MSEL
MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

Modelling in Science Education and Learning
Volume 1, No. 2, 2008.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Modelización Matemática en secundaria desde un punto de vista superior: EL PROBLEMA DE DOBOGÓKÓ

Sixto Romero Sánchez
Escuela Politécnica Superior. Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

Fernando Castro Gutiérrez
fercasgu@hotmail.com

Abstract

El presente trabajo describe y analiza una experiencia de modelización matemática que bien podría desarrollarse en el aula con alumnos de secundaria. Las distintas etapas del proceso de modelización seguido se describen en el artículo. En su análisis se señalan algunas estrategias para la elaboración del modelo con diferentes enfoques y que nos conduzca a la solución del problema planteado: problema que hemos denominado Problema de Dobogókó.

The present work describes and it analyzes an experience of mathematical modelling that well could be developed in the classroom with students of secondary. The different stages of the process of followed modelling are described in the article. In their analysis some strategies are pointed out for the elaboration of the pattern with different focuses and that it drives us to the solution of the outlined problem: problem that we have denominated Problem of Dobogókó.

1 Introducción

El artículo presenta el estudio y desarrollo de algunas formas geométricas y expresiones que aparecen en el espacio que configura el hábitat de unos pájaros en los jardines del Hotel Manreza en la provincia de Dobogókó en Hungría a unos 60 Kms. de Budapest como consecuencia de la observación directa de los autores. Con motivo de la asistencia de los firmantes del artículo a la 59 edición de la CIEAEM (**C**ommission **I**nternationale pour l'**É**tude et l'**A**mélioration de l'**E**nseignement des **M**athématiques) con el título,

La actividad matemática como la práctica en el aula y objeto de investigación didáctica: dos perspectivas complementarias

en honor del insigne profesor Tamás Varga,

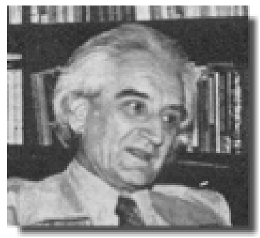

FIGURA 1: FOTO DE TAMÁS VARGA.

se ha desarrollado este trabajo que quiere poner de manifiesto que la naturaleza nos ofrece bellos ejemplos de reflexión para que el matemático puede realizar cualquier trabajo susceptible de ser modelado como es el caso que presentamos a continuación. La actividad matemática se encuentra en el corazón de toda enseñanza de las ciencias, en general, y en la de las matemáticas, en particular. Es a la vez un instrumento de motivación de los alumnos, un medio de contextualizar los conceptos estudiados y de hacer la conexión con otras materias escolares. La actividad matemática concebida por diferentes estatus: enseñantes, consejeros pedagógicos, autores de manuales escolares, investigadores en didáctica de las matemáticas se dirige así a un público variado y puede ser entendida de varias formas. Precisamente, en este encuentro celebrado en Hungría se ha trabajado profundamente, por parte de todos los/las participantes, en la reflexión y en el debate sobre la actividad matemática, y que podemos resumir en los cuatro puntos:

a) La actividad matemática en el aula del siglo XXI.

b) La resolución de problemas y la institucionalización de los conocimientos.

c) La promoción de los proyectos y la concepción de las actividades matemáticas.

d) La investigación referente a la actividad matemática. La colaboración entre enseñantes e investigadores.

2 Problema de optimización en la vida real. Estudio de un caso real en Dobogókó

2.1 Contexto teórico: Modelización Matemática

Los autores de este trabajo proponen como actividades de clase aquellas que sean verdaderos problemas o situaciones problemáticas. Una situación problemática atractiva para el alumno puede ser más valiosa que una docena de ejercicios formales o problemas rutinarios. El referente que expresamos en párrafos ulteriores ha sido la motivación para el alumno y la funcionalidad y utilidad del contenido matemático. Consideramos que una actividad matemática puede cumplir estas condiciones:

* si motiva al alumno/a a enfrentarse a una dificultad que realmente necesita ser resuelta;
* si estimula a los alumnos a indagar en las circunstancias del problema;
* si el alumno/a tiene que seleccionar los datos relevantes;
* si el alumno/a está motivado a desarrollar una variedad de estrategias para resolver el problema; y
* si el alumno/a emite sus propios juicios sobre la aceptabilidad de varias soluciones.

En definitiva, la resolución de problemas está directamente relacionada, por un lado con el alumno/a, teniendo en cuenta lo que el alumno/a pretende del mundo, de su mundo; y por otro, con el profesor, que debe ser consciente de lo que conlleva hacer resolución de problemas en el aula; ha de tener claro para lo qué lo hace y algunos elementos propios del proceso (lo que se da en llamar fases y heurísticos que puedan ayudar al alumno/a a progresar en la resolución de problemas).

La resolución de problemas desarrolla una actitud abierta que debe poner de relieve los procesos inductivos y deductivos de forma rigurosa. El método de resolución de problemas depende del contexto.

2.2 Modelos en el proceso Enseñanza y Aprendizaje

Los alumnos deben ser capaces de llevar a cabo esos procesos según convenga. El método debe provenir de la necesidad de sintetizar y formalizar los argumentos que determinen una concepción dinámica de la resolución de problemas. En este contexto debemos encajar el concepto de modelización. A nuestro juicio, la modelización matemática se puede entender de varias maneras:

1. Como una construcción de modelos.
2. Como el uso y manejo de modelos para la enseñanza/aprendizaje (E/A) de las matemáticas.

En el primer caso, la construcción de modelos es a veces de difícil compresión por la falta de suficientes conocimientos técnicos y físicos. En algunos contextos la construcción de modelos sencillos es útil para la enseñanza ya que propicia la resolución de problemas de los estudiantes, como ya se ha indicado ut-supra, como una componente creativa para su formación: diversas estrategias, cálculos, etc...No pretendemos caer en la simplicidad, aunque pueda contradecir la afirmación anterior, pero la modelización se puede concretar en un esquema no excesivamente complicado si se eligen adecuadamente los contextos en los que debamos trabajar. Se parte de un problema real, que se plantea en términos de la ciencia (Física, Química, Biología,...) y la ingeniería lo que conduce a un planteamiento del problema en términos abstractos que culmina con la formulación de las ecuaciones (modelo) que describen el problema.

En segundo lugar, la resolución de problemas en Matemáticas, y éste es el punto más importante, valida la capacidad predictiva de la misma. Este tipo de planteamiento básicamente nos debe conducir a que:

a) La modelización refuerce el conocimiento interdisciplinario.

b) La modelización sea una actividad válida para la creatividad del alumno.

c) La modelización ofrezca un sentido práctico a las matemáticas.

d) La modelización aumente la motivación de los alumnos por las carreras científicas y tecnológicas. Es un claro indicio de amor hacia las matemáticas ofreciendo un nuevo carácter formativo de las mismas y a su vez, que fomente el gusto por las matemáticas y por la carrera que se vaya a cursar.

e) La modelizacion matemática se use como herramienta de enseñanza-aprendizaje.

La modelización matemática consiste en formular un problema de la vida cotidiana o situación técnica en términos matemáticos, resolverlo si es posible interpretar los resultados en términos del problema y de la situación planteada. (El marco teórico puede consultarse en el trabajo realizado por M. Niss en 1992, y en el siguiente esquema referencial que puede visitarse en las webs del ICTMA citadas en la bibliografía).

2.3 Estudio de un caso Real. NIDOS Y OPTIMIZACIÓN

Un bello ejemplo lo constituye el siguiente problema que hemos denominado **Nidos y otimización**. Es un ejemplo donde el alumno puede conseguir ver características importantes de los diversos conceptos matemáticos que intervienen para a través de su estudio detallado intentar conseguir aspectos significativos del modelo que pueda dar solución a lo que nos permitimos denominar una vivienda digna para las aves. En definitiva conseguir la función, las funciones, las fórmulas matemáticas válidas para el modelo. Evidentemente, a partir de aquí, el jugo que se le puede sacar es infinito: la geometría de detalles,

Contextualización del problema

Situación. Los hermosos jardines del Centro de Convenciones de Manresa (Dobogókó), un poblado de tilos, plátanos y una gran variedad de coníferas.

Figura 2: Jardines del Centro de Convención Manresa (Dobogókó).

Información. Había carteles con información acerca de los hongos y los pájaros de ese entorno. Como una invitación a proteger a las aves se muestran al visitante algunos modelos de casitas que pueden ser construidas como refugios para aquéllas. En cada caso se incluye un croquis y las medidas para facilitar la construcción. La mayoría de los modelos tiene la forma de un paralelepípedo, salvo uno- particularmente interesante-que se asemeja a un prisma recto de base triangular.

Figura 3: Hábitat para pájaros (Casita).

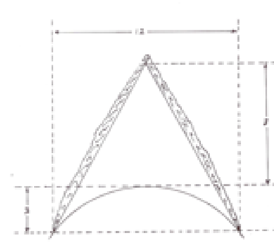

Figura 4: Croquis del hábitat.

Cuestión: El problema de Dobogókó

Para la construcción de la casita —Ver Figura 3 y Figura 4— y como el refugio ha de adosarse a un tronco cilíndrico, con las medidas que aparecen en la Figura 4, hallar el radio mínimo del tronco al que puede adherirse el refugio de modo que su altura sea de por lo menos de 8 centímetros.

Resolución. Sugerencias a las formas de resolución

Es importante que el alumno/a se ejercite en la toma de decisiones en función de criterios. Este es un problema que les puede proporcionar la oportunidad de decidir los criterios en función de los cuales un radio va a convenir más que otro. Respuestas basadas en que los pajaritos deben tener una vivienda amplia, o que el circulo de entrada sea suficiente estable para evitar que entren otros inquilinos no deseables. De cualquiera de las maneras debe tratarse de dirigir al alumno/a hacia criterios que puedan modelizarse matemáticamente, emergiendo el criterio de adosamiento al árbol (tronco cilíndrico). Esto debe dar motivos para, según el nivel de enseñanza donde nos encontremos, abordar el problema de diferentes maneras. En cualquier caso, una cuestión específica sería averiguar el radio mínimo con los datos que se han proporcionado. Es importante que el alumno se enfrente a este problema con la capacidad de discutir su propio proceso de resolución, intentando ver o descubrir las diferentes formas de resolución. Para ello debe tener claro las fases y los heurísticos a emplear en la resolución del problema concreto planteado:

a) Comprensión. b) Planificación. c) Ejecución. d) Verificación.

En función de las diferentes fases por las que un alumno/a debe transitar en la resolución de problemas es claro que puede utilizar los heurísticos correspondientes. Haremos especial énfasis en algunos de éstos según sean en cada uno de los modelos de resolución que planteamos.

MODELO 1 Utilización del teorema de Pitágoras.

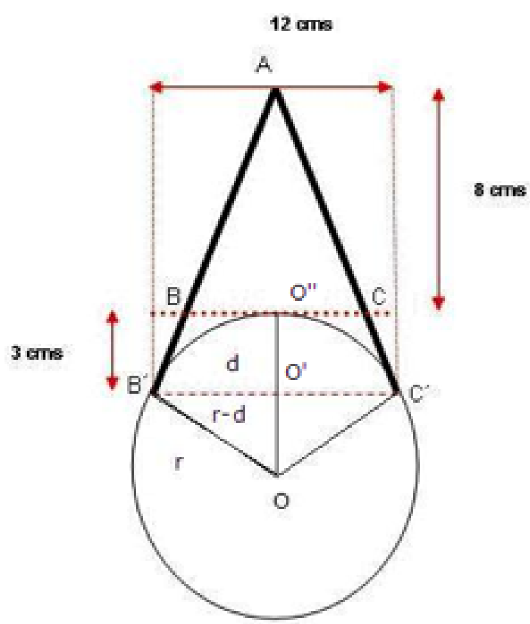

Figura 5: Esquema disposición del hábitat.

Esta aproximación al problema trata de reunir el uso de incógnitas con varios temas geométricos y fórmulas del Teorema de Pitágoras. En el triángulo $OB'C'$, llamamos a $B'C' = L$. Como

$OO' = r - d$ y $B'O' = L/2$ se tiene

$$r^2 = (\frac{L}{2})^2 + (r-d)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{L^2}{4} + r^2 + d^2 - 2rd \Rightarrow L^2 + 4d^2 - 8rd = 0 \Rightarrow r = \frac{L^2+4d^2}{8d}.$$

Una primera restricción que determina el radio del tronco en que se sitúa la casita del croquis donde L=12 y d=3 se tiene que

$$r = \frac{12^2 + 4cdot3^2}{8 \cdot 3} = \frac{180}{24} = 7'5.$$

Es una respuesta inmediata a los valores que aparecen en el croquis anexo en el árbol $L = 12$ y $d = 3$. Pero surge inmediatamente la pregunta de por qué los valores que aparecen en la Figura 5. ¿Corresponde al valor mínimo del radio del tronco? Tal vez es posible indicar que con otro radio, por lo tanto, para otro tronco de árbol, los valores de la casita serían distintos, y que por lo tanto el croquis que se expone en el jardín corresponde a un tipo de tronco en especial.

MODELO 2 Algunas pinceladas de Cálculo Diferencial

Es aquí donde en la fase de Planificación (¡mejor podíamos llamarla de Exploración!) debemos considerar el heurístico de reformulación del problema y/o de perspectiva.
Para responder a esta cuestión partimos de la función

$$r = f(L,d) = \frac{L^2 + 4d}{8d}.$$

obtenida en el apartado precedente.
Se trata de una función de dos variables que depende de la longitud de la cuerda, L, y la apotema, d, que se forma en el segmento circular $B'O''C'$ de la Figura 3.
Y aquí surge el problema: ¿Cómo calcular los extremos (máximos y mínimos) de la función dada? En niveles de secundaria podemos partir de la hipótesis de un valor constante para L. En un nivel universitario, este podría ser un magnífico ejemplo para analizarlo con las dos variables libres bajo otra perspectiva (¡utilizando, por ejemplo, los multiplicadores de Lagrange!).
Consideremos la función dada y calculemos sus extremos, considerando L como un parámetro fijo o constante,

`PASO 1:` Calculemos la derivada $r' = f'(L,d)$ con respecto a la variable d

$$r' = \frac{8d \cdot 8d - (L^2 + 4d^2)8}{64d^2} = \frac{32d^2 - 8L^2}{64d^2}.$$

`PASO 2:` Impongamos la condición $r' = 0$

$$\frac{32d^2 - 8L^2}{64d^2} = 0 \Rightarrow 32d^2 - 8L^2 = 0 \Rightarrow d = \frac{L}{2}.$$

`PASO 3:` Veamos qué tipo de extremo es.
Calculemos el valor de la derivada segunda en $d = L/2$

$$r'' = \frac{64d \cdot 64d^2 - (32d^2 - 8L^2)128d}{(64d^2)^2} = \frac{10024dL}{(64d^2)^2}.$$

Sustituyendo $d = L/2$ en r'' se tiene que $r''(L/2) > 0$ para $L > 0$. Por lo tanto $d = L/2$ es el valor de la apotema que conlleva un valor mínimo para el radio del tronco

$$r(\frac{L}{2}) = \frac{L^2 + 4(\frac{L}{2})^2}{8\frac{L}{2}} = \frac{8L^2}{16L} = \frac{L}{2} \Rightarrow r = \frac{L}{2}.$$

Una vez llegado a este punto debemos analizar la solución. Es decir nos debemos mover en la fase de verificación utilizando el heurístico correspondiente a la consistencia de la propia solución para llegar si se considera a la generalización del problema indicando que el valor de $r = L/2$ es válido. Dando el valor de $L = 12$ se obtiene $r = 6$.
Nota. Que en el párrafo precedente diera para r un valor de $7'5$, estimamos que sería consecuencia de que la casita se hubiera diseñado con criterios de optimización para los troncos elegidos. ¿Podemos pensar que tal vez sea una restricción la altura? Esto es algo que se propone para que heurísticamenete el alumno/a descubre si elm radio es mínimo o no, como se prueba en párrafos siguientes.

$\boxed{\textbf{MODELO 3}}$ Utilización del teorema de Thales. Ensayo-Error.
En desarrollos anteriores no ha aparecido el número 8 que se refleja en el croquis de la Figura 4 de los paneles informativos del jardín. Surge, por tanto, la pregunta, ¿por qué aparece en el croquis junto al árbol el número 8 que representa la altura del triángulo ABC en la Figura 5?

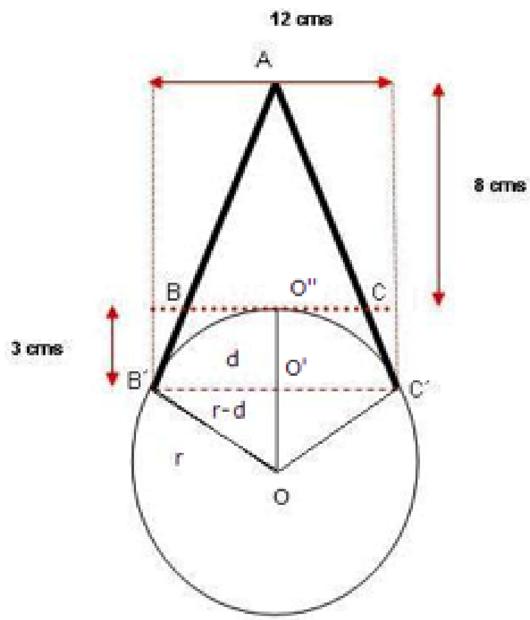

Figura 6: Esquema disposición del hábitat.

Para dar respuesta a esta interesante cuestión e intentar justificar la presencia del número 8, apliquemos el teorema de Thales al triángulo $AB'O'$ que aparece en la Figura 6. Con la identificación de los triángulos semejantes del croquis, se cumple que

$$\frac{B'O'}{O'A} = \frac{BO''}{O''A} \Rightarrow B'O' = O'A\frac{BO''}{O''A}.$$

Por lo tanto se obtiene la siguiente relación

$$\frac{L/2}{b} = \frac{d+h}{h},$$

siendo h la altura del triángulo ABO'', y b la mitad de la base del triángulo ABC. Tomando los datos que aparecen en el croquis para $L = 12$, y por lo tanto $d = 3$ como se ha demostrado ut-supra, se tiene la relación entre h y b

$$h = \frac{3b}{6-b},$$

cuya representación gráfica se muestra en la Figura 7.
Al llegar a esta expresión en un intento de que el alumno/a pueda comprobar la consistencia de la heurística empleada puede ensayar dándole valores a b y su correspondiente h .

a) Por ejemplo, dándole a $h = 8$ se tiene que $b = 48/11$. Este resultado debe ser consistente ya que aplicando el teorema de Thales en la Figura 7, para los valores $h = 8$ y $d = 3$ se tiene
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{8}{11} \Rightarrow AB = AB'\frac{8}{11}.$$
Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo $AB'O'$ se obtiene $AB' = \sqrt{36 + 121} = \sqrt{157}$ por lo que $AB = 8/11\sqrt{157}$. De aquí podemos calcular
$$b = BO'' = \sqrt{(AB)^2 - (AO'')^2} = \sqrt{\frac{157 \cdot 64}{121} - 64} = 8\sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{48}{11}.$$
Utilizando el Teorema de Thales se ve que el heurístico de consistencia en la fase de verificación hace que el valor de la altura $h = 8$ en el triángulo ABC no sea un valor elegido al azar.

b) En este momento procesal se puede proponer al alumno/a que investigue:

   1. Sobre la viabilidad de otros valores para h, y se le puede invitar a que represente nuevas gráficas para los diferentes valores de h y que justifique si los hábitats correspondientes serían optimizables.
   2. Estudiar los campos de relación y variación de entre las variables h y b a través de la representación gráfica de la función
   $$h = \frac{3b}{6 - b}.$$

Se trata de una función real de variable real
$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & b & \mapsto & \dfrac{3b}{6-b} \end{array}$$
que existe para todo $b \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$. Naturalmente esta función genera la gráfica

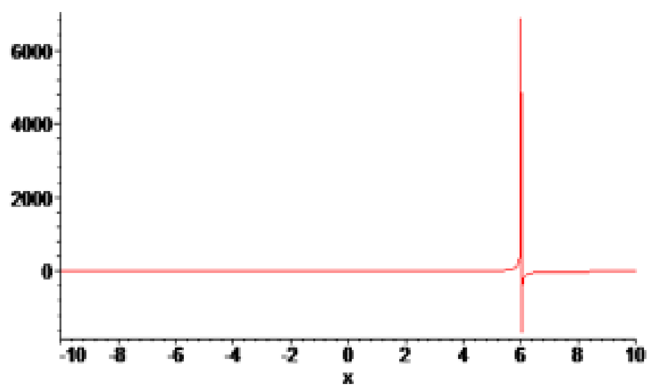

FIGURA 7: GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $h = \dfrac{3b}{6-b}$ PARA TODO $b \in \mathbb{R}$.

con una asíntota en el punto $b = 6$. En este momento hay que motivar al alumno para que

a) Interprete en la vida real, ¿qué significa construir una casita con $b = 6$?

b) ¿Qué pueden significar los valores negativos de b?

A partir de aquí, al interpretar los resultados y quedarnos con valores de b para el intervalo abierto, $(0, 6)$. ¿Por qué? : La respuesta nos conduce a la gráfica que nos permite ver el grado de variación entre las variables b y h.

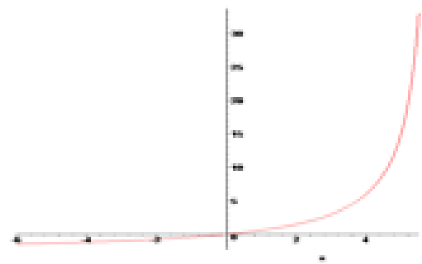

FIGURA 8: GRÁFICA DE $h = \dfrac{3b}{6-b}$ PARA TODO $b \in (0, 6)$.

$\boxed{\textbf{MODELO 4}}$ Tanteo.

Es tarea del profesor motivar al alumno que intente abordar el problema de otra manera utilizando otros heurísticos. Motivación en la línea de lo que es la aproximación numérica a través de cálculos numéricos con la ayuda de la calculadora o de una hoja de cálculo: es la fase de planificación que denominamos tanteo. De esta forma, el alumno/a puede llegar a ver características importantes y definitorias de la función que modeliza esta situación: es una función racional de numerador un polinomio de orden dos, y denominador un polinomio de orden uno (ambos en la variable d).

No es imprescindible estudiar la expresión algebraica antes de intuir las propiedades. Elaboremos la tabla:

d	$r = \frac{144+4d^2}{8d}$	d	$r = \frac{144+4d^2}{8d}$
1	37/2	11	157/22
2	10	12	15/2
3	15/2	13	205/26
4	13/2	14	58/7
5	61/10	15	87/10
6	6	16	73/8
7	85/14	17	325/34
8	25/4	18	10
9	13/2	19	397/38
10	34/5	20	109/10

TABLA 1. VALORES NUMÉRICOS EL RADIO DEL TRONCO

cuya representación gráfica para un valor constante $L = 12$, considerando la relación obtenida, aplicando el teorema de Pitágoras es

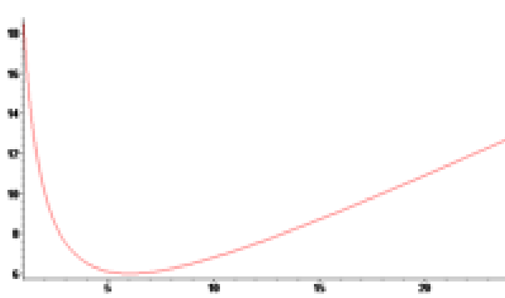

FIGURA 9: GRÁFICA DE LA FUNCIÓN DONDE EL RADIO ES FUNCIÓN DE LA APOTEMA.

Notas. a) Este tipo de modelo por "tanteo" se podría utilizar para ver que sucedería con la construcción de casitas de otras dimensiones distintas al croquis que presentamos.
b) También nos puede servir como introducción a la función racional con representación gráfica simétrica (respecto del origen y que sólo vamos a tomar los valores positivos de —heurístico de consistencia en la fase de verificación—) y permite poner de relieve sus rasgos característicos, por delante de la complicación que inicialmente representa su expresión. Ayuda a identificar este tipo de funciones con sus propiedades, no sólo con su expresión algebraica.

$\boxed{\text{MODELO 5}}$ A nivel superior. Uso de algunos conceptos de Cálculo Diferencial.
De una manera genérica si trabajamos el proceso en 3D, y considerando a r como una función de dos variables L y d , se trata de una función escalar

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (L,d) & \mapsto & \dfrac{L^2+4d^2}{8d} \end{array}$$

de dos variables reales definidas en todo $\mathbb{R}^2$ excepto para $d=0$ (¡que justifica el hecho de la imposibilidad de construir una casita con un solo punto de tangencia con el árbol. ¡Se tendría una casita inestable!).
A partir de aquí podemos pensar en niveles superiores de enseñanza, por ejemplo en un primer curso de Universidad, y hacer ver a nuestros alumnos como a partir de un ejercicio sencillo de la vida real, caso u objeto, podemos llegar a introducirnos en estudio detallado de **Existencia de extremos** (Máximos y mínimos) **en campos escalares**:

a) Comprobación de los teoremas que permiten determinar si un punto crítico de un campo escalar es máximo, mínimo o punto de silla mediante una condición algebraica de la matriz jacobiana del campo escalar en el punto crítico.

b) Introducirnos en el Teorema de Taylor de segundo orden para campos escalares.

c) Deducción de criterios para la clasificación de los puntos críticos de campos escalares para funciones de varias variables, como el caso que nos ocupa a través de las formas cuadráticas y matriz Hessiana.

d) Utilización del método de los mínimos cuadrados como aplicación del cálculo de extremos relativos.

e) Existen ocasiones en las que interesa calcular los extremos relativos de una función escalar cuyo dominio ha sido restringido de alguna manera (¡puede ser nuestro caso: limitación del radio del cilindro (árbol)!). Tendríamos que proponer al alumno que utilice el método de los multiplicadores de Lagrange.

El modelo utilizado puede ser obtenido en tres dimensiones representando las siguientes superficies cuyo estudio detallado sobrepasa el nivel de enseñanza secundaria.

1) Para valores positivos de d y de L

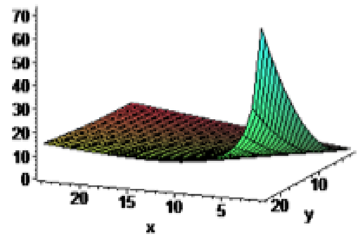

Figura 8: Representación gráfica para el campo escalar $r = f(L, d) = \dfrac{L^2 + 4d^2}{8d}$.

2) Para valores positivos y negativos de d y de L se observa la simetría de la gráfica (¡válido sólo los valores positivos para nuestro problema!)

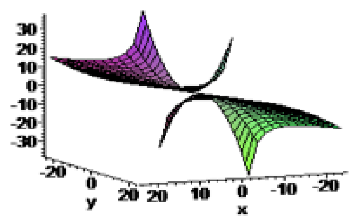

Figura 8: Representación gráfica para el campo escalar $r = f(L, d) = \dfrac{L^2 + 4d^2}{8d}$.

3 Conclusiones

1. Tomando como referencia la Figura 5, también sería interesante proponer como actividad en el aula para que el alumno/a vea que relación existe entre OB, OC', $B'C'$ partiendo de valores genéricos de la longitud del radio del tronco (calculando a través de la circunferencia del tronco) y la arista lateral de la casita AB' o AC'.

2. Otras posibilidades a estudiar a partir del área máxima y volumen máximo con la base mínima $B'C'$ de la casita.

3. Los problemas de optimización, resueltos sin ayuda del Cálculo Diferencial o de herramientas específicas, son particularmente apropiados para el desarrollo de la intuición y el rigor (Malaspina, 2006). Por su parte trabajando con estudiantes húngaros y finlandeses (Ambrus et al.2006) encontraron que al trabajar problemas de optimización en las condiciones antes descritas se incrementa notablemente la diversidad de las soluciones

4. Potenciar este tipo de ejercicio lleva a que alumno haga, que naturalmente es importante, pero no debe olvidarse la necesidad y la conveniencia de que también reflexionen sobre lo que hacen, y esto es algo que puede obviamente extenderse a cualquier persona que trabaje en la Resolución de Problemas.

4 Bibliografía

[1] Abrantes, P. “Revisión de los objetivos y la naturaleza de las matemáticas para todos en el contexto de un plan de estudio de estudios nacional (Matemáticas en Europa: diversas

perspectivas)". Barcelona. Ed. Grao. 2001.

[2] Ahmed, A et al. "Cultural Diversity in mathematics (Education)". Chichester (England). Horwood. 2001.

[3] Biembengut, M., Hein, N. "Modelización matemática: estrategia para enseñar y aprender matemática". Educación Matemática11 (1). 1999.

[4] Biembengut, M., Hein, N. Modelagem. "Matemática no Ensino". San Pablo, Brasil. 2003.

[5] Blomhøj, M. "Mathematical modelling - A theory for practice". En: Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. , Walby, K. (Eds.) International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education. Suecia. 2004.

[6] Blomhøj, M., Højgaard Jensen, T. "Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning". Teaching Mathematics and its Application 22. 2003.

[7] Broomes, D. "Using goals to construct useful forms of school mathematics". París. UNESCO. Science and Technology Education. 1989.

[8] Carvalho, M. "Lo que debemos llevar para el siglo XX1: el caso de las funciones". Barcelona. Rev. Uno.Ed. Grao. 1999.

[9] Cobb, P., Steffe, L."The constructivist researcher as teacher and model builder". Mathematics Education. Vol. 2. 1983.

[10] Davis, P., Hersh, R. "Experiencia Matemática". (1ra. Ed.). Madrid. España: Editorial Labor. 1988.

[11] Guzmán, M. "Para pensar mejor". Madrid. Ed. Labor. 1991.

[12] Guzmán, M. "Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática". Studia Paedagogica. Revista de Ciencias de la Educación, 21. 1989.

[13] Guzmán, M. Artículos en Internet.

http://platea.pntic.mec.es/aperez4/miguel/articulos.htm
ICTMA. http://www.infj.ulst.ac.uk/ictma/ http://www.ku.edu.np/ictma13/index.php

[14] Keitel, C., Kilpatrick, J. "La racionalidad e irracionalidad de los estudios comparativos internacionales". Rev. Uno. Ed. Grao. 1999.

[15] Keitel, C et al. "Mathematics, Education and Society". París. UNESCO. Document Series nº35. 1989

[16] Keitel, C. "Cultural diversity, internationalisation and globalisation: challenges and perils for mathematics education" In: A. Ahmed, J.M. Kraemer, and H. Williams (Eds.) Cultural Diversity in Mathematics Education. Chichester: Ellis, Horwood, 41-60. 2000.

[17] Lerman, S. "Culturally situated knowledge and the problem of transfer in the learning of mathematics". En L. Burton (Ed.) Learning Mathematics: From Hierarchies to Networks. Londres, Inglaterra: Falmer Press. 1999.

[18] Niss, M. "Cases of Assessment in Mathematics Education". Kluwer, Dordrecht. 1992.

[19] Niss, M. “Aspects of the nature and state of research in mathematips education”. Roskilde:Roskilde University IMFUFA. 1998.

[20] Perrenoud, P. “Construire des compétences des écoles”. Ginebra. 1998.

[21] Romero, S., Abad, P., Suárez, A.J. “Reflections on some myths in math education.An application with the use of the symbolic calculation system MAPLE”. Proceedings of CIEAEM-53.Verbania (Italia). 2001.

[22] Schoenfeld, A.H. “A discourse an methods en Journal for de Research en Mathematics Education”. Vol.6. 1994.

[23] Sierpinska, A., Kilpatrick, J.“Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity”. Dordrecht: KLuwer. 1998.