

Un acercamiento a la forma en que los estudiantes de primaria formulan problemas

Maria Esther Fernández Arellano¹ 

IES La Rábida
Huelva, Espanha

José Carrillo Yáñez² 

Universidade de Huelva
Huelva, Espanha

Resumen

La formulación de problemas es una excelente estrategia para la enseñanza de la resolución de problemas en Matemáticas. Esta investigación describe y analiza la formulación de problemas desarrollada por alumnos de Educación Primaria (11 años). La metodología a aplicar para esta etapa educativa se diseñó en un entorno colaborativo (el PIE: Proyecto de Investigación Educativa); los alumnos disponían de diferentes escenarios para formular distintos problemas matemáticos (aritméticos, geométricos, de itinerario y de orientación espacial), y el estudio y análisis aplicado han sido de corte cualitativo, dentro del paradigma interpretativo. Se destaca de dicho análisis la capacidad de los alumnos para identificar situaciones problemáticas matemáticas, formulando problemas variados y ricos en cuanto a condiciones, incógnitas y datos aportados en sus enunciados.

Palabras clave: *Formulación de problemas; Educación Primaria; Resolución de problemas.*

Uma aproximação à forma como os alunos do ensino primário formulam problemas

Resumo

A formulação de problemas é uma excelente estratégia para o ensino de a resolução de problemas em Matemática. Esta pesquisa descreve e analisa a formulação de problemas desenvolvidos por alunos do Ensino Fundamental (11 anos). A metodologia para este estágio educacional foi projetada em um ambiente colaborativo (PIE-Educational Research Project). Os alunos tiveram diferentes cenários para formular diferentes problemas matemáticos (aritmética, geométrica, itinerário e orientação espacial). O estudo e análise aplicada tem sido qualitativos no paradigma interpretativo. Destaca-se neste contexto a capacidade dos alunos para identificar situações problemáticas matemática, formulando problemas variados e ricos no que respeita a condições, incógnitas e dados fornecidos em seus enunciados.

Palavras-chave: *Formulação de problemas; Ensino Primário; Resolução de Problemas.*

Submetido em: 28/06/2019

Aceito em: 19/01/2020

Publicado em: 01/05/2020

¹ Professora Matemática em Málaga (Espanha). E-mail: ethefa@yahoo.es

² Professor de Didática da Matemática na Universidade de Huelva (Espanha). E-mail: carrillo@uhu.es

An approach to the way primary school students formulate problems

Abstract

Problem posing is an excellent strategy for teaching problem solving in Mathematics. This research describes and analyzes the problem posing developed by students of Primary Education (11 years). The methodology for this educational stage was designed in a collaborative environment (PIE- Educational Research Project). Students will have different scenarios to formulate various types of mathematical problems (arithmetic, geometric, itinerary and orientation in space). The study and analysis applied has been cut-off qualitatively within the interpretive paradigm. Highlights of this analysis the students' ability to identify problematic situations in mathematics, formulating problems varied and rich in terms of conditions, unknowns and data provided in their statements.

Keywords: *Problem posing; Primary School; Problem solving.*

1. Introdução

Desde hace décadas, la resolución y la formulación de problemas han sido objeto de estudio: Ayllón (2012) estudió la capacidad de los estudiantes de Primaria para diseñar y resolver problemas, sus creencias sobre lo que es un problema y los elementos que consideran que ha de tener para que sea difícil. En otros casos, como es el del PIE (que luego se presentará), investigadores y docentes colaboran para aportar herramientas que mejoren la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Los principales motivos que promueven esta investigación son variados. Por un lado, se considera que las actividades relacionadas con la formulación de problemas aportan información relevante para los procesos de resolución de problemas en los estudiantes; de hecho, la formulación de problemas surge, como línea de investigación, de los estudios realizados por Espinoza (2018) sobre resolución de problemas. Además, hay acuerdo entre los investigadores en que las tareas de formulación de problemas desarrollan el pensamiento matemático y creativo, disminuyen la ansiedad hacia las matemáticas y mejoran tanto los procesos de resolución de problemas como la disposición de los estudiantes hacia la disciplina (a pesar de lo cual su práctica en el aula es poco habitual). Por otro lado, la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), modificada por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE), establece que los objetivos generales del área van encaminados a desarrollar las competencias matemáticas e iniciar al alumnado en la resolución de problemas. En consecuencia, se estima necesario abordar la elaboración de problemas en Educación Primaria, ya que puede mejorar el aprendizaje de las Matemáticas en etapas posteriores. De hecho, los estudios de Koichu y Kontorovich (2013), avalan que si este contenido se trabaja frecuentemente, los alumnos llegan a formular problemas de forma adecuada y manifiestan mayor soltura en su resolución.

El objetivo fundamental de esta investigación es describir y profundizar en las características de los problemas que formulan los alumnos de Educación Primaria (posteriormente, en el epígrafe de la metodología, se señalarán las preguntas de investigación a responder).

El instrumento de análisis empleado (que se pormenorizará más adelante) para caracterizar los problemas elaborados por el grupo de estudiantes, es el diseñado por los componentes del PIE, cuyos aspectos más relevantes son: la coherencia de los enunciados, contexto, datos y condiciones; la complejidad del enunciado y su creatividad; la relación afectiva con la formulación; la metacognición; y el espíritu crítico y flexible, así como los conocimientos que se ponen en juego.

2. Revisão de Literatura

Se encuentran en este apartado los referentes teóricos que sustentan la presente investigación, y se vinculan con la importancia de la formulación de problemas matemáticos y con los distintos aspectos estudiados a través del instrumento de análisis aplicado.

Como se ha avanzado, Singer *et al.* (2013) afirmó que la formulación de problemas como actividad es algo que va de la mano de la resolución de problemas desde hace varios años, aunque ha sido en las últimas décadas cuando se la ha diferenciado como línea de investigación y se le ha dedicado más atención.

Podemos encontrarla bajo diferentes denominaciones. En inglés, es conocida como “*problem posing*” por autores como Kilpatrick (1987), Silver (1994); también la hallamos como “generación de problemas o reformulación de problemas dados” en trabajos de Silver (1994), “planteamiento de problemas” por Brown y Walter (1990) o “creación de problemas”, pero este artículo toma la primera de ellas como referencia, cuya traducción al español es “formulación de problemas”.

Respecto a su definición, entre las propuestas en la literatura de investigación destaca la de Koichu y Kontorovich (2013) que describe la formulación de problemas como el proceso por el que los estudiantes construyen interpretaciones personales de situaciones concretas y las formulan como problemas matemáticos con significado. Dicha definición aporta a otras anteriores el hecho de hacer hincapié en que el problema formulado tenga un buen significado matemático, sin atender a si tiene solución o no. Sin embargo, esta investigación adopta, como definición de la acción de formular problemas matemáticos, la que la determina como un proceso matemático complejo, en el que se formulan enunciados a partir de la interpretación personal o significado que le da un sujeto a una situación concreta o a un problema previamente dado, el cual puede ocurrir antes, durante o después del proceso de resolución; definición recogida de los estudios sobre formulación de problemas de Espinoza *et al.*, (2016). De esta forma, se incluyen los procesos de reformulación de problemas, o de mejora de enunciados, ya planteados como parte del proceso matemático.

Varios autores han clasificado las distintas tareas de formulación de problemas. Una de esas clasificaciones, propuesta por Stoyanova (1998), identifica tres categorías de experiencia: situación libre, semi-estructurada y situación estructurada. En el estudio de caso que nos ocupa estamos ante

una situación semi-estructurada, ya que se proporciona información textual y gráfica, pero pidiendo a los alumnos que diseñen el problema usando sus conocimientos, destrezas y experiencias matemáticas previas. Espinoza (2011) recomienda presentar propuestas que incluyan imágenes, dado que en esos casos los problemas formulados son de mayor riqueza que en aquellos donde el contexto es presentado de forma textual.

La literatura de investigación, especialmente Singer, Ellerton y Cai (2015), da cuenta de la complejidad de la formulación de problemas matemáticos y de los beneficios de su aprendizaje; de hecho, Carrillo y Cruz (2016) lo relacionan con la mejora de los alumnos como resolutores de problemas, habida cuenta de que el proceso de resolver un problema puede ser visto como una secuencia de reformulaciones consecutivas, recogido también en el trabajo de Kilpatrick (2016). Es por ello que la formulación de problemas se conoce ampliamente por sus buenos resultados como herramienta docente: mediante ella, autores como English (1998) y Bonotto (2012) afirman que es posible aumentar la capacidad de los alumnos respecto a creatividad, fluidez, flexibilidad y originalidad, mejorando su pensamiento y sus habilidades para solucionar problemas, haciendo que confíen en las matemáticas y en la resolución de problemas, y contribuyendo a una comprensión más amplia de los conceptos. Más adelante se puede observar la inclusión de estas características, en forma de dimensiones o categorías, en el instrumento de análisis (cuadro 1).

El análisis de los problemas formulados en esta investigación se ha realizado con el mencionado instrumento. En él se encuentran las dimensiones de coherencia del enunciado, las características del mismo, su complejidad y creatividad, y su relación afectiva con la formulación. Para confeccionarlo se han considerado los trabajos de los autores antes referidos, entre otros. En dicho instrumento también aparecen dimensiones y aspectos destacados, como son los metacognitivos, avalados por Efklides (2006), la originalidad del problema y su plausibilidad, sustentados por Leung (1997) y Cai y Hwang (2003), las características de la suficiencia y relevancia del conjunto de datos, estudiados por Puig y Cerdán (1988) o la flexibilidad y fluidez aportado de Bonotto y Dal Santo (2015). En definitiva, ha sido la herramienta principal para estudiar los problemas elaborados por los alumnos, permitiendo las características incluidas medir lo diversos y ricos que pueden llegar a ser.

3. Metodología

La investigación que nos ocupa se ha basado en un estudio de caso donde se analizan y detallan las características de los problemas matemáticos que formulan los alumnos de un aula de 6º curso de Primaria (11 años). El estudio y análisis aplicado han sido de corte cualitativo, dentro del paradigma

interpretativo, ya que el foco estaba en los problemas creados por los alumnos y se ha pretendido describirlos e interpretarlos.

Esta actividad surge en el grupo PIE (Proyecto de Investigación Educativa), el cual está formado por profesores del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva, profesores de Matemáticas de Educación Secundaria, maestros de Educación Infantil y de Educación Primaria (entre ellos, la maestra de los alumnos participantes en este estudio), una inspección de educación y estudiantes de Máster y Doctorado. Desde el PIE se aborda la formulación y la resolución de problemas en distintas etapas de la educación obligatoria, para lo que se ha diseñado el instrumento de análisis aquí aplicado; sirviéndose de él, los componentes del grupo examinan los resultados del aprendizaje y buscan fomentar la motivación de los estudiantes.

La maestra del curso de 6º de Primaria implicado tiene más de 10 años de experiencia como docente y conoce bien las características de su alumnado. La manera en que les plantea las actividades promueve el debate y proporciona oportunidades de expresar ideas y posibles soluciones a los problemas formulados, aún cuando los estudiantes aportan razonamientos incorrectos. Además, se preocupa por las intervenciones y la participación de sus alumnos y alumnas en las diferentes actividades propuestas, optimizando la gestión del tiempo de participación para favorecer la implicación de todos ellos.

Se propone responder a las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué características presentan los problemas formulados por un grupo de estudiantes de 6º de Primaria, cuando se les propone este tipo de tarea?
- ¿Saben los alumnos de Primaria formular problemas geométricos, aritméticos, de itinerarios y de orientación espacial?
- ¿Existen diferencias, en cuanto a riqueza de los enunciados, entre los distintos tipos de problemas formulados por los alumnos?

Estas preguntas se concretan en torno al objetivo general de la investigación: la descripción y profundización en las características de los problemas que plantean los alumnos de Educación Primaria.

La sesión diseñada se apoyó en dos hitos: de una parte, la celebración de unas Olimpiadas Matemáticas en las que los niños trabajaron en equipo, elaborando y resolviendo problemas; y de otra, el evento del que derivaron los escenarios en base a los que debían formular dichos problemas. Este evento fue el viaje de fin de curso que iban a realizar a Madrid, en el que visitarían algunos lugares emblemáticos, como el Museo del Prado o el estadio de fútbol Santiago Bernabéu, y en el que asistirían al musical del Rey León.

Los días previos a la sesión de formulación de problemas, la maestra colocó en la pared un póster de la Olimpiada (imagen 1) y trabajó con la clase, a fin de que se familiarizaran con ellos, cuatro tipos de problemas: aritméticos, de orientación espacial, de itinerarios y geométricos. Se focalizó en dichas modalidades porque se correspondían con lo planificado previamente por la educadora.



Figura 1: Póster olimpiada

Fuente: Diseñado por los autores y componentes del grupo PIE

También hicieron una pequeña visita virtual a todos los escenarios seleccionados, para contextualizar la formulación de problemas: la ciudad de Madrid, el Museo Nacional del Prado, el estadio de fútbol Santiago Bernabéu y el teatro Lope de Vega, donde se representa el musical.

El instrumento utilizado para la recogida de datos fue una plantilla con imágenes de estos lugares (imagen 2), creada por la maestra, sobre la cual se habían de formular cuatro problemas, uno de cada clase, indicando qué modalidad era la elegida para cada escenario.

ESCENARIOS	TIPOS DE PROBLEMAS			
	De orientación espacial	Aritmético	De itinerarios	Geométrico
MAPA TURÍSTICO DE MADRID 	Problema:			
MUSEO NACIONAL DEL PRADO 	Problema:			
TEATRO LÓPEZ DE VEGA: MUSICAL "EL REY LEÓN" 	De orientación espacial	Aritmético	De itinerarios	Geométrico
ESTADIO SANTIAGO BERNABÉU 	Problema:			

Figura 2: Plantillas para formular los problemas

Fuente: Diseñado por los autores y componentes del grupo PIE

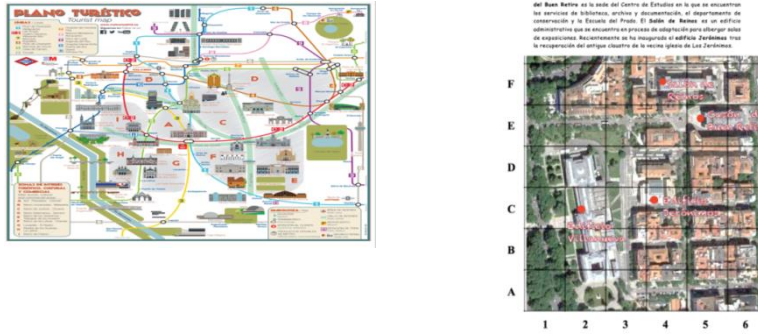


Figura3: Mapa turístico de Madrid

Fuente: Disponible en: <https://www.lacasaenlavapies.com/la-casa-agency-lavapies/plano-turistico-de-metro-de-madrid-patrocinado-por-la-casa-agency-lavapies/>

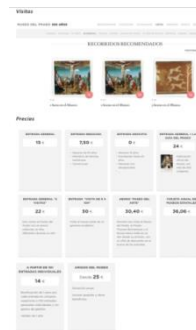


Figura 4. Museo Nacional de El Prado

Fuente: Disponible en: <https://www.museodelprado.es/visita-el-museo>

Además, en el PIE se diseñaron cuatro tarjetas, con información de cada uno de esos escenarios, con el fin de facilitar los datos con los que trabajar los enunciados(imágenes 3, 4, 5 y 6).

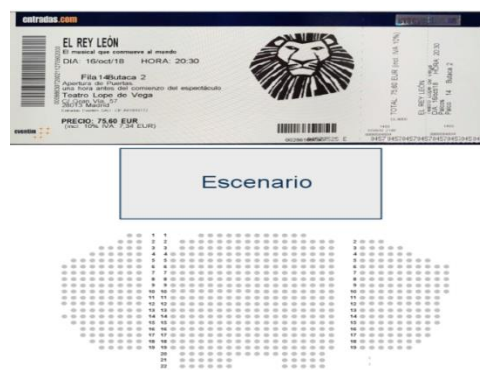


Figura 5: Teatro Lope de Vega y Musical El Rey León

Fuente: Disponible en: https://www.tablondanuncios.com/anuncio_ver_fotos.php?foto=4041649



Figura 6. Estádio de fútbol Santiago Bernabéu

Fuente: Disponible en: <https://www.ticketsland.es/producto/real-madrid-deportivo/>

Al comienzo de la sesión, la docente designó grupos heterogéneos, de 3-4 componentes, surgiendo así las seis agrupaciones siguientes: Los Big Bang, Los Calculeitors, Uno al Cubo, Los Calculadores, Los Rebelmáticos y 2^2 .

La maestra explicó a la clase la organización de la actividad y repartió a cada grupo 4 sobres con las tarjetas informativas y la plantilla en la que realizar la tarea. Cada grupo iría haciendo los problemas a su ritmo, y, en el caso de que alguno terminase antes que los demás, formularía más problemas, del tipo y escenario que prefiriera.

Una vez hubieron acabado, reflexionaron en gran grupo sobre las dificultades que habían encontrado y lo que habían aprendido, así como sobre una supuesta relación que podrían haber encontrado entre las clases de problemas y los contextos propuestos. Un portavoz de cada grupo leyó en voz alta los enunciados que habían formulado, explicando el porqué de su elección.

Como ya se ha avanzado, el instrumento de análisis (cuadro 1) que aportó la información necesaria para responder a las preguntas de investigación, fue elaborado en el seno del PIE, y en él aparecen múltiples categorías y dimensiones para examinar la formulación de problemas en Educación Primaria.

DIMENSIONES	CATEGORÍAS	INDICADORES
Coherencia del enunciado	Planteamiento de situaciones problemáticas matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> - Identifica situaciones problemáticas. - Identifica situaciones problemáticas matemáticas. - Plantea un enunciado correspondiente a unos datos, condiciones o incógnitas dados.
	Expresión de una situación problemática dando datos, condiciones e incógnitas	<ul style="list-style-type: none"> - Expone una situación inicial sin formular preguntas. - Expone una situación inicial sin formular preguntas, aunque con ayuda puede llegar a formularlas. - Expone una situación y responde sin formular preguntas. - Utiliza datos inventados / dados / obtenidos en contextos diversos. - Pone condiciones. - Formula solo la pregunta. - Formula un problema con ambigüedad en los datos y/o expresión de la situación. - Formula un problema con datos o datos y condiciones no compatibles. - En el caso de varias preguntas, están bien relacionadas con el enunciado y/o entre sí. - Utiliza/elabora esquemas representativos como generadores de ideas (con ayuda de representaciones, dadas o creadas por él mismo, puede formular problemas). - Sabe argumentar la relación entre las condiciones o datos dados y un problema enunciado. - Modifica su enunciado por iniciativa propia, para mejorarlo (por ejemplo, modificando los datos).
	Plausibilidad	<ul style="list-style-type: none"> - El problema es resoluble. - El problema se ajusta a la situación dada. - Los datos, condiciones y preguntas tienen sentido.
	Características del conjunto de datos (suficiencia, relevancia)	<ul style="list-style-type: none"> - Los datos que usa son suficientes para resolver el problema. - Hay un conjunto abundante de datos (contiene <u>estrictamente</u> un conjunto suficiente de datos). - Hay datos redundantes (hay datos que pueden extraerse de otros). - Hay datos no relevantes (inútiles para resolver el problema). - El conjunto de datos y condiciones es compatible.
Contexto y tipos de problemas	Contexto	<ul style="list-style-type: none"> - Realista. - Casi realista. - Matemático.
	Datos y condiciones	<ul style="list-style-type: none"> - Modo de representación: gráficos, tablas, dibujos, símbolos, números... - Hay datos y/o condiciones implícitos.
	Tipos	<ul style="list-style-type: none"> - Problemas de encontrar o de probar.
Complejidad del enunciado		<ul style="list-style-type: none"> - Problemas que implican conocimientos avanzados en relación con la etapa educativa. - Problemas que implican varios pasos (dependientes o no, con preguntas que añaden complejidad a las anteriores, con incógnitas auxiliares, con resultados intermedios...). - Problemas con números grandes o números no naturales. - Problemas que combinan distintos tipos de representación o de expresiones dentro de una representación (por ejemplo, números de distinto tipo o unidades de distintas magnitudes).

		- Problemas con más de una solución o de una incógnita (¿de modos de resolución?).
Creatividad	Fluidez	- Cantidad de problemas formulados en un tiempo dado. - Tiempo empleado en la formulación de un problema. - Autonomía en la formulación. - Facilidad para formular problemas.
	Flexibilidad	- Variedad de problemas formulados. - Varía la formulación de los problemas, sin variar la situación inicial. - Varía la formulación de los problemas, variando la situación inicial. - Se plantea la formulación de un problema con varias soluciones o resoluciones.
	Originalidad	- Usa elementos no comunes o no esperables en la formulación. - No repite patrones anteriores. - Es capaz de formular problemas con contenidos no trabajados en ese curso. - Usa contextos no habituales. - Introduce modificaciones en una situación dada para formular nuevos problemas.
Relación afectiva con la formulación	Motivación	- La situación inicial le motiva para formular problemas. - Distintos aspectos del desarrollo de la actividad en el aula le resultan motivadores. - Muestra una motivación intrínseca por la formulación de problemas.
	Actitud	- Se implica en la actividad de formulación. - Valora el trabajo cooperativo. - Muestra una disposición favorable hacia el trabajo matemático, valorando la presentación limpia y ordenada. - Muestra confianza en las propias posibilidades y espíritu de superación de los retos.
	Emociones	- Controla sus emociones (en particular, procura superar los momentos de fracaso o bloqueo, por ejemplo pidiendo ayuda o buscando el apoyo de sus compañeros).
Metacognición	Consciencia de las propias fortalezas, dificultades y límites	- Es consciente de lo que ha aprendido. - Sabe expresar lo que le ha interesado y lo que no. - Encuentra útil lo aprendido (explica con claridad la utilidad de los aprendizajes realizados). - Identifica las dificultades que ha tenido y la ayuda necesitada. - Es consciente de la utilidad de los conocimientos matemáticos que han resultado válidos en la resolución del problema.
Espíritu crítico y flexible	Capacidad para reflexionar acerca de los problemas formulados y aceptar alternativas	- Reflexiona a lo largo del proceso para controlar la coherencia de lo que está planteando. - Toma decisiones a lo largo del proceso de un modo reflexivo. - Acepta alternativas de un modo crítico.
Capacidad para trabajar en equipo		- Escucha, respeta y usa las ideas de los compañeros . - Aporta ayudas a sus compañeros y, en general, contribuye a la marcha del trabajo en grupo.
Conocimientos	Conocimientos que se ponen en juego	- Relaciona conocimientos matemáticos con situaciones reales. - Relaciona conocimientos matemáticos con situaciones de otras áreas o materias.

		<ul style="list-style-type: none"> - Relaciona conocimientos de distintos núcleos matemáticos. - El conocimiento que se pone en juego está relacionado con lo trabajado recientemente.
	Disponibilidad conocimiento puesto en juego	<ul style="list-style-type: none"> - Necesidad de ayuda para la aplicación de conocimientos. - Puesta en juego del conocimiento necesario para la situación.

Cuadro 1: nombre

Fuente: los autores.

4. Resultados

A continuación se expone el análisis de la actividad, visto a través del prisma que aporta el cuadro anterior. Los ejemplos de problemas, formulados por los alumnos, que veremos en este apartado se presentarán de la siguiente manera:

(Grupo) Escenario (Tipo de problema): Enunciado del problema

Para analizar la coherencia de los enunciados, comenzamos observando que, en todos ellos, los alumnos identificaron claramente situaciones problemáticas matemáticas, pero no siempre empleando datos provenientes de las informaciones contenidas en los sobres. En los problemas de tipo aritmético, de orientación espacial o de itinerarios, por lo general, los alumnos sí usaron datos de los facilitados en las tarjetas; mientras, en la mayoría de los casos de problemas geométricos, solo plantearon preguntas, sin formular enunciados previos a estas. Dichos problemas son:

- *(Uno al Cubo) Museo Nacional del Prado (Geométrico): Encuentra 16 círculos y 6 prismas. Rodéalos y, a continuación, busca al menos 3 rectángulos que no estén en el suelo.*

- *(Los Rebelmáticos) Museo Nacional del Prado (Geométrico): ¿Cuántas figuras hay en el mapa de la izquierda? (Geométricas)*

- *(Los Calculadores) Estadio Santiago Bernabéu (Geométrico): Di cuántos rectángulos hay en el campo de fútbol, y cuántas partes de círculos y círculos enteros puedes ver en la imagen.*

- *(Los Big Bang) Estadio Santiago Bernabéu (Geométrico): ¿Cuántas figuras hay? ¿De qué tipo son?*

Como se observa, son problemas sin condiciones previas a las preguntas y, en algunos, incluso podrían mejorarse su expresión y su enunciado, haciendo una introducción previa que contextualice la situación, o aportando datos necesarios para su solución.

Para la concepción del resto de problemas, se emplearon datos de entre los incluidos en los sobres, así como otros nuevos. En los siguientes ejemplos aparecen subrayadas las condiciones inventadas por los alumnos:

- (Los Big Bang) Rey León (Aritmético): “Luis y sus amigos van a ir al teatro Lope de Vega a ver el musical del Rey León. Lleva 500 € y va a invitar a todos. Una entrada cuesta 75,60 €, con el IVA, que es del 10%. Si va a invitar a cuatro amigos, ¿cuánto tiene que pagar?, ¿Cuántos amigos más puede invitar? Ellos fueron el miércoles, un día sin IVA.”

- (Los Rebelmáticos) Mapa turístico (Orientación Espacial): Mira el mapa turístico de Madrid. ¿Cómo puedes llegar desde la Plaza de Toros hasta el Conde Duque cogiendo seis autobuses y con un cambio de línea?

Según puede observarse, estos enunciados contienen tanto información de la presentada a los alumnos, como datos o condiciones ideados por sus autores. Se puede decir que están más completos que los anteriores.

De igual modo, inventan una cantidad representativa de datos en los enunciados de los problemas de itinerarios, al hablar de trayectos y de horarios de metros y trenes. En estos, además, aparecen varias preguntas, siempre bien relacionadas entre sí y con el enunciado del problema; obsérvense como muestra los siguientes:

- (Uno al Cubo) Rey León (Itinerarios): “Los niños de 6º han ido en bus a ver el Rey León. La clase de 6ºB sale del hotel a las 19:15, y los de 6ºA 10 min. más tarde. Si el grupo de 6ºB llegó a las 19:50, y 6ºA llegó 26 min. más tarde, ¿Cuántas h., min. y segundos llegó 6ºB antes que 6ºA? ¿Llegó 6ºA a tiempo?”

- (Los Rebelmáticos) Rey León (Itinerarios): “El alumnado de 6ºB asistirá al espectáculo del Rey León. Deberá llegar a las 21:00 horas. Van desde la Estación de Atocha. Cogerán 3 autobuses. El primero de ellos lo cogen a las 19.00, y llegarán al segundo a las 19.45. Los autobuses suelen tardar 30 min. ¿Cuánto tiempo han llegado de adelanto? ¿A qué hora han llegado?”

Todos los problemas, exceptuando uno, son resolubles y se ajustan al contexto dado; no obstante, hay que destacar que no todos lo hacen de la misma manera. En la mayor parte de los problemas formulados, los estudiantes hicieron uso de la totalidad de la información útil de las tarjetas, e incluso agregaron datos extra; en otros, por el contrario, se limitaron a localizar figuras geométricas en la imagen de la plantilla, o a trabajar con un número reducido de los datos de las tarjetas. Entre ellos:

- (2º) Rey León (Aritmético): “El equipo 2º ha organizado una excursión al teatro Lope de Vega, a ver el musical de El Rey León. Cada entrada cuesta 75,60€, ese día le rebajaron el IVA. ¿Cuánto cuestan en total las entradas?”

He aquí un modelo de problema resoluble, pero en el cual solo entra en juego una pequeña muestra de los datos facilitados, si bien completan su planteamiento introduciendo la variable del descuento del IVA.

Contemplemos ahora el problema no resoluble:

- *(Los Rebelmáticos) Estadio Santiago Bernabéu (Aritmético): El estadio Bernabéu tiene un máximo de capacidad de 81.044 espectadores. Hay cuatro categorías. ¿Cuántas personas caben en cada categoría? ¿Y si solamente fueran tres categorías? ¿Y si solo hubiera 28.000 espectadores?*

Puede apreciarse en él que los alumnos no repararon en si aquello que estaban planteando tenía sentido, comprobando si la división que nos daría la solución al problema era exacta, o bien si faltaba un dato que pudiese arreglar la situación (por ejemplo, el que no todas las zonas tuvieran la misma capacidad).

Los alumnos también supieron formular problemas con más de una solución posible. En concreto, lo logró el grupo Los Big Bang, con:

- *Mapa turístico (Itinerarios): Estoy en la Puerta de Europa y quiero llegar al zoo. Solo quiero pasar por tres rutas, que sean líneas, ¿te atreverías a encontrarme tres formas de llegar desde un punto hasta otro?*

- *Museo Nacional del Prado (Orientación Espacial): Mañana me voy al Museo del Prado y después me iré al casón del Buen Retiro, sin pasar por las calles que están alrededor del edificio Jerónimo. Tampoco quiero ir por fuera, porque tengo alergia a los árboles. ¿Por qué camino tengo que ir?(Viendo la información del sobre (imagen 4), se puede ver que hay más de un camino que cumpla esas condiciones).*

En resumen, podemos decir que en todos los problemas formulados, salvo en el no resoluble, tanto datos, como condiciones, como preguntas tienen sentido.

En general, la información que aportan en todos ellos es suficiente para solucionarlos, abundante y sin redundancias (Puig y Cerdán, 1988). Además, el conjunto de datos y condiciones es compatible, pese a incluir ciertos enunciados detalles no relevantes; es el caso del problema del descuento a los menores, ya que la información del IVA es superflua, al ser posible llegar a la solución sin conocer la cantidad ni el porcentaje de IVA:

- *(Los Calculadores) Rey León (Aritmético): Pepe tiene una entrada para ir al Rey León. La entrada le cuesta 75,60€, incluye el IVA (7,34€). Él va a invitar a cuatro de sus amigos. ¿Cuánto cuestan en total las entradas? ¿Si dos de sus amigos son menores, y le rebajan un 5%, cuánto tiene que pagar al final?*

Cabeseñalar que, en problemas como este, se podría haber expresado el enunciado de manera más concisa; de esta forma, se facilitaría la comprensión lectora y la identificación, por parte del resolutor, de los datos relevantes.

En la formulación de problemas geométricos sí encontramos enunciados más breves y concretos; es más, ninguno de ellos incluye información prescindible.

Todos los enunciados elaborados contenían un contexto realista, salvo los geométricos de los grupos Uno al Cubo y Los Rebelmáticos, que tenían contexto matemático y no reflejaban connotaciones realistas, como los del resto de sus compañeros. Dichos problemas se muestran a continuación:

- *(Uno al Cubo) Museo Nacional del Prado: Encuentra 16 círculos y 6 prismas. Rodéalos y, a continuación, busca al menos 3 rectángulos que no estén en el suelo.*

- *(Los Rebelmáticos) Museo Nacional del Prado: ¿Cuántas figuras (geométricas) hay en el mapa de la izquierda?*

Se precisan conocimientos matemáticos (operaciones aritméticas, geométricos...) para la resolución del total de problemas formulados por los alumnos. Para poder elaborarlos, era preciso que dispusieran de la información de los sobres, al igual que para hallar su solución.

Los problemas que formularon los alumnos en todos los casos fueron de encontrar, ninguno de ellos fue problema de probar. A continuación se detallan algunos ejemplos de dichos problemas y lo que tendría que encontrar el posible resolutor del problema (subrayado):

- *(Uno al Cubo) Museo Nacional del Prado (Geométrico): Encuentra 16 círculos y 6 prismas. Rodéalos y, a continuación, busca al menos 3 rectángulos que no estén en el suelo.*

- *(Los Big Bang) Rey León (Aritmético): “Luis y sus amigos van a ir al teatro Lope de Vega a ver el musical del Rey León. Lleva 500 € y va a invitar a todos. Una entrada cuesta 75,60 €, con el IVA, que es del 10%. Si va a invitar a cuatro amigos, ¿cuánto tiene que pagar?, ¿Cuántos amigos más puede invitar?Ellos fueron el miércoles, un día sin IVA.”*

- *(Los Rebelmáticos) Mapa turístico (Orientación Espacial): Mira el mapa turístico de Madrid. ¿Cómo puedes llegar desde la Plaza de Toros hasta el Conde Duque cogiendo seis autobuses y con un cambio de línea?*

Al analizar la complejidad de los enunciados de los problemas formulados, se observa que el alumnado no requiere conocimientos avanzados, en relación con la etapa educativa que cursa (Educación Primaria). Nótese que en los casos de problemas de tipo aritmético, destaca cómo emplean los contenidos aprendidos más recientemente (porcentajes), mientras que en los geométricos no solo no se requieren conocimientos adelantados, sino que incluso podrían ser resueltos por alumnos de cursos inferiores; de hecho, todos los ejercicios de localización de figuras responden a conocimientos adquiridos en niveles anteriores a aquel en que se encuentran.

Respecto a otros aspectos relacionados con la complejidad de los planteamientos, sobresalen enunciados en los que se implican varios pasos, dependientes entre sí, y se combinan distintos tipos de representación (es decir, para resolverlos son necesarios conocimientos tanto de orientación

espacial como de itinerarios), aun cuando se trata de problemas con una única solución. Un ejemplo significativo es:

- (2²) *Museo Nacional del Prado (Orientación Espacial): Fátima y Sofía se encuentran en el edificio Villanueva, y Manuel y Tiago en el edificio Jerónimos. Los cuatro han quedado en el Salón de los Reinos. ¿Por cuáles coordenadas tendrán que pasar Sofía y Fátima para llegar al Salón de los Reinos, pasando por el Casón del Buen Retiro? ¿Por qué coordenadas tendrán que pasar Tiago y Manuel para llegar al Salón de los Reinos, pasando por el Casón del Buen Retiro?*

En cambio, otros problemas con más de una solución, recurren a varios pasos, independientes unos de otros. Es muestra de ellos el que sigue:

- (Uno al cubo) *Mapa turístico (Orientación Espacial): Estoy en el parque del Retiro. Quiero llegar hasta la Catedral de la Almudena, pero la calle que pasa por la Plaza de España (la azul) está cortada por obras. ¿Por dónde puedo ir? Encuentra 2 caminos posibles.*

En los enunciados propuestos no aparecen cifras elevadas, salvo en el problema del aforo del campo de fútbol. Entre los de tipo aritmético predominan los que contienen números decimales, al tiempo que, en los problemas de horarios y autobuses, aparecen números expresados en el sistema sexagesimal. Por ejemplo:

- (Los Calculeitors) *Estadio Santiago Bernabéu (Geométrico): El radio de la circunferencia del centro del campo es de una longitud 19,15 m. Quieren hacer el campo más pequeño y ahora su longitud equivale al 85% del tamaño anterior. ¿Cuánto mide el diámetro de la circunferencia del centro del campo?* (En este problema aparecen números decimales y porcentajes).

- (Los Calculeitors) *Mapa turístico (Itinerarios): El metro sale de la Plaza de España y se dirige hacia Gregorio Marañón. En este trayecto tarda una hora y 30 minutos. Después se dirige hacia Colombia y tarda 45 minutos y 59 segundos. Y después llega a su destino, Príncipe de Vergara, en 25 minutos y 40 segundos. ¿Cuánto tiempo tarda el metro en llegar a su destino, si se atrasa cinco minutos y 15 segundos?* (Aparece el sistema sexagesimal y cálculos aritméticos).

- (2²) *Mapa turístico (Itinerarios): Las clases de 6^o están en la estación de Atocha. Cogen un autobús hasta la Puerta del Sol y dura 45 min. En la Puerta del Sol esperaron 15 min, para coger otro autobús hasta la Warner, y ese autobús tardó 1 h. 10 min. En la Warner estuvieron 5 h. Cogieron un autobús hasta la Puerta de Alcalá. ¿Cuántos minutos tardaron en llegar hasta la Puerta de Alcalá?* (Aparece el sistema sexagesimal y cálculos aritméticos).

Los conocimientos que los alumnos pusieron en juego a la hora de formular los problemas fueron matemáticos, relacionándolos con situaciones de la vida real (aunque imaginarias) y con contenidos que trabajan diariamente en la asignatura: operaciones básicas, figuras geométricas, orientación espacial y porcentajes. Yendo más allá, fueron capaces de redactar enunciados que

relacionasen dichas áreas matemáticas diferenciadas. A modo de ejemplo, este problema para el cual se requieren nociones de Geometría y Aritmética:

- *(Uno al cubo) Estadio Santiago Bernabéu (Aritmético): Un jugador del Real Madrid le ha dado dos vueltas y media al Santiago Bernabéu. Si su longitud es de 105 m. y su anchura de 68 m. en el mapa, ¿cuántos metros de campo ha recorrido el jugador en la realidad? Si su compañero corre la mitad, ¿cuántos metros recorre? ¿Cuánto corre el jugador 1 más que el jugador 2?*

Los estudiantes no requirieron de ayuda para aplicar estos conocimientos en su formulación.

Para finalizar, analizaremos las dimensiones de creatividad, relación afectiva con la formulación, metacognición, espíritu crítico y flexible y capacidad para trabajar en equipo.

Los alumnos manifestaron haber creado exitosamente cuatro problemas durante la sesión, repartiendo el tiempo equitativamente entre ellos, por lo que podemos afirmar que tienen facilidad y fluidez a la hora de formular problemas con los conocimientos matemáticos que poseen.

Una mirada global permite valorar su capacidad para elaborar enunciados de diferentes tipos, lo cual demuestra flexibilidad, gracias, en parte, a las indicaciones recibidas al respecto.

Hay varias muestras de la originalidad de los problemas: por ejemplo, en el descuento del 5% en la tarifa del musical por ser menores, o en el problema de itinerario siguiente, en el que se limita el recorrido tanto en relación al número de casillas por las que puede pasarse, como a cuáles de ellas no pueden recorrerse:

- *(Los Calculeitors) Museo Nacional del Prado (Orientación Espacial): Elena está en el salón de Reinos; quiere pasar por todos los edificios del Museo del Prado, pero no puede pasar por las coordenadas D5, F5, B6, C3 y B2. Y solo puede pasar por 16 cuadrados. ¿Cuáles son?*

Cada vez que un grupo formula un problema, se puede observar que no repite el patrón del formulado con anterioridad, aunque sí que se observa este hecho entre los diferentes grupos, obteniéndose problemas muy similares; ello puede achacarse a la información que se les da en cada escenario, que les sugiere el enfoque del planteamiento.

Comentemos ahora la relación afectiva con la formulación de este grupo. El que el alumnado, al finalizar el curso, visite los sitios de los escenarios propuestos, les motiva para la realización de la actividad, así como saber que se trata de unas Olimpiadas (esto es, una competición). Tras plantearseles la tarea, se implican en ella, valorando el trabajo cooperativo, escuchando al resto de compañeros e intentando buscar un acuerdo común, al tiempo que controlan sus emociones. Muestran una disposición favorable hacia la formulación, realizando todos ellos una presentación correcta; contribuye el hecho de tener circunscrita en la plantilla la región en la que deben escribir, por lo que se esmeran en introducir adecuadamente, en cada una de las casillas, el problema apropiado.

En cuanto a la metacognición y consciencia de las propias dificultades, fortalezas y límites, los estudiantes manifiestan haber aprendido nuevos conocimientos, sabiendo expresar aquello que les ha sido útil y lo que no, las dificultades que les han acaecido y la importancia de los conocimientos matemáticos de los que disponen a la hora de construir un problema.

A lo largo del proceso de formulación, y según evidencian en varias ocasiones los vídeos y audios, los alumnos reflexionan acerca del problema en el que trabajan reformulándolo constantemente, para comprobar si mantiene o no el sentido, y aceptando las alternativas que van surgiendo de manera crítica (dentro de los límites de su madurez y de la etapa).

Por lo que respecta al trabajo en grupo, en cada uno de los equipos supieron escucharse, respetarse y elegir entre las ideas lanzadas aquellas que eran buenas; esto, a pesar de que en algunos hubiera estudiantes que tomaran a veces el papel de líder. En síntesis, puede declararse que todos aportaron algo positivo, contribuyendo a la marcha del trabajo de una forma adecuada.

5. Considerações finais

El objetivo primordial de esta investigación era describir y profundizar en las características de problemas formulados por alumnos de Educación Primaria, para lo cual se han de responder las preguntas de investigación que se plantearon. La pretensión inicial era estudiar la capacidad que manifiestan los estudiantes para formular problemas matemáticos, a la vez que dar a conocer lo buena herramienta docente que puede resultar, al mejorar su pensamiento y sus habilidades para resolver problemas (ENGLISH, 1998; BONOTTO, 2012); para ello, ha sido de gran relevancia la utilidad del marco teórico.

Los alumnos idean mejores enunciados en los casos de problemas de tipo aritmético, de orientación espacial y de itinerarios. Por otro lado, en la mayoría de problemas geométricos, simplemente lanzan una o varias preguntas, bien relacionadas, pero sin que haya una imposición de condiciones previas en un enunciado acorde a dichas preguntas.

En todas las formulaciones el contexto es realista, excepto en los problemas geométricos de los equipos Uno al Cubo y Los Rebelmáticos, cuyo contexto es matemático.

Se han encontrado también problemas que implican varios pasos, independientes entre sí, y cuentan con varias soluciones; se trata, en los más de los casos, de problemas geométricos y de itinerario.

Tras considerar los resultados obtenidos, podemos concluir que la metodología empleada ha resultado la oportuna: tenemos numerosas evidencias de la capacidad de los alumnos de Educación Primaria para formular problemas, a pesar de no haberse enfrentado con anterioridad a sesiones como la diseñada para este estudio. Dados problemas presentan las siguientes características: son

aritméticos, geométricos, de orientación espacial y de itinerarios; pueden ser resolubles en uno o más pasos; cuentan con los datos suficientes y necesarios; y evidencian las dificultades propias de la etapa educativa en la que se encuentran sus autores.

El instrumento de recogida de información proporciona la necesaria para llevar a cabo el análisis, ya que permite examinar en profundidad las categorías que distingue el instrumento de análisis. Por su parte, este último, fruto del trabajo del PIE, facilitó la obtención de resultados al ofrecer categorías muy diferenciadas y bien definidas.

Llegados a este punto, es también importante recalcar la principal limitación encontrada al realizar este estudio: la temporal. De haber tenido la oportunidad, habría sido interesante extender la investigación a varias sesiones, e, incluso, dividir el contenido de una única sesión en varias, reforzando así más aquello que se trabajaba.

Tanto los investigadores de este artículo como los componentes del grupo PIE, dentro del cual se ha llevado a cabo esta investigación, consideran que el trabajo desarrollado ha incidido en su desempeño profesional y en el aprendizaje del alumnado. Con su difusión, se pretende fomentar su ejecución por otros docentes, dada la aportación que supone a la mejora de la enseñanza de las Matemáticas; puede emplearse tanto en formación de profesores, como de inspiración para que estos diseñen prácticas análogas, ya sean para el nivel educativo aquí propuesto o para otros. Sin buscar la generalización a partir de los resultados obtenidos, se considera que esta experiencia podría trasladarse a otras clases y cursos de Educación Primaria de características semejantes, posibilitando experiencias similares y comparar los resultados.

Para futuras investigaciones, sería muy interesante realizar este estudio a lo largo de un curso académico completo, pudiendo así extraer conclusiones de peso, habida cuenta de que, además, a lo largo de ese período podrían trabajarse muchos problemas y de muy distintos contenidos.

6. Referências

AYLLÓN, MF; CASTRO, E; MOLINA, M **Invención de problemas y tipificación de problema difícil por alumnos de educación primaria.** En MARÍN, M; FERNÁNDEZ, G; BLANCO, LJ; PALAREA, M **Investigación en educación matemática XV.** Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). 2011. p.277–286

BONOTTO, C **Artifacts as sources for problem-posing activities.** Educational Studies in Mathematics, 2013, 83(1), 37-55

BROWN, S; WALTER, M **The Art of problem posing.** New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1990

CARRILLO, J; CRUZ, J **Problem posing and questioning two tools to help solve problems.** En FELMER, P; PEHKONEN, E; KILPATRICK, J **Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives.** New York: Springer. 2016. pp. 23-36

ESPINOZA, J **Invenção de problemas por estudantes com talento em matemática: um estudo exploratório** (Tesis de maestría) Universidad de Granada, Granada, 2011

ESPINOZA, J; LUPIÁÑEZ, JL; SEGOVIA, I **La invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático.** Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 2016. 14(39), 368–392

ESPINOZA, J *Caracterización de estudiantes con talento en matemática mediante tareas de invención de problemas.* Doctorado tesis, Universidad de Granada. 2018

KILPATRICK, J **Problem formulating: Where do good problem come from?**, 1987. En SCHOENFELD, A **Cognitive science and mathematics education.** New Jersey: Lawrance Erlbaum Associates. pp. 123–148

KOICHU, B; KONTOROVICH, I **Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the Billiard Task.** Educational Studies in Mathematics, 2013. 83(1), 71–86

Ley Orgánica para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) (Ley Orgánica 8/2013, 9 de diciembre). Boletín Oficial del Estado, nº 295, 2013, 10 diciembre.

PUIG, L; CERDÁN, F **Problemas aritméticos escolares.** Madrid: Síntesis. 1988

SINGER, FM; ELLERTON, N; CAI, J **Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions.** Educational Studies in Mathematics, 2013. 83(1), 1–7

STOYANOVA, E. **Problem posing in mathematics classrooms.** En MCINTOSH, A; ELLERTON, N **Research in Mathematics Education: a contemporary perspective.** Cowan University: MASTEC. (1998) (pp. 164–185)