaciones de los estudiantes (cuando ello se requiera), sobre todo porque partimos de la idea de que las representaciones sociales apelan a la transubjetividad de los sujetos y se configuran en los intercambios comunicativos y la interacción social, en tal sentido es vigente la idea de formación inicial, concebida como el momento institucional para la transformación de saberes previos de los docentes en formación y en este proceso las representaciones sociales delimitan los márgenes de posibilidad.

V.1.2. El diseño curricular y su contribución a la conformación de nuevas representaciones sociales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tanto al nivel de la formación inicial como en la formación permanente de los profesores.

Asumir que para reformar la formación de profesores es necesario atender, estudiar, cambiar las representaciones y prácticas de los profesores y de los formadores de profesores no es nuevo⁸⁷, pero reconocer que estas representaciones se han ido determinando a partir de los esquemas formativos curricularmente establecidos, que los integrantes de la noosfera han planteado o han dejado de plantear sí es significativo, para dimensionar los retos aún pendientes.

Como argumento de lo anterior pongo dos ejemplos, con el tema de las fracciones, el primero tiene que ver con las representaciones que se configuran y/o que podemos inferir que se configuran a partir del análisis de los planes de estudio de cuatro generaciones curriculares: 1960, 1972, 1993 y 2011.

⁸⁷ Cfr. Fuenlabrada & Nemirovski, 1988; Peltier, 1999; Aguayo, 2005; Ávila, 2004; Lizarde, 2001; Lizarde, 2005.

En los dos primeros planes de estudio, la representación social sobre las fracciones correspondía a un enfoque axiomático donde importaba más el trabajo sobre la estructura de la matemática que sobre sus aplicaciones prácticas; las fracciones tienen un papel de objeto matemático y la resolución de problemas aparece posterior a su aprendizaje institucionalizado. De estos dos planes de estudio, el que más contribuyó en la configuración de representaciones sociales sobre las fracciones (siguiendo la delimitación de nuestro objeto de estudio) fue el Plan 1972, consideramos que ello puede deberse a la temporalidad de su implementación (más de 20 años, con ligeros ajustes en los 80's); a éste debemos la popularización de las “figuras tipo” o representaciones gráficas estandarizadas, a partir de figuras geométricas, con subdivisiones exactas al tipo de fracción que se quería trabajar (por ejemplo un rectángulo dividido en cuatro partes, con la consigna de que el alumno coloreara $\frac{1}{4}$); de igual manera aparece la referencia explícita a la fracción como “quebrado”, con lo cual se instala una representación sobre su significado mayoritariamente aceptado (parte de un entero).

En cambio, a partir del plan de estudios 1993 la resolución de problemas retoma su lugar como fuente, lugar y criterio para el aprendizaje de las matemáticas y éstas son concebidas como herramientas funcionales y flexibles.

Es precisamente del análisis de este plan de estudios y las representaciones que logró configurar (Ávila, y otros, 2004) articulándolo con el análisis que hicimos en el capítulo I, que nos atrevemos a decir que efectivamente el diseño curricular contribuye a configurar representaciones sociales y de igual manera incide en las ausencias de saber y/o de procedimientos didácticos en la práctica docente; en el reporte de investigación de Ávila (y otros, 2004) se destacaba como una ausencia importante, en la práctica docente de los profesores, los momentos de institucionalización de saberes, y al analizar los materiales curriculares (los 6 libros de texto de matemáticas para el alumno) notamos que en el diseño de las lecciones no hay momentos claros que orienten al profesor respecto a cómo hacerla.

Estas ausencias se intentan resolver en el vigente Plan de estudios (SEP, 2011) para la educación primaria, en éste aparecen de manera explícita referencias a los saberes que el profesor puede o debe formalizar; tal parece que los participantes en lo que Chevallard (1991) llama la “noosfera” tomaron en consideración la importancia que tienen los materiales curriculares en la estructuración de la representación social sobre cómo enseñar las matemáticas.

Adicional a las consideraciones anteriores, un segundo ejemplo, derivado del análisis de los planes de estudio de tres generaciones para la formación de profesores: 1975, 1984 y 1997, nos permitió notar las ausencias claras en un posicionamiento didáctico respecto a la enseñanza de las fracciones, principalmente en los dos primeros planes de estudio. En el Plan 75 se resaltó el aprendizaje de las fracciones más como un contenido propio del nivel de bachillerato que como un “saber para la enseñanza”, motivo por el cual se priorizó su conocimiento desde la óptica predominantemente matemática y lo relativo a la enseñanza se vinculó con la revisión de los materiales curriculares de la educación primaria, es decir, la representación social sobre cómo enseñar las fracciones prácticamente se recuperaba del plan de estudios de la educación primaria (un esquema formal axiomático, como ya decíamos en líneas anteriores).

En el plan de estudios 1984 desaparece el tratamiento de las fracciones de manera curricular (tanto su análisis como saber matemático, como su análisis didáctico), se deja su estudio inserto en los 4 cursos de “Contenidos de aprendizaje de la educación primaria” y la práctica docente se organiza desde los cursos de “Laboratorio de docencia”, con lo cual de nueva cuenta las representaciones sociales que se recuperan corresponden a las que se encuentran en el Plan de estudios de la educación primaria.

Es hasta el Plan de estudios 1997 cuando se retoma el estudio de las fracciones a partir de sus diferentes significados y se articula (aunque de manera implícita) con el posicionamiento de la Teoría de las situaciones didácticas, motivo por el cual se convirtió su análisis en un referente para apreciar momentos clave para la transformación de representaciones alternativas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. El análisis del tema de las fracciones aparece directamente articulado con su enseñanza en la escuela primaria, de tal manera que los dispositivos de formación implementados en ésta se trasladan a la formación inicial de profesores, a través de un paquete de materiales bajo la denominación de Taller “La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria” (Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila, 1999)

A partir de estos dos ejemplos podemos afirmar que el predominio en la configuración de las representaciones sociales sobre las fracciones y su enseñanza lo ha tenido la Escuela primaria, a través de los materiales curriculares que ofrece se transmite generacionalmente y ante las limitaciones (o avances) en la teoría didáctica, correspondientes a cada época histórica es mayor o menor el peso que se adquiere; por

ejemplo, en el caso del Plan 1997, desde el momento mismo en que su diseño posibilita la incorporación de los diferentes significados de las fracciones, así como una perspectiva teórica sobre su enseñanza (la Teoría de las situaciones didácticas), contribuye a conflictuar las representaciones sociales que los estudiantes han construido de manera vivencial en su escolaridad previa (pareciera que una recombinación de diferentes representaciones a partir de los diferentes contratos didácticos de que fueron partícipes, como consecuencia del cambio de profesores en diferentes grados escolares y de las trayectorias formativas de ellos) y al mismo tiempo se convierte en un elemento para consolidar las representaciones sociales de los estudiantes cuando éstas se manifiestan en congruencia con los enfoques y posicionamientos didácticos que curricularmente se plantean.

En tal sentido, el reconocimiento del cambio de las representaciones de los formadores de profesores pasa por el reconocimiento de la necesidad de estructurar dispositivos de formación de los formadores, a partir de valorar las diferentes trayectorias formativas, así como las debilidades conceptuales y metodológicas que se puedan presentar; en nuestro país apenas recientemente se está pensando en la construcción de dispositivos de formación de esta naturaleza, pero aún no contamos con resultados de su implementación (como ejemplo se ha comenzado con un Doctorado en la Universidad Pedagógica Nacional, unidad 321 de Zacatecas y la población objetivo fueron los profesores normalistas).

Pero adicional a los dispositivos de formación de formadores, también el cambio debe pasar por el ajuste y encuadramiento entre los avances de conocimiento derivado de la investigación didáctica y su traducción en diseños congruentes y articulados entre el Plan de estudios de la Educación Primaria y el de la Educación Normal, en tanto estos materiales curriculares han incidido históricamente en la configuración de las representaciones sociales de unos y de otros: formadores y docentes en formación.

V.1.3. La importancia de la construcción de procesos de transposición didáctica que posibiliten momentos intencionales de destransposición de saberes matemáticos y didácticos como estrategia para la consolidación de los saberes profesionales de los docentes en formación.

La transposición didáctica es inevitable, el tipo y la forma como se haga está mediada por las representaciones sociales de quienes tienen la responsabilidad profesional de hacerla.

A lo largo de la tesis podemos apreciar una forma de hacer la transposición didáctica que al mismo tiempo que recupera los planteamientos curriculares oficiales, marca una distancia importante en tanto el rediseño curricular que se plantea a través de los planes de clase del formador de profesores paulatinamente se acerca al esquema de transformación de saberes previos, aunque aún muy marcado por un esquema basado en la homología, es decir, parece ser que la representación social predominante, desde la visión del formador de profesores, respecto a la formación inicial es que los estudiantes tienen que vivir el enfoque y hacer matemáticas de manera similar a como las enseñarán en la escuela primaria.

A esto obedece el hecho de que los tipos de actividades que se plantean a lo largo de las 9 sesiones de clase que analizamos, en congruencia con el enfoque oficial actual, tengan como soporte fundamental el planteamiento y resolución de problemas en una triple vertiente: los que se plantean desde los materiales oficiales [Taller para maestros (Block, Schulmaister, Balbuena, & Dávila, 1999) y libros de texto (nacionales y extranjeros)]; los que diseña y propone el formador de profesores y los que inventan los estudiantes. Los juegos matemáticos también aparecen con un doble componente: instrumentos para la reflexión sobre el saber matemático de los docentes en formación y como estrategia de enseñanza en la escuela primaria.

La decisión de transformar el “texto del saber” es lo que permite que, en el caso de la formación inicial de profesores, emerja el saber didáctico con mayor fuerza, sin embargo es importante mencionar que esta transformación y rediseño curricular es posible a partir del conocimiento amplio del campo de la didáctica de las matemáticas o como mínimo de la configuración de un posicionamiento teórico que se aprecia congruente con el enfoque oficial y permite su articulación; en otras palabras el “texto del saber” habla a través del proceso de transposición didáctica, mediado por las representaciones de los formadores de

profesores y posibilita darle énfasis a uno u otro polo de los componentes del conocimiento profesional de los profesores: el saber matemático o el saber didáctico.

En el esquema formativo del profesor, desde el análisis de su Proyecto de asignatura, quedaba clara la intencionalidad de movilizar saberes e incluso corregirlos cuando fuera necesario, a partir del reconocimiento de su existencia; esta intencionalidad, explícitamente va generando las condiciones para la configuración de un esquema formativo que se acerca a la destransposición de saberes, no sólo por el reconocimiento de los errores u obstáculos que los estudiantes puedan presentar, sino por la intencionalidad de diseñar estrategias para corregirlos, de entre las cuales sobresale la “génesis didáctica” (Antibi & Brousseau, 2000) mediante la cual se provoca en los alumnos la aparición de los límites y contradicciones de la representación que sostienen y al mismo tiempo se generan las condiciones para que se puedan construir nuevas representaciones (más adelante vamos a ejemplificar con el lenguaje temático cómo se puede configurar intencionalmente este proceso).

Por otro lado, tanto en el proceso de transposición como en los momentos de la destransposición, el centro es el saber matemático, con lo cual estamos de acuerdo y nos unimos al consenso de prácticamente todos los investigadores en didáctica de las matemáticas, es decir ¿habrá alguien que diga que en el proceso de formación inicial de profesores no es importante el saber matemático?, sin embargo es precisamente la configuración de los procesos de transposición didáctica lo que confiere matices a la formación de los profesores, en el caso que estudiamos se trabaja con el saber matemático (las fracciones) pero en ocasiones aparece “transparente” tanto para los alumnos como para el profesor y por ende algunos procedimientos pseudoformales socialmente compartidos no se cuestionan, por ejemplo, en el apartado III.2.1.1.1. se describe un momento de la clase en que los estudiantes hacen uso del conocimiento común sobre la división de fracciones y al solicitar explicación sobre el procedimiento la frase de respuesta es “*Hay que multiplicar cruzado para que funcione*”, aquí la pregunta que formulamos es ¿qué tipo de intervención didáctica habría que realizar para profundizar matemáticamente en este razonamiento?, de no hacerla esta representación se seguirá reproduciendo sin que medie una reflexión explícita del por qué funciona; la destransposición puede contribuir a reflexionar sobre esta transparencia de los saberes y al cuestionar el porqué que le subyace al cómo se avanza hacia su consolidación como saberes matemáticos formales. Pero para

que haya una representación congruente con los saberes formales tiene que haber una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales (Ma, 2010)

La instauración de momentos intencionales para la destransposición no consiste en intentar destruir, cambiar o cuestionar los conocimientos anteriores como erróneos per se, sino más bien en reconocerlos y apoyarnos en ellos para llevar a los estudiantes a conocimientos y prácticas matemáticas más amplias y auténticas, entendiendo por “prácticas amplias y auténticas” a las prácticas donde el centro de la discusión sea el saber matemático y se use como un lenguaje y una herramienta que se hace necesaria para modelizar y resolver diferentes tipos de problemas; en el proceso de formación inicial docente ello debe aparecer articulado con el posicionamiento didáctico elegido, es decir, se profundiza en el saber matemático, bajo el entendido de que para los estudiantes no se trata de situaciones de aprendizaje sino de situaciones con las que aprendan a mirarlo desde la óptica de su enseñanza en la escuela primaria y de manera simultánea se discuten y analizan las implicaciones que esto conlleva (conocimiento de los alumnos y sus procesos de aprendizaje, conocimiento del currículo de la escuela primaria –el paquete de conocimientos formalmente instituido y los estándares y competencias a lograr- conocimiento especializado del contenido -diferentes subconstructos con que se pueden aprender las fracciones-, conocimiento de las características de la práctica matemática y las estrategias de enseñanza, y el conocimiento de la estructura de las matemáticas).

V.1.4. El diseño y análisis de la práctica docente como momento central para generar el conflicto sociocognitivo que favorece el cuestionamiento de las representaciones previas y la posibilidad de anclaje y objetivación de representaciones alternativas.

El diseño y análisis de la práctica docente de los estudiantes apareció, durante el análisis, como una actividad formativa fundamental en el proceso de aprender a enseñar, pero también como el escenario básico desde el cual, de manera dialéctica, se objetivan las representaciones y a la vez entran en conflicto para volver a revisarse e instalarlas con mayor comprensión.

En el proceso de diseño hay una representación que sobresale, ante la complejidad para elaborar ingenierías didácticas específicas es conveniente que los estudiantes primero analicen y modifiquen los diseños de los expertos y a partir de ello vayan interiorizando un esquema congruente con el posicionamiento teórico asumido, en tal sentido se articulan los

conceptos teóricos propios de la Teoría de las Situaciones Didácticas con el saber matemático para configurar una propuesta de esquema de planeación que responda al enfoque oficial de enseñanza de las matemáticas, desde el cual podemos identificar los siguientes momentos: preparación del medio, consigna (y devolución de la consigna), acción, formulación, validación e institucionalización.

En este mismo proceso sobresalen dos tipos de actividades que configuran dos tipos de conocimiento profesional del profesor: el conocimiento de los niños y sus procesos de aprendizaje y el conocimiento de los materiales curriculares. El conocimiento de los niños y sus procesos de aprendizaje se va dando, durante el curso, ante la respuesta a la pregunta ¿cómo resolverían esta actividad los niños? Y de igual manera desde el planteamiento didáctico de actividades por homología a las actividades que plantean los libros de la escuela primaria, se genera una reflexión por evocación hipotética de cómo resolverían los niños; sin embargo ello no se queda ahí, esta evocación hipotética se nutre de la memoria didáctica recuperada de experiencias previas de práctica docente y se confirma o desmiente a través de procesos sistemáticos de recuperación de la práctica docente (aquí aparece la filmación de clases como un referente fundamental para el análisis)

Por otro lado, cuando se planea, tanto como cuando se analizan los saberes matemáticos de la escuela primaria, el análisis de los libros de texto es el referente principal; para poder valorar las ventajas de unos materiales sobre otros se hacen comparaciones entre libros de texto de la educación primaria de diferentes generaciones (1960, 1993 y 2011, principalmente) e incluso con un libro francés. Esta comparación se presenta como una buena oportunidad para generar el conflicto entre diferentes representaciones sobre la enseñanza de las fracciones, ya que posibilita el recuerdo de la experiencia formativa previa de los estudiantes y a la vez el grado de adecuación entre cómo les enseñaron y lo que se plantean en diferentes materiales curriculares, pero incluso entre su experiencia como alumnos (las prácticas matemáticas vivenciales) y su congruencia con el Plan de estudios que estudiaron en su educación primaria (en el caso de los estudiantes participantes en esta investigación, estuvieron en la primaria con el Plan 1993 y ya como practicantes lo hicieron con el Plan 2011) de tal manera que puedan apreciar el grado de adecuación y la distancia entre el saber a enseñar y el saber enseñado (siendo ellos los protagonistas, como alumnos, del proceso de transposición didáctica) y con ello se pueda configurar un escenario de vigilancia epistemológica entre lo que

plantean los documentos curriculares y la práctica efectiva, pero ahora con el evidente cambio de rol de los estudiantes: de alumnos a profesores.

De manera paralela al reconocimiento de las representaciones sociales que transmite y las ventajas que representa la utilización de los libros de texto, es importante mencionar que en el momento mismo del análisis “*ocurren interacciones entre ‘qué enseñar’ y ‘cómo enseñar’*”. *Es fácil ver que a través de dichas interacciones se desarrollará el conocimiento disciplinario de un profesor, estimulado por una preocupación por cómo enseñar*” (Ma, 2010, pág. 163); en las diferentes clases del profesor, que fueron objeto de análisis se aprecia cómo los estudiantes interaccionan con los libros de texto motivados por esa preocupación que menciona Liping Ma en la cita anterior ¿cómo enseñar el contenido ahí presente? ¿Cómo diseñar momentos específicos (la “preparación del medio”, como momento principal de diseño por parte de los estudiantes) para que los niños construyan sus conocimientos matemáticos?

Lamentablemente, al paso del tiempo (un año después de terminado el curso) se aprecia un proceso de recombinação de ideas y de lenguajes en el esquema de planeación, de tal manera que, ante el cambio en la exigencia formal de su elaboración, hay una tendencia a que éste se diluya trivializando sus componentes principales, por ejemplo la insitucionalización, al ser una actividad central en el proceso de formalización de saberes, se llega a convertir en una actividad de revisión y confirmación de que los alumnos contestaron bien el libro de texto.

En cuanto a cómo hacer el análisis de la práctica, hay una representación que consideramos permea las decisiones tomadas en todo momento por el formador de profesores e instaladas en el grupo –clase, el análisis de la práctica implica un proceso que incorpora los siguientes momentos: diseño de la situación didáctica, puesta en práctica en el aula de la escuela primaria (recuperación de evidencias del trabajo de los alumnos y filmación en video de la clase), análisis a partir del video de la clase y elaboración de un ensayo por escrito.

Con la intención explícita de generar una reflexión sobre la práctica a profundidad, la recuperación de la filmación permite una reflexión metacognitiva dado que a partir de la observación de su propio video de clase, el estudiante está en condiciones de repensar y reflexionar sobre la acción y al mismo tiempo tomar conciencia de lo realizado, así como las posibles alternativas para superar las problemáticas que detecte.

En diferentes sesiones de clase apareció el uso del video de clase para potenciar las reflexiones de los estudiantes sobre cómo enseñar; al respecto resaltamos un uso explícito y uno potencial.

a) Análisis, en las sesiones del curso de matemáticas, de los videos filmados durante la práctica docente de los estudiantes: Esto permitió que el estudiante tomara conciencia de las decisiones que adoptó en el momento de su práctica; aquí juega un papel relevante los compañeros de su mismo grupo, dado que al ver a uno de ellos dando clase se generan actitudes empáticas que motivan sus propias reflexiones y al mismo tiempo se replantean sus creencias sobre cómo enseñar. Este juego de las creencias o concepciones personales contribuye en la configuración de las representaciones sociales.

c) Aunque esto no se infiere del análisis de las clases, otro referente importante es el video de la misma clase del formador y su uso con fines de análisis de las interacciones sociales y los intercambios comunicativos, para desvelar procesos ocultos de participación y de la devolución de la responsabilidad hacia los estudiantes en torno a su proceso formativo.

La Teoría de las Situaciones Didácticas se utilizó tanto para el diseño de sus planes de clase, como para el análisis y explicación de lo que aconteció al momento de aplicarlo, en tal sentido es necesario que como formadores de profesores fortalezcamos el análisis de los análisis de la práctica docente de los estudiantes (los textos escritos como ensayo de análisis de su práctica), una especie de metaanálisis que nos permita observar el nivel de comprensión en las conceptualizaciones sobre el saber matemático, así como las representaciones sobre el saber y su enseñanza que se van configurando; de no concretarlo y dejar pasar los errores en la comprensión y utilización de las herramientas didáctico - conceptuales se está instalando y validando su uso de esa manera y por ende fortaleciendo representaciones que pueden ser inadecuadas al enfoque previsto.

V.1.5. El lenguaje temático como punto medular en el anclaje y objetivación de las representaciones sociales: necesidad y utilidad del lenguaje didáctico. Proceso de construcción de una representación específica.

Debora Ball, como parte del conocimiento base para la enseñanza, postula la necesidad de un conocimiento didáctico del contenido (Ball, 2011), sin embargo, a diferencia de ello, desde el análisis de los registros de las clases del profesor, observamos sistemáticamente la introducción de un lenguaje didáctico específico a la Teoría de las

Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), como una forma de hablar sobre lo que acontece en el salón de clase. Es decir, una de las representaciones sociales que se configura desde el salón de clase estaría enunciada en términos de que un profesor requiere un lenguaje específico para hablar sobre lo que acontece en su aula, con lo cual se construye un marco analítico explicativo más amplio que el discurso común, el cual se muestra insuficiente cuando se trata de formar maestros reflexivos sobre su práctica.

Incluso es relevante decirlo, la incorporación de esta representación sobre la necesidad de un lenguaje didáctico, adquiere diferentes matices en tanto formas diferentes de objetivarlo, con la intención de anclarlo en las representaciones de los estudiantes; en tal sentido encontramos, desde el análisis comparativo y transversal de las diferentes sesiones de clase, tres formas diferentes de construcción de esta representación sobre el lenguaje didáctico: desde la práctica vivencial (en la coordinación de las sesiones del profesor y en la coordinación de actividades –juegos– por parte de los estudiantes); como herramienta para la planeación y análisis de la práctica docente de los estudiantes; y desde el análisis de los materiales curriculares (libros de texto). Los conceptos que aparecen en la conformación de este lenguaje didáctico son los propios de la teoría didáctica estudiada (Brousseau, 2007): regulación, devolución, tratamiento de los errores, variable didáctica, contrato didáctico, preparación del medio, consigna, restricciones de la consigna, lógica profana, fases didácticas (acción, formulación, validación e institucionalización)

Considero que el primer referente que clarifica la representación del formador de profesores, en torno a la importancia de la construcción de un lenguaje didáctico, se encuentra sin lugar a dudas en la afirmación que encontramos en el siguiente fragmento de registro:

*Mo. (...) **me gustó que se refieren ustedes al asunto de los conceptos ayuda a que nos podamos comunicar de una manera más fácil y de una manera más fluida, hubo como 2 ó 3 de ustedes que no se remiten a los conceptos y por eso todo queda en la ambigüedad**, por ejemplo, advierto que en esta vez tuve un mejor desempeño puesto que me conduje de una mejor forma frente al grupo, pues sí, pero ¿qué quiere decir conducirse de una mejor forma?, uno puede conducirse de una mejor forma porque hizo mejores regulaciones, porque hizo mejor las consignas, etcétera, si lo dejamos así, se nos queda en un contexto ambiguo (CP 4⁸⁸)*

⁸⁸ La denominación CP 4 nos permite identificar que el fragmento de registro corresponde a la Clase número 4 del formador de profesores.

Esta afirmación se presenta como el inicio de un proceso de construcción de la representación sobre el lenguaje didáctico, ¿cómo se va interiorizando en los estudiantes? ¿De qué manera se establece un anclaje que permita interiorizarlos, comprenderlos y luego objetivarlos?

Derivado del análisis de las diferentes sesiones de clase del formador y su comparación con la información obtenida a través de los diferentes instrumentos aplicados, vamos a retomar el concepto de “medio” para determinar el proceso de configuración de una representación en torno al lenguaje didáctico. Este ejemplo es ilustrativo del proceso que se sigue con cada uno de los conceptos, los cuales en conjunto configuran una decisión de elección en torno a un “lenguaje temático” (Moscovici, 1979), las categorías propias de la Teoría de las situaciones didácticas.

A decir de Moscovici (1979), dos son los mecanismos de construcción del lenguaje temático: la normalización y la motivación; mediante el primero los conceptos científicos pasan al lenguaje corriente y se emplean sin que se haya establecido una relación precisa con los otros términos del vocabulario; en tanto por el proceso de motivación, el concepto científico pasa al lenguaje corriente sin perder su primera función de designación, pero su estructura puede cambiar, y agregarse significados más comunes a su significado original, en tal sentido *“se puede hablar de motivación cuando se produce una recombinación de una lengua por medio de un aporte nuevo, el que puede dar una coloración ‘científica’ a palabras de uso corriente e imponer una versión ‘corriente’ a palabras de la terminología científica”* (Moscovici, 1979, pág. 171).

Hecha esta breve precisión conceptual, veamos las dimensiones de construcción de una categoría del lenguaje didáctico en el escenario de la formación inicial de profesores para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria, como ya decíamos, a partir del concepto de “medio” como ejemplo principal⁸⁹ y retomando fragmentos de registro en el cual se aprecian cada una de éstas:

1º. Vivencia cotidiana:

Mo. (...) hecha esta megapreparación del medio, vamos a tratar de juntarnos en binas y ahora si vamos a resolver ésta (señala un cuadro de análisis de lecciones del libro de texto), a diferencia de lo que les decía el otro día, ahora si voy a pedirle que intenten buscar en el cuadro las posibles que son, a cada bina les voy a dar un libro de 3º y uno de 4º... (CP 4)

⁸⁹ La definición del concepto se recupera al interior de la tesis, desde Chevallard, Bosch, & Gascón, 1998 a; Dávila, 2002; y Brousseau, 2007.

2°. Anclaje a partir de su verbalización, comienza la interiorización y apropiación del concepto:

Mo. Se podría trabajar el asunto de la equivalencia pero la pregunta es, vean aquí, que la lección anterior fue en la pág 85, quiere decir que aquí hay como unas 5 ó 6 lecciones antes de llegar a esta, la pregunta sería ¿qué sabe el niño para poder diferenciar $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{2}$ hasta aquí?, la pregunta interesante a que me dirijo en este momento es a ¿qué preparación del medio sería pertinente para que el niño pudiera contestar esta pregunta?, ¿qué estrategias creen que usaría el niño para contestar qué es más grande $\frac{3}{8}$ o $\frac{1}{2}$? ¿Qué creen ustedes que haría? (CP 4)

3°. Justificación práctica de su importancia:

Mo. Puede ser, pero la otra cosa colectivo y lo que podemos hacer es enfrentar a los niños en esta tarea en la idea de que si no lo pueden resolver, es precisamente los errores que cometen ellos los que nos van a permitir hacer devoluciones, validar plantear estrategias gráficas de cómo diferenciar $\frac{3}{8}$ de $\frac{1}{2}$, verdad, entonces se fijan como trabajar todas estas lecciones nos lleva a hacernos este tipo de preguntas, ¿cómo creemos que los niños van a contestar?, y para ver qué actividades vamos a llevar ya previstas o que material didáctico vamos a usar. (CP 4)

4°. Precisión sobre sus componentes básicos:

Mo. Una buena preparación del medio nos llevaría a remitirnos, ¿se acuerdan cuál fue la lección que vimos? (señala la lección de la pág 56); ¿se acuerdan de la lección?, ¿de qué se acuerdan?, ¿qué aprendimos en esa lección?, y ponerles algunas actividades que se relacionen. (CP 5)

O también,

Mo. (...) para ir dando un paso más en esto, más claro, en esa preparación del medio habrá que explorar en lo que hemos denominado aquí como la memoria didáctica (CP 5).

5°. El concepto como herramienta para el diseño, primer nivel de objetivación:

Mo. “Es mayor a $\frac{1}{2}$ ”, vamos a trabajar en la página 85, sólo vamos a trabajar en la página 85, todos con esa lección, fíjense bien que es lo que van hacer, esta va ser su tarea para salir cada uno, van a hacer la preparación del medio, para cómo trabajar esta lección, sale (CP 7)

6°. Recombinación de lenguajes, anclaje en la experiencia previa de la práctica de los estudiantes:

I4: Se me viene a la mente lo que hice en Jerez, les llevé vasos de un litro, de medio litro y de un cuarto y ya les daba una tina llena de agua y los íbamos llenando.

Ao. ¿Pero que no es mucho?, para la preparación del medio es mucho

I4.- Pues es una actividad,

Ao. Es que nada más hice la preparación del medio de esto

I4.- Por eso, para hacer una preparación del medio es una actividad, porque yo lo que hice esta vez, la maestra me dijo que eran actividades, nomas (sic) lo introducía poquito, o sea una explicación leve y dijo que no, que las actividades eran éstas para que los niños comprendieran (CP 7)

7º. El concepto en uso, segundo nivel de objetivación en escenarios microgenéticos: Este nivel los estudiantes lo recuperan en el momento de planear sus clases, para analizarlas e incluso para evaluarlas.

Ao. Para la preparación del medio me remití a la situación anterior (se refiere a un plan de clase aplicado en una jornada de práctica anterior a la que está planeando), la situación anterior es que era mi fiesta de cumpleaños y que me habían regalado 3 pasteles y que los iba a dividir, ahora me remonté a una misma situación de cumpleaños, pero ya con otra compañera (como ejemplo) pues ya la situación es diferente. (EP3⁹⁰)

Como estrategia base para la interiorización de un lenguaje didáctico, la vivencia y la familiarización en su uso aparecen como el sello distintivo, lo cual nos lleva a coincidir con Moscovici cuando afirma que

“La repetición de los mismos elementos formaliza el pensamiento. Cuando se alcanza la permanencia representativa del objeto, las relaciones cognitivas se solidifican y se encarnan en el sistema verbal, las palabras se contraen y se diferencian, el pensamiento se convierte en palabra, las partes se reabsorben en las diferentes unidades pertinentes para su uso inmediato y el doble de lo real se convierte en su sello” (Moscovici, 1979, pág. 335)

En otras palabras, considero que a partir del uso cotidiano, no sólo como repetición sin sentido, sino más bien como habituación significativa, valorando los resultados a partir del mismo uso, se va construyendo una representación social compartida y consensada y a la vez se va formalizando el pensamiento. En el caso de la formación docente inicial, los estudiantes están desprovistos de un lenguaje especializado para explicarse lo que acontece en el salón de clase, en tal sentido es un campo propicio para la incorporación de estos elementos representacionales; en la medida en que los estudiantes los interiorizan (anclaje) se convierten en instrumentos de acción (objetivación). En este proceso el lenguaje cotidiano se presenta como una barrera semántica que interacciona con el nuevo lenguaje en la construcción y emergencia de nuevas representaciones. Los estudiantes para profesor deben crearse su papel, la repetición de un lenguaje, vinculado con el análisis de situaciones contextuales de aplicación, configura una representación específica del ser profesor y le confiere una identidad. Por analogía con el médico, quien tiene todo un campo discursivo con el cual se expresa, el profesor requiere un lenguaje que le confiera mayor profesionalismo e identidad. *“El proceso de anclaje es un proceso de elaboración de este mediador verbal, sin el cual no se podría desarrollar ni mantener”.* (Moscovici, 1979, pág. 164)

⁹⁰ Fragmento correspondiente a la Entrevista previa a la práctica del estudiante identificado con el número 3, en atención a su grado de práctica.

El Plan de estudio 1997⁹¹ (SEP, 1997), bajo el cual se están formando estos estudiantes, no contempla de manera explícita el uso de este lenguaje didáctico, en tal sentido su introducción es un acierto para la formación docente inicial, en tanto el lenguaje contribuye a la denominación y la clasificación (Moscovici, 1979) y con estos objetivos se logra *“consumar la transposición de las ideas, actualizarlas en el medio circundante de cada uno y estandarizar las partes de este medio. La cadena de los acontecimientos entonces se hace comprensible y se llega a anticipar los comportamientos”* (Moscovici, 1979, pág. 91), es decir, los estudiantes interiorizan estos conceptos y ello les permite nombrar lo que acontece en su medio docente, además su uso permite anticipar y explicar los acontecimientos cotidianos en su campo profesional: la docencia.

Finalmente, a lo largo de la tesis podemos apreciar un serio intento por articular un sistema congruente de saberes matemáticos y didácticos en torno a un tópico específico, las fracciones, aprendido en la Escuela Normal y objetivado en los momentos de práctica docente de los estudiantes, con las consecuentes desestabilizaciones de las certezas de algunos de ellos y con las limitaciones para su objetivación; pareciera que se dio una “objetivación diferida”, en el entendido de que se van utilizando los conceptos – herramienta de manera parcial y con la inminente recombinación de lenguajes, entre lo cotidiano y lo científico.

En este proceso, y ante la posibilidad de fortalecer el “anclaje” y la “objetivación”, asumimos que el tipo de reflexión que los docentes en formación deben generar es una reflexión metacognitiva en tanto, más allá de las posibilidades de trabajo colaborativo que se le puedan presentar en su ejercicio profesional, de cualquier manera al momento de la toma de decisiones en el salón de clase, el maestro lo hace de manera individual; si bien se pueden reflejar posicionamientos compartidos en comunidades de práctica profesional, el maestro debe ser consciente del porqué los asume pero sobre todo debe tomar control de las necesarias transformaciones que dicho saber sufre al trabajarlo en su salón de clase.

El análisis hasta aquí realizado nos demuestra que sí es posible la transformación de las concepciones previas de los estudiantes y a la vez la instalación de representaciones alternativas, pero aún se requiere mayor compromiso de los docentes en formación y de los

⁹¹ Cuando se recuperaron los datos aun se cursaba el Plan 1997, sin embargo dadas las características del Plan 2012 (SEP, 2012 a) consideramos que las mismas afirmaciones pueden sostenerse.

formadores de maestros, para fortalecer la construcción de las incipientes representaciones, bajo una óptica constructivista de la enseñanza y el aprendizaje.

V.2. Limitaciones del estudio y cuestiones abiertas

La principal limitación es la que se deriva del hecho mismo de ser un estudio de casos, siempre hemos tenido en mente que no pretendemos generalización de los resultados, sin embargo en la medida en que las voces de los protagonistas de esta investigación posibiliten la identificación de prácticas similares, paulatinamente se pueden ir reconociendo índices que propicien la transformación de las prácticas docentes de los formadores de profesores y de los profesores en servicio, ante el cambio generacional.

Sin embargo, la complejidad del proceso de formación docente inicial, en el caso de las Escuela Normales, en México, se complejiza aún más sobre todo porque es una formación generalista, en la cual los cursos de matemáticas ocupan escasamente el 4.4 % del Plan de estudios 1997⁹² ocasionándose con ello que ante el poco tiempo de trabajo no se logren instalar representaciones firmes sobre las matemáticas y su enseñanza, o al menos esa es la sensación que queda en los estudiantes, la sensación de que se están haciendo las cosas bien pero el tiempo no permite consolidar o retroalimentar los aprendizajes.

Ante ello, considero que algunas de las cuestiones que pueden abrirse para seguir profundizando en el conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria, a partir de las determinaciones curriculares que el contexto de política educativa⁹³ impone, pueden ser las siguientes:

* Desarrollo de investigaciones respecto a la construcción de una teoría didáctica específica a la práctica docente de los formadores de profesores, con la finalidad de caracterizar los componentes de un esquema formativo que incida en la transformación de saberes previos de los estudiantes, es decir, que vaya de la transposición didáctica (generalmente centrada en la racionalidad técnica y la aplicación lineal de los programas

⁹² En el plan de estudios 1975, fueron 8 cursos de un total de 72 que integraron el plan de estudios (11.1 %) y el en Plan 1984, sólo 2 cursos de 63 (3.17 %)

⁹³ En el plan 2012, en generalización a partir del ciclo escolar 2012 – 2013, se contemplan cuatro cursos de matemáticas de un total de 56 (incluyendo los espacios destinados para cursos optativos), lo cual nos da un 7.14 % del tiempo para el trabajo en el curso.

de estudio) a la construcción de momentos intencionales para la destransposición de saberes matemáticos y didácticos.

* Investigaciones longitudinales, a partir del Plan de estudios 2012 (SEP, 2012 a), para determinar su incidencia en la configuración de las representaciones sobre matemáticas y su enseñanza que le subyacen y al mismo tiempo caracterizar el proceso de recombinación de lenguaje que se opera a partir de las representaciones que tienen los formadores de profesores encargados de aplicarlo. Una variable interesante sería estudiar las representaciones sociales a partir de cortes generacionales y/o trayectorias formativas, es decir, detectar qué factores inciden en la apropiación de los diseños curriculares y a la vez cómo es que se transforman éstos a partir de las representaciones sociales que sostienen quienes lo aplican.

* Construcción de redes de investigación colaborativa, desde la Escuela Normal en vinculación con centros universitarios –tanto del país como del extranjero-, de tal manera que se fortalezca el ethos normalista con prácticas universitarias y viceversa. El centro de la investigación debería ser la construcción de teoría emergente de los datos, desde la lógica de la investigación aplicada, tendiente a construir alternativas didácticas para reducir la brecha de impacto de los conocimientos teóricos, habitualmente contruidos en los centros de investigación consolidados.

Una hipótesis plausible al respecto es que en la medida en que se involucre a los profesores en la investigación para la toma de decisiones respecto a su ámbito concreto de trabajo, la apropiación de innovaciones didácticas tendrá menores resistencias, dado que será producto de una construcción colectiva que consense las coincidencias y respete las diferencias, pero proponga razones de conveniencia respecto a su implementación. La discusión sobre las representaciones sociales que guían las acciones y decisiones (los porqués) debe darse de manera transversal.

* Finalmente, una última línea de investigación que se puede derivar, está vinculada con la profundización en el análisis de las prácticas de formación profesional de docentes y la cultura matemática de las instituciones ¿Cuál es la incidencia de las prácticas institucionales de formación de profesores en la conformación de representaciones sociales sobre el saber matemático y el saber didáctico? ¿Cuáles saberes tienen más peso e importancia? ¿A qué se atribuyen las posibles diferencias? ante el escaso peso curricular que tienen los cursos de matemáticas: ¿cuáles estrategias formativas permiten consolidar

los saberes matemáticos y didácticos de los futuros profesores? ¿Cómo anclar y objetivar un esquema formativo tendiente a la transformación de saberes previos y con un fuerte componente de destransposición de saberes matemáticos y didácticos en una tradición normalista de formación de profesores ‘generalistas’?

Es evidente que pensamos desde donde nos situamos y hacemos objeto de estudio nuestras preocupaciones inmediatas, pero no por ello menos importantes, a final de cuentas qué es la investigación educativa sin el componente específico de herramienta para la transformación de la práctica; investigar para conocer y construir alternativas de transformación esa debe ser la meta.

*REFERENCIAS
BIBLIOGRÁFICAS*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguayo, L. M. (2005). *La transposición del "saber didáctico". Un estudio con profesores en formación en el marco de los números racionales*. México: UPN (Tesis doctoral).
- Alatorre Frenk, S., de Bengoechea Olguín, N., López Amador, L. Y., Mendiola Sanz, E., & Sáiz Roldán, M. (1999). *Propósitos y contenidos de la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria en México*. México: UPN.
- Albert Gómez, M. J. (2007). *La investigación educativa: claves teóricas*. España: McGraw-Hill.
- Antibi, A. (2001). Destransposición de conocimientos escolares. *Novedades educativas*. Año 13, No. 132, 16 - 17.
- Antibi, A., & Brousseau, G. (2000). La dé-transposition de connaissances scolaires. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 7 - 40.
- Antibi, A., & Brousseau, G. (2002). Vers l'ingénierie de la dé-transposition. *Les Dossiers des sciences de l'Education*., 45 - 57.
- Anzures, T. (2011). El libro de texto gratuito en la actualidad. Logros y retos de un programa cincuentenario. *Revista mexicana de investigación educativa*, Vol 16, No. 49, 363 - 388.
- Araya Umaña, S. (2002). *Las representaciones sociales: ejes teóricos para su discusión*. Costa Rica: FLACSO.
- Arnaut, A. (1996). *Historia de una profesión. Los maestros de educación primaria en México, 1887 - 1994*. México: SEP (Biblioteca del normalista).

- Artigue, M. (1990). Epistemología y didáctica. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol 10, No. 23, 1 - 40.
- Artigue, M. (1995). El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. (. Gómez, *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (págs. 7 - 23). México: Una empresa docente. Grupo editorial Iberoamérica.
- Astolfi, J. P. (2004). *El "error", un medio para enseñar*. México: DIADA/SEP (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Ávalos, A. (2001). *Potencial de la especialización en educación matemática de la escuela normal superior de México*. México: COMIE.
- Ávila, A. (1988). *La enseñanza oficial de las matemáticas elementales en México: su psicopedagogía y su transformación (1944 - 1986)*. México: UPN.
- Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría Brousseauiana. *Educación matemática*. Vol. 13 No. 3, 5 - 21.
- Ávila, A. (2001). *La reforma realizada. A siete años de la resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*. México: UPN.
- Ávila, A. (2001). Los profesores y sus representaciones sobre la reforma a las matemáticas. *Perfiles educativos*. Vol. 23, Número93, 59 - 86.
- Ávila, A. (2006). *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. México: Paidós.
- Ávila, A. (2011). En matemáticas...¿qué nos dejaron las reformas de fin del siglo XX? *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. Año 6 No. 9 Costa Rica, 39 - 50.
- Ávila, A., & García Peña, S. (2008). *Los decimales: más que una escritura*. México: INEE.
- Ávila, A., Aguayo, L. M., Eudave, D., Estrada, J. L., Hermosillo, A., Mendoza, J., . . . Becerra, E. (2004). *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*. México: SEP - Informe de investigación.
- Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI.
- Ball, D. (30 de enero de 2011). *Deborah Ball's Selected presentations*. Recuperado el 25 de abril de 2012, de http://www-personal.umich.edu/~dball/presentations/013011_IASH.pdf
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: whats makes its special? *Journal of Teacher Education*. 59 (5), 389 - 407.

- Banchs, M. A. (1994). Desconstruyendo una desconstrucción: lectura de Ian Parker (1989) a la luz de los criterios de Parker y Shotter (1990). *Papers on social representations*. Vol 3 (1), 1-23.
- Bartolomé, O., & Fregona, D. (2003). El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales. En M. Panizza, *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*. (págs. 131 - 162). Argentina: Paidós.
- Berger, P. L., & Luckmann, T. (2001). *La construcción social de la realidad*. Argentina: Amorrortu.
- Billstein, R., Libeskind, S., & Lott, J. W. (2008). *Un enfoque de solución de problemas de matemáticas para maestros de educación básica*. México: MLMateos Editor (traducción de Manuel López Mateos).
- Blanchot, M. (1992). *La comunidad inconfesable*. México: Vuelta.
- Blanco, L., & Contreras, L. C. (2012). Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. *Revista iberoamericana de educación matemática*. No. 30, 101 - 123.
- Block, D. (1987). *Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria*. México: DIE - CINVESTAV (Tesis de maestría).
- Block, D. (2001). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico (Tesis doctoral)*. México: DIE-CINVESTAV.
- Block, D. (2003). De la expresión '2 de cada 4' a la expresión '1/2 de'. La noción de razón, precursora de la noción de fracción. Guadalajara, Jalisco.
- Block, D. (2008). El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. En R. Cantoral, O. Covián Chávez, R. M. Farfán Márquez, J. Lezama Andalón, & A. Romo Vázquez, *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (págs. 455 - 470). México: CLAME - Díaz de Santos.
- Block, D., & Solares, D. (2001). Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo. *Educación matemática*. Vol 13 (2), 5 - 30.
- Block, D., Schulmaister, M., Balbuena, H., & Dávila, M. (1999). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros*. México: SEP.
- Bosch, M., & Gascón, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. *XX jornadas del seminario interuniversitario de investigación en didáctica de la matemática*. Madrid.
- Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 7 No. 2, 33 - 115.

- Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra, I. Sainz, & (comp.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (págs. 65- 94). México: Paidós.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Argentina: Libros del zorzal.
- Brousseau, G., & Centeno, J. (1991). Role de la memoire didactique de lenseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 11 (2/3).
- Cantoral, R. (1995). Matemática educativa. *Pedagogía. Revista especializada en educación. Tercera época, Vol 10, No. 5*, 4 - 13.
- Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., & Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *RELIME*, 83 - 102.
- Carrillo, C. (1964). *Artículos pedagógicos*. México: SEP.
- Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de investigación y relaciones*. Huelva: Servicio de publicaciones.
- Carrillo, J., & Climent, N. (1999). *Modelos de formación de maestros en matemáticas*. Huelva: Servicio de publicaciones.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). *Determining specialised knowledge for mathematics teaching*. Recuperado el 23 de Febrero de 2013, de CERME 8: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/wg_papers.html
- Caseiro, A., & Ribeiro, C. M. (2012). Conhecimento de futuros professores dos primeiros anos: uma experiencia com racionais. En R. Cadima, I. Pereira, H. Menino, I. S. Dias, & H. Pinto, *Conferencia internacional de investigacao, práticas e contextos em educacao* (págs. 393 - 400). Leiria: Escola superior de Educacao e ciencias sociais. Instituto politécnico de Leiria.
- Castorina, J. A., & Kaplan, C. V. (2003). Las representaciones sociales: problemas teóricos y desafios educativos. En J. A. Castorina, *Representaciones sociales. Problemas teóricos y conocimientos infantiles* (págs. 9 - 27). Barcelona: Gedisa.
- Castro, Y., & Curiel, M. y. (2010). *Análisis de contenido. Licenciatura en educación primaria*. México.
- Centeno, J. (1997). *Números decimales ¿por qué? ¿para qué?* Madrid: Síntesis.
- Cesín Vargas, J. J. (2007). *Educación para la vida y formación permanente: futuro de las escuelas normales*. México: El Errante editor.
- Chamorro, M. d. (2003). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Pearson.

- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: implications for teaching and research. En H. L. Chick, J. L. Vincent, & (eds), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, (págs. 233 - 240). Melbourne: PME.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México: SEP- Biblioteca del normalista.
- Clements, M. A., Bishop, A. J., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education*. New York: Springer International handbooks of education.
- Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso. Tesis Doctoral*. Huelva: Universidad de Huelva.
- Colás, M., & Buendía, L. (1994). *Investigación educativa*. Sevilla: Alfar.
- Contreras, L. C. (2002). Dificultades y obstáculos para el cambio en el aula. Una perspectiva desde la educación matemática. *Investigación en la escuela No. 47 (1)*, 79.
- Contreras, L. C., & Blanco, L. J. (2002 a). *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas*. Cáceres: Universidad de Extremadura. Servicio de publicaciones.
- Contreras, L. C., Carrillo, J., Climent, N., & Sierra, M. (2000). *Cuarto simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Huelva: Servicio de publicaciones.
- DAmore, B. (2005). *Bases epistemológicas, filosóficas de la didáctica de las matemáticas*. México: Reverte.
- DÀmore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Colombia: Magisterio.
- Dávila, M. (1991). *Situaciones de reparto: una introducción de las fracciones. Tesis presentada para obtener el grado de Licenciada en Educación primaria*. México: SEP-UPN.
- Dávila, M. (2002). *Las situaciones de reparto para la enseñanza de las fracciones. Aportes para la elaboración de un estado del conocimiento*. México: DIE-CINVESTAV (Tesis de maestría).
- Davis, G., & Thomas, M. (1992). La gestión del aula. En G. Davis, & M. Thomas, *Escuelas eficaces y profesores eficientes* (págs. 113 - 126 y 142 - 145). Madrid: La Muralla (Aula abierta).

- De Faria Campos, E. (2006). Transposición didáctica: definición, epistemología, objeto de estudio. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática Año 1 No. 2*, 1 - 11.
- Denscombe, M. (2010). *The goog research guide for small-scale social research project*. New York: Mc Graw Hill.
- Duveen, G., & Lloyd, B. (2003). Las representaciones sociales como una perspectiva de la psicología social. En J. A. Castorina, *Representaciones sociales. Problemas teóricos y conocimientos infantiles* (págs. 29 - 40). Barcelona: Gedisa.
- English, L. D. (2002). *Handbook of international research in mathematics education*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio.
- Farr, R. (2003). De las representaciones colectivas a las representaciones sociales: ida y vuelta. En J. A. Castorina, *Representaciones sociales. Problemas teóricos y conocimientos infantiles* (págs. 153 - 175). Barcelona: Gedisa.
- Fazio, L., & Siegler, R. (2012). *Enseñanza de las fracciones*. Bélgica: UNESCO/International academy of education.
- Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales. Tesis doctoral*. México: CINVESTAV-SME.
- Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. En L. B. Resnick, *The nature of intelligence* (págs. 231 - 235). Hillsdale, N. J.: Erlbaum.
- Flores, P. (1996). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza*. Granada: UGR (Tesis de doctorado).
- Font, V. (17 de mayo de 2001). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of mathematics education journal No. 14*, s/p. Obtenido de <http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome14/font.pdf>
- Freudenthal, H. (1994). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (textos seleccionados)*. México: CINVESTAV - IPN (Traducción de Luis Puig).
- Fuenlabrada, I., & Nemirovski, M. (1988). *Formación de maestros e innovación didáctica*. México: DIE - CINVESTAV.
- Fuenlabrada, I., Block, D., Balbuena, H., & Carvajal, A. (1991). *Juega y aprende matemáticas*. México: SEP (Libros del Rincón).

- Furth, H. G. (1987). La teoría de Piaget sobre el conocimiento: naturaleza de la representación y de la interiorización. En M. Gómez Palacio, *Psicología genética y educación* (págs. 30 - 41). México: SEP.
- Gage, N. (1989). The paradigm wars and their aftermath: a 'historical' sketch of research and teaching since 1989. *Educational research* 18, 4 - 10.
- Gerring, J. (2007). *Case study research*. Cambridge: Cambridge university press.
- Giménez, G. (2012). El problema de la generalización en los estudios de caso. *Cultura y representaciones sociales*, Año 7, No. 13, 40 - 62.
- Gimeno Sacristán, J. (2008). Diez tesis sobre la aparente utilidad de las competencias en educación. En J. Gimeno Sacristán, *Educación por competencias ¿qué hay de nuevo?* Madrid: Morata.
- Giordan, A., & De Vecchi, G. (1999). *Los orígenes del saber. De las concepciones personales a los conceptos científicos*. España: Diada.
- Godino, J. D. (2003). *La formación matemática y didáctica de maestros como campo de acción e investigación para la didáctica de las matemáticas: el proyecto edumat maestros*. Granada: UGR.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION Revista Iberoamericana de Educación matemática* No. 20, 13 - 31.
- Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.
- Guevara Niebla, G. (1995). *La catástrofe silenciosa*. México: FCE.
- Gutiérrez, P. B. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future*. UK: Sense publishers.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill.
- Hernández, J. e. (2001). Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las matemáticas de los alumnos que comienzan la diplomatura de maestro. En M. Socas, *Formación del profesorado e investigación en educación matemática III*. Tenerife: Universidad de la Laguna.
- Hill, H. C., Ball, D., & Schillin, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, Vol 39, No. 4, 372 - 400.

- Isoda, M., Arcavi, A., & Mena Lorca, A. (2008). *El estudio de clases japonés en matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Chile: Ediciones universitarias de Valparaíso.
- Jaworski, T. W. (2008). *The international handbook of mathematics teacher education. Vol 4. The mathematics teacher educator as a developing professional*. Netherlands: Sense publishers.
- Jodelet, D. (2006). La representación social: fenómenos, concepto y teoría. En S. Moscovici, *Psicología social II. Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales* (págs. 469 - 494). Barcelona: Paidós.
- Jodelet, D. (2008). El movimiento de retorno al sujeto y el enfoque de las representaciones sociales. *Cultura y representaciones sociales*. Año 3, No. 5, 32 - 63.
- Jodelete, D. (2003). Pensamiento social e historicidad. *Relaciones* 93, Vol XXIV, 96 - 112.
- Kemmis, S., & McTaggart. (1992). *Cómo planificar la investigación acción*. Barcelona: Laertes.
- Kieren, T. E. (1980). The rational number construct-Its elements and mechanisms. En T. E. Kieren, *Recent research on number learning* (págs. 125 - 149). Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.
- Kuckartz, U. (2007). *Programa Maxqda*. Germany: VERBI Software.
- Latorre, A., Del Rincón, D., & Arnal, J. (1997). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Hurtado ediciones.
- Lester, F. k. (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. USA: NCTM.
- Lizarde, E. (2001). *Las concepciones teórico - epistemológicas del docente y la resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria*. México: UPN 321 (Tesis de maestría).
- Lizarde, E. (2006). *De las concepciones personales a las representacione sociales: matemáticas, currículo y formación docente inicial*. Huelva: UHU (Trabajo final DEA).
- Llinares, S. (1998). La investigación "sobre" el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula: Revista de enseñanza e investigación educativa* Vo. 10.
- Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte - todo al razonamiento proporcional. En M. d. Chamorro, *Didáctica de las matemáticas* (págs. 187 - 220). Madrid: Pearson educación.

- Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid: Síntesis.
- López y Mota, Á. D. (2003). *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje. Tomo I. El campo de la educación matemática. 1993 - 2001*. México: COMIE.
- Lovell, K. (1986). *Desarrollo de conceptos básicos, matemáticos y científicos en los niños*. México: Morata.
- Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales*. Chile: Academia chilena de ciencias.
- Mancera, C. (1991). La matemática de la educación básica. El enfoque de la modernización educativa. *Educación matemática*. Vol 3 No. 3.
- Marcelo, C. (1992). *La investigación sobre la formación del profesorado, métodos de investigación y análisis de datos*. Argentina: Cincel.
- Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas*. Colombia: Universidad industrial de Santander.
- Mariánske, L. (2001). *CERME 2, European Research in Mathematics Education II. Tomo I y II*. República Checa: Univerzita Karlova V Praze.
- Martínez Carazo, P. C. (2006). El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión*. No. 20, 165 - 193.
- Martínez Hernández, A. (2001). *Los usos que hacen los niños del número natural al partir y repartir*. México: DIE-CINVESTAV-IPN (Tesis de maestría).
- Mateos, M. (2001). *Metacognición y educación*. Argentina: Aique.
- Mendoza, J. (2011). *Las fracciones: mecanismos constructivos y formas de presentación*. Zacatecas, Zacatecas, México: inédito.
- Menghini, M., Furinghetti, F., Giacardi, L., & Arzarello, F. (2008). *The first century of the international commission of mathematical instruction (1908 - 2008) Reflecting and shaping the world of mathematics education*. Roma: Instituto della enciclopedia italiana.
- Mochón, S. (1990). Fracciones: algo más que romper un todo. *Documento de uso interno en la Sección de matemática educativa del CINVESTAV México*, 1 - 29.
- Moreno, L. (1995). La educación matemática en México. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez, *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (págs. 25 - 31). Bogotá: Una empresa docente- Grupo editorial iberoamérica.

- Moreno, M. F. (2002). *Investigación en educación matemática. V simposio de la SEIEM*. Almería: Servicio de publicaciones.
- Moscovici, S. (1979). *El psicoanálisis, su imagen y su público*. Buenos Aires: Huemul.
- Moscovici, S. (2003). La conciencia social y su historia. En J. A. Castorina, *Representaciones sociales. Problemas teóricos y conocimientos infantiles* (págs. 91 - 110). Barcelona: Gedisa.
- Moscovici, S., & Marková, I. (2003). La presentación de las representaciones sociales: diálogo con Serge Moscovici. En J. A. Castorina, *Representaciones sociales. Problemas teóricos y conocimientos infantiles*. (págs. 111 - 152). Barcelona: Gedisa.
- Muñoz Catalán, C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Huelva: UHU (Tesis doctoral).
- Muñoz Izquierdo, C. (2011). El contexto de los resultados de PISA 2009. Observatorio ciudadano de la educación. *Educación 2001*, No. 188, 7 - 14.
- Nicolau, A., & Pitta-Pantazi. (9 - 13 de febrero de 2011). *A new theoretical model for understanding fractions at the elementary school*. Recuperado el 15 de octubre de 2012, de CERME 7: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/2/CERME7_WG2_Nicolaou-Pitta.pdf
- Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En M. Panizza, *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*. (págs. 58 - 71). Argentina: Paidós.
- Pansza, M., Castorena, H., Maldonado, A., Sánchez, L., & Trujillo, L. (1991). *Evaluación curricular del plan de estudios de la licenciatura en educación primaria*. México: SEP/ Fundación nexos.
- PEF. (1992). *Acuerdo nacional para la modernización de la educación básica*. México: Poder ejecutivo federal.
- Pehkonen, E., & Leder, G. T. (2002). *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?* Netherlands: Kluwer academic publishers.
- Peltier, M.-L. (1999). Representaciones de los profesores de la escuela primaria sobre las matemáticas y su enseñanza. *Educación matemática*, 5 - 24.
- Perera Dzul, P., & Valdemoros, M. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. En M. Camacho, P. Flores, & P. Bolea, *Investigaciones en educación matemática XI* (págs. 209 - 218). Tenerife: SEIEM.

- Piña Osorio, J. M., & Cuevas Cajiga, Y. (2004). La teoría de las representaciones sociales, su uso en la investigación educativa en México. *Perfiles educativos* Vol 25 No. 105 - 106, 102 - 124.
- Piña, J. M., Furlan, A., & Sañudo, L. (2003). *Volumen II. Acciones, actores y prácticas educativas. La investigación educativa en México 1992 - 2002*. México: COMIE.
- Porlán, R. (1991). *El diario del profesor. Un recurso para la investigación en el aula*. Sevilla: Diada.
- Pujadas, M., & Eguiluz, L. (2000). *Fracciones ¿un quebradero de cabeza?* Argentina: Novedades educativas.
- Ramírez, M., & Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación matemática*, Vol 21, No. 1, 63 - 90.
- Ribeiro, C. M. (2012). Conocimiento matemático de futuros maestros sobre fracciones. El rol de la unidad. En A. Estepa, J. Contreras, M. C. Deulofeo, F. J. Penalva, L. García, & Ordoñez, *Investigaciones en educación matemática XVI* (págs. 447 - 455). Jaén: SEIEM.
- Rico, L. (2000). Representación y comprensión sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. En L. C. Contreras, & e. al, *Cuarto simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Huelva: Servicio de publicaciones.
- Rico, L., Sierra, M., & Castro, E. (2002). El área de conocimiento de "Didáctica de la matemática". *Revista de Educación*, 35 - 58.
- Rigo Lemini, M., Alfonso Paez, D., & Gómez, B. (2009). Procesos metacognitivos en las clases de matemáticas de la escuela elemental. Propuesta de un marco interpretativo. En M. J. González, M. T. González, & J. Murillo, *Investigación en educación matemática XIII* (págs. 435 - 444). Santander: SEIEM.
- Robert, A., & Robinet, J. (1989). *Representaciones de los profesores de matemáticas sobre las matemáticas y su enseñanza (Cuadernos del DIDIREM No. 1) (Trad. Alicia Ávila)*. Paris: IREM - Universidad de París VII.
- Rojas Soriano, R. (2002). *Investigación social: teoría y praxis*. México: Plaza y Valdés.
- Romano, C. (1989). Research strategies for small business: a case study. *International small business journal* 7 (4), 35 - 43.
- Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En P. Sadovsky, H. Alagia, & A. Bressan, *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. (págs. 13 - 68). Argentina: Libros del Zorzal.
- Santos, E. S. (1994). *Perspectivas en educación matemática*. México: CINVESTAV.

- Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition. En A. H. Schoenfeld, *Cognitive science and mathematics education* (págs. 189 - 215). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- SEP. (1960 a). *Mi libro de cuarto año. Aritmética y geometría*. México: Autor.
- SEP. (1960). *Mi cuaderno de trabajo de segundo año. Aritmética y geometría*. México: Autor.
- SEP. (1961). *Mi cuaderno de trabajo de quinto año. Aritmética y geometría*. México: Autor.
- SEP. (1962). *Mi libro de sexto año. Aritmética y geometría*. México: Autor.
- SEP. (1964). *Mi libro de tercer año. Aritmética y geometría*. México: CONALITEG.
- SEP. (1972). *Matemáticas. Quinto grado*. México: Autor.
- SEP. (1975). *Plan de estudios 1975 y Acuerdo 11298 para la formación de maestros*. México: Autor.
- SEP. (1975b). *Educación Normal. Seminarios Regionales (Oaxaca, Monterrey, Guanajuato)*. México: Autor.
- SEP. (1982). *Libro para el maestro. Sexto grado*. México: Autor.
- SEP. (1982). *Matemáticas. Tercer grado*. México: Autor.
- SEP. (1982). *Mi libro de segundo. Parte I*. México: Autor.
- SEP. (1984 b). *La profesionalización de la educación Normal en México. Documentos 1944 - 1984*. México: Autor.
- SEP. (1984). *Matemáticas. Cuarto grado*. México: Autor.
- SEP. (1984). *Plan de estudios. Licenciatura en educación primaria*. México: Autor.
- SEP. (1988). *Libro para el maestro. Tercer grado*. México: Autor.
- SEP. (1990). *Mi libro de primero. Parte II*. México: Autor.
- SEP. (1992). *Guía para el maestro. Segundo grado. Educación primaria*. México: Autor.
- SEP. (1993 a). *Matemáticas. Tercer grado*. México: Autor.
- SEP. (1993 b). *Basic data on normal education of Mexico*. México: Autor.
- SEP. (1993). *Plan y programas de estudio. Educación básica. Primaria*. México: Autor.
- SEP. (1994). *Libro para el maestro. Matemáticas. Cuarto grado*. México: Autor.
- SEP. (1994). *Matemáticas Cuarto grado*. México: Autor.

- SEP. (1997). *Plan de estudios 1997. Licenciatura en educación primaria*. México: Autor.
- SEP. (1999). *Matemáticas. Sexto grado*. México: Autor.
- SEP. (2000). *Matemáticas. Quinto grado*. México: Autor.
- SEP. (2002). *Libro para el maestro. Matemáticas quinto grado*. México: Autor.
- SEP. (2003). *Planeación de la enseñanza y evaluación del aprendizaje. Programa y materiales de apoyo para el estudio 6o. semestre*. México: Autor.
- SEP. (2004 b). *Matemáticas y su enseñanza I. Programa y materiales para el estudio*. México: Autor.
- SEP. (2004). *Matemáticas y su enseñanza II. Programa y materiales de apoyo para el estudio*. México: Autor.
- SEP. (2011 a). *Matemáticas segundo grado. Libro del alumno*. México: Autor.
- SEP. (2011). *Acuerdo número 592 por el que se establece la articulación de la educación básica*. México: Autor.
- SEP. (2011 b). *Matemáticas. Tercer grado. Libro del alumno*. México: Autor.
- SEP. (2011 c). *Matemáticas cuarto grado. Libro para el alumno*. México: Autor.
- SEP. (2011 d). *Matemáticas. Quinto grado. Libro del alumno*. México: Autor.
- SEP. (2011 e). *Matemáticas. Sexto grado. Libro del alumno*. México: Autor.
- SEP. (2012 a). *Acuerdo número 649 por el que se establece el Plan de Estudios para la Formación de Maestros de Educación Primaria*. México: Diario Oficial de la federación.
- SEP. (2012). *Procesamiento de información estadística. Licenciatura en educación primaria. Programa del curso*. México: Autor.
- SEP. (2012). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica Primaria. Cuarto grado*. México: Autor.
- SEP. (2012). *Programas de estudios 2011. Guía para el maestro. Educación básica primaria. Quinto grado*. México: Autor.
- Shoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En T. (. Wood, *International handbook of mathematics teacher education*. Vol. 2. *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (págs. 321 - 354). Rotterdam: Sense Publishers.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher* 15 (2), 4 - 14.

- Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado*. 9 (2), 1 - 30.
- Socas, M. e. (2001). *Formación del profesorado e investigación en educación matemática III*. Tenerife: Universidad de la Laguna.
- Sosa Moguel, L., Aparicio Landa, E., & Rodríguez Vázquez, F. M. (2012). *XV Escuela de invierno en matemática educativa (Memoria)* . México: Red CIMATES/DME/CINVESTAV.
- Sosa, L., & Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M. M. Moreno, J. Carrillo, & T. A. Sierra, *Investigación en educación matemática XIV* (págs. 569 - 580). Lleida: SEIEM.
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Stigler, J. W., Gonzales, P., Kawanaka, T., Knoll, S., & Serrano, A. (1999). *The TIMSS videotape classroom study: methods and findings from an exploratory reseca project on eight-grade mathematics instruction in Germany, Japan and the United States*. Washington: National center for education statistics.
- Strauss, A., & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada en los datos*. Colombia: Universidad de Antioquía.
- Torralbo, M. e. (2003). Tesis doctorales españolas en Educación matemática. *Enseñanza de las ciencias*.
- Valles S., M. (2000). *Técnicas cualitativas de investigación social. Reflexión metodológica y práctica profesional*. Madrid: Síntesis.
- Valles S., M. (2002). *Ventajas y desafíos del uso de programas informáticos (e.g. ATLAS.ti y MAXqda) en el análisis cualitativo. Una reflexión metodológica desde la grounded theory y el contexto de la investigación social española*. Recuperado el 9 de marzo de 2012, de Centro de estudios andaluces: <http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200105.pdf>
- VanWynsberghe, R., & Khan, S. (2007). Redefining case study. *Journal of qualitative methods* 6 (2), 1 - 10.
- Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer, *Theories of mathematical learning* (págs. 219 - 239). USA: Lawrence Erlbaum associates.
- Wagner, W., & Flores-Palacios, F. (2010). Apuntes sobre la epistemología de las representaciones sociales. *Educación matemática Vol 22 No. 2*, 139 -162.

- Wong, M., & Evans, D. (2008). Fraction as a measure. En M. Goos, R. Brown, K. Makar, & (Eds), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (págs. 597 - 603). Australia: MERGA.
- Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods*. USA: SAGE publications.

ANEXOS

(SE INCLUYEN EN UN CD)
