

Universidad de Huelva

Departamento de Ciencias Agroforestales



Simulación numérica del tiempo de escape en un vórtice tridimensional y de la sedimentación en vórtices bidimensionales periódicos para partículas pesadas

**Memoria para optar al grado de doctor
presentada por:**

Urbano Jesús Sánchez Domínguez

Fecha de lectura: 6 de octubre de 2006

Bajo la dirección de la doctora :

María José Moreno López

Huelva, 2010

ISBN: 978-84-92944-70-5

D.L.: H 105-2010



Universidad
de Huelva

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
DPTO. DE CIENCIAS AGROFORESTALES
ÁREA DE MECÁNICA DE FLUIDOS

TESIS DOCTORAL

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL TIEMPO DE ESCAPE
EN UN VÓRTICE TRIDIMENSIONAL Y DE LA
SEDIMENTACIÓN EN VÓRTICES BIDIMENSIONALES
PERIÓDICOS PARA PARTÍCULAS PESADAS

AUTOR:

URBANO JESÚS SÁNCHEZ DOMÍNGUEZ

DIRECTORA:

M^a JOSÉ MORENO LÓPEZ

HUELVA, 2005



TESI.
UHU
200
7

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
DPTO. DE CIENCIAS AGROFORESTALES
ÁREA DE MECÁNICA DE FLUIDOS

TESIS DOCTORAL

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL TIEMPO DE ESCAPE EN UN
VÓRTICE TRIDIMENSIONAL Y DE LA SEDIMENTACIÓN EN
VÓRTICES BIDIMENSIONALES PERIÓDICOS PARA
PARTÍCULAS PESADAS**

AUTOR:

URBANO JESÚS SÁNCHEZ DOMÍNGUEZ

Ingeniero Industrial por la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Sevilla

DIRECTORA:

M^a JOSÉ MORENO LÓPEZ

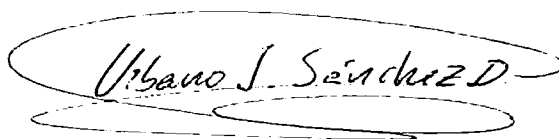
Doctora en Ciencias Químicas por la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid

HUELVA, 2005

Tesis Doctoral

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL TIEMPO DE ESCAPE EN UN VÓRTICE TRIDIMENSIONAL Y DE LA SEDIMENTACIÓN EN VÓRTICES BIDIMENSIONALES PERIÓDICOS PARA PARTÍCULAS PESADAS

Autor:

A handwritten signature in black ink, reading "Urbano J. Sánchez Domínguez", enclosed within a hand-drawn oval.

Fdo.: Urbano Jesús Sánchez Domínguez

Directora:

A handwritten signature in black ink, reading "Mª José Moreno López", with a long horizontal line extending to the left.

Fdo.: Mª José Moreno López

Tutor:

A handwritten signature in black ink, reading "Fernando Bastida Milián", with a long horizontal line extending to the right.

Fdo.: Fernando Bastida Milián

HUELVA, 2005

Quisiera expresar mi agradecimiento a la Dra. M^a José Moreno López, tanto por la dirección y supervisión de esta Tesis Doctoral como por el tiempo y el esfuerzo que personalmente ha dedicado para ayudar a dar forma a la memoria de la misma.

También quiero agradecer al Departamento de Ingeniería Energética y Mecánica de Fluidos de la Universidad de Sevilla y sobre todo al Grupo de Mecánica de Fluidos, por el apoyo y la colaboración recibida en la realización de esta Tesis Doctoral y por haberme permitido utilizar algunos de sus equipos informáticos. Estoy además especialmente en deuda, con el Dr. Javier Dávila Martín, con el que me inicié en la investigación en el interesante campo de los flujos bifásicos así como en la simulación numérica de flujos vorticales y turbulentos.

Finalmente, en el Departamento de Ciencias Agroforestales de la Universidad de Huelva le estoy agradecido a mi tutor de Tesis Dr. Fernando Bastida Milián y a D. Juan Antonio Díaz Fernández por facilitar en la medida de lo posible todos los trámites burocráticos.

Y también deseo mostrar mi agradecimiento a todas aquellas personas que de una manera u otra me han ayudado a la realización y término de esta Tesis.

A mi familia

RESUMEN

En esta Tesis Doctoral se investigan dos problemas fluidomecánicos en los que aparecen flujos bifásicos, con interacción entre pequeñas partículas pesadas y fluidos, dada la gran importancia que dicho tipo de flujo tiene tanto en el campo industrial como en el medio natural. Además se analizan diversos aspectos sobre flujos vorticales, cuyo estudio es de interés por el hecho generalmente asumido de considerar el movimiento turbulento como una superposición de vórtices. Lógicamente cualquier avance en relación con la dinámica de los flujos vorticales deviene en una mejor comprensión de la turbulencia. Los modelos de vórtices escogidos son el Vórtice Rankine y el Vórtice Kaufmann, obteniéndose con ambos unos resultados cualitativamente análogos.

En primer lugar se ha analizado el tiempo que tardan en escapar de un vórtice tridimensional pequeñas partículas pesadas (Tiempo de Escape T_e^*). Se han generalizado y ampliado los resultados preexistentes para el caso de un vórtice bidimensional al caso tridimensional. En este sentido se ha obtenido primeramente el Tiempo de Escape mediante simulación numérica, determinando el efecto que tienen los diversos parámetros y variables de que depende y después se ha desarrollado una fórmula teórica para el mismo, comprobando su validez numéricamente. Así se ha comprobado que:

- El Tiempo de Escape disminuye monótonamente al aumentar la velocidad terminal de caída en fluido en reposo.
- El Tiempo de Escape tiende a disminuir, como era lógico esperar, al aumentar la inercia de las partículas. Sin embargo, esa disminución no es monótona sino que aparecen una serie de oscilaciones. La explicación a este hecho se encuentra en que cuando T_e^* aumenta con la inercia de las partículas es debido a que la partícula, al dar la última vuelta alrededor del eje del vórtice pasa muy cerca de uno de los puntos de equilibrio del

sistema dinámico definido por las ecuaciones de movimiento, invirtiendo mucho tiempo en pasar por esa zona.

- Mientras mayor es la inclinación del vórtice, mayor es el Tiempo de Escape, ya que la partícula describe una trayectoria casi helicoidal alrededor del mismo, dando muchas vueltas.
- Se ha obtenido para el Tiempo de Escape la siguiente fórmula teórica:

$$T_e^* = K_e \frac{\Gamma^{*2}}{\tau_p^* V_t^{*4}}$$

donde K_e es una constante empírica adimensional independiente de los parámetros del problema denominada *Constante de Tiempo de Escape*, Γ^* es la circulación del vórtice, τ_p^* es el tiempo de respuesta viscosa de las partículas y V_t^* es la componente de la velocidad terminal que no es paralela al eje del vórtice. La simulación numérica ha corroborado la validez de esta fórmula para partículas suficientemente pequeñas.

- En esta primera parte de la investigación también se ha obtenido numéricamente la velocidad media de sedimentación $\langle V_z \rangle$ para partículas situadas inicialmente en la región de captura del vórtice y se ha determinado su relación con el Tiempo de Escape. Se ha comprobado que la representación gráfica de $\langle V_z \rangle$ frente al Tiempo de Escape Promedio $\langle T_e^* \rangle$ es, en escala logarítmica, una línea recta para partículas suficientemente pequeñas. Ello ha permitido determinar la siguiente relación entre ambas magnitudes:

$$\langle V_z \rangle \sim \text{constante} \langle T_e^* \rangle^{-1/5}$$

donde la constante depende de la circulación del vórtice.

En la segunda parte de la Tesis se analiza la sedimentación de partículas en presencia de un campo fluido no considerado hasta ahora. Dicho campo fluido consiste en una disposición bidimensional de vórtices que se repiten periódicamente. Se han investigado dos situaciones diferentes: primero con todos

los vórtices girando en el mismo sentido y después con cada par de vórtices adyacentes con sentidos de giro alternados.

En el caso en que todos los vórtices giran en el mismo sentido se han obtenido los siguientes resultados:

- El análisis de las trayectorias de las partículas —obtenidas numéricamente— revela dos comportamientos diferenciados en función de la inercia de las mismas. Para valores pequeños o moderados de la inercia de las partículas, éstas acaban sedimentando en la línea media vertical situada entre dos hileras verticales de vórtices. Sin embargo para las partículas con inercia suficientemente grande se ha observado que su trayectoria siempre va a parar a unas líneas aisladas que separan dos tipos de regiones, por un lado unas zonas de baja vorticidad del flujo en la que no pueden entrar las partículas que inicialmente estaban fuera de ellas y por otro lado unas regiones vacías en las que no se encontrará ninguna partícula al cabo del tiempo. La amplitud de esos dos tipos de regiones depende de la inercia de las partículas; mientras mayor es el valor de la inercia, mayor es la anchura de las franjas donde la influencia de la vorticidad es poco importante y menor es la anchura de las regiones vacías, ya que las partículas se verán menos afectadas por la acción del campo de flujo.

Este resultado es trascendente por su posibilidad de aplicación en procesos industriales o naturales en los que se precise clasificar partículas de diferentes características o en los que sea necesario separar las partículas del fluido, ya que sugiere la materialización real de un dispositivo que reproduzca la disposición de los vórtices, pudiendo conocerse la posición final a la que irán a caer las partículas según su inercia.

- Se ha analizado el incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo; sólo para valores pequeños de la velocidad terminal de caída las partículas sedimentan ligeramente más rápido en este campo de flujo que en fluido en reposo, no existiendo

prácticamente diferencia para valores mayores de la velocidad terminal. También se ha obtenido la velocidad media de sedimentación en función de la inercia de las partículas. Los resultados tienen cierto parecido con los conocidos para flujos turbulentos, pero no son lo bastante aproximados como para ser utilizados en algún tipo de modelo de flujo turbulento.

En el caso en que cada par de vórtices adyacentes giran con sentidos alternados, los resultados han sido los que se exponen a continuación:

- El análisis de las trayectorias de las partículas muestra que para pequeños valores de inercia siguen trayectorias próximas a la vertical pero con oscilaciones debidas a la acción de los vórtices y que para valores mayores de inercia todas las partículas van a terminar en la línea media situada en la zona central entre dos filas verticales de vórtices; por tanto se agrupan en el “canal” comprendido entre dos regiones vecinas de vorticidad.
- Del cálculo de la velocidad media de sedimentación se deduce que las partículas -para una velocidad terminal de caída baja- sedimentan en este campo de flujo mucho más rápidamente que en fluido en reposo, por lo que es útil para aquellos casos en que se requiera acelerar la sedimentación de partículas suspendidas en un fluido.
- El estudio de la influencia de la inercia de las partículas en la velocidad media de sedimentación proporciona unos resultados muy similares a los conocidos para turbulencia isótropa. De ello se deduce que este campo de flujo puede ser una buena aproximación del tipo de estructuras vorticales presentes en los flujos turbulentos responsables de aumentar o disminuir la velocidad media de sedimentación de partículas. Por tanto el flujo generado con esta disposición de vórtices puede servir de fundamento para el desarrollo de un modelo Lagrangiano de sedimentación de partículas en flujos turbulentos acoplándolo con algún modelo ya existente, como la Simulación Cinemática, que ha dado buenos resultados para el caso de la dispersión de partículas.

ÍNDICE

GENERALIDADES	1
1. PLANTEAMIENTO DE LA TESIS	3
1.1. Introducción	3
1.2. Antecedentes y objetivos	9
1.3. Estructura del Trabajo de Tesis	13
 Bloque I: FUNDAMENTO TEÓRICO	 15
2. ECUACIONES BÁSICAS DE LA DINÁMICA DE FLUIDOS	17
2.1. Ecuación de continuidad	17
2.2. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento	18
2.3. Ecuación de la vorticidad	21
 3. TEORÍA BÁSICA DE LA TURBULENCIA	 23
3.1. Conceptos básicos sobre corrientes turbulentas	23
3.2. Turbulencia bidimensional	28
3.3. Formulación estadística	31
3.3.1. Definiciones básicas de magnitudes estadísticas	31
Promedio	31
Fluctuaciones	32
Función de densidad de probabilidad	33
Correlaciones	34
Espectro de una señal	37
3.3.2. La ecuación de Reynolds	39

3.3.3. Correlaciones de velocidad y escalas de la turbulencia	44
Escala integral de tiempo	44
Escala integral de espacio	45
Microescala de Taylor	45
3.3.4. Espectro de energía	46
Espectro de energía unidimensional	46
Espectro de energía tridimensional	49
3.4. Teoría de Kraichnan. Cascada de enstrofia y cascada inversa de energía	63
3.5. Modelos numéricos de simulación de flujos turbulentos	65
3.5.1. Simulación numérica directa	65
3.5.2. Large-Eddy Simulation	67
3.5.3. Generación estocástica	69
3.5.4. Simulación cinemática	72
4. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LOS VÓRTICES	77
4.1. Vector vorticidad	77
4.2. Campo de velocidades inducido por una distribución de vorticidad	78
4.3. Circulación del vector velocidad y ecuación de la vorticidad	79
4.4. Líneas y tubos de vorticidad	81
4.5. Leyes de Helmholtz	82
4.6. Teorema de Bjerkness-Kelvin	83
4.7. Vórtices	85
4.8. Estructura de un vórtice viscoso	91
4.9. Modelización de algunos tipos de vórtices	94
4.9.1. Vórtice de Kirchhoff	95
4.9.2. Vórtice de Lamb-Oseen	96
4.9.3. Vórtice de Burgers-Rott	97
4.9.4. Vórtices de Kuo	98
4.9.5. Vórtice Rankine	99
4.9.6. Vórtice de Kaufmann	100
4.9.7. Vórtice de Batchelor	101
4.9.8. Vórtices de Stuart	102

4.9.9. Vórtice de Moore-Saffman	103
4.9.10. Vórtice de Sullivan	103
4.9.11. Vórtice de Kida	104
4.9.12. Vórtices de Vattistas	105
4.10. Interacción entre vórtices	106
4.11. Comparación de vórtices	108
 Bloque II: METODOLOGÍA	 111
 5. CAMPO DE VELOCIDADES	 113
5.1. Vórtice tridimensional	113
5.2. Vórtices objeto de estudio	114
5.3. Campo tridimensional de velocidades de los vórtices a estudiar	115
 6. ECUACIONES DE MOVIMIENTO	 117
6.1. Ecuaciones de movimiento de pequeñas partículas en fluidos	117
6.2. Sedimentación de partículas en el seno de fluidos en reposo	128
6.2.1. Ley de Stokes	128
6.2.2. Correlación de Clift et al. para generalizar la Ley de Stokes a altos números de Reynolds	134
6.2.3. Aproximación de Oseen para generalizar la Ley de Stokes a distancias grandes de la partícula	135
6.2.4. Comparación de la Ley de Stokes con la correlación de Clift et al. y la corrección de Oseen	138
6.2.5. Coeficiente de resistencia aplicado en la Tesis	139
6.3. Velocidad de sedimentación	140
6.4. Adimensionalización de las ecuaciones de movimiento	143
 7. METODOLOGÍA APLICADA	 149

7.1. Metodología aplicada para el análisis del Tiempo de Escape y de la Velocidad media de Sedimentación de partículas de un vórtice tridimensional	151
7.1.1. Metodología para el análisis del Tiempo de Escape	151
7.1.2. Metodología el análisis de la velocidad media de sedimentación	154
7.2. Metodología aplicada para el análisis de la sedimentación de partículas en vórtices bidimensionales periódicos	156
7.3. Material de investigación	158
 Bloque III RESULTADOS	 159
 8. VÓRTICE RANKINE	 161
8.1. Análisis del Tiempo de Escape de partículas de un vórtice tridimensional	161
8.1.1. Obtención de las trayectorias de partículas	162
Partículas sin inercia	164
Partículas con inercia	167
8.1.2. Cálculo de los puntos de equilibrio y deducción de la longitud característica	173
8.1.3. Trayectorias límite	179
8.1.4. Formulación del criterio de escape	180
8.1.5. Obtención numérica del Tiempo de Escape y análisis de la influencia de variables	184
8.1.6. Obtención analítica de la fórmula del Tiempo de Escape	189
8.1.7. Comparación de los resultados numéricos con la fórmula teórica. Validez de la fórmula	192
Determinación de la Constante de tiempo de escape (Ke)	201
Validez de la fórmula	207

8.1.8. Aplicación de la fórmula del Tiempo de Escape a un caso práctico	212
8.2. Análisis de la velocidad media de sedimentación de partículas de un vórtice tridimensional	216
8.2.1. Mallado de partículas	217
8.2.2. Cálculo numérico de la velocidad media de sedimentación	217
8.2.3. Representación gráfica de la velocidad media de sedimentación frente al Tiempo Escape promedio	219
8.2.4. Obtención de la relación entre la velocidad media de sedimentación y el Tiempo Escape promedio. Relación numérica	221
8.3. Análisis de la sedimentación de partículas en vórtices bidimensionales periódicos	222
8.3.1. Simulación de vórtices girando en el mismo sentido	223
8.3.1.1. Análisis de trayectorias de partículas	224
Partículas sin inercia	224
Partículas con inercia	226
8.3.1.2. Investigación del incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo	237
8.3.1.3. Análisis de la influencia de la inercia de las partículas	240
8.3.2. Simulación de vórtices girando con sentidos de giro alternados	242
8.3.2.1. Análisis de trayectorias de partículas	243
Partículas sin inercia	243
Partículas con inercia	245
8.3.2.2. Investigación del incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo	253
8.3.2.3. Análisis de la influencia de la inercia de las partículas	255

8.3.2.4.	Posibilidad de aplicación a Modelo Lagrangiano de sedimentación y dispersión de partículas en flujos turbulentos	256
9.	VÓRTICE KAUFMANN	257
9.1.	Análisis del Tiempo de Escape de partículas de un vórtice tridimensional	257
9.1.1.	Obtención de las trayectorias de partículas	258
	Partículas sin inercia	258
	Partículas con inercia	260
9.1.2.	Cálculo de los puntos de equilibrio y deducción de la longitud característica	262
9.1.3.	Trayectorias límite	267
9.1.4.	Formulación del criterio de escape	268
9.1.5.	Obtención numérica del Tiempo de Escape y análisis de la influencia de variables	269
9.1.6.	Obtención analítica de la fórmula del Tiempo de Escape	273
9.1.7.	Comparación de los resultados numéricos con la fórmula teórica. Validez de la fórmula	275
	Determinación de la Constante de tiempo de escape (Ke)	279
	Validez de la fórmula	283
9.2.	Análisis de la velocidad media de sedimentación de partículas de un vórtice tridimensional	287
9.2.1.	Representación gráfica de la velocidad media de sedimentación frente al Tiempo de Escape promedio	288
9.2.2.	Obtención de la relación entre la velocidad media de sedimentación y el Tiempo Escape promedio. Relación numérica	289
9.3.	Análisis de la sedimentación de partículas en vórtices bidimensionales periódicos	289

9.3.1.	Simulación de vórtices girando en el mismo sentido	290
9.3.1.1.	Análisis de trayectorias de partículas	290
	Partículas sin inercia	290
	Partículas con inercia	292
9.3.1.2.	Investigación del incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo	298
9.3.1.3.	Análisis de la influencia de la inercia de las partículas	300
9.3.2.	Simulación de vórtices girando con sentidos de giro alternados	302
9.3.2.1.	Análisis de trayectorias de partículas	302
	Partículas sin inercia	302
	Partículas con inercia	304
9.3.2.2.	Investigación del incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo	311
9.3.2.3.	Análisis de la influencia de la inercia de las partículas	313
9.3.2.4.	Posibilidad de aplicación a Modelo Lagrangiano de sedimentación y dispersión de partículas en flujos turbulentos	314
10.	COMPARACIÓN ENTRE LOS VÓRTICES RANKINE Y KAUFMANN	317
10.1.	Análisis del Tiempo de Escape de partículas de un vórtice tridimensional	317
10.1.1.	Trayectorias de partículas	317
10.1.2.	Puntos de equilibrio y longitud característica	318
10.1.3.	Trayectorias límite	318
10.1.4.	Obtención numérica del Tiempo de Escape y análisis de la influencia de variables	319
10.1.5.	Fórmula del Tiempo de Escape	322

10.2	Velocidad media de sedimentación de partículas de un vórtice tridimensional	325
10.3	Análisis de la sedimentación de partículas en vórtices bidimensionales periódicos	326
10.3.1.	Vórtices en el mismo sentido	326
10.3.1.1.	Trayectorias de partículas	326
10.3.1.2.	Incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo	327
10.3.1.3.	Influencia de la inercia de las partículas	329
10.3.2.	Vórtices girando con sentidos de giro alternados	330
10.3.2.1.	Trayectorias de partículas	330
10.3.2.2.	Incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo	331
10.3.2.3.	Influencia de la inercia de las partículas	332
BloqueIV: CONCLUSIONES		335
11.	CONCLUSIONES FINALES	337
11.1.	Tiempo de escape	339
11.2.	Sedimentación de partículas pesadas en una disposición periódica bidimensional de vórtices	343
11.2.1.	Vórtices girando en el mismo sentido	343
11.2.2.	Vórtices girando con sentidos alternados	346

Bloque V INVESTIGACIONES FUTURAS	349
12. PROPUESTA DE INVESTIGACIONES FUTURAS	351
12.1. Tiempo de escape	351
12.2. Sedimentación de partículas en vórtices periódicos	352
ANEXOS	355
ANEXO I: Integración Numérica	357
I.1. Método de Euler	360
I.2. Método de Runge-Kutta	361
ANEXO II: Subrutinas informáticas	367
LISTADOS	374
ligtravoin_s_I	374
ligtravoin	377
tescapeiner	381
Kedia	385
dtmedia	391
Inclivel	398
trahormuchos_s_I	406
trahormuchos	409
st_vel_hormuchos	413
altertrahormuchos_s_I	418
altertrahormuchos	422
alter_stvel	427
Función rank	432
Función rankine	433
Función kauf	434
Función kaufmann	435
Funcs3.c	436
Funcs3.h	440
Rgk_vect.c	441

SIMBOLOGÍA	445
ANEXO III: Listado de figuras	447
ANEXO IV: Listado de tablas	463
 FUENTES BIBLIOGRÁFICAS	 471
 BIBLIOGRAFÍA	 473
Bibliografía por orden de mención	473
Bibliografía por orden alfabético	488
 RECURSOS ELECTRÓNICOS	 514
Recursos electrónicos por orden de mención	514
Otros recursos electrónicos	515
 SIGLAS Y ACRÓNIMOS	 519

GENERALIDADES

1. PLANTEAMIENTO DE LA TESIS

1.1. Introducción

La presente investigación se enmarca dentro de la Mecánica de Fluidos, en el campo de la simulación numérica para vórtices y su interacción con partículas, de modo que se obtengan conclusiones que ayuden a la comprensión de los movimientos turbulentos.

El movimiento de los fluidos se puede clasificar en laminar o turbulento. En el *flujo laminar*, el fluido se mueve en láminas que se deslizan unas sobre otras suavemente. La teoría del flujo laminar está bien desarrollada y se ha obtenido un importante número de soluciones mediante métodos analíticos. En el *flujo turbulento*, en cambio, el movimiento de las partículas fluidas es muy errático produciéndose un intenso intercambio transversal de cantidad de movimiento. Existen componentes de la velocidad en direcciones transversales a las del movimiento principal que no son constantes sino que fluctúan aleatoriamente, lo cual dificulta enormemente el estudio analítico de dichos flujos turbulentos.

La turbulencia aparece en multitud de situaciones, tanto en el entorno natural como en muchos procesos industriales, siendo la más común y a la vez complicada forma de movimiento de los líquidos y gases reales. En la naturaleza puede observarse en los océanos y en la atmósfera -siendo su estudio vital en la predicción meteorológica-, en los flujos marinos y fluviales, en el clima, en el estudio de la contaminación, etc. También hay que considerar la turbulencia en el diseño y funcionamiento de aviones, cohetes, ventiladores, turbinas... Por tanto, es evidente la importancia que tiene el estudio e investigación de este fenómeno. Sin embargo, la enorme complejidad asociada a los flujos turbulentos dificulta en gran medida su estudio. La dificultad fundamental reside en el hecho de que las ecuaciones de Reynolds, empleadas para describir el movimiento turbulento, no forman un sistema cerrado (*problema de cierre de la turbulencia*), por lo que no

pueden ser resueltas sin el uso de hipótesis adicionales o de datos experimentales. En los últimos años, merced a la mayor potencia de los ordenadores, han alcanzado un gran desarrollo las simulaciones y los métodos numéricos de resolución de las ecuaciones del movimiento.

Aunque a lo largo de la tesis se describirá con más detalle la teoría básica de la turbulencia, conviene describir en este momento algunos de sus rasgos fundamentales. En los flujos turbulentos las magnitudes fluidomecánicas fluctúan aleatoriamente alrededor de unos valores medios experimentando oscilaciones irregulares de diversas frecuencias, sin embargo, un análisis más profundo de la turbulencia muestra en ella una cuasipermanencia y una cuasiperiodicidad tanto en el tiempo como en el espacio. Por tanto, la **turbulencia** consiste en “*la superposición de muchos movimientos cuasiperiódicos*” y ello lleva a asumir *el movimiento turbulento como una superposición de vórtices o torbellinos de distintos tamaños, vorticidades y frecuencias*.

Resulta obvio que un primer paso para avanzar en el conocimiento de la turbulencia pasa por un adecuado estudio y comprensión de la dinámica de los vórtices o torbellinos de los que está compuesta, de ahí el objetivo fundamental de este trabajo: investigar algunos aspectos relevantes de los vórtices, sobre todo aquellos relacionados con su interacción con partículas pesadas en movimiento, y aún más cuando los recientes estudios de **Dávila & Hunt** (2001) [1] sobre la interacción entre la turbulencia y las partículas muestran que en un fluido en movimiento turbulento la dinámica de la partícula puede estudiarse a partir de un modelo simplificado que consiste en que desde el punto de vista de las partículas la turbulencia puede considerarse como un conjunto de vórtices aislados.

Puesto que las corrientes turbulentas están compuestas por una superposición de vórtices de diferentes tamaños, surge el concepto de *escala de turbulencia*. La escala más grande, correspondiente a los torbellinos de mayor tamaño está limitada por el tamaño de los aparatos que producen el flujo turbulento, o por el tamaño de la región donde esté confinado el fluido. El límite

inferior, pequeña escala, está determinado por los efectos de la viscosidad del fluido. Hay una transferencia continua de energía cinética desde las escalas grandes a las pequeñas, donde es disipada por efecto de la viscosidad.

Además del estudio de **Dávila & Hunt** (2001) [1], los estudios de **Yule** (1980) [2], **Chung & Troutt** (1988)[3] y **Fung** (1993) [4], (1997) [5] muestran que las estructuras de flujo más importantes en conexión con partículas suspendidas son los vórtices, porque ellos son capaces de atrapar partículas temporalmente y transportarlas a considerables distancias y eventualmente despedirlas cuando empiezan a decaer. Simulaciones numéricas de turbulencia, como las realizadas por **Ruestsh & Maxey** (1991) [6], **Vincent & Meneguzzi** (1991) [7] y otros ponen de manifiesto como en las pequeñas escalas de muchos flujos turbulentos aparece una estructura organizada en forma de vórtices alargados y como estas estructuras tienden a persistir durante un considerable periodo de tiempo. Estas características han sido confirmadas también por las simulaciones numéricas directas de **Jiménez et al.** (1993) [8] y también **Wang & Maxey** (1993) [9] mostraron que el movimiento de las partículas y en particular el rango de sedimentación de las partículas depende fuertemente de las estructuras vorticales de pequeña escala del campo de flujo turbulento, es decir, la dinámica del flujo de pequeña escala juega un papel significativo en la interacción entre partículas y turbulencia, siendo las estructuras vorticales de capital importancia en estas pequeñas escalas, lo cual pone de manifiesto la necesidad de una adecuada comprensión de la dinámica de los vórtices.

El estudio de los VÓRTICES es importante por ser el “*fundamento*” de la turbulencia y por sí mismos. Por ejemplo, las áreas de alta y baja presión en la atmósfera son vórtices tridimensionales, como sucede en la zona ártica de la estratosfera de la tierra (Figura 1-1). Un vórtice de gran magnitud es la gran mancha roja de Júpiter (Figura 1-2) que es un tipo de ciclón en dicho planeta. Otros vórtices son la gran mancha oscura de Neptuno (Figura 1-3) y los huracanes terrestres como el Gladys (Figura 1-4) y el Ava (Figura 1-5).

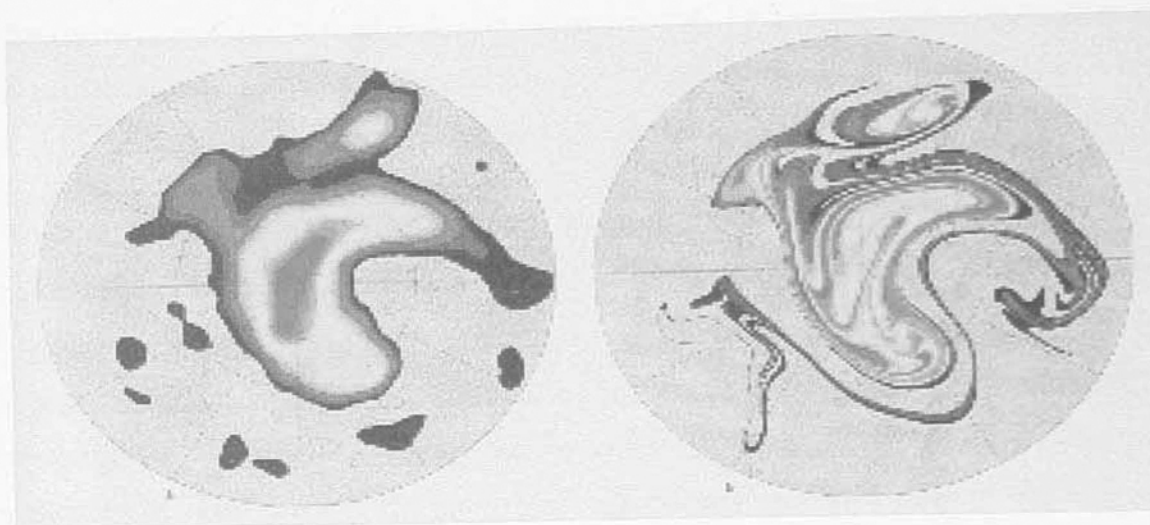


Figura 1-1: Vórtice polar en la zona ártica de la estratosfera de la tierra, observado el 27 de Enero de 1992.



Figura 1-2: Gran mancha roja de Júpiter. Fotografía realizada por el Jet Propulsion Laboratory, Pasadena (USA).



Figura 1-3: Gran mancha oscura de Neptuno. Fotografía tomada por el Voyager 2 en Agosto de 1989.

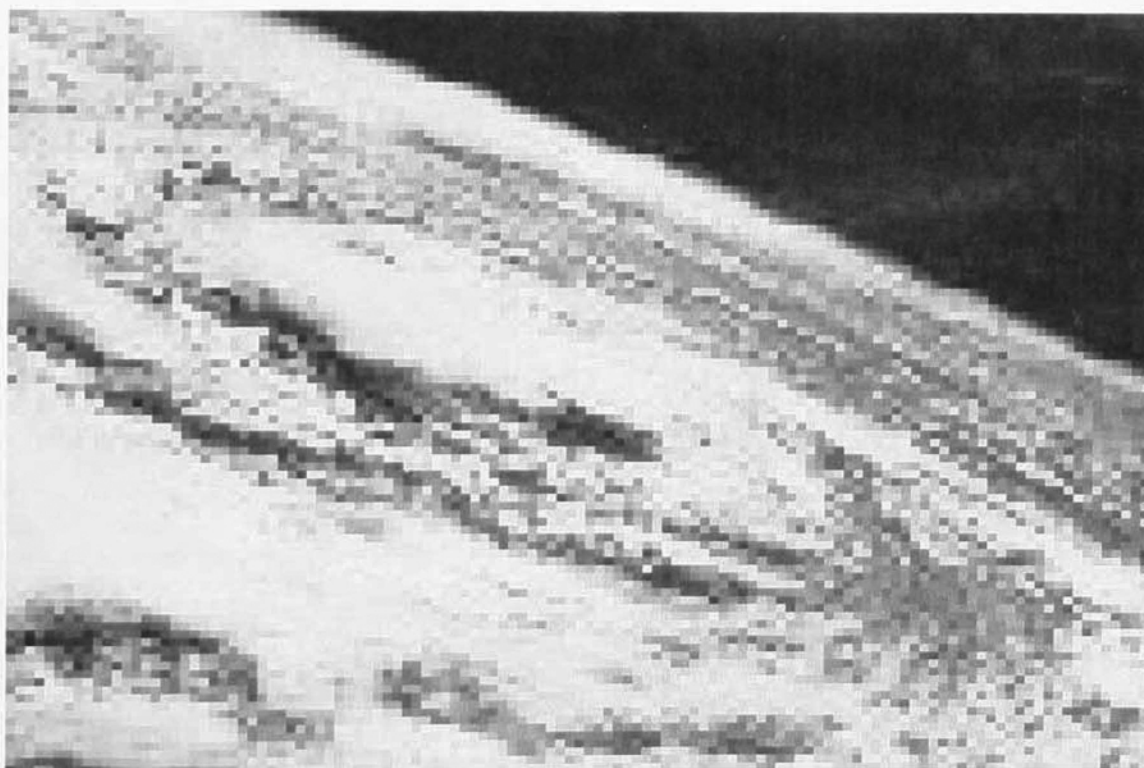


Figura 1-4: Huracán tropical Gladys en Octubre 1968, observado por el Apolo 7.



Figura 1-5: Huracán Ava, fotografía tomada por el satélite NOAA el 7 de Junio de 1973.

Para terminar con este preámbulo, hay que volver a insistir en la importancia que tiene el estudio de flujos bifásicos con interacción entre partículas y fluidos, con resultados aplicables a dispersión y sedimentación de partículas. Por ejemplo, el rango de sedimentación por la acción de la gravedad de partículas más densas que el fluido que las rodea es de gran importancia en los campos de la Meteorología, la Ingeniería o la Oceanografía, porque gobierna los tiempos de residencia de las partículas de polvo procedentes de la erosión del viento o de la contaminación producida por el hombre. También afecta a la formación de gotas de lluvia o a la formación de sedimentos en estuarios y ríos.

Con la exposición anterior queda plenamente justificado el estudio de diversos aspectos de la dinámica de los vórtices en combinación con el movimiento de partículas desarrollado en este trabajo.

1.2. Antecedentes y objetivos

Es algo sobradamente conocido que pequeñas partículas pesadas pueden permanecer dentro de un vórtice durante mucho tiempo. Situaciones como ésta aparecen por ejemplo en flujos turbulentos donde existen tubos alargados de intensa vorticidad que tienen un tiempo de vida promedio del orden de la escala integral de tiempo (Vincent & Meneguzzi, 1994) [10].

En este contexto, el primer propósito de la Tesis es investigar el tiempo que las partículas permanecen en el interior de un vórtice tridimensional hasta que escapen de él, para ello hay que analizar la dependencia de dicho tiempo - denominado *tiempo de escape*- con los diversos parámetros que gobiernan el problema e incluso obtener una fórmula o escalado del mismo. También se pretende analizar la sedimentación de las partículas situadas inicialmente en la región de captura del vórtice y su relación con el tiempo de escape. Con ello cabe esperar que los resultados obtenidos sean aplicables a la interacción entre las estructuras de pequeña escala del flujo turbulento y el movimiento de partículas suspendidas.

El antecedente de este primer objetivo está en los trabajos de Fung (2000) [11], que investigó los parámetros de que depende el tiempo de escape de una partícula pesada en el caso de un vórtice bidimensional. En dicho trabajo había cuestiones que hacen que no sea completo ni aplicable a un caso general, se centra en el caso particular de un vórtice bidimensional, no se define con exactitud el criterio según el cual se considera que una partícula ha escapado del vórtice, no obtuvo ninguna formulación del tiempo de escape y no investigó la sedimentación de partículas. Por tanto, este trabajo completaría y generalizaría esos resultados.

El segundo propósito a alcanzar en esta Tesis consiste en estudiar la sedimentación de pequeñas partículas pesadas en una distribución bidimensional de vórtices que se repiten infinitamente de modo periódico en dos casos: en primer lugar con todos los vórtices girando en el mismo sentido y en segundo lugar con alternancia de sentidos de giro para cada dos vórtices consecutivos, tanto en dirección horizontal como vertical. En ambos casos se trata de comprobar si el grado de sedimentación es mayor que en el caso de un fluido en reposo y de observar la existencia de regiones preferentes de sedimentación analizando las posibles analogías y diferencias con otros campos de flujo.

El antecedente más directo del segundo objetivo se encuentra tanto en los trabajos de **Maxey & Corrsin** (1986) [12] que investigaron la sedimentación gravitacional de partículas de aerosol en un campo de flujo celular orientado periódicamente como en los trabajos de **Dávila & Hunt** (2001) [1] que estudiaron la sedimentación de partículas en presencia de un vórtice bidimensional comparando los resultados obtenidos mediante simulación numérica con los obtenidos mediante un análisis asintótico. Maxey & Corrsin comprobaron que dependiendo de la inercia de las partículas no se producía suspensión permanente de las partículas en el flujo, y además, éstas se acumulaban en ciertos caminos aislados y sedimentan más rápidamente que en fluido en reposo; también obtuvieron que la velocidad media de sedimentación $\langle V_z \rangle$ es mayor que la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_f) en un amplio rango. En el campo de flujo que utilizaron, cada vórtice ocupa prácticamente toda la celda en la que está incluido; mientras que en este trabajo los vórtices tienen un radio mucho más pequeño que la distancia que los separa, por lo que estaría situado en el centro de cada celda hipotética. Otros trabajos previos en flujos celulares son los de **Stommel** (1949) [13] y **Woods & Jenkins** (1973) [14] en campos de flujo celular con orientación fija. Stommel despreció la inercia de la partícula y estudió la sedimentación gravitacional y probó que algunas partículas deben permanecer suspendidas indefinidamente. El flujo que él utilizó aparece por ejemplo en la convección térmica y en un fenómeno natural conocido como *Circulación de*

Langmuir, consistente en que el viento causa en ríos y lagos la formación de celdas de agua rotante que hacen que aparezca en la superficie del agua unas franjas paralelas con partículas y burbujas. Stommel aplicó su análisis en el contexto de la suspensión de plancton por las celdas de Langmuir. Woods & Jenkins estudiaron la sedimentación en estuarios con algunas variaciones en la ecuación de movimiento (como una ley de arrastre no lineal) y comprobaron algún grado de sedimentación de partículas y notaron que las partículas que no fueron suspendidas sedimentaron más rápidamente que un fluido en reposo. Por último se mencionan otros estudios que tienen relación con el tema. Según **Reeks** (1977) [15] la velocidad media de sedimentación $\langle V_z \rangle$ es igual a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_t) si la velocidad del flujo es tratada como un campo aleatorio estocástico. **Maxey** (1987) [16] analizó un campo de flujo cinemático generado por modos de Fourier aleatorios para simular numéricamente el movimiento de partículas de aerosol en un flujo aleatorio, isótropo y homogéneo obteniendo que para inercia de las partículas finitas la velocidad media de sedimentación $\langle V_z \rangle$ es un 10 % mayor que la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_t), lo cual verificó posteriormente mediante un análisis asintótico. Supuso que ello es debido a la *inclinación inercial*, que causa que las partículas se acumulen en regiones de alta tensión o baja vorticidad del flujo. La acumulación preferencial observada fue confirmada también por **Squires & Eaton** (1991) [17] mediante simulación numérica directa. **Yeh & Lei** (1991) [18] emplearon la técnica de *Large-Eddy Simulation* para turbulencia isótropa homogénea con una relación empírica dependiente del número de Reynolds para estimar la fuerza de arrastre de las partículas, obteniendo valores para la velocidad media de sedimentación $\langle V_z \rangle$ un 5 % mayores que el de la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_t). La acumulación local también ha sido observada repetidamente en capas de cortadura, estratos de mezcla planos, etc., que tienen una característica común que es que la escala que gobierna las fluctuaciones de velocidad del fluido es la misma que la escala para la enstrofia. **She, Jackson & Orszag** (1990) [19], **Brasseur & Lin** (1991) [20] y **Ruetsch & Maxey** (1991, 1992) [6, 21] concluyeron que la vorticidad más intensa en un flujo turbulento

tiende a formar estructuras vorticales localizadas, coherentes en las escalas del rango de disipación, lo cual sugiere que la dinámica del flujo a pequeñas escalas jugará un papel significativo en la acumulación local de partículas, que probablemente está más influenciada por las interacciones de las partículas con la vorticidad del fluido. Wang & Maxey (1993) [9] obtuvieron valores de $\langle V_z \rangle$ entre un 40 y un 50 % mayores que V_t , es decir, valores mucho mayores que en estudios previos, lo cual se explica porque las interacciones dinámicas de partículas con estructuras de torbellinos coherentes son mucho más fuertes que en el caso de campo de flujo aleatorio. También observaron que el máximo incremento de $\langle V_z \rangle$ tiene lugar cuando los parámetros de las partículas se han hecho comparables a las escalas de Kolmogorov del flujo, lo que indica que la dinámica del flujo de pequeña escala juega un significativo papel en ciertos aspectos del transporte de partículas en turbulencia completamente desarrollada.

Por tanto, este segundo objetivo plantea el análisis de la sedimentación de partículas pesadas en un campo de flujo que no ha sido considerado hasta ahora. Se tratará de determinar la existencia de regiones de acumulación de partículas y de ver la diferencia que pueda tener la velocidad media de sedimentación respecto a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo. Sin embargo aún se pretende avanzar un paso más: los modelos actuales de sedimentación de partículas no reproducen los resultados experimentales en turbulencia homogénea (Tesis Doctoral de Srdic, Universidad del Estado de Arizona, 1999) [22], ya que al no tener estructuras de vorticidad adecuadas no modifica la velocidad media de sedimentación de las partículas, mientras que algunos modelos lagrangianos de dispersión de dos partículas sí reproducen las características principales de tal problema. Es el caso de las *Simulaciones Cinemáticas* (Fung *et al.*, Journal of Fluid Mechanics, 1992 [23]; Malik & Vassilicos, Phys. Fluids, 1999 [24]). Este hecho sugiere la idea de desarrollar un modelo lagrangiano para la sedimentación de partículas. La razón por la que la simulación cinemática no reproduce -según se acaba de comentar- correctamente el comportamiento de la turbulencia y concretamente la sedimentación de partículas parece ser que es que el tipo de

estructuras vorticales que incrementan o hacen decrecer la velocidad de sedimentación promedio no están presentes en ese tipo de flujos. No obstante, la simulación cinemática permite la posibilidad de añadir fácilmente algunas estructuras elementales, por lo que es posible elegir algún tipo de estructura para obtener una dependencia de $\langle V_z \rangle$ con los parámetros del problema similar a la encontrada en flujos turbulentos. De este modo, mediante la estructura utilizada en este trabajo consistente -como ya se ha mencionado- en la utilización de estructuras coherentes del tipo tubo de vorticidad y más concretamente en una disposición bidimensional de vórtices que se repiten de un modo periódico y cuyos radios son mucho más pequeños que la distancia entre ellos, se pretende sentar las bases y dar el primer paso para un posterior desarrollo de un modelo lagrangiano para la sedimentación de partículas en flujos turbulentos. Mediante el flujo artificial construido de esta manera se intenta comparar el comportamiento con el obtenido en turbulencia real obtenido de la experimentación o de simulaciones directas.

1.3. Estructura del Trabajo de Tesis

Además de este *capítulo 1* inicial, de carácter general, en el que se expone la introducción, antecedentes, objetivos y estructura del trabajo; la memoria de la Tesis se ha estructurado en cinco bloques.

En el primer bloque (Fundamento Teórico) se recopila la teoría básica relacionada con las líneas que se estudian en esta investigación. Primero se introducen los conceptos y ecuaciones básicas de la dinámica de fluidos (*capítulo 2*), después se recogen los aspectos teóricos fundamentales de la turbulencia (*capítulo 3*) y finalmente (*capítulo 4*) se exponen las nociones teóricas existentes sobre vórtices.

El segundo bloque (Metodología) describe el campo de velocidades (*capítulo 5*), las ecuaciones de movimiento con la adimensionalización de las

mismas (*capítulo 6*) y la metodología aplicada en la investigación de la Tesis (*capítulo 7*) junto con el material para llevar a cabo la misma.

En el tercer bloque (Resultados) se presentan los resultados obtenidos sobre el Tiempo de Escape y la velocidad media de sedimentación de partículas situadas inicialmente en el interior de un vórtice tridimensional y sobre la sedimentación de partículas en una disposición bidimensional de vórtices periódicos. Concretamente, se exponen en primer lugar los resultados obtenidos para el caso de un vórtice Rankine (*capítulo 8*), después los obtenidos para el vórtice Kaufmann (*capítulo 9*) y por último una comparación entre los resultados obtenidos con ambos modelos de vórtices (*capítulo 10*).

En el cuarto bloque se exponen las conclusiones que se pueden deducir de los resultados obtenidos (*capítulo 11*).

Finalmente en el quinto bloque se plantea una propuesta de trabajos futuros que pudieran continuar la línea trazada en esta Tesis (*capítulo 12*).

Tras la parte principal del trabajo, se incluyen unos anexos con una breve exposición sobre métodos numéricos de integración, las subrutinas informáticas implementadas, un listado de figuras y un listado de tablas finalizando la Tesis con una recopilación actualizada de fuentes bibliográficas relacionadas con el tema y un listado de siglas y acrónimos.

Bloque I
FUNDAMENTO TEÓRICO

2. ECUACIONES BÁSICAS DE LA DINÁMICA DE FLUIDOS

En este capítulo se presentan las ecuaciones básicas que describen la dinámica de los fluidos (ver por ejemplo Crespo, 1992 [25]; Munson, 1994 [26]; Fox, 1995 [27]; Barrero, 2000 [28]; White, 2004 [29]), que son las ecuaciones de conservación de materia y cantidad de movimiento. Estas ecuaciones están expresadas en forma diferencial, describiendo la dinámica de elementos de fluido en un cierto dominio. El fluido es considerado en todo momento como un medio continuo, sin estructura molecular. Para que esta hipótesis sea válida, el tamaño del elemento de fluido debe ser lo suficientemente grande como para que en él haya cabida para un gran número de moléculas, y lo suficientemente pequeño para que las propiedades físicas (densidad, velocidad, presión...) puedan ser consideradas uniformes en su interior. Por tanto el elemento de fluido será muy pequeño en comparación con el dominio del flujo, aunque de tamaño macroscópico. La validez de la hipótesis de continuidad del medio viene determinada por el valor del *número de Knudsen*, definido como el cociente entre el camino libre medio molecular y la longitud característica del elemento fluido, de forma que indica qué colisiones son más frecuentes: las dadas entre moléculas o las que tienen lugar contra el contorno. También existe un número de Knudsen turbulento en que el camino libre medio es sustituido por el tamaño típico de los remolinos que, como se describe más adelante, conforman la turbulencia. En el contexto de este trabajo la hipótesis de continuidad del medio es totalmente válida. Este tema es tratado en cualquier libro clásico de Mecánica de Fluidos como, además de en los anteriormente mencionados, en los de Landau & Lifshitz (1989) [30], Batchelor (2000) [31], Douglas (2001) [32].

2.1. Ecuación de continuidad

Desde un punto de vista Euleriano: *“a través de la superficie cerrada que limita un volumen, el flujo total de masa es nulo”*. En forma diferencial, esta condición se expresa como

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (2.1)$$

donde: ρ es densidad, t tiempo, ∇ operador “nabla” y $\bar{u}$ es velocidad del fluido.

En el caso de fluidos incompresibles, la densidad no varía y por consiguiente el término $\frac{d\rho}{dt} = 0$ y se obtiene la **ecuación de continuidad**:

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (2.2)$$

que desarrollada da en el espacio tridimensional

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

y en el bidimensional

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

2.2. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

Sobre una partícula fluida debe cumplirse la conservación de la cantidad de movimiento, es decir, la 2ª ley de la Dinámica de Newton: “*el balance total de fuerzas que actúa sobre la partícula fluida equivale a su masa por su aceleración*”. Expresando esta condición por unidad de volumen, se obtiene

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \bar{u} + \rho (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \bar{f} \quad (2.5)$$

Donde: “ p ” es la presión; “ $\bar{\bar{\tau}}$ ” es el tensor de tensiones, que a efectos de simplicidad se ha expresado sin traza, que está incluida en el término de presión y “ $\bar{f}$ ” agrupa a la totalidad de fuerzas másicas externas por unidad de volumen.

Si el fluido es newtoniano, como es el caso del fluido considerado en este trabajo, el tensor de tensiones se expresa en función del tensor gradiente de la velocidad del siguiente modo

$$\bar{\bar{\tau}} = \mu [\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T] \quad (2.6)$$

Donde: “ μ ” es el coeficiente de viscosidad dinámica; “ $\nabla \bar{u}$ ” es el tensor divergencia de velocidad ($\partial u_i / \partial x_j$) y “ $(\nabla \bar{u})^T$ ” es su transpuesto ($\partial u_j / \partial x_i$).

Sustituyendo (2.6) en (2.5) se obtiene la **ecuación de Navier-Stokes** para fluidos newtonianos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla [\nu (\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T)] + \frac{\bar{f}}{\rho} \quad (2.7)$$

Donde “ ν ” es el coeficiente de viscosidad cinemática (resultante de dividir la viscosidad dinámica entre la densidad). Si la viscosidad cinemática es constante en todos los puntos del dominio y se considera el operador laplaciano ∇^2 en tres dimensiones

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.8a)$$

o en dos dimensiones

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.8b)$$

se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \bar{u} + \frac{\bar{f}}{\rho} \quad (2.9)$$

Los diferentes términos de la ecuación (2.9.) son:

$\partial \bar{u} / \partial t$: Aceleración local del fluido.

Representa la variación por unidad de tiempo de la velocidad correspondiente a un punto fijo de la masa fluida.

$(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u}$: Aceleración convectiva del fluido.

Representa la variación experimentada por la velocidad, en un instante dado, al considerar dos partículas fluidas infinitamente próximas. En muchas ocasiones es conveniente denotar este término mediante su expresión equivalente $\nabla(u^2/2) - \bar{u} \times (\nabla \times \bar{u})$ siendo $u = |\bar{u}|$.

$-(1/\rho)\nabla p$: Término correspondiente a las fuerzas de presión.

Constituido por la fuerza originada como consecuencia del gradiente de presión del fluido, dividida por la densidad del fluido.

$\nu \nabla^2 \bar{u}$: Término correspondiente a las fuerzas de viscosidad.

Es posible expresarlo de este modo porque, aunque en general la viscosidad varía con la temperatura, en muchas situaciones los gradientes de temperatura son despreciables.

$\frac{\bar{f}}{\rho}$: Término correspondiente a las fuerzas másicas.

Este término junto con el correspondiente a las fuerzas electromagnéticas (que no son consideradas en esta Tesis) constituyen las *fuerzas de volumen o de largo alcance*. Las fuerzas másicas son proporcionales a la masa del elemento sobre el que actúan. Engloban a las fuerzas gravitatorias y a las fuerzas de inercia debidas al movimiento no uniforme del sistema de referencia.

La ecuación de Navier-Stokes, a diferencia de la ecuación de continuidad, es una relación vectorial, por lo que, en realidad consiste en tres ecuaciones escalares en el espacio tridimensional (2.10 a,b,c) y dos en el bidimensional (2.11 a,b).

$$\frac{\partial}{\partial t} u_x + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_x + \frac{f_x}{\rho} \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_y + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_y + \frac{f_y}{\rho} \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_z + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_z + \frac{f_z}{\rho} \quad (2.10c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_x + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) u_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_x + \frac{f_x}{\rho} \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_y + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) u_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_y + \frac{f_y}{\rho} \quad (2.11b)$$

2.3. Ecuación de la vorticidad

Una forma conveniente de expresar las ecuaciones de la dinámica de fluidos es mediante el rotacional de la velocidad (ω), magnitud que se conoce como vorticidad:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \quad (2.12)$$

En el apartado 4.1 se describe con más profundidad esta magnitud.

Si se aplica el operador rotacional a todos los términos de la ecuación 2.7 y se realiza algunas operaciones algebraicas, se obtiene la **ecuación de la vorticidad**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.13)$$

Donde no se ha incluido el rotacional de la fuerza externa porque, en general, éstas son de carácter conservativo y por lo tanto de rotacional nulo. Esta formulación tiene la ventaja de eliminar el término de gradiente de presión. En el

apartado 4.3 se incide nuevamente en la ecuación de la vorticidad desde un planteamiento más general.

En el miembro de la derecha de la ecuación de vorticidad, el primer sumando describe el fenómeno de estiramiento de los tubos de vorticidad en la dirección de la velocidad y el segundo sumando identifica, al igual que en la ecuación de Navier-Stokes, la disipación de energía por viscosidad molecular.

3. TEORÍA BÁSICA DE LA TURBULENCIA

A continuación se exponen los conocimientos teóricos básicos sobre flujos turbulentos.

Aunque la teoría existente sobre el tema es bastante más extensa que la aquí recogida, su tratamiento completo excede los objetivos y fines perseguidos en esta Tesis. No obstante, tampoco parece conveniente una exposición más reducida que la que se presenta a continuación, ya que es necesario justificar la asunción generalizada de considerar las corrientes turbulentas como una superposición de vórtices.

Por ello, se lleva a cabo un desarrollo teórico que culmina con el concepto de espectro de energía y la importancia que los flujos vorticales y su distribución a lo largo de dicho de espectro tienen en la turbulencia.

Finalmente se incluyen los modelos numéricos de simulación de corrientes turbulentas más conocidos.

3.1. Conceptos básicos sobre corrientes turbulentas

El estudio de la turbulencia ha sido siempre considerado como uno de los más complejos en el campo de la Física, la Ingeniería y en particular en la Mecánica de Fluidos.

Como ya se ha mencionado en el primer capítulo, es un fenómeno frecuente tanto en la naturaleza como en una gran variedad de configuraciones tecnológicas. Son turbulentos muchos de los movimientos del aire en la atmósfera y los flujos de agua en ríos, lagos y mares. Prácticamente todos los flujos en conducciones son turbulentos, por ejemplo en gasoductos o en tuberías de agua. También lo son en las superficies de aviones, barcos, misiles, etc.

Además los flujos turbulentos son también de gran interés desde un punto de vista puramente teórico, como ejemplos de sistemas mecánicos no lineales con un gran número de grados de libertad.

Sin embargo, no es fácil definir el término TURBULENCIA. Algunas definiciones que han sido propuestas son las siguientes:

- Según Hinze (1975) [33], el movimiento turbulento de un fluido es *“una condición irregular del flujo en la cual varias magnitudes muestran una variación aleatoria con el tiempo y con las coordenadas espaciales y que estadísticamente pueden discernirse distintos valores promedio”*.
- Según Lesieur (1997) [34], un flujo es turbulento si cumple:
 - 1) Es *impredecible*: dadas unas ciertas condiciones iniciales, es imposible predecir la configuración del flujo en un instante posterior arbitrario.
 - 2) Las magnitudes físicas transportadas por el fluido son mezcladas con *mayor efectividad* que en flujo laminar, donde esta función quedaría manifestada tan solo por los coeficientes de difusión molecular.
 - 3) En el flujo interviene un *gran rango de escalas espaciales*.

Más utilidad que dar una definición precisa, hay que señalar las características principales de las corrientes turbulentas, resumidas de forma esquemática en la Tabla 3-1.

Entre las características citadas hay 2 de ellas: la tercera (*grandes números de Reynolds, es decir, muy poca influencia de la viscosidad*) y la quinta (*disipación, que es debida naturalmente a la viscosidad*) que parecen contradictorias. La explicación estaría en el hecho de que hay distintas **escalas de longitud en la turbulencia**.

Como ya se ha mencionado, y posteriormente se volverá a incidir sobre este asunto, puede asumirse que: *la turbulencia está formada por la superposición de torbellinos o vórtices de diversos tamaños y velocidades de giro.*

TABLA 3-1. Características de las corrientes turbulentas

CARACTERÍSTICAS	DESCRIPCIÓN
Irregularidad o aleatoriedad	Imposibilidad de una descripción determinística. Necesidad de métodos estadísticos.
Difusividad	Mezcla muy eficaz de masa, cantidad de movimiento y energía.
Grandes números de Reynolds	La turbulencia aparece siempre a altos números de Reynolds (viscosidad despreciable) y se origina como una inestabilidad de la corriente laminar cuando el número de Reynolds alcanza un valor crítico. La inestabilidad está asociada a la interacción de los términos viscosos y los términos de inercia no lineales. La aleatoriedad y la no linealidad se combinan para hacer casi intratables las ecuaciones de la turbulencia.
Tridimensionalidad	La turbulencia es esencialmente tridimensional y rotacional. La dinámica de la vorticidad juega un papel primordial en la descripción de las corrientes turbulentas. No obstante, existen fenómenos turbulentos bidimensionales, por lo que también hay que tener en consideración la turbulencia bidimensional.
Disipación	Las corrientes turbulentas son esencialmente disipativas. El trabajo de deformación de los esfuerzos de viscosidad incrementa la energía interna del fluido a costa de la energía cinética de la turbulencia. Las corrientes turbulentas necesitan un suministro continuo de energía para vencer las pérdidas viscosas; en caso contrario la turbulencia decae rápidamente.

La primera escala que aparece en las corrientes turbulentas es la correspondiente a los torbellinos de mayor tamaño, del orden de la anchura de la corriente. A estas escalas la viscosidad no es efectiva ya que corresponde a números de Reynolds extraordinariamente grandes.

La energía sólo puede disiparse en las escalas más pequeñas, en las que los gradientes de velocidad son importantes. Los términos no lineales de las ecuaciones de Navier-Stokes son los responsables de la generación de las pequeñas escalas a través de un mecanismo conocido con el nombre de “**vortex stretching**” que consiste en un estiramiento de los vórtices o torbellinos. El término viscoso previene contra la generación de escalas infinitamente pequeñas disipando la energía de la pequeña escala en calor. Debido a que los movimientos de la pequeña escala son a grandes frecuencias, corresponden a escalas de tiempo cortas y por tanto es razonable que estos movimientos sean estadísticamente independientes de los movimientos relativamente lentos de las grandes escalas y de la corriente media. Hay un suministro de energía (en cascada) desde las escalas grandes hasta las pequeñas, donde es disipada. Por tanto sobre la pequeña escala sólo influye la disipación de energía por unidad de masa y tiempo, que es igual a la energía suministrada desde las escalas grandes. En consecuencia, los parámetros que gobiernan los movimientos en la pequeña escala son: la velocidad de disipación de energía cinética por unidad de masa de fluido y por unidad de tiempo denominada **disipación viscosa media** “ ε ” y la **viscosidad cinemática** “ ν ”; con estos parámetros, se puede definir una longitud característica de los torbellinos disipativos (η), un tiempo característico (τ) y una velocidad característica (v):

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (3.1)$$

$$\tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

$$\nu = (\nu \epsilon)^{1/4} \quad (3.3)$$

Estas escalas de longitud, tiempo y velocidad son conocidas como MICROESCALAS DE KOLMOGOROV.

El número de Reynolds basado en la longitud η , puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\text{Re}_\eta = \frac{\nu \eta}{\nu} = 1 \quad (3.4)$$

lo que indica que para tamaños del orden de η , los efectos viscosos son comparables a los inerciales poniéndose de manifiesto que son estas escalas las que provocan la disipación de energía cinética.

También se ha llegado a distinguir entre distintos TIPOS de turbulencia. Así se habla de turbulencia homogénea cuando la turbulencia tiene cuantitativamente la misma estructura en todas las partes del campo de flujo. Se dice que la turbulencia es isótropa si sus características estadísticas no tienen preferencia por alguna dirección; aunque este tipo de turbulencia es ideal ya que ningún flujo turbulento real muestra verdadera isotropía, pueden darse condiciones en las cuales un estado de isotropía puede aproximarse con bastante exactitud y el conocimiento profundo de sus características puede proporcionar una base teórica sólida para el estudio de flujos turbulentos anisótropos reales. Von Karman introdujo el concepto de turbulencia homóloga para el caso de promedio de esfuerzo de corte constante a través del campo fluido, como ocurre por ejemplo en la conocida corriente plana de *Couette*. Por último, se considera el término pseudoturbulencia para el caso hipotético de un campo de flujo con un modelo regular que muestra una periodicidad constante distinta en el tiempo y en el espacio.

Según se comentó anteriormente, las corrientes turbulentas consisten en la superposición de fluctuaciones irregulares al movimiento principal. Estas

fluctuaciones superpuestas a la corriente principal son tan enormemente complicadas que su tratamiento teórico parece inaccesible, aunque tienen una gran importancia tanto para el curso de la corriente como para la economía de fuerzas, ya que se producen efectos de viscosidad enormes. Sin embargo, al analizar en profundidad estas oscilaciones puede observarse una *cuasipermanencia* y una *cuasiperiodicidad* tanto en el tiempo como en el espacio, lo que permitirá un cierto tratamiento estadístico, como se verá en los apartados posteriores.

3.2. Turbulencia bidimensional

Teóricamente es posible resolver las ecuaciones de Navier-Stokes (o la ecuación de la vorticidad) en un dominio bidimensional en el que las velocidades del fluido sólo tienen componentes horizontales, $\vec{u} = (u_x, u_y, 0)$. Es fácil comprobar que en este caso sólo existiría componente vertical de la vorticidad:

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z) = \left(0, 0, \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (3.5)$$

para ello, basta con calcular el rotacional de la velocidad.

Desarrollando la ecuación de la vorticidad (2.13) en sus correspondientes ecuaciones escalares, se obtiene en el dominio tridimensional:

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_x + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \omega_x = \left(\omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_x + \nu \nabla^2 \omega_x \quad (3.6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_y + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \omega_y = \left(\omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_y + \nu \nabla^2 \omega_y \quad (3.6b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_z + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \omega_z = \left(\omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_z + \nu \nabla^2 \omega_z \quad (3.6c)$$

y teniendo en cuenta la ecuación (3.5) y poniendo $\omega_z = \omega$ se obtiene la ecuación de la vorticidad en dos dimensiones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \omega = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \omega \quad (3.7)$$

Un modo diferente de expresar la dinámica de la turbulencia bidimensional es introduciendo la función de corriente $\psi(x, y, t)$, dada por:

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3.8a)$$

$$u_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.8b)$$

de forma que la vorticidad es $\omega = \omega_z = \nabla^2 \psi$ y la ecuación (3.7) queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + J(\omega, \psi) = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \omega \quad (3.9)$$

donde $J(\cdot, \cdot)$ es el operador jacobiano bidimensional.

De la ecuación (3.7) ó (3.9) se extraen consecuencias importantes:

- En primer lugar: si la viscosidad es despreciable (fluido perfecto), la vorticidad se conserva en la trayectoria de una partícula fluida.
- En segundo lugar: desaparece el término que describe el estiramiento de los tubos o líneas de vorticidad (vortex stretching), de lo cual puede deducirse algo de gran trascendencia y es que no existe la turbulencia bidimensional, ya que el fenómeno de estiramiento y rotación de los tubos de vorticidad es considerado como una de las características propias de un flujo turbulento, que ha de ser por tanto tridimensional (Libby, 1996) [35].

Además existen otros argumentos teóricos en contra de la existencia real de la turbulencia bidimensional:

- Kiehn (1999) [36] demostró mediante argumentos topológicos que no pueden producirse procesos irreversibles en flujos bidimensionales; no obstante, un flujo turbulento bidimensional conserva las propiedades de imprevisibilidad y efectividad de mezcla propias de la turbulencia.
- Kraichnan y Montgomery (1980) [37] resaltaron la importancia de la turbulencia bidimensional en el sentido de que idealiza fenómenos geofísicos en la atmósfera y en los océanos y proporciona un punto de partida para modelar esos fenómenos.

A pesar de todo, sería posible producir turbulencia bidimensional en el laboratorio confinando el flujo turbulento entre dos placas paralelas, aunque la aparición de capas límite en las placas tendería a anular las escalas de turbulencia mayores que la separación entre placas y a desarrollar únicamente turbulencia tridimensional a escalas menores. Esto se puede inhibir mediante una gran viscosidad o un movimiento de rotación, que es precisamente lo que ocurre en la capa límite atmosférica, donde la turbulencia puede considerarse bidimensional a ciertas escalas como probaron los citados Kraichnan y Montgomery (1980).

Si en la TURBULENCIA TRIDIMENSIONAL existe un invariante cuadrático del movimiento que es la energía, siendo ésta transmitida desde las grandes escalas de la turbulencia a las más pequeñas (cascada de energía de Richardson) donde es disipada por la viscosidad molecular (Frisch, 1995) [38], en la TURBULENCIA BIDIMENSIONAL aparece un segundo invariante: *“además de la energía se conserva el módulo de la vorticidad a lo largo de la trayectoria de una partícula fluida (si se desprecia la viscosidad)”*. De forma análoga a la energía cinética, se define la **enstrofia** (Z) como:

$$Z = \frac{1}{2} |\bar{\omega}|^2 \quad (3.10)$$

Del mismo modo que existe en turbulencia tridimensional una cascada de energía hacia las escalas pequeñas, existe en la turbulencia bidimensional una “*cascada de enstrofia*”. Además, debido a que la energía sigue conservándose, aparece también una cascada de energía, pero en este caso hacia las escalas mayores. Es lo que se conoce como *cascada inversa de energía*. Sorprendentemente las estructuras de pequeña escala se combinan en otras más grandes, es el fenómeno llamado *autoorganización de flujos bidimensionales* (Hasegawa, 1985) [39].

3.3. Formulación estadística

Existe otro planteamiento para el estudio de la turbulencia basado en un tratamiento estadístico análogo al usado en el estudio termodinámico de los gases, pero construido sobre las ecuaciones de Navier-Stokes (Reynolds, 1895) [40].

Antes de describirlo, se presentan las definiciones básicas de algunos conceptos estadísticos que se utilizarán para transformar las ecuaciones de Navier-Stokes, obteniendo la ecuación de Reynolds con el tensor de Reynolds que describe el transporte de cantidad de movimiento en flujo turbulento.

3.3.1. Definiciones básicas de magnitudes estadísticas

Promedio

Si se supone una cierta magnitud A , que puede adoptar una serie de N valores a_i siendo $i = 1, \dots, N$, se define el promedio o media de A como:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \quad (3.11a)$$

En general, hay que distinguir entre si el promedio es de conjunto, o bien temporal. En el primer caso, los distintos valores a_i son obtenidos de

realizaciones diferentes del experimento. En el segundo, los valores son obtenidos como una serie temporal de medidas. Evidentemente, si el proceso que genera las mediciones de A es estacionario, los dos promedios serán idénticos para $N \rightarrow \infty$, según el *Teorema de Ergodicidad*.

En el caso de que la magnitud A se obtenga como una función continua del tiempo, el promedio en un cierto intervalo T es definido como:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt \quad (3.11b)$$

Fluctuaciones

Si la variable A se puede expresar como una función continua del tiempo, en el intervalo T tendrá un promedio $\langle A \rangle$ definido por (3.11b). En un cierto instante $t \in [0, T]$, se define la fluctuación de A como:

$$a'(t) = a(t) - \langle A \rangle \quad (3.12)$$

Evidentemente, siempre se cumple que el valor medio temporal de la fluctuación es nulo por definición:

$$\langle a' \rangle = 0 \quad (3.13)$$

Dos magnitudes importantes en el estudio de la turbulencia son:

- $\langle a'^2 \rangle^{1/2}$ = la *desviación cuadrática media de la fluctuación*, que indica la escala de variación de $a(t)$ alrededor de la media.
- $\frac{\langle a'^2 \rangle^{1/2}}{\langle A \rangle}$ = la *fluctuación relativa*, que es también una medida importante de esta variación.

Para posteriores cálculos, es útil detallar brevemente algunas reglas que obedecen los valores medios. Sean a y b dos magnitudes cuyos valores medios se desean obtener. Si se expresa por comodidad de escritura, $\langle a \rangle = \bar{a}$ y $a = \bar{a} + a'$, se cumplirá:

$$\bar{a} = \overline{\bar{a} + a'} = \bar{\bar{a}} + \bar{a'} = \bar{a} + \bar{a'} \Rightarrow \bar{a'} = 0 \quad (3.14a)$$

$$\overline{\bar{a}b} = \bar{\bar{a}b} = \bar{a}\bar{b} \quad (3.14b)$$

$$\overline{\bar{a}b'} = \bar{\bar{a}b'} = \bar{a}\bar{b'} = 0 \quad (3.14c)$$

$$\overline{ab} = \overline{(\bar{a} + a')(\bar{b} + b')} = \overline{\bar{a}\bar{b}} + \overline{\bar{a}b'} + \overline{\bar{b}a'} + \overline{a'b'} = \bar{a}\bar{b} + \overline{a'b'} \quad (3.14d)$$

Función de densidad de probabilidad

Ya que lo interesante de una cierta magnitud $a(t)$ no es el valor en sí sino sus valores estadísticos, un modo apropiado de caracterizarla es mediante una función de densidad de probabilidad, que es una función $P(a)$ que tiene la propiedad de que $P(a)da$ indica la probabilidad de que A tenga un valor comprendido entre a y $a+da$.

Las relaciones de la función de densidad de probabilidad de una cierta magnitud con sus propiedades estadísticas son:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(a)da \quad (3.15a)$$

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} aP(a)da \quad (3.15b)$$

$$\langle a'^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (a - \langle A \rangle)^2 P(a)da \quad (3.15c)$$

En general, es posible calcular el *momento de cualquier orden* a partir de la función de densidad de probabilidad del siguiente modo:

$$\langle a'^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (a - \langle A \rangle)^n P(a) da \quad (3.16)$$

Entre todos ellos merecen especial interés los momentos de tercer y cuarto orden, que dan lugar a las siguientes funciones:

- 1) Sesgo (S) (skewness en inglés), que indica la asimetría de la función de densidad de probabilidad alrededor de la media:

$$S = \frac{\langle a'^3 \rangle}{\langle a'^2 \rangle^{3/2}} \quad (3.17)$$

- 2) Kurtosis (K) (flatness en inglés), que cuantifica la importancia de los valores simétricos de la función de densidad de probabilidad pero muy alejados de la media.

$$K = \frac{\langle a'^4 \rangle}{\langle a'^2 \rangle^2} \quad (3.18)$$

Correlaciones

Una forma de medir la rapidez (tanto en el tiempo como en el espacio) con la que fluctúa una magnitud es mediante la *autocorrelación*.

Por ejemplo: si se supone una cierta variable $a(t)$, con un promedio $\langle A \rangle$ y una fluctuación $a'(t)$, y se construye otra a partir de ésta introduciendo un desplazamiento τ del tiempo, $a(t + \tau) = \langle A \rangle + a'(t + \tau)$, y se multiplican las fluctuaciones de estas dos variables y se realiza un promedio temporal, se obtiene un número que será diferente para cada valor de τ . Evidentemente,

si τ es muy pequeño, este número será muy cercano a $\langle a'^2 \rangle$, de forma que el *Coeficiente de Autocorrelación Temporal*, $R(\tau)$ sería:

$$R(\tau) = \frac{\langle a'(t) a'(t + \tau) \rangle}{\langle a'^2 \rangle} \quad (3.19)$$

es decir, una función de τ que cumple que $R(\tau) \rightarrow +1$ cuando $\tau \rightarrow 0$.

Por otro lado, si la señal es estadísticamente estacionaria, la función de autocorrelación será simétrica respecto de $\tau = 0$ y por lo tanto, su primera derivada será nula en el origen. Experimentalmente y sobre todo en el estudio de la turbulencia, se encuentra además que la función de autocorrelación tiende asintóticamente a 0 para valores grandes de τ .

Una escala de tiempo asociada a la autocorrelación temporal surge directamente de su integral, asumiendo que es convergente. Es la denominada *Escala integral de tiempo* o simplemente *tiempo integral*:

$$T_I = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} R(\tau') d\tau' \quad (3.20)$$

Otra escala de tiempo característica surge de desarrollar la función de autocorrelación hasta segundo orden en el origen:

$$R(\tau) \sim R(0) + \frac{dR(0)}{d\tau} \tau + \frac{1}{2} \frac{d^2 R(0)}{d\tau^2} \tau^2 \quad (3.21)$$

Como se ha comentado, $R(0) = 1$ y $\frac{dR(0)}{d\tau} = 0$, de forma que:

$$R(\tau) \sim 1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 R(0)}{d\tau^2} \tau^2 \quad (3.22)$$

y por otro lado, desarrollando hasta segundo orden $a'(t + \tau)$ en $\tau = 0$:

$$a'(t + \tau) \sim a'(t) + \frac{da'(t)}{dt} \tau + \frac{1}{2} \frac{d^2 a'(t)}{dt^2} \tau^2 \quad (3.23)$$

multiplicando por $a'(t)$, promediando y dividiendo por $\langle a'^2 \rangle$, tal y como se indica en (3.19), al comparar términos con (3.22) se obtiene:

$$\frac{d^2 R(0)}{d\tau^2} = \frac{\left\langle a' \frac{d^2 a'}{dt^2} \right\rangle}{\langle a'^2 \rangle} \quad (3.24)$$

y

$$R(\tau) \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\left\langle a' \frac{d^2 a'}{dt^2} \right\rangle}{\langle a'^2 \rangle} \tau^2 \quad \text{cuando } \tau \rightarrow 0 \quad (3.25)$$

Esta expresión da pie a la definición de un segundo tiempo característico,

$$T_2 = \left[\frac{-2\langle a'^2 \rangle}{\left\langle a' \frac{d^2 a'}{dt^2} \right\rangle} \right]^{1/2} \quad (3.26)$$

aunque suele ser más conveniente describir esta expresión como:

$$T_2 = \left[\frac{2\langle a'^2 \rangle}{\left\langle \left(\frac{da'}{dt} \right)^2 \right\rangle} \right]^{1/2} \quad (3.27)$$

usando:

$$a' \frac{d^2 a'}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(a' \frac{da'}{dt} \right) - \left(\frac{da'}{dt} \right)^2 \Rightarrow \left\langle a' \frac{d^2 a'}{dt^2} \right\rangle = - \left\langle \left(\frac{da'}{dt} \right)^2 \right\rangle \quad (3.28)$$

ya que es más fiable calcular la primera derivada de una magnitud que la segunda.

El tiempo integral T_1 indica *la escala de las fluctuaciones a gran escala* y el tiempo T_2 caracteriza *la importancia de las fluctuaciones rápidas*.

Evidentemente, toda esta explicación basada en una magnitud temporal puede ser extrapolada a una magnitud espacial. Se tiene entonces una *Autocorrelación Espacial*, $R(\lambda)$:

$$R(\lambda) = \frac{\langle a'(l)a'(l+\lambda) \rangle}{\langle a'(l)^2 \rangle} \quad (3.29)$$

en la que los promedios se realizan sobre todos los valores de longitud (l), una escala integral de espacio:

$$L_1 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\lambda R(\lambda') d\lambda' \quad (3.30)$$

y una escala de espacio relacionada con las fluctuaciones a pequeña escala

$$L_2 = \left[\frac{2\langle a'^2 \rangle}{\left\langle \left(\frac{da'}{dt} \right)^2 \right\rangle} \right]^{1/2} \quad (3.31)$$

Espectro de una señal

El espectro, o más exactamente la densidad espectral de energía, es un concepto muy importante en el tratamiento estadístico de cualquier señal y en concreto en el estudio de la turbulencia.

Nuevamente se comenzará la exposición basándose en una serie temporal de fluctuaciones para generalizar a continuación al caso de serie espacial.

Es importante recordar en primer lugar el concepto de transformada de Fourier. Dada una función $f(t)$, se define su transformada de Fourier como

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(i\omega t) dt \quad (3.32)$$

y la transformada inversa de $\hat{f}(\omega)$ como

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (3.33)$$

La forma en que se expresan en relación a los factores 2, π o sus raíces varía mucho en función de la definición dada de transformada directa y transformada inversa de Fourier. Lo importante es que el producto de los dos factores sea $(1/2\pi)$. La opción adoptada en el presente trabajo es la habitual en la literatura sobre turbulencia.

Si se considera la transformada de Fourier de la autocorrelación de una señal $a'(t)$, definida en (3.19), pero sin normalizar,

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle a'(t) a'(t + \tau) \rangle \exp(i\omega t) d\tau \quad (3.34)$$

Una propiedad interesante de la transformada de Fourier, que permite simplificar los cálculos en muchas ocasiones, es que si la función a transformar es real y par, como es el caso de la autocorrelación, entonces su transformada también es real y par. En este caso particular, la expresión anterior se puede calcular como

$$\phi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \langle a'(t) a'(t + \tau) \rangle \cos(\omega\tau) d\tau \quad (3.35)$$

y a la inversa, también es posible escribir de modo análogo la siguiente expresión

$$\langle a'(t)a'(t+\tau) \rangle = \int_0^{+\infty} \phi(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \quad (3.36)$$

A $\phi(\omega)$ se le denomina *densidad espectral de intensidad* (o función característica) de la señal. En el caso de una señal temporal, si se describe como la superposición de una relación continua de señales armónicas, cada una con una frecuencia ω , entonces

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \phi(\omega) d\omega \quad (3.37)$$

es la contribución a la intensidad de todos los armónicos con frecuencias comprendidas entre ω_1 y ω_2 .

Con la expresión (3.36) es fácil comprobar que para $\tau=0$

$$\langle a'^2 \rangle = \int_0^{+\infty} \phi(\omega) d\omega \quad (3.38)$$

Toda esta argumentación que se ha para una señal temporal puede ser generalizada fácilmente para el caso de una señal espacial unidimensional. Los conceptos son los mismos: la posición en lugar del tiempo y el número de onda k (que se definirá más adelante) en el de la frecuencia. En el caso de una señal bidimensional o en el una señal tridimensional, la función característica definida en (3.35) es ahora un tensor y la integral (3.37) se realiza sobre una corona o sobre una capa respectivamente.

3.3.2. La ecuación de Reynolds

Siguiendo el trabajo de Reynolds (1895) [40], si se descompone la velocidad de un flujo turbulento ($\vec{u}$) como *velocidad media* ($\bar{U}$) más *velocidad*

de fluctuación ($\bar{u}'$): $\bar{u} = \bar{U} + \bar{u}'$, donde $\bar{U} = \langle \bar{u} \rangle$, entonces la ecuación de continuidad (2.2) se cumple para el flujo medio y para las fluctuaciones,

$$\nabla \cdot \bar{U} = 0 \quad (3.39a)$$

$$\nabla \cdot \bar{u}' = 0 \quad (3.39b)$$

Por otro lado, al hacer el promedio de las ecuaciones de Navier-Stokes (2.7) se obtiene las denominadas ecuaciones de Reynolds para el flujo medio:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \bar{U} + \rho (\bar{U} \cdot \nabla) \bar{U} = \nabla p + \nabla \left[\mu (\nabla \bar{U} + (\nabla \bar{U})^T) + \bar{\tau}' \right] + \langle \bar{f} \rangle \quad (3.40)$$

que son análogas a las de Navier-Stokes, pero con el término añadido del tensor de esfuerzos aparentes de Reynolds

$$\tau'_{ij} = -\rho \langle u'_i u'_j \rangle \quad (3.41)$$

que representa el transporte de cantidad de movimiento debido a las fluctuaciones de velocidad, es decir, es el responsable de la transferencia de cantidad de movimiento y por lo tanto de la pérdida de energía en el flujo medio debida a las correlaciones de las fluctuaciones de velocidad.

El problema que se plantea ahora es *que las ecuaciones de Reynolds no son cerradas, ya que el tensor de Reynolds es desconocido*. Las seis componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds que aparecen como consecuencia de la descomposición de la corriente -en media y fluctuaciones- son incógnitas adicionales a las ya existentes de la presión y las tres componentes de la velocidad. Esto constituye el denominado problema de CIERRE DE LA TURBULENCIA. Para progresar en esta dirección es necesario el uso de hipótesis adicionales o datos experimentales. La expresión más generalizada para el tensor de Reynolds surge al hacer una analogía con el tensor de tensiones para fluidos newtonianos

$$\bar{\tau}' = \mu_t [\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T] \quad (3.42)$$

introduciendo la *viscosidad turbulenta* (μ_t) o de forma equivalente la *viscosidad cinemática turbulenta* que se puede expresar en términos de una *longitud de mezcla* (l'):

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = l'v' \quad (3.43)$$

La longitud de mezcla es una estimación de la distancia que ha de recorrer una partícula de fluido en una cierta dirección para que las componentes en esa dirección de su posición y su velocidad pierdan su correlación. La velocidad v' representa de forma genérica las fluctuaciones de velocidad en el flujo turbulento. En cierta forma, se puede pensar en la longitud de mezcla como el recorrido libre medio de la teoría cinética de los gases (Tennekes and Lumley, 1972) [41].

Sin embargo, es posible obtener una expresión para el transporte del tensor de Reynolds: si se considera la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (2.5) para la componente u_i de la velocidad

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_i + \rho u_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + f_i \quad (3.44)$$

y la análoga para la componente u_j ; y se multiplica la primera por u_j , la segunda por u_i , luego se suman y se promedia, se obtiene la expresión buscada:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \langle u'_i u'_j \rangle + \rho U_k \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k} = & -\rho \left(\langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \\ & - \rho \frac{\partial \langle u'_i u'_j u'_k \rangle}{\partial x_k} - \left(\frac{\partial \langle \rho u'_i \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle \rho u'_j \rangle}{\partial x_j} \right) \\ & + \left\langle \rho \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle + \langle f_i u'_j \rangle + \langle f_j u'_i \rangle + \left(\left\langle u'_i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u'_j \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \right\rangle \right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

que incluye términos desconocidos como las interacciones de tercer orden de las fluctuaciones $\langle u'_i u'_j u'_k \rangle$ o las correlaciones presión-velocidad.

Se pueden deducir ecuaciones para la evolución de las correlaciones de orden 3, sin más que seguir el proceso anterior con las ecuaciones de Navier-Stokes aplicándolo a (3.45), pero esto involucraría correlaciones de orden 4 y así se podría seguir indefinidamente. El tratamiento de este tema excede los objetivos de esta investigación, para profundizar en el mismo se remite al lector al trabajo de Launder (1990) [42] y al de Hanjalic (1994) [43].

A pesar de las dificultades que plantea la ecuación (3.45), en cuanto a la aparición de términos desconocidos, es interesante el análisis del último de los factores del miembro de la derecha. Éste describe la *disipación de energía turbulenta por viscosidad molecular*. Desarrollando éste término, usando (2.6), se obtiene:

$$\left(\left\langle u'_j \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u'_i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} \right\rangle \right) = \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \langle u'_i u'_j \rangle + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left\langle u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right\rangle \right) - \mu \left(2 \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle \right) \quad (3.46)$$

De los tres términos que forman la disipación viscosa, en la mayoría de los flujos turbulentos los dos primeros son mucho menores que el tercero -ya que las derivativas espaciales de los promedios de las fluctuaciones son del orden de la inversa de una escala macroscópica relacionada con el dominio del flujo o la escala integral de la turbulencia- mientras que las derivativas de las fluctuaciones son del orden de la inversa de una escala espacial mucho menor (Libby, 1996) [35]. Esto permite definir el tensor de disipación viscosa como

$$\varepsilon_{ij} = \nu \left(2 \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle \right) \quad (3.47)$$

Si en la ecuación (3.45) se hace $i = j = k$; y se suman los índices repetidos, se obtiene la ley de conservación de la energía cinética media turbulenta:

$$\frac{\partial}{\partial t} k + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = -\langle u'_k u'_l \rangle \frac{\partial U_l}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{\rho} \langle p u'_k \rangle + \frac{1}{2} \langle u'_k u'_l u'_l \rangle \right) + \langle f_k u'_k \rangle - \varepsilon \quad (3.48)$$

donde aparece $k = \frac{1}{2} \langle u'_k u'_k \rangle$ y además de los términos de producción por cizalladura, presión, correlaciones de tercer orden y fuerzas másicas, aparece la disipación viscosa media:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_{kk} = \frac{1}{2} \nu \left\langle \left(\frac{\partial u'_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} \right) \left(\frac{\partial u'_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} \right) \right\rangle \quad (3.49)$$

Si la turbulencia es isotrópica, se cumplen las relaciones cinemáticas (Taylor, 1935) [44]

$$\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\rangle \quad (3.50)$$

$$\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \quad (3.51)$$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \quad (3.52)$$

y ε se puede expresar como

$$\varepsilon = 15 \nu \left\langle \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \quad (3.53)$$

que es la forma usual de cálculo de la disipación de energía (Hinze, 1975 [33]; Lin and Reid, 1963 [45]).

3.3.3. Correlaciones de velocidad y escalas de la turbulencia

Las dimensiones características de espacio y tiempo del flujo turbulento se definen a partir de las autocorrelaciones de las fluctuaciones de la velocidad. A veces es posible relacionar las correlaciones temporales y las espaciales en base a la *hipótesis de Taylor*, que establece que si el flujo es homogéneo con una velocidad media U en la dirección x , se verifica lo siguiente siempre que la fluctuación u' sea mucho menor que la velocidad media U (Hinze, 1975) [33]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -U \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.54)$$

Un estudio más a fondo de este problema fue llevado a cabo por Lin (1953) [46], quien demuestra que para turbulencia homogénea y altos números de Reynolds, la hipótesis de Taylor es válida si

$$\frac{\langle (du/dt)^2 \rangle}{U^2 \langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle} \approx 5 \frac{u'^2}{U^2} \quad (3.55)$$

La interpretación física de la hipótesis de Taylor (3.54) es que las fluctuaciones de velocidad en el tiempo en un punto fijo del espacio creadas por un campo turbulento “congelado”, moviéndose como un todo, son idénticas desde un punto de vista estadístico a las fluctuaciones de velocidad en un instante dado a lo largo del eje x .

Escala integral de tiempo

Es la integral de la correlación de fluctuaciones de velocidad medidas en un solo punto con un desplazamiento temporal.

$$T = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau \quad (3.56)$$

donde:

$$R(\tau) = \frac{\langle \bar{u}'(\bar{x}, t) \cdot \bar{u}'(\bar{x}, t + \tau) \rangle}{\langle u'(\bar{x})^2 \rangle} \quad (3.57)$$

Escala integral de espacio

Existen dos escalas integrales de espacio, definidas en base a dos correlaciones diferentes. La correlación espacial de velocidades puede ser *longitudinal* $R_L(r)$ -si se realiza entre las componentes de las velocidades en la dirección de vector separación entre los puntos- o *transversal* $R_T(r)$ - si las componentes de las velocidades están en el plano perpendicular al vector separación-:

$$R_L(r) = \frac{\langle u_L(\bar{x}) u_L(\bar{x} + \vec{r}) \rangle}{\langle \bar{u}(\bar{x})^2 \rangle} \quad (3.58)$$

$$R_T(r) = \frac{\langle u_T(\bar{x}) u_T(\bar{x} + \vec{r}) \rangle}{\langle \bar{u}(\bar{x})^2 \rangle} \quad (3.59)$$

Se definen entonces: la escala integral longitudinal de espacio (L_l) como

$$L_l = \int_0^{\infty} R_L(r) dr \quad (3.60)$$

y la escala integral transversal de espacio (L_t) como

$$L_t = \int_0^{\infty} R_T(r) dr \quad (3.61)$$

Microescala de Taylor

Ya se ha descrito cómo a partir de la autocorrelación de una señal es posible extraer información sobre el alcance de las fluctuaciones a pequeña escala. En el caso de la autocorrelación espacial longitudinal de

las fluctuaciones de velocidad, esta escala se denomina microescala de Taylor (L_λ) y viene dada en el caso longitudinal ($L_{\lambda L}$) por

$$\frac{1}{L_{\lambda L}^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 R_L(r)}{dr^2} \Big|_{r \rightarrow 0} \quad (3.62a)$$

y en el caso transversal ($L_{\lambda T}$) por

$$\frac{1}{L_{\lambda T}^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 R_T(r)}{dr^2} \Big|_{r \rightarrow 0} \quad (3.62b)$$

3.3.4. Espectro de energía

Como ya se ha visto, la turbulencia se puede considerar como una superposición de vórtices o torbellinos de muchos tamaños, vorticidades y frecuencias. Todos estos torbellinos tienen una cierta energía cinética, determinada por su vorticidad o por la intensidad de la fluctuación de velocidad de la frecuencia correspondiente. Entonces surge una cuestión interesante cuando se estudian las características más detalladas de la turbulencia, que es cómo la energía cinética se distribuye de acuerdo con las distintas frecuencias. Si bien en la turbulencia real una frecuencia determinada no está presente permanentemente, es posible en promedio asignar una cierta cantidad de la energía total a las distintas frecuencias. Tal *distribución de la energía entre las frecuencias* es usualmente llamada espectro de energía, que puede ser establecido mediante medidas de instrumentos adecuados.

Espectro de energía unidimensional

Para concretar, se supone el caso unidimensional. Debe existir un valor promedio constante de por ejemplo u_i^2 , que puede considerarse consistente en la suma de las contribuciones de todas las frecuencias n ; así $E_I(n)dn$ es la contribución a $\langle u_i(\bar{x}, t)^2 \rangle$ de todas las frecuencias entre n y $n+dn$ y se

define el espectro de energía o función de densidad de energía unidimensional como

$$\int_0^{\infty} E_1(n) dn = \langle u_1(\bar{x}, t)^2 \rangle \quad (3.63a)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(n) dn = \langle u_1(\bar{x}, t)^2 \rangle \quad (3.63b)$$

Es usual utilizar para el espectro de energía la transformada de Fourier:

$$\langle u_1(x, t) \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} a(n) e^{-i2\pi nt} dn \quad (3.64a)$$

$$a(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u_1(x, t) \rangle e^{i2\pi nt} dt \quad (3.64b)$$

para de este modo relacionar el espectro de energía con las correlaciones anteriormente definidas:

$$R(t) = \frac{1}{2\langle u_1(\bar{x}, t)^2 \rangle} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(n) e^{i2\pi nt} dn = \frac{1}{2\langle u_1(\bar{x}, t)^2 \rangle} \int_0^{\infty} E_1(n) \cos 2\pi nt dn \quad (3.65)$$

$$E_1(n) = 4\langle u_1(\bar{x}, t)^2 \rangle \int_0^{\infty} R(t) \cos 2\pi nt dt \quad (3.66)$$

la correlación de fluctuaciones de velocidad y el espectro de densidad de energía son transformaciones de Fourier en cosenos; igualmente para la correlación espacial longitudinal

$$R_L(r) = \frac{1}{u_1'^2} \int_0^{\infty} E_1(n) \cos \frac{2\pi nr}{\langle u_1(\bar{x}, t) \rangle} dn \quad (3.67)$$

$$E_1(n) = \frac{4u_1'^2}{\langle u_1(\bar{x}, t) \rangle} \int_0^\infty R_L(r) \cos \frac{2\pi n r}{\langle u_1(\bar{x}, t) \rangle} dr \quad (3.68)$$

En lugar de trabajar con la *frecuencia* (n), es usual y útil trabajar con el *número de onda* (k)

$$k_1 = \frac{2\pi n}{\langle u_1(\bar{x}, t) \rangle} \quad (3.69)$$

Puede decirse que el valor del espectro de energía para un cierto número de onda k proporciona información sobre la energía cinética correspondiente a los torbellinos de escala l de la turbulencia, donde l viene dado por

$$l = \frac{2\pi}{k} \quad (3.70)$$

El espectro de energía entonces puede formularse en función del número de onda del siguiente modo

$$E_1(k_1) = \frac{\langle u_1(\bar{x}, t) \rangle}{2\pi} E_1(n) \quad (3.71)$$

$$\int_0^\infty E_1(k_1) dk_1 = \langle u_1(\bar{x}, t)^2 \rangle \quad (3.72)$$

$$R_L(x_1) = \frac{1}{u_1'^2} \int_0^\infty E_1(k_1) \cos k_1 x_1 dk_1 = \frac{1}{2u_1'^2} \int_{-\infty}^\infty E_1(k_1) \exp(ik_1 x_1) dk_1 \quad (3.73)$$

$$E_1(k_1) = \frac{2}{\pi} u_1'^2 \int_0^\infty R_L(x_1) \cos k_1 x_1 dx_1 = \frac{1}{\pi} u_1'^2 \int_{-\infty}^\infty R_L(x_1) \exp(-ik_1 x_1) dx_1 \quad (3.74)$$

Y de la misma forma, se puede introducir la función de espectro de energía $E_2(k_1)$ de las fluctuaciones de velocidad transversales que es referido a la correlación transversal de velocidades R_T :

$$R_T(x_1) = \frac{1}{u_1'^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_2(k_1) \exp(ik_1 x_1) dk_1 \quad (3.75)$$

$$E_2(k_1) = \frac{1}{\pi} u_1'^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_T(x_1) \exp(-ik_1 x_1) dk_1 \quad (3.76)$$

$$\int_0^{\infty} E_2(k_1) dk_1 = \int_0^{\infty} E_1(k_1) dk_1 = \langle u_1(\bar{x}, t)^2 \rangle \quad (3.77)$$

$$E_2(k_1) = \frac{1}{2} \left[E_1(k_1) - k_1 \frac{\partial E_1(k_1)}{\partial k_1} \right] \quad (3.78)$$

Espectro de energía tridimensional

Extendiendo los conceptos anteriores al caso tridimensional, resulta que en lugar de las correlaciones escalares $R_L(x_1)$ y $R_T(x_1)$ se considera el *tensor de correlación* Q_{ij} y el *tensor de espectro de energía* E_{ij} (este último es la transformada directa de Fourier de Q_{ij}):

$$Q_{ij}(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{ij}(k_1, k_2, k_3, t) \exp[i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)] dk_1 dk_2 dk_3 \quad (3.79)$$

$$E_{ij}(k_1, k_2, k_3, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{ij}(x_1, x_2, x_3, t) \exp[-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.80)$$

En el caso usual de turbulencia isotrópica se verifica:

$$Q_{ij}(x_1, x_2, x_3, t) = Q_{ij}(-x_1, -x_2, -x_3, t) \quad (3.81)$$

$$E_{ij}(k_1, k_2, k_3, t) = E_{ij}(-k_1, -k_2, -k_3, t) \quad (3.82)$$

lo que permite trabajar con $Q_{ij}(r, t)$ y $E_{ij}(k, t)$. Se utilizan coordenadas esféricas k , θ y φ con el eje polar en la dirección del *radio vector*, es decir, k es el radio vector en el espacio del número de onda.

Así, las ecuaciones (3.79) y (3.80) se transforman en:

$$\begin{aligned} Q_{ij}(r, t) &= \int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi E_{ij}(k, t) k^2 \sin\theta \exp[ikr \cos\theta] d\theta \\ &= 4\pi \int_0^\infty k^2 \frac{\sin kr}{kr} E_{ij}(k, t) dk \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} E_{ij}(k, t) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Q_{ij}(r, t) r^2 \sin\theta \exp[ikr \cos\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty r^2 \frac{\sin kr}{kr} Q_{ij}(r, t) dr \end{aligned} \quad (3.84)$$

Ahora se define $E(k, t)$ como la función de espectro de energía tridimensional del siguiente modo:

$$E(k, t) = 2\pi k^2 E_{ij}(k, t) \quad (3.85)$$

como

$$Q_{ij}(0, t) = 3 \langle u(r, t)^2 \rangle = 4\pi^2 \int_0^\infty k^2 E_{ij}(k, t) dk \quad (3.86)$$

se tiene

$$E(t) = \int_0^{\infty} E(k, t) dk = \frac{3}{2} \langle u(r, t)^2 \rangle \quad (3.87)$$

y entonces, de (3.87)

$$E(k, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} kr \sin kr Q_{ii}(r, t) dr \quad (3.88)$$

Por tanto, el espectro de energía $E(k, t)$ no es más que la densidad de energía cinética de la turbulencia en el espacio de Fourier integrada sobre una esfera de radio k , de forma que la energía total de la turbulencia viene dada por (3.87).

La evolución en el tiempo del espectro de energía para turbulencia homogénea e isotrópica, no forzada, viene dada por

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) E(k, t) = T_E(k) \quad (3.89)$$

donde $T_E(k)$ es la *función de transferencia de energía*, que representa la redistribución de energía en el espacio de Fourier como consecuencia de las interacciones del modo k con el resto de modos y puede expresarse según Frisch [38] como

$$T_E(k) = \int_0^{\infty} \cos(kl) \left(1 + l \frac{\partial}{\partial l} \right) \left(3 + l \frac{\partial}{\partial l} \right) \left(5 + l \frac{\partial}{\partial l} \right) \frac{S_3(l)}{6\pi l} dl \quad (3.90)$$

siendo: $S_3(l) = \langle (\bar{u}(\vec{r} + \vec{l}) - \bar{u}(\vec{r}))^3 \rangle$ la denominada función de estructura de tercer orden.

La disipación de energía dada por (3.49) puede expresarse en función del espectro de energía integrando (3.89) en todo el rango de modos k , obteniéndose

$$\varepsilon = \frac{dE}{dt} = - \int_0^{\infty} 2\nu k^2 E(k,t) dk \quad (3.91)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\int_0^{\infty} T_E(k) dk = 0$ debido a que $T_E(k)$ no contiene ningún término disipativo según probó McComb (1990) [47].

Es posible deducir una ecuación dinámica para el espectro de energía, que describe su comportamiento como función del tiempo y de las coordenadas espaciales. La deducción y desarrollo de dicha ecuación van más allá del propósito de esta investigación. El lector interesado puede consultar la bibliografía relacionada. Únicamente se comentará la forma de la función de espectro de energía y algunos resultados interesantes:

- 1º La disminución de energía cinética con el tiempo tiene lugar en el rango más alto, en los torbellinos con números de onda elevados; es decir, los torbellinos pequeños decaen en mayor medida que los grandes. En otras palabras, el efecto del tiempo se incrementa al incrementarse el número de onda y por tanto para números de onda muy pequeños la función de espectro de energía llega a hacerse menor y menos dependiente del tiempo.
- 2º Inicialmente, la función de espectro de energía se incrementa muy rápidamente hasta alcanzar un máximo y luego decrece monótonamente hasta cero al aumentar k .
- 3º A medida que la turbulencia crece hasta su completo desarrollo los torbellinos más grandes producen torbellinos más y más pequeños por la acción de la interacción inercial, transfiriendo energía a los torbellinos más pequeños. Al mismo tiempo los efectos viscosos y con ellos la disipación, se hacen más y más importantes para esos torbellinos más pequeños.

- 4° En el estado completamente desarrollado no son los torbellinos más grandes los que tendrán la máxima energía cinética sino los torbellinos en el rango de números de onda más elevado. El rango del espectro de energía donde los torbellinos realizan la contribución principal a la energía cinética total de la turbulencia se denomina el rango de los torbellinos conteniendo energía. En este rango es donde el espectro de energía alcanza su máximo. Es común asociar un número de onda k_e a este máximo, para indicar el rango de los torbellinos conteniendo energía.
- 5° La disipación debida a los efectos viscosos se incrementa -como ya se ha comentado- al disminuir el tamaño de los torbellinos, hasta llegar a un cierto tamaño de torbellinos más pequeños. Entonces, también se asocia un número de onda k_d con el tamaño de los torbellinos, que proporcionan la mayor contribución a la disipación total. Este valor k_d corresponde aproximadamente al máximo de la curva $(k^2 E(k, t)) - k$. La disipación produce una continua disminución de la energía cinética total de la turbulencia; es decir la turbulencia decae si no existe la presencia de alguna fuente de energía, lo cual tiene lugar en un cierto rango que puede ser comparado con las velocidades de turbulencia correspondientes a los números de onda del espectro de energía. En el extremo inferior de la escala de números de onda (correspondiente a los torbellinos de mayor tamaño), la “frecuencia” u_k/k de estos torbellinos es muy pequeña comparada con el ratio relativo de cambio de la energía cinética total de la turbulencia; y en el otro extremo, para números de onda grandes, los torbellinos más pequeños tendrán una “frecuencia” u_k/k_d relativamente muy alta. Entre esos dos extremos habrá un rango de números de onda donde las frecuencias de los torbellinos correspondientes serán del mismo orden que el promedio relativo de cambio de la turbulencia total y es lógico

- Para la escala de velocidad

$$v = (\nu \varepsilon)^{1/4} \quad (3.94)$$

y como ya se observó anteriormente, las dimensiones de estas escalas de Kolmogorov son tales que el número de Reynolds basado en ellas es

$$Re = \frac{v \eta}{\nu} = 1 \quad (3.95)$$

El número de onda k_d donde los efectos viscosos llegan a ser muy fuertes será del orden de:

$$k_d = \frac{1}{\eta} \quad (3.96)$$

En el otro extremo del rango de equilibrio se tiene el número de onda k_e marcando el rango de los torbellinos conteniendo energía. En su expresión se define una longitud l_e que puede interpretarse como la medida promedio de los torbellinos conteniendo energía, de modo que:

$$k_e = \frac{1}{l_e} \quad (3.97)$$

Se puede relacionar los parámetros característicos de la turbulencia con η , v y l_e . Así pues, es razonable asumir que la escala integral longitudinal de espacio L_l -que está determinada por el tamaño de los grandes torbellinos conteniendo energía- es del orden de la medida promedio l_e de estos torbellinos. Además cabe esperar que las relaciones entre los parámetros mencionados dependerán del número de Reynolds de la turbulencia. Si el Reynolds ($v\eta/\nu$) es igual a uno, caracteriza sólo la región de fuertes efectos viscosos, donde las fuerzas inerciales son del mismo orden de magnitud que las fuerzas de corte viscosas. Este Reynolds no es suficiente para caracterizar la turbulencia en las otras zonas de números de onda. Pueden obtenerse otros dos números de Reynolds, que serían:

$$\text{Re}_\lambda = \frac{u' L_{\lambda T}}{\nu} \quad (3.98)$$

$$\text{Re}_{l_e} = \frac{u' l_e}{\nu} \quad (3.99)$$

y considerando las regiones de máxima disipación y de los torbellinos conteniendo energía, ε será prácticamente igual por un lado a la disipación en el rango de números de onda más grande y por otro lado prácticamente igual al trabajo realizado por los torbellinos conteniendo energía, que es la energía suministrada a los torbellinos más pequeños. Así,

$$\varepsilon = 15\nu \frac{u'^2}{L_{\lambda T}^2} \quad (3.100)$$

$$\varepsilon = A \frac{u'^3}{l_e} \quad (3.101)$$

donde A es una constante numérica del orden unidad.

Por tanto, es fácil verificar que las relaciones comentadas son

$$\text{Re}_{l_e} = \frac{A}{15} \text{Re}_\lambda^2 \quad (3.102)$$

$$\frac{u'}{\nu} = 15^{-1/4} \text{Re}_\lambda^{1/2} \quad (3.103)$$

$$\frac{L_{\lambda T}}{\eta} = 15^{1/4} \text{Re}_\lambda^{1/2} \quad (3.104)$$

$$\frac{l_e}{L_{\lambda T}} = \frac{A}{15} \text{Re}_\lambda \quad (3.105)$$

$$\frac{l_e}{\eta} = 15^{-3/4} A \text{Re}_\lambda^{3/2} \quad (3.106)$$

A partir de la última ecuación es posible definir de un modo más preciso la condición para la existencia del RANGO DE EQUILIBRIO. En este rango, los números de onda verifican $k \gg k_e$ y además $k_e \ll k_d$ o bien en términos de l_e y η , $l_e \gg \eta$; por la ecuación (3.106)

$$Re_\lambda^{3/2} \gg 1 \quad (3.107)$$

Esta última condición expresada en términos de Re_{le} queda

$$Re_{le}^{3/4} \gg 1 \quad (3.108)$$

En la descripción del rango de equilibrio se ha dicho que en él la disipación no sólo tiene lugar en todos los números de onda sino que además se incrementa fuertemente al crecer el número de onda. Puede esperarse que si el número de Reynolds de la turbulencia es muy grande, la disipación en la región de números de onda muy alejada bajo la región de máxima disipación puede ser pequeña y despreciable comparada con el flujo de energía transferido por los efectos inerciales. En dicho subrango el efecto del parámetro ν no habría que tenerlo en cuenta y la turbulencia estaría caracterizada sólo por el otro parámetro ε . Sin embargo, esto sólo puede hacerse si no hay efecto directo de los torbellinos conteniendo energía, es decir, si no hay efecto directo de otro parámetro que no sea ε sobre la turbulencia en la región de torbellinos conteniendo energía. La condición para los números de onda en este subrango es

$$k_e \ll k \ll k_d \quad (3.109)$$

La turbulencia en este rango es estadísticamente independiente del rango de torbellinos conteniendo energía y del rango de fuerte disipación.

Kolmogorov consideró este subrango en su segunda hipótesis.

Segunda hipótesis de Kolmogorov

“Si el número de Reynolds es infinitamente grande, el espectro de energía en el subrango especificado por (3.109) es independiente de ν y está determinado solamente por el parámetro ε .”

Como en este subrango el factor dominante es la transferencia inercial de energía, es denominado *subrango inercial*.

La condición (3.109) para la existencia de tal subrango inercial muestra, en comparación con la condición $k_e \ll k_d$ para la existencia de un rango de equilibrio, que el número de Reynolds debe ser al menos de un orden de magnitud mayor. Las condiciones (3.107) y (3.108) son insuficientes y deben ser reemplazadas por

$$\text{Re}_\lambda^{3/4} \gg 1 \quad (3.110)$$

$$\text{Re}_{t_e}^{3/8} \gg 1 \quad (3.111)$$

Si se considera ahora la zona fuera del rango de equilibrio, es decir, el rango de números de onda más pequeños, adyacente al mencionado rango de equilibrio pero suficientemente lejos de él hay independencia estadística, está el rango de los torbellinos conteniendo energía. En este rango la “frecuencia” ($u'k_e$) es del mismo orden que la variación relativa de energía cinética de la turbulencia total. Entonces es razonable esperar que en este rango el tiempo t deberá ser tomado en consideración como otro parámetro característico más en adición a los parámetros ε y ν que gobiernan el rango de equilibrio.

Si el número de Reynolds no tiene valores tan extremadamente altos, la disipación y el efecto de la viscosidad pueden ser despreciados y sólo dos de los tres parámetros ε , ν y t bastan para adimensionalizar E y k ; estos parámetros no pueden ser independientes entre sí, forman un grupo adimensional que debe ser constante:

$$\frac{\varepsilon t^2}{\nu} = \text{const.} \quad (3.112)$$

este grupo adimensional puede interpretarse como un número de Reynolds de turbulencia, por lo que de acuerdo con (3.112) el número de Reynolds permanecería constante durante el decaimiento de la turbulencia.

Si por otro lado, el número de Reynolds es infinitamente grande, en el rango de equilibrio hay un subrango inercial donde el espectro de energía está determinado sólo por un parámetro ε y es independiente de ν , por lo que es lógico esperar que en el rango de números de onda más pequeños de los torbellinos conteniendo energía, el efecto de la viscosidad será tan pequeño que puede despreciarse, así que en este rango el espectro de energía dependerá sólo de dos parámetros ε y t .

Finalmente, en el rango de números de onda todavía más pequeños, se tienen los torbellinos más grandes, que muestran un fuerte grado de permanencia y la dependencia con el tiempo decrece al disminuir el número de onda. Realmente se conoce que en el rango de números de onda más pequeño el espectro de energía de acuerdo con la teoría de Batchelor-Proudman [48] se verifica que

$$\lim_{k \rightarrow 0} E(k, t) = I(t) k^4 \quad (3.113)$$

donde

$$I = -\frac{1}{6\pi} \int_0^\infty Q_{ii}(r, t) r^4 dr = \frac{u'^2}{3\pi} \int_0^\infty R_L(r) r^4 dr \quad (3.114)$$

es la integral de Loitsianskii . En consecuencia, se puede considerar la integral de Loitsianskii (I) como el parámetro que determina el rango de números de onda más pequeños.

Existe otra cualidad que es característica de los torbellinos grandes en el rango de números de onda pequeños que es la ACCIÓN DIFUSIVA DE LA TURBULENCIA. Von Karman y Lin [45] asumieron que la difusividad turbulenta (ϵ) debe ser considerada como el parámetro que determina el carácter de la turbulencia en el rango de números de onda más pequeños.

Con esto, queda cubierto completamente todo el rango de números de onda, resultando para la forma de $E(k, t)$ la que se observa en la Figura 3-1.

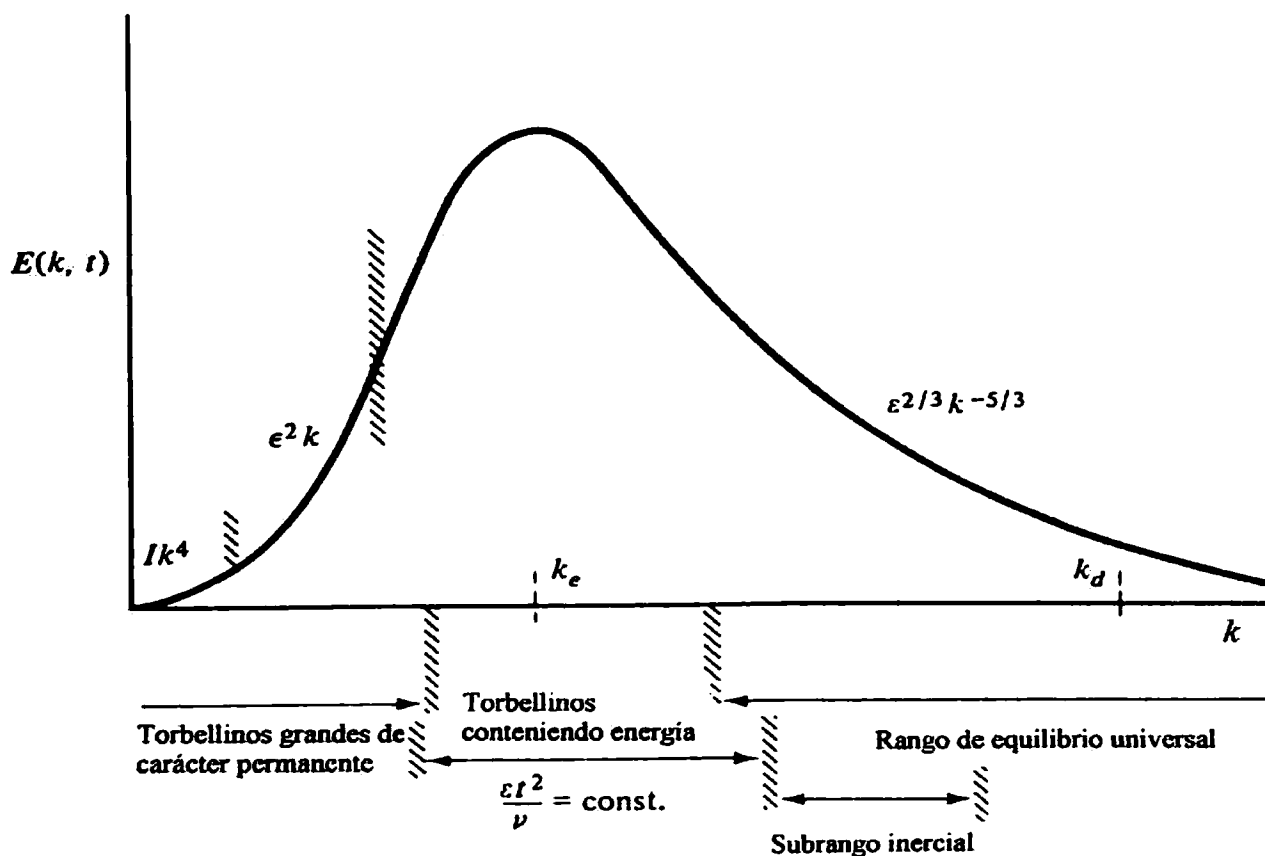


Figura 3-1: Forma del espectro de energía tridimensional en todo el rango de números de onda.

Recapitulando -empezando desde el rango más pequeño- se tiene:

1. Rango bajo, determinado por l y ϵ , donde la turbulencia es fuertemente permanente.
 - 1a. Subrango más bajo, determinado solamente por l .
2. Rango medio, determinado por ϵ y ν .
 - 2a. Subrango más bajo del rango medio, determinado solamente por ϵ , donde la turbulencia muestra todavía alguna permanencia.
3. Rango alto, determinado por ϵ , ν y t .
 - 3a. Comprende el rango de los torbellinos conteniendo energía.
 - 3b. Determinado por ϵ y t sólo, si $Re_\lambda^{3/4} \gg 1$.
4. Rango más alto, determinado por ϵ y ν . Este es el rango de equilibrio universal.
 - 4a. Subrango inercial más bajo de este rango, determinado solamente por ϵ si $Re_\lambda^{3/4} \gg 1$.

Todo esto, puede esquematizarse en la siguiente Tabla 3-1.

TABLA 3-2. Rangos y Subrangos del espectro de energía de la turbulencia

	Rango de incremento de $k \rightarrow$			
	(1)	(2)	(3)	(4)
Magnitudes	E, k, l, ϵ	E, k, ϵ, ν	E, k, ϵ, ν, t	E, k, ϵ, ν
Parámet. básicos	l, ϵ	ϵ, ν	ϵ, ν ó ϵ, l ó ν, t	ϵ, ν
Longitud caract.	$(l/\epsilon^2)^{1/3}$	$(\epsilon^3/\nu)^{1/4}$	$(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$	$(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$
Tiempo caract.	$(l^2/\epsilon^7)^{1/3}$	$(\epsilon/\nu)^{1/2}$	$(\nu/\epsilon)^{1/2}$	$(\nu/\epsilon)^{1/2}$
Velocidad caract.	$(\epsilon^5/l)^{1/3}$	$(\epsilon \nu)^{1/4}$	$(\nu \epsilon)^{1/4}$	$(\nu \epsilon)^{1/4}$
$E(k, t)$	$\epsilon^{5/3} l^{-1/3} E^*[k(l/\epsilon^2)^{1/3}]$	$\epsilon^{5/4} \nu^{1/4} E^*[k(\epsilon^3/\nu)^{1/4}]$	$\nu^{3/4} \epsilon^{1/4} E^*[k(\nu^3/\epsilon)^{1/4}, \epsilon t^2/\nu]$ $\epsilon^{3/2} t^{5/2} E^*(k \epsilon^{1/2} t^{1/2})$ si $Re_\lambda^{3/4} \gg 1$	$\nu^{3/4} \epsilon^{1/4} E^*[k(\nu^3/\epsilon)^{1/4}]$
Subrangos				
Parámetro básico	l	ϵ		$Re_\lambda^{3/4} \gg 1$
$E(k, t)$	$l k^4$	$\text{const.} \times \epsilon^2 k$		ϵ $\text{const.} \times \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$

3.4. Teoría de Kraichnan. Cascada de enstrofia y cascada inversa de energía

Los conceptos teóricos que se han descrito en el apartado anterior fueron desarrollados para la turbulencia tridimensional. La turbulencia bidimensional no puede ser considerada como un caso particular de la misma, aún cuando represente una simplificación desde la perspectiva de una reducción de dimensiones espaciales, por la sencilla razón de la conservación de la vorticidad con el movimiento del fluido. Es por ello que la turbulencia bidimensional posee características únicas. El estudio estadístico de la turbulencia bidimensional está ampliamente desarrollado en los trabajos de Kraichnan & Montgomery (1980) [37] y de Lesieur (1983) [49].

Del mismo modo que en el caso tridimensional, en la turbulencia bidimensional la energía es conservada por los términos no lineales de las ecuaciones de la dinámica, pero además se conserva la enstrofia -que fue definida en la ecuación (3.10)- debido a que no se produce el fenómeno conocido como “*vortex stretching*” o alargamiento de los vórtices. La relación entre la enstrofia media $Z(t)$ y el espectro de energía $E(k,t)$ viene dada por la siguiente expresión - donde $\Omega_z(k,t)$ es el espectro de enstrofia-:

$$Z(t) = \int_0^{\infty} k^2 E(k,t) dk = \int_0^{\infty} \Omega_z(k,t) dk \quad (3.115)$$

Entonces, considerado un flujo turbulento estacionario donde la energía es inducida por una fuente exterior de vorticidad o “*forzage*” $f(k)$ alrededor de k_e , al igual que existe una inyección de energía cinética (que debe ser igual a la dispersión, ya que la energía debe estar equilibrada globalmente)

$$E_c = \int_0^{\infty} f(k) dk \quad (3.116)$$

existe una inyección de enstrofia

$$\beta_z = \int_0^{\infty} k^2 f(k) dk \approx k_e^2 \varepsilon \quad (3.117)$$

En este caso, se demuestra que aparece una doble cascada. La energía es transferida casi exclusivamente hacia las escalas grandes ($k < k_e$), mientras que el flujo de enstrofia tiene lugar hacia las pequeñas escalas ($k > k_e$). Si el Reynolds es lo suficientemente alto, existe un rango de número de onda, $k_e < k < k_d$, en el que la dinámica de la turbulencia es función solamente de β_z y k . Mediante análisis dimensional se obtiene que el espectro de energía en este rango es del orden

$$E(k) \sim \beta_z^{2/3} k^{-3} \quad (3.118)$$

El número de onda k_d corresponde a la escala donde la enstrofia se difunde por efecto de la viscosidad molecular:

$$k_d = \left(\frac{\beta_z}{\nu^3} \right)^{1/6} \quad (3.119)$$

En la Figura 3-2, se muestra el espectro de energía de un flujo turbulento bidimensional.

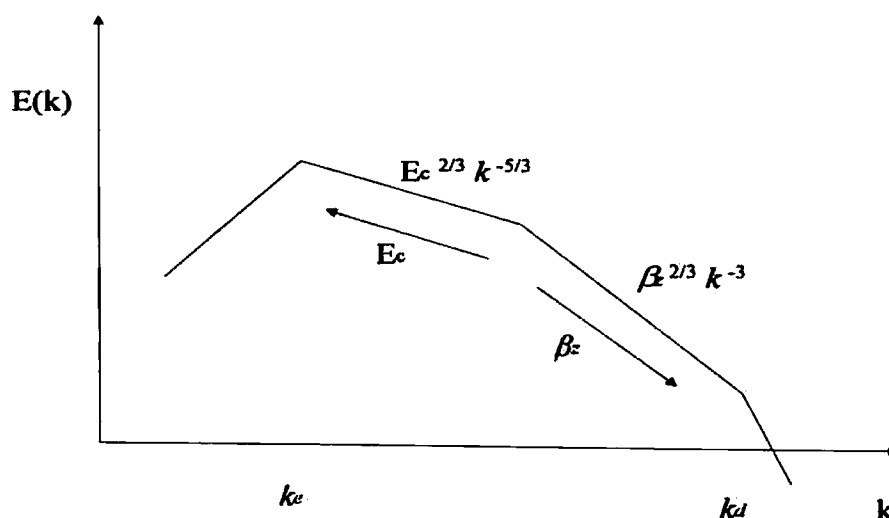


Figura 3-2: Representación esquemática del espectro de energía de turbulencia bidimensional.

3.5. Modelos numéricos de simulación de flujos turbulentos

En este apartado se va a introducir cuatro modelos para realizar la simulación de flujos turbulentos en un ordenador. Aunque por supuesto existen más modelos, no entra en el propósito de esta Tesis la descripción de todos ellos. Solo se describirán los que probablemente han tenido más aplicación en los últimos tiempos.

En primer lugar, se verá dos simulaciones basadas en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes. La primera, denominada Simulación Numérica Directa (**Direct Numerical Simulation**, o DNS) resuelve directamente las ecuaciones en todas las escalas presentes en el dominio computacional. La segunda, conocida como **Large-Eddy Simulation** (LES) y que podría traducirse como Simulación de Gran Torbellino, lo que hace es modificar las ecuaciones de la dinámica de modo que las variables representan el comportamiento del flujo para escalas mayores que la determinada por la discretización del dominio. Es preciso modelar las interacciones a escalas menores.

Después se detallarán los modelos conocidos como Simulación Cinemática (**Kinematic Simulation**, KS) y Generación Estocástica (**Stochastic Generation**, SG), que lo que hacen es generar unos flujos turbulentos, por así decirlo, artificiales, tales que posean propiedades estadísticas convenientes pero sin resolver las ecuaciones de la dinámica de fluidos.

3.5.1. Simulación numérica directa

Existe una gran variedad de esquemas de Simulación Numérica Directa para el flujo turbulento. En esta investigación se describe un esquema bidimensional en un dominio biperiódico. La descripción detallada del modelo puede consultarse en los trabajos de Babiano *et al.* (1985, 1987, 1990) [50, 51, 52], Elhmaïdi *et al.* (1993) [53] y Zouari & Babiano (1990, 1994) [54, 55].

El campo euleriano de velocidades se obtiene integrando la ecuación de vorticidad barotrópica quasi-geostrófica:

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + J(\omega, \psi) = G(\omega) + F(\omega) \quad (3.120)$$

que es la ecuación (3.9) con la inclusión del término $F(\omega)$ que corresponde a un término de fuente exterior de vorticidad. Además en el término de disipación de viscosidad $G(\omega)$ se incluye una parametrización de escala de submalla con lo que la disipación de enstrofia se calcula (Babiano *et al.* 1990) [52]

$$g(\omega) = J\left[\psi, t_c (l_c^2 \Delta)^4 J(\psi, \omega)\right] + \frac{\psi}{t_d l_d^2} \quad (3.121)$$

donde t_c y t_d son tiempos característicos que corresponden a la escala de corte y a la escala máxima del flujo y l_c y l_d son la escala de corte y la escala máxima. El primer término del segundo miembro de la última ecuación representa la disipación de enstrofia a pequeña escala y el último término es una fricción lineal que disipa energía en las grandes escalas. El término de fuente exterior de vorticidad o de forzage $F(\omega)$ se define de forma que la densidad espectral de energía se mantiene constante en una cierta escala denominada escala de forzage.

La ecuación (3.120) se resuelve en un dominio bidimensional biperiódico de dimensiones $2\pi \times 2\pi$ usando una aproximación pseudo-espectral.

De ese modo se obtendría, como ya se ha indicado, el campo euleriano de velocidades.

También es posible desarrollar un esquema lagrangiano, en el que la trayectoria de una partícula se obtiene integrando la ecuación

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{v}[\vec{x}(t), t] \quad (3.122)$$

siendo $\bar{x}(t)$ la posición de la partícula en el instante t y $\bar{v}[\bar{x}(t), t]$ su velocidad, que coincide con la velocidad euleriana del campo en la posición $\bar{x}$ en el instante t .

Generalmente, la posición $\bar{x}$ no coincidirá con un nodo de la malla de la simulación por lo que la velocidad euleriana hay que calcularla mediante una interpolación entre nodos, que en este modelo se realiza mediante un spline de tercer orden.

La integración de (3.122) puede realizarse mediante un método de Runge-Kutta de segundo orden (Anexo I.2).

3.5.2. Large-Eddy Simulation

Este modelo, al contrario que la Simulación Numérica Directa no simula explícitamente todas las escalas de la turbulencia, pero es útil en muchas situaciones en las cuales lo que interesa de una simulación es el comportamiento a gran escala. Por tanto es necesario un modelo que represente la transferencia de energía a las escalas pequeñas.

El desarrollo de las ecuaciones a gran escala se lleva a cabo con la ayuda de una función de filtro que asocia un determinado campo $f(\bar{x}, t)$ con la malla, de tamaño Δx , creando así el campo filtrado mediante una operación de convolución

$$\bar{f}(\bar{x}, t) = \int \bar{G}_{\Delta x}(\bar{x} - \bar{y}) f(\bar{x}, t) d\bar{y} = \int \bar{G}_{\Delta x}(\bar{y}) f(\bar{x} - \bar{y}, t) d\bar{y} \quad (3.123)$$

El filtro $\bar{G}_{\Delta x}$ suele ser una curva gaussiana de tamaño $\sigma^2 \sim \Delta x^2$. Si Δx es constante en toda la malla, esta operación de filtrado conmuta con las derivadas espaciales por lo que, si la variable considerada es la velocidad, la condición de continuidad se cumple también para la velocidad filtrada:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.124)$$

Aplicando la operación de filtrado a las ecuaciones de Navier-Stokes se obtiene

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + T_{ij} \right] \quad (3.125)$$

donde T_{ij} es el tensor de escala de submalla:

$$T_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - (\overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{\bar{u}_j u'_i}) - \overline{u'_i u'_j} \quad (3.126)$$

con la fluctuación de velocidad definida como

$$u'_i = u_i - \bar{u}_i \quad (3.127)$$

El siguiente paso consiste en escribir los términos relacionados con el campo de submalla (fluctuaciones) como función del campo a gran escala.

Por analogía con la expresión (2.6) es común escribir el tensor de submalla (T_{ij}) por la siguiente expresión, donde ν_t es la viscosidad turbulenta:

$$T_{ij} = 2\nu_t \bar{S}_{ij} + \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} \quad (3.128)$$

y el tensor de deformación del campo filtrado ($\bar{S}_{ij}$) por:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.129)$$

Con ello, pueden escribirse las ecuaciones de Navier-Stokes para el campo filtrado

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_i + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} [(\nu + \nu_t) \bar{S}_{ij}] \quad (3.130)$$

donde $\bar{P}$ es la presión modificada $\bar{P} = \bar{p} - (1/3)\rho T_{kk}$

El problema ahora es encontrar un modelo para la viscosidad turbulenta. Uno de los más utilizados es el de Smagorinsky (1963) [56], que considera ν_t proporcional al tamaño de la malla y a una cierta velocidad relacionada con esa escala:

$$\nu_t = (C_s \Delta x)^2 \sqrt{2\bar{S}_y \bar{S}_y} \quad (3.131)$$

con la constante C_s entre 0,1 y 0,2.

El principal inconveniente de esta simulación radica en que cualquiera que sea el modelo de transferencia de energía a pequeña escala, no se conseguirá propagar el carácter impredecible de la escala de submalla a las grandes escalas.

3.5.3. Generación Estocástica

Este tipo de simulaciones han sido utilizadas para generar flujos turbulentos con unas propiedades estadísticas concretas. Se basan en una ecuación de Oerstein-Uhlenbeck y en la técnica que se desarrollará a continuación que crea la función de corriente del flujo a partir de una ecuación de Langevin (Careta *et al.* 1993) [57], (Martí Pérez, 1997) [58].

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \nu \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + Q[\lambda_G^2 \nabla^2] \nabla \cdot \vec{\xi}_G(\vec{r}, t) \quad (3.132)$$

donde ν es la viscosidad cinemática y ξ_G es un ruido gaussiano blanco con media cero y correlación

$$\langle \xi_{Gi}(\vec{r}_1, t_1) \xi_{Gj}(\vec{r}_2, t_2) \rangle = 2\varepsilon_0 \nu \delta(t_1 - t_2) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta_{ij} \quad (3.133)$$

Los parámetros ε_0 y λ_G controlan la intensidad del flujo y la escala integral, respectivamente. Al igual que en la simulación cinemática, el espectro de energía es establecido en el modelo como parámetro externo. En este caso, es introducido mediante el operador $Q[\lambda_G^2 \nabla^2]$

La transformada de Fourier de (3.132) es

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\bar{k}, t) = -\nu k^2 \hat{\psi}(\bar{k}, t) - iQ(-\lambda_G^2 k^2) k_i \xi_{Gi}(\bar{k}, t) \quad (3.134)$$

y la correlación en el espacio de Fourier de la función de corriente es

$$\langle \hat{\psi}^*(\bar{k}_1, t) \hat{\psi}(\bar{k}_2, t) \rangle = (2\pi)^2 \delta(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) S(k, t) \quad (3.135)$$

donde $S(k, t)$ está relacionada con el espectro de energía mediante

$$E(k, t) = \frac{1}{4\pi} k^3 S(k, t) \quad (3.136)$$

Mediante cálculo estocástico (Gardiner, 1985) [59], y usando (3.133), puede demostrarse que $S(k, t)$ cumple

$$\frac{\partial}{\partial t} S(k, t) = -2\nu k^2 S(k, t) + 2\varepsilon_0 \nu k^2 Q^2(-\lambda_G^2 k^2) \quad (3.137)$$

y por lo tanto, el espectro evolucionará en el tiempo del siguiente modo

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = -2\nu k^2 E(k, t) + \pi k W(k) \quad (3.138)$$

que es la expresión (3.89), pero sin el término de transferencia de energía entre modos $T_E(k)$ y un término adicional, $W(k)$ que representa la inyección de energía debida al forzage,

$$W(k) = \frac{\varepsilon_0 \nu}{2\pi^2} k^4 Q^2(-\lambda_G^2 k^2) \quad (3.139)$$

El estado estacionario es alcanzado cuando el término de forzage se equilibra con el de disipación, de forma que

$$E(k) = \frac{\pi}{2\nu k} W(k) = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} k^3 Q^2(-\lambda_G^2 k^2) \quad (3.140)$$

y surge la relación entre el operador $Q[\lambda_G^2 \nabla^2]$ y el espectro de energía del campo que se quiere simular.

El modelo se implementa discretizando la ecuación (3.134) en el espacio de Fourier, convirtiéndose en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales y no acopladas. La integración exacta entre t y $t + \Delta t$ da

$$\psi_{\alpha\beta}(t + \Delta t) = \exp(\nu c_{\alpha\beta} \Delta t) \psi_{\alpha\beta}(t) + \sigma_{\alpha\beta}(t) + \gamma_{\alpha\beta}(t) \quad (3.141)$$

en función de las nuevas variables aleatorias

$$\sigma_{\alpha\beta}(t) = Q_{\alpha\beta} d_{x\alpha\beta} \int_t^{t+\Delta t} \xi_{Gx\alpha\beta}(t') \exp[(t + \Delta t - t') \nu c_{\alpha\beta}] dt' \quad (3.142)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(t) = Q_{\alpha\beta} d_{y\alpha\beta} \int_t^{t+\Delta t} \xi_{Gy\alpha\beta}(t') \exp[(t + \Delta t - t') \nu c_{\alpha\beta}] dt' \quad (3.143)$$

Los operadores diferenciales laplaciano y divergencia se convierten en los factores $c_{\alpha\beta}$ y $d_{\alpha\beta}$, respectivamente,

$$c_{\alpha\beta} = \frac{2}{\Delta^2} \left[\cos\left(\frac{2\pi\alpha}{N}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\beta}{N}\right) - 2 \right] \quad (3.144a)$$

$$\vec{d}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta} \left(\exp\left(i \frac{2\pi\alpha}{N}\right) - 1, \exp\left(i \frac{2\pi\beta}{N}\right) - 1 \right) \quad (3.144b)$$

donde Δ es el tamaño de la discretización espacial y N el de la malla.

A partir de una adecuada condición inicial, se calcula para cada paso de tiempo la función de corriente ψ en el espacio de Fourier, y se realiza la antitransformada discreta para obtener el campo de velocidades,

$$v_{x\alpha\beta}(t) = \frac{1}{2\Delta} (\psi_{\alpha,\beta-1}(t) - \psi_{\alpha,\beta+1}(t)) \quad (3.145)$$

$$v_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{2\Delta} (\psi_{\alpha+1,\beta}(t) - \psi_{\alpha-1,\beta}(t)) \quad (3.146)$$

3.5.4. Simulación cinemática

Este modelo, al igual que el de Generación Estocástica, introduce el espectro de energía como parámetro de la simulación. Además, en ambos casos, no existe un flujo real de energía ni enstrofia entre escalas; el modelo establece la energía de cada escala, que se mantiene constante durante la simulación. Este modelo, al crear el campo de velocidades directamente a partir del espectro de energía, presenta la ventaja sobre la Generación Estocástica de que no es una simulación basada en una malla y no es necesario resolver ninguna ecuación.

El origen de este método de simulación está en los trabajos de Kraichnan (1970) [60], que estudió la difusión de partículas en un flujo turbulento, homogéneo, isótropo y estacionario, creado por la superposición de modos de Fourier discretos. Con ello, el campo euleriano de velocidades en el punto $\vec{x}$ y en el instante t viene dado por

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^N [\vec{A}(\vec{k}_i) \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{x} + \omega_i \cdot t) + \vec{B}(\vec{k}_i) \sin(\vec{k}_i \cdot \vec{x} + \omega_i \cdot t)] \quad (3.147)$$

donde N es el número de modos de la simulación y

$$\vec{A}(\vec{k}_i) = \vec{\zeta}_{Si} \times \vec{k}_i \quad (3.148a)$$

$$\vec{B}(\vec{k}_i) = \vec{\xi}_{Si} \times \vec{k}_i \quad (3.148b)$$

con lo que se cumple la ecuación de continuidad

$$\vec{k}_i \cdot \vec{A}(\vec{k}_i) = \vec{k}_i \cdot \vec{B}(\vec{k}_i) = 0 \quad (3.149)$$

Los vectores $\vec{\zeta}_{Si}$ y $\vec{\xi}_{Si}$ se obtienen a partir de una distribución gaussiana bi o tridimensional según el caso, tienen carácter aleatorio y su módulo se calcula a

partir del espectro de energía. Los vectores $\bar{k}_i$ se obtienen a partir de una distribución isotrópica. La frecuencia propia de cada escala ω_i es obtenida de una distribución gaussiana de desviación estándar ω_0 .

Con ello, se realizaría el análisis lagrangiano integrando la ecuación de movimiento de la partícula:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{u}(\bar{x}, t) \quad (3.150)$$

Este modelo fue ampliado por Fung *et al.* en 1992 [23], que simularon campos tridimensionales con un único espectro de energía, el de Von Karman:

$$E(k) \sim \frac{k^4}{(g_E + k^2)^{7/6}} \quad (3.151)$$

donde g_E es una constante que depende de la normalización del espectro. Dicho espectro, para grandes escalas se comporta como $E(k) \sim k^4$ y para pequeña escala en el subrango inercial como $E(k) \sim k^{-5/3}$.

Vassilicos y Fung (1995, 1998) [61, 62] simularon un campo de velocidades casi turbulento, bidimensional e incompresible con un espectro de energía euleriano prescrito de la forma

$$E(k) = E_0 L(kL)^{-p} \quad (3.152)$$

en el rango $2\pi/L = k_1 \leq k \leq k_N = 2\pi/\eta$ y $E(k)=0$ fuera de ese rango. Las frecuencias ω_i determinan la inestabilidad asociada con el modo de onda i . La simulación la realizaron con dos modelos diferentes de inestabilidad. Primero tomaron un modelo donde la frecuencia es proporcional al tiempo de retorno del torbellino de modo de onda i :

$$\omega_i = \lambda_E \sqrt{k_i^2 E(k_i)} \quad (3.153)$$

donde λ_E es una constante adimensional llamado coeficiente de estacionariedad y luego tomaron un modelo donde todos los modos de onda son advectados con una velocidad constante U_A , es decir,

$$\omega_i = U_A k_i \quad (3.154)$$

Posteriormente, Castilla (2000) [63] simuló la parte del espectro correspondiente al subrango inercial para un campo bidimensional. Los modos de Fourier $\tilde{A}(k_i) = \tilde{A}_i$ y $\tilde{B}(k_i) = \tilde{B}_i$ fueron calculados directamente así

$$\|\tilde{A}_i\| = \|\tilde{B}_i\| = \int_{k_i - \Delta k_i}^{k_i + \Delta k_{i+1}} E(k) dk \quad (3.155)$$

donde $E(k)$ es el espectro de energía y $\Delta k_i = \frac{k_i - k_{i-1}}{2}$

La distribución de k_i puede ser geométrica.

$$k_i = k_1 \left(\frac{k_N}{k_1} \right)^{\frac{i-1}{N-1}} \quad (3.156)$$

algebraica,

$$k_i = k_1 i^{\log(k_N/k_1)/\log N} \quad (3.157)$$

o lineal,

$$k_i = k_1 + \left(\frac{k_N - k_1}{N-1} \right) (i-1) \quad (3.158)$$

El tomar una u otra determina el reparto de energía entre modos, pero para N suficientemente grande no existe diferencia entre el campo generado por cada distribución.

Castilla (2000) [63] utilizó para las frecuencias de cada modo ω_i el modelo propuesto por Fung *et al.*(1992) [23] y Fung & Vassilicos (1998) [62] mencionado en (3.153).

El modelo de Simulación Cinemática y en general todos los modelos que han sido descritos dan buenos resultados en el estudio de la dispersión de partículas en flujos turbulentos, pero no en el problema de la sedimentación de partículas, donde los resultados obtenidos presentan significativas diferencias con la teoría y los resultados experimentales.

Con todo lo expuesto se ha tratado de compendiar los conocimientos teóricos básicos sobre corrientes turbulentas. Naturalmente, la teoría de la turbulencia es más extensa que la recogida en esta Tesis, pero su tratamiento completo excede los objetivos planteados en la misma, tal como se ha comentado anteriormente. Por otro lado, una exposición más reducida no parece conveniente ya que es preciso justificar la asunción generalizada de suponer la turbulencia como una superposición de vórtices y, además no parece adecuado llevar a cabo una recopilación de los fundamentos teóricos sin que se contemple la importancia que los flujos vorticales y su distribución a lo largo del espectro de energía tienen en las corrientes turbulentas.

4. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LOS VÓRTICES

4.1. Vector vorticidad

En el estudio de la Cinemática de los Fluidos, cuando se realiza el análisis de las velocidades en el entorno de un punto, se obtiene que el movimiento del fluido en el entorno de un punto fijo $\vec{x}$ cualquiera puede interpretarse como la superposición de tres movimientos más simples: un *movimiento de rotación* como sólido rígido alrededor del punto $\vec{x}$, más un *movimiento de deformación* alrededor de dicho punto, más un *movimiento de traslación*. La superposición de los movimientos de rotación y deformación constituye el movimiento relativo entre los puntos de la partícula fluida.

Considerando entonces una partícula fluida y dos puntos materiales de la misma separados una distancia elemental $d\vec{x}$, se obtiene para el desplazamiento relativo por unidad de tiempo la siguiente expresión

$$d\vec{u} = d\vec{x} \cdot \vec{\gamma} + d\vec{x} \cdot \vec{\xi} = d\vec{u}_d + d\vec{u}_{rot} \quad (4.1)$$

donde: $\vec{\gamma}$ es el tensor de velocidades de deformación que representa la parte *simétrica* que da lugar al desplazamiento relativo por deformación ($d\vec{u}_d$) y $d\vec{u}_{rot}$ es la parte *antisimétrica* que corresponde a una velocidad de rotación como sólido rígido. Sus componentes cartesianas vienen dadas por

$$d\vec{u}_{rot} = \frac{1}{2} d\vec{x}_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.2)$$

Es fácil comprobar que dichas componentes son las del producto vectorial $1/2 \vec{\omega} \times d\vec{x}$, donde $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ se denomina VECTOR VORTICIDAD del fluido. Por lo tanto, la siguiente expresión representa una rotación como sólido rígido de la partícula fluida alrededor del punto $\vec{x}$ con velocidad angular $\vec{\omega}/2$.

$$d\vec{u}_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}(x,t) \times d\vec{x} \quad (4.3)$$

Así pues el vector vorticidad puede interpretarse físicamente como “*el doble de la velocidad angular con que un elemento infinitesimal de fluido gira como sólido rígido alrededor del punto considerado*”.

4.2. Campo de velocidades inducido por una distribución de vorticidad

Es posible calcular el campo de velocidades conocida la distribución de vorticidad. Ello además es útil en muchos casos, puesto que la descripción del movimiento fluido en términos de la vorticidad posee la ventaja adicional de que ésta satisface las leyes de conservación en muchas situaciones de interés, de modo que su distribución en cualquier instante del movimiento se encuentra concentrada en regiones limitadas del dominio fluido.

Si se considera una distribución de vorticidad $\vec{\omega}(x,t)$ de modo que $\vec{\omega} \neq 0$ en un volumen Ω_0 finito y $\vec{\omega} = 0$ en cualquier punto exterior a Ω_0 , limitándose a un fluido incompresible, entonces el campo de velocidades se obtendrá de la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (4.4)$$

Esta ecuación se satisface idénticamente, si se define el potencial vector $\vec{A}$ tal que:

$$\vec{u} = \nabla \times \vec{A} \quad (4.5)$$

El potencial vector A satisface la ecuación diferencial:

$$\nabla \times \vec{u} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \vec{\omega} \quad (4.6)$$

Esta ecuación se simplifica si entre todas sus posibles soluciones se elige una de divergencia nula, con lo que el potencial vector satisfará la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\vec{\omega} \quad (4.7)$$

que es la conocida **Ecuación de Poisson**, cuya solución es:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \frac{\vec{\omega}(\vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} d\vec{\omega} \quad (4.8)$$

Puede comprobarse fácilmente que el vector $\vec{A}(\vec{x}, t)$ -solución de la ecuación de Poisson- es solenoidal:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.9)$$

Una vez conocido $\vec{A}$, el campo de velocidades se obtiene fácilmente:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \nabla \times \frac{\vec{\omega}(\vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} d\vec{\omega} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \vec{\omega}(\vec{x}_0) \times \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} d\vec{\omega} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \frac{(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{\omega}(\vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} d\vec{\omega} \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.3. Circulación del vector velocidad y ecuación de la vorticidad

En el movimiento de fluidos ideales, además de las magnitudes de remanso, existe otra integral primera que bajo ciertas condiciones se mantiene constante a lo largo del movimiento. Se trata de la circulación del vector velocidad a lo largo de una línea fluida cerrada L cualquiera:

$$\Gamma = \oint_L \vec{u} \cdot d\vec{l} \quad (4.11)$$

La CIRCULACIÓN (Γ) es “una magnitud que usualmente es utilizada para caracterizar la intensidad de giro de un vórtice”. Si la curva L es reducible, es decir, se puede reducir a un punto de forma continua sin abandonar el dominio fluido, aplicando el teorema de Stokes se puede escribir la integral anterior de tipo lineal (dl) como una integral de superficie (ds):

$$\oint_L \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{n} ds = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} ds \quad (4.12)$$

Para un fluido ideal la ecuación de la vorticidad se obtiene fácilmente aplicando el operador rotacional $\nabla \times$ a la ecuación de cantidad de movimiento y teniendo en cuenta las identidades

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nabla \frac{u^2}{2} - \vec{u} \times \vec{\omega} \quad (4.13)$$

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \nabla \cdot \vec{b} - \vec{b} \nabla \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \nabla \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \vec{b} \quad (4.14)$$

considerando además que la vorticidad es un campo solenoidal

$$\nabla \cdot \vec{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = 0 \quad (4.15)$$

se llega a la Ecuación de la Vorticidad:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} - \vec{\omega} \nabla \cdot \vec{u} - \nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p + \nabla \times f_m \quad (4.16)$$

Si el movimiento es barótrofo, lo que sucede en el caso de líquidos y en el movimiento homentrópico de gases, $-\nabla(1/\rho) \times \nabla p$ es nulo. Si además las fuerzas másicas derivan de un potencial, la ecuación de la vorticidad se reduce a

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} \quad (4.17)$$

que es la ecuación de Helmholtz, en la que no aparece la presión.

Usando la ecuación de continuidad, la ecuación de la vorticidad se puede escribir:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \vec{u} \quad (4.18)$$

que expresa la variación por unidad de tiempo de la magnitud $\vec{\omega}/\rho$ siguiendo a la partícula fluida en términos del valor instantáneo local del gradiente de velocidades.

En el caso particular de flujo bidimensional, $\vec{u} = (u_x, u_y, 0)$ y $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ donde u_x y u_y dependen de x , y y t , el segundo miembro de la ecuación anterior se anula idénticamente, quedando:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\omega}{\rho} \right) = 0 \quad (4.19)$$

es decir, ω/ρ se conserva a lo largo del movimiento en el caso de un flujo bidimensional y barótrofo de un fluido ideal cuando las fuerzas másicas derivan de un potencial.

4.4. Líneas y tubos de vorticidad

El campo de vorticidad de un flujo puede visualizarse en forma análoga a como se visualiza un campo de velocidades o un campo magnético. Así se define una **LÍNEA DE VORTICIDAD** como “*aquella curva que es tangente al vector vorticidad en todos sus puntos*”. Matemáticamente, $d\vec{x} = k d\vec{\omega}$ con k constante. En coordenadas cartesianas las líneas de vorticidad vienen dadas por

$$\frac{dx_1}{\omega_1} = \frac{dx_2}{\omega_2} = \frac{dx_3}{\omega_3} \quad (4.20)$$

Las líneas de vorticidad dan una visión de las direcciones de los vectores vorticidad en un campo fluido. En general la orientación de estas líneas cambian de un instante a otro excepto en un flujo estacionario, en el que permanecen fijas en el espacio.

Un TUBO DE VORTICIDAD está “*formado por un conjunto de líneas de vorticidad que pasan por una curva cerrada*”.

El flujo neto de vorticidad $\int_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot \vec{n} ds$ a través de las superficies que limitan un volumen del tubo de corriente es nulo; aplicando el teorema de Gauss y el hecho de que la vorticidad es un campo vectorial solenoidal se tiene

$$\int_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot \vec{n} ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{\omega} d\Omega = 0 \quad (4.21)$$

Puesto que la vorticidad es un vector contenido en la superficie del tubo ($\vec{\omega} \cdot \vec{n} = 0$ en la superficie del tubo de vorticidad) se deduce que el flujo del vector vorticidad a través de cualquier sección transversal del tubo es constante:

$$\int_{\Sigma_1} \vec{\omega} \cdot \vec{n} ds = \int_{\Sigma_2} \vec{\omega} \cdot \vec{n} ds \quad (4.22)$$

La expresión siguiente se denomina intensidad del tubo de vorticidad, donde Σ es cualquier sección transversal del tubo de vorticidad.

$$\int_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot \vec{n} ds \quad (4.23)$$

4.5. Leyes de Helmholtz

Según la ecuación de Helmholtz (4.17), se deducen las siguientes leyes:

▪ Primera ley de Helmholtz

“Si la vorticidad inicial de una partícula fluida es nula, se mantiene nula a lo largo del movimiento”.

Una consecuencia de esta ley es que si $\vec{\omega} = 0$ en un instante dado en todo el dominio fluido, permanece nula en cualquier instante posterior, es decir, si un flujo es inicialmente irrotacional bajo las hipótesis en que la ecuación de Helmholtz es válida, permanecerá siempre irrotacional. Esta es una de las maneras de enunciar el *teorema de circulación de Kelvin*.

▪ Segunda ley de Helmholtz

“Las partículas fluidas que en un instante determinado están situadas sobre una línea de vorticidad, se mantienen en ella en instantes posteriores”.

Dicho de otro modo, las líneas y tubos de vorticidad se mueven con el fluido.

▪ Tercera ley de Helmholtz

“Los tubos de corriente tienen la propiedad de que su intensidad no varía con el tiempo, durante el movimiento del fluido”.

Como consecuencia de esta ley la vorticidad media en una sección transversal aumenta cuando la sección decrece y viceversa.

4.6. Teorema de Bjerkness-Kelvin

Considérese el flujo del vector vorticidad a través de una superficie Σ que se apoya sobre una línea cerrada L . Si $L \equiv L_f$ es una línea fluida, el teorema de Bjerkness-Kelvin establece que *“la derivada sustancial (siguiendo a la línea*

fluida cerrada) de la circulación es igual a la circulación del vector aceleración a lo largo de dicha línea”:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_{L_f(t)} \vec{u} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_f(t)} \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot d\vec{l} \quad (4.24)$$

Para demostrarlo, basta con tener en cuenta que

$$\frac{D}{Dt} \oint_{L_f(t)} \vec{u} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_f(t)} \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot d\vec{x} + \oint_{L_f(t)} \vec{u} \cdot \frac{D(d\vec{l})}{Dt} \quad (4.25)$$

El segundo término del segundo miembro es fácil demostrar que es nulo, teniendo en cuenta que el campo de velocidades es unievaluado.

En el caso particular del flujo de un fluido no viscoso, barótropo, bajo la acción de un campo de fuerzas conservativas la aceleración del fluido deriva de un potencial ($\omega + U_p$), siendo U_p una constante relacionada con el potencial.

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla(\omega + U_p) \quad (4.26)$$

donde $\nabla\omega = \nabla p/\rho$. Entonces:

$$\nabla(\omega + U_p) \cdot d\vec{l} = \frac{\partial(\omega + U_p)}{\partial l} d\vec{l} \quad (4.27)$$

y como $(\omega + U_p)$ es unievaluado, la expresión matemática del teorema de Bjerkness-Kelvin queda

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_{L_f(t)} \vec{u} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.28)$$

es decir, en el flujo de un fluido ideal barótropo y bajo la acción de un campo de fuerzas conservativo, la circulación alrededor de cualquier línea fluida cerrada permanece constante e igual a su valor inicial.

En consecuencia, si la circulación a lo largo de cualquier línea fluida cerrada es inicialmente nula, seguirá siendo nula en cualquier instante posterior, y la vorticidad es nula en cualquier punto del dominio fluido si y sólo si la circulación es nula para toda línea cerrada reducible perteneciente al dominio. También se deduce que el movimiento en estas condiciones es irrotacional en cualquier instante, si inicialmente la vorticidad es nula en todos los puntos del dominio fluido.

4.7. Vórtices

Es frecuente encontrar vórtices concéntricos a altos números de Reynolds (viscosidad muy pequeña) tanto en la naturaleza como en muchas ramas de la industria y la tecnología.

Como ejemplos naturales cabe destacar: el *tornado* (Figura 4-1) o el vórtice que se forma al *desaguar un líquido* a través de un sumidero (Figura 4-2) y como ejemplos en el mundo industrial en los que aparecen intensos vórtices están: los *torbellinos desprendidos de alas de avión* (Figura 4-3), las *bombas de chorro*, etc. También son conocidos en el campo de la *combustión* los efectos beneficiosos que respecto a la estabilidad de la llama posee la inyección de aire cuando a éste se le suministra una elevada velocidad de giro y sus aplicaciones en motores de gasolina o diesel, en hornos y quemadores industriales y en otros dispositivos.

El estudio e investigación de fluidos con vórtices presenta serias dificultades debidas por una parte a la propia dificultad de los modelos matemáticos que gobiernan el fenómeno y por otra a que estos flujos suelen presentar en muchas ocasiones comportamientos bastante complejos, como pueden ser rotura de vórtices, histéresis y estabilidad, que tiene características no lineales.



Figura 4-1: Tornado.

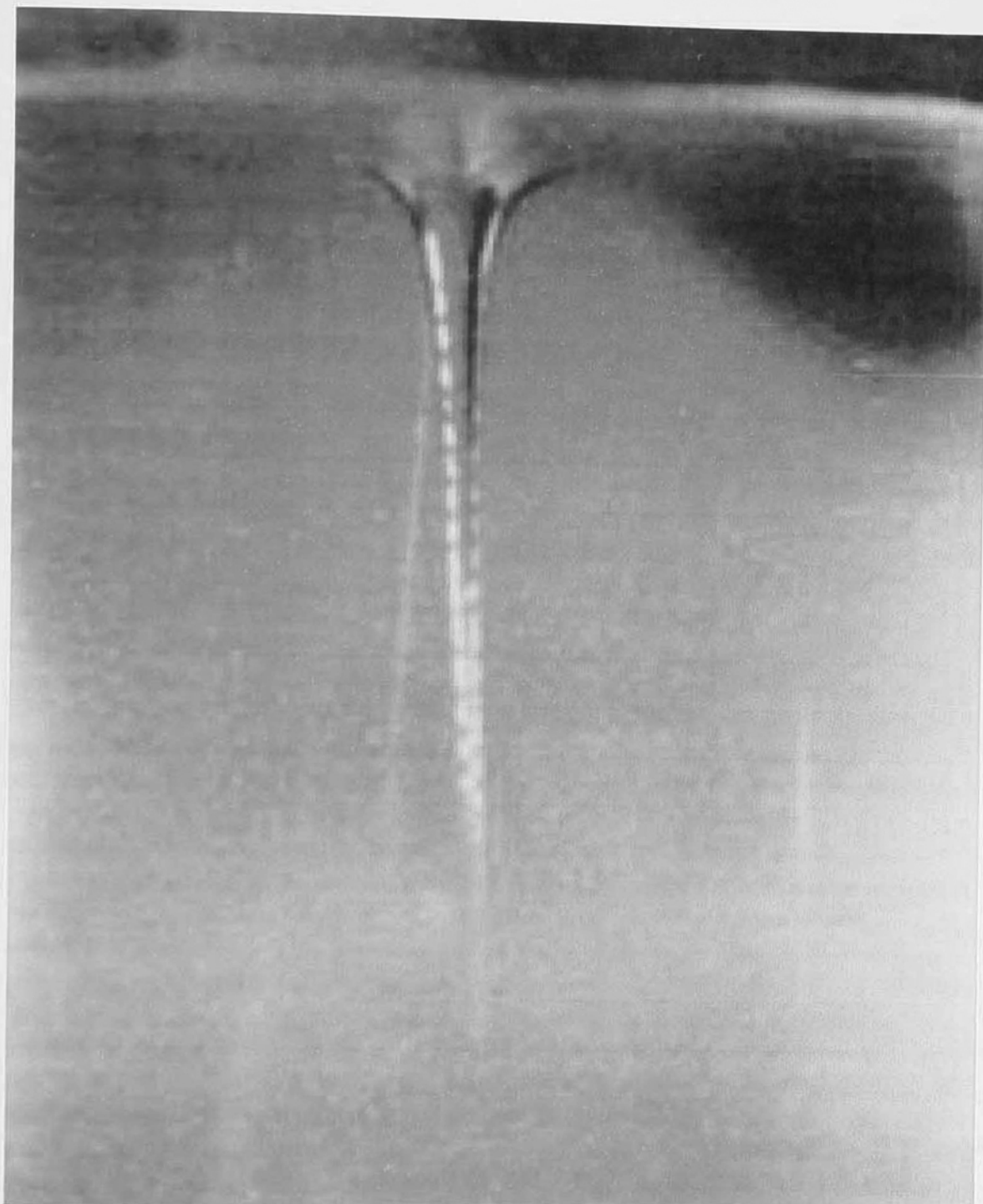


Figura 4-2: Vórtice que se forma al desaguar un líquido a través de un sumidero.

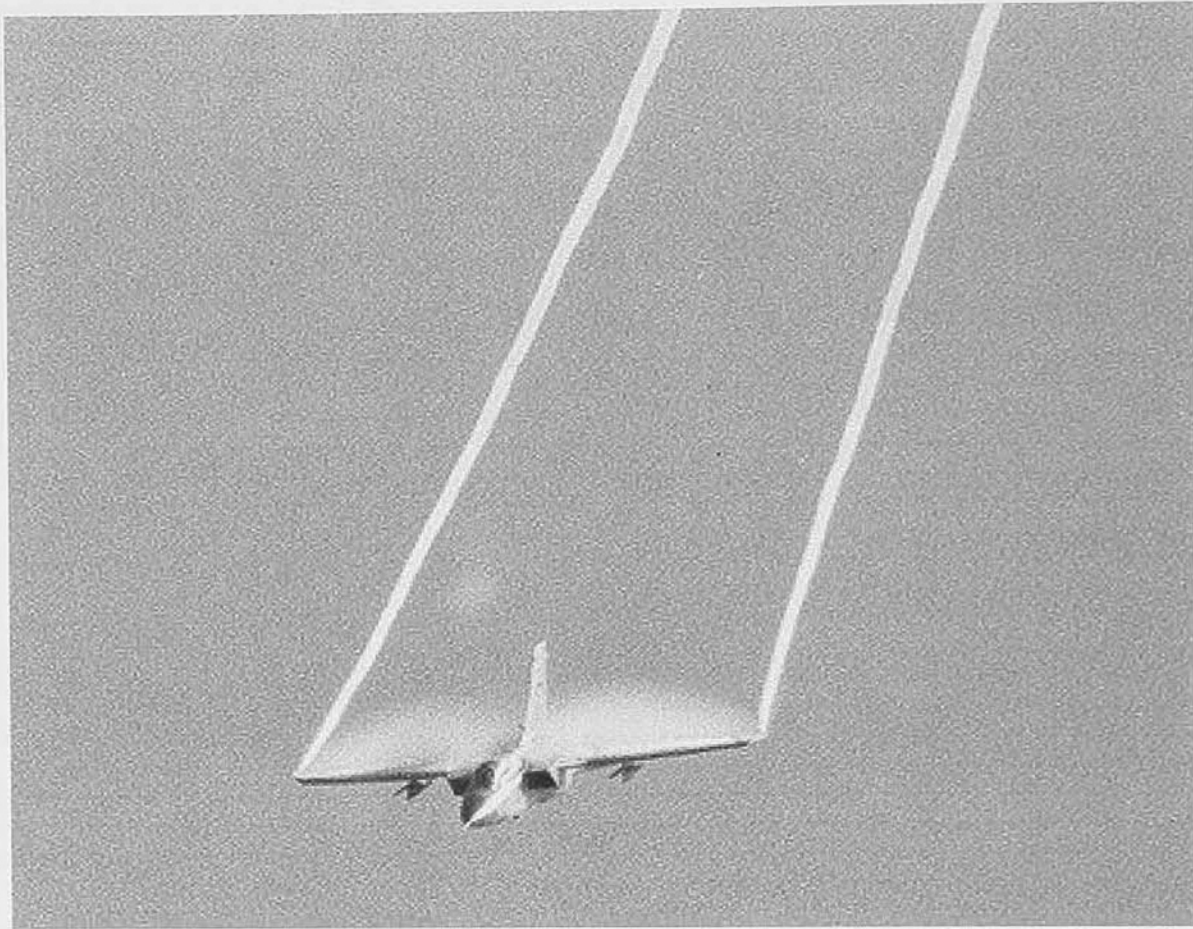


Figura 4-3: Torbellinos desprendidos de alas de avión.

Igual que en cualquier otro flujo a altos números de Reynolds, en este caso también puede diferenciarse una zona exterior donde los efectos de la viscosidad son poco importantes y donde el movimiento es no viscoso pero en general rotacional y es gobernado por las ecuaciones de Euler. La formulación se simplifica en gran medida -en el caso de movimientos axilsimétricos estacionarios de líquidos-, utilizando coordenadas cilíndricas (z, r, φ), así las componentes del vector vorticidad ($\omega_z, \omega_r, \omega_\varphi$) en función de las componentes de la velocidad (u_z, u_r, u_φ) son:

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\varphi)}{\partial r}, \quad \omega_r = -\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad \omega_\varphi = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (4.29)$$

Si se introduce la función de corriente $\psi(z, r)$

$$u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (4.30)$$

la ecuación de continuidad se satisface automáticamente y la expresión de ω_ϕ (4.29) proporciona la ecuación diferencial que satisface ψ :

$$r\omega_\phi = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) \quad (4.31)$$

Por otra parte, considerando que el movimiento es barótrope, no viscoso y no se considera la acción de las fuerzas másicas, la **Ecuación de Bernoulli** proporciona

$$\frac{1}{2}(u_z^2 + u_r^2 + u_\phi^2) + \frac{P}{\rho} = H(\psi) \quad (4.32)$$

donde la función resultante $H(\psi)$, es constante a lo largo de una línea de corriente meridional.

Otra integral primera del movimiento puede obtenerse por aplicación del teorema de Bjerkness-Kelvin (4.28). Integrando a lo largo de un círculo de radio r concéntrico con el eje y teniendo en cuenta la axilsimetría del problema, se obtiene

$$\oint u_\phi 2\pi d\phi = 2\pi r u_\phi = \Gamma(\psi) = 2\pi C(\psi) \quad (4.33)$$

donde la constante $C(\psi)$ varía de una línea de corriente a otra.

Teniendo en cuenta esta última expresión y las relaciones entre el campo de velocidades axial y la función de corriente, se puede obtener las expresiones de ω_z y ω_r en función de C :

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} = u_z \frac{\partial C}{\partial \psi}, \quad \omega_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} = u_r \frac{\partial C}{\partial \psi} \quad (4.34)$$

de donde se deduce que las proyecciones sobre un plano axial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{\omega}$ son localmente paralelos. Esta condición también puede deducirse de la ecuación de cantidad de movimiento en forma diferencial, que para flujos estacionarios de líquidos puede escribirse

$$-\vec{u} \times \vec{\omega} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) = -\nabla H \quad (4.35)$$

que muestra que sobre el lugar geométrico de los puntos de un plano meridiano, sobre los que H es constante (línea de corriente), las proyecciones de u y ω sobre el plano tienen que ser paralelas.

Por último, la componente ω_ϕ se obtiene de la proyección de la última ecuación (4.35) sobre cualquiera de los ejes z o r y haciendo uso de las ecuaciones (4.30), (4.33) y (4.34) se obtiene

$$\omega_\phi = \frac{C}{r} \frac{\partial C}{\partial \psi} - r \frac{\partial H}{\partial \psi} \quad (4.36)$$

Combinando esta última ecuación con la (4.31), se obtiene la ecuación diferencial que satisface la función de corriente meridional:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = r^2 \frac{\partial H}{\partial \psi} - C \frac{\partial C}{\partial \psi} \quad (4.37)$$

que es conocida como **Ecuación de Bragg y Hawthorne** o bien como **Ecuación de Squire y Long**. Es una ecuación casi lineal de segundo orden en derivadas parciales que proporciona la función de corriente meridional $\psi(z,r)$ cuando se imponen condiciones de contorno adecuadas y a partir de ella se obtienen $H(z,r)$, $C(z,r)$ y las demás magnitudes físicas.

4.8. Estructura de un vórtice viscoso

En el apartado anterior 4.7 se ha analizado el flujo de un vórtice en el supuesto de fluido ideal. El campo de velocidades en ese caso se hace singular en el eje, lo que indica la existencia de un núcleo viscoso de radio característico muy pequeño que contiene al eje. El radio adimensional de dicho núcleo viscoso se obtiene de la condición usual en capas límites de que los esfuerzos viscosos y los términos de inercia convectivos sean del mismo orden, obteniéndose un valor $\delta/L \sim \text{Re}^{-1/2}$ (δ es el espesor de la capa límite y L una longitud característica del flujo).

La estructura del núcleo vortical viscoso se obtiene de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, que haciendo uso de la axilsimetría y de las condiciones de capa delgada en las que las velocidades radiales u_r son mucho menores que las azimutales u_ϕ y axiales u_z y $\partial/\partial z \ll \partial/\partial r$ resultan

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) = 0 \quad (4.38)$$

$$u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right] \quad (4.39)$$

$$\frac{u_\phi^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4.40)$$

$$u_z \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_r u_\phi}{r} = \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) - \frac{u_\phi}{r^2} \right] \quad (4.41)$$

Estas ecuaciones hay que resolverlas con las siguientes condiciones de contorno:

- En el eje $r=0$ el campo de velocidades debe ser regular y axilsimétrico:

$$u_\varphi(z, 0) = u_r(z, 0) = 0, \quad u_z(z, 0) \neq \infty, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right)_{r=0} = 0 \quad (4.42)$$

- A distancias grandes del eje, el campo de velocidades y presiones debe decaer apropiadamente.
- Para arrancar la integración numérica, hay que especificar además los perfiles de velocidades $u_z(x_0, r)$ y $u_\varphi(x_0, r)$ en un cierto punto inicial x_0 .

Sin embargo, si se omiten las condiciones iniciales, es decir, si se quiere describir la solución a distancias grandes aguas abajo $x \geq x_0$, el sistema de ecuaciones se hace de semejanza si se buscan soluciones que decaen lejos del eje en la forma

$$u_z = W_0 r^{m-2}, \quad u_\varphi = L_s W_0 r^{m-2}, \quad \frac{p}{rh_0} = \frac{(L_s W_0)^2}{2(m-2)} r^{2(m-2)} \quad (4.43)$$

donde m es cualquier número real menor que r , W_0 es una constante con dimensiones apropiadas y L_s es el NÚMERO DE SQUIRE, adimensional que mide la importancia relativa del movimiento azimutal frente al meridional.

Definiendo las variables de semejanza $f(\zeta)$, $g(\zeta)$ y $\gamma(\zeta)$ en función de ζ :

$$\zeta = \frac{r^2}{\delta^2(z)}, \quad f(\zeta) = \frac{\psi(z, r)}{1z}, \quad g(\zeta) = \frac{\delta^2 u_\varphi}{1z}, \quad \gamma(\zeta) = \frac{\delta^4(z)}{1z^2} \frac{p(z, r)}{\rho} \quad (4.44)$$

el campo de velocidades meridional se escribe

$$u_z = \frac{\psi_r}{r} = 2 \frac{1z}{\delta^2(z)} f'(\zeta), \quad u_r = -\frac{\psi_z}{r} = -\frac{1z}{r} \left(f - 2\zeta f' \frac{z\delta'}{\delta} \right) \quad (4.45)$$

y el sistema de ecuaciones (4.38 – 4.41) queda

$$\frac{2-m}{m} f'^2 + f f'' + \frac{1}{2m} [(2-m)\gamma + \varsigma \gamma'] = -2 \frac{d}{d\varsigma} (\varsigma f'') \quad (4.46)$$

$$g^2(\varsigma) = 2\varsigma \gamma' \quad (4.47)$$

$$2 \frac{m-1}{m} g(\varsigma) f' - 2 f g'(\varsigma) - \frac{f g(\varsigma)}{\varsigma} = 4 \frac{d}{d\varsigma} [\varsigma g'(\varsigma)] - \frac{g(\varsigma)}{\varsigma} \quad (4.48)$$

con las condiciones de contorno

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 0, \quad \gamma = \gamma_0 \quad \text{en el eje} \quad (4.49)$$

y de acoplamiento con la solución exterior $\varsigma \rightarrow \infty (r \rightarrow \infty)$

Del acoplamiento, teniendo en cuenta (4.44) se tiene

$$u_z = \frac{2\nu z}{\delta^2(z)} f(\varsigma) = W_0 r^{m-2} = W_0 \delta^{m-2}(z) \varsigma^{\frac{m}{2}-1} \quad (4.50)$$

$$u_\varphi = \frac{\nu z}{\delta^2(z)} g(\varsigma) = L_s W_0 r^{m-2} = L_s W_0 \delta^{m-2}(z) \varsigma^{\frac{m}{2}-1} \quad (4.51)$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{(\nu z)^2}{\delta^2(z)} \gamma(\varsigma) = \frac{(L_s W_0)^2}{2(m-2)} r^{2(m-2)} = \frac{(\nu z)^2}{\delta^4} \gamma(\varsigma) \quad (4.52)$$

que proporciona

$$\delta(z) = \left(\frac{m \nu z}{W_0} \right)^{1/m} \quad (4.53)$$

y las condiciones de contorno

$$f \rightarrow \varsigma^{m/2}, \quad g \rightarrow m L_s \varsigma^{\frac{m}{2}-1}, \quad \gamma \rightarrow \frac{(m L_s)^2}{2(m-2)} \varsigma^{m-2} \quad (4.54)$$

Este último sistema de ecuaciones con sus condiciones de contorno se resuelve numéricamente utilizando una técnica conocida como disparo o *shooting* en la que el arranque de la solución numérica desde el eje requiere especificar los valores de uno o más parámetros desconocidos a priori y sucesivas integraciones posteriores, encontrándose algunas soluciones correspondientes a algunos casos particulares.

Las variables que caracterizan a un vórtice están relacionadas mediante la siguiente expresión:

$$\Gamma = U_0 R_v = \left(\frac{\Omega}{2} R_v \right) R_v = \frac{\Omega}{2} R_v^2 \quad (4.55)$$

donde:

- Γ = circulación del vórtice.
- U_0 = velocidad máxima del flujo vortical.
- R_v = radio del vórtice.
- Ω = doble de la velocidad de giro del vórtice.

Por tanto $\Omega = 2\Omega_v$, siendo Ω_v la velocidad angular del vórtice.

4.9. Modelización de algunos tipos de vórtices

Aunque, como se acaba de exponer, es posible el tratamiento teórico de la dinámica de los vórtices, el análisis se complica extraordinariamente cuando existe interacción con otros flujos o con partículas hasta el punto de que en la mayoría de los casos no existen herramientas matemáticas suficientemente poderosas para la resolución de las ecuaciones de movimiento resultante.

No obstante, se han propuesto algunos modelos de vórtices (varios de ellos obtenidos resolviendo la ecuación de Navier-Stokes) susceptibles de ser estudiados, y que facilitan la investigación de la interacción entre vórtices y partículas u otros flujos mediante procedimientos numéricos. En internet aparecen

bastantes referencias a estos modelos. Por ejemplo, en la referencia I-1 puede encontrarse una revisión sobre la investigación relacionada con vórtices. Muchos de los modelos que se van a exponer a continuación aparecen recogidos en la referencia I-2, encuadrada en el contexto de la Oceanografía. También en I-3 se resumen las características de algunos modelos de vórtices.

Un elemento interesante en los modelos es la *autosimilitud* del campo de velocidades, esto es, el perfil de velocidades puede representarse utilizando una función simple realizando un escalado apropiado de la distancia mediante el radio del vórtice. Esta autosimilitud de la velocidad inducida por el vórtice ha sido observada mediante medidas experimentales. Por lo tanto, la escala de longitud correspondiente al radio del vórtice es un parámetro muy importante para modelar las características del mismo.

A continuación, se relacionan de manera sucinta algunos de los principales modelos de vórtices.

4.9.1. Vórtice de Kirchhoff

Es un vórtice idealizado en fluido no confinado con vorticidad uniforme dentro de una zona elíptica y vorticidad cero fuera de la misma (Kirchhoff, 1876) [64].

Para una elipse con semiejes a y b y vorticidad ω en su interior, gira establemente con velocidad angular

$$\omega \frac{ab}{(a+b)^2} \quad (4.56)$$

Basándose en este modelo se han analizado las fases de vórtices elípticos corrotantes (I-4). También ha sido utilizado para comprobar la inestabilidad en vórtices y los efectos de la aceleración de Coriolis (I-5).

4.9.2. Vórtice de Lamb-Oseen

Es una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes en una dimensión y en régimen laminar, es decir, una solución axilsimétrica para la velocidad de giro con la asunción de que las velocidades axial y radial son cero (Lamb, 1932 [65]; Oseen, 1912 [66]).

El campo de velocidades es

$$u_{\varphi}(r) = \frac{\Gamma}{\pi R_v^2} \left(e^{-\frac{r^2}{R_v^2}} \right) \quad (4.57)$$

siendo r la distancia radial desde el centro del vórtice y R_v el radio del vórtice. La máxima velocidad tangencial se da para $r \sim 1.12 R_v$. En un flujo viscoso, el radio del vórtice crece en el tiempo debido a la difusión de la vorticidad según la ley $R_v = 4\nu t + \text{constante}$.

El vórtice de Lamb-Oseen ha sido utilizado, por ejemplo, para estudiar diversas interacciones entre vórtices corrotantes (I-6). Mediante este modelo también se ha analizado la dinámica lineal de una pareja de vórtices (I-7) En la referencia I-8 se prueba que este vórtice es la única solución de rotación autosimilar de las ecuaciones de Navier-Stokes en la que los conjuntos de niveles de vorticidad y función de corriente corrotante coinciden.

Este modelo fue extendido para el caso de un vórtice tridimensional por Burgers, como se verá en el apartado (4.9.3). En este vórtice destaca la presencia de una velocidad axial constante, lo cual no es consistente con las observaciones experimentales, que muestran cómo dicha velocidad axial decae rápidamente con el tiempo. Además, el incremento lineal de la velocidad radial hace que este modelo sea aplicable solamente a pequeñas regiones del flujo cerca del eje del vórtice.

4.9.3. Vórtice de Burgers-Rott

Este vórtice tiene un eje central alrededor del cual hay un flujo tangencial pero además existe flujo radial y vertical. El fluido se mueve por tanto en espiral hacia el eje y fluyendo hacia arriba.

Es una solución exacta de la ecuación de Navier-Stokes (Burgers, 1948) [67] y matemáticamente tiene la siguiente forma en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z):

$$u_r = -ar \quad (4.58a)$$

$$u_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - e^{-\frac{ar^2}{2\nu}} \right] \quad (4.58b)$$

$$u_z = 2az \quad (4.58c)$$

donde Γ es la circulación del vórtice, ν la viscosidad cinemática del fluido, r la distancia a eje del vórtice y a una constante.

Un posible mecanismo para materializar la aplicación de un vórtice de Burgers-Rott en la atmósfera sería provocar una succión a gran altura encima de una superficie plana.

En la atmósfera una tormenta conducida por una intensa convección podría producir una succión para arrastrar el aire hacia un punto abajo en el suelo y luego arrastrarlo hacia arriba en las nubes.

Por lo tanto un vórtice de Burgers-Rott puede aproximar el flujo de aire debajo de la región central de una tormenta, sin embargo no es totalmente apropiado como modelo de un tornado real porque este vórtice sufre la deficiencia de situar el tornado bajo el centro de una aspiración simétrica, ya que las tormentas no son simétricas y sus tornados asociados raramente ocurren bajo sus ejes centrales.

Este modelo ha sido utilizado en las simulaciones del National Severe Storms Laboratory (I-9). En la referencia I-10 se estudia la interacción de este vórtice con una pared rígida no deslizante.

4.9.4. Vórtices de Kuo

Kuo (1950) [68] encontró qué movimientos podrían esperarse en una masa de fluido en rotación inducida a convectar. Encontró dos soluciones completas en el sentido de que obtiene tanto las magnitudes mecánicas como las termodinámicas. Hay un vórtice bicelular con forma cerrada si se asume que los coeficientes de viscosidad y de difusión térmica turbillonaria son iguales, es decir, el número de Prandtl turbillonario es igual a la unidad. La formulación matemática es la siguiente:

$$u_r = -\sigma r \left[0,5 - \left(1 - e^{-\frac{R_a^2}{4\nu}} \right) \right] / (R_a^2 + 4\nu) \quad (4.59a)$$

$$u_\phi = \frac{\Gamma m_0}{1,414r} \quad (4.59b)$$

$$u_z = \sigma z \left(1 - 2e^{-\frac{R_a^2}{4\nu}} \right) \quad (4.59c)$$

donde Γ es la circulación del vórtice, ν la viscosidad cinemática del fluido, $R_a = r/h$ es la coordenada radial adimensional, σ es la raíz cuadrada del factor de estabilidad y m_0 se define del siguiente modo:

$$m_0 = \int_0^{\tilde{z}} e^{f(t)} dt \bigg/ \int_0^{\infty} e^{f(t)} dt \quad (4.60)$$

$$f(z) = -z + 2 \int_0^{\tilde{z}} (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t} \quad (4.61)$$

Hay también un vórtice de Kuo unicelular, pero no tiene solución cerrada y tiene que ser calculado aproximadamente por métodos numéricos.

Este modelo aparece en la referencia I-11.

4.9.5. Vórtice Rankine

Este vórtice se caracteriza por una suave transición desde una rotación sólida alrededor de su centro a un campo de flujo irrotacional (Rankine, 1958) [69].

A veces es llamado vórtice combinado Rankine por la razón de que está formado con dos campos de flujo separados.

El campo de flujo interior tiene sólo velocidad tangencial que se incrementa desde cero a lo largo del eje central hasta un valor máximo en un cierto radio R_v (esta región interior gira como un cuerpo sólido, aunque se trata de un fluido). El flujo exterior es también puramente tangencial y empieza con un máximo valor de la velocidad en el radio R_v . La velocidad decae inversamente con el radio.

En coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) :

$$u_r = 0 \quad (4.62a)$$

$$u_\phi = \frac{\Omega r}{1 + (r/R_v)^2} \quad (4.62b)$$

$$u_z = 0 \quad (4.62c)$$

donde Ω es el doble de la velocidad angular del vórtice.

El campo de velocidades (4.62) expresado en coordenadas cartesianas relativas al sistema de referencia ligado al vórtice se expresa como:

$$u_x = \frac{-\Omega y}{1 + \frac{x^2}{R_v^2} + \frac{y^2}{R_v^2}} \quad (4.63a)$$

$$u_y = \frac{\Omega x}{1 + \frac{x^2}{R_v^2} + \frac{y^2}{R_v^2}} \quad (4.63b)$$

$$u_z = 0 \quad (4.63c)$$

El centro del vórtice tiene vorticidad constante y el campo de flujo circundante tiene vorticidad cero.

Este vórtice ha sido utilizado como modelo para la distribución del viento superficial en un huracán. Es también un modelo característico de un vórtice cilíndrico en un líquido con una superficie libre.

Las referencias de internet en las que aparece el vórtice Rankine son innumerables. Por ejemplo, en un ámbito climatológico, en la referencia I-12 es utilizado para investigar la respuesta de la capa superior oceánica a un ciclón del Océano Indico. En la I-13 puede encontrarse una animación con las trayectorias y las líneas de corriente de un vórtice Rankine. Este modelo también ha sido usado en el estudio de la interacción de vórtices con ondas acústicas (I-14) y también en simulaciones de turbinas eólicas (I-15). Posiblemente es uno de los modelos más comúnmente utilizado (si no el que mas) en las investigaciones relacionadas con vórtices.

4.9.6. Vórtice de Kaufmann

Este vórtice (Kaufmann, 1962) [70] también es conocido como el modelo de Scully (Scully, 1975) [71] y fue desarrollado para soslayar la naturaleza singular del vórtice Rankine.

En el vórtice Rankine, si se representan gráficamente la velocidad tangencial y la distribución de vorticidad frente a la coordenada radial puede observarse que presentan una discontinuidad para $r=R_v$. Para evitar esa discontinuidad el vórtice de Kaufmann utiliza un perfil algebraico de velocidades de la forma

$$u_{\varphi}(r) = \frac{\Gamma r}{1 + (r/R_v)^2} \quad (4.64)$$

siendo R_v el radio del vórtice.

Este modelo reduce a la mitad el valor máximo de la velocidad tangencial que se obtiene con el vórtice Rankine. Además es una aproximación algebraica del vórtice de Lamb-Oseen que se describió en el apartado 4.9.2. En el vórtice de Kaufmann o modelo de Scully el 50 % de la circulación total está contenida en el centro del vórtice mientras que en el vórtice de Lamb-Oseen únicamente está contenido el 71 % de ella (Yamauchi et al., 1999) [72].

En la referencia I-16 puede encontrarse una presentación en la que se usa este vórtice en relación con las ondas acústicas generadas por el rotor de un helicóptero.

4.9.7. Vórtice de Batchelor

Representa satisfactoriamente el campo de velocidades de vórtices lineales de arrastre con flujo axial (Batchelor, 1964) [73]. El campo de velocidades es:

$$u_{\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - e^{-r^2/r_0^2}) \quad (4.65a)$$

$$u_z = u_{z0} (1 - e^{-r^2/r_0^2}) \quad (4.65b)$$

Por tanto, el vórtice de Batchelor se caracteriza por tener un flujo axial en conjunción con el flujo rotacional. La presencia del flujo axial lo vuelve inestable

y llega a hacerse turbulento por algún tiempo. Un parámetro característico del vórtice de Batchelor y que mide la relación entre la velocidad tangencial y la axial es $q_B = \Gamma/2\pi u_{z0}$. Este flujo es linealmente estable para $q_B < 1.5$.

En la referencia I-7 –ya mencionada en el vórtice de Lamb-Oseen- se analiza la turbulencia en el vórtice de Batchelor. En la I-17 se profundiza en la dinámica de vórtices turbulentos mediante una simulación numérica directa de este vórtice y en la I-18 se investigan los efectos de rotación en un vórtice de Batchelor turbulento.

4.9.8. Vórtices de Stuart

Son una fila infinita de vórtices que experimentan un movimiento inviscido (Stuart, 1967) [74]. El flujo es estable y bidimensional y es descrito por una función de corriente que toma la forma de Logaritmo neperiano (Ln) siguiente:

$$\psi = Ln(\cosh y + a \cos x) \quad (4.66)$$

donde a es una constante que verifica $0 \leq a \leq 1$. Esa función de corriente es una solución de la ecuación de Liouville $\nabla^2 \psi = (1 - a^2)e^{-2\psi}$ y describe una capa de cortadura centrada en el eje x entre dos corrientes uniformes.

- Si $a = 0$ la capa de mezcla con líneas de corriente paralelas es recuperada.
- Si $a = 1$ describe una hilera simple de vórtices corrotantes.
- Si $0 \leq a \leq 1$ la capa de cortadura presenta torbellinos bidimensionales corrotantes con una suave distribución de vorticidad que están espaciados periódicamente a lo largo del eje x .

Los vórtices de Stuart han sido observados en la transición laminar-turbulenta de un flujo de Couette esférico (I-19).

4.9.9. Vórtice de Moore-Saffman

Moore y Saffman (1971) [75] determinaron analíticamente la solución exacta en estado estable para un vórtice elíptico bidimensional con vorticidad uniforme encajado en un flujo de cortadura y mostraron que

$$\frac{\Gamma}{\sigma_c} = \left(\frac{\chi + 1}{\chi} \right) \frac{1}{\chi} \quad (4.67)$$

para un vórtice que gire en el mismo sentido que el flujo de cortadura; σ_c es un parámetro que caracteriza al flujo de cortadura y χ es la relación entre los semiejes de la elipse.

Este modelo se ha usado en la simulación de vórtices protoplanetarios, es decir, de un disco delgado de gas girando alrededor de un astro central (I-20). También se ha analizado con el mismo la estabilidad de un vórtice elíptico sujeto a un flujo de tensión en un flujo estratificado rotatorio (I-21). En la referencia I-5 –ya mencionada en el vórtice de Kirchhoff– se analiza mediante este modelo la inestabilidad de un vórtice y los efectos de la aceleración de Coriolis.

4.9.10. Vórtice de Sullivan

Es también una solución exacta de la ecuación de Navier-Stokes. Tiene alguna similitud con el vórtice de Burgers-Rott que se describió en el apartado 4.9.3., pero es un vórtice bicelular. Tiene una celda interna en la que el flujo desciende desde arriba y fluye hacia fuera para encontrarse con un flujo separado que es radialmente convergente. Ambos flujos ascienden en el punto de encuentro (Sullivan & Scully, 1972) [76].

El mayor interés del vórtice de Sullivan radica en que es el vórtice más simple que puede describir el flujo en un intenso tornado.

Su forma matemática es:

$$u_r = -ar + 6 \frac{\nu}{r} \left(1 - e^{-\frac{ar^2}{2\nu}} \right) \quad (4.68a)$$

$$u_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[H_s \left(\frac{ar^2}{2\nu} \right) / H_s(\infty) \right] \quad (4.68b)$$

$$u_z = 2az \left[1 - 3e^{-\frac{ar^2}{2\nu}} \right] \quad (4.68c)$$

donde: Γ circulación del vórtice, ν viscosidad cinemática del fluido, a constante y la función H_s viene definida por

$$H_s(z) = \int_0^z e^{f(m)} dm \quad (4.69)$$

$$f(t) = -t + 3 \int_0^t (1 - e^{-y}) \frac{dy}{y} \quad (4.70)$$

En internet es posible encontrar alusiones a este vórtice en las ya mencionadas referencias I-2 e I-3.

4.9.11. Vórtice de Kida

Kida (1981) [77] desarrolló un nuevo modelo a partir del vórtice de Kirchhoff descrito en el apartado 4.9.1. Kida advirtió que un vórtice elíptico permanecería con forma elíptica (con la única posibilidad de cambio en la relación de aspecto) en presencia de un flujo de fondo con la condición de que ese flujo tuviera una vorticidad ω espacialmente uniforme y además fuera un flujo de tensión lineal. Denotando por a y b los semiejes de la elipse y por χ la relación entre dichos semiejes el modelo se caracteriza por los siguientes parámetros:

- α_k es el ángulo que forma el semieje a de la elipse con el eje x .

- I_k es la intensidad del flujo de tensión uniforme, cuya velocidad tiene por componentes $(I_k x, -I_k y)$, de modo que si I_k es positivo el eje x es el eje de “estiramiento”.
- γ_k es un ángulo de rotación uniforme con componentes de velocidad $(-\gamma_k y, \gamma_k x)$

Con ello se obtiene:

$$\dot{\chi} = 2I_k \chi \cos 2\alpha_k \quad (4.71)$$

$$\dot{\alpha}_k = \frac{\chi \omega}{(1 + \chi^2)} - I_k \frac{\chi^2 + 1}{\chi^2 - 1} \sin 2\alpha_k + \gamma_k \quad (4.72)$$

que son las dos ecuaciones que hay que integrar numéricamente.

En la referencia I-22 se realiza un análisis del flujo lagrangiano alrededor del vórtice de Kida. En la I-23 se aplica a este modelo un método basado en una estructura hamiltoniana no canónica para extraer de las ecuaciones que describen el vórtice sistemas hamiltonianos con grados de libertad finitos exactos o aproximados. En la referencia I-24 se encuentra una documentación on line en la que se incluye información sobre este vórtice.

4.9.12. Vórtices de Vatistas

Vatistas (1998) [78] propuso un perfil de velocidades de giro desingularizadas para vórtices estacionarios en la forma

$$u_\varphi(r) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{r}{(R_v^2 + r^{2n})^{1/n}} \right) \quad (4.73)$$

Para el caso $n=2$ se ha comprobado que este campo de velocidades particular proporciona una buena aproximación con las velocidades medidas en

vórtices originados por rotores. Cuando $n=1$ este modelo se corresponde con el de Kaufmann o Scully y cuando $n \rightarrow \infty$ con el vórtice Rankine. Para $n=2$ es también una buena aproximación al modelo de Lamb-Oseen.

Los vórtices de Vatistas se han aplicado en el análisis de ondas sonoras causadas por la interacción de vórtices con un flujo subsónico no uniforme (I-25) y en la investigación de ondas acústicas originadas por el estiramiento de vórtices autosimilares en un flujo no uniforme (I-26).

4.10. Interacción entre vórtices

Cuando existen vórtices situados en posiciones cercanas, éstos pueden ejercer cierta influencia de unos sobre otros y sobre puntos cercanos del campo fluido (Kundu, 1990) [79].

Para analizar esas interacciones hay que tener presente que debe cumplirse el PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN, según el cual *“el flujo en un punto determinado puede ser obtenido mediante la adición de la acción de todos los vórtices del campo fluido”*.

Además de dicho principio, hay que tener presente el TEOREMA DEL VÓRTICE DE HELMHOLTZ que establece que *“los vórtices lineales se mueven con el flujo”*.

Si se considera en primer lugar la interacción entre dos vórtices girando en sentido anti-reloj con circulaciones o intensidades respectivas Γ_1 y Γ_2 , separados entre sí una distancia L_v , según se indica en la Figura 4-4, sucede lo siguiente: la velocidad en el punto 2 debida al vórtice 1 será $v_2 = \Gamma_1 / 2\pi L_v$ y la velocidad en el punto 1 debida al vórtice 2 será $v_1 = \Gamma_2 / 2\pi L_v$. En consecuencia el par de vórtices gira en sentido anti-reloj alrededor del “centro de gravedad del sistema” G que es estacionario.

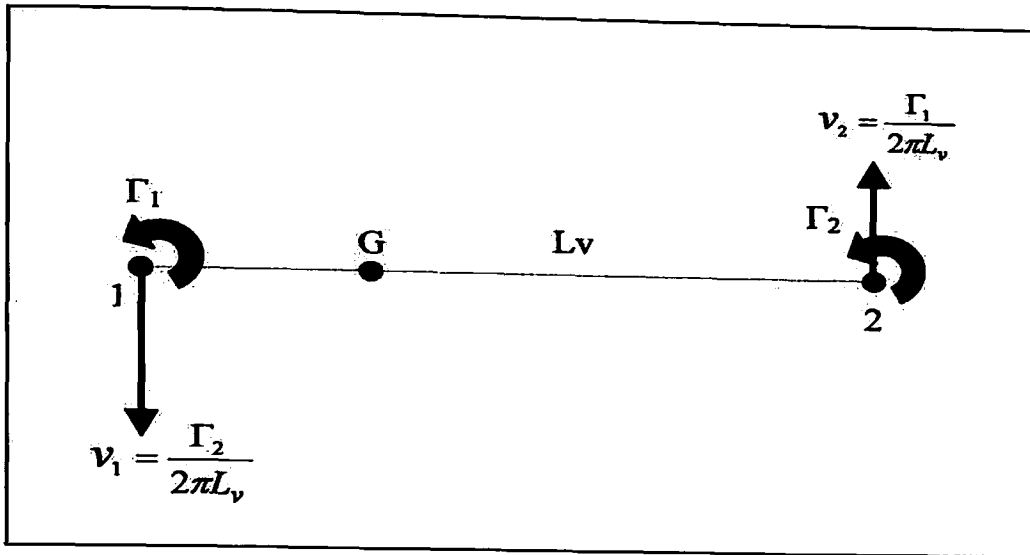


Figura 4-4: Instante inicial de la interacción entre dos vórtices girando en el mismo sentido.

La situación, por tanto, en un instante posterior sería la que se representa en la Figura 4-5, donde se observa dicho giro del par de vórtices.

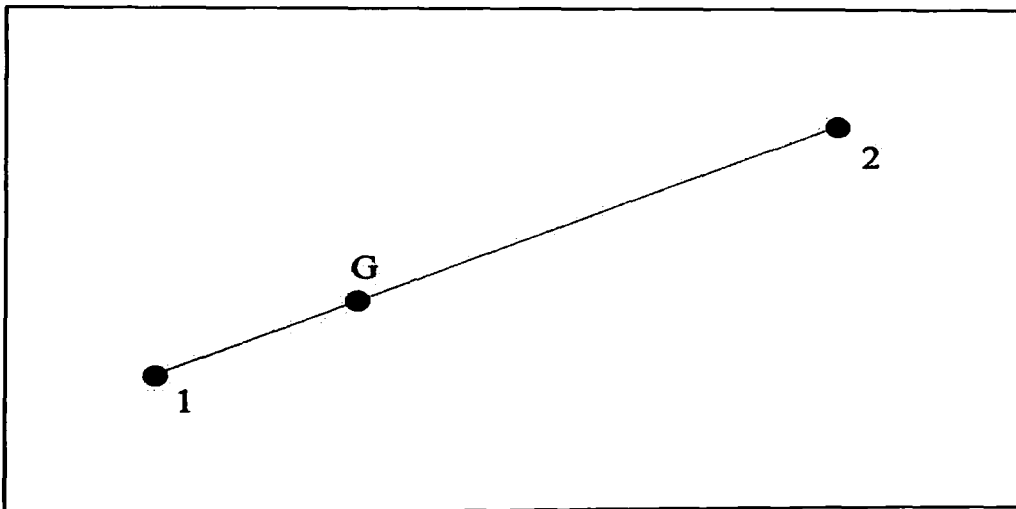


Figura 4-5: Instante posterior de la interacción entre dos vórtices girando en el mismo sentido.

Si se considera ahora el caso en que la pareja de vórtices tienen el mismo valor de la circulación Γ y giran con sentidos de rotación opuestos según se representa en la Figura 4-6, sucede que cada vórtice tiene la misma velocidad $v = \Gamma / 2\pi L_v$ en el mismo sentido; por tanto todo el sistema se traslada con esa velocidad relativa al fluido.

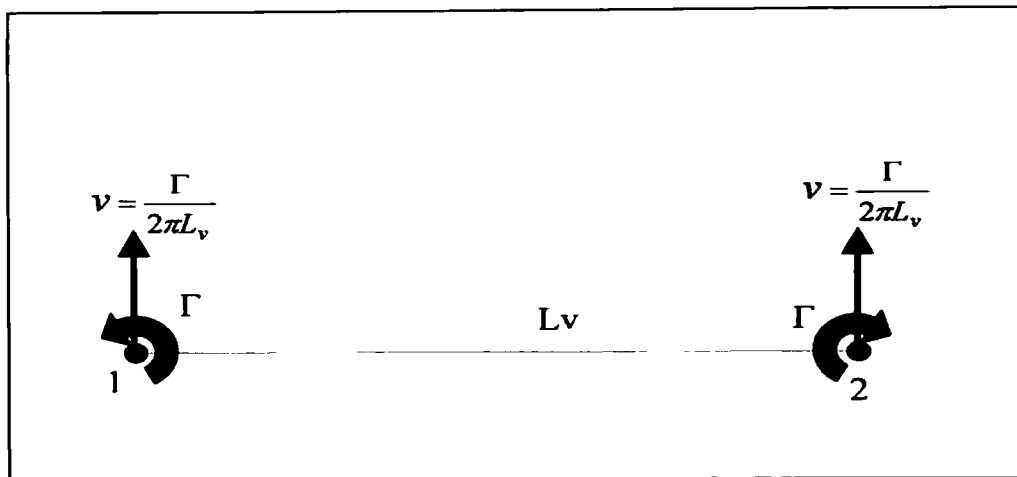


Figura 4-6: Instante inicial de la interacción entre dos vórtices girando en sentidos opuestos.

4.11. Comparación de vórtices

Una cuestión de interés es la comparación entre algunos de los modelos de vórtices que han sido descritos en este capítulo. En este apartado se van a comparar aquellos modelos cuyo campo de velocidades es puramente tangencial, ya que como se expone en el apartado 5.2., son vórtices de este tipo los utilizados en las simulaciones de esta Tesis Doctoral.

Una comparación análoga fue realizada por Bhagwat & Leishman (2002) [80], que concluyeron que la utilización de un modelo u otro de vórtice proporciona unos resultados semejantes desde un punto de vista cualitativo, con pequeñas diferencias cuantitativas.

El modelo más simple para simular la velocidad de giro en un vórtice viscoso es el de Rankine. Es, posiblemente, el modelo más comúnmente utilizado en las simulaciones numéricas debido a su simplicidad y la buena aproximación de los resultados que con él se obtienen. La representación gráfica de la velocidad tangencial y de la distribución de vorticidad del vórtice Rankine presenta una discontinuidad para $r=R_v$.

El vórtice de Kaufmann presenta un perfil de velocidades tal que no se produce la discontinuidad que presenta el vórtice Rankine. Este modelo reduce a la mitad el máximo valor de la velocidad de giro proporcionado por el vórtice Rankine.

El vórtice de Lamb-Oseen es un modelo clásico para representar el flujo en un vórtice cuya velocidad sólo tiene componente tangencial. Presenta características intermedias entre el vórtice Rankine y el vórtice de Vatistas.

El vórtice de Vatistas es un modelo general para describir el campo de velocidad tangencial de un vórtice, ya que según el valor que se le asigne al parámetro n que aparece en su formulación se obtienen los modelos anteriormente mencionados. Así, para $n \rightarrow \infty$ corresponde al vórtice Rankine, para $n=1$ corresponde al vórtice de Kaufmann y para $n=2$ es una buena aproximación del vórtice de Lamb-Oseen. En la Figura 4-7 se representa la velocidad tangencial frente a la coordenada radial para los cuatro modelos mencionados. De dicha figura se deduce que en todos los casos el perfil de velocidades es semejante cualitativamente, con pequeñas diferencias cuantitativas. Una característica destacable de los perfiles de velocidades representados en la mencionada figura es que el valor de la velocidad tangencial siempre está comprendido entre los proporcionados por el vórtice Rankine y el vórtice Kaufmann, que podrían entonces ser considerados como una cota superior y una cota inferior respectivamente para la velocidad tangencial.

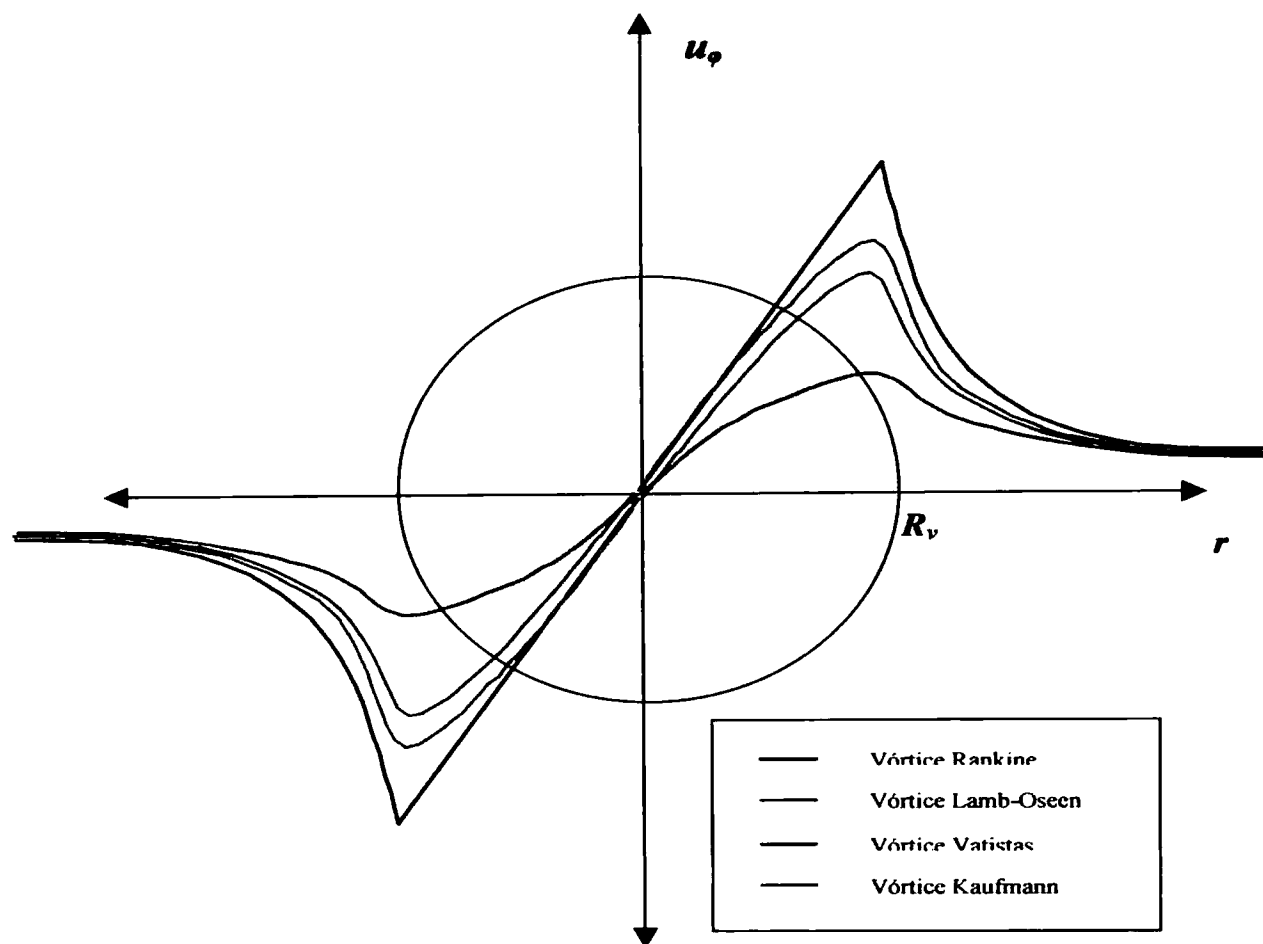


Figura 4-7: Comparación de la velocidad tangencial de diversos modelos de vórtices.

Bloque II
METODOLOGÍA

5. CAMPO DE VELOCIDADES

Puesto que la metodología a emplear para el desarrollo de la Tesis Doctoral es la simulación numérica, es preciso decidir el modelo de flujo vortical apropiado para los fines perseguidos.

Como antecedente más directo del primer objetivo propuesto *-Tiempo de Escape de partículas pesadas de un vórtice tridimensional-* sólo se ha encontrado el trabajo de Fung (2000) [11] para el caso bidimensional y no tridimensional. En dicho trabajo se utiliza el modelo de Batchelor, que como se ha visto en el apartado 4.9.7., incluye una componente longitudinal de la velocidad.

En lo que respecta a los antecedentes del segundo objetivo de la Tesis – *Sedimentación de partículas en disposición periódica bidimensional de vórtices-* existen dos trabajos diferentes. El primero corresponde a los trabajos de Maxey & Corrsin (1986) [12] que simula un flujo celular mediante una formulación con senos y cosenos de modo que cada vórtice ocuparía la totalidad de la hipotética celda en la que está situado, así pues este campo de flujo es diferente al que se pretende analizar en esta investigación. El segundo es el realizado por Dávila & Hunt (2001) [1] que utiliza el vórtice Rankine, este si parece más adecuado a los fines aquí propuestos.

5.1. Vórtice tridimensional

Para analizar el caso general de un vórtice tridimensional (objeto de la tesis) es necesario precisar la relación entre el sistema de coordenadas fijo –que se denominará “ $0x_2y_2z_2$ ”- y el sistema de coordenadas relativo al vórtice –que se denominará “ $0xyz$ ”-. Para ello, es conveniente recordar previamente la transformación de las coordenadas, definida por los tres conocidos ÁNGULOS DE EULER: *Precesión, Nutación y Rotación Propia* (Figura 5-1):

Comenzando con los ejes de coordenadas cartesianas fijos " $0x_2y_2z_2$ " y girándolos un ángulo Φ (llamado ángulo de precesión) alrededor del eje $0z$ se obtiene el sistema $0x_1y_1z_1$. Posteriormente, girando este sistema un ángulo θ (ángulo de nutación) alrededor del eje $0x_1$, se obtiene el sistema $0xyz$. Por último, en la transformación de Euler habría que girar el sistema alrededor del eje $0z$ un ángulo llamado ángulo de rotación propia pero no ha sido incluido en esta investigación porque se considera totalmente intrascendente para el actual estudio.

Así pues, el eje del vórtice será el eje $0z$ y se podrá considerar cualquier sección del mismo, por ejemplo la sección situada en el plano $0xy$.

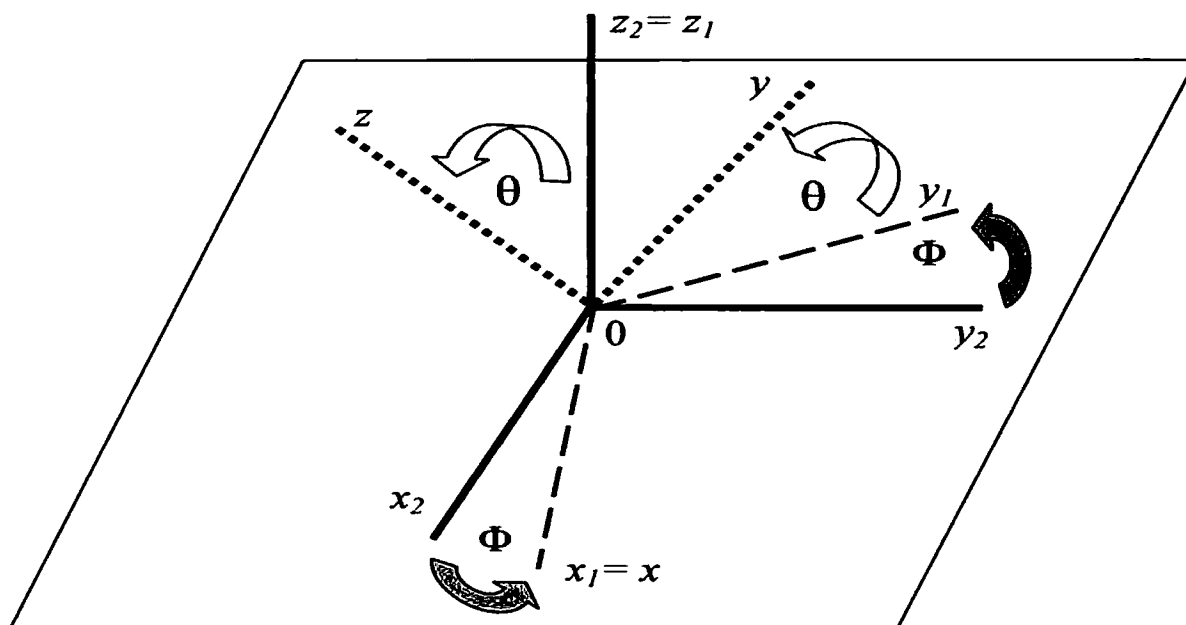


Figura 5-1: Transformación de coordenadas, definida por los ángulos de Euler.

5.2. Vórtices objeto de estudio

Entre los modelos de vórtices descritos en el apartado 4.9., se han escogido dos de ellos que simulen adecuadamente el campo de flujo de un torbellino y que

tengan una formulación relativamente sencilla y apropiada para los objetivos propuestos. Por ello se han evitado aquellos modelos con componentes longitudinales y radiales de la velocidad, ya que para los objetivos de esta Tesis sería una complicación innecesaria y además se incrementaría de forma notable el tiempo de computación. Por otro lado, el hecho de elegir un modelo de vórtice u otro puede proporcionar únicamente una variación cuantitativa y no cualitativa de los resultados, como probaron Bhagwat & Leishman (2002) [80]; de todos modos se ha optado por simular el campo de flujo mediante dos modelos diferentes, para comprobar así que los resultados obtenidos son generales y que son válidos no solamente para un modelo concreto de vórtice.

En este sentido, los cálculos han sido realizados modelando el flujo en primer lugar mediante el VÓRTICE RANKINE, cuyo campo de velocidades viene dado por las ecuaciones 4.65 a 4.67 y en segundo lugar por el VÓRTICE DE KAUFMANN (o modelo de Scully), descrito por la ecuación 4.68.

5.3. Campo tridimensional de velocidades de los vórtices a estudiar

Hay dos opciones para realizar el análisis:

- A) Referir la velocidad de caída de las partículas al sistema $0xyz$ y trabajar con él:

$$\vec{V}_r = -V_r \vec{k}_2 = -V_r \vec{k}_1 = -V_r (\sin\theta \vec{j} + \cos\theta \vec{k}) \quad (5.1)$$

- B) Referir el campo de velocidades vortical al sistema fijo $0x_2y_2z_2$. Con ello, para cualquiera de los vórtices a analizar hay que realizar la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} \vec{u} = -u_{\phi_x} \vec{i} + u_{\phi_y} \vec{j} = -u_{\phi_x} \vec{i}_1 + u_{\phi_y} [\cos\theta \vec{j}_1 + \sin\theta \vec{k}_1] = \\ -u_{\phi_x} [\cos\Phi \vec{i}_2 + \sin\Phi \vec{j}_2] + u_{\phi_y} [\cos\theta (-\sin\Phi \vec{i}_2 + \cos\Phi \vec{j}_2) + \sin\theta \vec{k}_2] \end{aligned} \quad (5.2)$$

En el primer objetivo de esta investigación (*estudiar el tiempo de escape de partículas en un vórtice tridimensional*), dado que el valor del ángulo de precesión Φ no afecta a los resultados, se considerará en lo sucesivo $\Phi = 0$.

En el segundo objetivo (*sedimentación de partículas en una disposición periódica bidimensional de vórtices*), simplemente los ángulos de precesión y nutación toman los valores $\Phi = 0$, $\theta = \pi/2$ y los sistemas de referencia (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) coinciden.

Obviamente, esos valores indicados se aplicarán a los dos modelos de vórtices considerados, Rankine y Kaufmann.

6. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Con el objeto de definir con exactitud el modelo numérico a utilizar en este análisis, se desarrolla en primer lugar el modelo más general que describe el movimiento de partículas en fluidos para proceder a continuación a exponer las particularidades, asunciones y simplificaciones susceptibles de ser aplicadas en esta investigación hasta obtener las ecuaciones específicas a utilizar.

6.1. Ecuaciones de movimiento de pequeñas partículas en fluidos

El análisis del movimiento de pequeñas partículas rígidas en fluidos ha sido objeto de investigación desde hace bastantes años. Los primeros trabajos en este sentido fueron los de Basset (1888) [81], seguidos por los de Boussinesq (1903) [82] y Oseen (1927) [83]. Estos tres investigadores examinaron el movimiento de una esfera sedimentando bajo la acción de la gravedad en un fluido en reposo. En esas investigaciones asumieron que la perturbación originada en el flujo por el movimiento de la esfera tenía lugar a bajos números de Reynolds por lo que la fuerza ejercida por el fluido sobre la esfera podía ser calculada mediante los resultados de un flujo de Stokes inestable.

Posteriormente, Tchen (1947) [84] extendió esos análisis al caso de una esfera sedimentando bajo la acción de la gravedad en dos casos: en primer lugar en un flujo inestable pero uniforme y en segundo lugar en un flujo inestable y no uniforme, con el propósito de aplicarlo a flujos turbulentos. Los estudios de Tchen contenían algunos errores por lo que, aunque constituyen un punto de partida para el problema planteado, es preciso corregirlos.

Así pues, Corrsin & Lumley (1956) [85] sacaron a la luz algunas inconsistencias de la ecuación de Tchen y, en particular, enfatizaron en el papel desempeñado por el gradiente de presiones del flujo y su contribución a la fuerza neta que el fluido ejerce sobre la partícula. Para una pequeña partícula esférica Corrsin & Lumley propusieron la siguiente ecuación:

$$m_p \frac{d\vec{v}}{dt} = (m_p - m) \vec{g} + m \left[\frac{D\vec{u}}{Dt} - \nu \nabla^2 \vec{u} \right] - \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} [\vec{v} - \vec{u}] - 6\pi R_p \mu [\vec{v} - \vec{u}] + R_p \int_{-\infty}^t d\tau \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}} \quad (6.1)$$

donde:

- m_p = masa de la partícula.
- $\vec{v}$ = velocidad de la partícula.
- t = tiempo.
- m = masa del fluido desplazado por la esfera.
- $\vec{g}$ = aceleración de la gravedad.
- D/Dt = derivada Lagrangiana siguiendo un elemento de fluido en la cercanía de la partícula, describe el comportamiento de las propiedades del fluido promediadas en los alrededores de la partícula. Por tanto, $D\vec{u}/Dt$ es la aceleración del fluido observada en el centro de la esfera. Su expresión desarrollada (en notación de índices) es $Du_i/Dt = (\partial u_i/\partial t + u_j \partial u_i/\partial x_j)$.
- $\vec{u}$ = velocidad local del fluido.
- ν = viscosidad cinemática del fluido.
- d/dt = derivada Lagrangiana siguiendo a la partícula en movimiento. Por ello, $d\vec{u}/dt$ es la derivada con respecto al tiempo de la velocidad del fluido. Su expresión desarrollada es $du_i/dt = (\partial u_i/\partial t + v_j \partial u_i/\partial x_j)$.
- R_p = radio de la partícula.
- μ = viscosidad dinámica del fluido.

En el caso de que los gradientes espaciales del campo de velocidades del fluido son despreciables (flujo uniforme) la distinción entre las dos derivadas de la velocidad del fluido desaparece: $D\vec{u}/Dt = d\vec{u}/dt$.

y los diferentes términos de la ecuación (6.1) son:

$$\begin{aligned}
m_p \frac{d\bar{v}}{dt} & : \text{Inercia de la partícula.} \\
(m_p - m)\bar{g} & : \text{Fuerza neta de flotación del fluido sobre la partícula.} \\
& \quad (\text{Fuerza de gravedad} - \text{Fuerza de flotación}) \\
m \left[\frac{D\bar{u}}{Dt} - \nabla^2 \bar{u} \right] & : \text{Fuerza del gradiente de presión.} \\
-\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} [\bar{v} - \bar{u}] & : \text{Masa virtual o efecto de masa añadida.} \\
-6\pi R_p \mu [\bar{v} - \bar{u}] & : \text{Arrastre de Stokes.} \\
R_p \int_{-\infty}^t d\tau \frac{d[\bar{v} - \bar{u}]/d\tau}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}} & : \text{Término de historia de Basset.}
\end{aligned}$$

Esta ecuación de Corrsin & Lumley (6.1) no es todavía correcta porque sólo están incluidos los efectos del gradiente de presión del flujo no perturbado y no los esfuerzos viscosos, cuando de hecho los dos deben ser comparables. Esta circunstancia fue apuntada por Buevich (1966) [86] que volvió a la ecuación original de Basset, Boussinesq y Oseen y utilizó un sistema de referencia ligado a la partícula para obtener una nueva ecuación de movimiento, concluyendo que el segundo término del segundo miembro de la ecuación (6.1) $m \left[D\bar{u}/Dt - \nabla^2 \bar{u} \right]$, debe ser reemplazado por $m d\bar{u}/dt$.

Por otra parte Riley (1971) [87] realizó un análisis similar y concluyó que el mencionado término debía ser más bien

$$m D\bar{u}/Dt \quad (6.2)$$

Este último resultado es físicamente más realista. La fuerza neta ejercida sobre una partícula pequeña (comparada con la escala de las variaciones espaciales del flujo no perturbado) como consecuencia de los esfuerzos de ese fluido incluye tanto los esfuerzos procedentes de la presión como los de la viscosidad, tal como ocurriría sobre una esfera fluida del mismo tamaño. Esta

fuerza debe equilibrar al producto de la masa del fluido por su aceleración local, tal como indica $m D\bar{u}/Dt$, mientras que $m d\bar{u}/dt$ no tiene ese significado.

Aunque se han realizado otras revisiones posteriores sobre la ecuación de Tchen, como las de Soo (1975) [88] o las de Gitterman & Steinberg (1980) [89], no son demasiado relevantes.

La ecuación de movimiento comúnmente aceptada hoy día y utilizada para la interacción partícula-fluido es la de Maxey & Riley (1983) [90], que es un desarrollo racional de la ecuación de movimiento de una pequeña esfera a bajos números de Reynolds del movimiento relativo entre la esfera y el fluido. En el estudio de Maxey & Riley:

- 1) Se formula el problema de la perturbación del flujo alrededor de una esfera de Stokes rígida en un flujo no perturbado no uniforme siguiendo la aproximación ya mencionada de Riley (1971) [87].
- 2) Se analizan las fuerzas debidas al flujo no uniforme y se incluyen las correcciones de Faxen (1922) [91] para tener en cuenta que la curvatura de la velocidad modifica la fuerza de arrastre sobre una esfera a bajos números de Reynolds. Así, el término de la fuerza de arrastre sobre una esfera producida por la perturbación del flujo alrededor de la misma es en primera aproximación

$$-6\pi R_p \mu (\bar{v} - \bar{u}) + \mu \pi R_p^3 \nabla^2 \bar{u} \quad (6.3)$$

- 3) Se calcula la fuerza producida por la perturbación del flujo para un flujo de Stokes inestable generalizando los resultados de Basset (1888) [81] y extendiendo los trabajos de Burgers (1938) [92].

Asunciones

En la evaluación de las fuerzas que actúan sobre las partículas para obtener la ecuación de movimiento hay que asumir (Maxey & Riley, 1983 [90]; Goater, 2003 [93]):

- Las partículas tienen forma esférica.
- La interacción entre las partículas así como la acción de las partículas sobre el propio fluido son despreciables. Esta asunción recibe el nombre de “*emparejamiento en un solo sentido*” y es válida en el caso de suspensiones muy diluidas en las que la fracción de volumen de las partículas es del orden de 10^{-6} o menor (Elghobashi, 1991, 1994) [94] [95]), aunque algunos investigadores (Goater, 2003) [93] la aplican también en suspensiones no tan diluidas, con una fracción de volumen de las partículas de orden menor que 10^{-4} .

Bajo las asunciones anteriores, la dinámica de la partícula está gobernada por (Maxey & Riley, 1983) [90]:

MASA POR ACELERACIÓN DE LA PARTÍCULA = FUERZA DE FLOTACIÓN DEL FLUIDO SOBRE LA PARTÍCULA + FUERZA DEL GRADIENTE DE PRESIÓN + MASA VIRTUAL (O EFECTO DE MASA AÑADIDA) + ARRASTRE DE STOKES + TÉRMINO DE HISTORIA DE BASSET

es decir, en notación vectorial, la posición $\bar{x}(t)$ y velocidad $\bar{v}(t)$ de la partícula en cualquier instante están determinadas por

$$m_p \frac{d\bar{v}}{dt} = (m_p - m) \bar{g} + m \frac{D\bar{u}}{Dt} - \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left[\bar{v} - \bar{u} - \frac{1}{10} R_p^2 \nabla^2 \bar{u} \right] - 6\pi R_p \mu \bar{Y} - 6\pi R_p^2 \mu \int_0^t d\tau \frac{d\bar{Y}/d\tau}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}} \quad (6.4)$$

donde: $\bar{Y} = \bar{v} - \bar{u} - 1/6 R_p^2 \nabla^2 \bar{u}$. El significado de los diferentes términos de la ecuación (6.4) es el que aparece en el Cuadro 1.

- **Inercia de la partícula:** $m_p \frac{d\vec{v}}{dt}$

- **Fuerza neta de flotación del fluido sobre la partícula:** $(m_p - m)\vec{g}$

Tiene en cuenta el efecto neto de la gravedad en la partícula, es decir, fuerza de gravedad menos fuerza de flotación.

- **Fuerza del gradiente de presión:** $m \frac{D\vec{u}}{Dt}$

Tiene en consideración la aceleración del fluido desplazado, esto es, la fuerza que una esfera fluida del mismo tamaño experimentaría en ausencia de la partícula.

- **Masa virtual o efecto de masa añadida:** $-\frac{1}{2}m \frac{d}{dt} \left[\vec{v} - \vec{u} - \frac{1}{10} R_p^2 \nabla^2 \vec{u} \right]$

Su contribución aparece debido a que la aceleración de la partícula requiere la aceleración del fluido circundante. Por tanto tiene en cuenta la inercia del fluido en la capa límite y la estela de la partícula. Este término es despreciable cuando $\rho \ll \rho_p$.

- **Arrastre de Stokes:** $-6\pi R_p \mu \vec{Y}$

Es la resistencia correspondiente al movimiento estable a la velocidad instantánea. Los trabajos de algunos investigadores, como Hadamard, 1911 [96] o Rybczynsky, 1911 [97] reducen el coeficiente 6 del término a 4.

- **Término de historia de Basset:** $-6\pi R_p^2 \mu \int_0^t d\tau \frac{d\vec{Y}/d\tau}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}}$

Ajusta la aceleración de la partícula para tener en cuenta la aceleración pasada del movimiento de la partícula, incluyendo el efecto de las condiciones que predominaron durante el desarrollo del flujo. Es el resultado de la difusión de vorticidad desde la partícula. Este término corrige las variaciones temporales en la velocidad relativa.

Cuadro 1: Significado de los términos de la ecuación (6.4).

Comentarios

- La ecuación (6.4) es aplicable a pequeñas partículas con bajos números de Reynolds de partícula, verificándose $\frac{R_p}{L_0} \ll 1, \frac{R_p V_i}{\nu} \ll 1, \frac{R_p^2 U_0}{L_0 \nu} \ll 1$, siendo L_0 y U_0 la velocidad y longitud característica del campo fluido (Maxey, 1987) [16].
- Una modificación de dicha ecuación (6.4) utilizada en ocasiones para mayores números de Reynolds de partícula (Berlemont et al., 1990) [98] consiste en sustituir el término correspondiente al arrastre de Stokes por el término empírico $(1/2)C_{D_{ad}}\pi\rho R_p^2|\vec{v}-\vec{u}|(\vec{v}-\vec{u})$, siendo $C_{D_{ad}}$ un coeficiente de arrastre para el caso de altos números de Reynolds.
- Se han incluido las Correcciones de Faxen ($R_p^2\nabla^2\vec{u}$) para el campo de flujo no uniforme.
- La masa virtual, el arrastre de Stokes y el término de historia de Basset consideran la acción de arrastre o resistencia de la partícula.
- Abundando más en el término de masa añadida, para considerar la masa del fluido siendo acelerada, la masa del cuerpo es incrementada dando lugar al término de masa añadida. Para una esfera la masa añadida es la mitad de la masa del fluido desplazado por el cuerpo, de ahí el coeficiente $1/2$. La masa añadida es proporcional a la relación de densidades ρ/ρ_p y por tanto tiene un efecto despreciable cuando el fluido portador es de baja densidad comparado con la partícula. Algunos autores (Manton, 1974 [99]; Auton 1981 [100]) han reemplazado la aceleración siguiendo a la partícula por la aceleración siguiendo a un elemento fluido en el término de masa añadida; esto es, $d\vec{u}/dt$ por $D\vec{u}/Dt$. De hecho, la distinción entre los dos es despreciable bajo la suposición de bajos números de Reynolds de la partícula.

Simplificaciones

La ecuación (6.4) es realmente complicada y en su lugar se ha generalizado el uso de una ecuación simplificada, donde las correcciones de Faxen son omitidas y el término de historia de Basset es despreciado, como se justifica a continuación:

- *Las correcciones de Faxen* suelen ser simplificadas del siguiente modo:
 $R_p^2 \nabla^2 \bar{u} = -R_p^2 \bar{u} / L_\theta^2$ (Maxey, 1987) [101] y su efecto en (6.4) es equivalente a disminuir, pero en muy poca cantidad, el valor local de $\bar{u}(\bar{x}, t)$ por lo que no tiene un efecto significativo en el movimiento general de la partícula. De todos modos, asumiendo que el diámetro de la partícula es pequeño comparado con la escala del flujo, las correcciones de Faxen pueden ser despreciadas, porque un diámetro de partícula pequeño implica que la curvatura de la velocidad tiene un efecto despreciable en el cálculo de la fuerza de arrastre sobre la esfera a bajos números de Reynolds de partícula, que es justo lo que representan dichas correcciones de Faxen.
- El término de historia de Basset también será despreciado, por las siguientes razones. De este término se espera que incremente la fuerza de arrastre cuando la partícula está acelerando o decelerando o cuando el número de Reynolds del movimiento relativo es pequeño (Clift et al., 1978) [102]. Sin embargo algunos estudios han mostrado (Mei et al., 1991 [103], [104]; Mei & Adrian, 1992 [105]; Lovalenti & Brady, 1993 [106], [107], [108]; Mei, 1994 [109]; Chang & Maxey, 1994 [110]); Lovalenti & Brady, 1995 [111]; que los efectos de historia son menos importantes de lo que se pensaba originalmente, pues el término de historia de Basset inicialmente decae como $t^{1/2}$ y después como t^{-2} . También Goater (2003) [93] justifica como este término puede ser despreciado en el caso de partículas pesadas como es el caso de esta Tesis, y asimismo Manton (1974) [99] muestra que el término de historia de Basset es menos significativo que los otros términos.

Ecuación de movimiento con las simplificaciones aplicadas

Con las asunciones y simplificaciones mencionadas y reordenando términos, la ecuación de movimiento queda como sigue:

$$(m_p + \frac{1}{2}m) \frac{d\bar{v}}{dt} = (m_p - m)\bar{g} + m\bar{u} \cdot \nabla \bar{u} + \frac{1}{2}m\bar{v} \cdot \nabla \bar{u} + 6\pi R_p \mu [\bar{u} - \bar{v}] \quad (6.5)$$

En este momento es conveniente realizar algunas consideraciones (ver por ejemplo Maxey, 1987 [101]) sobre la relación entre la densidad de la partícula (ρ_p) y la densidad del fluido (ρ), o lo que es equivalente, entre sus respectivas masas (m_p y m) para un cierto volumen. La relación m_p/m puede variar entre cero e infinito y es usual distinguir dos rangos correspondientes a dos conjuntos diferentes de situaciones físicas:

1. El primero de ellos es el RANGO DE AEROSOL, donde la densidad de la partícula se mantiene significativamente mayor que la densidad del fluido y que específicamente cubre el intervalo $m_p \geq 2m$. En él, la aceleración del fluido y los términos de masa añadida de (6.5) pueden considerarse como pequeñas perturbaciones al problema básico de aerosol.
2. El segundo rango a considerar es el RANGO DE TRANSICIÓN, que cubre el intervalo $m_p < 2m$. La masa de la partícula, o mejor, $m_p + (m/2)$ es tomado como valor de referencia.

Entonces, considerando el *Parámetro de Relación de Masa* $\mathcal{R}_m = m / (m_p + \frac{1}{2}m)$ (Maxey, 1987) [101], los diferentes rangos se esquematizan en la Figura 6-1. Cuando la masa de la partícula y la del fluido coinciden ($m_p = m$), dicho Parámetro toma el valor $\mathcal{R}_m = 2/3$ y la partícula flota neutralmente.

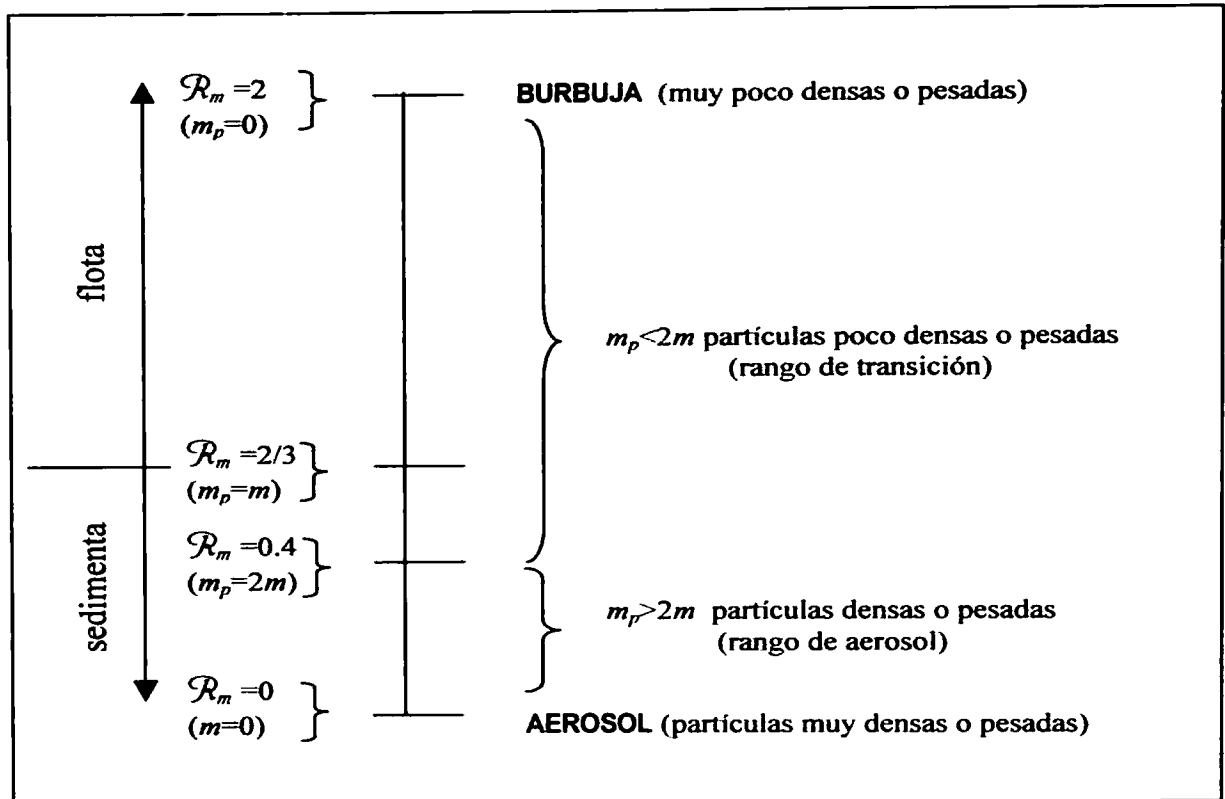


Figura 6-1: Representación esquemática de los distintos tipos de partículas según su densidad o masa.

El objeto de estudio de esta Tesis lo constituyen las partículas pesadas, con $\rho_p \gg \rho$ y $m_p \gg m$. Entonces, para $\mathcal{R}_m \rightarrow 0$ el movimiento de las partículas pesadas esféricas en el fluido está gobernado por el balance entre la inercia de la partícula, la gravedad y las fuerzas de flotación y arrastre del movimiento relativo entre partícula y fluido. Asumiendo, por tanto, que la densidad de la partícula objeto de análisis en esta investigación es más grande que la del fluido, las fuerzas de flotación y las fuerzas de aceleración no son importantes. Además, las interacciones entre las partículas son despreciables a bajas concentraciones, por lo que si las partículas son suficientemente pequeñas, la única fuerza a considerar es la fuerza de arrastre de Stokes. Así, la posición $\bar{x}(t)$ y velocidad $\bar{v}(t)$ de la partícula en cualquier instante están determinadas por la Segunda Ley de Newton y la ecuación (6.5) se simplifica en:

$$m_p \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m_p \vec{g} + 6\pi R_p \mu [\vec{u}(\vec{x}, t) - \vec{v}(t)] \quad (6.6)$$

donde: m_p es la masa de la partícula, $\vec{v}(t)$ es la velocidad de la partícula, $\vec{g}$ es la aceleración de la gravedad, R_p es el radio de la partícula, μ es la viscosidad del fluido y $\vec{u}(\vec{x}, t)$ es la velocidad local del fluido. Valores para los que usualmente la ecuación (6.6) es utilizada son los correspondientes a $\rho_p > 100\rho$ (aunque como se acaba de exponer sería válida su utilización a partir de $m_p > 2m$ es decir: $\rho_p > 2\rho$). POR ELLO ESTA SERÁ LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO UTILIZADA EN LOS CÁLCULOS DE ESTA TESIS. Todas las asunciones y simplificaciones mencionadas han sido corroboradas además por las estimaciones de órdenes de magnitud realizadas por Lázaro & Lasheras (1989) [112], que indican que para pequeñas partículas pesadas en régimen diluido los efectos de inercia y arrastre predominan sobre los de presión, masa virtual e historia. De acuerdo con ello, basta con retener los términos de gravedad y arrastre en el estudio de la acumulación y dispersión de partículas pesadas en fluidos (Martín & Meiburg, 1994 [113]; Raju & Meiburg, 1995 [114]). La determinación del movimiento de la partícula -resolviendo esta ecuación- es un problema muy complejo, que obliga a obtener soluciones computacionales. Para ello, es preciso escribir la ecuación (6.6) en forma adimensional introduciendo los parámetros adimensionales apropiados, lo cual se lleva a cabo en el apartado 6.4. De este modo, se pueden obtener las leyes de escala de los procesos en lugar de casos particulares.

Antes, se van a aclarar algunos conceptos sobre la fuerza de arrastre utilizada, se va a deducir un parámetro importante para la adimensionalización (*velocidad de sedimentación* (V_t), también denominada “velocidad terminal de caída en fluido en reposo”) y se definirán ciertos parámetros necesarios para expresar la ecuación (6.6) en la forma en que se usará en algunos cálculos.

6.2. Sedimentación de partículas en el seno de fluidos en reposo

La dinámica de partículas -más o menos esféricas- dispersas en el seno de un fluido, como es el caso de esta Tesis, es un problema práctico de gran complejidad y relevancia por la multitud de aplicaciones en que aparece. Para conocer la dinámica del movimiento de las partículas, es preciso conocer la propia dinámica del fluido cuando se mueve alrededor de una esfera, ya que a efectos prácticos es lo mismo considerar que la partícula se mueve en fluido en reposo (Figura 6-2) que considerar que la partícula está en reposo y lo que se mueve es el fluido (Figura 6-3).

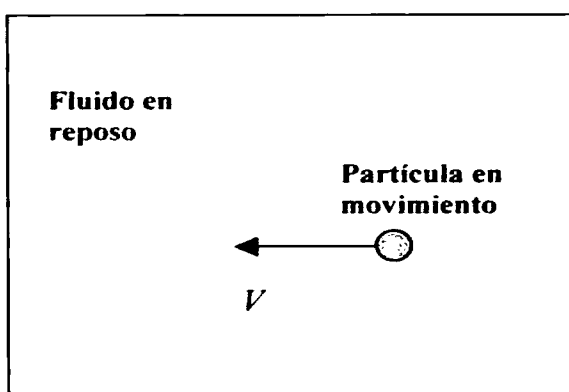


Figura 6-2: Partícula en movimiento en el seno de un fluido en reposo.

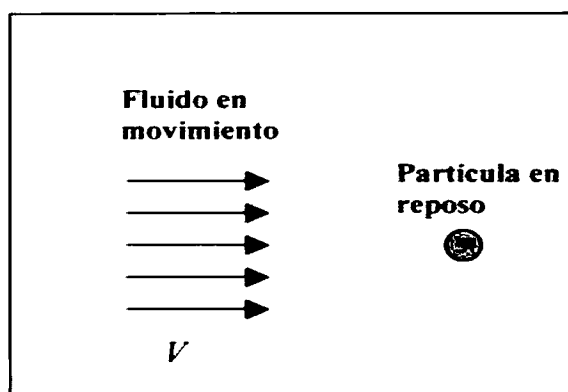


Figura 6-3: Partícula en reposo en el seno de un fluido en movimiento.

De este modo será posible determinar la interacción entre el fluido y la partícula. La solución a esta cuestión fue proporcionada por Stokes, que realizó el desarrollo de un fluido en reposo con partículas en movimiento a partir de un fluido en movimiento con partículas en reposo

6.2.1. Ley de Stokes

En este apartado se describe someramente la teoría existente sobre el movimiento de pequeñas partículas esféricas cuando el número de Reynolds del fluido circundante es bajo (Barrero, 2000) [28].

En el caso del movimiento de fluidos alrededor de cuerpos de dimensiones características pequeñas y velocidades relativas al fluido también pequeñas, las fuerzas de viscosidad son dominantes. Se trata de aplicar el tratamiento general de las ecuaciones de Navier-Stokes de movimiento alrededor de obstáculos, al caso del flujo alrededor de una esfera con viscosidad dominante y en régimen estacionario.

Para ello, se considera una esfera de radio R sobre la que incide una corriente -que para x tendiendo a infinito- tiene una velocidad $V\vec{i}$.

Las ecuaciones de movimiento del fluido pueden escribirse:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (6.7a)$$

$$\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = 0 \quad (\text{ó} \quad \nabla^2 \omega = 0) \quad (6.7b)$$

con las condiciones de contorno:

$$\vec{u} = V\vec{i} \quad \text{en} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad (6.8a)$$

$$\vec{u} = 0 \quad \text{en} \quad |\vec{x}| = R \quad (6.8b)$$

Dado que el problema es simétrico respecto del eje x , se puede definir el campo de velocidades a partir de una función de corriente ψ . En coordenadas esféricas (es decir d, θ, φ) el campo de velocidades es:

$$u_d = \frac{1}{d^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (6.9a)$$

$$u_\theta = -\frac{1}{d \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial d} \quad (6.9b)$$

$$u_\varphi = 0 \quad (6.9c)$$

La ecuación de continuidad se satisface automáticamente:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{d^2} \frac{\partial}{\partial d} (d^2 u_d) + \frac{1}{d \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) = 0 \quad (6.10a)$$

y la ecuación de cantidad de movimiento queda como:

$$\nabla^2 (\nabla^2 \psi) = 0 \quad (6.10b)$$

donde

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial d^2} + \frac{\sin \theta}{d^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (6.11)$$

Así resulta una ecuación en derivadas parciales lineal de cuarto orden sujeta a las condiciones de contorno:

$$u_d = u_\theta = \frac{1}{d} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial d} = 0 \quad \text{en } d = R \quad (6.12a)$$

$$\psi \rightarrow \frac{V}{2} d^2 \sin^2 \theta \quad \text{cuando } d \rightarrow \infty \quad (6.12b)$$

Este problema admite una solución de variables separadas de la forma:

$$\psi(d, \theta) = f(d) \sin^2 \theta \quad (6.13)$$

que sustituida en (6.10) y (6.12) proporciona

$$\left(\frac{d^2}{dd^2} - \frac{2}{d^2} \right) \left(\frac{d^2}{dd^2} - \frac{2}{d^2} \right) f = 0 \quad (6.14)$$

con las condiciones

$$f = \frac{\partial f}{\partial d} = 0 \quad \text{en } d = R \quad (6.15a)$$

$$f \rightarrow V \frac{d^2}{2} \quad \text{cuando } d \rightarrow \infty \quad (6.15b)$$

La solución general de (6.14) es:

$$f = A_1 d^2 + \frac{A_2}{d} + A_3 d^4 + A_4 d \quad (6.16)$$

donde las A_i son constantes de integración.

Imponiendo las condiciones de contorno se obtiene

$$\psi = \frac{VR^2}{2} \left[\frac{d^2}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{R}{d} - \frac{3}{2} \frac{d}{R} \right] \sin^2 \theta \quad (6.17)$$

con lo que el campo de velocidades queda:

$$u_d = \left[1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{d^3} - \frac{3}{2} \frac{R}{d} \right] V \cos \theta \quad (6.18a)$$

$$u_\theta = - \left[1 - \frac{1}{4} \frac{R^3}{d^3} - \frac{3}{4} \frac{R}{d} \right] V \sin \theta \quad (6.18b)$$

Conocido el campo de velocidades puede determinarse el campo de presión $p(d, \theta)$, mediante la ecuación de cantidad de movimiento:

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} = 0 \quad (6.19)$$

obteniéndose

$$p(d, \theta) = - \frac{3\mu VR \cos \theta}{2d^2} \quad (6.20)$$

La fuerza que el fluido ejerce sobre la esfera es en la dirección del movimiento de la esfera pero con sentido opuesto: $\vec{F}_x = F_x \vec{i}$. Proyectando las fuerzas por unidad de superficie que actúan sobre la esfera (presión y esfuerzos viscosos) en la dirección x e integrando sobre toda la superficie de la esfera:

$$F_x = 2\pi \int_0^\pi [(-p + \tau'_{dd}) \cos \theta - \tau'_{d\theta} \sin \theta]_{d=R} R^2 \sin \theta d\theta \quad (6.21)$$

y teniendo en cuenta que los esfuerzos de viscosidad son conocidos en la superficie de la esfera:

$$(\tau'_{dd})_{d=R} = 2\mu \left(\frac{\partial u_d}{\partial d} \right)_{d=R} = 0 \quad (6.22a)$$

$$(\tau'_{d\theta})_{d=R} = \mu \left[d \frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{u_\theta}{d} \right) + \frac{1}{d} \frac{\partial u_d}{\partial \theta} \right]_{d=R} = -\frac{3\mu V \sin \theta}{R} \quad (6.22b)$$

se obtiene la fuerza que el fluido ejerce sobre el obstáculo (LEY DE STOKES):

$$F_r = 6\pi\mu VR \quad (6.23)$$

Experimentalmente, se ha comprobado que la Ley de Stokes puede considerarse aproximadamente válida incluso hasta valores del número de Reynolds de orden unidad (Barrero, 2000) [28].

Así el coeficiente de resistencia (C_D):

$$C_D = \frac{F_r}{\frac{1}{2} \rho V^2 \pi R^2} = \frac{24}{Re} \quad \begin{array}{l} \text{Distancias} \\ \text{cortas} \\ \\ \text{Re bajos} \end{array} \quad (6.24)$$

dependerá sólo del número de Reynolds $Re = 2RV\rho/\mu$. Las ecuaciones (6.23) y (6.24) son válidas, por tanto, para bajos números de Reynolds y a distancias cortas de la partícula.

En este punto conviene insistir una vez más que se ha analizado el movimiento del fluido cuando se mueve alrededor de la partícula en reposo para conocer la dinámica del movimiento de la propia partícula. Como ya se ha expuesto es lo mismo considerar que la partícula se mueve en fluido en reposo que analizar el movimiento del fluido con partícula en reposo. A efectos prácticos, este análisis es válido para el caso de que ambos estén en movimiento. Por tanto, es obvio que el número de Reynolds que aparece en la ecuación (6.24) es el

número de Reynolds del movimiento relativo fluido-partícula. Por ello, en lo sucesivo se denotará este número de Reynolds como $Re_p = \rho |\bar{v} - \bar{u}| 2R_p / \mu$. Todo ello se detalla en la siguiente Figura 6-4.

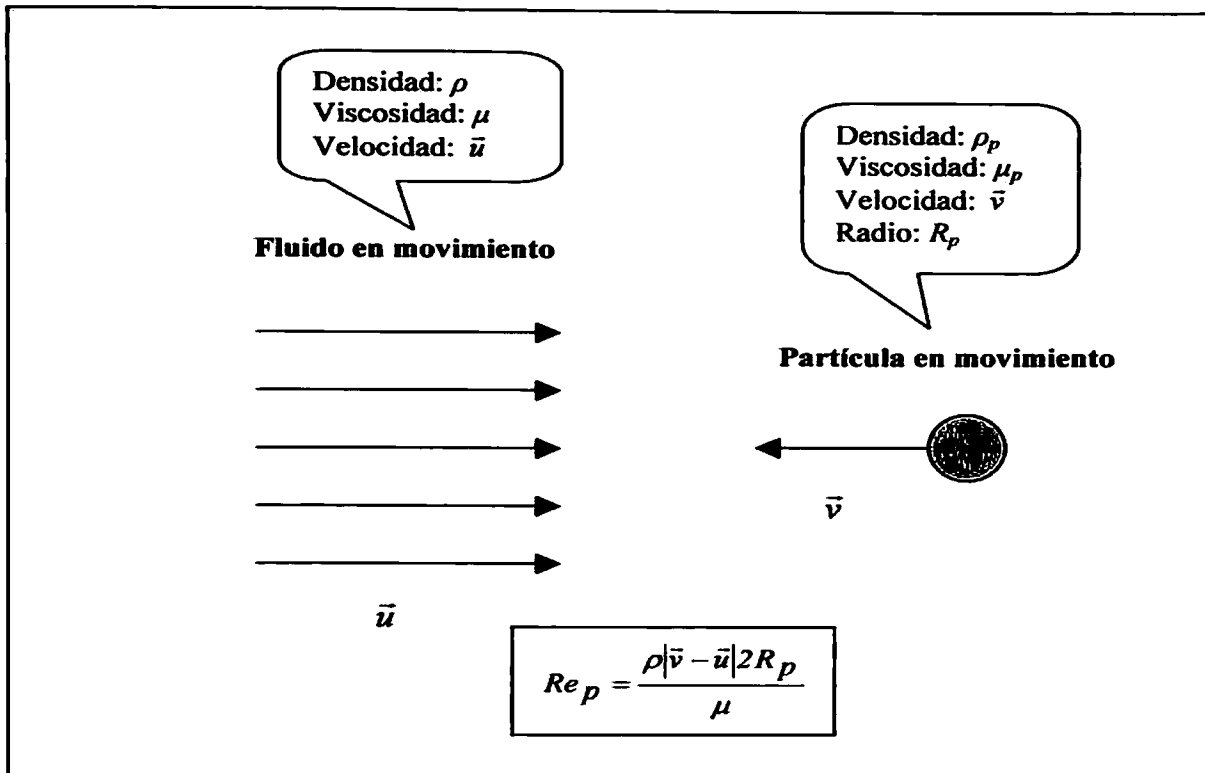


Figura 6-4: Movimiento relativo partícula-fluido y número de Reynolds.

Todo el desarrollo realizado se ha hecho, como ya se ha comentado, bajo la hipótesis de bajos números de Reynolds, lo cual está justificado por el hecho de que el movimiento de un fluido alrededor de una partícula de pequeño tamaño es un caso típico de movimiento con viscosidad dominante.

En el movimiento de fluidos alrededor de obstáculos a bajos números de Reynolds (Barrero, 2000) [28], la resultante de las fuerzas de superficie (fuerzas de presión y de viscosidad) es proporcional al tamaño característico del cuerpo $2R_p$ y a su velocidad relativa respecto al fluido $(\bar{v} - \bar{u})$; mientras que las fuerzas volumétricas (fuerzas másicas de inercia y flotabilidad) son proporcionales al

volumen. Entonces, el balance de fuerzas proporciona que la velocidad resultante de la partícula en el seno del fluido sea proporcional al cuadrado de su tamaño característico.

En cambio a grandes números de Reynolds (Barrero, 2000) [28], la resultante de las fuerzas de superficie es proporcional a la superficie y al cuadrado de la velocidad relativa entre cuerpo y fluido.

En conclusión el número Reynolds del movimiento partícula-fluido es siempre proporcional al volumen del cuerpo y por tanto es más pequeño cuanto menor sea el mismo. Así pues, en el caso de cuerpos de pequeño volumen el movimiento es a bajos números de Reynolds.

6.2.2 Correlación de Clift et al para generalizar la Ley de Stokes a altos números de Reynolds

La hipótesis de bajos números de Reynolds no siempre se verifica en la práctica. Entonces la expresión (6.24) que nos da el valor del coeficiente de resistencia deja de ser válida, ya que para hallar la fuerza de resistencia habría que retener en la ecuación de cantidad de movimiento del fluido la aceleración local del fluido ($\rho \partial \bar{u} / \partial t$), la flotabilidad (incluida en las fuerza másicas) y la fuerza de inercia asociada a la aceleración del sistema de referencia ($-\rho d\bar{u}/dt$) respecto al que se describe el movimiento.

La forma más usual de soslayar este problema es mediante la utilización de diversas correlaciones empíricas que proporcionan el coeficiente de resistencia para números de Reynolds más elevados. Una de estas correlaciones que es un ajuste empírico de las observaciones experimentales es la *Correlación de Clift et al.* (1978) [102]:

$$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{2/3}) \quad \begin{array}{l} \text{Distancias} \\ \text{cortas} \end{array} \quad (6.25)$$

Re altos

La desviación de la Ley de Stokes presupone que el flujo lejos de la partícula es uniforme y que la partícula no está acelerando en relación al fluido. La expresión (6.25) asume que el número de Reynolds de la partícula Re_p es mayor que el orden unidad para el período de relajación completo, pero en realidad, como una partícula se relaja hacia la velocidad del fluido, Re_p decrece hacia cero. Incluso si Re_p tiene un alto valor inicial, alguna fracción del período de relajación ocurrirá con la partícula siguiendo la Ley de Stokes (Sippola y Nazaroff, 2002 [115]). En la mayoría de la literatura al respecto, se sigue la aproximación de que el fluido sigue la Ley de Stokes, como se detallará posteriormente en el apartado 6.2.5.

6.2.3. Aproximación de Oseen para generalizar la Ley de Stokes a distancias grandes de la partícula

La Ley de Stokes, además, presenta el inconveniente de que no es válida lejos de la partícula, ya que a distancias de la misma suficientemente grandes el término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento $\rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$, despreciado al obtener la Ley de Stokes, se hace tan importante como la viscosidad y debe ser retenido.

En efecto, sustituyendo el campo de velocidades dado por (6.18a) y (6.18b) en la ecuación de cantidad de movimiento completa se tiene

$$\mu \nabla^2 u_d = \mu V \cos \theta \left[2 \frac{R^3}{d^5} - \frac{2}{d^2} + \frac{3R}{d^3} \right] \quad (6.26)$$

y

$$\begin{aligned} \rho \vec{v} \cdot \nabla u_d &= \rho V^2 \cos^2 \theta \left(1 - \frac{3R}{2d} + \frac{R^3}{2d^3} \right) \left(\frac{3R}{2d^2} - \frac{3}{2} \frac{R^3}{d^4} \right) + \\ &\frac{\rho v^2 \sin^2 \theta}{d} \left(1 - \frac{3R}{4d} - \frac{R^3}{4d^3} \right) \left(1 - \frac{3R}{2d} + \frac{R^3}{2d^3} \right) \end{aligned} \quad (6.27)$$

de modo que ambos términos (convectivo y viscoso) se hacen de la misma magnitud a grandes distancias de la partícula. Esto sucede a distancias $d \sim R/Re_p$ $\gg R$:

$$\mu \nabla^2 u_d \sim \frac{\mu V}{d^2} \sim \rho v \cdot \nabla u_d \sim \rho \frac{V^2}{d} \cdot \frac{d}{R} \sim \frac{\mu}{\rho V R} \sim Re_p^{-1} \gg 1 \quad (6.28)$$

Como se ve, la condición $Re_p \ll 1$ permite despreciar el término convectivo en la ecuación de cantidad de movimiento en relación al término de fuerzas viscosas a distancias del cuerpo del orden de su dimensión característica. A medida que nos alejamos de él, la contribución del término convectivo se va haciendo más importante y suficientemente lejos del obstáculo (a distancias $d \sim R/Re_p$) no puede ser despreciado su efecto. Si $Re_p \rightarrow 0$, esta dificultad no sería tal, puesto que la solución sería válida hasta $d \rightarrow \infty$. Para $Re_p \ll 1$ pero finito, es necesario corregir la solución de Stokes lejos del obstáculo.

Esto lo hizo Oseen (1927) [116] linealizando el término convectivo para $d \rightarrow \infty$, con lo que obtuvo una corrección de la Ley de Stokes que viene a ser el siguiente término en el desarrollo en serie de potencias de $Re_p \ll 1$. Básicamente la idea utilizada consiste, como se acaba de comentar, en linealizar el término convectivo a distancias $d/R \sim Re_p^{-1} \gg 1$ de modo que se puede suponer que allí la velocidad del fluido es aproximadamente la de la corriente en el infinito $\vec{v}_i$, es decir, $\rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \cong \rho V \vec{i} \cdot \nabla \vec{u} = \rho V \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}$ de esta forma la ecuación de cantidad de movimiento sigue siendo lineal y resulta

$$\rho V \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (6.29)$$

Esta ecuación, debida a Oseen, se puede resolver análogamente a como se hizo en el caso anterior. Se llega entonces a

$$\nabla^2 p = 0 \quad (6.30)$$

y

$$\left(\nabla^2 - 2 \frac{\rho V}{(2\mu)} \frac{\partial}{\partial x} \right) \omega = 0 \quad (6.31)$$

donde se ha hecho uso de la ecuación de continuidad y de $\nabla x \cdot \partial u / \partial x = \partial \omega / \partial x$. La ecuación (6.31) junto con las condiciones de contorno (6.12) se resuelve más fácilmente utilizando coordenadas cilíndricas con x como eje de simetría. La solución, que es de variables separadas, puede expresarse en términos de funciones de Bessel esféricas. Reteniendo los primeros términos de la expansión se llega a la siguiente expresión para el coeficiente de resistencia

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left(1 + \frac{3}{16} Re_p \right) \quad \text{Distancias lejanas} \quad (6.32)$$

donde el término $3Re_p/16$ es la *Corrección de Oseen* a la Ley de Stokes.

La solución de Oseen fue perfeccionada por Proudman y Pearson en 1957 [117] utilizando la técnica de los “*desarrollos asintóticos acoplados*”. Aunque no se entrará en los detalles concretos del método seguido por Proudman & Pearson, básicamente la Ley de Stokes corresponde al orden más bajo del desarrollo en serie de potencias de Re_p de la solución cerca de la esfera, mientras que la solución de Oseen es el siguiente orden de ese desarrollo cerca de la esfera. Proudman y Pearson calcularon el mencionado desarrollo en serie de potencias de Re_p de la solución lejos de la esfera y la acoplaron con la solución cerca de la misma para distancias intermedias. De esta forma obtuvieron la corrección de Oseen de una forma más rigurosa, además de correcciones de mayor orden. El desarrollo completo de la técnica utilizada se encuentra en la referencia mencionada.

6.2.4. Comparación de la ley de Stokes con la correlación de Clift et al. y la corrección de Oseen

En la Figura 6-5 se representan la ley de Stokes junto con la Correlación de Clift et al. y la Corrección de Oseen.

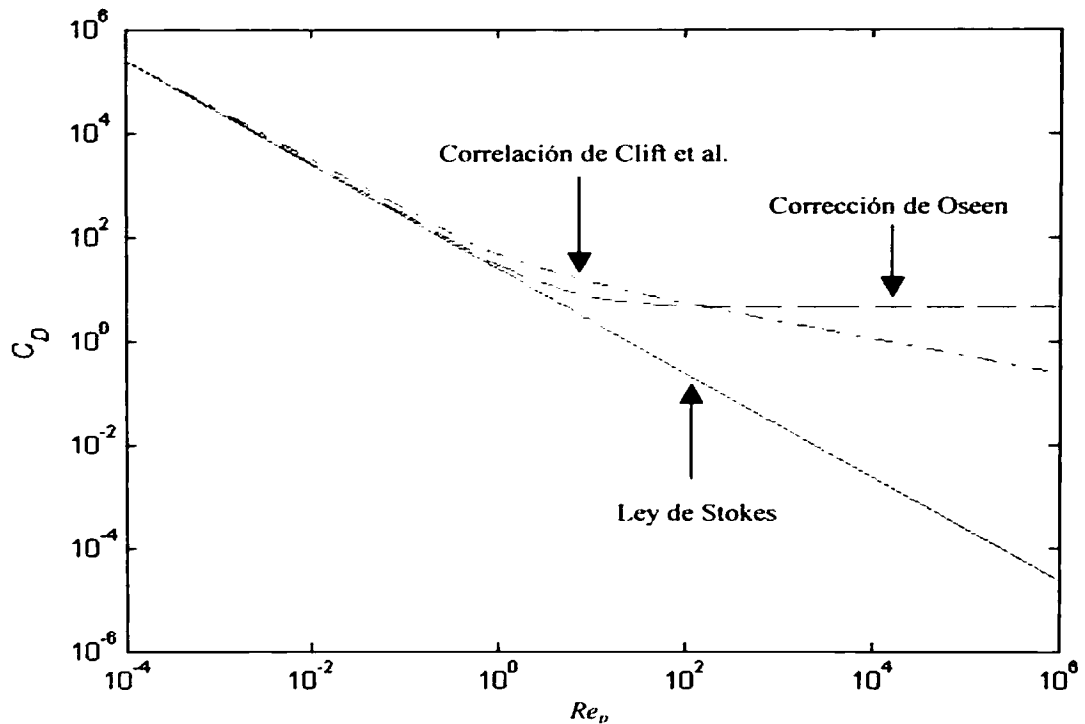


Figura 6-5: Ley de Stokes, Correlación de Clift et al. y Corrección de Oseen para el Coeficiente de Resistencia (C_D).

Como puede observarse:

- Las tres presentan un coeficiente de resistencia (C_D) similar hasta $Re_p \approx 1$; es decir la resistencia calculada con la aproximación de primer orden (Oseen) y los resultados experimentales de Clift et al. prácticamente coinciden con la ley de Stokes.

- Para $Re_p \approx 1-10$, los valores de coeficiente de resistencia (C_D) de las tres no son tan coincidentes como en el caso anterior, pero la diferencia entre ellos es aún pequeña a efectos de cálculo.
- Para $Re_p \gg 10$, los coeficientes de resistencia (C_D) correspondientes a la Corrección de Oseen y a la Correlación de Clift et al. se alejan mucho del obtenido con la ley de Stokes.

6.2.5. Coeficiente de resistencia aplicado en la Tesis

El coeficiente de resistencia utilizado en esta Tesis es el calculado mediante la ecuación (6.24). Para justificar su utilización hay que consultar las diversas investigaciones que guardan afinidad con la misma, como las de Maxey & Corrsin (1986) [12] o las de Maxey (1987) [101], están basadas en la utilización de la Ley de Stokes, dando por supuesto que dicha ley es de correcta aplicación para el caso de partículas pesadas. En otros trabajos afines, como el de Wang & Maxey (1993) [9], también se realiza el análisis mediante la Ley de Stokes y en un anexo final se puntualiza que la utilización de un coeficiente de arrastre no lineal como el de Clift et al. únicamente produce en los resultados una suave disminución del rango de sedimentación comparado con el caso lineal, de modo que su uso no compensa el mayor coste computacional que conlleva. Conclusiones similares al respecto obtuvieron Tunstall & Houghton (1968) [118] y Hwang (1985) [119] en flujos oscilatorios simples y Mei (1990) [120] para campos de flujo aleatorio y también Mei et al. (1991a) [103] estudiando la dispersión de partículas en turbulencia isótropa bajo sedimentación gravitacional. También los análisis de Fung (1998) [121] y (2000) [11] ponen de manifiesto que la ley de arrastre de Stokes proporciona unos resultados similares a los obtenidos con una ley de arrastre empírica no lineal.

En la investigación llevada a cabo en la Tesis y teniendo en cuenta las referencias bibliográficas citadas, se ha comprobado asimismo que una ley de arrastre no lineal únicamente modifica muy ligeramente los resultados obtenidos

con la ley de Stokes. Concretamente se produce un ligero aumento del tiempo que una partícula necesita para escapar del interior de un vórtice tridimensional y una ligera disminución de la velocidad media de sedimentación, tanto para el caso de partículas en presencia de un vórtice tridimensional como en el caso de partículas en presencia de una disposición bidimensional de vórtices repetidos periódicamente. (En ambos casos la diferencia con el caso lineal no llega al 5 %). Por ello, dado el considerable coste computacional que una ley de arrastre no lineal acarrea, se ha optado por realizar los cálculos utilizando la Ley de Stokes, igual que en las investigaciones de las referencias que se acaban de mencionar. Además, con los valores de los parámetros que se han tomado en esta Tesis para realizar las simulaciones, resultan unos valores para Re_p de orden unidad en todos los casos, por lo que a la vista de la Figura 6-5 se concluye que la utilización de la ley de arrastre lineal proporciona unos resultados suficientemente aproximados.

6.3. Velocidad de sedimentación

Como ya se ha mencionado en el apartado 6.1., para determinar el movimiento de la partícula es preciso escribir la ecuación (6.6) en forma adimensional de modo que pueda ser resuelta computacionalmente. Con ese objetivo, se va a proceder a obtener la *velocidad de sedimentación o velocidad terminal de caída en fluido en reposo*.

La ecuación que gobierna la dinámica de una partícula esférica pesada de radio R_p y densidad ρ_p que se mueve en el seno de un fluido en reposo de densidad ρ (siendo $\rho_p \gg \rho$) se obtiene de (6.6) haciendo $\vec{u}(\vec{x}, t) = 0$.

$$\underbrace{\frac{4}{3} \pi R_p^3 \rho_p \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\text{INERCIA DE LA PARTÍCULA}} = \underbrace{\frac{4}{3} \pi R_p^3 \rho_p \vec{g}}_{\text{PESO DE LA PARTÍCULA}} - \underbrace{6 \pi \mu R_p \vec{v}}_{\text{RESISTENCIA FLUIDODINÁMICA}} \quad (6.33)$$

que expresa el balance entre la inercia de la partícula, su peso (fuerza de la gravedad) y la resistencia fluidodinámica (fuerza de arrastre).

Se define la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_t) como la velocidad ($\bar{v}$) que alcanza la partícula cuando la resultante de fuerzas que actúa sobre ella es nula, es decir, la aceleración ($d\bar{v}/dt$) es nula. Por tanto, igualando a cero el segundo miembro de (6.33), queda el siguiente valor de la velocidad:

$$V_t = \frac{2\rho_p R_p^2 g}{9\mu} = \frac{m_p g}{6\pi R_p \mu} \quad (6.34)$$

Es interesante mencionar, que aún en los casos en que la densidad de la partícula es del mismo orden que la del fluido ($\rho_p \sim \rho$), la expresión (6.34) sigue siendo válida para determinar la velocidad terminal incluyendo en ella los efectos de la flotabilidad, porque para tiempos suficientemente grandes el movimiento de la partícula se hace estacionario:

$$V_t = \frac{2(\rho_p - \rho)R_p^2 g}{9\mu} \quad (6.35)$$

Por otra parte, el empleo de la expresión (6.35) es inadecuado para partículas de tamaño muy pequeño (menor a $1\ \mu\text{m}$), ya que la velocidad terminal resultante puede ser menor que la de difusión. Por ejemplo, para partículas micrométricas contenidas en agua, el orden de magnitud de la velocidad terminal dada por (6.34) es muy baja (del orden de $\mu\text{m/s}$). Un modo de incrementar la velocidad terminal de partículas muy pequeñas, como proteínas y ácidos nucleicos, para forzar su separación consiste en aumentar artificialmente por medio de campos centrífugos o electromagnéticos la fuerza g por unidad de masa que actúa sobre las partículas. Por ejemplo, si al recipiente que contiene una suspensión de partículas se le hace girar con una velocidad angular $\Omega/2$ alrededor de su eje, las partículas experimentarán una fuerza centrífuga por unidad de masa $r\Omega^2/4$, donde r es la distancia al eje de giro. Si $r\Omega^2/4 \gg g$, las partículas -respecto a unos ejes que giren con el recipiente- se moverán radialmente hacia las paredes del mismo si son más densas que el líquido que las contiene o hacia el eje en caso

contrario. Dado que la gravedad no es constante, las partículas no alcanzan una velocidad terminal constante. En este caso la velocidad límite, que depende de r , viene dada por:

$$V_t(r) = \frac{2(\rho_p - \rho)R_p^2(\Omega/2)^2 r}{9\mu} \quad (6.36)$$

Es interesante observar, abundando aún más en la Ley de Stokes, que dicha ley es válida y puede ser utilizada para obtener la ecuación (6.33) (Barrero, 2000) [28] en tanto sea pequeño el parámetro adimensional ($R_p^2 / \nu t_0$) que mide la importancia relativa de la aceleración del fluido frente a las fuerzas de viscosidad por unidad de masa (donde t_0 es el tiempo característico de variación de la velocidad de la partícula y de la velocidad terminal). Es fácil comprobar que dicho parámetro adimensional es pequeño comprobando cual es el orden de magnitud de t_0 : si la velocidad de la partícula cambia desde su valor inicial (suponiendo velocidad inicial nula, $\vec{v} = 0$) a V_t en un tiempo t_0 , la estimación del orden de magnitud de los términos de la ecuación (6.33) proporciona el orden de magnitud de t_0 :

$$t_0 \sim \frac{\rho_p V_t}{g\rho_p} \sim \frac{\rho_p R_p^2}{\mu} \sim \frac{\rho_p}{\rho} \frac{R_p^2}{\nu} \quad (6.37)$$

con ello el mencionado parámetro adimensional ($R_p^2 / \nu t_0$) sería del orden ρ/ρ_p , es decir, muy pequeño para partículas pesadas. Por tanto, y como se quería demostrar, el movimiento del fluido alrededor de la partícula puede considerarse casi estacionario si $\rho/\rho_p \sim (R_p^2 / \nu t_0) \ll 1$. Entonces, si se consideran las variables adimensionales $v_a = v/V_t$ y $t_a = t/t_0$ la ecuación (6.33) queda

$$\frac{2}{9} \frac{dv_a}{dt_a} = 1 - v_a \quad (6.38)$$

cuya solución si la partícula parte del reposo es

$$v_a = 1 - e^{-g t_a / 2} \quad (6.39)$$

En el caso de un movimiento no estacionario, como ocurre si $\rho_p \approx \rho$, la solución (6.39) deja de ser válida porque, como ya se ha mencionado, para hallar la fuerza de resistencia habría que retener en la ecuación de cantidad de movimiento la aceleración local del fluido, la flotabilidad y la fuerza de inercia asociada a la aceleración del sistema de referencia respecto al que se describe el movimiento del fluido.

6.4. Adimensionalización de las ecuaciones de movimiento

La adimensionalización de la ecuación (6.6) es necesaria, para posteriormente ser resuelta computacionalmente (Anexo II) de modo que se puedan obtener los resultados de los capítulos 8, 9 y 10. Para ello hay que definir los parámetros adimensionales adecuados. Es conveniente hacer notar que todas las variables, parámetros y ecuaciones que han aparecido hasta este momento en la Tesis han sido expresadas en forma dimensional, salvo aquellos casos puntuales en los que se ha indicado expresamente.

Para distinguir las variables dimensionales de las correspondientes variables adimensionales, se va a incluir en la notación de las dimensionales el superíndice asterisco. Con esta notación la ecuación (6.6) se escribe:

$$m_p^* \frac{d\bar{v}^*(t^*)}{dt^*} = m_p^* \bar{g}^* + 6\pi R_p^* \mu^* [\bar{u}^*(\bar{x}^*, t^*) - \bar{v}^*(t^*)] \quad (6.40)$$

Dávila & Hunt (2001) [1] probaron que para describir la interacción de pequeñas partículas esféricas con flujos vorticales, si el número de Reynolds de las partículas es pequeño, bastan dos parámetros adimensionales: un parámetro gravitacional y un parámetro inercial.

Parámetro gravitacional: Velocidad terminal adimensional de caída en fluido en reposo (V_t)

Es la relación entre la *velocidad terminal de caída en fluido en reposo* (V_t^*) y la *máxima velocidad en el flujo vortical* (U_0^*).

$$V_t = \frac{V_t^*}{U_0^*} = \frac{2\rho_p^* R_p^{*2} g^*}{9\mu^* U_0^*} = \frac{m_p^* g^*}{6\pi R_p^* \mu^* U_0^*} \quad (6.41)$$

Parámetro inercial: Número de Stokes (S_t)

El número de Stokes representa la relación entre el tiempo que tarda la partícula en modificar su velocidad de manera apreciable que es el *tiempo de respuesta viscosa de las partículas* (τ_p^*) y el tiempo característico de variación de las condiciones del medio fluido circundante a la partícula conocido como *tiempo de residencia característico del flujo* (τ_r^*). Otra interpretación física de este parámetro es que proporciona una medida del orden de magnitud relativo entre la inercia de la partícula y el efecto combinado de las fuerzas de gravedad y de resistencia:

$$S_t = \frac{\tau_p^*}{\tau_r^*} \quad (6.42)$$

Como el efecto directo de la inercia de la partícula es limitar la respuesta de la velocidad de la partícula a los rápidos cambios en la velocidad local del fluido, esto debe caracterizarse identificando una escala de tiempo de relajación del movimiento relativo, es decir, *el tiempo de respuesta viscosa de las partículas* (τ_p^*), que para una esfera de Stokes según Clift et al. (1978) [102] es:

$$\tau_p^* = \frac{m_p^*}{6\pi R_p^* \mu^*} = \frac{V_t^*}{g^*} = \frac{2\rho_p^* R_p^{*2}}{9\mu^*} = \frac{\rho_p^* d_p^{*2}}{18\nu^* \rho^*} = \frac{\beta d_p^{*2}}{18\nu^*} \quad (6.43)$$

donde β es la relación entre las densidades de la partícula (ρ_p^*) y del fluido (ρ^*), d_p^* es el diámetro de la partícula y ν^* es la viscosidad cinemática del fluido. En

función de este parámetro, la ecuación (6.40) puede escribirse en la forma en que se utilizará para la obtención de la fórmula de tiempo de escape en el capítulo 8:

$$\tau_p^* \frac{d\vec{v}^*}{dt^*} = \vec{V}_i^* + \vec{u}^* - \vec{v}^* \quad (6.44)$$

Si L_0^* y U_0^* son la longitud y velocidad características del campo de flujo respectivamente, $\tau_r^* = L_0^*/U_0^*$ es el *tiempo de residencia característico del flujo* y el efecto de la inercia de la partícula vendrá determinado por el tiempo de relajación adimensional que es precisamente el número de Stokes. Por tanto, si el número de Stokes es muy pequeño, la inercia de la partícula puede ser despreciada.

$$S_i = \frac{\tau_p^*}{\tau_r^*} = \frac{\tau_p^* U_0^*}{L_0^*} \quad (6.45)$$

En el caso de vórtices, los parámetros característicos para describir el movimiento en forma adimensional son: Γ^* , U_0^* y R_v^* . Para el vórtice Rankine y el vórtice Kaufmann (objeto de estudio en esta Tesis) —que son vórtices con velocidad puramente tangencial—:

- $L_0^* = R_v^*$ es decir, el radio típico del vórtice. (6.46a)

- $U_0^* = \Gamma^*/R_v^*$ es decir, la velocidad máxima. (6.46b)

- $R_v^* = \Gamma^*/U_0^*$ (6.46c)

Teniendo en cuenta estas consideraciones y que en vórtices la velocidad de la partícula es próxima a la del fluido U_0^* , se tiene:

$$\tau_r^* = L_0^*/U_0^* = R_v^*/(\Gamma^*/R_v^*) = R_v^{*2}/\Gamma^* = \Gamma^*/U_0^{*2} \quad (6.47)$$

y el número de Stokes se puede expresar de la siguiente manera:

$$S_i = \frac{m_p^* U_0^*}{6\pi R_p^* \mu^* L_0^*} = \frac{\rho_p^* \frac{4}{3} \pi R_p^{*3} U_0^*}{6\pi R_p^* \rho^* \nu^* R_v^*} = \frac{\beta d_p^{*2} U_0^{*2}}{18 \nu^* \Gamma^*} = \frac{\rho_p^* d_p^{*2} U_0^{*2}}{18 \rho^* \nu^* \Gamma^*} = \frac{\rho_p^* \Gamma^* d_p^{*2}}{18 \rho^* \nu^* R_v^{*2}} \quad (6.48)$$

Considerando las variables adimensionales

$$\bar{x} = \bar{x}^* / L_0^*, \quad t = t^* U_0^* / L_0^*, \quad \bar{v} = \bar{v}^* / U_0^* \quad (6.49)$$

las ecuaciones de movimiento adimensionales son:

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{v}(t) \quad (6.50a)$$

$$\frac{d\bar{v}(t)}{dt} = \frac{1}{S_i} [\bar{V}_i + \bar{u}(\bar{x}, t) - \bar{v}(t)] \quad (6.50b)$$

con la condición inicial:

$$\bar{x}(t=0) = \bar{x}_0 \quad (6.51a)$$

$$\bar{v}(t=0) = \bar{V}_i + \bar{u}(\bar{x}_0, t=0) \quad (6.51b)$$

naturalmente asumiendo que la densidad de la partícula es mayor que la densidad del fluido y que el número de Reynolds de la partícula es pequeño. La condición inicial impuesta es la más simple posible: “*que las partículas están en equilibrio con las condiciones de flujo circundantes*”. Las ecuaciones (6.50) y (6.51) son por tanto las utilizadas en las simulaciones numéricas realizadas en la Tesis, concretamente en los capítulos de resultados 8, 9 y 10 mediante los programas informáticos implementados (Anexo II).

Por otro lado, según mostraron Dávila & Hunt (2001) [1], las propiedades de pequeñas partículas en flujos con regiones de vorticidad concentrada dependen de si las partículas son atrapadas en el interior de los vórtices o no. Hay que tener en cuenta que si las partículas están situadas lejos de los vórtices su velocidad de

es próxima a V_i^* . En este contexto se introduce un nuevo parámetro denominado *número de Froude* de la partícula, que se define como:

$$F_p = \frac{\tau_p^*}{\tau_r^*} = \frac{\tau_p^*}{L_o^*/V_i^*} = \frac{\tau_p^*}{(\Gamma^*/V_i^*)/V_i^*} = \tau_p^* \frac{V_i^{*2}}{\Gamma^*} = \frac{\tau_p^{*3} g^{*2}}{\Gamma^*} = \frac{V_i^{*3}}{g^* \Gamma^*} \quad (6.52)$$

donde τ_p^* sigue siendo el tiempo de respuesta viscosa de las partículas, τ_r^* es el tiempo de residencia característico del flujo lejos del vórtice y L_o^* es la longitud característica del campo de flujo similar al parámetro L_o^* que aparece en la definición del número de Stokes. Para definir el número de Froude de la partícula hay que tener en cuenta que la velocidad de ésta lejos del vórtice es próxima a V_i^* y no a U_0^* , como ya se ha indicado.

Por tanto:

- Para partículas atrapadas en el interior de vórtices, su inercia viene caracterizada por el número de Stokes (este es el caso de flujos turbulentos si el tiempo que necesitan las partículas para escapar de regiones de intensa vorticidad es mucho mayor que el tiempo de vida de esas estructuras vorticales).
- Para partículas no atrapadas en el interior de vórtices, su inercia se caracteriza por el número de Froude de la partícula (como ocurre en flujos turbulentos si el tiempo necesario para que las partículas escapen de las zonas de vorticidad es mucho más pequeño que el tiempo de vida de esas estructuras vorticales).

De las expresiones de S_i y F_p es fácil deducir la relación entre ambos parámetros; así, teniendo en cuenta las ecuaciones (6.41), (6.48) y (6.52):

$$F_p = \tau_p^* \frac{V_i^{*2}}{\Gamma^*} = \frac{\tau_p^* U_0^{*2} V_i^2}{\Gamma^*} = V_i^2 \frac{\tau_p^*}{(\Gamma^*/U_0^{*2})} = V_i^2 S_i \quad (6.53)$$

Con todo ello, resulta un sistema de ecuaciones no lineal, que deberá ser resuelto computacionalmente.

Para ello se ha utilizado un **método de Runge-Kutta** de cuarto orden de longitud de paso de variable, que adapta la longitud del paso de integración a la pendiente de la curva en cada punto. Más detalles sobre el método de integración y su implementación informática pueden ser consultados en los Anexos 1 y 2.

7. METODOLOGÍA APLICADA

Inicialmente, tras analizar diversos problemas fluidomecánicos a través de la consulta de numerosas fuentes bibliográficas (**Análisis Bibliográfico**), se estudiaron con más detenimiento aquellos que suscitaban un mayor interés y que además eran más susceptibles de ser investigados.

El siguiente paso fue detectar, entre los problemas analizados, las posibles lagunas o las posibilidades de mejorar o ampliar los resultados conocidos, avanzando en esas líneas de investigación. La consecuencia inmediata fue el **Planteamiento de Objetivos** a alcanzar (investigar el *tiempo de escape de pequeñas partículas pesadas del interior de un vórtice tridimensional* y estudiar la *sedimentación de pequeñas partículas pesadas en una distribución bidimensional de vórtices repetidos periódicamente*).

Tras proceder a la **Recopilación** de las ecuaciones básicas de la Dinámica de Fluidos, la teoría básica de la Turbulencia y los fundamentos teóricos de los Vórtices, se procede a la **Definición** del Campo de velocidades, las Ecuaciones de movimiento y la Adimensionalización.

Seguidamente, se llevan a cabo mediante simulación numérica, las investigaciones correspondientes al primer objetivo de la Tesis (**Tiempo de Escape y Velocidad media de sedimentación** en un vórtice tridimensional) y al segundo objetivo (**Sedimentación en vórtices bidimensionales periódicos**).

Como consecuencia de los resultados obtenidos de ambas investigaciones realizadas se extraen unas **Conclusiones** que además servirán como punto de partida de propuestas de **Investigaciones futuras**.

Toda esta metodología se recoge de forma simplificada en el diagrama de flujo de la Figura 7-1.

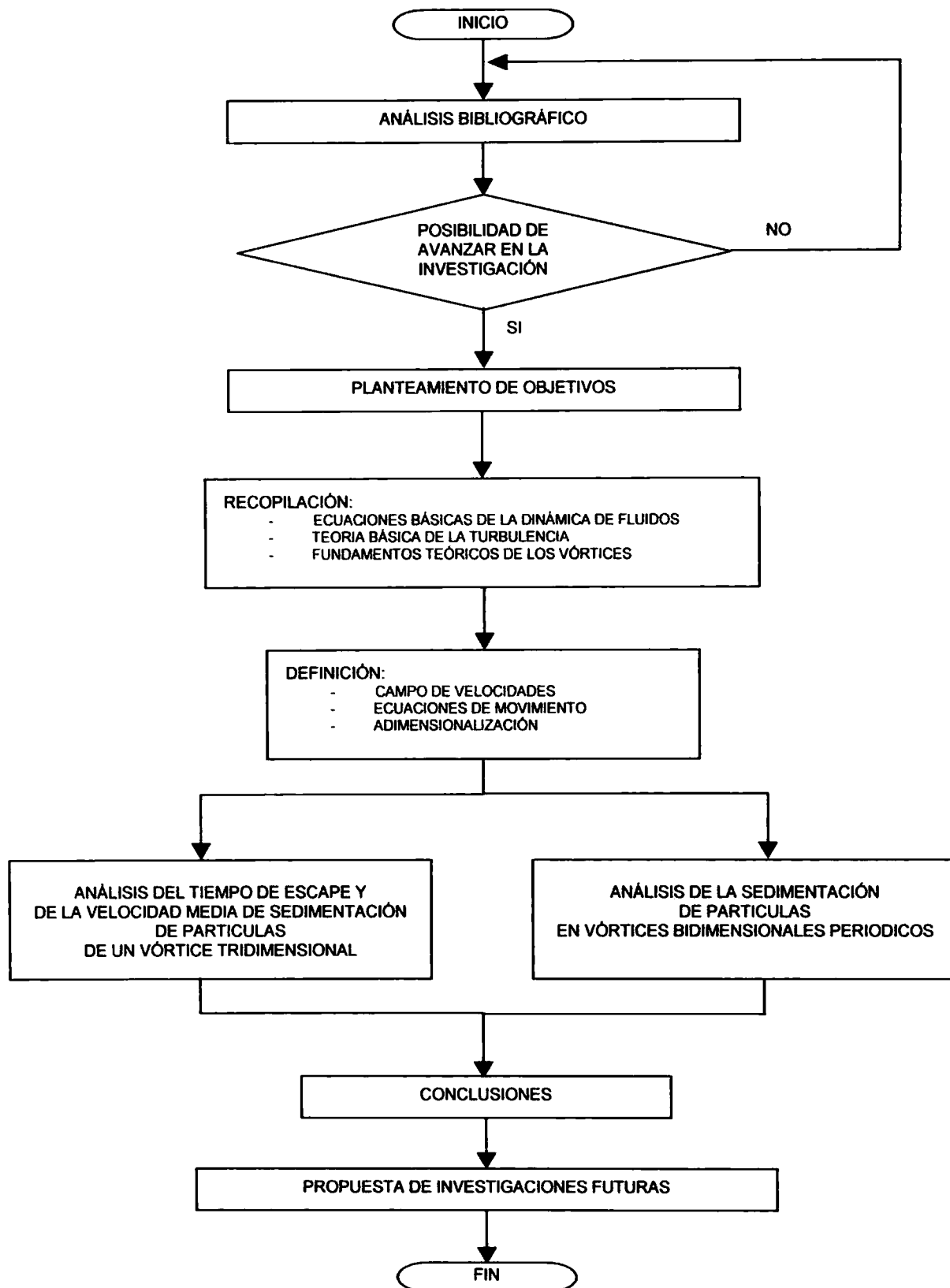


Figura 7-1: Diagrama de flujo general de la Metodología.

7.1. Metodología aplicada para el análisis del Tiempo de Escape y de la Velocidad media de Sedimentación de partículas de un vórtice tridimensional

7.1.1. Metodología para el análisis del Tiempo de Escape

En este primer objetivo de la Tesis (*Tiempo de escape*), ha sido necesario elaborar nuevos programas informáticos a medida que se ha ido necesitando para resolver o llevar a cabo el análisis de cada una de las etapas de su metodología.

Así, primero se obtienen numéricamente las **Trayectorias** de las partículas. Para ello, se ha procedido a la integración de las ecuaciones de movimiento mediante un método de Runge-Kutta -de cuarto orden de longitud de paso de variable-. Para cada partícula se ha introducido en el programa informático elaborado su posición y velocidad inicial, de modo que es posible obtener su posición en cualquier instante de tiempo posterior. La representación gráfica de las posiciones de las partículas a lo largo de tiempo permite visualizar las trayectorias y sus características.

Al mismo tiempo se calculan los **Puntos de Equilibrio** del sistema dinámico definido por las ecuaciones de movimiento (en proyección sobre el plano perpendicular al eje del vórtice: un foco inestable y un punto de silla) y se deduce de un modo analítico la escala de **Longitud característica** del problema. Ello conduce a la obtención de la **Trayectorias Límite** (trayectorias que parten del punto de silla y que no pueden ser atravesadas por partículas cayendo desde encima del vórtice).

A continuación, se formula un criterio preciso para considerar si una partícula ha escapado del vórtice o no (**Criterio de escape**). Este se ha fijado a la vista de la representación gráfica de las trayectorias generales de las partículas y de las trayectorias límite, teniendo en cuenta los puntos de equilibrio y la región de captura del vórtice.

Luego se realiza la **Obtención numérica del Tiempo de escape**, que se obtiene numéricamente mediante un algoritmo informático que, dada la posición inicial de la partícula y fijados los valores de los parámetros que influyen en el problema, proporciona el tiempo que tarda la partícula en escapar según el criterio anteriormente mencionado. Al mismo tiempo se lleva a cabo el **Análisis de la influencia de variables**. Para ello, se varía en el programa los valores de las variables con lo que es posible determinar la influencia que cada uno de ellos tiene en el Tiempo de escape.

Paralelamente a la obtención numérica del Tiempo de escape, se obtiene una **Fórmula analítica** teórica para el mismo. Esto se realiza a partir de la ecuación de movimiento de las partículas escrita en la forma (6.44), de la que se despeja la velocidad y se evalúa la derivada de la velocidad respecto al tiempo utilizando la aproximación de Maxey & Corrsin (1986) [12]. De la expresión resultante se ha deducido la velocidad con la que las partículas inerciales escapan del vórtice e introduciendo las escalas de longitud y tiempo características del problema se ha obtenido la fórmula buscada.

El siguiente paso ha sido **comparar los resultados numéricos con los obtenidos mediante la fórmula**, para lo que se ha desarrollado nuevas rutinas informáticas que comprueban su validez. La comprobación numérica se realiza promediando los valores del tiempo de escape para un elevado número de partículas equidistribuidas tomadas en la región de captura del vórtice. Para obtener ese mallado de partículas, se han integrado analíticamente las ecuaciones diferenciales que definen la trayectoria límite y la ecuación algebraica obtenida se ha resuelto mediante un proceso iterativo, ya que no es posible resolverla analíticamente. Se ha comprobado la coincidencia de los resultados obtenidos mediante la fórmula con los obtenidos computacionalmente y a la vista de los mismos se ha determinado la **Validez de la fórmula**.

Finalmente se realiza una **Aplicación de la fórmula del tiempo de escape a un caso práctico**. Todo el proceso se esquematiza en la Figura 7-2a.

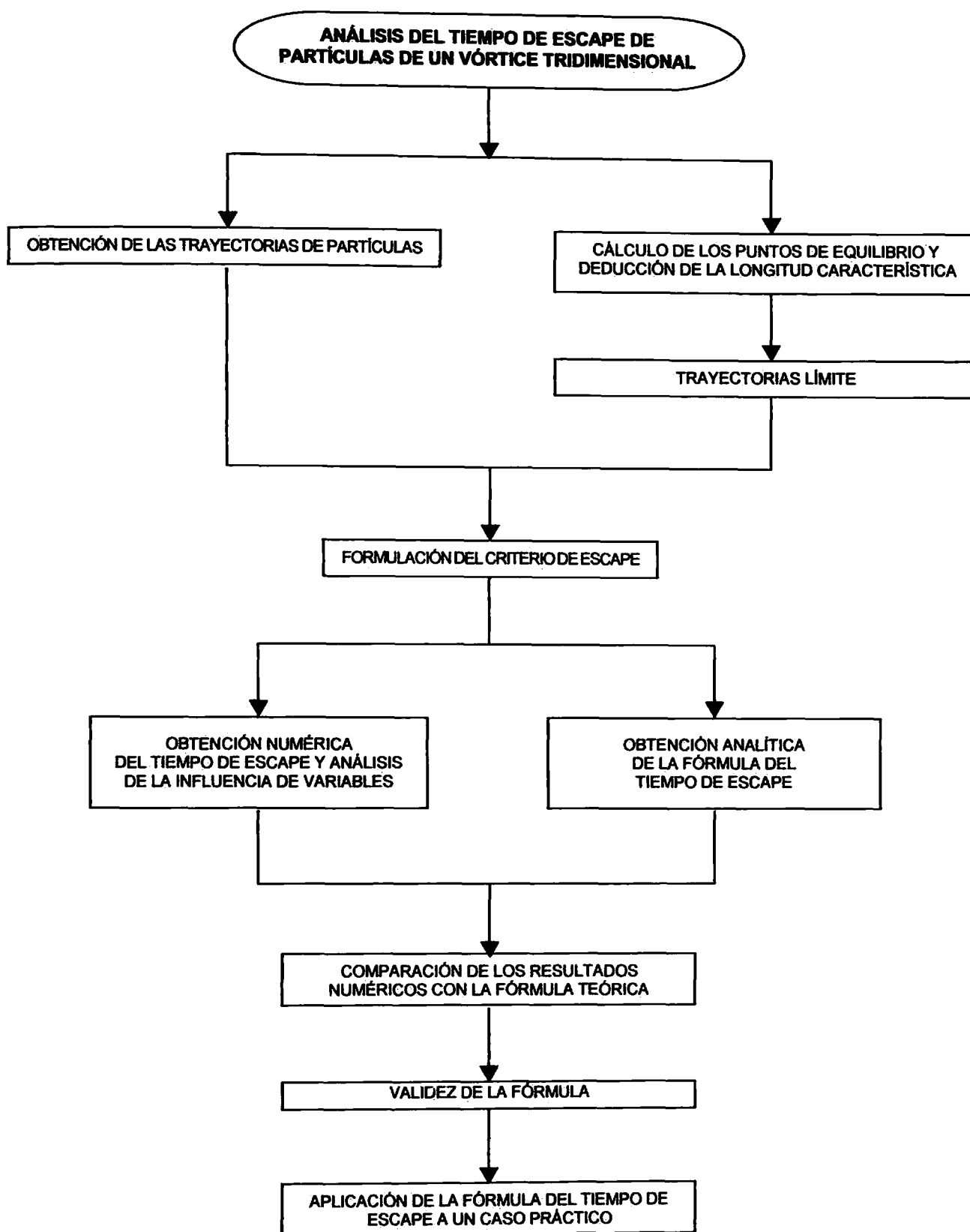


Figura 7-2a: Diagrama de flujo de la metodología para el análisis del tiempo de escape de partículas de un vórtice tridimensional.

7.1.2. Metodología para análisis de la Velocidad media de sedimentación

Analizado el Tiempo de escape, se investiga su relación con la Velocidad media de sedimentación. Para ello se implementa un algoritmo informático que calcula dicha velocidad para un número de partículas suficientemente grande (~500) equidistribuidas en la región de captura del vórtice.

El primer paso es pues la obtención del **Mallado de partículas**, que se realiza de la misma forma que en el apartado 7.1.1., es decir se obtienen las ecuaciones diferenciales que determinan la trayectoria límite, se integran analíticamente dichas ecuaciones diferenciales, dando lugar a su ecuación algebraica y esta ecuación se resuelve mediante un proceso iterativo. Una vez calculado los valores límite de la malla, el mallado de partículas se obtiene de un modo computacional.

Ante la imposibilidad de desarrollar una formulación teórica similar a la del Tiempo de escape, se ha realizado un **Cálculo numérico de la velocidad media de sedimentación**, mediante la implementación de la correspondiente rutina informática. Dicha rutina calcula para cada partícula la diferencia entre su altura inicial y su altura final (integrando la ecuación de movimiento), divide el resultado entre el tiempo transcurrido y promedia ese valor para todas las partículas de la malla tomadas en la región de captura. El tiempo transcurrido tiene que ser el suficiente como para que las partículas hayan escapado del vórtice y su velocidad haya alcanzado ya el valor asintótico; ya que no es posible conocerlo a priori, hay que estimar su magnitud. Ello se ha llevado a cabo tomando un primer valor de t con el que se ha calculado una primera aproximación de $\langle V_z \rangle$, después se ha tomado un segundo valor de t que ha sido el doble del anterior para calcular un nuevo valor de $\langle V_z \rangle$ y así sucesivamente hasta que la diferencia relativa entre dos valores consecutivos de $\langle V_z \rangle$ ha sido menor que una cota previamente establecida.

A continuación, se ha realizado la **Representación gráfica de la velocidad media de sedimentación frente al tiempo de escape promedio** en escala logarítmica para los mismos valores del diámetro de la partícula.

Por último, a la vista de la mencionada representación gráfica ha sido posible establecer una relación entre la velocidad media de sedimentación y el tiempo de escape promedio: para partículas suficientemente pequeñas la representación gráfica en escala logarítmica resulta ser una línea recta, de modo que obteniendo la ecuación algebraica de dicha recta se llega a una relación numérica. La secuencia de todo el proceso es la del diagrama de flujo de la Figura 7-2b.

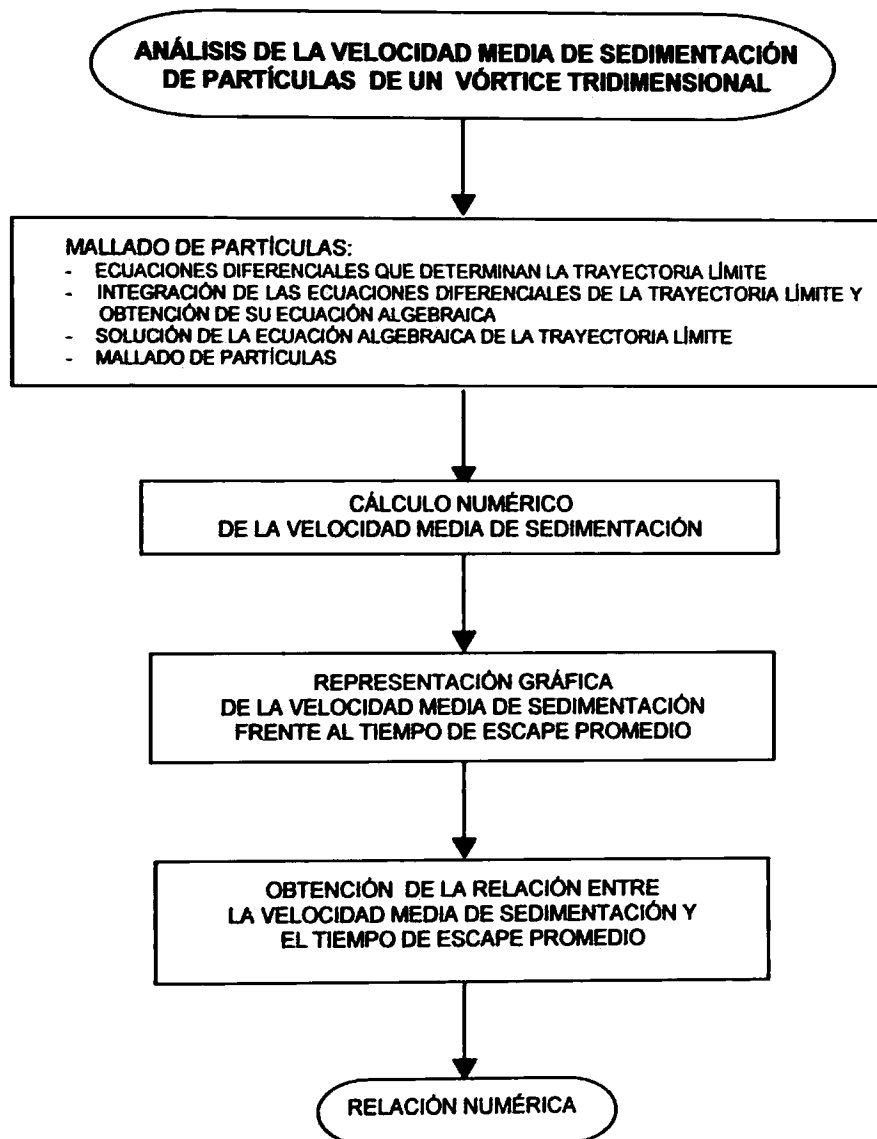


Figura 7-2b: Diagrama de flujo de la metodología para el análisis de la velocidad media de sedimentación de partículas de un vórtice tridimensional.

7.2. Metodología aplicada para el análisis de la Sedimentación de partículas en vórtices bidimensionales periódicos

En el caso del segundo objetivo de la Tesis (sedimentación de partículas en disposición periódica bidimensional de vórtices), se desarrollan unas rutinas informáticas que realizan la **Simulación de los vórtices repetidos periódicamente**, proporcionando el campo de flujo tanto en el caso de que todos giren en el *mismo sentido* como en el caso de que cada par de vórtices consecutivos giren con *sentidos alternados* según el caso a analizar.

En ambos casos mencionados el método ha sido análogo y de un modo paralelo se han ido implementando de un modo secuencial las subrutinas informáticas a medida que ha sido necesario. Se comienza con el **Análisis de las trayectorias de las partículas**. Para obtenerlas se ha realizado la integración de la ecuación de movimiento de las partículas de la misma manera que se describió para el análisis del tiempo de escape (apartado 7.1.1); así se obtiene para cada partícula su posición en cada instante de tiempo, con lo que es posible visualizar sus trayectorias y analizar sus principales características. Para las partículas inerciales se investiga la existencia de zonas de acumulación de partículas y de zonas vacías en las que para un tiempo suficientemente grande no va a encontrarse ninguna partícula, analizando las implicaciones prácticas que ello puede suponer.

Seguidamente se estudia si las partículas sedimentan en estos campos de flujo más o menos rápidamente que en fluido en reposo, calculando la velocidad media de sedimentación (**Investigación del incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo**). Para obtener dicha velocidad, se ha tomado una malla de partículas equidistribuidas situadas todas en una misma altura y se ha promediado el valor final de la velocidad al que tienden asintóticamente (procedimiento análogo al detallado en los apartados 7.1.1. y 7.1.2). Comparando esta velocidad con la velocidad terminal de caída de las partículas, es posible determinar si las partículas sedimentan en estos campos de flujo más rápidamente que en el caso de fluido en reposo.

Después se realiza el **Análisis de la Influencia de la inercia de las partículas** en la velocidad media de sedimentación, calculando dicha velocidad mediante el procedimiento del apartado 7.1.2. para distintos valores de inercia de partículas.

Por último, comparando los resultados obtenidos de la influencia de la inercia de las partículas con los conocidos para turbulencia isotrópica, se ha considerado la posibilidad de acoplar el campo de flujo desarrollado en la Tesis con alguno existente, planteando la **Posibilidad de Aplicación a Modelo Lagrangiano de sedimentación y dispersión de partículas en flujos turbulentos** que pueda desarrollarse en futuras investigaciones. En la Figura 7-3 se refleja el proceso seguido.

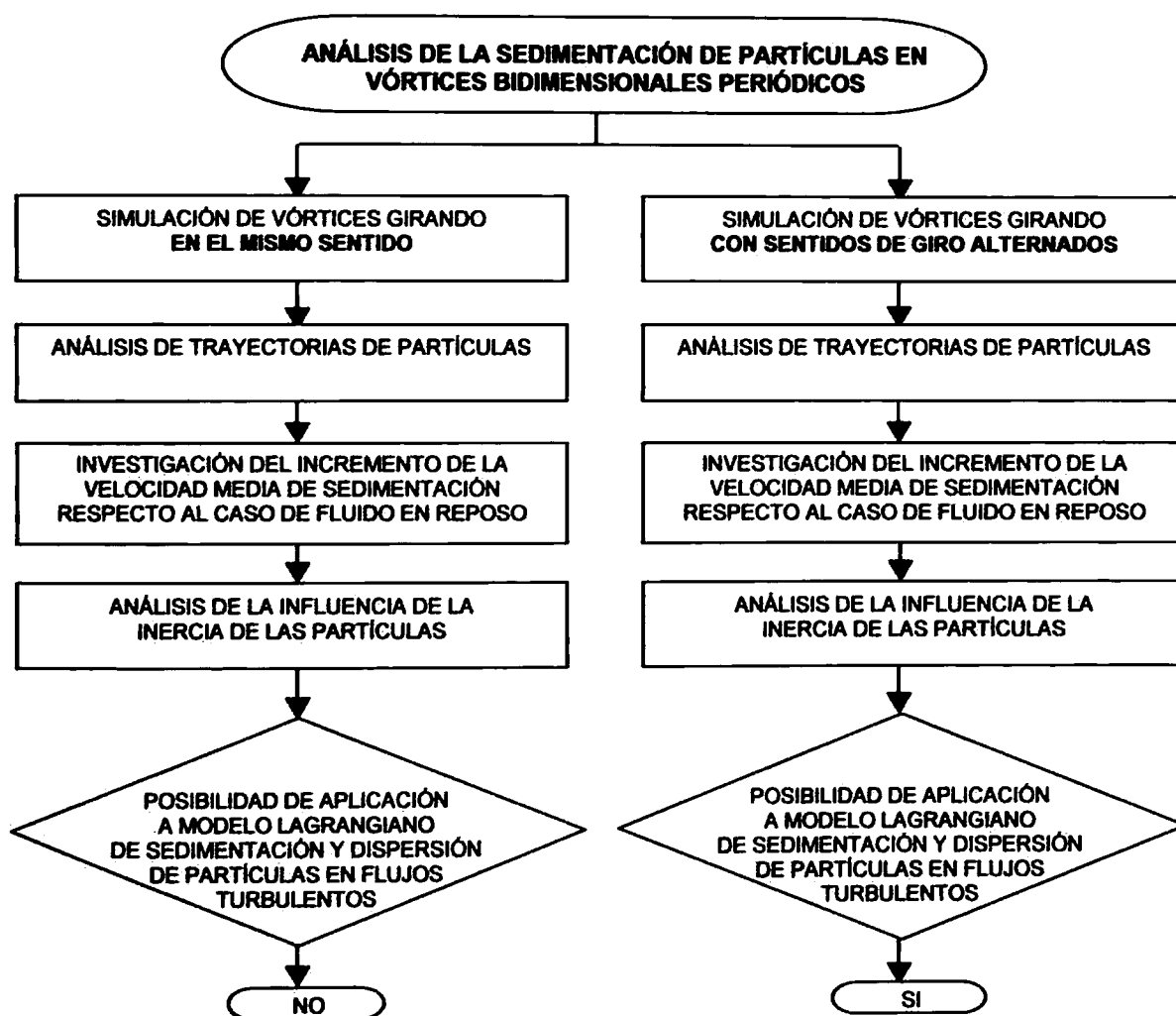


Figura 7-3: Diagrama de flujo de la metodología para el análisis de la sedimentación de partículas en vórtices bidimensionales periódicos.

7.3. Material de investigación

Para llevar a cabo las investigaciones realizadas en esta Tesis Doctoral se ha utilizado como equipo principal un ordenador con las siguientes características:

- Procesador PENTIUM IV a 2000 Ghz.
- Disco duro de 40 GB.
- 512 MB de memoria RAM.
- Monitor color 17".
- Tarjeta gráfica ATI 32 MB.
- Módem 56 Kb.

Asimismo se ha hecho uso del siguiente software:

- Sistema operativo Windows XP, versión 2000 (de *Microsoft Corporation*©).
- Lenguaje de programación Borland C++, versión 5.02 (de *Borland International, Inc.*©).
- Lenguaje de programación Matlab, versión 6.5 (R13) (de *The MathWorks, Inc.*©).
- Programas informáticos de elaboración propia implementados en C++ (Anexo II).

Bloque III

RESULTADOS

8. VÓRTICE RANKINE

Como se ha indicado en el apartado 5.2. de la Tesis (*Vórtices objeto de estudio*) se decide estudiar en primer lugar el vórtice Rankine por ser un modelo con una formulación relativamente simple y comúnmente utilizado en el ámbito de las simulaciones numéricas. Ya se ha comentado que la utilización de otros modelos con componentes radiales o axiales de la velocidad supondría un importante incremento del tiempo de computación y una complicación innecesaria para la obtención de los objetivos propuestos.

Dichos objetivos, como ya se ha descrito son: por una parte la obtención del *Tiempo de Escape de partículas de un vórtice tridimensional* y la *Velocidad media de Sedimentación de partículas de dicho vórtice tridimensional* y por otra parte el *Análisis de la Sedimentación de partículas en una disposición bidimensional* de vórtices repetidos periódicamente.

Para alcanzar estos dos objetivos se ha empleado la ecuación de movimiento (6.40) y su expresión equivalente en forma adimensional (6.50) y se ha seguido la metodología descrita en los apartados 7.1. y 7.2. respectivamente.

8.1. Análisis del Tiempo de Escape de partículas de un vórtice tridimensional

El procedimiento seguido es el del diagrama de flujo de la Figura 7-2a de la Tesis. Por un lado se obtienen las trayectorias de las partículas y se estudia la influencia de la inercia de las mismas, observando sus características más importantes. Por otro lado se calculan los puntos de equilibrio del sistema dinámico definido por las ecuaciones de movimiento y se deduce la longitud característica del problema, lo que conduce a la obtención de las trayectorias límite. La determinación de las trayectorias generales de las partículas y de las trayectorias límite conlleva a la formulación del criterio de escape, que establece cuándo una partícula ha escapado del vórtice. Ello permite por una parte la

obtención numérica del Tiempo de escape de las partículas y el análisis de la influencia sobre el mismo de diversas variables y por otra parte a la obtención analítica de una fórmula para el Tiempo de escape. A continuación se lleva a cabo la comparación de los resultados numéricos con la fórmula teórica desarrollada, lo que conduce a determinar el rango de validez de la misma. Por último, se aplica la fórmula del Tiempo de escape a un caso práctico.

8.1.1. Obtención de las Trayectorias de partículas

Dichas trayectorias se obtienen, integrando numéricamente las ecuaciones de movimiento (6.50) junto con las condiciones iniciales (6.51). Esto se ha realizado con los programas informáticos de elaboración propia *ligtravoin_s_i* (trayectorias de partículas sin inercia) y *ligtravoin* (trayectorias de partículas con inercia) cuyos listados se recogen en el Anexo II, a los que se les ha ensamblado las funciones *rank* (cálculo del campo de velocidades del vórtice Rankine), *funcs3.c* (que recoge funciones necesarias para el funcionamiento de los programas implementados) y el programa *rgk_vect.c* (que realiza la integración de las ecuaciones de movimiento mediante el método de Runge-Kutta).

Tanto estos programas informáticos mencionados como todos los demás utilizados en esta Tesis:

- ❑ Realizan los cálculos en forma adimensional, ya que ha sido necesario escribir las ecuaciones de movimiento en forma adimensional para poder realizar su integración numérica. Además, de este modo se pueden obtener las leyes de escala generales de los procesos estudiados, en lugar de casos particulares.
- ❑ La simbología empleada en las rutinas informáticas difiere en algunos casos de la empleada en la Tesis por la imposibilidad de introducir en el compilador empleado los signos con que se representan algunas variables (como es por ejemplo el caso de las letras griegas). Por esa razón se incluye también en el Anexo II un

apartado de simbología donde se relacionan los signos que aparecen en los listados de los programas con las correspondientes variables de la Tesis.

- En los casos de ausencia de inercia de la partícula ($S_i=0$), la fuerza de arrastre del fluido sobre la partícula compensa en cada instante la fuerza debida a la gravedad. De ahí, que la ecuación de movimiento se reduce a que la fuerza neta sobre la partícula es cero. En forma adimensional, esto implica que el primer miembro de la ecuación (6.50b) desaparece y la trayectoria de la partícula queda determinada por la especificación de la posición inicial de la partícula y por la solución de: $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{v}(t) = \bar{V}_i + \bar{u}(\bar{x}, t)$; donde $\bar{u}(\bar{x}, t)$ representa el campo de velocidad generado por la contribución de todos los vórtices y es simulado por el programa informático.
- En los casos en los que existe inercia ($S_i > 0$), el movimiento de la partícula está determinado por las ecuaciones (6.50) con todos sus términos y además hay que especificar junto con las posiciones iniciales de las partículas sus velocidades iniciales. Para obtener estas velocidades iniciales se impone la siguiente condición. *“la partícula está en equilibrio con el campo de flujo circundante”* y es calculada por el propio programa informático. Dicho de otro modo, la velocidad inicial de la partícula se obtiene mediante la superposición de los campos de flujo inducidos por los vórtices que la rodean. Como en este caso son vórtices Rankine, cada campo de flujo viene dado por la ecuación (4.62).

Los datos de partida a introducir en los programas `ligtravoin_s_i` y `ligtravoin` son:

- V_t = velocidad terminal adimensional de caída en fluido en reposo.
 S_t = número de Stokes (sólo cuando existe inercia).
 $tita$ = ángulo θ que forma el eje del vórtice con la dirección de la gravedad = $\pi/4$.
 chi = ángulo de precesión Φ para transformar las coordenadas al sistema ligado al vórtice = 0.
 $hini$ = paso de integración inicial para el método de Runge-Kutta = 0,1.
 $delta$ = error máximo en la integración numérica = 10^{-7} .
 $Y[]$ = posiciones iniciales de las partículas (tridimensional) = x_0, y_0, z_0 y velocidades iniciales de las partículas (cuando existe inercia).
 $tfin$ = instante de tiempo final para la integración numérica.

Tal como se indicó en el apartado 6.4. (*adimensionalización*) para describir las trayectorias es decir la interacción de las partículas con el flujo vortical bastan dos parámetros que son: V_t (la velocidad terminal de caída en fluido en reposo adimensional) y S_t (el número de Stokes).

Partículas sin inercia

En el programa informático *ligtravoin_s_i* (de cálculo de trayectorias de partículas sin inercia), se introducen los siguientes datos de partida:

- V_t = 0,5.
 S_t = 0.
 $tita$ = $\theta = \pi/4$.
 chi = 0.
 $hini$ = 0,1.
 $delta$ = 10^{-7} .
 $Y[]$ = posiciones iniciales de las partículas = x_0, y_0, z_0 (Tabla 8-1).
 $tfin$ = 200.

TABLA 8-1. Posiciones iniciales de las partículas (sin inercia), caso del vórtice Rankine

x_0	y_0	z_0
1	0	300
3	0	300
5	0	300
-7,5	10	300
-5	10	300
-2,5	10	300
0	10	300
2,5	10	300
5	10	300
7,5	10	300
10	10	300
12,5	10	300
15	10	300
...	...	...

Seguidamente, se ejecuta el programa obteniéndose como resultado para cada partícula los valores de “x, y, z” que definen su posición en cada instante de tiempo (t) posterior (Tabla 8-2).

TABLA 8-2. Posiciones de las partículas para cada instante de tiempo (sin inercia) , caso del vórtice Rankine

x_0	y_0	z_0	t	x	y	z
1,5	0	300	0,100000	1,498247	0,056935	299,964645
			0,484945	1,458633	0,274231	299,828546
			0,879887	1,362662	0,488993	299,688913
			1,255312	1,217102	0,677736	299,556180
			...	...	...	...
3	0	300	0,100000	2,999754	0,024645	299,964645
			0,600000	2,991113	0,147889	299,787868
			1,518297	2,942585	0,374497	299,463201
			2,442065	2,848913	0,602940	299,136599
			...	...	...	...
5	0	300	0,100000	4,999988	0,003106	299,964645
			0,600000	4,999570	0,018642	299,787868
			3,100000	4,988454	0,096995	298,903984
			3,518000	4,985105	0,110304	298,756199
			...	...	...	...
5	10	300	0,100000	4,984104	9,972591	299,964645
			0,600000	4,903931	9,835836	299,787868
			3,100000	4,484437	9,159382	298,903984
			3,518000	4,411015	9,047469	298,756199
			...	...	...	...
7,5	10	300	0,100000	7,487269	9,974197	299,964645
			0,600000	7,423246	9,845586	299,787868
			3,100000	7,093461	9,213034	298,903984
			3,518000	7,036663	9,109052	298,756199
			...	...	...	...
10	10	300	0,100000	9,990045	9,974607	299,964645
			0,600000	9,940123	9,848024	299,787868
			3,100000	9,686849	9,224901	298,903984
			3,518000	9,643902	9,122365	298,756199
			...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
			...	...	...	...
			...	...	...	...
			...	...	...	...
			...	...	...	...

Fuente: Programa informático “ligtravoin_s_i” de elaboración propia.

La representación gráfica de esos valores obtenidos proporciona las trayectorias de las partículas sin inercia (Figura 8-1). Dicha representación se puede llevar a cabo con cualquier programa gráfico informático, en esta Tesis se ha utilizado el Matlab.

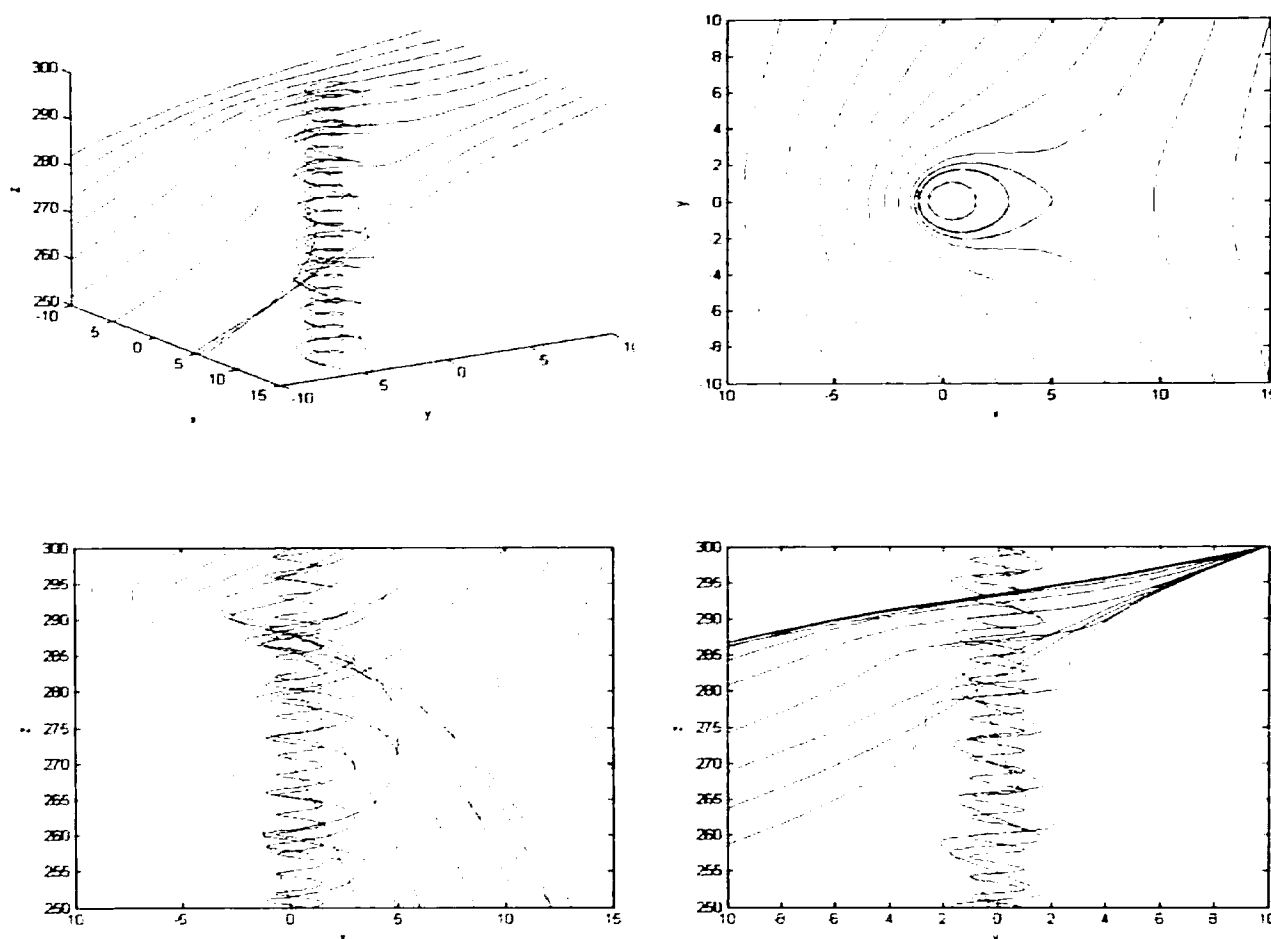


Figura 8-1: Trayectorias (adimensionales) de partículas sin inercia ($S_i = 0$), para vórtice Rankine.

En esta Figura 8-1, puede apreciarse como para partículas sin inercia ($S_i=0$) algunas de ellas quedan atrapadas en el vórtice, describiendo trayectorias cerradas. Además, se puede observar que la vista más significativa es la correspondiente al plano XY. Ello es lógico si se piensa que con el propósito de ver si una partícula ha escapado o no del vórtice, o de observar si sigue trayectorias cerradas, la mejor opción es dirigir la visual a lo largo del eje del vórtice, es decir, ver las proyecciones de las trayectorias sobre un plano perpendicular al eje del mismo o plano XY. No obstante, las otras vistas resultan ser una información complementaria de indudable interés, puesto que no hay que olvidar que se trata del estudio de un caso tridimensional. El estudio del movimiento de las partículas en torno a vórtices con simetría axial se simplifica

mucho proyectando las trayectorias sobre un plano perpendicular al eje del vórtice y considerando la componente de la velocidad terminal perpendicular a dicho eje (V_t^{**} -dimensional-, V_t^* -adimensional-), donde θ es el ángulo de inclinación del vórtice (que coincide con el ángulo de nutación descrito en el apartado 5.1.):

$$V_t^{**} = V_t^* \sin\theta \quad (8.1a)$$

$$V_t^* = V_t \sin\theta \quad (8.1b)$$

Partículas sin inercia

Análogamente, se procede a introducir los datos de partida en el programa informático *ligtravoin* (de cálculo de trayectorias de partículas con inercia):

$V_t = 0,5.$
 $S_t = 0,5.$
 $tita = \theta = \pi/4.$
 $chi = 0.$
 $hini = 0,1.$
 $delta = 10^{-7}.$
 $Y[] =$ posiciones iniciales de las partículas = x_0, y_0, z_0 (Tabla 8-3)
 y velocidades iniciales (calculadas por el programa).
 $tfin = 200.$

TABLA 8-3. Posiciones iniciales de las partículas (con inercia), caso del vórtice Rankine

x_0	y_0	z_0
0,5	0	300
1	0	300
2	0	300
3	0	300
5	0	300
-7,5	10	300
-5	10	300
-2,5	10	300
0	10	300
2,5	10	300
5	10	300
7,5	10	300
10	10	300
12,5	10	300
15	10	300
...	...	...

Seguidamente, se ejecuta el programa obteniéndose como resultado para cada partícula los valores de “x, y, z” que definen su posición en cada instante de tiempo (t) posterior (Tabla 8-4).

TABLA 8-4. Posiciones de las partículas para cada instante de tiempo (con inercia) , caso del vórtice Rankine

x_0	y_0	z_0	t	x	y	z
1	0	300	0,100000	0,999795	0,064641	299,964645
			0,277379	0,995992	0,179127	299,901932
			0,460230	0,983247	0,296220	299,837284
			0,665883	0,953976	0,425246	299,764575
3	0	300	...	...	...	...
			0,100000	2,999984	0,024645	299,964645
			0,409878	2,999067	0,101001	299,855086
			0,717089	2,995616	0,176632	299,746471
5	0	300	1,066802	2,987390	0,262559	299,622829
			...	...	...	...
			0,100000	4,999999	0,003106	299,964645
			0,600000	4,999869	0,018637	299,787868
5	10	300	1,144332	4,999266	0,035548	299,595417
			1,804476	4,997684	0,056076	299,362021
			...	...	...	...
			0,100000	4,984126	9,972582	299,964645
7,5	10	300	0,597965	4,904836	9,836150	299,788787
			1,074299	4,828267	9,705949	299,620178
			1,649822	4,734482	9,549163	299,416700
			...	...	...	...
10	10	300	0,100000	7,487281	9,974184	299,964645
			0,600000	7,423554	9,845249	299,787868
			1,132850	7,355180	9,708351	299,599477
			1,770569	7,272511	9,545431	299,374009
10	10	300	...	...	...	...
			0,100000	9,990049	9,974596	299,964645
			0,600000	9,940245	9,847708	299,787868
			1,139143	9,886357	9,711371	299,597252
...	...	...	1,785921	9,821378	9,548701	299,368582
			...	...	...	...
			...	...	...	...
			...	...	...	...

Fuente: Programa informático "ligtravoin" de elaboración propia.

La representación gráfica de estos valores con Matlab proporciona las trayectorias de las partículas con inercia (Figura 8-2). En ésta, se aprecia que al tener las partículas inercia ($S_i > 0$), ninguna de ellas queda atrapada en el vórtice ni describe trayectorias cerradas debido a la acción de la fuerza inercial centrífuga (Maxey & Corrsin, 1986) [12] sino que son arrastradas hacia fuera gradualmente (Fung, 2000) [11]. Físicamente, el efecto de la inercia de la partícula es limitar su respuesta a los cambios en la velocidad local del fluido y por tanto producir un retardo de fase entre ambos. Si la inercia es grande la partícula responde sólo suavemente a cambios en el campo de flujo y la escala de tiempo -en la cual el campo de flujo alrededor de la partícula cambia- es corta para ser más efectivo.

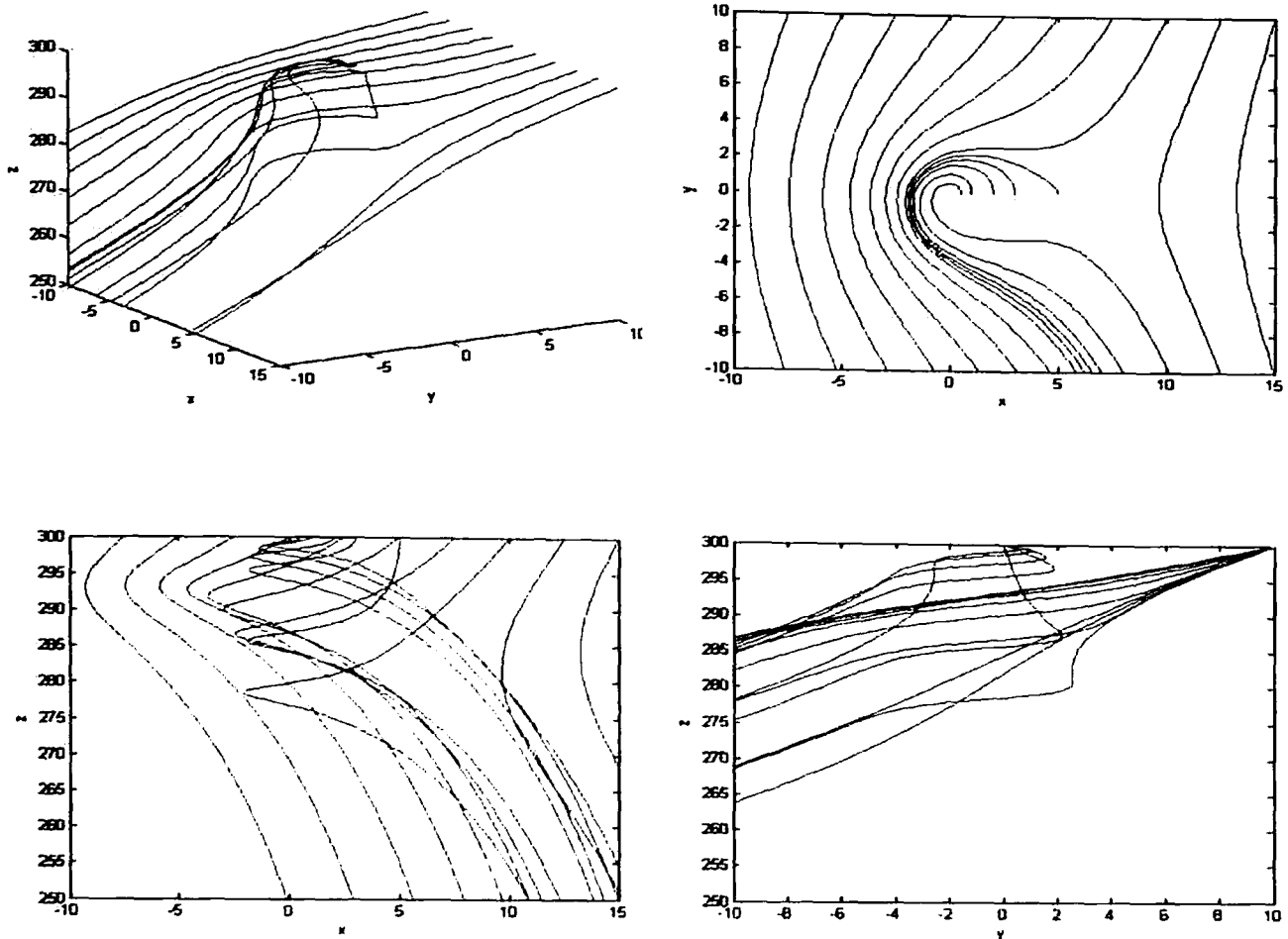


Figura 8-2: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia ($S_r = 0,5$), para vórtice Rankine.

Como ya se ha indicado, se ha realizado un análisis con variables adimensionales porque de este modo es posible la integración numérica de las ecuaciones de movimiento y la obtención de leyes generales en lugar de casos particulares. No obstante, es interesante hacer notar que por supuesto existe un total paralelismo entre los cálculos y resultados adimensionales con sus correspondientes dimensionales. Así, por ejemplo, para la Figura 8-2 en la que se ha tomado para los parámetros adimensionales los valores $V_r^* = 0,5$ y $S_r^* = 0,5$ se pueden obtener del siguiente modo las correspondientes variables dimensionales:

$$V_r = \frac{V_r^*}{U_0^*} = \frac{V_r^* R_v^*}{\Gamma^*} \Rightarrow V_r^* = \frac{V_r \Gamma^*}{R_v^*} \quad (8.2)$$

$$S_i = \frac{U_0^* V_i^*}{g^* R_v^*} = \frac{\Gamma^* V_i^*}{g^* R_v^{*2}} \Rightarrow V_i^* = \frac{S_i g^* R_v^{*2}}{\Gamma^*} \quad (8.3)$$

Como el valor de V_i^* obtenido mediante ambas expresiones debe ser el mismo, igualando las expresiones (8.2) y (8.3) se obtiene la relación existente entre las variables del problema:

$$\frac{V_i \Gamma^*}{R_v^*} = \frac{S_i g^* R_v^{*2}}{\Gamma^*} \Rightarrow \Gamma^* = \sqrt{\frac{g^* S_i R_v^{*3}}{V_i}} \quad (8.4)$$

es decir, dados los valores concretos $V_i=0,5$ y $S_i=0,5$, éstos corresponden a toda una variedad de posibles combinaciones de R_v^* , Γ^* y V_i^* . Algunas de esas combinaciones son las que se muestran en la Tabla 8.5:

TABLA 8-5. Variables dimensionales correspondientes a las adimensionales tomadas en la Figura 8-2

R_v^* (m)	Γ^* (m ² /s)	V_i^* (m/s)	V_i	S_i
0,0005	0,000035000	0,035000000	0,5	0,5
0,0050	0,001106797	0,11067972	0,5	0,5
0,0080	0,002240000	0,140000000	0,5	0,5
0,0100	0,003130495	0,15652476	0,5	0,5
0,0800	0,070835020	0,44271887	0,5	0,5
0,1000	0,098994949	0,49497475	0,5	0,5
...	...	...	...	...

Por tanto, siempre es posible “traducir” las variables y resultados adimensionales a sus correspondientes dimensionales y viceversa.

Una cuestión que podría plantearse en este momento, es qué influencia tendrían sobre las conclusiones que se han extraído de las trayectorias de las partículas el haber tomado unas posiciones iniciales diferentes de las indicadas en las tablas 8-1 y 8-3, ya que en las mismas se han mantenido fijas las coordenadas “y” y “z” iniciales variando la “x”.

Es evidente que tomar una coordenada “z” inicial diferente no tiene ninguna trascendencia sobre las trayectorias, ya que eso sólo supone tomar partículas en otro plano perpendicular al eje del vórtice. Ello se muestra con claridad en la Figura 8-3, en la que se han tomado para los valores iniciales de las coordenadas “x” e “y” los mismos que para la Figura 8-2 y se ha variado la coordenada “z” desde el rango 300-250 al 1000-950. Puede observarse que en ambas figuras las trayectorias de las partículas son “*completamente idénticas*”.

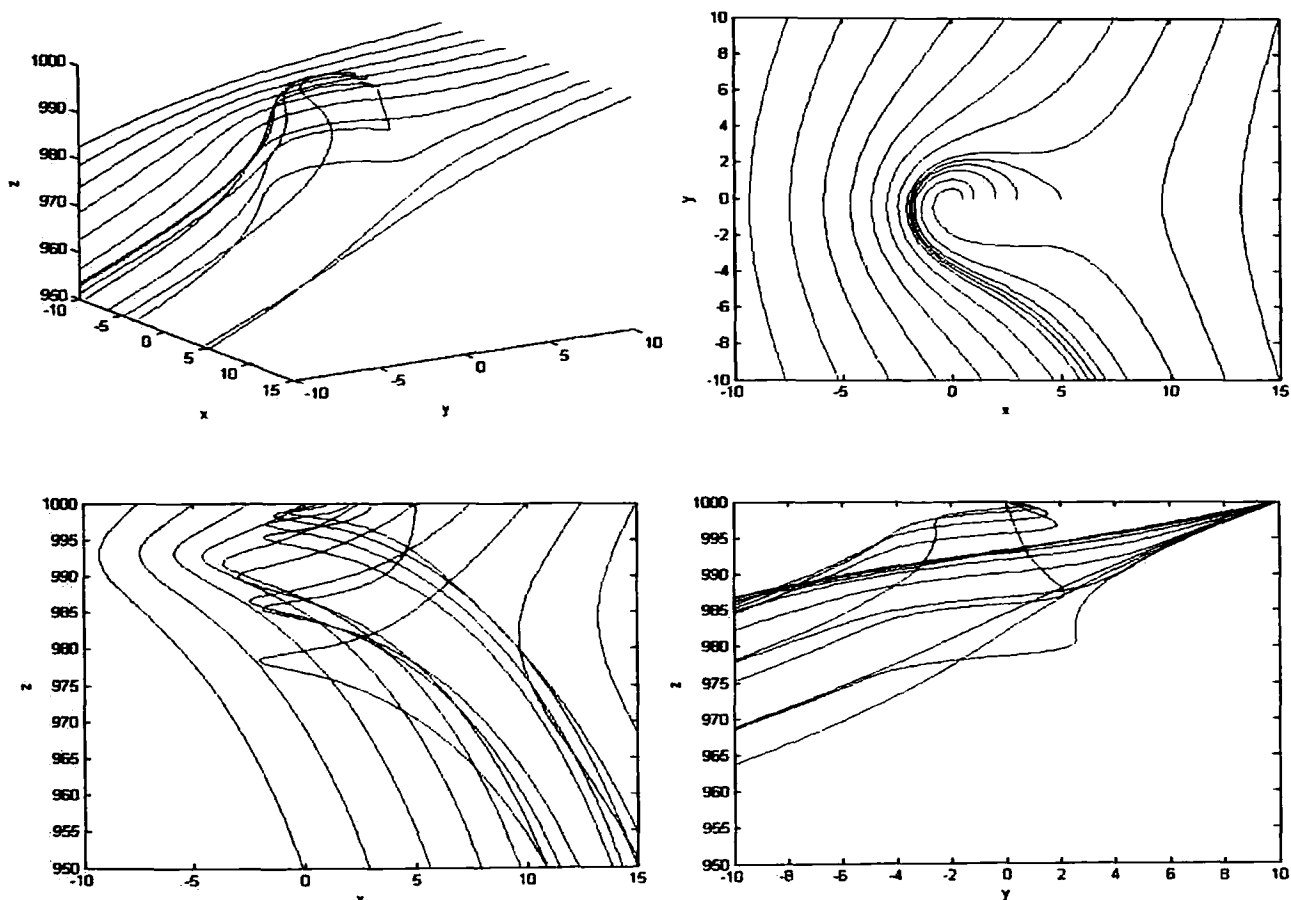


Figura 8-3: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia ($S_i = 0,5$) para otro valor inicial de la coordenada “z” (caso del vórtice Rankine).

La influencia de la coordenada “y” se muestra en la Figura 8-4, en la que se han tomado los mismos valores de “x” y “z” que en la Figura 8-2 y se ha variado la coordenada “y” inicial de las partículas (valores de 50, 30, 10, 5 y 0).

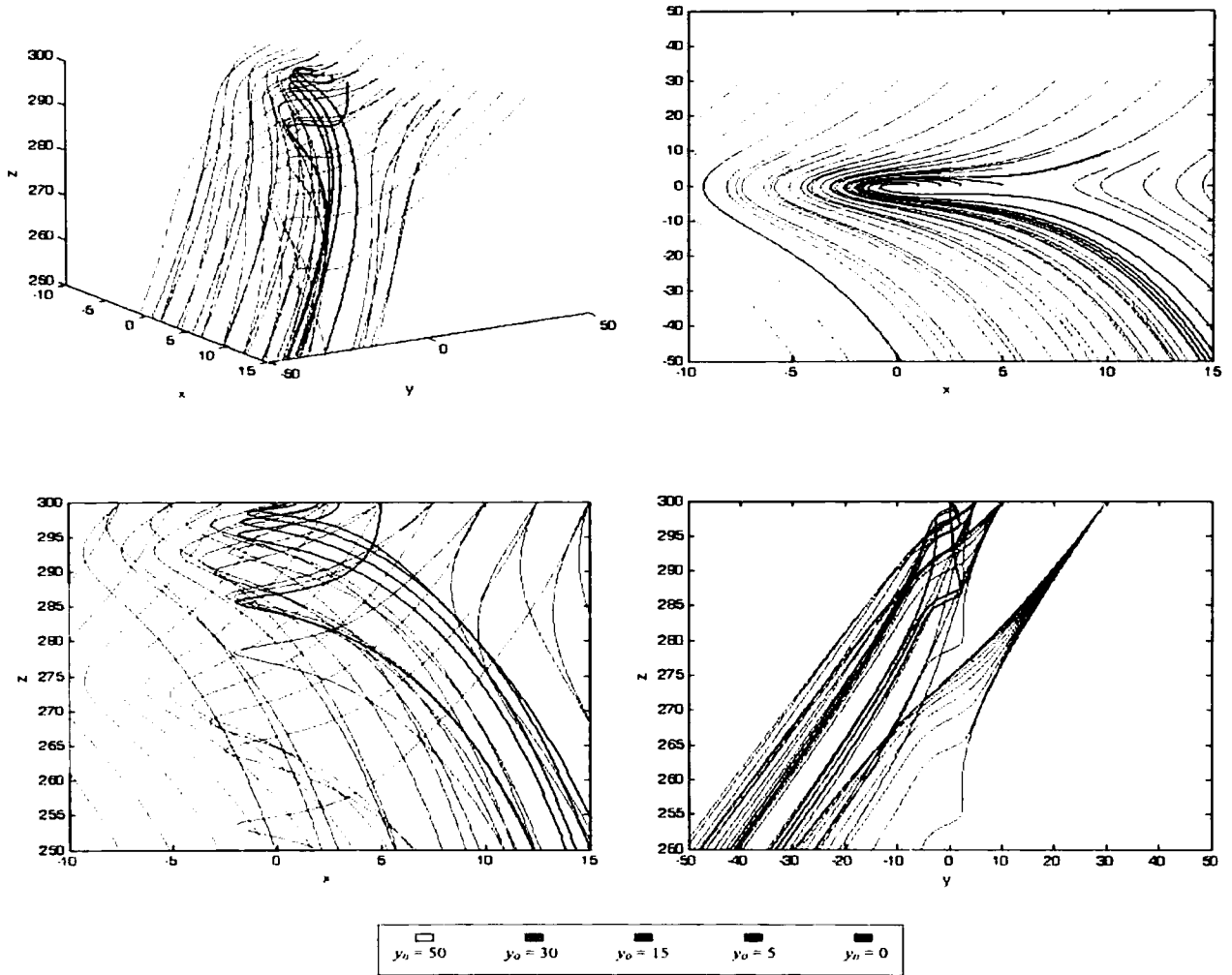


Figura 8-4: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia ($S_r = 0,5$) para varios valores iniciales de la coordenada “y” (caso del vórtice Rankine).

En dicha Figura 8-4 se observa que la forma general de las trayectorias es semejante para todos los valores iniciales de la coordenada “y” inicial, la única diferencia es que a mayor “y” inicial más amplio es el “rodeo” que da la trayectoria alrededor del vórtice.

8.1.2. Cálculo de los Puntos de equilibrio y Deducción de la Longitud característica

Los puntos de equilibrio del sistema son los puntos donde el movimiento de las partículas está detenido, en el sentido de que las partículas podrían permanecer allí en reposo, es decir su velocidad y aceleración son nulas: $d\bar{x}^*/dt^* = d\bar{v}^*/dt^* = 0$.

La posición de los puntos de equilibrio en un vórtice irrotacional para cualquier valor de la relación de densidades β (ρ_p/ρ) y de la velocidad terminal de caída adimensional V_t fue obtenida por Raju & Meiburg (1997) [122], así pues para $\beta > 1$ ($\rho_p > \rho$) -como es el caso de esta Tesis- la posición de los puntos de equilibrio para la proyección del movimiento sobre el plano XY perpendicular al eje del vórtice se obtiene de:

$$\bar{V}_t^* + \bar{u}^*(\bar{x}_E^*) = 0 \quad (8.5)$$

Sustituyendo en la ecuación (8.5), el campo de velocidades del vórtice Rankine -definido por las ecuaciones (4.63 a,b,c)- y desdoblando en dos ecuaciones escalares, se tiene que:

$$\frac{-\Omega^* y_E^*}{1 + \frac{x_E^{*2}}{R_v^{*2}} + \frac{y_E^{*2}}{R_v^{*2}}} = 0 \Rightarrow y_E^* = 0 \quad (8.6a)$$

$$-V_t^* \sin\theta + \frac{\Omega^* x_E^*}{1 + \frac{x_E^{*2}}{R_v^{*2}} + \frac{y_E^{*2}}{R_v^{*2}}} = 0 \quad (8.6b)$$

Sustituyendo (8.6a) en (8.6b) y realizando operaciones algebraicas se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado

$$(V_t^* \sin\theta) x_E^{*2} - R_v^{*2} \Omega x_E^* + R_v^{*2} V_t^* \sin\theta = 0 \quad (8.7)$$

cuya solución viene dada por

$$x_E^* = \frac{R_v^{*2} \Omega^* \pm \sqrt{R_v^{*4} \Omega^{*2} - 4 R_v^{*2} V_t^{*2} \sin^2 \theta}}{2 V_t^* \sin \theta} \quad (8.8)$$

La ecuación (8.8) no tiene solución real si $R_v^{*4} \Omega^{*2} - 4 R_v^{*2} V_t^{*2} \sin^2 \theta < 0$.

Si $R_v^{*4} \Omega^{*2} - 4 R_v^{*2} V_t^{*2} \sin^2 \theta > 0$ tiene dos soluciones reales:

$$x_{E1}^* = \frac{\Omega^* - \sqrt{\Omega^{*2} - \frac{4 V_t^{*2} \sin^2 \theta}{R_v^{*2}}}}{\frac{2 V_t^* \sin \theta}{R_v^{*2}}} = \frac{\Gamma^* - \sqrt{\Gamma^{*2} - R_v^{*2} V_t^{*2} \sin^2 \theta}}{V_t^* \sin \theta} \quad (8.9)$$

$$x_{E2}^* = \frac{\Omega^* + \sqrt{\Omega^{*2} - \frac{4 V_t^{*2} \sin^2 \theta}{R_v^{*2}}}}{\frac{2 V_t^* \sin \theta}{R_v^{*2}}} = \frac{\Gamma^* + \sqrt{\Gamma^{*2} - R_v^{*2} V_t^{*2} \sin^2 \theta}}{V_t^* \sin \theta} \quad (8.10)$$

donde:

- x_{E1}^* = abscisa del punto de equilibrio 1.
- x_{E2}^* = abscisa del punto de equilibrio 2.
- Ω^* = doble de la velocidad angular del vórtice.
- V_t^* = velocidad terminal de caída en fluido en reposo.
- θ = ángulo que forma el eje del vórtice con la gravedad $= \pi/4$.
- R_v^* = radio del vórtice.
- Γ^* = circulación del vórtice.

El único parámetro que no ha sido utilizado hasta ahora es Ω^* , que se obtiene a partir del radio del vórtice (R_v^*) y de la circulación (Γ^*) mediante la ecuación (4.55). También se ha hecho uso de la ecuación (8.1) que relaciona V_t^* con $V_t^{*'}$.

Es obvio que en el espacio tridimensional estos puntos de equilibrio serían en realidad unas “líneas de equilibrio” paralelas al eje del vórtice. La distinción entre el punto de equilibrio $\bar{x}_{E1}^*$ y $\bar{x}_{E2}^*$ estriba -sin entrar en detalles- en que el primero es un *foco inestable* del sistema dinámico definido por las ecuaciones de

movimiento (las trayectorias se alejan de él en las dos direcciones) y el segundo es un *punto de silla* (la trayectorias se acercan a él en una de dirección principal, alejándose en la otra).

La ecuación (8.8) tiene una única solución si

$$R_v^{*4} \Omega^{*2} - 4R_v^{*2} V_t^{*2} \sin^2 \theta = \Gamma^{*2} - R_v^{*2} V_t^{*2} \sin^2 \theta = 0 \quad (8.11)$$

que sería el caso en que los dos puntos de equilibrio se condensan en un único punto. De (8.11) es posible entonces deducir el *radio mínimo de las trayectorias de las partículas alrededor del vórtice*, $(R_v^*)_{\min}$, que sería la *escala de Longitud característica* (L_c^*) del problema que se está analizando:

$$(R_v^*)_{\min}^2 V_t^{*2} \sin^2 \theta = \Gamma^{*2} \Rightarrow (R_v^*)_{\min} = \frac{\Gamma^*}{V_t^{*'}} = L_c^* \quad (8.12)$$

Se puede relacionar la Longitud característica con la distancia entre los puntos de equilibrio, que se obtiene de las ecuaciones (8.9) y (8.10):

$$\frac{|\bar{x}_{E2}^* - \bar{x}_{E1}^*|}{2} = \frac{\sqrt{\Gamma^{*2} - R_v^{*2} V_t^{*2}}}{V_t^{*'}} \quad (8.13)$$

De (8.12) y (8.13) se deduce que cuando $V_t^{*'} \rightarrow 0$, $\frac{|\bar{x}_{E2}^* - \bar{x}_{E1}^*|}{2} \rightarrow L_c^*$

El desarrollo realizado para obtener los puntos de equilibrio y la longitud característica L_c^* podría haberse realizado de un modo análogo en términos de variables adimensionales, tal como se describe a continuación.

Los puntos de equilibrio se obtienen entonces de

$$\vec{V}_t + \vec{u}(\bar{x}_E) = 0 \quad (8.14)$$

que desdoblándola en las dos correspondientes ecuaciones escalares:

$$\frac{-2y_E}{1+x_E^2+y_E^2} = 0 \Rightarrow y_E = 0 \quad (8.15a)$$

$$-V_i \sin \theta + \frac{2x_E}{1+x_E^2+y_E^2} = 0 \quad (8.15b)$$

y sustituyendo (8.15a) en (8.15b) y realizando operaciones algebraicas se obtiene la siguiente ecuación la ecuación de segundo grado:

$$(V_i \sin \theta)x_E^2 - 2x_E + V_i \sin \theta = 0 \quad (8.16)$$

cuya solución es

$$x_E = \frac{1 \pm \sqrt{1 - V_i'^2 \sin^2 \theta}}{V_i \sin \theta} \quad (8.17)$$

La ecuación (8.17) no tiene solución si $1 - V_i'^2 \sin^2 \theta < 0$ y tiene dos soluciones reales si $1 - V_i'^2 \sin^2 \theta > 0$ proporcionando la abscisa adimensional de los puntos de equilibrio:

$$x_{E1} = \frac{1 - \sqrt{1 - V_i'^2 \sin^2 \theta}}{V_i \sin \theta} = \frac{1 - \sqrt{1 - V_i'^2}}{V_i'} \quad (8.18)$$

$$x_{E2} = \frac{1 + \sqrt{1 - V_i'^2 \sin^2 \theta}}{V_i \sin \theta} = \frac{1 + \sqrt{1 - V_i'^2}}{V_i'} \quad (8.19)$$

Con ello, la distancia entre los puntos de equilibrio en forma adimensional se expresa como

$$|\bar{x}_{E2} - \bar{x}_{E1}| = \frac{2\sqrt{1 - V_i'^2}}{V_i'} \quad (8.20)$$

La ecuación (8.16) que proporciona la abscisa de los puntos de equilibrio tiene una única solución si

$$1 - V_t'^2 \sin^2 \theta = 1 - V_t'^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = 1 V_t' \quad (8.21)$$

de donde se deduce la correspondiente Longitud característica adimensional como $L_c = 1/V_t'$.

Esta obtención de L_c puede realizarse quizás con mayor claridad adimensionalizando $L_c^* = \Gamma^*/V_t'^*$. Para ello, basta con aplicar las relaciones (8.1a), (8.1b), (6.41), (6.46) y (6.49) a la ecuación (8.12):

$$L_c^* = \frac{\Gamma^*}{V_t'^*} = \frac{\Gamma^*}{V_t'^* \sin \theta} = \frac{R_v^* U_0^*}{V_t'^* \sin \theta} = \frac{R_v^* U_0^*}{V_t' U_0^* \sin \theta} = \frac{R_v^*}{V_t'} \Rightarrow \frac{L_c^*}{R_v^*} = \frac{1}{V_t'} \Rightarrow L_c = \frac{1}{V_t'} \quad (8.22)$$

En forma adimensional también es posible relacionar la longitud característica con la distancia entre los puntos de equilibrio. De la ecuación (8.20) se tiene:

$$\frac{|\bar{x}_{E2} - \bar{x}_{E1}|}{2} = \frac{\sqrt{1 - V_t'^2}}{V_t'} \quad (8.23)$$

y comparando (8.22) con (8.23) se deduce que cuando $V_t' \rightarrow 0$, el valor de

$$\frac{|\bar{x}_{E2} - \bar{x}_{E1}|}{2} \rightarrow L_c.$$

Como ejemplo, en la Tabla 8-6 se muestran las abscisas de los puntos de equilibrio, la mitad de la distancia entre ellos y la longitud característica para los valores de los parámetros de la Tabla 8-5, tanto en términos dimensionales (x_{E1}^*, x_{E2}^*) como adimensionales (x_{E1}, x_{E2}) a partir de los distintos parámetros que caracterizan al vórtice (R_v^*, Γ^*) y teniendo en cuenta la Velocidad terminal ($V_t'^*$); utilizándose las ecuaciones (8.9), (8.10) y (8.12) y las ecuaciones (8.18), (8.19) y (8.22) respectivamente.

TABLA 8-6. Puntos de equilibrio y distancia entre ellos para los valores de los parámetros considerados en la Figura 8-2

R_v^* (m)	0,0005	0,0050	0,0080	0,0100	0,0800	0,1000	...
Γ^* (m ² /s)	0,000035000	0,001106797	0,002240000	0,003130495	0,070835020	0,098994949	...
V_t^* (m/s)	0,035000000	0,110679720	0,140000000	0,156524760	0,442718870	0,494974750	...

x_{E1}^* (m)	4,46429·10 ⁻¹⁰	1,41174·10 ⁻⁷	4,57147·10 ⁻⁷	7,98607·10 ⁻⁷	0,000144607	0,000252651	...
x_{E2}^* (m)	0,002828427	0,02828413	0,045254377	0,056567744	0,452403733	0,565432774	...
$ \bar{x}_{E2}^* - \bar{x}_{E1}^* /2$ (m)	0,001414213	0,014141994	0,02262696	0,028283473	0,226129563	0,282590062	...
L_c^* (m)	0,001414214	0,014142136	0,022627417	0,028284271	0,22627417	0,282842713	...

x_{E1}	0,182675814	0,182675814	0,182675814	0,182675814	0,182675814	0,182675814	...
x_{E2}	5,474178437	5,474178437	5,474178437	5,474178437	5,474178437	5,474178437	...
$ \bar{x}_{E2} - \bar{x}_{E1} /2$	2,645751312	2,645751312	2,645751312	2,645751312	2,645751312	2,645751312	...
L_c	2,82842713	2,82842713	2,82842713	2,82842713	2,82842713	2,82842713	...

Como puede observarse en la Tabla 8-6, en términos adimensionales se obtienen valores idénticos para la posición de los puntos de equilibrio, la semidistancia entre ellos y la longitud característica partiendo de diferentes valores de los datos de partida. Ello es lógico ya que las combinaciones de R_v^* , Γ^* y V_t^* de dicha tabla corresponden a los mismos valores de los parámetros adimensionales ($V_t = 0,5$ y $S_t = 0,5$). También se aprecia –tanto en términos dimensionales como adimensionales– que el valor de la semidistancia entre los puntos de equilibrio es muy próximo al de la longitud característica. Esa aproximación sería todavía mayor en el caso de haber tomado un valor aún más pequeño de la velocidad terminal.

8.1.3. Trayectorias Límite

Hay unas trayectorias que comienzan en el punto de silla y encierran una región que no puede ser alcanzada por las partículas que vienen desde encima del vórtice, estas son las *trayectorias límite*. Para obtenerlas, se ejecuta el citado programa *ligtravoin* con las mismas condiciones de partida pero imponiendo como condición inicial las coordenadas del punto de silla (el citado $\bar{x}_{E2}^*$). Estas trayectorias límite son de utilidad para establecer un *criterio de escape* (según el cual se considerará si una partícula ha escapado o no del vórtice) y para determinar la *región de captura* (es decir, aquella zona en que las partículas son atrapadas por el vórtice y se mueven alrededor de él hasta que consiguen escapar).

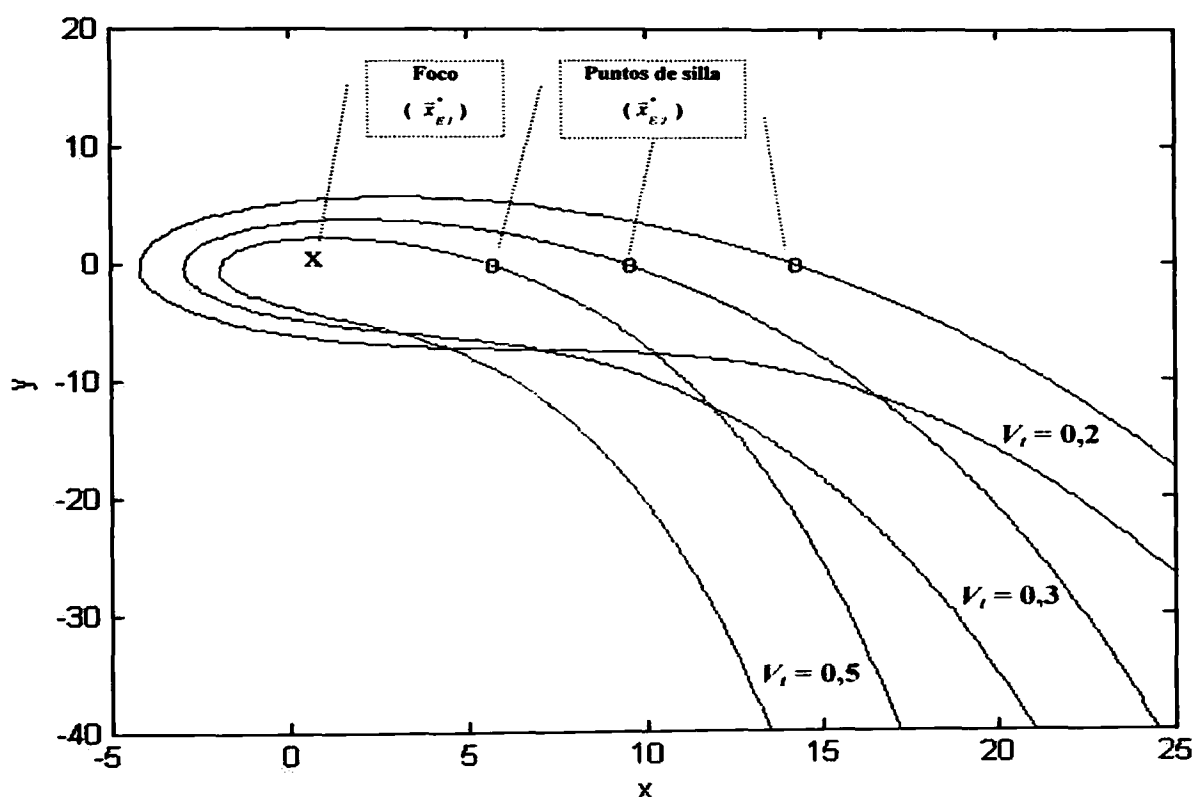


Figura 8-5: Forma y amplitud de la región encerrada por las trayectorias límite para $S_i = 0,5$ y diferentes valores de V_i (caso del vórtice Rankine).

En la Figura 8-5, tomando idénticos datos de partida para la inercia de las partículas y variando V_t , se aprecia como la forma y la amplitud de la región encerrada por las trayectorias límite viene determinada por el valor de la velocidad terminal de caída (V_t).

De esta gráfica se deduce que *a medida que aumenta la velocidad terminal de caída, la región encerrada por las trayectorias límite es menos amplia hasta que para una velocidad terminal de caída suficientemente elevada, dicha zona es tan pequeña que prácticamente puede considerarse que desaparece*. Esta afirmación queda corroborada por la ecuación (8.20), de la que se deduce que al aumentar V_t la distancia entre los puntos de equilibrio –íntimamente relacionada con la amplitud de la región encerrada por las trayectorias límite- disminuye.

Al mismo tiempo, en dicha figura se representa el punto de silla para cada valor de V_t ; observándose que al aumentar V_t , la abscisa del punto de silla es cada vez menor.

8.1.4. Formulación del Criterio de escape

Para determinar el *tiempo de escape* (T_e^*), que es el tiempo que tardan las partículas en escapar del vórtice, es necesario indicar con precisión el criterio según el cual se considera que la partícula ha escapado. Para ello hay que establecer en primer lugar algunos puntos de referencias, que a la vista de las trayectorias de las partículas, pueden ser la posición de los puntos de equilibrio $\bar{x}_{E1}^*$ y $\bar{x}_{E2}^*$ y la distancia entre ellos $|\bar{x}_{E2}^* - \bar{x}_{E1}^*|$.

Con estos puntos de referencia, el criterio que se ha seguido en esta investigación es que: *“una partícula ha escapado del vórtice cuando su distancia al foco sea igual a 1,5 veces la separación entre los puntos de equilibrio, o sea del orden de 3 veces la Longitud característica ”*. Aunque este criterio pudiera parecer arbitrario, con la siguiente figura se demostrará que la elección realizada es acertada.

En la Figura 8-6 se representan para varias combinaciones de V_t y S_t :

- por un lado las trayectorias de las partículas (*marcadas en rojo*) y las trayectorias límite (*marcadas en azul*), obtenidas con el programa *ligtravoin*.

- y por otro lado tres círculos (*marcados en verde*) cuyos radios son:

$$|\bar{x}_{E2} - \bar{x}_{E1}|, \quad 1,5|\bar{x}_{E2} - \bar{x}_{E1}| \quad \text{y} \quad 2|\bar{x}_{E2} - \bar{x}_{E1}| \quad \text{respectivamente y}$$

centrados en el foco ($\bar{x}_{E1}$), trazados con Matlab.

Para establecer cual de esos tres círculos es el más adecuado como frontera de escape se toma inicialmente una partícula (señalada en la figura con *una x negra*) dentro del círculo pequeño ($|\bar{x}_{E2} - \bar{x}_{E1}|$) y próxima a éste y dentro de la región encerrada por la trayectoria límite (punto 1). Luego, se traza su trayectoria (*marcada en negro*), observándose que la partícula aún no escapa sino que da una vuelta alrededor del vórtice, por lo tanto dicho círculo no sería apropiado como distancia de escape.

De manera análoga, se toma otra partícula en este caso dentro del círculo intermedio $1,5|\bar{x}_{E2} - \bar{x}_{E1}|$ y próximo a éste (punto 2), se traza su trayectoria y se aprecia que la partícula escapa del vórtice sin dar ninguna vuelta alrededor de él. Así pues, se podría decir que este círculo sería una aproximación bastante válida como distancia de escape. Esta distancia se denotará en lo sucesivo con la letra D .

Llegado a este punto es evidente que no tiene sentido realizar este procedimiento para el tercer círculo, ya que la partícula siempre escapará del vórtice.

Aunque es posible afinar más esta condición, la que se ha tomado parece suficientemente aproximada ya que cuando la partícula deja de dar vueltas alrededor del vórtice y por fin escapa, sedimenta muy rápidamente por lo que tomar otro criterio tiene muy poca influencia en el Tiempo de Escape; lo que realmente importa es tener la seguridad de que ya ha escapado.

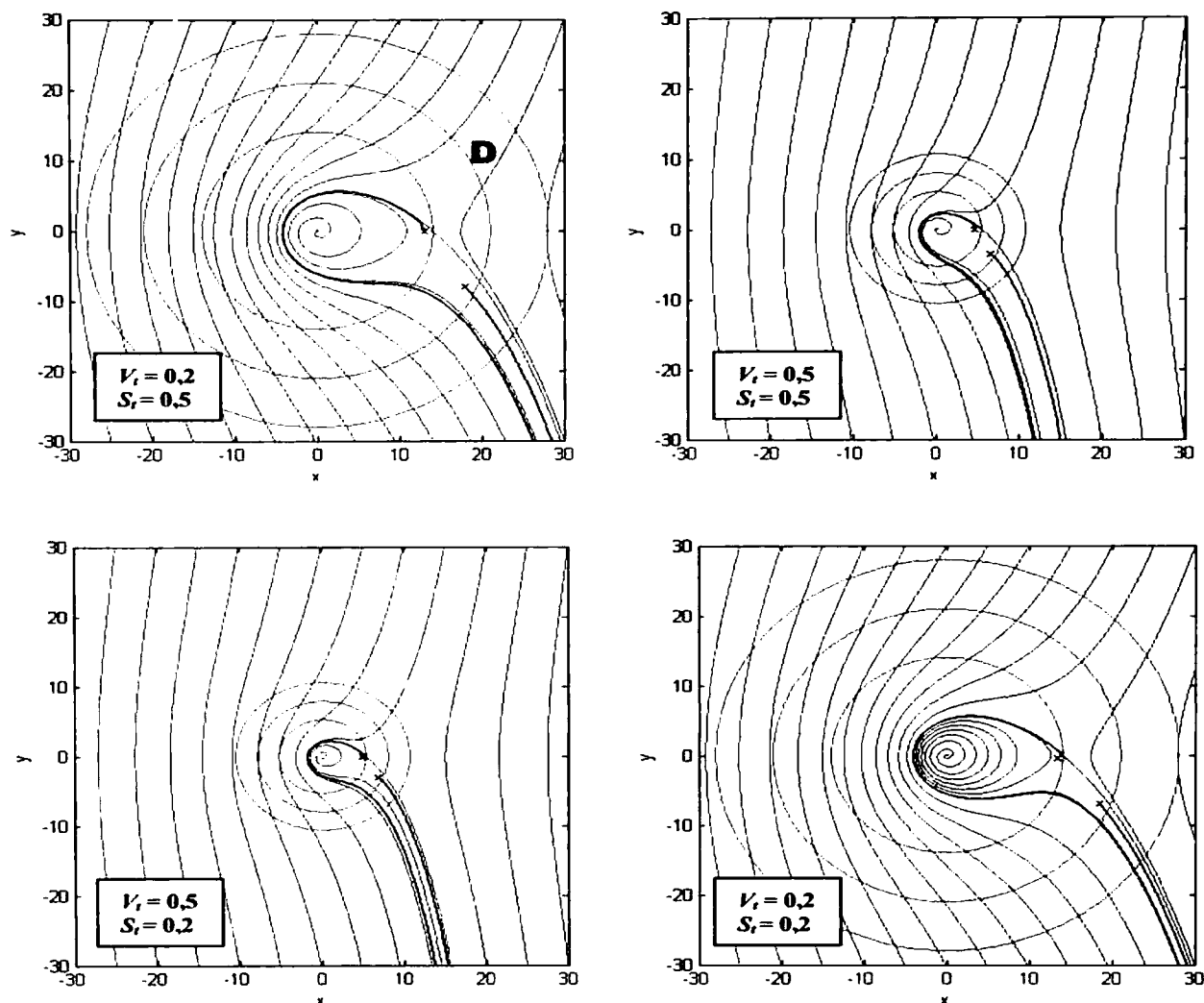


Figura 8-6: Distancia de escape (D) para vórtice Rankine.

De manera similar al estudio de la influencia de la velocidad terminal sobre la amplitud de la región encerrada por las trayectorias límite, también puede analizarse su influencia en la distancia de escape. En la Figura 8-7, puede verse como varía dicha Distancia (D^*) a la cual una partícula ha escapado del vórtice [obtenida -por supuesto- multiplicando por 1,5 la distancia entre los puntos de equilibrio que proporciona la ecuación (8.13)] frente a la velocidad terminal de caída (V_t^*) manteniendo fijos el número de Stokes y las características del vórtice. A medida que V_t^* aumenta, la distancia de escape disminuye hasta que se anula para un valor de $V_t^* = (u_\phi^*)_{\max}$; es decir: $(V_t^*)_{D=0} = V_t^* / \sin\theta = \Omega^* R_v^* / 2 \sin\theta$.

Así por ejemplo, para los valores de los parámetros tomados en la Figura 8-7: $\Omega^* = 2 \text{ rad/s}$; $R_v^* = 1 \text{ m}$ (que corresponden a $\Gamma^* = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ y $U_0^* = 1 \text{ m/s}$); $S_t = 0,4$ y $\theta = \pi/4$; resulta que V_t^* se anula para $V_t^* = \sqrt{2} \text{ m/s}$.

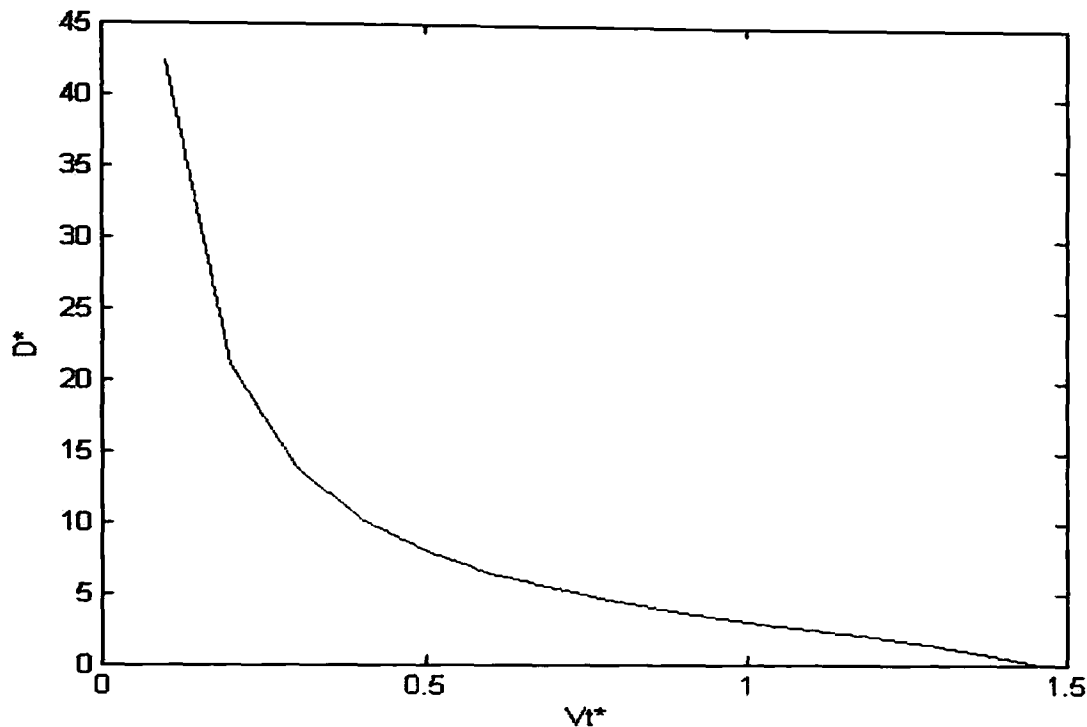


Figura 8-7: Distancia de escape (D^*) frente a la velocidad terminal de caída (V_t^*), para $S_t = 0,4$ y $\theta = \pi/4$ (caso del vórtice Rankine).

Obviamente, el tiempo que una partícula necesita para escapar del vórtice también depende de la condición inicial. Es evidente que el tiempo de escape tiende a infinito si la partícula es soltada en el foco $\bar{x}_{E1}^*$. En la práctica, lo que interesa conocer es el tiempo que necesita para escapar una partícula situada inicialmente en algún punto dentro de la *región de captura*. Una vez que la partícula está fuera de dicha región, sedimenta muy rápidamente. Por ello, en los cálculos siguientes, la posición inicial de la partícula fue tomada a una distancia muy pequeña del foco -concretamente igual a un 1 % del radio del vórtice-, es decir $|\bar{x}_0^* - \bar{x}_{E1}^*| = 0,01R_v^*$. Otros valores también serían válidos.

8.1.5. Obtención Numérica del Tiempo de escape y análisis de la influencia de variables

El Tiempo de escape de una partícula (T_e) -dentro de la región de captura- se obtiene ejecutando el programa informático -de elaboración propia- *tescapeiner* (cuyo listado se recoge en el Anexo II) en el cual se introducen como datos de partida los ya citados con anterioridad salvo que en este caso se varían los valores de V_i y S_i , así como su posición inicial. Esta posición -como se acaba de mencionar en el apartado anterior- está situada a una distancia del foco del 1 % del radio del vórtice-, es decir $|\bar{x}_0^* - \bar{x}_{E1}^*| = 0,01R_v^*$. Esto queda recogido en la siguiente Tabla 8-7.

TABLA 8-7. Tiempo de escape (T_e) para diferentes valores de V_i y S_i , caso del vórtice Rankine

S_i	V_i	T_e
0,3	0,02	3322000
	0,04	218570
	0,06	46508
	0,08	15034
	...	...
0,5	0,02	2383500
	0,04	158830
	0,06	33929
	0,08	11490,3
	...	...
0,7	0,02	1445000
	0,04	99660
	0,06	21350
	0,08	7945,4
	...	...
1	0,02	1047600
	0,04	75471
	0,06	17598,3
	0,08	5602,2
	...	...
...	...	...

Fuente: Programa informático "*tescapeiner*" de elaboración propia.

Representando el Tiempo de escape frente a la Velocidad terminal de caída de la partícula (V_t) para varios valores del número de Stokes (diferentes inercias) (Figura 8-8) se deduce que el tiempo de escape disminuye monótonamente al aumentar la velocidad terminal de caída independientemente del número de Stokes que presente. Ello es lógico si se piensa que la partícula cruza el vórtice más rápidamente para valores más elevados de V_t .

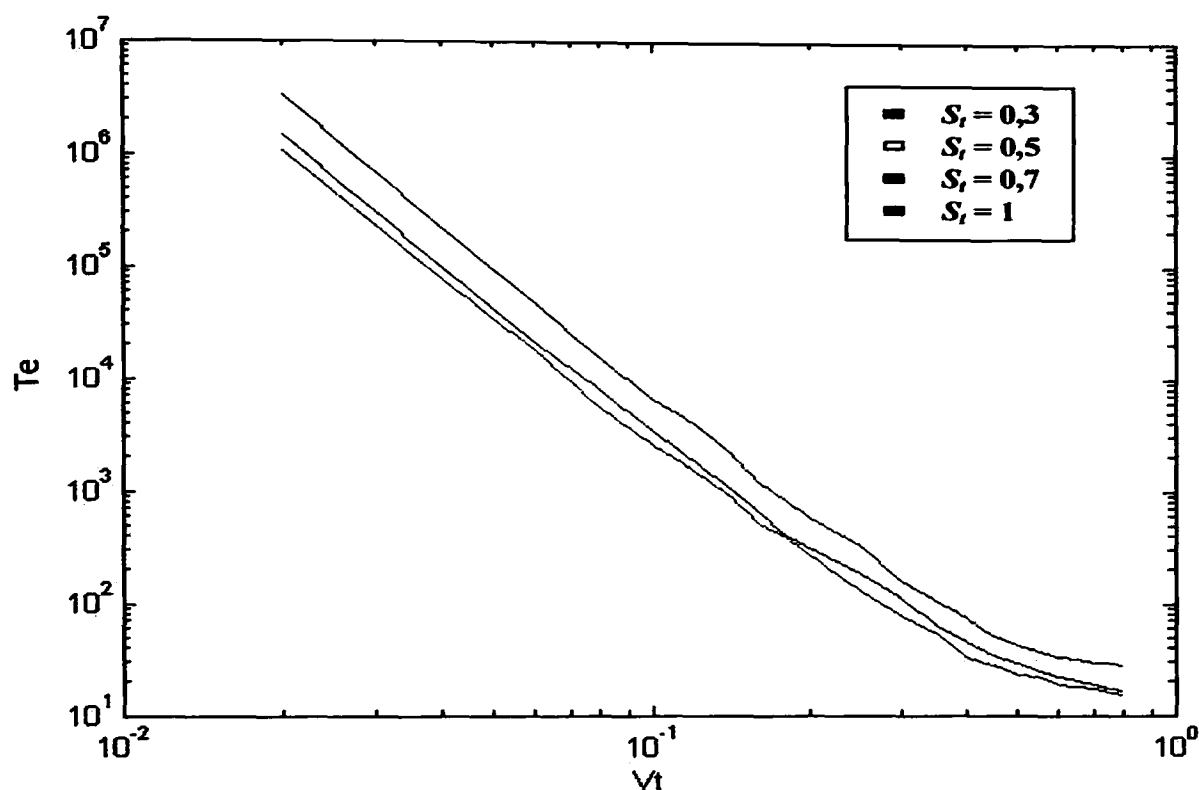


Figura 8-8: Tiempo de escape (T_e) frente a la velocidad terminal de caída (V_t) para diferentes S_t (caso del vórtice Rankine).

En la Figura 8-9, se estudia la influencia de la inercia de la partícula (S_t) en el tiempo de escape (T_e) para V_t fijo. De ella, se deduce que el tiempo de escape tiende a disminuir a medida que el número de Stokes crece, hecho que es lógico ya que a medida que la inercia de las partículas es mayor, éstas se verán menos influenciadas por la acción del vórtice. Sin embargo, esta disminución del tiempo de escape no tiene lugar de un modo monótono sino que aparecen una serie de oscilaciones, tal como puede verse en la gráfica mediante la aparición de picos.

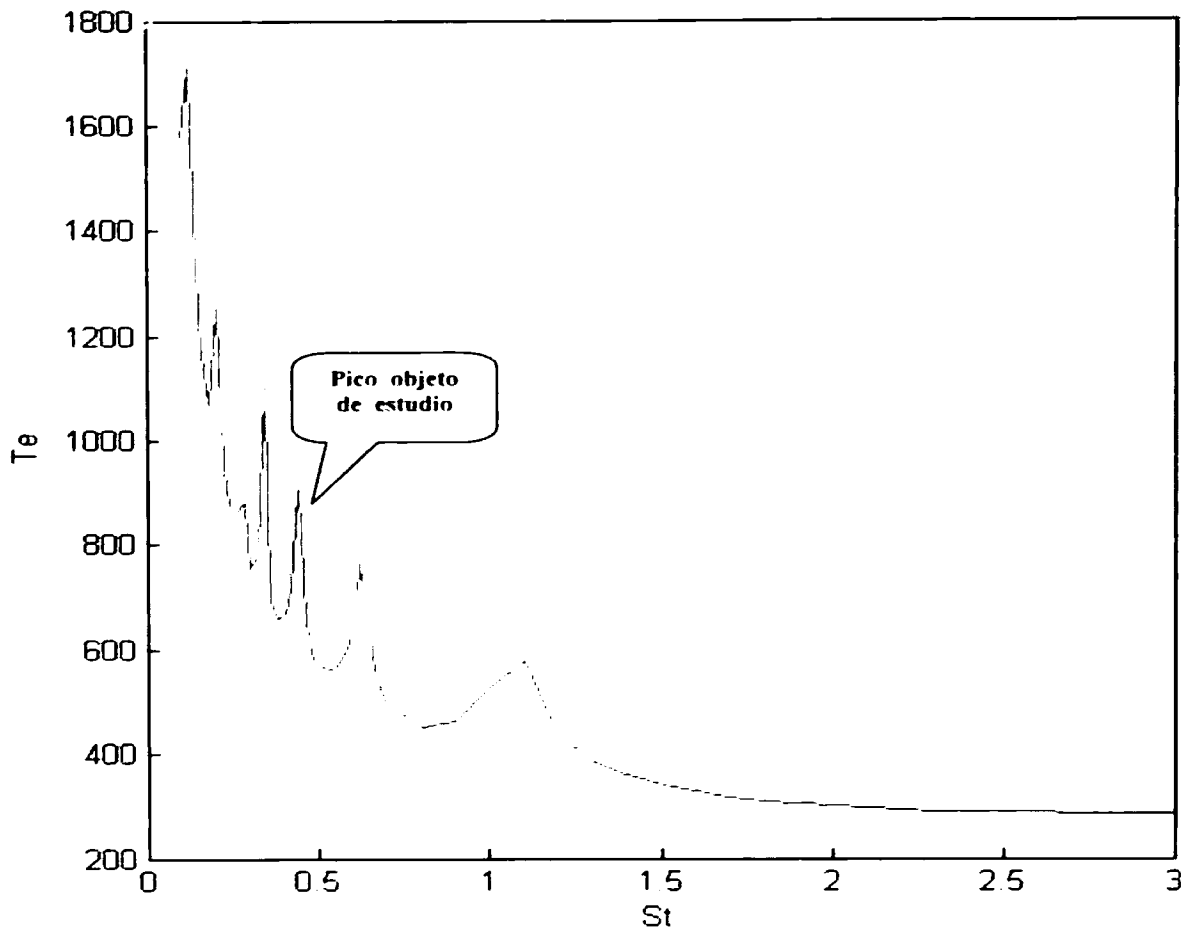


Figura 8-9: Variación del Tiempo de escape (T_e) con la inercia de las partículas (St) para $V_i = 0,2$ (caso del vórtice Rankine).

Para explicar por qué aparecen esas oscilaciones, esto es, por qué a veces las partículas tardan más en escapar, aunque su inercia sea mayor, se ha analizado con mayor detalle el rango de números de Stokes correspondiente a una de las oscilaciones, es decir a un pico; concretamente se ha estudiado la parte de la curva señalada en azul en la Figura 8-9. En dicha zona, el valor del número de Stokes es de 0,38 en el punto inicial; de 0,45 en el punto más alto y de 0,52 en el punto final

En la siguiente Figura 8-10, se muestra en rojo la *trayectoria* de una partícula soltada cerca del centro del vórtice, en verde la posición del *punto de silla* y en azul las *trayectorias límite* para varios valores del número de Stokes (0,39 al 0,50) en la zona mencionada del citado pico objeto de estudio.

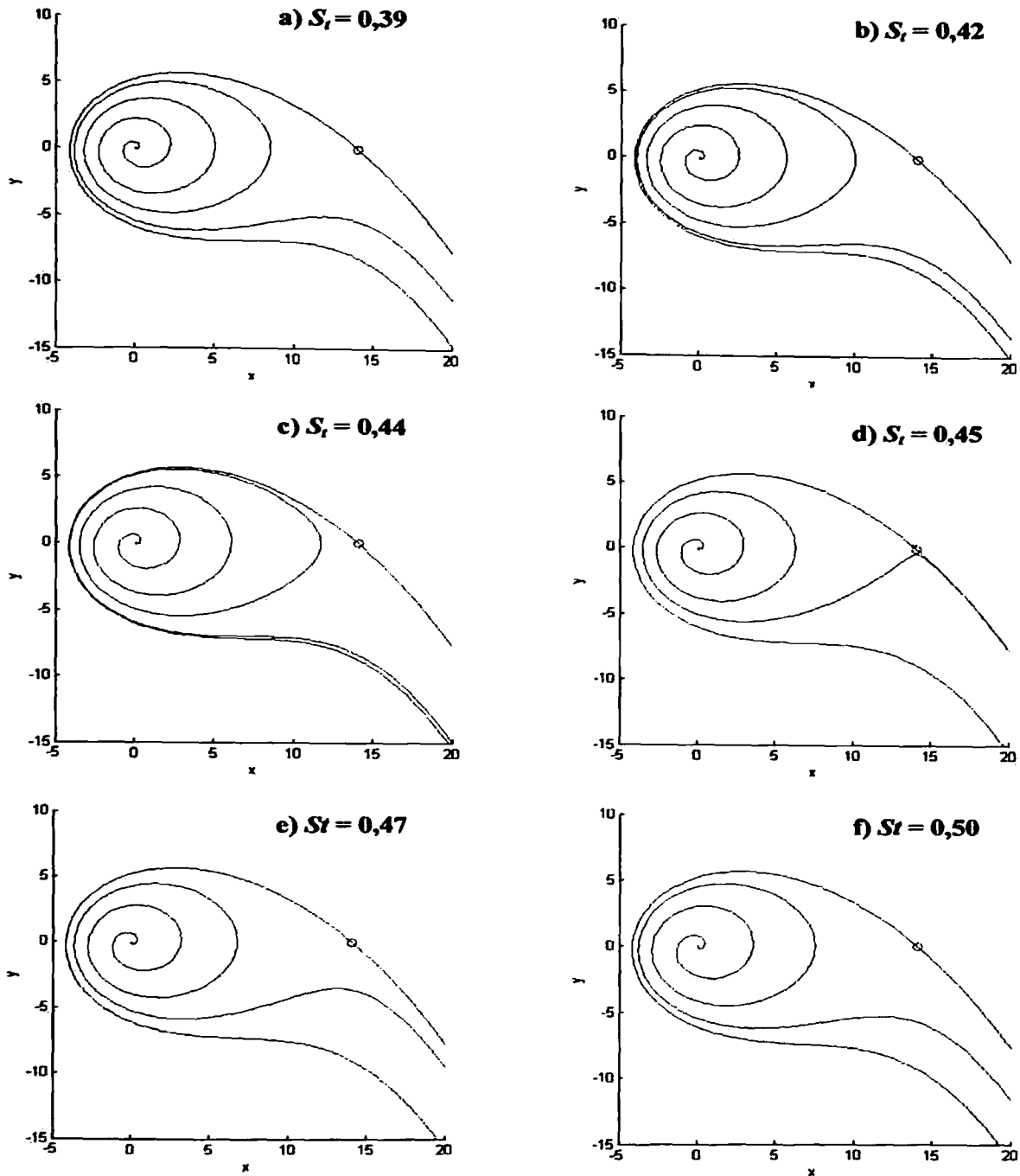


Figura 8-10: Trayectorias de una partícula en uno de los rangos de números de Stokes en que el tiempo de escape oscila (caso del vórtice Rankine).

Aunque Fung (2000) [11] justificase para el caso bidimensional este comportamiento de oscilaciones del tiempo de escape de las partículas relacionándolo con el número de vueltas que da la partícula antes de escapar del vórtice, la Figura 8-10 indica que también está relacionado con la mayor o menor distancia entre la partícula y el punto de silla $\bar{x}_{E2}^*$ en la última vuelta:

- Para valores del número de Stokes ($S_t = 0,39; 0,42; 0,44$) correspondientes a la zona ascendente del pico en estudio, el tiempo de escape aumenta. La partícula describe tres vueltas antes de escapar y a medida que el número de Stokes crece, la partícula pasa cada vez más cerca del punto de silla; lo cual explicaría que el tiempo de escape aumente con el número de Stokes en esta zona.
- Para $S_t = 0,45$ (punto superior del pico en estudio), la partícula en lugar de dar la tercera vuelta, escapa pasando muy cerca del punto de silla.
- Por último, en la zona descendente del pico en estudio ($S_t = 0,47; 0,50$), el tiempo de escape disminuye como es lógico esperar. La partícula da dos vueltas, siempre bastante lejos del punto de silla y al aumentar la inercia de las partículas el efecto del vórtice sobre ellas es menos acusado.

Finalmente en la siguiente Figura 8-11, se representa la variación del Tiempo de escape (T_e) frente al ángulo de inclinación del vórtice (θ):

- Cuando θ es muy pequeño (vórtice casi vertical), la partícula prácticamente describe un movimiento helicoidal alrededor del eje del vórtice hasta que escapa, por lo que T_e es muy grande.
- A medida que crece θ , el vórtice va estando menos inclinado y la partícula escapa más rápidamente de él.

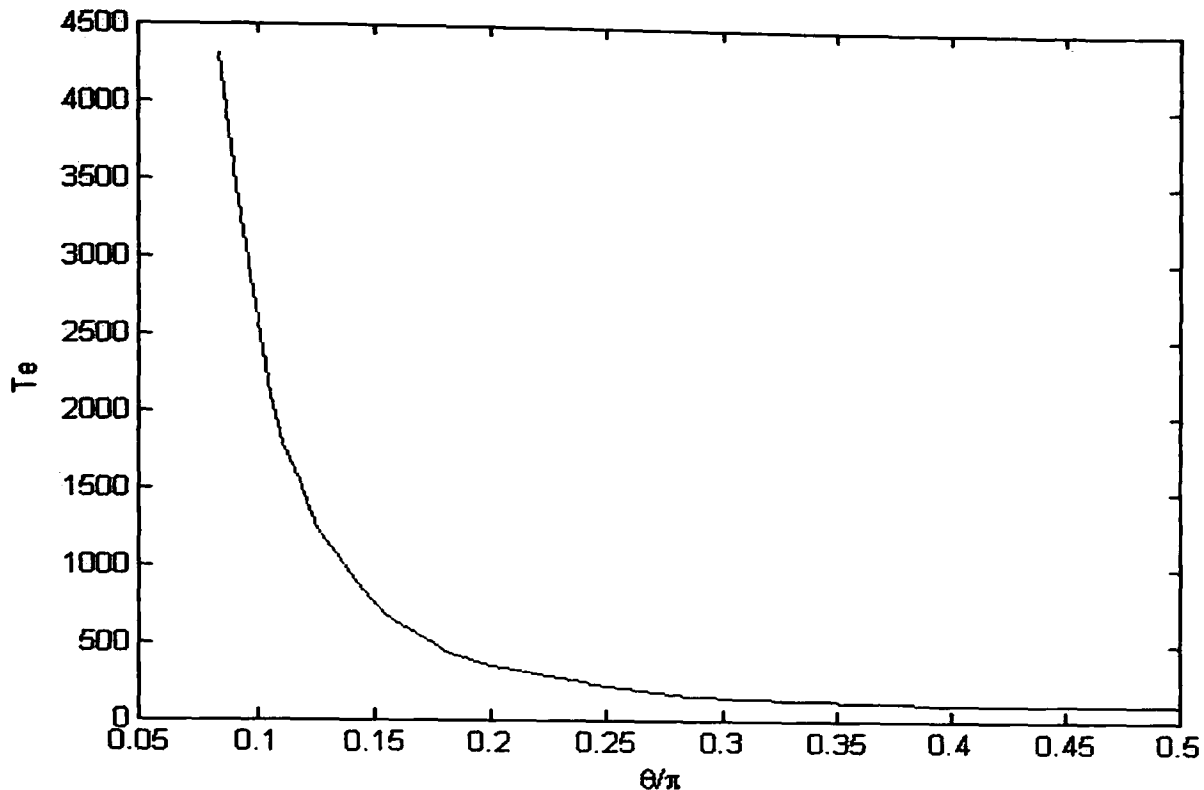


Figura 8-11: Influencia del ángulo de inclinación (θ) en el Tiempo de escape (T_e) para $S_i = 0,4$ y $V_i = 0,3$ (caso del vórtice Rankine).

8.1.6. Obtención Analítica de la fórmula del Tiempo de escape

Como paso previo al desarrollo de la fórmula se van a realizar las siguientes consideraciones:

1. La escala de longitud característica del problema que se está analizando es la indicada en la ecuación (8.12): $L_c^* = \Gamma^* / V_i^{**}$.
2. Cuando la velocidad de caída (V_f) y la inercia de las partículas es suficientemente pequeña, las trayectorias de las mismas son modificadas por el vórtice en regiones donde la velocidad del fluido $|\vec{u}^*| \approx V_i^{**}$. Esto es válido en aquellos vórtices -como es el caso del Rankine- en los que la velocidad del fluido -fuera del centro de los mismos- decae como $\Gamma^* / |\vec{x}^*|$.

Entonces, las velocidades de las partículas son tales que: $|\bar{v}^*| \approx V_i^* \approx |\bar{u}^*|$ (Dávila & Hunt, 2001) [1].

3. De las dos consideraciones anteriores, se calcula la escala de tiempo característica para las partículas (t_c^*), dividiendo la escala de longitud característica L_c^* por el valor de la velocidad de las partículas $|\bar{v}^*| \sim V_i^*$:

$$t_c^* = (\Gamma^*/V_i^*)/V_i^* = \Gamma^*/V_i^{*2} \quad (8.24)$$

Seguidamente, se va a proceder al desarrollo de la Fórmula del Tiempo de escape mediante los siguientes pasos:

- 1º) Se parte de la ecuación de movimiento (6.40) y se dividen ambos miembros por $6\pi R_p^* \mu^*$, resultando la ecuación (6.44):

$$\tau_p^* \frac{d\bar{v}^*}{dt^*} = \bar{V}_i^* + \bar{u}^* - \bar{v}^*.$$

- 2º) De la ecuación (6.44) se despeja la velocidad de la partícula:

$$\bar{v}^* = \bar{V}_i^* + \bar{u}^* - \tau_p^* \frac{d\bar{v}^*}{dt^*} \quad (8.25)$$

- 3º) El término $\frac{d\bar{v}^*}{dt^*}$ puede evaluarse -según Maxey & Corrsin (1986)[12]- tomando la velocidad de la partícula de un modo aproximado como $\bar{v}^* \approx \bar{u}^* + \bar{V}_i^*$, con lo que la ecuación (8.25) queda de la siguiente forma:

$$\bar{v}^* \approx \bar{V}_i^* + \bar{u}^* - \tau_p^* \frac{d}{dt^*} [\bar{u}^* + \bar{V}_i^*] \quad (8.26)$$

$$\bar{v}^* \approx \bar{V}_i^* + \bar{u}^* - \tau_p^* \left[\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t^*} + (\bar{u}^* + \bar{V}_i^*) \cdot \nabla \bar{u}^* \right] \quad (8.27)$$

$$\bar{v}^* \approx \bar{V}_i^* + \bar{u}^* - \tau_p^* \frac{D\bar{u}^*}{Dt^*} \quad (8.28)$$

4º) Si las partículas no tienen inercia ($\tau_p^* = 0$), la expresión (8.28) queda reducida a: $\vec{v}^* = \vec{v}_i^* + \vec{u}^*$. Por tanto, las partículas no escapan del vórtice sino que siguen trayectorias cerradas alrededor del foco $\vec{x}_{E1}^*$.

5º) Si las partículas tienen inercia ($\tau_p^* > 0$), éstas escapan del vórtice con una *Velocidad de escape* ($\vec{v}_e^*$):

$$\vec{v}_e^* \approx \tau_p^* \frac{D\vec{u}^*}{Dt^*} \quad (8.29)$$

6º) Esta velocidad de escape que aparece en la ecuación (8.29) es equivalente a un espacio dividido por un **Tiempo de escape** (T_e^*):

$$\vec{v}_e^* = \frac{\text{espacio}}{T_e^*} \approx \tau_p^* \frac{D\vec{u}^*}{Dt^*} \quad (8.30)$$

7º) Teniendo en cuenta la primera consideración expuesta, el *espacio* que aparece en la ecuación (8.30) es del orden de la *escala de longitud característica* ($L_c^* = \Gamma^*/V_i^{**}$).

8º) Con la segunda consideración, el término $D\vec{u}^*$ de la ecuación (8.30) es del orden de V_i^{**} .

9º) Por último, si se toma la tercera consideración, el término Dt^* de la mencionada ecuación (8.30) sería del orden de la *escala de tiempo característica* de la partículas ($t_c^* = \Gamma^*/V_i^{**2}$).

10º) Si se sustituye las equivalencias de los pasos 7º, 8º y 9º en la citada ecuación (8.30), ésta quedaría:

$$\frac{\Gamma^*/V_i^{**}}{T_e^*} \approx \tau_p^* \frac{V_i^{**}}{\Gamma^*/V_i^{**2}} \quad (8.31)$$

11º) De la ecuación (8.31) se despeja T_e^* :

$$T_e^* \approx \frac{\Gamma^{*2}}{\tau_p^* V_l^{*4}} \quad (8.32)$$

de donde se deduce la expresión del TIEMPO DE ESCAPE como:

$$T_e^* = K_e \frac{\Gamma^{*2}}{\tau_p^* V_l^{*4}} \quad (8.33)$$

siendo K_e una constante adimensional independiente de los parámetros del problema, que se determina empíricamente y que en lo sucesivo se denominará *Constante de tiempo de escape*.

Hasta la fecha, esta fórmula no ha sido deducida por ningún investigador y por ello supone un importante logro de esta Tesis, ya que representa un notable avance dentro de la investigación de la interacción de partículas con flujos vorticales.

8.1.7. Comparación de los Resultados numéricos con la Fórmula teórica. **Validez de la Fórmula**

Una vez obtenida la fórmula teórica del Tiempo de escape (ecuación 8.33) se procede a verificar mediante simulación numérica la validez de la misma.

Para que el Tiempo de escape obtenido numéricamente sea independiente de la posición inicial de la partícula, se calculará el mismo promediando su valor para una malla de 500 partículas equidistribuidas tomadas dentro de la *región de captura* (Figura 8-12). Mientras mayor sea el número de partículas más exacto es el resultado y mayor es también el tiempo de computación. Se ha comprobado que con el número de partículas indicado se obtienen unos resultados suficientemente precisos en comparación con un número mayor.

Malla de partículas

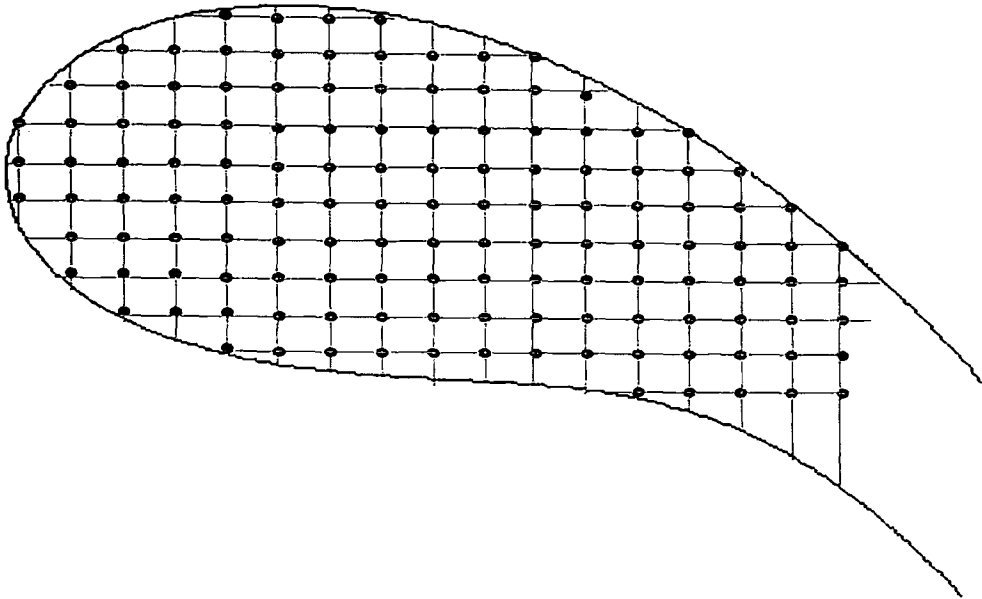


Figura 8-12: Malla de partículas en la región de captura del vórtice para obtener valores promedio.

Para obtener ese mallado de partículas, hay que obtener la ecuación diferencial de la trayectoria límite, que pasa por el punto de silla y que encierra en su interior a la región de captura; después hay que integrar esa ecuación diferencial para obtener su ecuación algebraica y por último hay que resolver esa ecuación algebraica.

1º) Ecuaciones diferenciales que determinan la trayectoria límite.

En coordenadas cartesianas la trayectoria límite está determinada por las ecuaciones:

$$\frac{dx^*}{dt^*} = u_x^* \quad (8.34)$$

$$\frac{dy^*}{dt^*} = u_y^* - V_i^{**} \quad (8.35)$$

que en el caso particular del vórtice Rankine son, haciendo uso de las ecuaciones (4.63)

$$\frac{dx^*}{dt^*} = \frac{-\Omega^* y^*}{1 + \frac{x^{*2}}{R_v^{*2}} + \frac{y^{*2}}{R_v^{*2}}} \quad (8.36)$$

$$\frac{dy^*}{dt^*} = \frac{\Omega^* x^*}{1 + \frac{x^{*2}}{R_v^{*2}} + \frac{y^{*2}}{R_v^{*2}}} - V_t^{**} \quad (8.37)$$

De (8.34) y (8.35) se tiene

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{u_y^* - V_t^{**}}{u_x^*} \quad (8.38)$$

2º) *Integración de las ecuaciones diferenciales de la trayectoria límite y obtención de su ecuación algebraica.*

Para la integración de las ecuaciones (8.34) y (8.35) ó (8.36) y (8.37) o bien (8.38), un método sencillo es tener en cuenta que

$$\frac{d(x^{*2} + y^{*2} + 1)}{dx^*} = 2x^* + 2y^* \frac{dy^*}{dx^*} \quad (8.39)$$

que, sustituyendo (8.38) queda

$$\frac{d(x^{*2} + y^{*2} + 1)}{dx^*} = 2x^* + 2y^* \frac{u_y^* - V_t^{**}}{u_x^*} \quad (8.40)$$

y sustituyendo u_x^* y u_y^* -ecuaciones (4.63)- y realizando operaciones algebraicas queda

$$\frac{d(x^{*2} + y^{*2} + 1)}{dx^*} = \frac{2V_t^{**}}{\Omega^*} \left[1 + \left(\frac{x^*}{R_v^*} \right)^2 + \left(\frac{y^*}{R_v^*} \right)^2 \right] \quad (8.41)$$

que es una ecuación fácil de integrar separando variables. La integración de (8.41) proporciona

$$x^{*2} + y^{*2} + R_v^{*2} = c e^{\frac{2V_t^{**}}{\Omega^* R_v^{*2}} x^*} \quad (8.42)$$

siendo “c” una constante de integración, que se puede obtener conociendo las coordenadas x_0^* , y_0^* de un punto de la trayectoria límite, que serían las correspondientes al punto de silla $\bar{X}_{E2}^*$:

$$x_0^{*2} + y_0^{*2} + R_v^{*2} = c e^{\frac{2V_t^{**}}{\Omega^* R_v^{*2}} x_0^*} \Rightarrow c = \frac{x_0^{*2} + y_0^{*2} + R_v^{*2}}{e^{\frac{2V_t^{**}}{\Omega^* R_v^{*2}} x_0^*}} \quad (8.43)$$

Sustituyendo (8.43) en (8.42) y despejando “y” se obtiene la ecuación de la trayectoria límite:

$$y^* = \sqrt{(x_0^{*2} + y_0^{*2} + R_v^{*2}) e^{\frac{2V_t^{**}}{\Omega^* R_v^{*2}} (x^* - x_0^*)} - x^{*2} - R_v^{*2}} = \quad (8.44a)$$

$$\sqrt{(x_0^{*2} + y_0^{*2} + R_v^{*2}) e^{\frac{V_t^{**}}{\Gamma^*} (x^* - x_0^*)} - x^{*2} - R_v^{*2}}$$

donde:

x^*, y^* = coordenadas de la trayectoria límite.

x_0^*, y_0^* = coordenadas de un punto de la trayectoria límite -punto de silla, ecuación (8.10)-.

V_t^{**} = componente de la Velocidad terminal de caída en fluido en reposo perpendicular al eje del vórtice.

R_v^* = radio del vórtice.

Ω^* = doble de la velocidad angular del vórtice.

Γ^* = circulación del vórtice.

La ecuación de la trayectoria límite, utilizando las relaciones (6.49), puede expresarse en forma adimensional :

$$y = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + 1)e^{V_t'(x-x_0)} - x^2 - 1} = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + 1)e^{V_t' \sin\theta(x-x_0)} - x^2 - 1} \quad (8.44b)$$

donde:

- x, y = coordenadas adimensionales de la trayectoria límite.
- x_0, y_0 = coordenadas adimensionales de un punto de la trayectoria límite -punto de silla, ecuación (8.19)-.
- V_t' = componente adimensional de la Velocidad terminal de caída en fluido en reposo perpendicular al eje del vórtice.

La coordenada “ x ” así obtenida representa los valores iniciales (x_i) y finales (x_f) de la malla de partículas tomada en la región de captura.

3º) Solución de la ecuación algebraica de la trayectoria límite

Una vez obtenida la ecuación de la trayectoria límite, representada por las ecuaciones (8.44a) –forma dimensional- y (8.44b) –forma adimensional-, hay que resolver cualquiera de dichas ecuaciones para tomar la malla de partículas dentro de la región encerrada por la trayectoria límite. Dado que no es posible resolverlas analíticamente, es necesario hacerlo mediante un proceso iterativo, hallando en cada caso sus soluciones según el valor que tomen los parámetros de que depende el problema planteado.

A continuación, en la Tabla 8-8 se presentan en forma adimensional las soluciones obtenidas para la ecuación (8.44b); es decir, los valores frontera tomados para la coordenada “ x ” (x_i, x_f). A efectos de cálculo es preferible resolver la ecuación (8.44b) porque los programas informáticos que se han elaborado y que se recogen en el Anexo II operan en forma adimensional, si se resolviera la ecuación (8.44a) sería necesario adimensionalizar las soluciones para poder ejecutar los programas informáticos. En concreto, en la Tabla 8-8 se exponen las soluciones en función de la velocidad terminal (V_t) y se representan en la Figura 8-13.

TABLA 8-8. Valores adimensionales Límite para la malla de partículas en la región de captura de un vórtice Rankine, en función de V_i

V_i	Límites para la malla	
	x_l	x_f
...	...	...
0,24	-2,028	5,468
0,22	-2,243	5,994
0,20	-2,497	6,623
0,18	-2,805	7,388
0,16	-3,187	8,340
0,15	-3,414	8,910
0,14	-3,672	9,561
0,13	-3,970	10,310
0,12	-4,315	11,183
0,11	-4,723	12,214
0,10	-5,210	13,450
0,09	-5,804	14,958
0,08	-6,544	16,842
0,07	-7,491	19,263
0,06	-8,758	22,487
0,05	-10,526	27,000
0,04	-13,173	33,763
0,03	-17,581	45,035
0,02	-26,389	65,570
0,008	-66,003	168,953
0,006	-88,007	225,275
...	...	...

En esta Tabla 8-8, no se incluye el valor de $V_i = 0$, ya que según la ecuación (8.13) implicaría que la distancia entre los puntos de equilibrio y por tanto los límites de la malla de partículas (región de captura) tenderían a infinito. Tampoco se incluyen valores muy altos de V_i , puesto que como se verá posteriormente en la Figura 8-17, dichos valores no aportan información de gran interés debido a que la tendencia es a diverger del valor de la constante K_e .

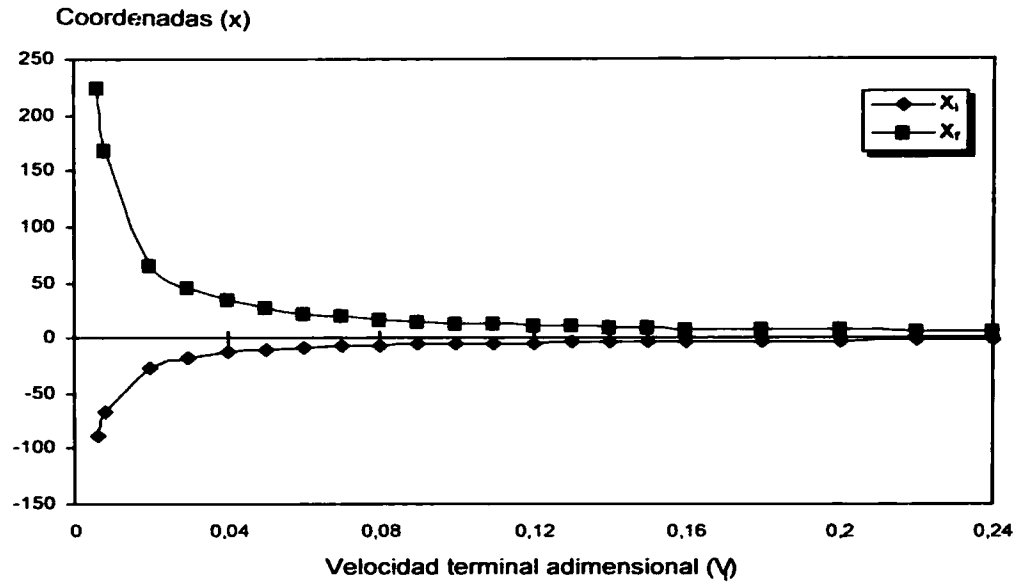


Figura 8-13: Límites de la malla de partículas en la región de captura del vórtice en función de V_t (caso del vórtice Rankine).

En la Tabla 8-9 se muestran los límites de la malla de partículas en función del diámetro de la partícula (d_p^*) y de la circulación del vórtice (Γ^*), con objeto de materializar posteriormente el Tiempo de escape en función de dichas variables físicas, con dimensiones tangibles y reales (Figura 8-19). Por ello, se procede a continuación a explicar someramente el procedimiento seguido:

- De la ecuación (6.43) se obtiene:

$$V_i^* = \tau_p^* g^* = \frac{\beta g^* d_p^{*2}}{18\nu^*} = \frac{\rho_p^* g^* d_p^{*2}}{18\rho^* \nu^*} \quad (8.45)$$

- Para obtener V_t adimensional basta con utilizar las ecuaciones (6.41) y (6.49), quedando:

$$V_t = \frac{V_i^*}{U_0^*} = \frac{\beta g^* d_p^{*2}}{18\nu^* U_0^*} \quad (8.46)$$

- También puede expresarse en función del radio del vórtice (R_v^*) y de la circulación del vórtice (Γ^*) empleando la ecuación (4.55):

$$V_t = \frac{\beta g^* R_v^*}{18 \nu^* \Gamma^*} d_p^{*2} \quad (8.47)$$

- Para cada valor del diámetro de la partícula (d_p^*) y de la circulación del vórtice (Γ^*) considerados se obtiene un valor de la Velocidad terminal adimensional que sustituido en la ecuación (8.44b) y empleando (8.1) para obtener V_t' , permite la resolución iterativa de dicha ecuación.
- Los datos de partida –a modo de ejemplo- son:

$$\begin{aligned} \beta &= \text{relación entre las densidades de la partícula } (\rho_p^*) \text{ y del fluido } (\rho^*) = 1000/1,2. \\ g^* &= \text{aceleración de la gravedad} = 9,8 \text{ m/s}^2. \\ \nu^* &= \text{viscosidad cinemática del fluido} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}. \\ R_v^* &= 0,001 \text{ m}. \end{aligned}$$

En dicha Tabla no se incluyen valores de d_p^* menores que los indicados porque -como se verá más adelante en la Figura 8-19- con los valores tomados se aprecia con suficiente claridad la coincidencia de los resultados numéricos y teóricos; además en el límite de $d_p^* = 0$ -de acuerdo con la ecuación (8.47)- se cumpliría $V_t = 0$ y según la ecuación (8.20) la distancia entre los puntos de equilibrio y por tanto los límites de la malla de partículas (región de captura) tenderían a infinito. Por lo que respecta al otro extremo de la tabla, tomar valores mayores de d_p^* no proporcionarían resultados más relevantes que los ya obtenidos, ya que como se verá posteriormente en la citada Figura 8-19 la tendencia para valores más elevados de d_p^* es a diverger del valor calculado mediante la fórmula (8.33). Además a medida que aumenta d_p^* y por tanto V_t la amplitud de la región de captura se reduce hasta que para un valor suficientemente elevado desaparece. Para un valor concreto de d_p^* , a medida que aumenta

la circulación del vórtice aumenta la distancia entre los límites de la malla de partículas y por tanto aumenta la amplitud de la región de captura. También se observa que, para un valor concreto de Γ^* , la distancia entre los límites de la malla de partículas –y en consecuencia la amplitud de la región de captura- se va reduciendo. Estas observaciones se aprecian con claridad en la Figura 8-14.

TABLA 8-9. Valores adimensionales Límite para la malla de partículas en la región de captura de un vórtice Rankine, en función de d_p^* y Γ^*

d_p^* (μm)	Γ^* (m^2/s)					
	10^{-5}		$3 \cdot 10^{-5}$		10^{-4}	
	x_i	x_f	x_i	x_f	x_i	x_f
6	-4,778	12,355				
7	-3,462	9,031				
8	-2,591	6,860	-8,148	20,929		
9	-1,982	5,357	-6,416	16,516	-21,562	55,220
9,5					-19,348	49,557
10	-1,527	4,265	-5,172	13,355	-17,458	44,721
11	-1,173	3,440	-4,247	11,011	-14,418	36,944
12	-0,882	2,792	-3,539	9,224	-12,108	31,041
13	-0,630	2,264	-2,982	7,827	-10,307	26,440
14	-0,397	1,812	-2,534	6,714	-8,876	22,788
15	-0,159	1,400	-2,168	5,811	-7,720	19,839
16	0,142	0,958	-1,862	5,067		
17			-1,603	4,444	-5,986	15,423
18			-1,379	3,915		
19			-1,183	3,462		
20			-1,008	3,068	-4,284	11,104
21			-0,849	2,721		
22			-0,702	2,411		
23			-0,564	2,131		
24			-0,430	1,874		
25					-2,662	7,031
26			-0,156	1,395		
30					-1,745	4,784
35					-1,151	3,391
40					-0,715	2,438
45					-0,344	1,715
50					0,073	1,051

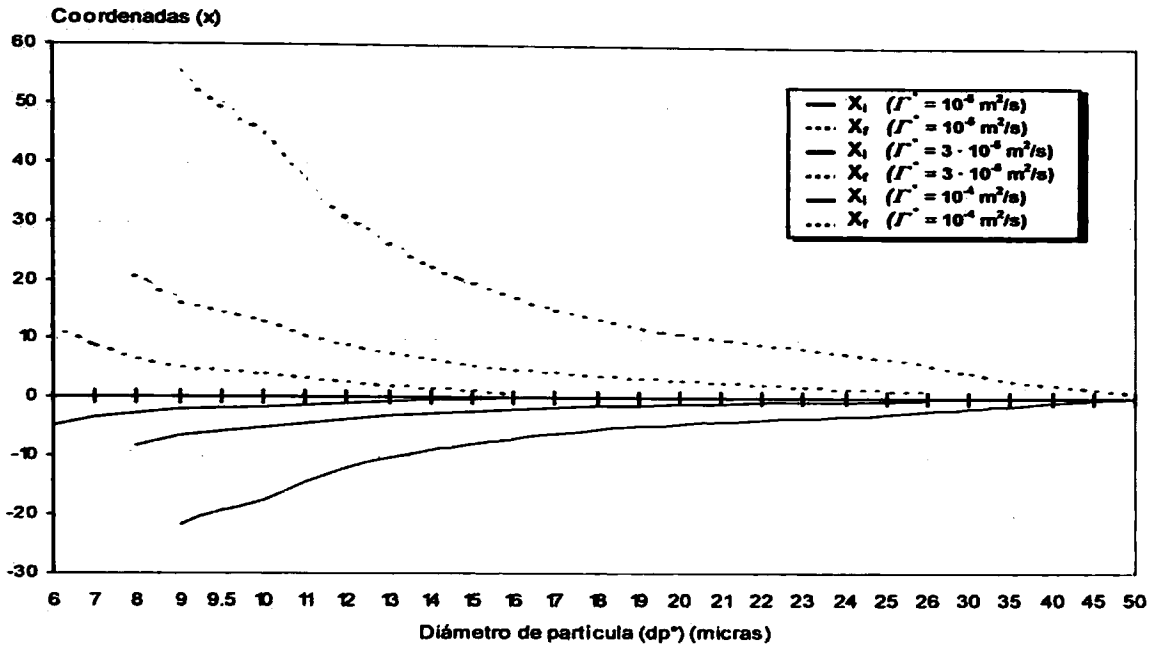


Figura 8-14: Límites de la malla de partículas en la región de captura del vórtice en función de d_p^* y Γ^* (caso del vórtice Rankine).

4º) *Mallado de partículas.*

Una vez calculados los valores límite para la malla de partículas, ésta se obtiene mediante un procedimiento computacional, que se introduce en cada uno de los programas informáticos elaborados –recogidos en el Anexo II-.

Determinación de la Constante de tiempo de escape (K_e)

Para ratificar mediante simulación numérica la validez de la fórmula obtenida para el Tiempo de escape (T_e^*) -ecuación (8.33)-, hay que determinar el valor de la constante K_e que aparece en dicha ecuación:

$$K_e = \frac{T_e^* \tau_p^* V_t^{*4}}{\Gamma^{*2}} \quad (8.48)$$

- Teniendo en cuenta que se ha tomado $\theta = \pi/4$ y que $V_i^{**} = V_i^* \sin \theta$ se tiene:

$$K_e = \frac{T_e^* \tau_p^* V_i^{*4}}{4 \Gamma^{*2}} \quad (8.49)$$

- En la ecuación (8.49) hay que sustituir el Tiempo de escape T_e^* . Este se obtiene numéricamente ejecutando el programa **Kemedia** (Anexo II). Como esta rutina informática realiza los cálculos en forma adimensional, es preciso describir la ecuación (8.49) en términos de variables adimensionales utilizando relaciones que ya han sido expuestas en la Tesis, como las (4.55), (6.46) y (6.49):

$$\begin{aligned} K_e &= \tau_p^* \frac{T_e (R_v^* / U_0^*) V_i^{*4} U_0^{*4}}{4 \Gamma^{*2}} = \tau_p^* \frac{T_e R_v^* V_i^{*4} U_0^{*3}}{4 \Gamma^{*2}} = \\ &\tau_p^* \frac{T_e V_i^{*4} U_0^{*3} (\Gamma^* / U_0^*)}{4 \Gamma^{*2}} = \tau_p^* \frac{U_0^{*2}}{\Gamma^*} \frac{T_e V_i^{*4}}{4} \end{aligned} \quad (8.50)$$

- Considerando la ecuación (6.45) se obtiene:

$$K_e = \frac{S_i T_e V_i^4}{4} \quad (8.51)$$

De este modo, introduciendo en el programa **Kemedia** los valores de los parámetros de partida -ya indicados con anterioridad para otros programas e indicando el número de divisiones de los ejes que determinan la región de captura (M)- y variando V_i y S_i se obtiene numéricamente el valor de T_e que sustituido en la ecuación (8.51) proporciona el valor de K_e .

Conviene destacar que aunque la simulación numérica se podría haber realizado elaborando un programa informático que obtuviera en una única ejecución los resultados correspondientes a todos los valores de los parámetros analizados, se ha optado por elaborar programas que deben ser ejecutados cada

vez que se varía alguno de los parámetros cuya influencia se desea analizar. La razón de hacerlo de este modo es que hay que tener en cuenta que el tiempo que el ordenador tarda en ejecutar estos programas es bastante grande, por lo que en el caso de que hubiera algún error en los mismos o fuera necesario depurarlos se produciría una notable pérdida de tiempo. El tiempo de computación es mayor a medida que la inercia de las partículas es menor. Así, para los menores valores considerados de la inercia de las partículas (y por tanto de su tamaño), dicho período de tiempo llega a prolongarse por más de dos semanas.

A modo orientativo se adjunta la siguiente Tabla 8-10, que muestra los distintos valores de V_i , S_i , T_e , K_e y también el valor de F_p -obtenido mediante la ecuación (6.53)- que recoge la influencia conjunta de V_i y S_i .

TABLA 8-10. Valores de la Constante de tiempo de escape (K_e) y del Tiempo de escape (T_e) en función de V_i , S_i y F_p , caso del vórtice Rankine

			V_t						
			0,006	0,008	0,02	0,03	0,04	0,06	...
S_t	0,1	F_p			0,00004		0,00016	0,00036	
		T_e			9005141,5		576341,8	117602,0	...
		K_e			0,03600		0,03680	0,03810	
	0,3	F_p			0,00012		0,00048	0,00108	
		T_e			3046557,4		200768	42583,1	...
		K_e			0,03650		0,03850	0,04139	
	0,7	F_p			0,00028		0,00112	0,00252	
		T_e			1338884,5		92208,9	20512,2	...
		K_e			0,03740		0,04131	0,04652	
	1	F_p	0,000036	0,000064	0,000400	0,000900	0,001600	0,003600	...
		T_e	111635802	35334369	957245,3	199042,4	67605,4	15471,7	
		K_e	0,03617	0,03618	0,03839	0,04030	0,04326	0,05012	
	3	F_p	0,000108	0,000192	0,001200	0,002700	0,004800	0,010800	...
		T_e	37530245	12040384	348873,4	76997,9	27901,3	7010,6	
		K_e	0,03648	0,03699	0,04186	0,04677	0,05357	0,06814	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	

Fuente: Programa informático "Kemedía" de elaboración propia.

De esta Tabla, se deduce que:

- Para un número de Froude tendiendo a cero ($F_p \rightarrow 0$) y para una Velocidad terminal de caída en fluido en reposo tendiendo a cero ($V_t \rightarrow 0$), la Constante de tiempo de escape tiende al valor 0,036 ($K_e \rightarrow 0,036$), para el caso del vórtice Rankine.
- Nos conduce a las siguientes representaciones:
 - *Constante de tiempo de escape K_e frente al número de Froude de la partícula F_p para diferentes valores del número de Stokes S_t (Figura 8-15 y Figura 8-16).*
 - *Constante de tiempo de escape K_e frente a la Velocidad terminal de caída en fluido en reposo V_t para diferentes valores del número de Stokes S_t (Figura 8-17).*

En la Figura 8-15 se representa: mediante *símbolos*, el valor de K_e obtenido mediante la ecuación (8.51) a partir de los valores calculados numéricamente para el Tiempo de escape; y mediante una *línea recta* de color negro, el valor constante 0,036. Se observa claramente que para valores suficientemente pequeños del número de Froude de la partícula ($F_p < 10^{-3}$), la constante K_e tiende al citado valor 0,036; a medida que dicho parámetro disminuye, la coincidencia entre los resultados numéricos y el valor constante deducido aumenta, esto puede verse en la tendencia en alcanzar la línea recta negra señalada en la gráfica. Para mayores valores del número de Froude de la partícula, el valor de K_e diverge de 0,036 por lo que la ecuación (8.33) que proporciona el Tiempo de escape deja de tener validez. Una posible explicación de este hecho estriba en que cuando las partículas tienen una inercia elevada no son atrapadas por el vórtice.

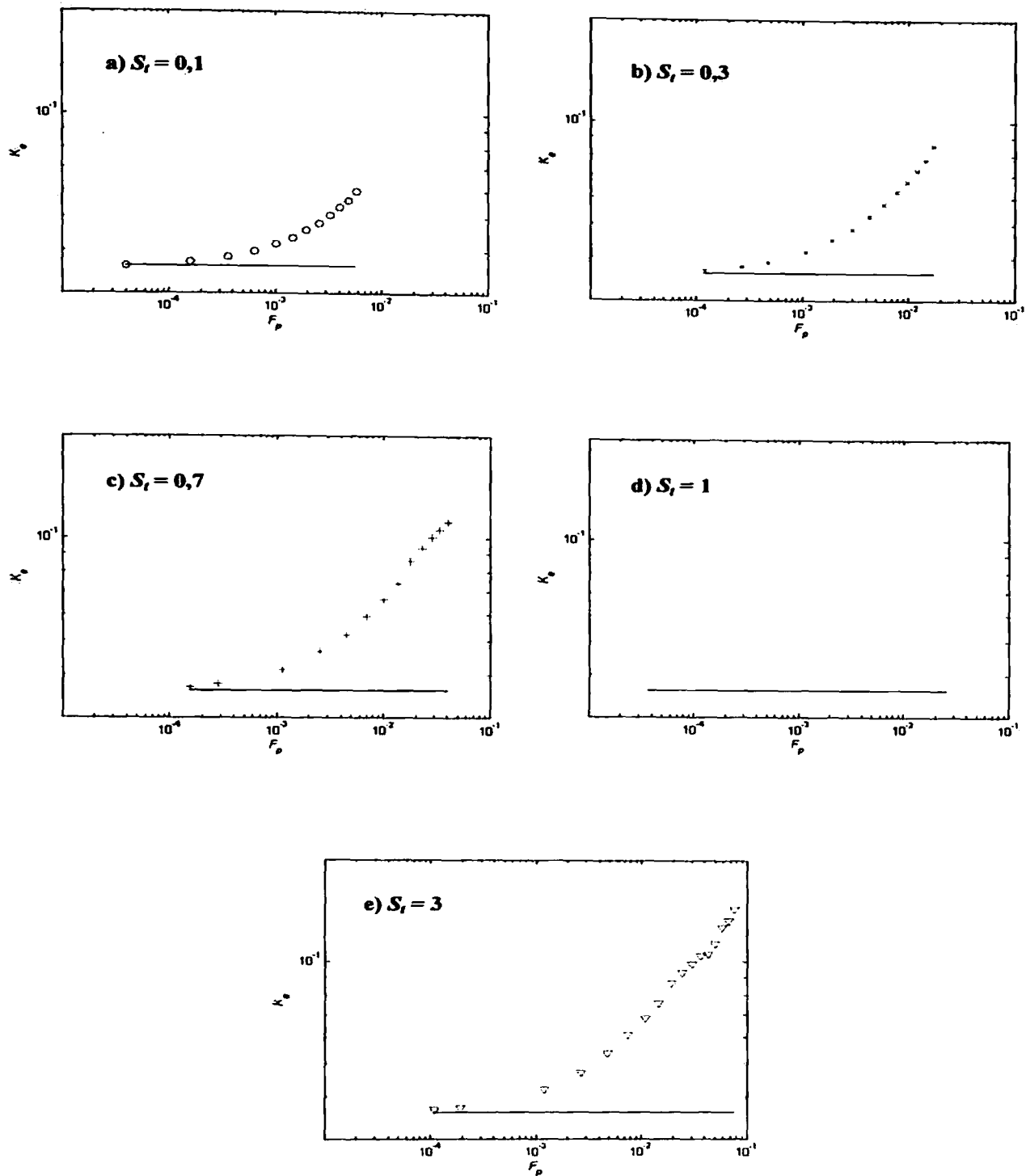


Figura 8-15: Constante de tiempo de escape (K_e) frente al número de Froude de la partícula (F_p) para diferentes números de Stokes (caso del vórtice Rankine).

Al recopilar en una misma gráfica la Constante de tiempo de escape (K_e) frente al número de Froude de la partícula (F_p) para los distintos valores del número de Stokes (Figura 8-16), se observa una característica interesante consistente en que las curvas K_e - F_p prácticamente se superponen. La explicación a este hecho está en que las partículas para ser atrapadas por el vórtice deben tener pequeño tamaño, es decir pequeño diámetro (d_p^*), con lo que la Velocidad terminal (V_t) –según ecuación (8.47)- será también pequeña y por consiguiente la amplitud de la región de captura –según la Figura 8-5 y las ecuaciones (8.13) ó (8.23)- será mucho mayor que el centro del vórtice; en este caso la inercia de las partículas está caracterizada por el número de Froude de la partícula (F_p) y la dependencia de K_e respecto del número de Stokes (S_t) desaparece (apartado 6.4 de la Tesis).

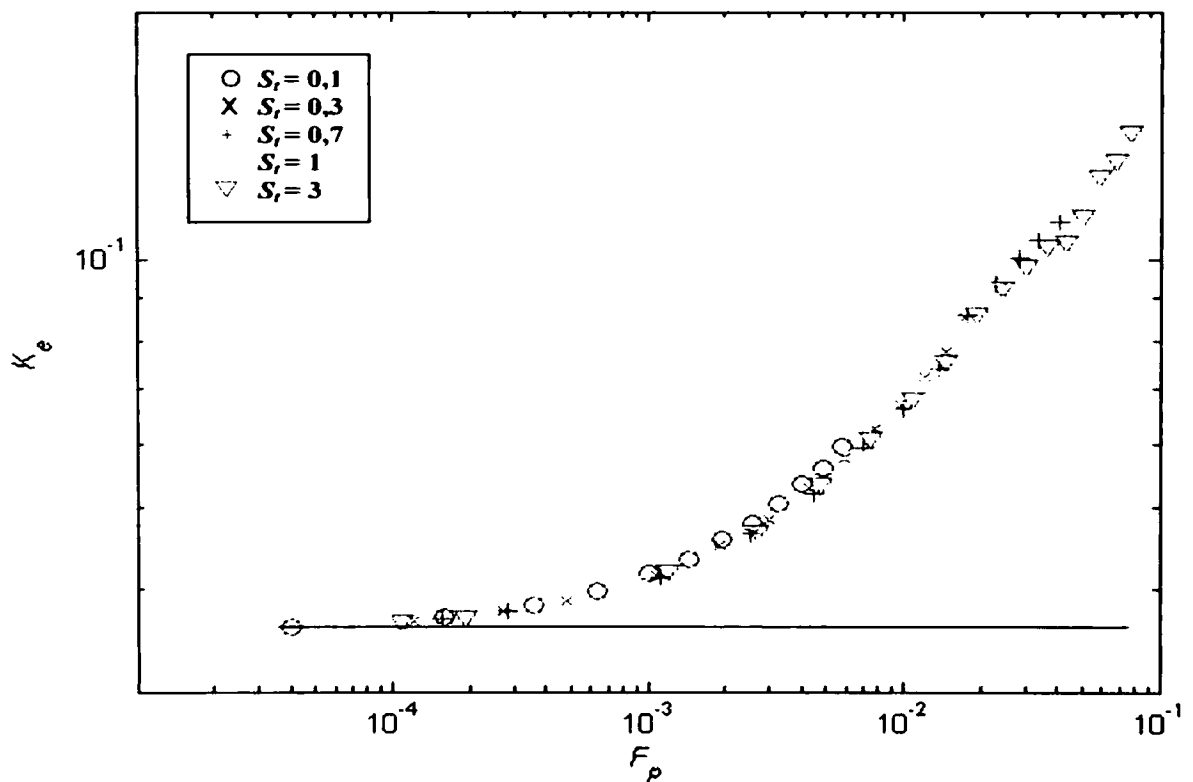


Figura 8-16: Comparación de la Constante de tiempo de escape (K_e) frente al número de Froude de la partícula (F_p) para distintos números de Stokes (caso del vórtice Rankine).

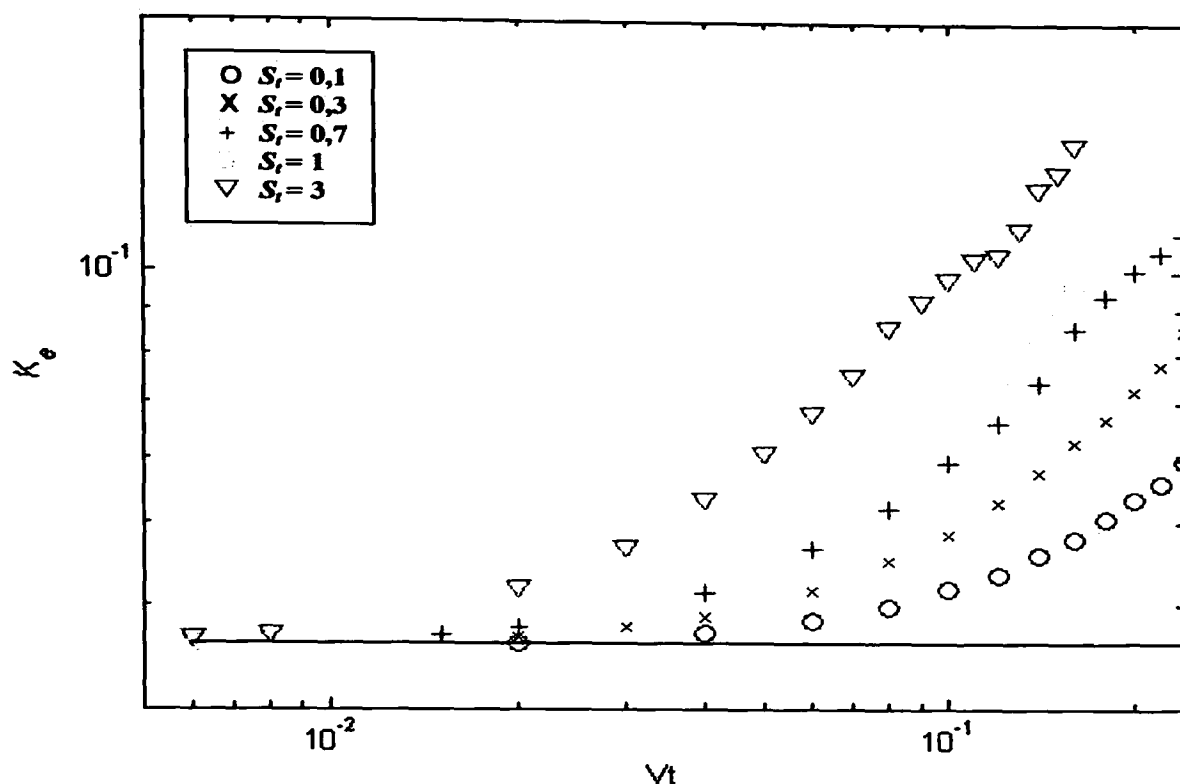


Figura 8-17: Constante de tiempo de escape (K_e) frente a la Velocidad terminal (V_t) para diferentes números de Stokes (caso del vórtice Rankine).

En esta Figura 8-17 se observa la misma tendencia de K_e hacia el valor 0,036 a medida que disminuye la velocidad terminal V_t y también se aprecia que cuanto menor es el número de Stokes (S_t) menor es el valor de K_e , ya que las partículas son más fácilmente atrapadas por el vórtice.

Validez de la Fórmula

Una vez obtenido el valor de la Constante de tiempo de escape (K_e) se procede a corroborar mediante simulación numérica la validez de la Fórmula (8.33) obtenida en esta Tesis para el Tiempo de escape. Aunque esto puede realizarse en términos de magnitudes adimensionales, es recomendable llevarlo a cabo en términos de variables físicas con magnitudes tangibles por su utilidad práctica.

En la Figura 8-18 se verifica la validez de la Fórmula mostrando la dependencia del *Tiempo de Escape* (T_e^*) frente al *diámetro de las partículas* (d_p^*) para distintos valores de la circulación del vórtice (Γ^*) (desde 10^{-5} a 10^{-4} m²/s) y un radio del vórtice $R_v^* = 0,001$ m; estos valores son del orden de magnitud habitual en flujos turbulentos en los que existen tubos delgados con intensa vorticidad con un tiempo de vida promedio del orden de la escala de tiempo integral (Vincent & Meneguzzi, 1994) [10].

Para realizar los cálculos se ha desarrollado el programa *dtmedia* (Anexo II) en el que se introducen como datos de partida -además de los que ya se han indicado al comentar otros programas informáticos elaborados y cuyos valores se han mantenido-: el diámetro de la partícula (d_p^*), la circulación del vórtice (Γ^*) y el radio del mismo (R_v^*) así como los límites para la malla de partículas (x_i, x_f) de acuerdo con la Tabla 8-9. El citado algoritmo informático realiza los cálculos en términos de variables adimensionales, por lo que proporciona como resultado (Tabla 8-11) el valor adimensional del Tiempo de escape promedio ($\langle T_e \rangle$). Este tiempo se transforma en su correspondiente dimensional -utilizando la ecuación (6.49)- del siguiente modo: $T_e^* = T_e (R_v^* / U_0^*) = T_e (R_v^{*2} / \Gamma^*)$.

En la figura se representan: por *símbolos* los resultados obtenidos mediante simulación numérica para el Tiempo de escape y por *líneas sólidas* los resultados teóricos obtenidos mediante la ecuación (8.33) -con $K_e = 0,036$ -. De esta figura se deduce que para un diámetro de partícula lo suficientemente pequeño (≈ 10 μ m), el Tiempo de escape de la partícula obtenido por simulación numérica coincide con el teórico proporcionado por la ecuación (8.33), divergiendo cuando aumenta el diámetro. El mayor valor de d_p^* para cada valor de la circulación del vórtice Γ^* es el valor del diámetro de la partícula cuya velocidad terminal es tal que la región de captura desaparece (Así, puede observarse que en las Tablas 8-8 y 8-9 a medida que crecen la velocidad terminal y el diámetro de la partícula se estrechan los límites de la región de captura).

TABLA 8-11. Valores adimensionales del Tiempo de escape promedio ($\langle T_e \rangle$) de un vórtice Rankine, en función de d_p^* y Γ^*

d_p^* (μm)	$\langle T_e \rangle$		
	$\Gamma^* = 10^{-5} (m^2/s)$	$\Gamma^* = 3 \cdot 10^{-5} (m^2/s)$	$\Gamma^* = 10^{-4} (m^2/s)$
6	937491,4		
7	205064,3		
8	56050,2	1410487,6	
9	18057,5	438784,3	15955241,3
9,5			9307711,4
10	6788,6	155220,9	5580671,3
11	2891,2	60956,1	2164141,4
12	1377,7	26244,3	912798,4
13	733,7	12208,0	413951,5
14	436,1	6103,1	200247,3
15	286,3	2030,9	102204,0
16	221,5	1815,3	
17		1070,8	
18		660,53	
19		425,7	
20		285,1	6815,19
21		196,6	
22		140,8	
23		105,4	
24		78,8	
25			980,514
26		49,13	
30			261,7
35			75,5
40			35,9
45			18,5
50			11,8

Fuente: Programa informático "dimedia" de elaboración propia.

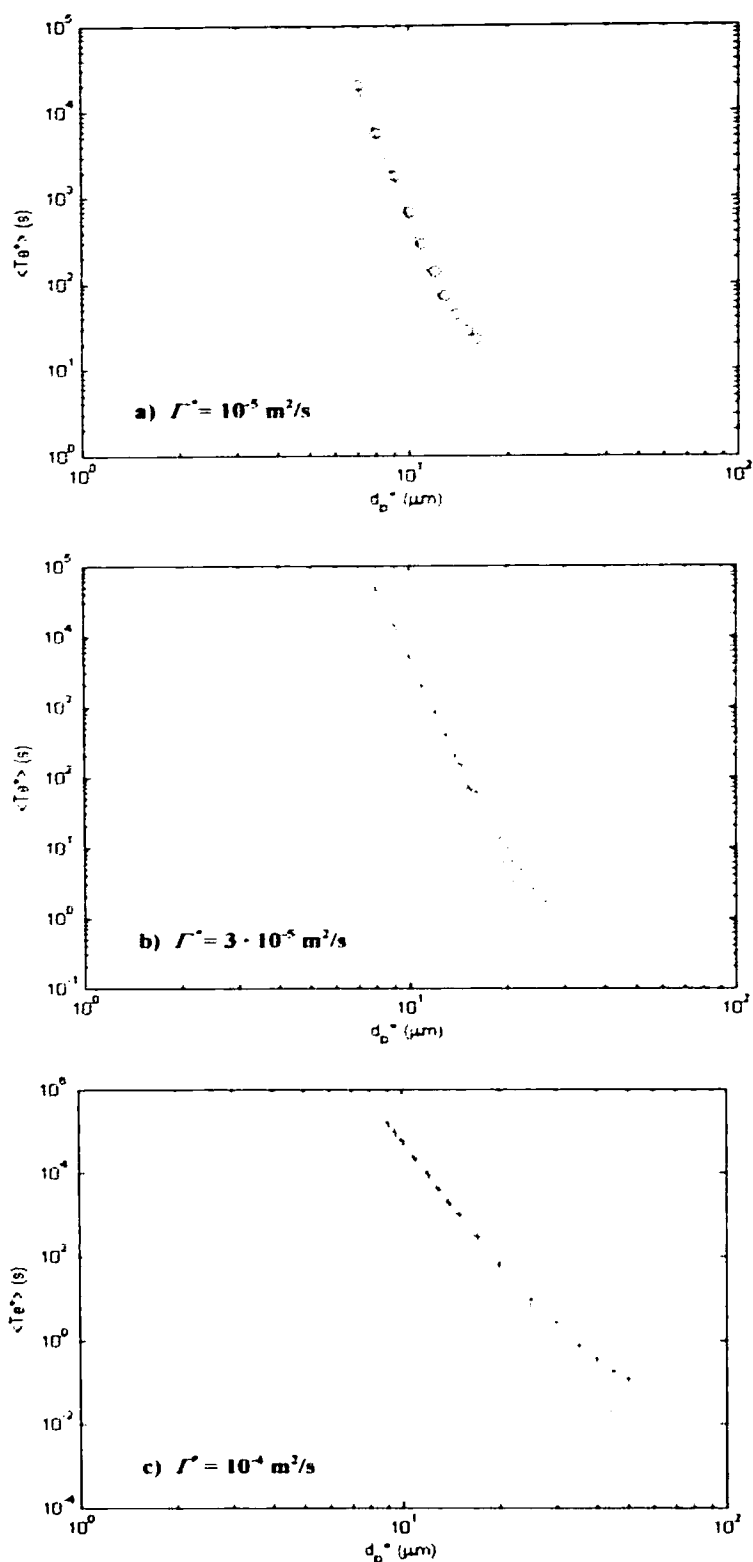


Figura 8-18: Tiempo de escape (T_e^*) frente al diámetro de la partícula (d_p^*) para distintos valores de la circulación del vórtice y radio del vórtice $R_v^*=0,001 \text{ m}$ (caso del vórtice Rankine).

Al recopilar en una misma gráfica el Tiempo de Escape (T_e^*) frente al diámetro de la partícula (d_p^*) para los distintos valores de la circulación del vórtice (Figura 8-19) se observa que a igualdad de tamaño de partícula, el tiempo de escape aumenta con el incremento de la circulación del vórtice, como es lógico esperar.

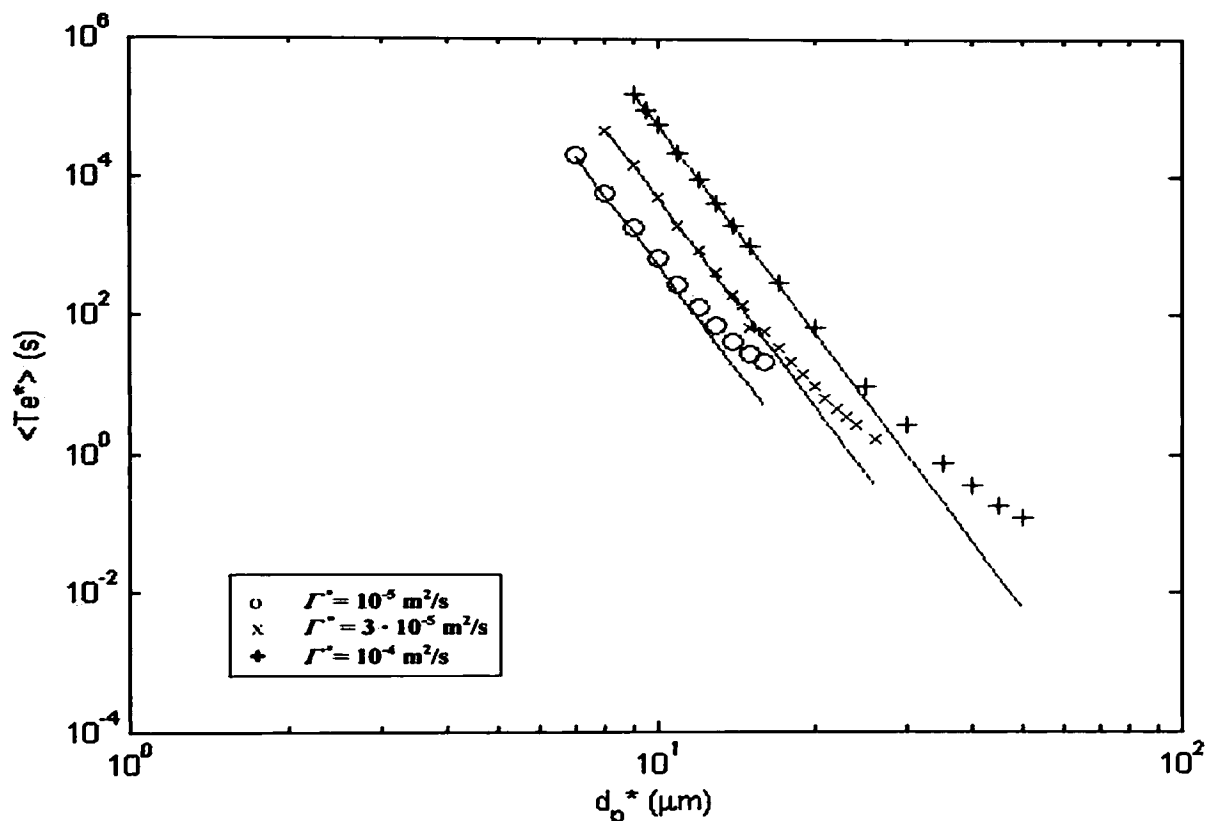


Figura 8-19: Comparación del Tiempo de escape (T_e^*) frente al diámetro de la partícula (d_p^*) para distintos valores de la circulación del vórtice y radio del vórtice $R_v^* = 0,001 \text{ m}$ (caso del vórtice Rankine).

Así pues, la Fórmula (8.33) -desarrollada en esta Tesis Doctoral- para el *Tiempo de escape*, es uno de los resultados más importantes de esta investigación.

8.1.8. Aplicación de la Fórmula del Tiempo de escape a un caso práctico

A continuación se va a exponer una las posibles aplicaciones de la Fórmula (8.33) del Tiempo de escape T_e^* desarrollada en esta Tesis.

Como ejemplo, dicha fórmula puede ser de utilidad para entender el comportamiento de pequeñas partículas pesadas en flujos turbulentos, caracterizados por intensos vórtices con circulación Γ^* del orden de la viscosidad cinemática del fluido ν^* y escala de tiempo integral T_i^* . En concreto, para el problema de la velocidad promedio de sedimentación hay dos teorías:

- Si $T_e^* \gg T_i^*$ casi todas las partículas permanecerán atrapadas dentro de los vórtices. En este caso Maxey (1987) [16] dedujo que la velocidad media de sedimentación es del orden de V_i^* . El justificó este resultado como una consecuencia del efecto de captura y de la ausencia del efecto de cruce de trayectorias para partículas con inercia suficientemente pequeña.
- Si $T_e^* \ll T_i^*$ prácticamente todas las partículas están fuera del vórtice. Dávila & Hunt (2001) [1] sugirieron que debido a la formación de regiones vacías, las partículas con muy poca inercia tienen una velocidad media de sedimentación mucho más grande: del orden de $V_i^* (1 + \alpha^B)$ donde α es un parámetro del orden de la relación entre Γ^*/V_i^* y la distancia entre los vórtices y B es una “integral de barrido” de la longitud de sedimentación diferencial. Por tanto, la velocidad media de sedimentación puede alcanzar valores más elevados que los indicados por la teoría por Maxey.
- Si $T_e^* \sim T_i^*$ esta relación proporciona un valor crítico del diámetro de las partículas que tienen un comportamiento intermedio. Teniendo en cuenta las ecuaciones (6.43) y (8.45), la formulación (8.33) aquí obtenida implica que el Tiempo de escape es

proporcional a d_p^{*-10} . Esta fuerte dependencia del Tiempo de escape con el diámetro de las partículas indica que se produce una súbita transición entre ambas teorías de sedimentación, con importantes consecuencias en el comportamiento de partículas pesadas en flujos turbulentos.

En particular y a modo de ejemplo, en el caso de flujos atmosféricos - concretamente para nubes en la atmósfera, es decir para gotas de agua en el aire- es posible acotar el diámetro crítico de partícula d_{cr}^* para el que se produce la transición entre las dos teorías, utilizando la fórmula (8.33) desarrollada en esta Tesis:

1. Se toman como datos de partida: densidad de las partículas $\rho_p^*=1000$ kg/m³, densidad del fluido $\rho^*=1,2$ kg/m³ (con lo que el valor de β es igual a $1000/1,2 = 833,33$), viscosidad cinemática del fluido $\nu^*=1,5 \cdot 10^{-5}$ m²/s, circulación de los vórtices $\Gamma^*=3 \cdot 10^{-5}$ m²/s y $\Gamma^*=3 \cdot 10^{-4}$ m²/s (valores típicos de circulación que se pueden encontrar en flujos turbulentos en las nubes), escala de tiempo integral T_i^* comprendida entre 10 s y 100 s (Dávila & Hunt, 2001) [1].
2. Se iguala T_i^* a T_e^* , utilizando para T_e^* la Fórmula (8.33) con un valor de la Constante de tiempo de escape $K_e = 0,036$:

$$T_e^* = T_i^* \Rightarrow T_i^* = K_e \Gamma^{*2} / \tau_p^* V_t^{*4} = 0,036 \Gamma^{*2} / \tau_p^* V_t^{*4} \quad (8.52)$$

3. Se sustituye en la expresión anterior el tiempo de respuesta viscosa de las partículas τ_p^* según la ecuación (6.43) y la velocidad terminal de caída en fluido en reposo V_t^* según las ecuaciones (8.1) y (8.45), teniendo en cuenta que el ángulo de inclinación del vórtice es de $\theta=\pi/4$.

$$T_i^* = 0,036 \frac{18^5 v^{*5} \Gamma^{*2}}{\beta^5 g^{*4} \sin^4 \theta d_p^{*10}} = T_c^* \quad (8.53)$$

4. Se sustituyen los valores de partida y se obtiene el diámetro crítico en función de la escala de tiempo integral para los dos valores de circulación:

$$\Gamma^* = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$T_i^* = \frac{3,24 \cdot 10^{-11}}{6,445901359 \cdot 10^{35} d_p^{*10}} \Rightarrow d_p^{*10} = \frac{5,026449863 \cdot 10^{-47}}{T_i^*} \quad (8.54a)$$

$$\Gamma^* = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$T_i^* = \frac{3,24 \cdot 10^{-9}}{6,445901359 \cdot 10^{35} d_p^{*10}} \Rightarrow d_p^{*10} = \frac{5,026449863 \cdot 10^{-45}}{T_i^*} \quad (8.54b)$$

5. Se calcula el diámetro crítico para los dos valores de la escala de tiempo integral:

$$\Gamma^* = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$T_i^* = 10 \text{ s} \Rightarrow d_{cr}^* = 18,62 \mu\text{m}$$

$$T_i^* = 100 \text{ s} \Rightarrow d_{cr}^* = 14,79 \mu\text{m}$$

$$\Gamma^* = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$T_i^* = 10 \text{ s} \Rightarrow d_{cr}^* = 29,52 \mu\text{m}$$

$$T_i^* = 100 \text{ s} \Rightarrow d_{cr}^* = 23,45 \mu\text{m}$$

En la siguiente Figura 8-20 se representa la velocidad media de sedimentación de gotas de agua en aire para las tres opciones citadas con los dos valores de circulación: $T_c^* \gg T_i^*$ (Maxey, *línea continua azul*), $T_c^* \ll T_i^*$ (Dávila & Hunt, *círculos verdes*) y $T_c^* \sim T_i^*$ (transición entre ambas, *cruces rojas*). Al mismo tiempo se representan los valores obtenidos del diámetro crítico (*líneas discontinuas rojas*). Con ello, se demuestra que gracias a la Fórmula (8.33) de la Tesis es posible acotar el diámetro crítico de partícula para el que se produce la transición entre ambas teorías de sedimentación en flujos turbulentos.

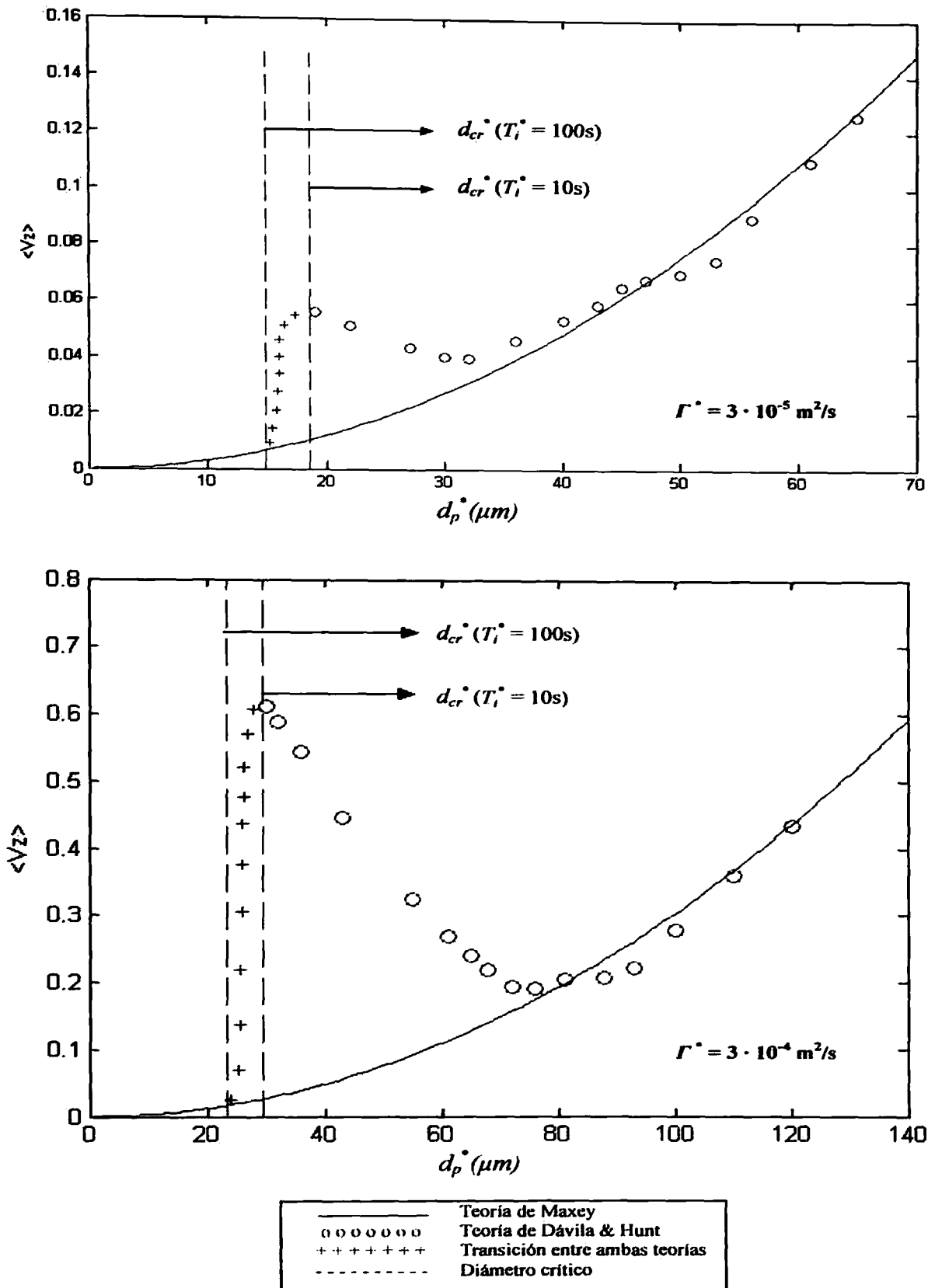


Figura 8-20: Velocidad media de sedimentación ($\langle V_z \rangle$) de gotas de agua en aire frente al diámetro de la partícula (d_p^*).

Como puede observarse:

- En el rango de transición las partículas con tamaños del mismo orden pueden tener velocidades de sedimentación muy diferentes, con lo que se incrementa la posibilidad de colisiones. Este efecto incluso es más fuerte teniendo en cuenta que si el número de Froude de la partícula -ecuación (6.53)- es del orden unidad ($F_p \sim 1$) en el rango de transición, las fuerzas centrífugas sobre las partículas producen considerables fluctuaciones en las velocidades de las partículas cerca del punto de silla (Martín & Meiburg, 1994) [113].
- El valor obtenido para el diámetro crítico de la partícula para circulación Γ^* entre $3 \cdot 10^{-4}$ y $3 \cdot 10^{-5}$ m²/s guarda concordancia con las medidas experimentales llevadas a cabo por Jonas (1996) [123], lo cual viene a corroborar de nuevo la utilidad de la Fórmula (8.33) -desarrollada en esta Tesis- que permite obtener un tamaño crítico de partícula a partir del cual se pueden distinguir dos comportamientos diferentes de pequeñas partículas pesadas en turbulencia homogénea.

8.2. Análisis de la Velocidad media de Sedimentación de partículas de un vórtice tridimensional

La metodología utilizada es la indicada en el diagrama de flujo de la Figura 7-2b de la Tesis. El paso previo es tomar una malla de partículas equidistribuidas en la región de captura del vórtice, encerrada por la trayectoria límite. Para ello se obtiene analíticamente la ecuación de la trayectoria límite y después se resuelve dicha ecuación iterativamente, ya que no es posible su resolución algebraica. A continuación, se calcula la velocidad media de sedimentación numéricamente y se representa gráficamente frente al Tiempo de Escape promedio. A la vista de la representación es posible obtener una relación entre la Velocidad media de sedimentación y el Tiempo de Escape promedio.

8.2.1. Mallado de partículas

Después de desarrollar la Fórmula (8.33) para el Tiempo de escape, de comprobar numéricamente su validez y de constatar su utilidad, se plantea la cuestión de analizar la Velocidad media de sedimentación de partículas pesadas situadas inicialmente en la región de captura del vórtice y de investigar su posible relación con el Tiempo de escape.

El desarrollo de una formulación teórica similar a la expresión (8.33) para la Velocidad media de sedimentación no es fácil de obtener a priori y se saldría en principio fuera de los objetivos inmediatos de esta Tesis. Por eso, la opción más factible es acometer su estudio numérico. Para ello, se ha tomado una malla de 500 partículas equidistribuidas en la región de captura del vórtice, del mismo modo que ya ha sido anteriormente explicado en el apartado 8.1.6 [Figuras 8-12, 8-13 y 8-14; ecuaciones (8.34) a (8.44) y Tablas 8-8 y 8-9].

8.2.2. Cálculo Numérico de la Velocidad media de sedimentación

Este cálculo se realiza mediante el programa informático *inclivel* (recogido en el Anexo II), en el que se introducen como datos de partida el diámetro de la partícula (d_p^*), la circulación del vórtice (Γ^*) y el radio del mismo (R_v^*) así como los límites para la malla de partículas (x_i y x_f) de la Tabla 8-9. Los resultados se recogen en la Tabla 8-12. El programa realiza las operaciones siguientes: para cada una de las N partículas de la malla, guarda su *posición inicial* z_{i0} y su *posición final* z_{it} después de transcurrir un cierto tiempo t . El valor de la velocidad media de sedimentación se obtiene entonces mediante

$$\langle V_z \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{z_{i0} - z_{it}}{t} \quad (8.55)$$

El instante de tiempo final t tiene que ser el suficiente como para que las partículas hayan escapado del vórtice y para que su velocidad haya alcanzado ya

el valor asintótico, por lo que no es posible conocerlo a priori. Para estimarlo (Figura 8-21), se ha tomado un primer valor de t con el que se ha calculado una primera aproximación de $\langle V_z \rangle$, después se ha tomado un segundo valor de t que ha sido el doble del anterior para calcular un nuevo valor de $\langle V_z \rangle$ y así sucesivamente hasta que la diferencia relativa entre dos valores consecutivos de $\langle V_z \rangle$ es menor que una cota preestablecida de 10^{-5} (error relativo del 0,001 %).

TABLA 8-12. Tiempo de escape promedio ($\langle T_e^* \rangle$) Numérico y Teórico (Fórmula) y Velocidad media de sedimentación ($\langle V_z \rangle$) de un vórtice Rankine, en función de d_p^* y Γ^*

d_p^* (μm)	Γ^* (m^2/s)								
	10^{-5}			$3 \cdot 10^{-5}$			10^{-4}		
	$\langle T_e^* \rangle$		$\langle V_z \rangle$	$\langle T_e^* \rangle$		$\langle V_z \rangle$	$\langle T_e^* \rangle$		$\langle V_z \rangle$
	(s)			(s)			(s)		
	Númerico	Fórmula		Númerico	Fórmula		Númerico	Fórmula	
7	20506,4	19852	0,146277						
8	5605,0	5223	0,189599	47016,3	47004	0,063704			
9	1807,5	1608	0,239594	14626	14475	0,080453	159522,4	160830	0,024371
9,5							93077,1	93660	0,027110
10	678,9	561	0,294549	5174	5047	0,099134	55806,7	56080	0,029993
11	298,1	216	0,355159	2032	1946	0,119742	21641,4	21620	0,036189
12	137,8	91	0,423470	875	815	0,142283	9127,9	9060	0,042953
13	73,4	41	0,485523	407	366	0,166745	4139,5	4070	0,050288
14	43,6	19	0,554639	203	174	0,192912	2002,5	1940	0,058192
15	28,39	10	0,650757	68	88	0,217394	1022,0	970	0,066707
16	22,1	5	0,765125	61	46	0,250267			
17				36	25	0,280792	307,3	280	0,085449
18				22	14	0,313784			
19				14	8	0,347742			
20				10	5	0,383102	68,2	50	0,117431
21				7	3	0,419239			
25							9,9	10	0,179951

Fuente: Programa informático "inclinvel" de elaboración propia para $\langle V_z \rangle$
Programa informático "dtmedia" de elaboración propia para $\langle T_e^* \rangle$ numérico.

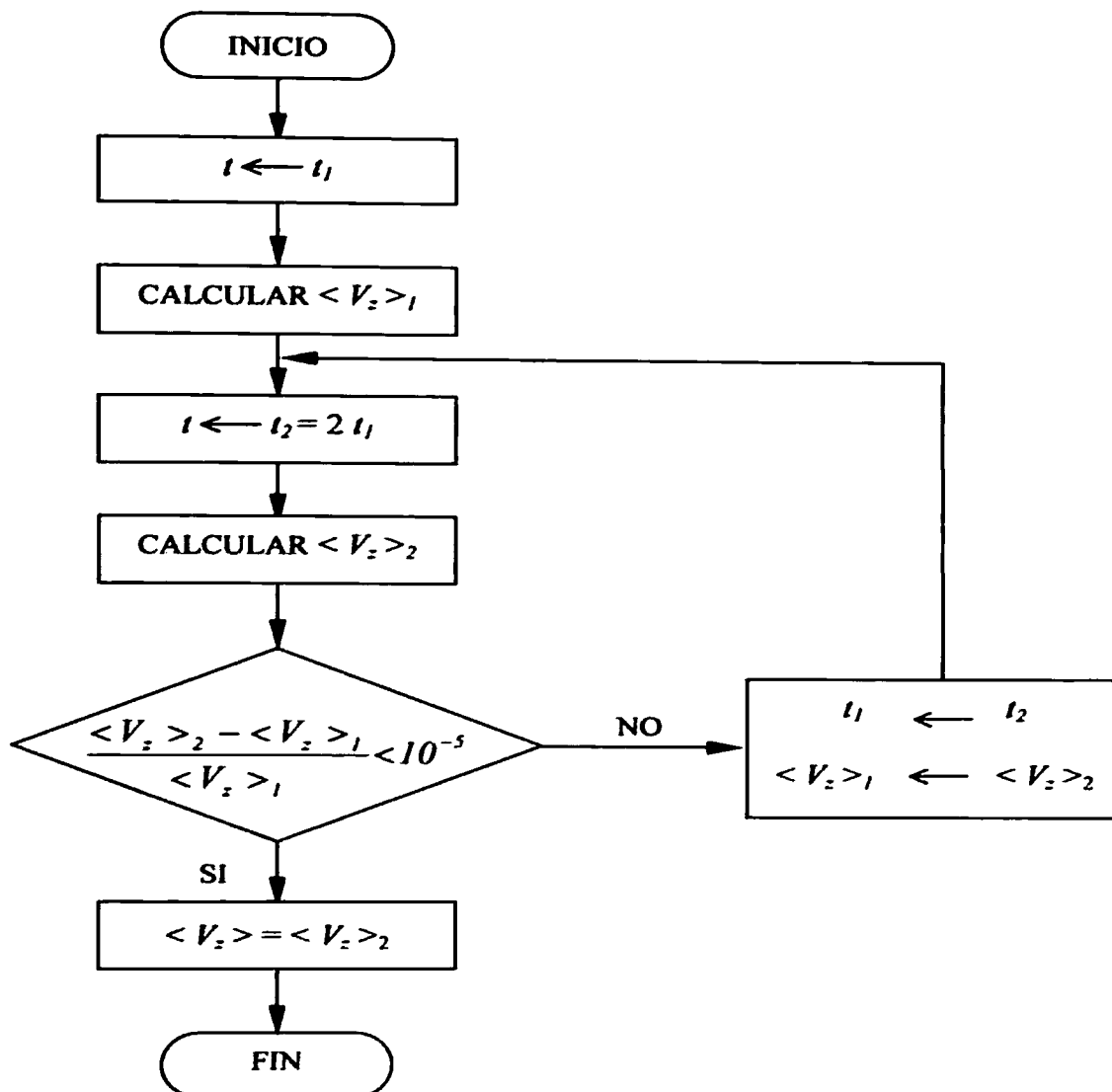


Figura 8-21: Diagrama de flujo de obtención del tiempo de computación (t) para el que la velocidad de las partículas alcance el valor asintótico.

8.2.3. Representación gráfica de la Velocidad media de sedimentación frente al Tiempo de escape promedio

Habiendo obtenido a partir del diámetro de las partículas d_p^* los siguientes parámetros:

- 1) El Tiempo de escape promedio $\langle T_e^* \rangle$ obtenido con la Fórmula (8.33) ó (8.53).
- 2) El Tiempo de escape promedio $\langle T_e^* \rangle$ obtenido mediante Simulación numérica con el programa *dtmedia* (apartado 8.1.6. en la sección Validez de la Fórmula).
- 3) La Velocidad media de sedimentación $\langle V_z \rangle$ obtenida mediante Simulación numérica con el programa *inclivel* (apartado 8.2.2.).

Los resultados se muestran en la Figura 8-22, en la que se representa -para los mismos valores de circulación del vórtice ya considerados en figuras anteriores- la Velocidad media de sedimentación $\langle V_z \rangle$ frente al Tiempo de escape promedio $\langle T_e^* \rangle$, con *líneas continuas* (el obtenido mediante la Fórmula) y con *símbolos* (el obtenido mediante la Simulación numérica).

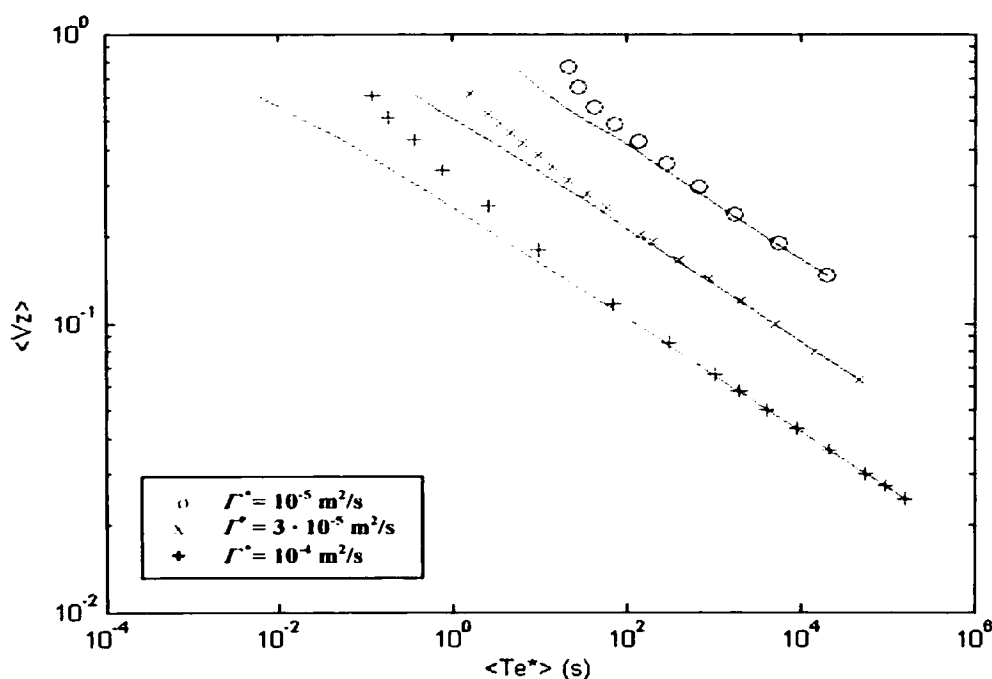


Figura 8-22: Velocidad media de sedimentación $\langle V_z \rangle$ frente al Tiempo de escape promedio $\langle T_e^* \rangle$ (caso del vórtice Rankine).

Pueden observarse nuevamente los dos comportamientos diferenciados para las partículas que ya se han constatado con anterioridad. Para partículas suficientemente pequeñas, es decir, aquellas con un tiempo de escape elevado la curva $\langle V_z \rangle - \langle T_e^* \rangle$ es una línea recta cuando la representación es en escala logarítmica, tanto para el tiempo de escape teórico como para el obtenido numéricamente mientras que para partículas grandes y pesadas se produce una dispersión de los puntos, que ya no están sobre esa recta ni en el caso teórico ni en el numérico.

8.2.4. Obtención de la relación entre la Velocidad media de sedimentación y el Tiempo de escape promedio. Relación numérica

La observación de la Figura 8-22 sugiere la posibilidad de encontrar algún tipo de relación entre la Velocidad media de sedimentación y el Tiempo de escape promedio para partículas suficientemente pequeñas. Para obtener esa relación, se puede establecer algebraicamente la ecuación de las rectas que aparecen con líneas continuas en dicha figura.

Por ejemplo, tomando dos puntos de la línea continua azul (vórtice Rankine con circulación $\Gamma^* = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$) y teniendo en cuenta que dicha gráfica está en escala logarítmica, la ecuación de la recta sería:

$$\frac{\log \langle V_z \rangle - \log 0,189599}{\log 0,146277 - \log 0,189599} = \frac{\log \langle T_e^* \rangle - \log 5223}{\log 19852 - \log 5223} \quad (8.56)$$

Realizando esta misma operación para los tres valores de la circulación considerados en la figura, se obtiene en cada caso una relación tipo donde aparece una constante K_s (constante de sedimentación) que depende del valor de la circulación del vórtice. Los valores obtenidos para dicha constante son 1,000354097; 0,537110195 y 0,25859312 para $\Gamma^* = 10^{-5}$, $3 \cdot 10^{-5}$ y $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ respectivamente. La relación es:

$$\langle V_z \rangle = \frac{K_s}{\langle T_e^* \rangle^{0.19}} \approx K_s \langle T_e^* \rangle^{-1/5} \quad (8.57)$$

Se deduce por tanto que la velocidad media de sedimentación (adimensional) de pequeñas partículas pesadas situadas inicialmente en la región de captura de un vórtice tridimensional es del orden de $\langle T_e^* \rangle^{-1/5}$; es decir es proporcional al inverso de la raíz quinta del Tiempo de escape promedio.

Haciendo uso de la ecuación (6.49) es posible escribir la ecuación (8.57) en forma dimensional para $\langle V_z^* \rangle$:

$$\frac{\langle V_z^* \rangle}{U_0^*} = \frac{K_s}{\langle T_e^* \rangle^{0.19}} \Rightarrow \langle V_z^* \rangle = \frac{K_s U_0^*}{\langle T_e^* \rangle^{0.19}} \Rightarrow \langle V_z^* \rangle = \frac{K_s \Gamma^*}{R_v^* \langle T_e^* \rangle^{0.19}} \quad (8.58)$$

8.3. Análisis de la sedimentación de partículas en vórtices bidimensionales periódicos

Se ha seguido el procedimiento descrito en el diagrama de flujo de la Figura 7-3 de la Tesis:

- Se ha desarrollado un algoritmo informático que simula la existencia de vórtices girando –tanto con en el mismo sentido de giro como con sentidos de giro alternados- repetidos periódicamente.
- Se han analizado las trayectorias de las partículas.
- Se ha investigado el incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo.
- Se ha llevado a cabo un análisis de la influencia de la inercia de las partículas.
- Por último, se ha planteado la posibilidad de aplicar el modelo de flujo aquí investigado en el desarrollo de un modelo Lagrangiano de sedimentación y dispersión de partículas en flujos turbulentos.

8.3.1. Simulación de vórtices girando en el mismo sentido

El algoritmo informático implementado simula vórtices bidimensionales que se repiten periódicamente en las direcciones horizontal y vertical, girando todos ellos en el mismo sentido. Se ha elegido -como ejemplo para el estudio- el sentido “*antireloj*” (Figura 8-23). Dicho algoritmo se recoge en el Anexo II dentro de cada uno de los programas elaborados cuando es necesario su empleo.

El radio de los vórtices se toma mucho menor que la distancia entre vórtices, a fin de minimizar las posibles interacciones entre los campos de flujo de cada uno de ellos. Dicha separación entre vórtices (L_v) es constante, es la misma en las direcciones “ $0x$ ” y “ $0y$ ” y es 10 veces mayor que el radio de los mismos.

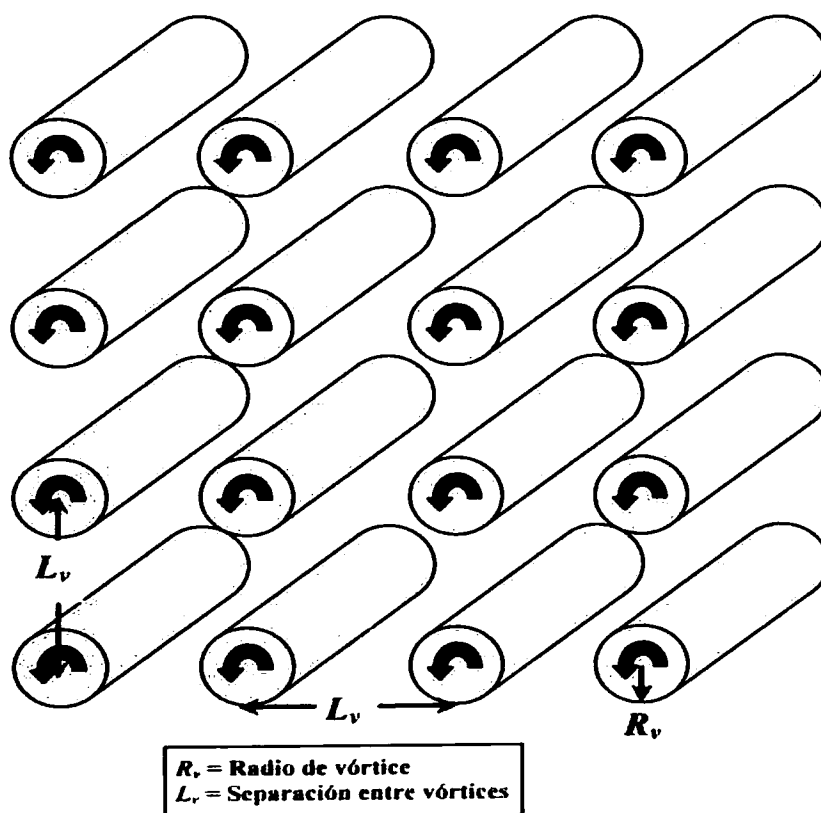


Figura 8-23: Representación esquemática de la disposición bidimensional de vórtices girando en el mismo sentido.

8.3.1.1. Análisis de trayectorias de partículas

Partículas sin inercia

Las trayectorias se obtienen de manera similar a la descrita en el apartado 8.1.1.; la diferencia estriba en que ha sido necesario desarrollar, para simular los vórtices girando en el mismo sentido, un nuevo programa informático de elaboración propia *trahormuchos_s_i* (trayectorias de partículas sin inercia) cuyo listado se recoge en el Anexo II.

En el caso del programa *trahormuchos_s_i*, los datos de partida son:

V_t	=	velocidad terminal adimensional de caída en fluido en reposo.
L_x	=	distancia horizontal entre los vórtices = 10.
L_y	=	distancia vertical entre los vórtices = 10.
h_{ini}	=	paso de integración inicial para el método de Runge-Kutta = 0,1.
δ	=	error máximo en la integración numérica = 10^{-7} .
$Y[]$	=	posiciones iniciales de las partículas (bidimensional) = x_0, y_0 .
t_{fin}	=	instante de tiempo final para la integración numérica.

A continuación, se ejecuta el citado programa, obteniéndose como resultado para cada partícula los valores de “x, y” que definen su posición en cada instante de tiempo (t) posterior (Tabla 8-13).

La representación gráfica de los valores obtenidos proporciona las trayectorias de las partículas sin inercia (Figura 8-24). Dicha representación se lleva a cabo con el programa Matlab. El hecho más evidente de esta figura es la posibilidad de suspensión permanente, con partículas describiendo órbitas cerradas. Esto también se produce en otros campos de flujo -que ya han sido mencionados en esta Tesis Doctoral-, como son los de Stommel (1949) [13] y los de Maxey & Corrsin (1986) [12]. La existencia de estas trayectorias cerradas implica la presencia de puntos de equilibrio en los que la velocidad local del flujo es igual y opuesta a la velocidad terminal de caída, de modo que cualquier partícula soltada en uno de estos puntos de equilibrio permanecerá en él.

TABLA 8-13. Posiciones de las partículas (sin inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos girando en el mismo sentido, caso del vórtice Rankine

x_0	y_0	t	x	y
1,5	90	0,10000	1,499638	90,016374
		0,60000	1,486836	90,098808
		1,40391	1,424691	90,237294
		2,22357	1,293738	90,393732
		...	...	...
1,75	90	0,10000	1,749887	90,006958
		0,60000	1,745906	90,041941
		1,85192	1,625513	90,134813
		3,11311	1,500199	90,246112
		...	...	...
5	104	0,00092	4,999911	103,999631
		0,00175	4,999829	103,999317
		0,00591	4,999423	103,997724
		0,02672	4,997394	103,989881
		...	...	...
7,5	104	0,10000	7,482007	103,938627
		0,60000	7,391504	103,627261
		2,08758	7,124589	102,648546
		3,00000	6,975020	102,001945
		...	...	...
10	104	0,10000	9,974859	103,949920
		0,60000	9,844227	103,696803
		1,61037	9,552220	103,165536
		2,40805	9,291534	102,715029
		...	...	...
12,5	104	0,10000	12,481956	103,961292
		0,60000	12,389402	103,769628
		2,74724	11,937852	102,987065
		3,00000	11,877427	102,899851
		...	...	...
...	...	...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...

Fuente: Programa informático "trahormuchos_s_i" de elaboración propia.

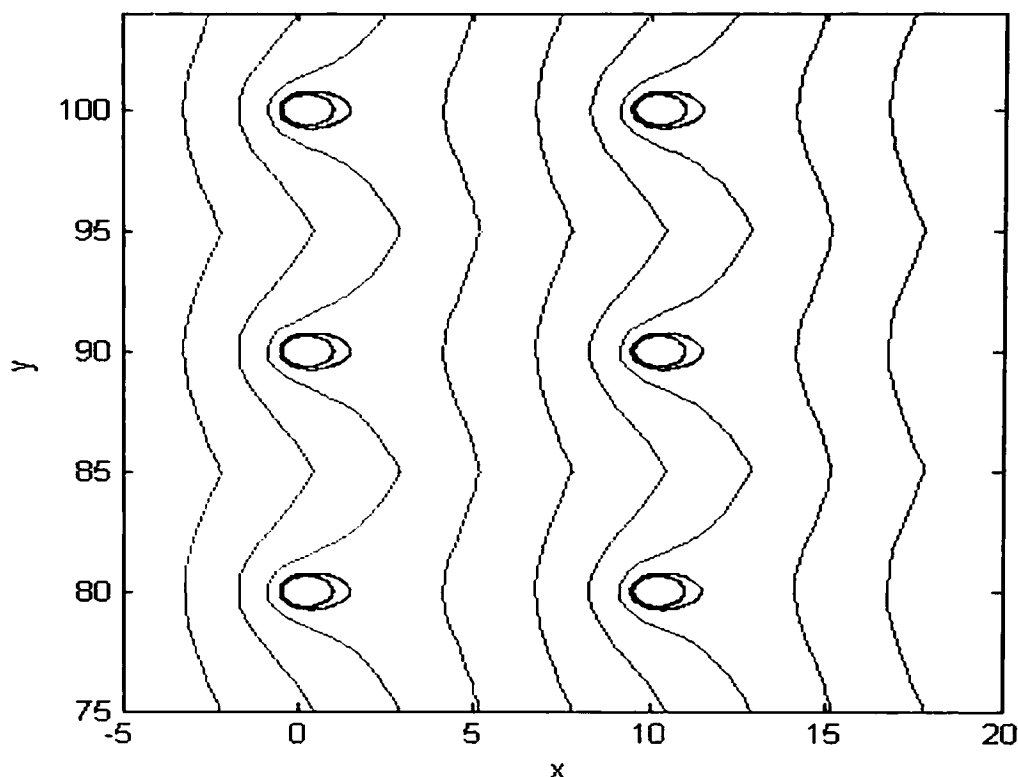


Figura 8-24: Trayectorias (adimensionales) de partículas sin inercia ($S_t = 0$) con vórtices girando en el mismo sentido, para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_t = 0,5$ (caso del Vórtice Rankine).

Partículas con inercia

Nuevamente las trayectorias se obtienen de manera análoga a la descrita en el apartado 8.1.1.; en este caso se ha desarrollado, para simular los vórtices girando en el mismo sentido, el programa informático *trahormuchos* (trayectorias de partículas con inercia) –también de elaboración propia– cuyo listado se recoge en el Anexo II.

Los datos de partida son idénticos a los del programa *trahormuchos_s_i*, con la salvedad de que hay que introducir el número de Stokes (S_t) y especificar las velocidades iniciales de las partículas (que son calculadas por el propio programa).

La ejecución del programa proporciona para cada partícula los valores de “x, y” que definen su posición en cada instante de tiempo (t) posterior (Tabla 8-14).

TABLA 8-14. Posiciones de las partículas (con inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos girando en el mismo sentido, caso del vórtice Rankine

x_0	y_0	t	x	y
1,5	0	0,10000	1,500002	-0,049834
		0,60000	1,500387	-0,294124
		1,58514	1,506519	-0,753595
		2,55985	1,524290	-1,185151
		...	...	...
3,5	0	0,10000	3,500000	-0,049929
		0,60000	3,500072	-0,294124
		2,44127	3,504557	-0,753595
		4,00000	3,518486	-1,185151
		...	...	...
5	0	0,10000	5,000000	-0,050050
		0,60000	5,000036	-0,301780
		3,03217	5,004415	-1,559123
		4,00000	5,009858	-2,072897
		...	...	...
6,5	0	0,10000	6,500000	-0,050071
		0,60000	6,500073	-0,302541
		2,43533	6,504670	-1,257509
		4,00000	6,519341	-2,101396
		...	...	...
8,5	0	0,10000	8,500002	-0,050166
		0,60000	8,500394	-0,305875
		1,54134	8,506286	-0,807485
		2,53110	8,524913	-1,357226
		...	...	...
11,5	0	0,10000	11,500002	-0,049834
		0,60000	11,500387	-0,294124
		1,58514	11,506519	-0,753595
		2,55985	11,524290	-1,485151
		...	...	...
...	...	...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...

Fuente: Programa informático “*trahormuchos*” de elaboración propia.

En la Figura 8-25 pueden observarse las trayectorias descritas por las partículas para diferentes valores de su inercia, es decir, para diferentes valores del número de Stokes ($St = 10, 20, 50, 80$) siendo soltadas todas las partículas en la misma ordenada:

- Contrariamente al caso de partículas sin inercia, en ninguna de estas trayectorias se aprecia una órbita cerrada correspondiente a una partícula atrapada, lo cual se debe a la acción de la fuerza inercial centrífuga que hace que las partículas escapen en espiral como ya se ha mencionado.
- No obstante, en dicha figura puede observarse que hay una característica de las trayectorias de las partículas aún más obvia e incluso hasta cierto punto sorprendente: para un tiempo suficientemente grande todas las partículas -independientemente de su abscisa inicial- acaban oscilando alrededor de la línea media vertical situada entre dos líneas verticales de vórtices.
- A medida que aumenta el número de Stokes, la inercia de las partículas es mayor y la amplitud de las oscilaciones es más pequeña, como era lógico esperar, ya que las partículas se verán menos afectadas por el campo de flujo.
- Además, ocurre algo similar a lo observado por Wang & Maxey (1993) [9] para un flujo turbulento isótropo y homogéneo generado mediante el método de simulación numérica directa (DNS): las partículas se agrupan en el “canal” que se forma entre dos regiones vecinas de vorticidad; la *inclinación inercial* (es decir, la interacción de las partículas con las estructuras locales espaciales del flujo, concepto designado como *inertial bias* en inglés) hace que la partícula no se desplace a lo largo de una línea de corriente del flujo sino que se mueva a lo largo de la periferia de la estructura vortical, tendiendo a zonas de baja vorticidad y baja tensión de flujo.

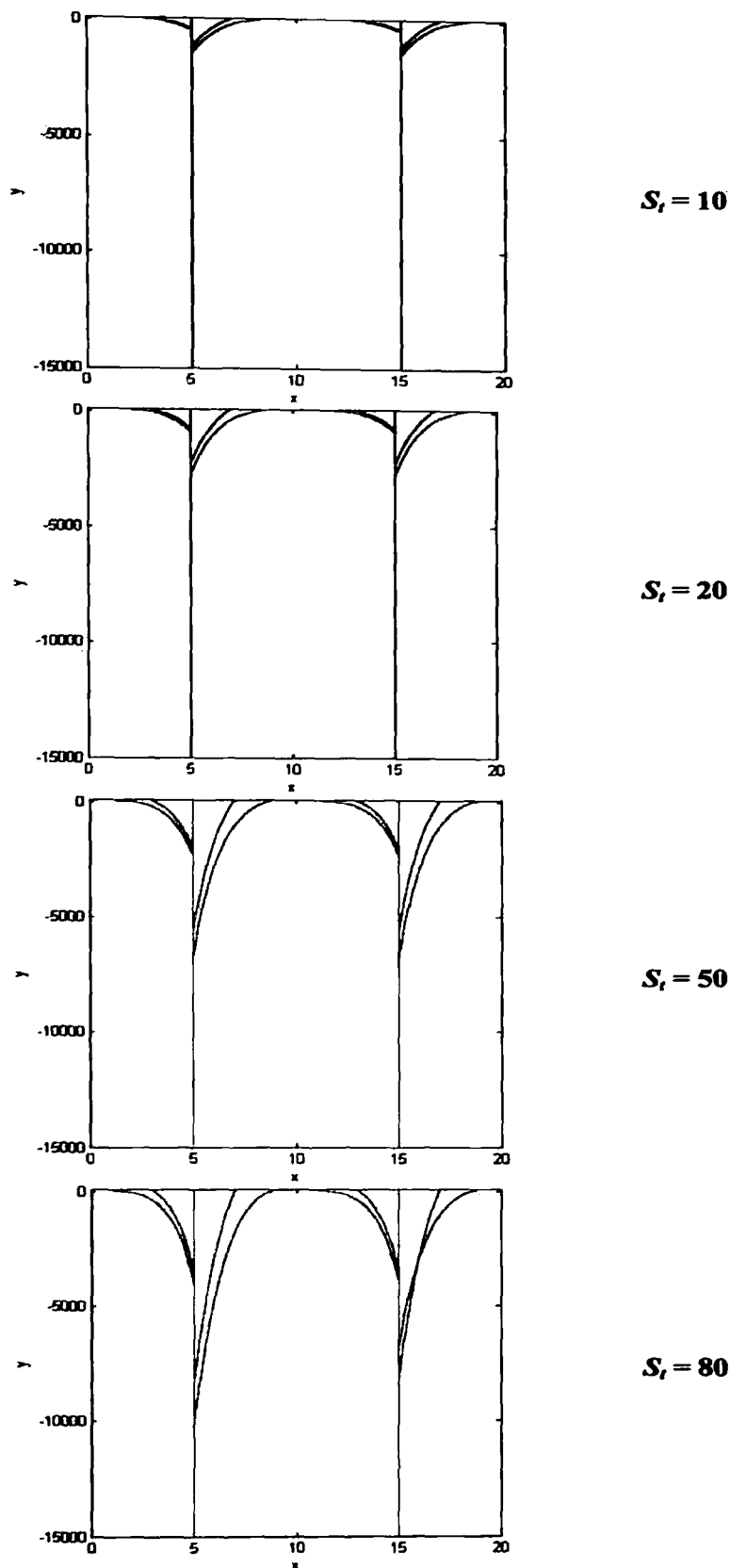


Figura 8-25: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia moderada ($S_t = 10$ a 80) para vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Rankine).

En la Figura 8-26 se muestra un comportamiento diferente de las trayectorias descritas por las partículas para valores del número de Stokes más elevados ($S_t = 130, 165, 200$ y 235) siendo este comportamiento sorprendente e inesperado:

- Ahora, las partículas no terminan oscilando en la zona central entre dos hileras verticales de vórtices, sino que hay unas curvas aisladas bien definidas que limitan unas franjas de baja vorticidad del flujo en las cuales no pueden entrar las partículas que inicialmente estaban fuera de ellas.
- Las partículas que fueron soltadas inicialmente dentro de alguna de estas franjas caen casi verticalmente, por la sencilla razón de que el efecto de la vorticidad en estas zonas es muy poco importante.
- Se forman en las zonas cercanas a cada hilera vertical de vórtices una región vacía, en la que al cabo del tiempo no va a encontrarse ninguna partícula.
- Así, en la figura se distinguen dos tipos de zonas: las *franjas de baja vorticidad* y las *regiones vacías*, ambas separadas por las curvas antes mencionadas, que corresponden a segmentos de las trayectorias asintóticas finales de las partículas (Maxey & Corrsin, 1986) [12].
- También se deduce de la figura que a medida que aumenta la inercia de las partículas, mayor es la anchura de las franjas donde la influencia de la vorticidad es poco importante hasta que para un valor del número de Stokes muy elevado, la inercia de las partículas es tan grande que prácticamente no se ven afectadas por la vorticidad y por el campo de flujo del fluido; al mismo tiempo la anchura de las regiones vacías va siendo menor. Todo ello se aprecia también con claridad en la Figura 8-27, en las que aparece la abscisa de las partículas frente al tiempo para diferentes inercias de las mismas.

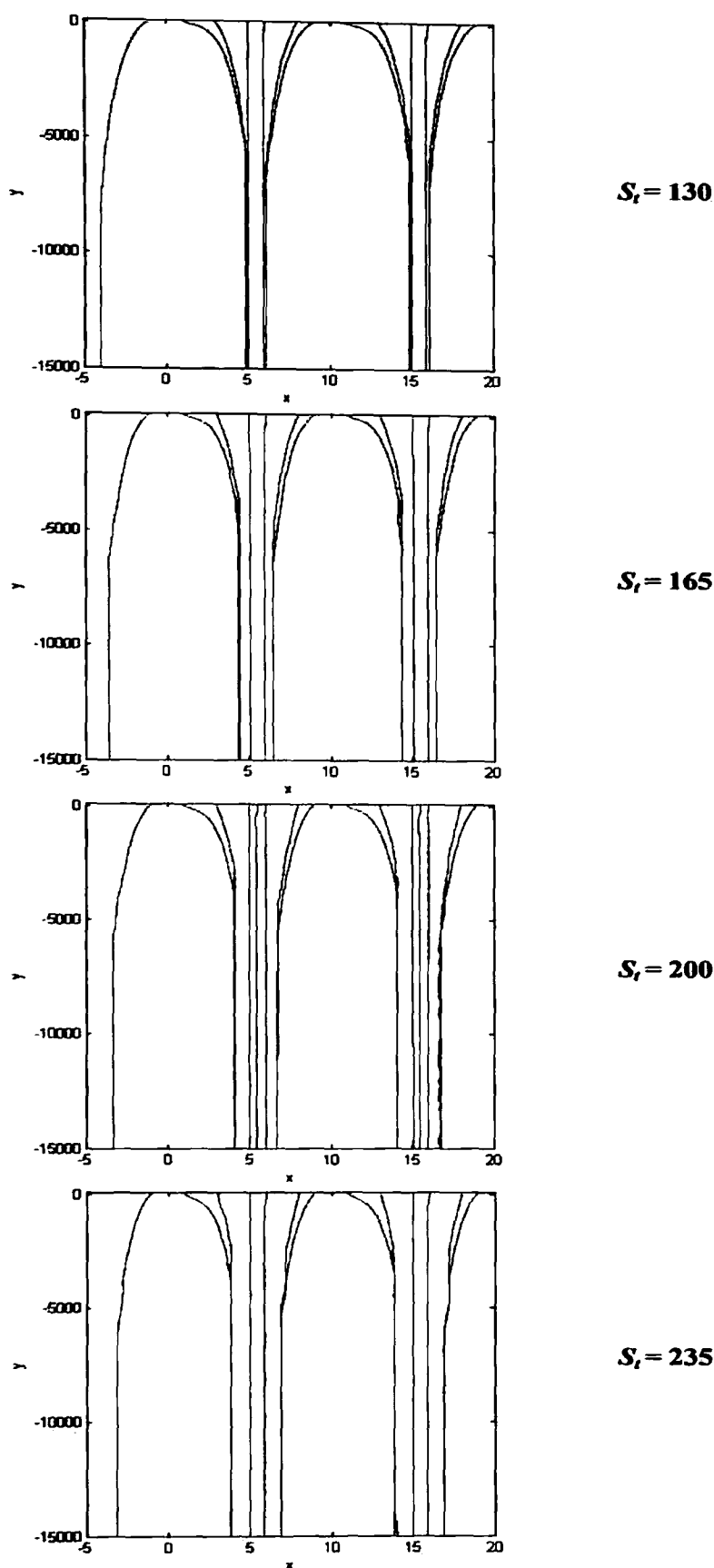


Figura 8-26: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia fuerte ($S_t = 130$ a 235) para vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Rankine).

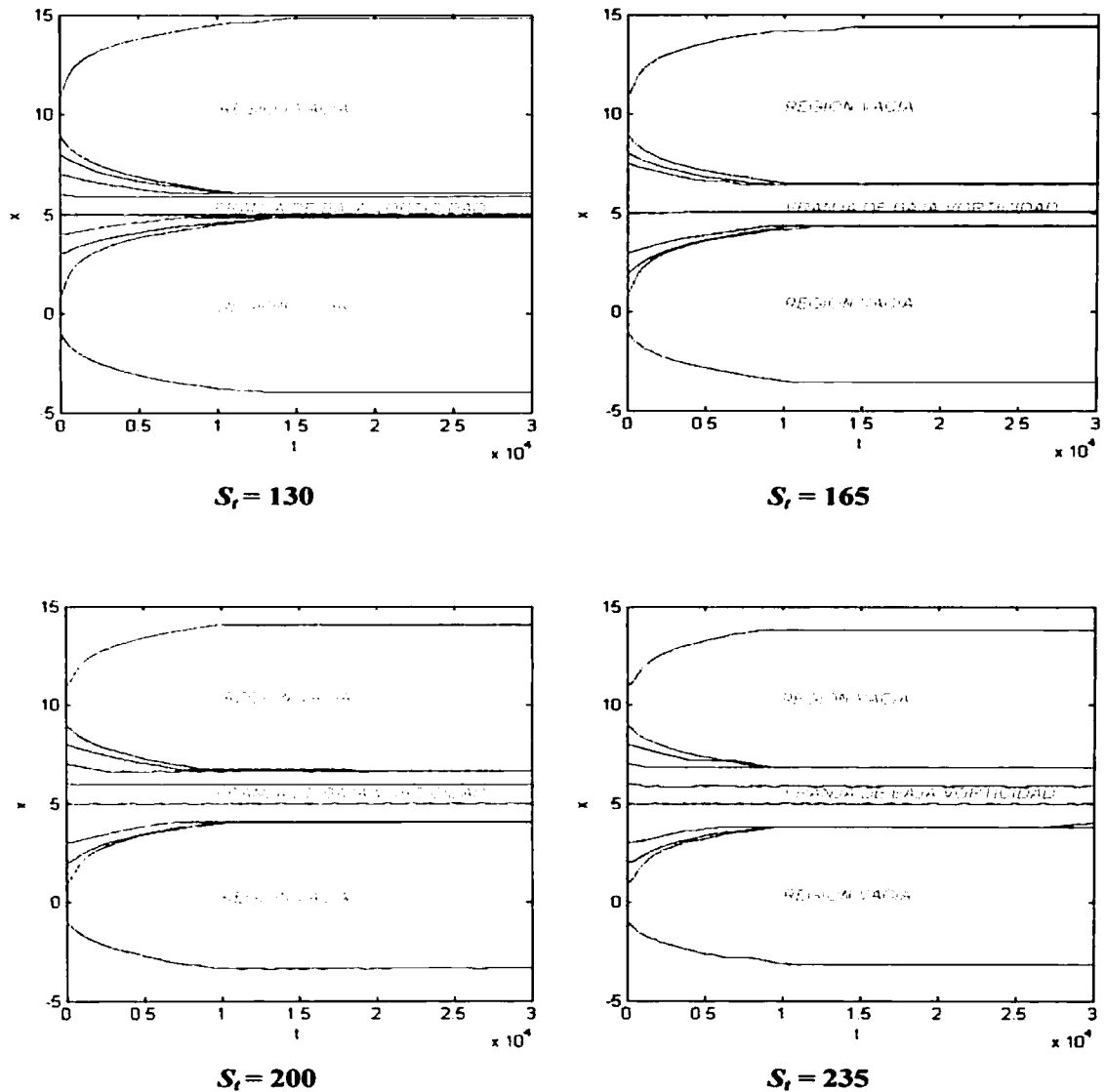


Figura 8-27: Evolución (adimensional) de la abscisa de partículas con inercia fuerte ($S_t = 130$ a 235) para vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Rankine).

A modo de resumen sobre las trayectorias, se puede decir que:

1. Para números de Stokes muy pequeños, partículas con muy poca inercia, éstas estarán muy afectadas por el campo de velocidad del fluido circundante, las *franjas de baja vorticidad* serán muy estrechas (llegarán a aparecer como unas líneas gruesas) y las *regiones vacías* serán muy anchas (prácticamente todo el espacio entre dos líneas verticales situadas a lo largo de los puntos medios entre dos líneas verticales de vórtices).
2. Para números de Stokes muy elevados, las partículas tendrán mucha inercia y el efecto que el campo de flujo ejercerá sobre ellas será muy leve, por lo que ocurrirá justamente lo contrario: las *regiones vacías* serán muy estrechas (prácticamente desaparecerán) y las *franjas de baja vorticidad* del flujo serán muy anchas (prácticamente todo el espacio y las partículas seguirán trayectorias casi verticales).
3. La consecuencia que se extrae de estos resultados puede ser de gran importancia en procesos industriales que requieran la separación de partículas de diferentes características y diferentes inercias, o que requieran la separación de partículas de un fluido. Esto sugiere la posibilidad de construcción de algún dispositivo que materialice la disposición bidimensional de los vórtices girando en el mismo sentido, de modo que se conozca la abscisa a la que irán a parar las partículas que se quieran separar.
4. Los resultados obtenidos en esta investigación proporcionan además una posible alternativa no sólo como método de separación de partículas de un fluido sino también como método de clasificación de las mismas. Hay que tener en cuenta que la presencia de flujos multifásicos dispersos es muy común en el entorno medioambiental y en muchos procesos industriales. Por citar algunos ejemplos se podría mencionar la minería (Parra et al., 2003) [124], el polvo resultante de la erosión, los residuos de las combustiones, procesos de ingeniería química (Santos García) [125], etc.

Por tanto los procesos de separación de partículas sólidas de un fluido y su clasificación constituyen en la actualidad un importante campo de investigación (Frank et al., 1999) [126]. En este sentido, algunos métodos usuales incluyen la supresión de la producción de polvo, aceleración de la sedimentación de las partículas, ventilación (Dawson, 1990) [127] o bien el empleo de filtros, precipitadores electrostáticos (Veenhuizen et al., 1990) [128] y ciclones (Frank et al., 1998) [129], Ogawa et al., 1993) [130]. También se han realizado estudios numéricos, como los de Frank et al. (1997) [131] o los de Cristea et al. (1996)[132]. A continuación se exponen dos ejemplos de posibles aplicaciones prácticas de estos resultados obtenidos.

Ejemplo 1

Se desea en una instalación de un campo de vorticidad periódico con vórtices Rankine girando en el mismo sentido, obtener el diámetro de las partículas (d_p^*) que pueden separarse en función del radio (R_v^*) o de la circulación (Γ^*) de los vórtices, fijando a priori un número de Stokes ($S_t = 130$) y una velocidad terminal adimensional ($V_t = 0,5$), ambos obtenidos de las conclusiones de las figuras anteriores (Ej: Figura 8-26).

Para ello, se conocen como datos de partida los siguientes: aceleración de la gravedad (g^*), densidad de las partículas (ρ_p^*), densidad del fluido (ρ^*) y viscosidad cinemática del fluido (ν^*).

Así pues, si se fija el valor de R_v^* el valor de la circulación del vórtice Γ^* viene impuesto por la ecuación (8.4) o viceversa:

$$\Gamma^* = \sqrt{\frac{g^* S_t R_v^{*3}}{V_t}}$$

Con ello, el diámetro de las partículas (d_p^*) queda determinado por la ecuación (6.48) de la que se despeja:

$$S_t = \frac{\rho_p^* d_p^{*2} \Gamma^*}{18 \rho^* \nu^* R_v^{*2}} \Rightarrow d_p^* = \sqrt{\frac{18 \rho^* \nu^* R_v^{*2} S_t}{\rho_p^* \Gamma^*}}$$

A fin de poder materializar el parámetro adimensional -fijado a priori- de la Velocidad terminal (V_t^*), ésta puede obtenerse mediante la ecuación (8.2):

$$V_t^* = \frac{V_t \Gamma^*}{R_v^*}$$

Algunos posibles valores para la sedimentación de partículas de plomo en aire, son los mostrados en la Tabla 8-15.

TABLA 8-15. Obtención del diámetro de las partículas de plomo ($d_{p \text{ plomo}}^*$) que pueden separarse por sedimentación en aire en función del radio (R_v^*) y/o de la circulación de los vórtices (Γ^*)

R_v^* (m)	Γ^* (m ² /s)	d_p^* (μm)
0,0005	0,000564358	40,63
0,0050	0,017846568	72,26
0,0080	0,036118915	81,27
0,0100	0,050477718	85,93
...	...	...

V_t^* (m/s)
0,564358042
1,78965683
2,25743217
2,523885893
...

Datos de partida:

$$g^* = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$\rho_p^* = \rho_{\text{plomo}}^* = 11300 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho^* = \rho_{\text{aire}}^* = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu^* = \nu_{\text{aire}}^* = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$S_t = 130$$

$$V_t = 0,5$$

Ejemplo 2

En una instalación de un campo de vorticidad periódico con vórtices Rankine girando en el mismo sentido, se desea obtener las características - radio (R_v^*) y circulación (Γ^*)- de los vórtices en función del diámetro de las partículas (d_p^*) que se pretenden separar, fijando a priori un número de Stokes ($S_t=130$) y una velocidad terminal adimensional ($V_t=0,5$) obtenida de las conclusiones de las figuras anteriores (Ej: Figura 8-26).

Para el propósito formulado, se conocen los mismos datos de partida del ejemplo 1: aceleración de la gravedad (g^*), densidad de las partículas (ρ_p^*), densidad del fluido (ρ^*) y viscosidad cinemática del fluido (ν^*).

En primer lugar, se calcula la velocidad terminal (V_t^*) en función del diámetro de las partículas (d_p^*) mediante la ecuación (8.45):

$$V_t^* = \frac{\rho_p^* g^* d_p^{*2}}{18 \rho^* \nu^*}$$

Por otra parte, las ecuaciones (8.2) y (8.3) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya resolución proporciona los valores buscados de R_v^* y Γ^* :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación (8.2): } V_t = \frac{V_t^* R_v^*}{\Gamma^*} \\ \text{Ecuación (8.3): } S_t = \frac{\Gamma^* V_t^*}{g^* R_v^{*2}} \end{array} \right\} \quad R_v^* = \frac{V_t^{*2}}{S_t g^* V_t} \quad (8.59)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación (8.2): } V_t = \frac{V_t^* R_v^*}{\Gamma^*} \\ \text{Ecuación (8.3): } S_t = \frac{\Gamma^* V_t^*}{g^* R_v^{*2}} \end{array} \right\} \quad \Gamma^* = \frac{V_t^{*3}}{S_t g^* V_t} \quad (8.60)$$

En la Tabla 8-16 se exponen varios valores para la sedimentación de partículas de plomo en aire.

TABLA 8-16. Obtención del radio (R_v^*) y de la circulación (Γ^*) de los vórtices en función del diámetro de las partículas (d_p^*) para la separación por sedimentación de partículas de plomo en aire

d_p^* (μm)	V_t^* (m/s)	R_v^* (m)	Γ^* (m^2/s)
6	$1,23 \cdot 10^{-2}$	$2,83 \cdot 10^{-7}$	$5,85 \cdot 10^{-9}$
10	$3,42 \cdot 10^{-2}$	$1,83 \cdot 10^{-6}$	$1,25 \cdot 10^{-7}$
14	$6,70 \cdot 10^{-1}$	$7,05 \cdot 10^{-6}$	$9,44 \cdot 10^{-7}$
18	$1,11 \cdot 10^{-1}$	$1,93 \cdot 10^{-5}$	$4,26 \cdot 10^{-6}$
...	...	...	...

Datos de partida:

$$g^* = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$\rho_p^* = \rho_{\text{plomo}} = 11300 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho^* = \rho_{\text{aire}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu^* = \nu_{\text{aire}} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$S_t = 130$$

$$V_t = 0,5$$

8.3.1.2. Investigación del incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo

La velocidad de sedimentación promedio ($\langle V_y \rangle$) se ha obtenido calculando -para una malla de 500 partículas equiespaciadas situadas a una misma altura- la velocidad final a la que tienden asintóticamente y promediando esos valores de un modo similar al descrito en el apartado 8.2.2. (*cálculo numérico de la velocidad media de sedimentación*).

El procedimiento se ha implementado mediante el programa informático de elaboración propia *st_vel_hormuchos* (recogido en el Anexo II) al que se le ha ensamblado las funciones *rankine* y *funcs3.c* y el programa *rgk_vect.c*.

Los datos de partida a introducir en el programa *st_vel_hormuchos* son los siguientes:

- V_t = velocidad terminal adimensional de caída en fluido en reposo.
 S_t = número de Stokes = 20.
 M = número de partes en que se divide la malla de partículas.
 L = longitud sobre la que se toma la malla de partículas.
 L_v = distancia entre los vórtices = 10.
 $hini$ = paso de integración inicial para el método de Runge-Kutta = 0,1.
 $delta$ = error máximo en la integración numérica = 10^{-7} .
 $tfin$ = instante de tiempo final para la integración numérica = 80000.

Seguidamente, se ejecuta el citado programa, obteniéndose como resultado la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) en función de la velocidad terminal adimensional (V_t) (Tabla 8-17).

TABLA 8-17. Incremento de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) respecto al caso de fluido en reposo (V_t) para vórtices Rankine periódicos girando en el mismo sentido

V_t	$\langle V_y \rangle$	$\frac{\langle V_y \rangle - V_t}{V_t} 100$
0	0,000352	-
0,05	0,066438	32
0,1	0,124177	24
0,2	0,220572	10,28
0,3	0,317873	5,95
0,4	0,416895	4,22
0,5	0,512964	2,59
0,6	0,611002	1,83
0,7	0,706460	0,92
0,8	0,805706	0,71
0,9	0,905131	0,57
1	1,004704	0,47
1,1	1,104338	0,39
1,2	1,204130	0,34
1,3	1,303885	0,29
1,4	1,403647	0,26

Fuente: Programa informático "st_vel_hormuchos" de elaboración propia.

Estos resultados obtenidos se representan con Matlab en la Figura 8-28. En ella se observa que aunque -para pequeños valores de V_t - las partículas sedimentan un poco más rápido en este campo de flujo de vórtices periódicos girando en el mismo sentido que en el caso de fluido en reposo (ya que la curva está por encima de la diagonal de la figura), ese incremento de la velocidad de sedimentación es poco importante. Únicamente para valores muy pequeños de V_t , ese incremento es aproximadamente del orden del 30 %.

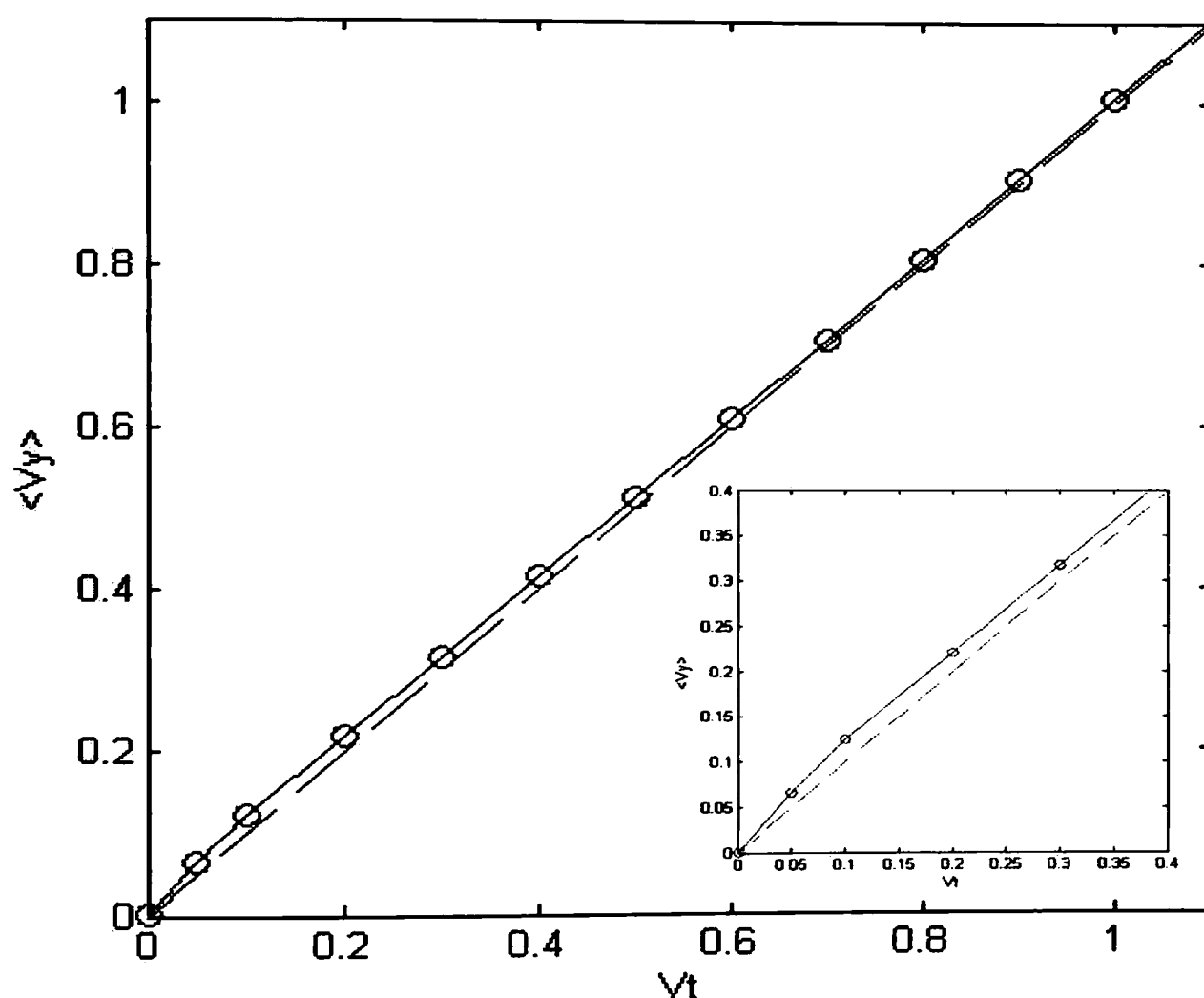


Figura 8-28: Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_t) para vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Rankine).

8.3.1.3. Análisis de la influencia de la inercia de las partículas

El procedimiento para obtener la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) en función de la inercia de las partículas ha sido análogo al ya descrito en el apartado anterior 8.3.1.2.; nuevamente se ha utilizado el programa informático *st_vel_hormuchos* pero en este caso se ha mantenido fijo el valor de la velocidad terminal ($V_t = 0,5$) y se ha ido variando el número de Stokes (S_t).

Los resultados obtenidos son los de la Tabla 8-18 y la Figura 8-29 (en la que se representa la velocidad media de sedimentación $\langle V_y \rangle$ frente al número de Stokes S_t).

TABLA 8-18. Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) en función del número de Stokes (S_t) para vórtices Rankine periódicos girando en el mismo sentido

S_t	$\langle V_y \rangle$
0,1	0,521486
0,3	0,522058
0,7	0,522194
1	0,522349
3	0,522681
5	0,523329
10	0,523431
20	0,523474
30	0,523704
40	0,522789
50	0,521416
75	0,518402
100	0,515134
150	0,510364
...	...

Fuente: Programa informático "*st_vel_hormuchos*" de elaboración propia.

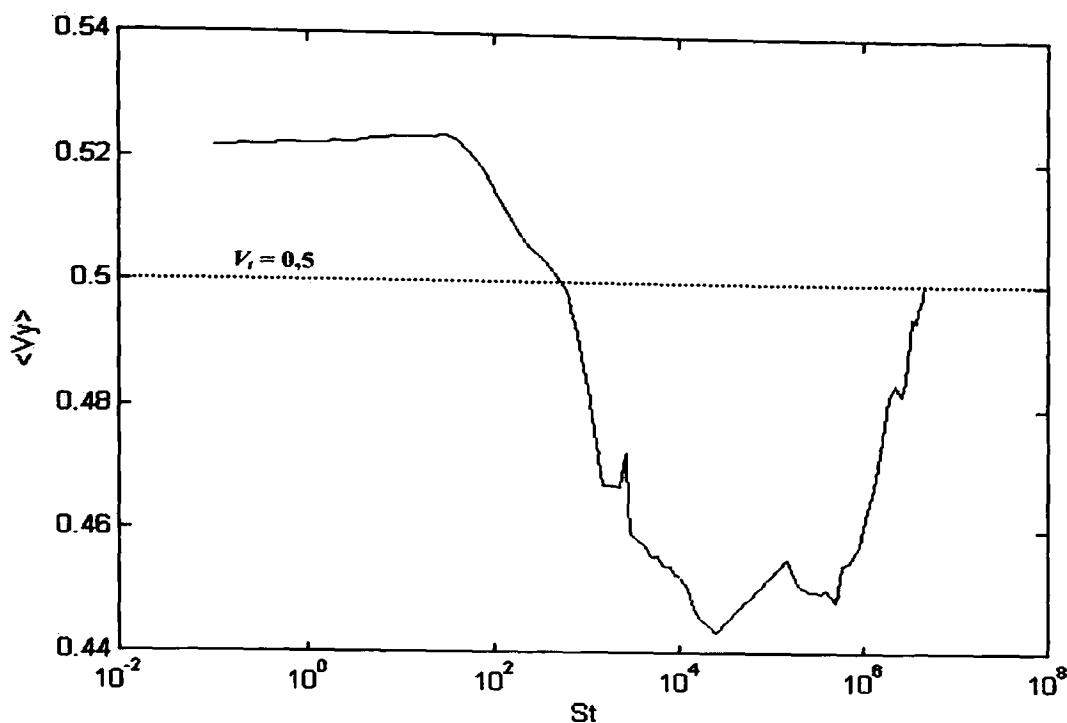


Figura 8-29: Velocidad media de sedimentación $\langle V_y \rangle$ frente a la inercia de las partículas (St) para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_t = 0,5$ con vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Rankine).

En la Figura 8-29 puede observarse que:

- La curva obtenida guarda cierta similitud con los resultados teórico-experimentales para turbulencia isotrópica [22] (para St pequeño $\langle V_y \rangle > V_t$ y para St grande $\langle V_y \rangle < V_t$) pero su concordancia no es total.
- La curva no es uniforme, presenta bastantes picos. Una explicación sería que en las zonas centrales situadas entre dos hileras verticales de vórtices se produce una capa de cortadura con campos de velocidad con sentidos opuestos, lo cual no es del todo simulado por este modelo.
- Por ello, este campo de flujo *no parece adecuado para ser aplicado al desarrollo de un modelo Lagrangiano de sedimentación y dispersión de partículas en flujos turbulentos.*

- En base a las anteriores observaciones se va a formular el siguiente planteamiento: *“cada dos vórtices adyacentes -tanto en dirección vertical como horizontal- giran con sentidos de giro alternados”*.
- Otro hecho a destacar es el valor tan elevado del número de Stokes que aparece en la figura. Una explicación a este hecho sería que para cada partícula, cada hilera vertical de vórtices es como si fuera un único vórtice muy grande hasta que alcanza la zona de baja vorticidad del flujo.

8.3.2. Simulación de vórtices girando con sentidos de giro alternados

Según se acaba de ver, el modelo anterior en el que los vórtices giran en el mismo sentido no parece un punto de partida adecuado para el futuro establecimiento de un modelo lagrangiano de sedimentación de partículas en flujo turbulento. Por esa razón, se introduce esta nueva variante de sentidos de giro alternados para los vórtices (Figura 8-30) y también porque es un campo de flujo que por sí mismo es digno de consideración y merece ser estudiado desde el punto de vista de la sedimentación de partículas.

Al igual que en el caso anterior se simula mediante un algoritmo informático (diferente) la existencia de los vórtices repetidos periódicamente que hace que *“cada dos vórtices contiguos giren en sentidos opuestos tanto horizontal como verticalmente”*. Dicho código informático se ensambla en los distintos programas desarrollados en los casos en que sea necesario (Anexo II).

El radio de los vórtices sigue siendo mucho menor que la separación entre ellos, que es constante y es la misma en las direcciones de ambos ejes coordenados. Se ha tomado, como en el caso anterior, la separación entre los vórtices 10 veces mayor que el radio de los mismos.

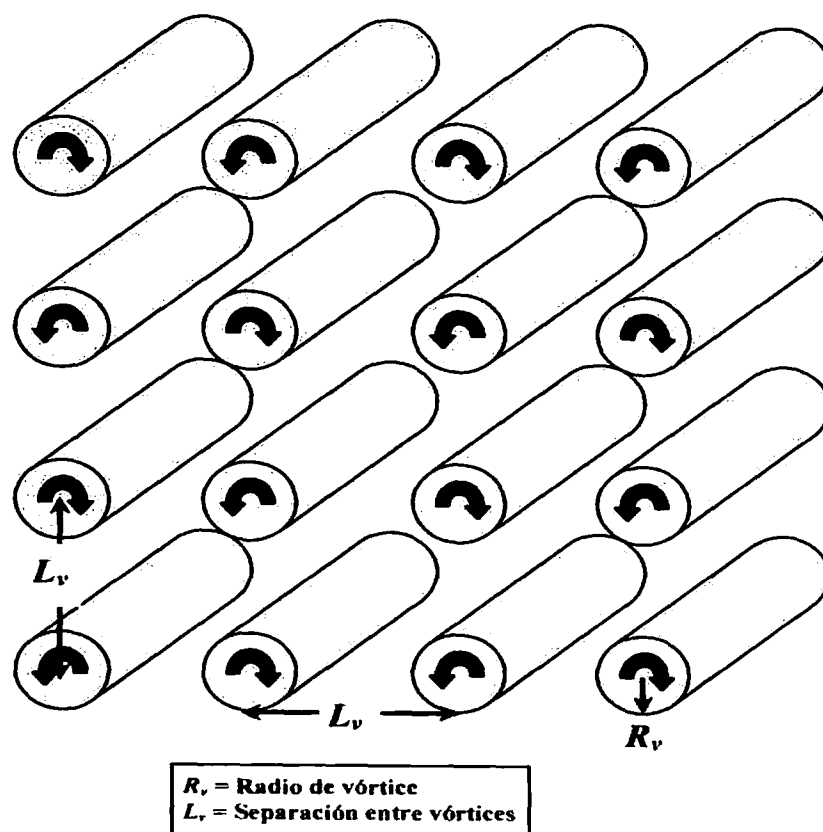


Figura 8-30: Representación esquemática de la disposición bidimensional de vórtices girando con sentidos de giro alternados.

8.3.2.1. Análisis de trayectorias de partículas

Partículas sin inercia

Las trayectorias se obtienen nuevamente mediante el procedimiento detallado en el apartado 8.1.1.; la diferencia es que para simular los vórtices girando con sentidos de giro alternados se ha desarrollado el programa informático *altertrahormuchos_s_i* (trayectorias de partículas sin inercia), recogido en el Anexo II.

Los datos de partida son los mismos que en el programa *trahormuchos_s_i*, obteniéndose al ejecutar el programa la posición de cada partícula en cada instante de tiempo (t) posterior (Tabla 8-19).

TABLA 8-19. Posiciones de las partículas (sin inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos con sentidos de giro alternados, caso del vórtice Rankine

x_0	y_0	t	x	y
-1	90	0,100000	-0,997571	90,049010
		5,199568	-0,650377	90,528221
		10,00115	0,241709	90,472610
		15,17197	0,579113	89,436381
		...	...	...
-1,75	90	0,100000	-1,749887	90,006958
		5,361289	-1,247320	90,541084
		10,00702	-1,196067	89,429774
		15,18022	-1,748624	89,975180
		...	...	...
5	104	0,100000	5,009755	103,96224
		5,842601	5,546495	101,97847
		10,669631	5,843783	100,59452
		15,747196	5,825300	99,273015
		...	...	...
7,5	104	0,100000	7,518044	103,96129
		5,697668	8,933406	102,03992
		10,27477	10,03618	98,67675
		15,40113	8,037587	96,97637
		...	...	...
10	104	0,100000	10,02514	103,94992
		5,333175	11,68011	100,38825
		10,33739	10,28078	96,535637
		15,61206	9,063611	93,831932
		...	...	...
12,5	104	0,100000	12,51799	103,93862
		5,528032	13,24655	100,03407
		11,18793	12,49147	95,970955
		16,02576	11,58353	93,676703
		...	...	...
...	...	...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...

Fuente: Programa informático "altertrahormuchos_s_t" de elaboración propia.

En la Figura 8-31, puede verse la representación gráfica de las trayectorias de las partículas. Nuevamente se aprecia la posibilidad de suspensión permanente, con algunas partículas describiendo órbitas cerradas. También se observa que las partículas que no son atrapadas, siguen una trayectoria que va rodeando los vórtices según el sentido de giro de los mismos.

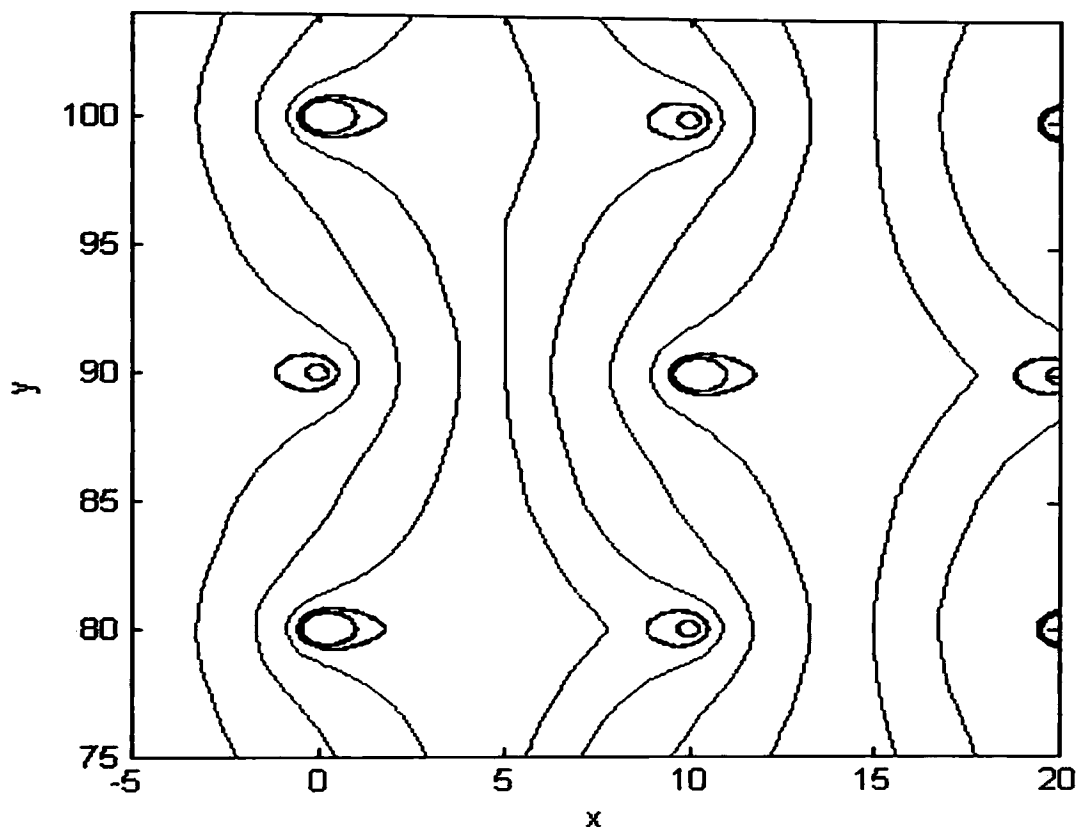


Figura 8-31: Trayectorias (adimensionales) de partículas sin inercia ($S_i = 0$) con vórtices con sentidos de giro alternados, para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_i = 0,5$ (caso del vórtice Rankine).

Partículas con inercia

Las trayectorias se siguen obteniendo mediante el procedimiento del apartado 8.1.1.; para este caso de partículas con inercia se ha implementado el programa informático *altertrahormuchos*, cuyo listado

se presenta en el AnexoII. Se ha partido de los mismos datos que en el programa *altertrahormuchos_s_i* pero –puesto que las partículas tienen inercia- hay que introducir el número de Stokes (S_t) y las velocidades iniciales de las partículas (que son calculadas por el propio programa).

Una vez ejecutado el citado programa *altertrahormuchos*, se obtienen las posiciones de las partículas en cada instante de tiempo (Tabla 8-20).

TABLA 8-20. Posiciones de las partículas (con inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos con sentidos de giro alternados, caso del vórtice Rankine

x_0	y_0	t	x	y
0	104	0,028655	-0,000936	103,985673
		0,067407	-0,004603	103,966295
		0,107954	-0,010527	103,946817
		0,151681	-0,018524	103,924140
		...	...	...
6	104	0,033873	6,000642	103,983707
		0,077902	6,002973	103,964031
		0,124472	6,006659	103,944457
		0,175196	6,011572	103,924053
		...	...	...
14	104	0,033982	14,000646	103,982362
		0,078119	14,002987	103,957943
		0,124815	14,006685	103,930864
		0,175691	14,011606	103,900435
		...	...	...
...	...	...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...

Fuente: Programa informático "*altertrahormuchos*" de elaboración propia.

Las trayectorias de las partículas (*marcadas con distintos colores según su posición inicial*) para diferentes valores del número de Stokes quedan reflejadas en las Figura 8-32 y 8-33 (inercia moderada) y Figuras 8-34 y 8-35 (inercia fuerte).

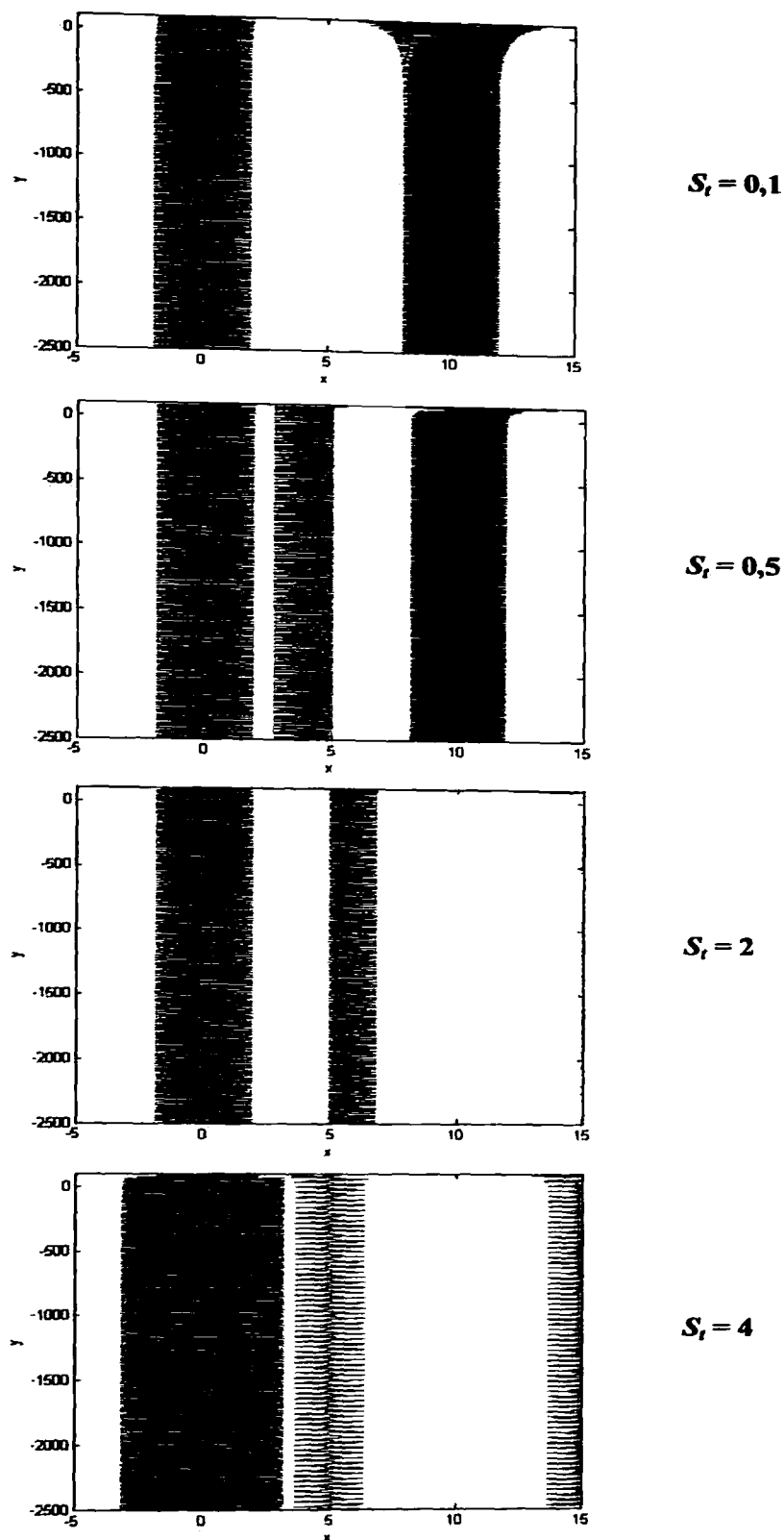


Figura 8-32: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia moderada ($S_t = 0,1$ a 4) para tiempos elevados en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Rankine).

Para una mejor visualización de las consecuencias que se pueden extraer de dichas trayectorias se decide escoger solamente tres partículas situadas en posiciones iniciales representativas de las diferentes zonas del campo fluido: una situada en aquella posición en la que la acción del campo de flujo sea más intensa (*trazado azul*), es decir, en una de las hileras verticales de vórtices y las otras (*trazados rojo y verde*) situadas cerca de las regiones centrales entre dos filas verticales de vórtices (donde la acción de los vórtices sobre las partículas tiene menor intensidad). No se han representado trayectorias de más partículas porque se produce un solapamiento de las mismas, impidiendo observar con claridad sus características.

En la Figura 8-32, se observa que para tiempos elevados y valores pequeños y moderados de la inercia (es decir, para valores del número de Stokes hasta 4):

- ❑ La partícula situada inicialmente en la hilera vertical de vórtices (azul) va rodeando los mismos según su sentido de giro, siguiendo las líneas de corriente del flujo.
- ❑ Las otras partículas (rojo y verde), al encontrarse en una zona de baja vorticidad, caen de una forma más o menos vertical pero con oscilaciones provocadas por la acción del campo de flujo.
- ❑ En definitiva, todas las partículas siguen una trayectoria próxima a la vertical pero con oscilaciones debidas a la acción de los vórtices.

En la Figura 8-33 se representan las mismas trayectorias de la Figura 8-32 pero en los instantes iniciales de tiempo, observándose con más detalle las oscilaciones mencionadas.

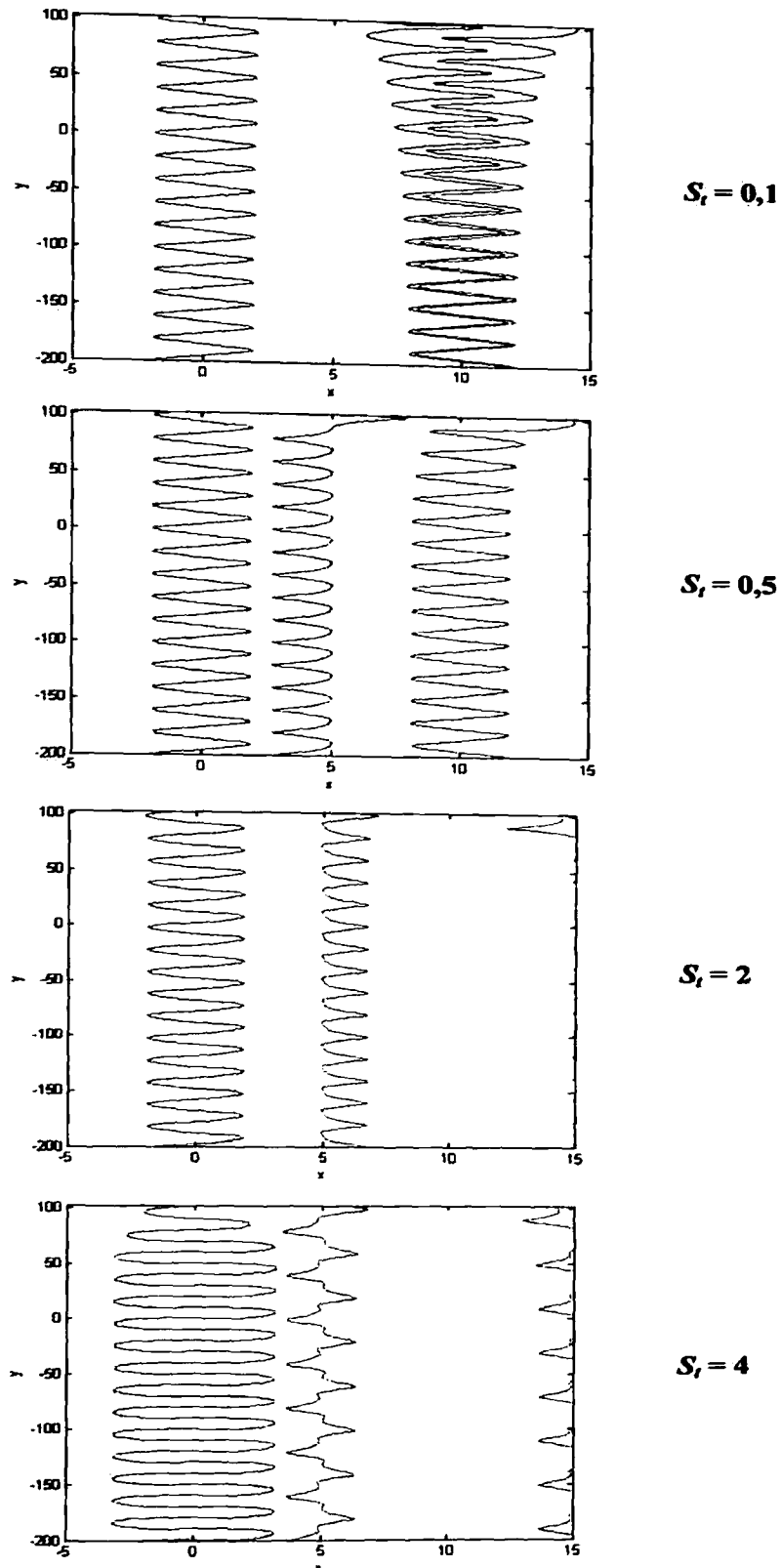


Figura 8-33: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia moderada ($S_t = 0,1$ a 4) para tiempos cortos en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Rankine) .

Sin embargo, para valores más elevados del número de Stokes (a partir de 5) se observa un cambio sorprendente en el comportamiento de las partículas:

- ❑ Las partículas al principio (tiempos cortos, Figura 8-34) van describiendo una trayectoria más o menos regular (igual que antes, es decir, con oscilaciones alrededor de su vertical), pero en realidad cada vez la trayectoria está situada un poco más alejada de la línea vertical hasta que llega un momento en que se separa de ella.
- ❑ Las partículas al final (para tiempos suficientemente grandes, Figura 8-35) terminan oscilando alrededor de la línea media situada justo en el centro entre dos hileras verticales de vórtices. Este resultado es similar al encontrado en el caso de vórtices girando en el mismo sentido, las partículas se agrupan en el “canal” formado por dos regiones vecinas de vorticidad, como consecuencia del fenómeno de la inclinación inercial.
- ❑ Ahora, a diferencia de aquel caso, incluso para valores del número de Stokes elevados se mantiene este comportamiento y no aparece la distinción entre franjas de baja vorticidad y regiones vacías que se encontró entonces. Ello es debido a la diferencia entre los campos de flujo utilizados en ambos casos.
 - En el primero (vórtices con el mismo sentido de giro), se producen zonas en las que vórtices adyacentes inducen en el fluido velocidades con sentidos opuestos.
 - En el segundo (vórtices alternados), en cualquier zona del campo fluido los vórtices adyacentes inducen velocidades en el mismo sentido con lo que la disminución de la influencia de la vorticidad es menos acusada en las zonas alejadas de las hileras verticales de vórtices.

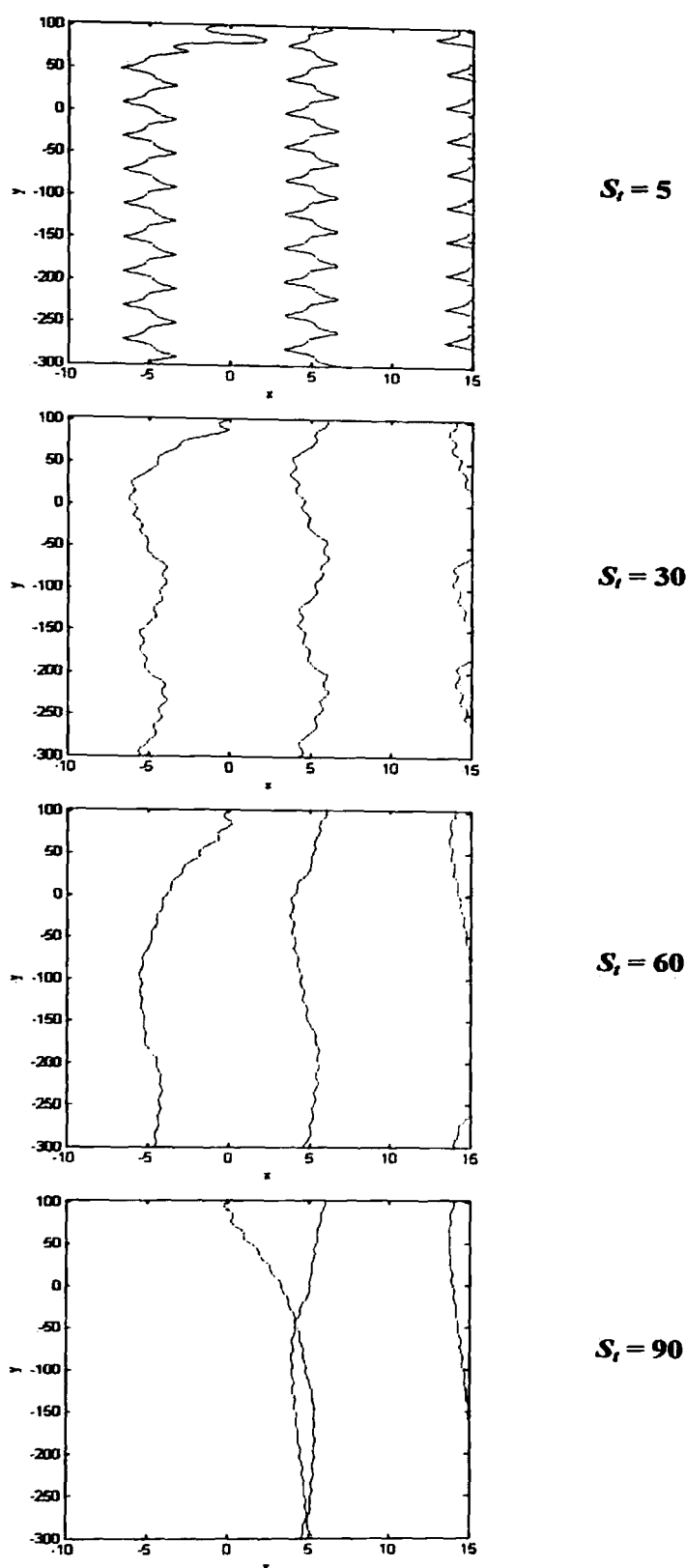


Figura 8-34: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia fuerte ($S_t = 5$ a 90) para tiempos cortos en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Rankine) .

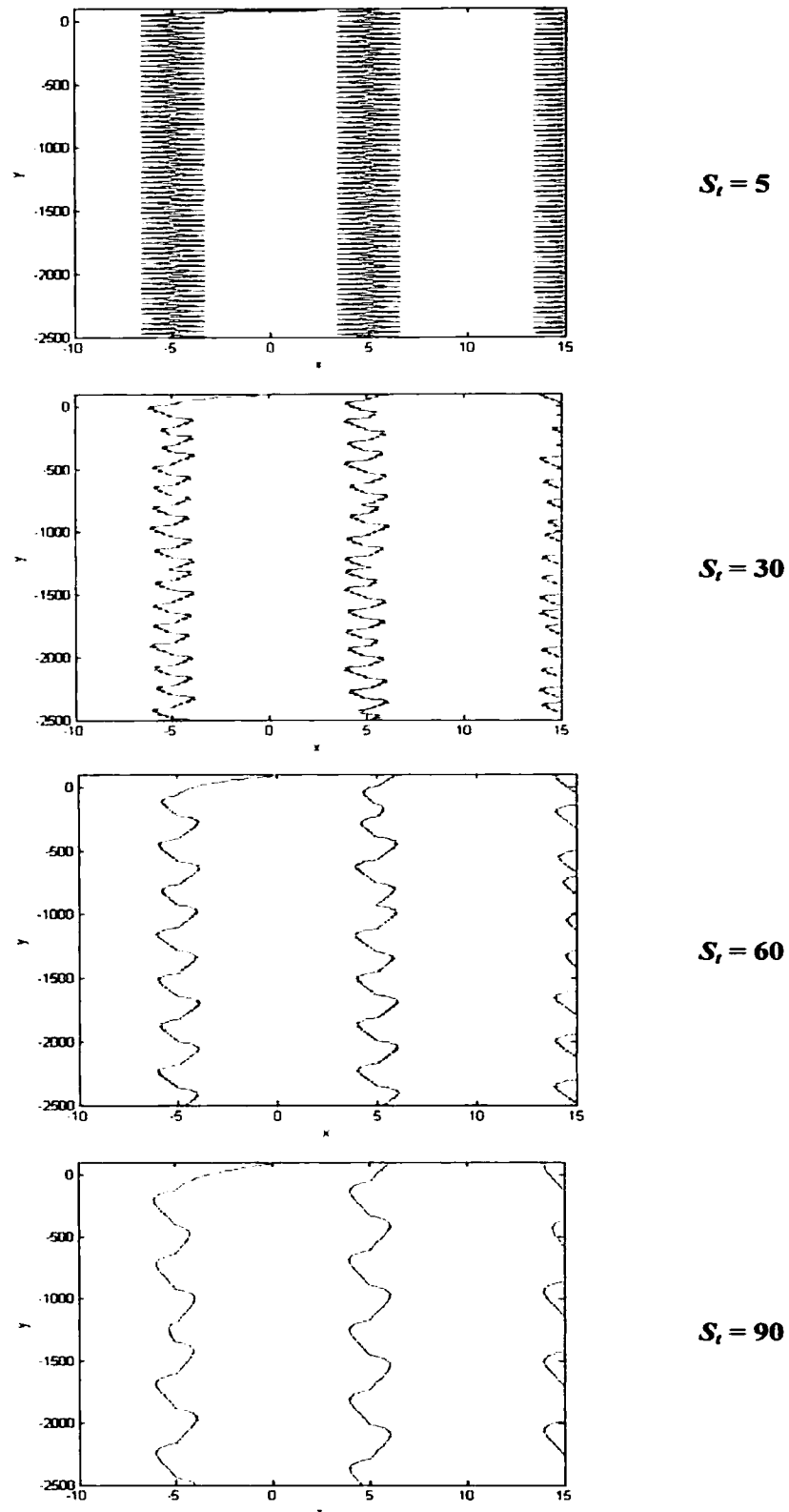


Figura 8-35: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia fuerte ($S_t = 5$ a 90) para tiempos elevados en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Rankine) .

8.3.2.2. Investigación del incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo

La velocidad de sedimentación promedio ($\langle V_y \rangle$) se ha obtenido mediante un procedimiento análogo al indicado para el caso de vórtices girando en el mismo sentido (apartado 8.3.1.2.). La diferencia es que para simular los vórtices girando con sentidos de giro alternados se ha desarrollado el programa de elaboración propia *alter_st_vel* (Anexo II), introduciendo los mismos datos de partida.

Los valores obtenidos de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la velocidad terminal adimensional de caída en reposo (V_t) son los de la Tabla 8-21.

TABLA 8-21. Incremento de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) respecto al caso de fluido en reposo (V_t) para vórtices Rankine periódicos con sentidos alternados

V_t	$\langle V_y \rangle$	$\frac{\langle V_y \rangle - V_t}{V_t} 100$
0	0,000167	
0,05	0,105429	110
0,1	0,160043	60
0,2	0,242523	21
0,3	0,332572	10,85
0,4	0,426500	6,62
0,5	0,522311	4,46
0,6	0,618811	3,13
0,7	0,713758	1,97
0,8	0,809121	1,14
0,9	0,907098	0,78
1	1,005723	0,57
1,1	1,104526	0,41
1,2	1,203371	0,28
1,3	1,302511	0,19
1,4	1,401588	0,11

Fuente: Programa informático "*alter_st_vel*" de elaboración propia.

Se representan en la Figura 8-36, que evidencia que las partículas:

- Con una velocidad terminal (V_t) baja sedimentan más rápido en este campo de flujo que en fluido en reposo. Ese incremento de velocidad de sedimentación llega a ser del orden del 110 % para pequeños valores V_t .
- Con valores de V_t altos, apenas hay diferencia entre la velocidad media de sedimentación y la velocidad terminal. Esta diferencia será aún menor a medida que la inercia de las partículas aumente, ya que seguirían una trayectoria cercana a la vertical, sólo con pequeñas desviaciones debidas al campo de flujo.

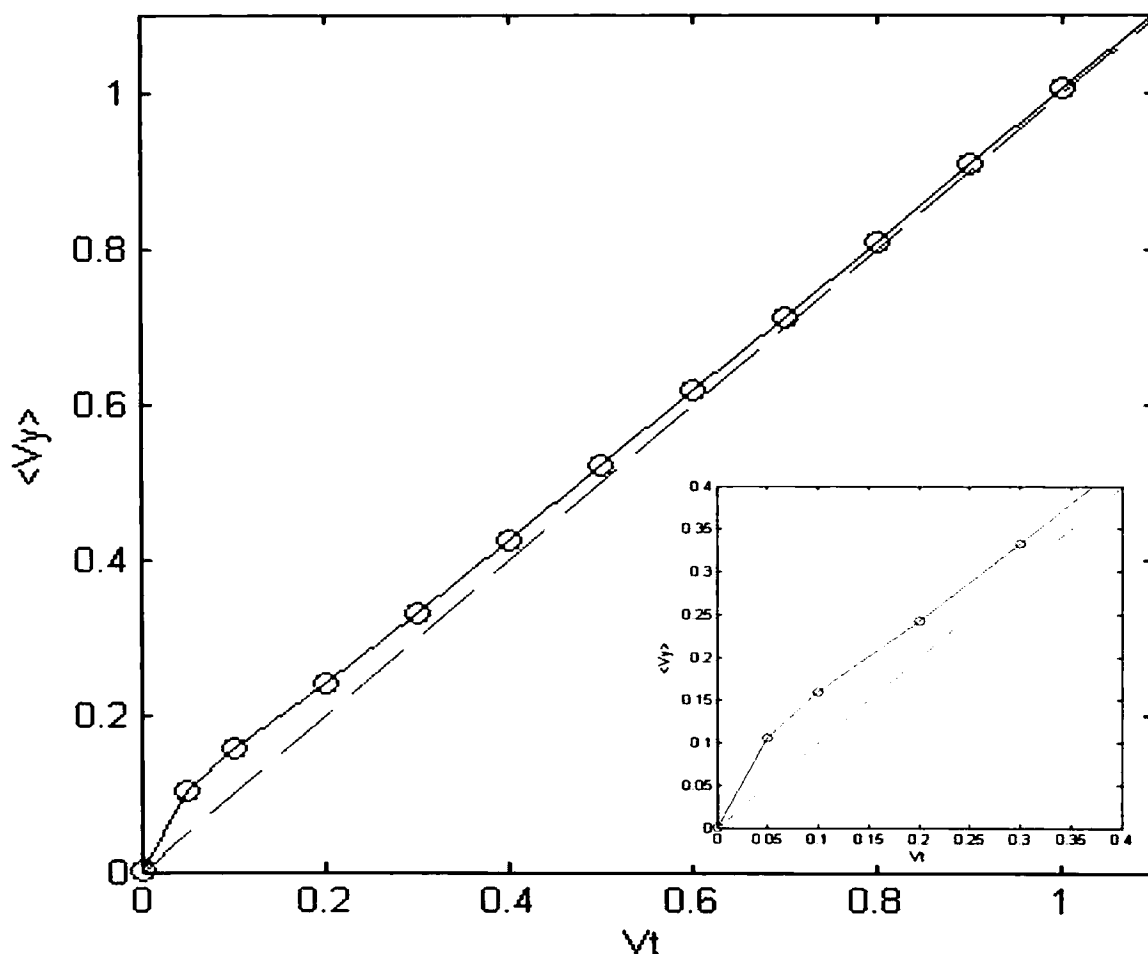


Figura 8-36: Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_t) para vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Rankine).

8.3.2.3. Análisis de la influencia de la inercia de las partículas

Para obtener la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) en función de la inercia de las partículas se ha seguido el mismo procedimiento ya comentado en el apartado 8.3.1.3.; utilizando el programa de elaboración propia *alter_st_vel* en el que se ha mantenido fijo el valor de la velocidad terminal ($V_t = 0,5$) y se ha ido variando el número de Stokes (S_t).

Los resultados obtenidos son los reflejados en la Tabla 8-22 y son representados en la Figura 8-37.

TABLA 8-22. Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) en función del número de Stokes (S_t) para vórtices Rankine periódicos girando con sentidos alternados

S_t	$\langle V_y \rangle$
0,05	0,500829
0,1	0,501051
0,2	0,501234
0,3	0,501323
0,5	0,501422
1	0,501555
3	0,501328
5	0,501138
10	0,500953
20	0,500695
30	0,500401
40	0,500040
...	...

Fuente: Programa informático "*alter_st_vel*" de elaboración propia.

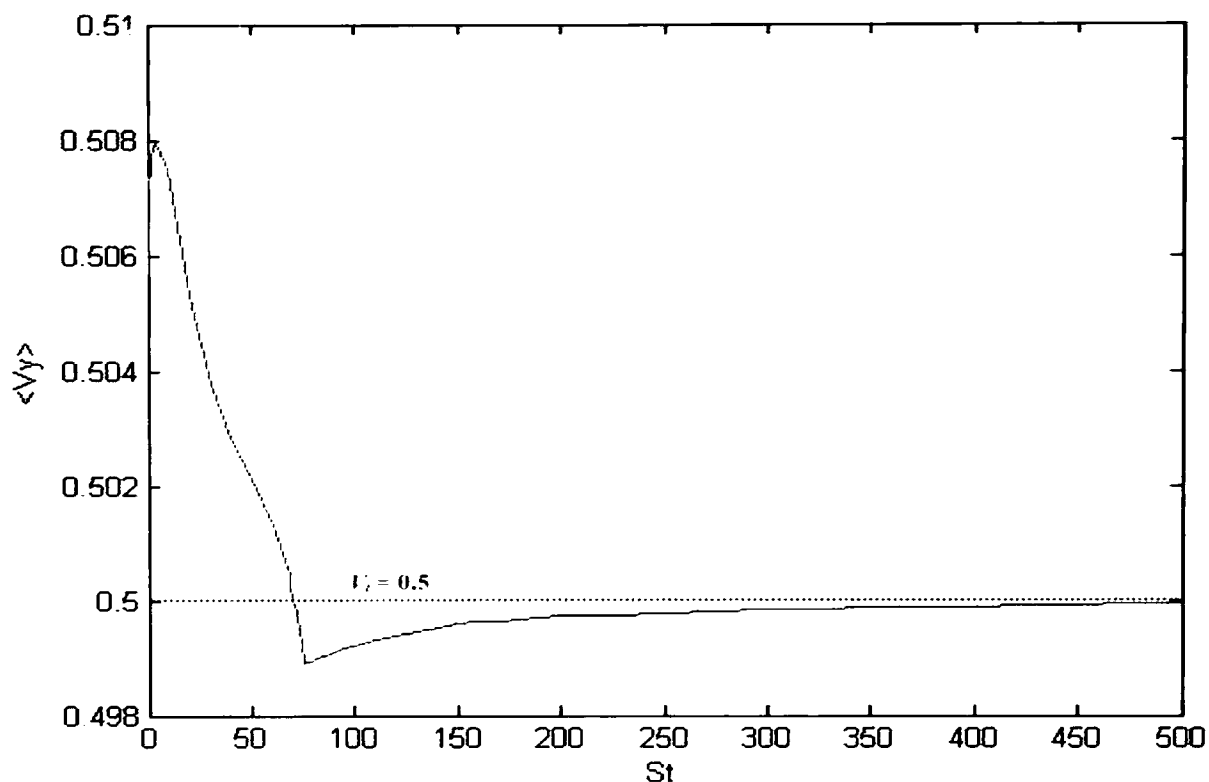


Figura 8-37: Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la inercia de las partículas (St) para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_t = 0,5$ con vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Rankine).

En esta gráfica puede apreciarse que el resultado obtenido numéricamente es muy similar a los resultados conocidos teórico-experimentales para turbulencia isotrópica (Srdic, 1999) [22].

8.3.2.4. Posibilidad de aplicación a Modelo Lagrangiano de sedimentación y dispersión de partículas en flujos turbulentos

El resultado del apartado anterior hace pensar que: *el flujo aquí analizado simula con bastante exactitud el tipo de estructuras vorticales presentes en los flujos turbulentos isotrópicos que hacen decrecer o aumentar la velocidad media de sedimentación, por lo que podría ser utilizado para un posterior desarrollo de un modelo Lagrangiano para la sedimentación de partículas pesadas en flujos turbulentos.*

9. VÓRTICE KAUFMANN

Una vez estudiados los dos objetivos propuestos para el caso del vórtice Rankine, se van a aprovechar los conocimientos adquiridos para abordar la investigación de los mismos en el caso del vórtice Kaufman. Por ello se incidirá con menor profundidad en aquellos aspectos metodológicos que ya han sido suficientemente descritos en el capítulo anterior y únicamente se detallarán aquellos aspectos que supongan alguna diferencia significativa entre ambos modelos de vórtices.

La razón de estudiar este tipo de vórtice es la misma que ya se mencionó para el modelo Rankine, según lo comentado en el apartado 5.2. (Vórtices objeto de estudio) del bloque de Metodología; el vórtice Kaufmann también tiene una formulación relativamente simple y es adecuado para ser utilizado en las simulaciones de esta Tesis. Igual que para el vórtice Rankine, para alcanzar los objetivos propuestos se ha utilizado la ecuación de movimiento (6.40) y su expresión equivalente en forma adimensional (6.50) y se ha seguido la metodología descrita en los apartados 7.1. y 7.2.

9.1. Análisis del Tiempo de Escape de partículas de un vórtice tridimensional

Nuevamente se ha seguido la metodología representada en el diagrama de flujo de la Figura 7-2a.

Se comienza por una parte analizando las trayectorias de las partículas, sus principales características y la influencia de la inercia de las partículas y por otra se calculan los puntos de equilibrio y se deduce la longitud característica para el caso concreto del vórtice Kaufmann, obteniéndose asimismo las trayectorias límite. A partir de los dos pasos anteriores se establece la formulación del criterio de escape según el cual se considera que una partícula ha escapado del vórtice. Con ello, se procede por un lado a la obtención numérica del Tiempo de escape y

el análisis de la influencia de diversas variables y por otro lado a la obtención de la fórmula analítica del Tiempo de escape que, dado que en la fórmula obtenida en el capítulo anterior no se hizo ninguna limitación sobre el vórtice considerado, sigue siendo válida. Por último, mediante simulación numérica se verifica la validez de la fórmula para este modelo de vórtice.

9.1.1. Obtención de las Trayectorias de partículas

Las trayectorias se obtienen mediante un procedimiento completamente idéntico al descrito en el apartado 8.1.1. para el vórtice Rankine.

Se utilizan por tanto los mismos programas informáticos de elaboración propia que en el caso de dicho modelo (*ligtravoin_s_i* y *ligtravoin*). La única diferencia es que en lugar de la función *rank* se utiliza la función *kauf* (recogida en el Anexo II de la Tesis), que proporciona el campo de velocidades del vórtice Kaufmann. El resto de funciones a ensamblar en cada caso en el programa principal son las mismas que se utilizaron para el vórtice Rankine, es decir, *funcs3.c* y *rgk_vect.c*.

Los datos de partida a introducir en los programas *ligtravoin_s_i* y *ligtravoin* –y también en los restantes programas informáticos utilizados a lo largo de todo este capítulo– son análogos a los tomados en el capítulo anterior para el vórtice Rankine.

Partículas sin inercia

Ejecutando, por tanto, el programa *ligtravoin_s_i* (cálculo de trayectorias de partículas sin inercia) se obtienen las posiciones “x, y, z” de las partículas en cada instante de tiempo (*t*). Dichos valores son los que se relacionan en la Tabla 9-1. La posterior representación gráfica de dichos valores permite visualizar las trayectorias de las partículas sin inercia.

TABLA 9-1. Posiciones de las partículas para cada instante de tiempo (sin inercia), caso del vórtice Kaufmann

x_0	y_0	z_0	t	x	y	z
1	0	300	0,10000	0,999634	0,014643	299,965
			0,60000	0,986788	0,087477	299,788
			1,26469	0,940816	0,181366	299,553
			1,83418	0,874149	0,256072	299,352
			...	...	...	...
1,5	0	300	0,10000	1,49983	0,010799	299,965
			0,60000	1,49401	0,064813	299,788
			1,76032	1,44749	0,190559	299,378
			2,65567	1,37738	0,287933	299,061
			...	...	...	...
2,25	0	300	0,10000	2,24999	0,001758	299,965
			0,60000	2,24949	0,010559	299,788
			2,72967	2,23905	0,048954	299,035
			4,86544	2,21412	0,091081	298,280
			...	...	...	...
5	10	300	0,10000	4,99205	9,968620	299,965
			0,60000	4,95202	9,811970	299,788
			3,10000	4,74405	9,035170	298,904
			5,00000	4,57650	8,452760	298,232
			...	...	...	...
7,5	10	300	0,10000	7,49364	9,969420	299,965
			0,60000	7,46168	9,816800	299,788
			3,10000	7,29845	9,060640	298,904
			5,00000	7,17054	8,494360	298,232
			...	...	...	...
10	10	300	0,10000	9,99502	9,969630	299,965
			0,60000	9,97011	9,817990	299,788
			3,10000	9,84478	9,065690	298,904
			5,00000	9,74895	8,500870	298,232
			...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
			...	...	...	...
			...	...	...	...
			...	...	...	...

Fuente: Programa informático "ligtravoin_s_i" de elaboración propia.

En la Figura 9-1 se representan las trayectorias de partículas sin inercia ($S_i=0$). El hecho más significativo que puede observarse es que algunas de ellas quedan atrapadas en el vórtice, describiendo trayectorias cerradas. Del mismo modo que para el vórtice Rankine, la vista más relevante es la correspondiente al plano XY, sin menoscabo del interés que representan las restantes vistas por tratarse de un estudio tridimensional.

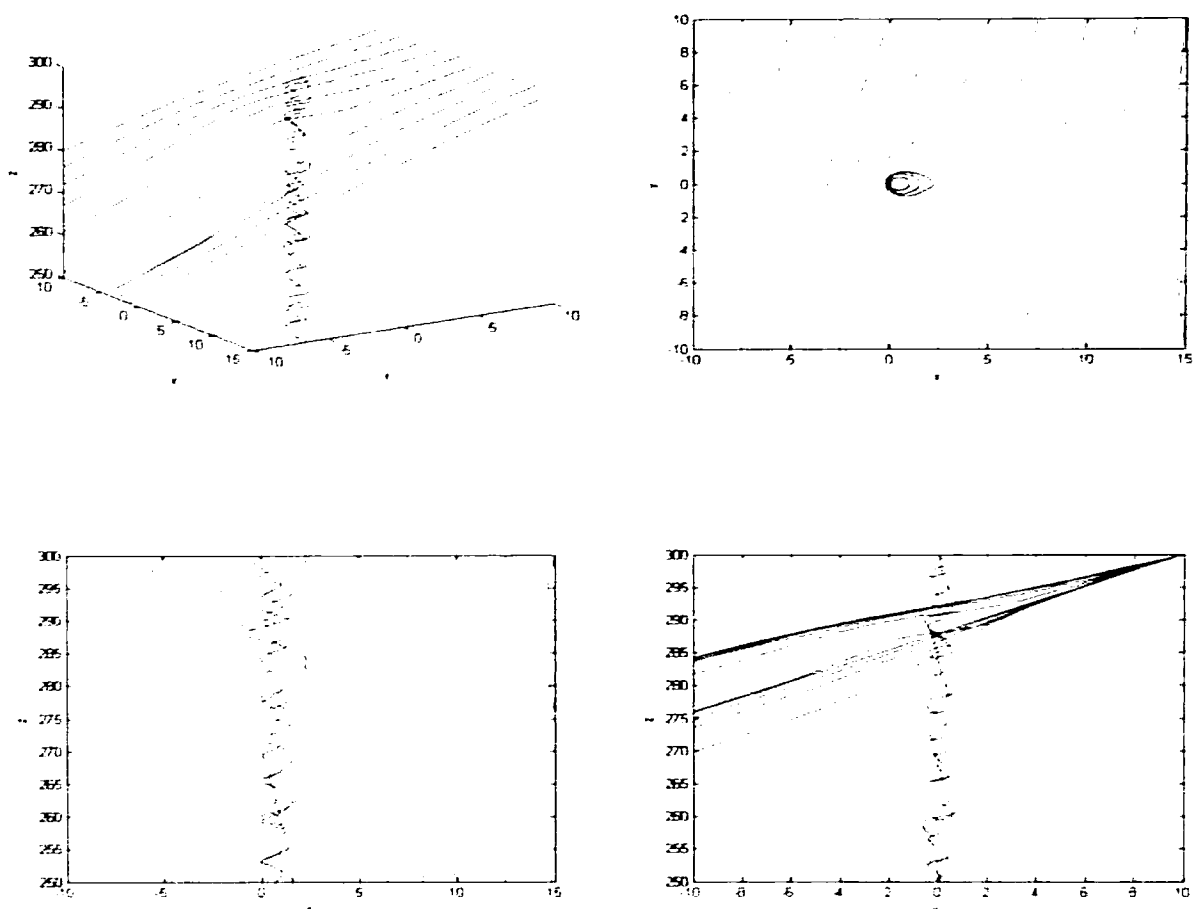


Figura 9-1: Trayectorias (adimensionales) de partículas sin inercia ($S_r = 0$), para vórtice Kaufmann.

Partículas con inercia

En el caso de partículas con inercia, se ejecuta el programa *ligtravoin*, siguiendo nuevamente el procedimiento que ya ha sido comentado varias veces a lo largo de la Tesis.

Los valores obtenidos para las posiciones de las partículas a largo del tiempo, obtenidos mediante la ejecución del citado programa se muestran en la Tabla 9-2.

TABLA 9-2. Posiciones de las partículas para cada instante de tiempo (con inercia), caso del vórtice Kaufmann

x_0	y_0	z_0	t	x	y	z
1	0	300	0,100000	0,999977	0,014645	299,964645
			0,385681	0,998833	0,056465	299,863641
			0,670183	0,994582	0,098005	299,763055
			0,991924	0,984515	0,144653	299,649302
...						
1,5	0	300	0,100000	1,499989	0,010798	299,964645
			0,435381	1,499255	0,047008	299,846069
			0,766057	1,496466	0,082672	299,729158
			0,146552	1,489736	0,123620	299,594633
...						
2,25	0	300	0,100000	2,249999	0,001758	299,964645
			0,600000	2,249841	0,010549	299,787/868
			1,123532	2,249150	0,019759	299,602772
			1,761092	2,247351	0,031011	299,377360
...						
5	10	300	0,100000	4,992063	9,968613	299,964645
			0,600000	4,952273	9,811766	299,787/868
			1,164608	4,906930	9,634988	299,588249
			1,839260	4,951985	9,424389	299,349723
...						
7,5	10	300	0,100000	7,493640	9,969415	299,964645
			0,600000	7,461794	9,816581	299,787/868
			1,179317	7,424700	9,639884	299,583049
			1,867467	7,380276	9,430706	299,339751
...						
10	10	300	0,100000	9,995025	9,969620	299,964645
			0,600000	9,970136	9,817801	299,787/868
			1,196794	9,940379	9,636936	299,576809
			1,906875	9,904884	9,422388	299,325818
...						
...	...	...	...	...	...	...
			...	...	...	...
			...	...	...	...
			...	...	...	...

Fuente: Programa informático "ligtravoin" de elaboración propia.

Las trayectorias de partículas con inercia ($S_r > 0$) se obtienen representando estos valores (Figura 9-2). Por las mismas razones expuestas en el caso del vórtice Rankine, ninguna partícula describe trayectorias cerradas alrededor del eje del vórtice ni es atrapada por el mismo. Tanto la Figura 9-1 como la Figura 9-2 muestran que las trayectorias de las partículas son cualitativamente semejantes al caso del vórtice Rankine.

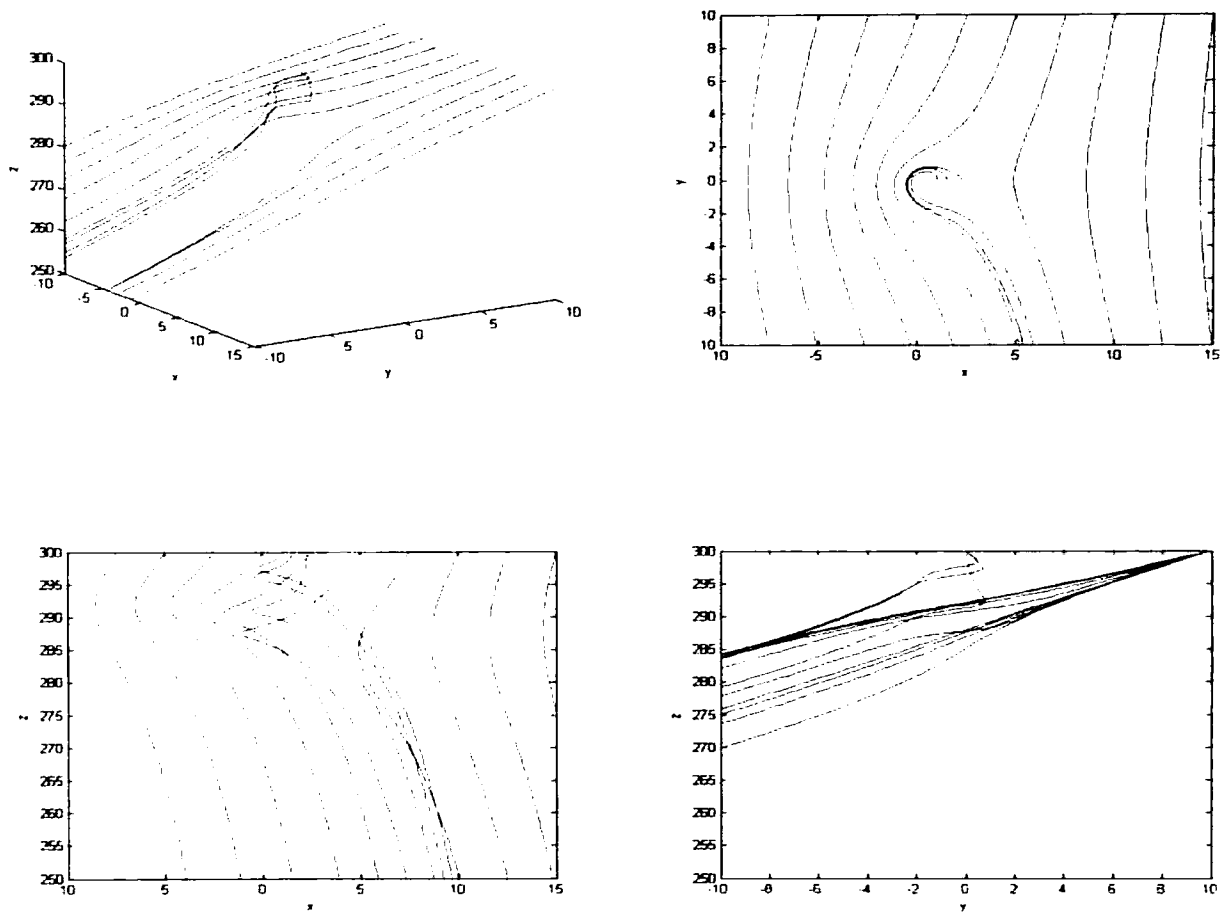


Figura 9-2: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia ($S_i = 0,5$), para vórtice Kaufmann.

9.1.2. Cálculo de los Puntos de equilibrio y Deducción de la Longitud característica

El procedimiento es idéntico al seguido en el apartado 8.1.2. para el vórtice Rankine. En este caso se sustituye en la ecuación (8.5) el campo de velocidades del vórtice Kaufmann, dado por la ecuación (4.64). Desdoblando en dos ecuaciones escalares se obtiene:

$$\frac{-(\Omega^*/2)y_E^*}{1 + \frac{x_E^{*2}}{R_v^{*2}} + \frac{y_E^{*2}}{R_v^{*2}}} = 0 \Rightarrow y_E^* = 0 \quad (9.1a)$$

$$-V_i^* \sin \theta + \frac{(\Omega^*/2)x_E^*}{1 + \frac{x_E^{*2}}{R_v^{*2}} + \frac{y_E^{*2}}{R_v^{*2}}} = 0 \quad (9.1b)$$

Sustituyendo (9.1a) en (9.1b) y realizando operaciones algebraicas se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado

$$(V_i^* \sin \theta)x_E^{*2} - R_v^{*2}(\Omega^*/2)x_E^* + R_v^{*2}V_i^* \sin \theta = 0 \quad (9.2)$$

cuya solución es

$$x_E^* = \frac{R_v^{*2}(\Omega^*/2) \pm \sqrt{R_v^{*4}(\Omega^{*2}/4) - 4R_v^{*2}V_i^{*2}\sin^2\theta}}{2V_i^* \sin \theta} \quad (9.3)$$

La ecuación anterior (9.3) no tiene ninguna solución real si $R_v^{*4}(\Omega^{*2}/4) - 4R_v^{*2}V_i^{*2}\sin^2\theta < 0$. Si $R_v^{*4}(\Omega^{*2}/4) - 4R_v^{*2}V_i^{*2}\sin^2\theta > 0$ tiene dos soluciones reales:

$$x_{E1}^* = \frac{(\Omega^*/2) - \sqrt{(\Omega^{*2}/4) - \frac{4V_i^{*2}\sin^2\theta}{R_v^{*2}}}}{\frac{2V_i^* \sin \theta}{R_v^{*2}}} =$$

$$\frac{(\Gamma^*/2) - \sqrt{(\Gamma^{*2}/4) - R_v^{*2}V_i^{*2}\sin^2\theta}}{V_i^* \sin \theta} \quad (9.4)$$

$$x_{E2}^* = \frac{(\Omega^* / 2) + \sqrt{(\Omega^{*2} / 4) - \frac{4V_i^{*2} \sin^2 \theta}{R_v^{*2}}}}{\frac{2V_i^* \sin \theta}{R_v^{*2}}} =$$

$$\frac{(\Gamma^* / 2) + \sqrt{(\Gamma^{*2} / 4) - R_v^{*2} V_i^{*2} \sin^2 \theta}}{V_i^* \sin \theta} \quad (9.5)$$

donde todos los parámetros tienen el mismo significado que ya se ha ido indicando a lo largo de la Tesis. Igual que en el caso del vórtice Rankine, $\bar{x}_{E1}^*$ es un *foco inestable* y $\bar{x}_{E2}^*$ es un *punto de silla*.

La ecuación (9.3) tiene una única solución si

$$R_v^{*4} (\Omega^{*2} / 4) - 4R_v^{*2} V_i^{*2} \sin^2 \theta = 0 = \Gamma^{*2} - 4R_v^{*2} V_i^{*2} \sin^2 \theta = 0 \quad (9.6)$$

que sería el caso en que los dos puntos de equilibrio se condensan en un único punto. Entonces, la *escala de Longitud característica* (L_c^*) que sería el *radio mínimo de las trayectorias de las partículas alrededor del vórtice* (R_v^*)_{min} se puede deducir de la ecuación (9.6):

$$4(R_v^*)_{min}^2 V_i^{*2} \sin^2 \theta = \Gamma^{*2} \Rightarrow (R_v^*)_{min} = \frac{\Gamma^*}{2V_i^{*2}} = L_c^* \quad (9.7)$$

La relación entre la Longitud característica y la distancia entre los puntos de equilibrio, que se obtiene de las ecuaciones (9.4) y (9.5):

$$\frac{|\bar{x}_{E2}^* - \bar{x}_{E1}^*|}{2} = \frac{\sqrt{(\Gamma^{*2} / 4) - R_v^{*2} V_i^{*2} \sin^2 \theta}}{V_i^{*2}} \quad (9.8)$$

De (9.7) y (9.8) se deduce que cuando $V_i^{*2} \rightarrow 0$ $\frac{|\bar{x}_{E2}^* - \bar{x}_{E1}^*|}{2} \rightarrow L_c^*$, igual que en el caso del vórtice Rankine.

La obtención de los puntos de equilibrio y la longitud característica L_c^* también es posible llevarla a cabo en términos de variables adimensionales, tal como se describe a continuación.

Los puntos de equilibrio se obtienen entonces de la ecuación (8.14) $\vec{V}_i + \vec{u}(\vec{x}_E) = 0$ que desdoblándola en las dos correspondientes ecuaciones escalares queda:

$$\frac{-y_E}{1 + x_E^2 + y_E^2} = 0 \Rightarrow y_E = 0 \quad (9.9a)$$

$$-V_i \sin \theta + \frac{x_E}{1 + x_E^2 + y_E^2} = 0 \quad (9.9b)$$

y sustituyendo (9.9a) en (9.9b) y realizando operaciones algebraicas se obtiene la siguiente ecuación la ecuación de segundo grado:

$$(V_i \sin \theta) x_E^2 - x_E + V_i \sin \theta = 0 \quad (9.10)$$

cuya solución es

$$x_E = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4V_i^2 \sin^2 \theta}}{2V_i \sin \theta} \quad (9.11)$$

La ecuación (9.11) no tiene solución si $1 - 4V_i^2 \sin^2 \theta < 0$ y tiene dos soluciones reales si $1 - 4V_i^2 \sin^2 \theta > 0$ proporcionando la abscisa adimensional de los puntos de equilibrio:

$$x_{E1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4V_i^2 \sin^2 \theta}}{2V_i \sin \theta} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4V_i'^2}}{2V_i'} \quad (9.12)$$

$$x_{E2} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4V_i^2 \sin^2 \theta}}{2V_i \sin \theta} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4V_i'^2}}{2V_i'} \quad (9.13)$$

Así, la distancia entre los puntos de equilibrio en forma adimensional es

$$|\bar{x}_{E2} - \bar{x}_{E1}| = \frac{\sqrt{1 - 4V_i'^2}}{V_i'} \quad (9.14)$$

La ecuación (9.11) que proporciona la abscisa de los puntos de equilibrio tiene una única solución si

$$1 - 4V_i'^2 \sin^2 \theta = 1 - 4V_i'^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = 2V_i' \quad (9.15)$$

de donde se deduce la correspondiente Longitud característica adimensional como $L_c = 1/2V_i'$.

Esta obtención de L_c puede realizarse quizás con mayor claridad adimensionalizando $\dot{L}_c = \dot{\Gamma}^* / 2V_i'^*$. Para ello, basta con aplicar las relaciones (8.1a), (8.1b), (6.41), (6.46) y (6.49) a la ecuación (9.7):

$$\dot{L}_c = \frac{\dot{\Gamma}^*}{2V_i'^*} = \frac{\dot{\Gamma}^*}{2V_i'^* \sin \theta} = \frac{R_v^* U_0^*}{2V_i'^* \sin \theta} = \frac{R_v^* U_0^*}{2V_i' U_0^* \sin \theta} = \frac{R_v^*}{2V_i'} \quad (9.16)$$

de donde

$$\frac{\dot{L}_c}{R_v^*} = \frac{1}{2V_i'} \Rightarrow L_c = \frac{1}{2V_i'} \quad (9.17)$$

La relación entre la longitud característica y la distancia entre los puntos de equilibrio en forma adimensional se obtiene de la ecuación (9.14):

$$\frac{|\bar{x}_{E2} - \bar{x}_{E1}|}{2} = \frac{\sqrt{1 - 4V_i'^2}}{2V_i'} \quad (9.18)$$

De la comparación de (9.17) con (9.18) se deduce que cuando $V_i' \rightarrow 0$, el valor de $\frac{|\bar{x}_{E2} - \bar{x}_{E1}|}{2} \rightarrow L_c$.

9.1.3. Trayectorias Límite

Las *trayectorias límite* (que comienzan en el punto de silla y no pueden ser alcanzadas por las partículas que vienen desde encima del vórtice) se obtienen ejecutando el programa *ligtravoin*, de manera idéntica al caso del vórtice Rankine. La forma y la amplitud de la región encerrada por las trayectorias límite viene determinada por el valor de la velocidad terminal de caída (V_t). Al aumentar la velocidad terminal de caída la región encerrada por las trayectorias límite es menos amplia hasta que para una velocidad terminal de caída suficientemente elevada dicha zona es tan pequeña que prácticamente puede considerarse que desaparece, como se aprecia en la Figura 9-3.

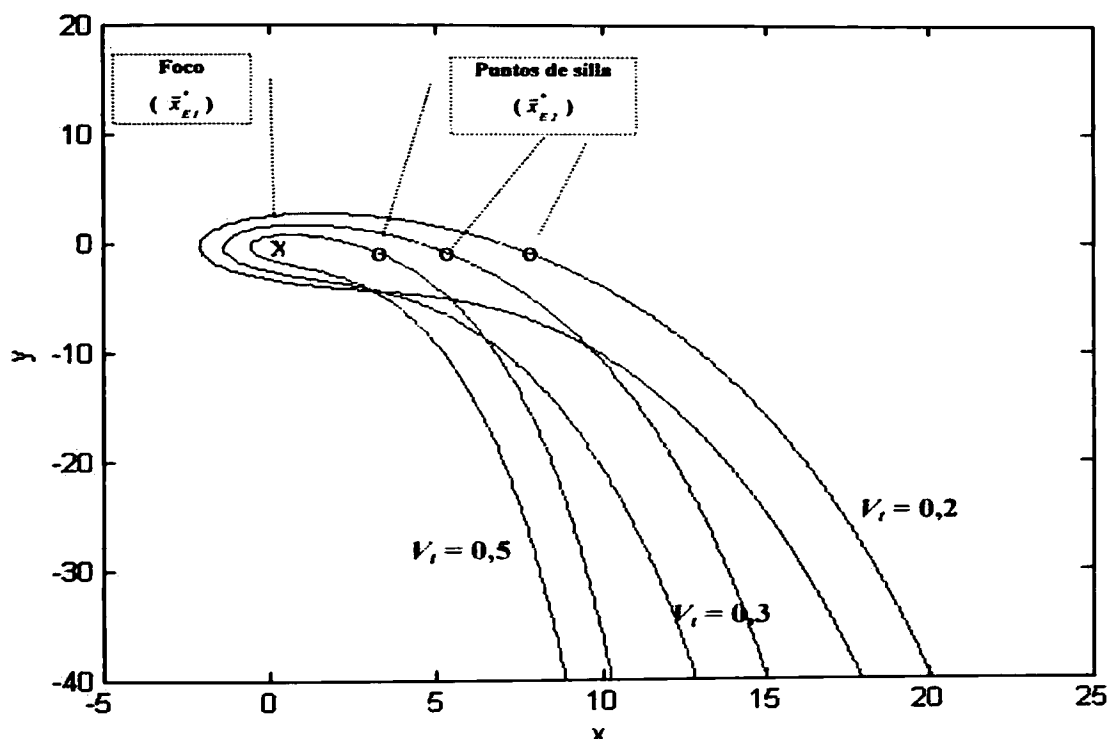


Figura 9-3: Forma y amplitud de la región encerrada por las trayectorias límite para diferentes valores de V_t (caso del vórtice Kaufmann).

Todos los comentarios realizados para el vórtice Rankine en el apartado 8.1.3. siguen siendo válidos para el vórtice Kaufmann.

9.1.4. Formulación del Criterio de escape

El criterio según el cual se considera que la partícula ha escapado del vórtice es el mismo que ya se precisó en el caso del vórtice Rankine en el apartado 8.1.4., es decir, “se considera que una partícula ha escapado del vórtice cuando su distancia al foco $\bar{x}_{E1}^*$ sea igual a 1,5 veces la separación entre los puntos de equilibrio”. En la siguiente Figura 9-4 -en la que aparece dicha distancia D adimensionalizada con el radio del vórtice- se muestra el acierto de dicha elección.

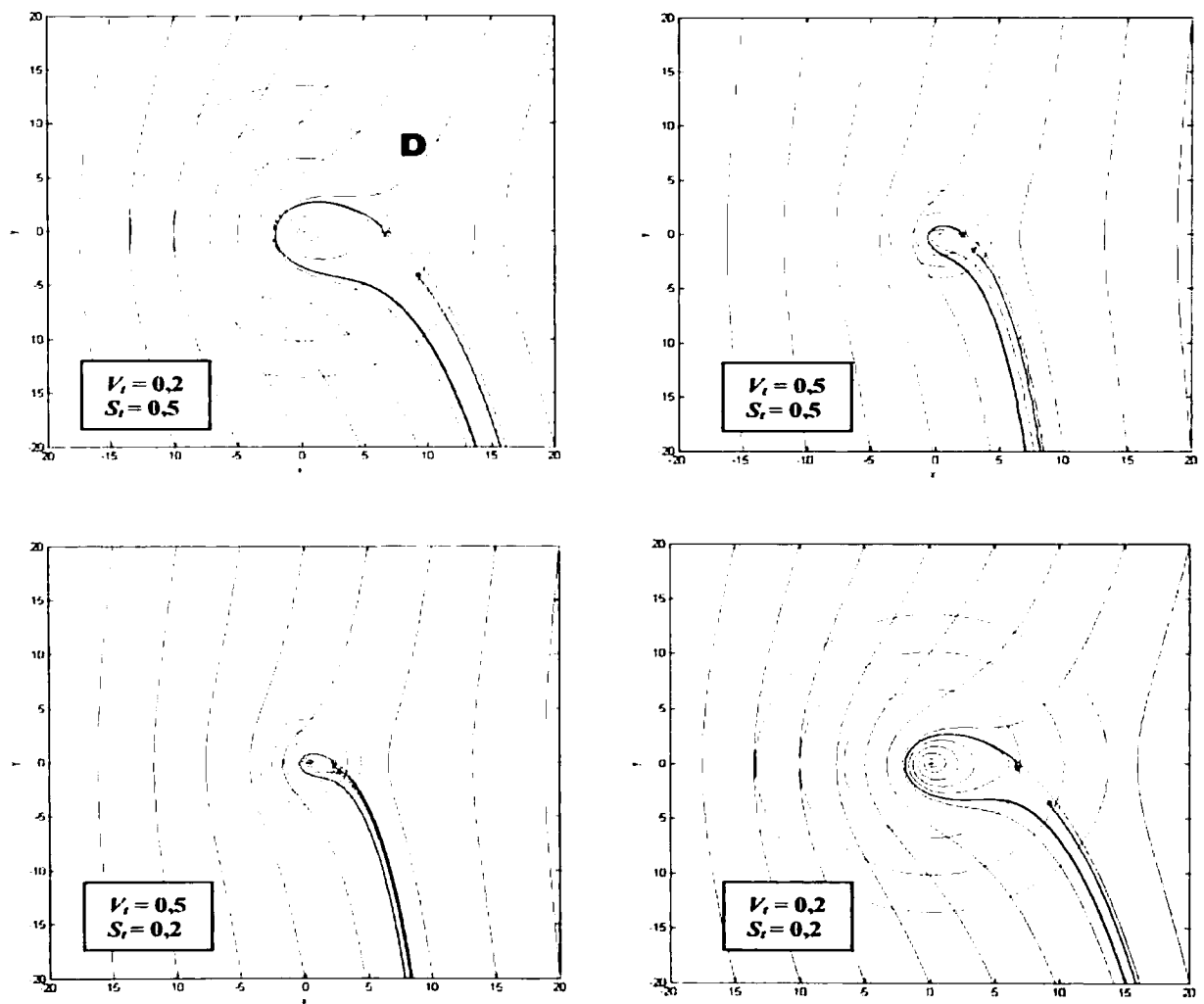


Figura 9-4: Distancia de escape (D) para vórtice Kaufmann.

Por razones idénticas a las señaladas en el apartado 8.1.4., en los siguientes cálculos se ha tomado la posición inicial de la partícula a una distancia del foco igual a un 1% del radio del vórtice, es decir:

$$|\vec{x}_0^* - \vec{x}_{E1}^*| = 0.01R_v^* \quad (9.19)$$

9.1.5. Obtención Numérica del Tiempo de escape y análisis de la influencia de variables

Como para el vórtice Rankine, se ha obtenido el Tiempo de escape de una partícula mediante el programa de elaboración propia *tescapeiner*; en dicho programa se han introducido los mismos datos de partida que en aquel caso. En primer lugar se recoge en la Tabla 9-3 y se representa en la Figura 9-5, el Tiempo de escape T_e de la partícula –situada inicialmente dentro de la región de captura– frente a la velocidad terminal de caída (V_t) para diferentes valores del número de Stokes (S_t). Del mismo modo que para el vórtice Rankine el Tiempo de escape disminuye monótonamente al aumentar la velocidad terminal de caída independientemente del número de Stokes.

TABLA 9-3. Tiempo de escape (T_e) para diferentes valores de V_t y S_t , caso del vórtice Kaufmann

S_t	V_t	T_e
0,3	0.02	863496.71
	0.04	57265.85
	0.06	12841.08
	0.08	4566.88
	...	...
0,5	0.02	517879.91
	0.04	37059.17
	0.06	8699.79
	0.08	3938.66
	...	...
0,7	0.02	385612.40
	0.04	28960.68
	0.06	6602.24
	0.08	2437.80
	...	...
1	0.02	270378.77
	0.04	23577.36
	0.06	5024.77
	0.08	2047.31
	...	...

Fuente: Programa informático "*tescapeiner*" de elaboración propia.

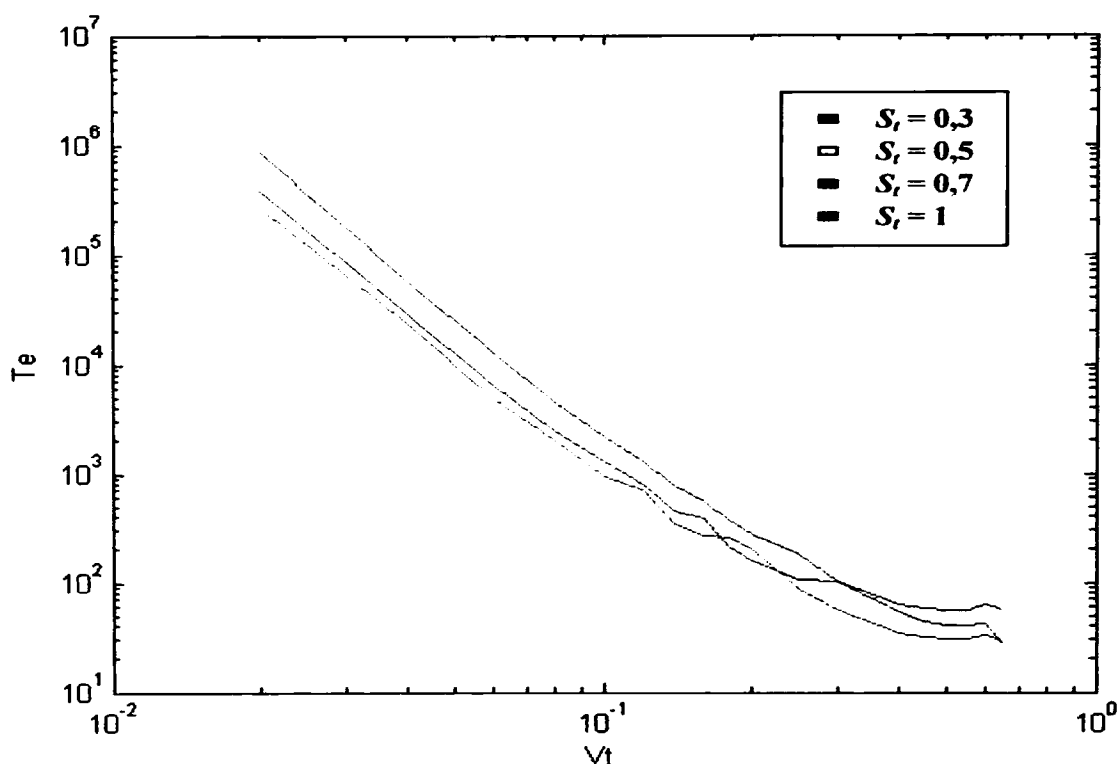


Figura 9-5: Tiempo de escape (T_e) frente a la velocidad terminal de caída (V_t) para diferentes S_t (caso del vórtice Kaufmann).

La influencia de la inercia de la partícula (S_t) en el Tiempo de escape manteniendo fijo el valor de V_t puede observarse en la siguiente Figura 9-6. De nuevo el paralelismo de resultados con el vórtice Rankine se mantiene: *el Tiempo de escape tiende a disminuir a medida que el número de Stokes crece, pero esta disminución del Tiempo de escape no es monótona sino que aparecen una serie de oscilaciones o picos.*

Para buscar una explicación al hecho de que a veces las partículas tardan más en escapar a pesar de que su inercia sea mayor, se ha estudiado en detalle el rango de números de Stokes correspondiente a una de las oscilaciones; en concreto, se ha analizado la parte de la curva señalada en azul en la Figura 9-6, en la que el valor del número de Stokes es de 0,32 en el punto inicial, de 0,386 en el punto más alto y de 0,44 en el punto final.

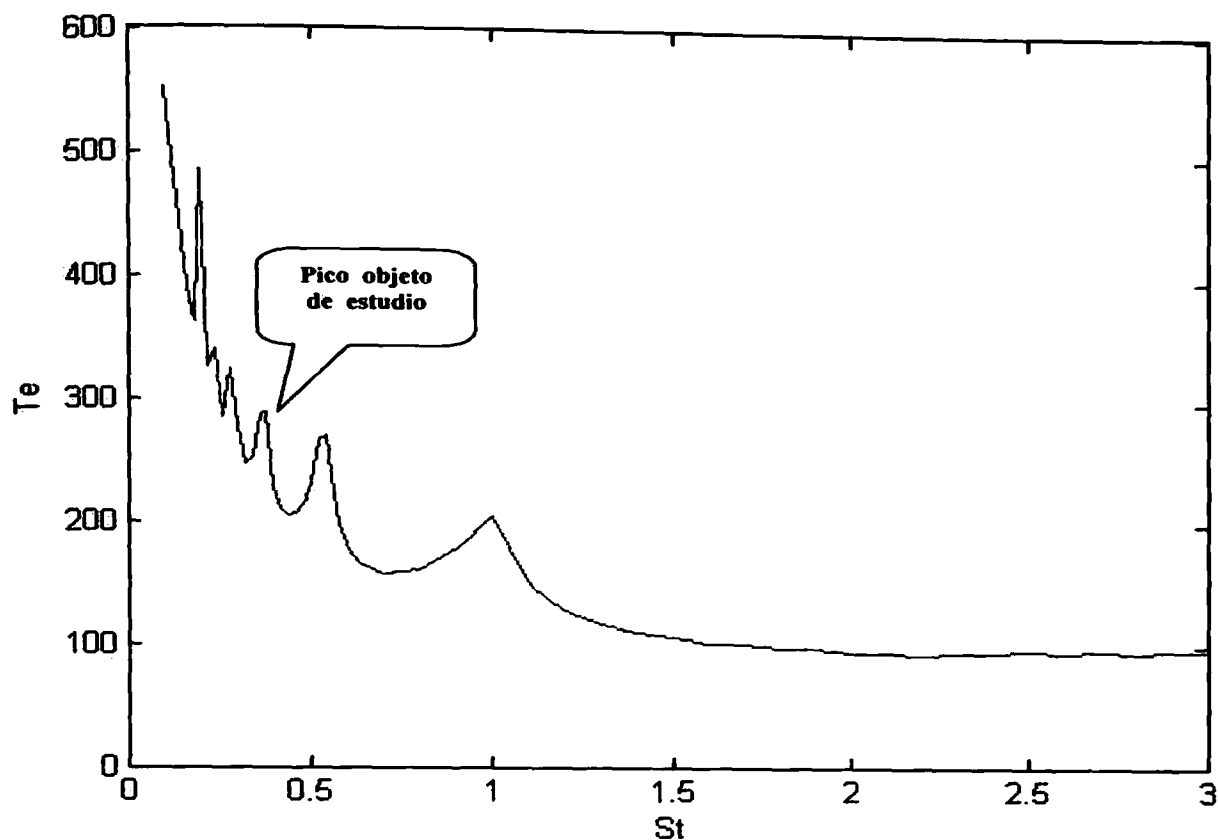


Figura 9-6: Variación del Tiempo de escape (T_e) con la inercia de las partículas (St) para $V_f=0,2$ (caso del vórtice Kaufmann).

Los resultados del análisis del pico marcado en azul son los que pueden observarse en la siguiente Figura 9-7. En la misma se muestra en rojo la *trayectoria* de una partícula soltada cerca del centro del vórtice, en verde la posición del *punto de silla* y en azul las *trayectorias límite* para varios valores del número de Stokes (0.32 al 0.44) en la zona mencionada del citado pico objeto de estudio.

Conviene puntualizar que en las figuras se ha mantenido el mismo criterio de colores utilizado para el vórtice Rankine a fin de facilitar la posterior comparación entre los dos modelos de vórtices en el siguiente capítulo.

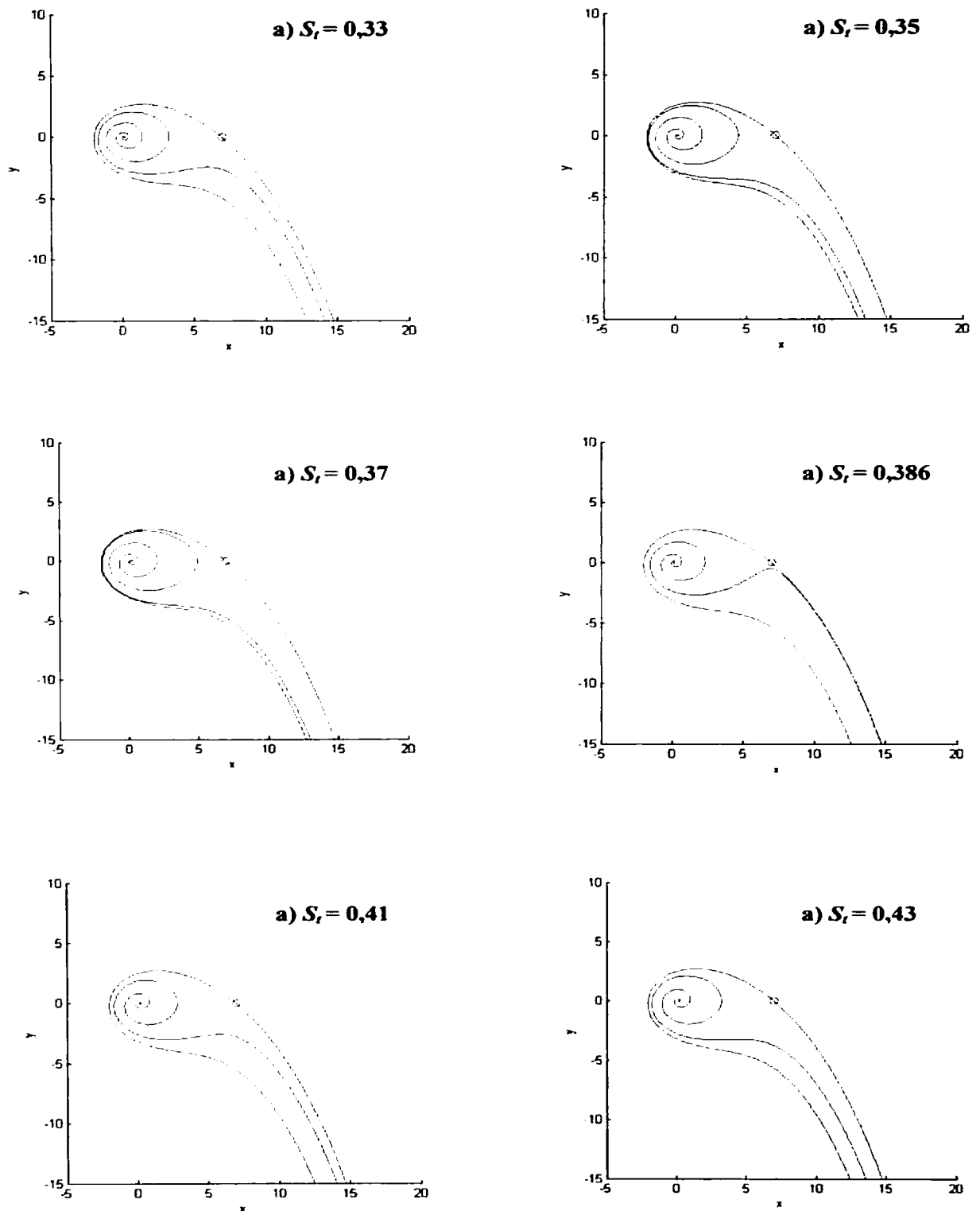


Figura 9-7: Trayectorias de una partícula en uno de los rangos de números de Stokes en que el tiempo de escape oscila (caso del vórtice Kaufmann).

De la Figura 9-7 se desprende la misma justificación que se dedujo en el capítulo anterior para el vórtice Rankine; el comportamiento de oscilaciones del Tiempo de escape de las partículas está relacionado con la mayor o menor distancia entre la partícula y el punto de silla $\bar{x}_{E2}^*$ en la última vuelta. En dicha figura puede apreciarse que:

- En la zona ascendente del pico en estudio ($S_t = 0,33; 0,35; 0,37$) donde el Tiempo de escape aumenta, la partícula describe tres vueltas antes de escapar y a medida que el número de Stokes crece, pasa cada vez más cerca del punto de silla. Por eso el Tiempo de escape aumenta con el número de Stokes en esta zona.
- En el punto superior del pico en estudio ($S_t = 0,386$), la partícula ya no da la tercera vuelta sino que escapa pasando muy cerca del punto de silla.
- En la zona descendente del pico ($S_t = 0,41; 0,43$), disminuye el Tiempo de escape como es cabía esperar. La partícula da dos vueltas, siempre bastante lejos del punto de silla y al aumentar la inercia de las partículas el efecto del vórtice sobre ellas es menor.

9.1.6. Obtención Analítica de la fórmula del Tiempo de escape

La obtención de la fórmula se realiza del mismo modo que en el apartado 8.1.6. para el vórtice Rankine.

Este desarrollo conduce a la ecuación (8.30): $\bar{v}_e^* = \frac{\text{espacio}}{T_e^*} \approx \tau_p^* \frac{D\bar{u}^*}{Dt^*}$,

donde hay que tener en cuenta que:

- el *espacio* es del orden de la *escala de longitud característica* que, como se vio en el apartado 9.1.2., viene dada para el vórtice Kaufmann por la ecuación (9.7): $L_c^* = \Gamma^* / 2V_t^{*2}$.
- $D\vec{u}^*$ es del orden de V_t^{*2} , puesto que para el vórtice Kaufmann sigue siendo válida la segunda consideración realizada en el apartado 8.1.6. para el vórtice Rankine.
- Dt^* es del orden de la *escala de tiempo característica* de las partículas, que se obtiene dividiendo la escala de longitud característica (L_c^*) por el valor de la velocidad de las partículas $|\vec{v}^*| \sim V_t^{*2}$, es decir, $t_c^* = (\Gamma^* / 2V_t^{*2}) / V_t^{*2} = \Gamma^* / 2V_t^{*4}$.

Sustituyendo estas tres equivalencias en la ecuación (8.30), ésta queda del siguiente modo:

$$\frac{\Gamma^* / 2V_t^{*2}}{T_c^*} \approx \tau_p^* \frac{V_t^{*2}}{\Gamma^* / 2V_t^{*2}} \quad (9.20)$$

De la ecuación (9.20) se despeja T_c^* :

$$T_c^* \approx \frac{\Gamma^{*2}}{4\tau_p^* V_t^{*4}} \quad (9.21)$$

con lo que se obtiene para Tiempo de escape la misma expresión (8.33) que para el vórtice Rankine, es decir, $T_c^* = K_e \Gamma^{*2} / \tau_p^* V_t^{*4}$ incluyendo en la *Constante de tiempo de escape* K_e el coeficiente 4 que aparece en el denominador del segundo miembro de la ecuación (9.21).

9.1.7. Comparación de los Resultados numéricos con la Fórmula teórica. Validez de la Fórmula

La comprobación de la validez de la fórmula teórica del Tiempo de escape para el vórtice Kaufmann (ecuación 8.33) se realiza mediante simulación numérica de un modo idéntico al seguido para el vórtice Rankine en el apartado 8.1.7. La única diferencia es que en lugar de utilizar el campo de velocidades del vórtice Rankine –ecuaciones (4.63)– se utiliza el del vórtice Kaufmann –ecuación (4.64)–. Por tanto, siguiendo el procedimiento detallado en las ecuaciones (8.34) a (8.43) se obtiene la ecuación de la trayectoria límite:

$$y^* = \sqrt{(x_0^{*2} + y_0^{*2} + R_v^{*2}) e^{\frac{4V_t^{*}}{\Omega^* R_v^{*2}}(x^* - x_0^*)} - x^{*2} - R_v^{*2}} = \quad (9.22a)$$

$$\sqrt{(x_0^{*2} + y_0^{*2} + R_v^{*2}) e^{\frac{2V_t^{*}}{\Gamma^*}(x^* - x_0^*)} - x^{*2} - R_v^{*2}}$$

donde:

- x^*, y^* = coordenadas de la trayectoria límite.
- x_0^*, y_0^* = coordenadas de un punto de la trayectoria límite -punto de silla, ecuación (8.10)–.
- V_t^* = componente de la Velocidad terminal de caída en fluido en reposo perpendicular al eje del vórtice.
- R_v^* = radio del vórtice.
- Ω^* = doble de la velocidad angular del vórtice.
- Γ^* = circulación del vórtice.

La ecuación de la trayectoria límite también puede expresarse en forma adimensional utilizando las relaciones (6.49):

$$y = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + 1) e^{2V_t'(x - x_0)} - x^2 - 1} = \quad (9.22b)$$

$$\sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + 1) e^{2V_t' \sin\theta(x - x_0)} - x^2 - 1}$$

Como para el vórtice Rankine, la ecuación de la trayectoria límite debe ser resuelta iterativamente. Todos los comentarios que se realizaron para dicho vórtice siguen siendo válidos para el vórtice Kaufmann. Las soluciones obtenidas –en forma adimensional– para la ecuación (9.22b) en función de la velocidad terminal (V_t) son los que se exponen en la Tabla 9-4 y se representan en la Figura 9-8.

TABLA 9-4. Valores adimensionales Límite para la malla de partículas en la región de captura de un vórtice Kaufmann, en función de V_t

V_t	Límites para la malla	
	x_i	x_f
...	...	...
0,24	-0,726	2,461
0,22	-0,864	2,753
0,20	-1,019	3,094
0,18	-1,200	3,501
0,16	-1,416	4,001
0,15	-1,543	4,319
0,14	-1,683	4,635
0,13	-1,843	5,021
0,12	-2,028	5,468
0,11	-2,243	5,994
0,10	-2,497	6,623
0,09	-2,805	7,388
0,08	-3,187	8,340
0,07	-3,671	9,560
0,06	-4,315	11,183
0,05	-5,210	13,450
0,04	-6,544	16,812
0,03	-8,758	22,487
0,02	-13,173	33,765
0,008	-32,993	84,469
0,006	-43,997	112,631
...	...	...

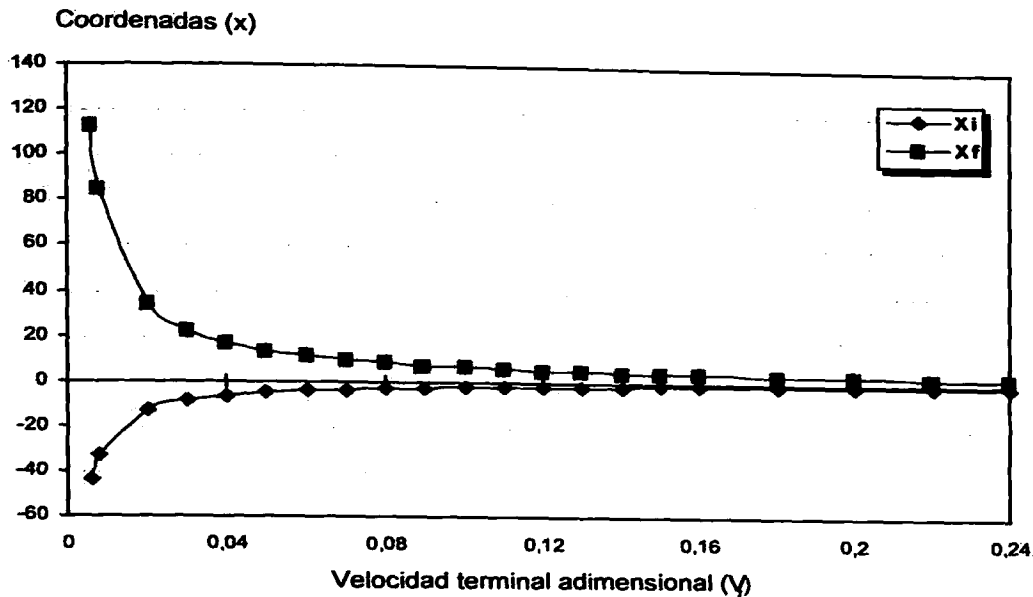


Figura 9-8: Límites de la malla de partículas en la región de captura del vórtice en función de V , (caso del vórtice Kaufmann).

Los límites de la malla de partículas en función del diámetro de la partícula (d_p^*) y de la circulación del vórtice (Γ^*) se recogen en la Tabla 9-5 y se representan en la Figura 9-9.

El procedimiento seguido para ello es el mismo que para el vórtice Rankine —ecuaciones (8.45) a (8.47)— y los comentarios realizados en aquel caso son también de aplicación para el vórtice Kaufmann.

También han sido los mismos los datos de partida:

- β = relación entre las densidades de la partícula (ρ_p^*) y del fluido (ρ^*) = 1000/1,2.
- g^* = aceleración de la gravedad = 9,8 m/s².
- ν^* = viscosidad cinemática del fluido = 1,5 · 10⁻⁵ m²/s.
- R_v^* = radio del vórtice = 0,001 m.

TABLA 9-5. Valores adimensionales Límite para la malla de partículas en la región de captura de un vórtice Kaufmann, en función de d_p^* y Γ^*

d_p^* (μm)	Γ^* (m^2/s)					
	10^{-5}		$3 \cdot 10^{-5}$		10^{-4}	
	x_i	x_f	x_i	x_f	x_i	x_f
4	-5,394	13,917				
5	-3,389	8,847				
6	-2,272	6,066	-7,232	18,594		
7	-1,568	4,361	-5,281	13,630		
8	-1,076	3,221	-4,005	10,400		
9	-0,696	2,398	-3,121	8,175	-10,755	27,585
9,5					-9,645	24,751
10	-0,364	1,752	-2,478	6,575	-8,697	22,330
11	-0,008	1,162	-1,191	5,380	-7,171	18,439
12			-1,610	4,460	-6,008	15,477
13			-1,300	3,733	-5,099	13,169
14			-1,041	3,143	-4,375	11,334
14,5			-0,924	2,887		
15			-0,817	2,652	-3,788	9,851
15,5			-0,714	2,435		
16			-0,615	2,233		
17			-0,424	1,863	-2,900	7,623
18			-0,234	1,523		
19			-0,021	1,185		
20			0,311	0,749	-2,011	5,428
25					-1,116	3,312
30					-0,532	2,068
35					-0,532	2,068

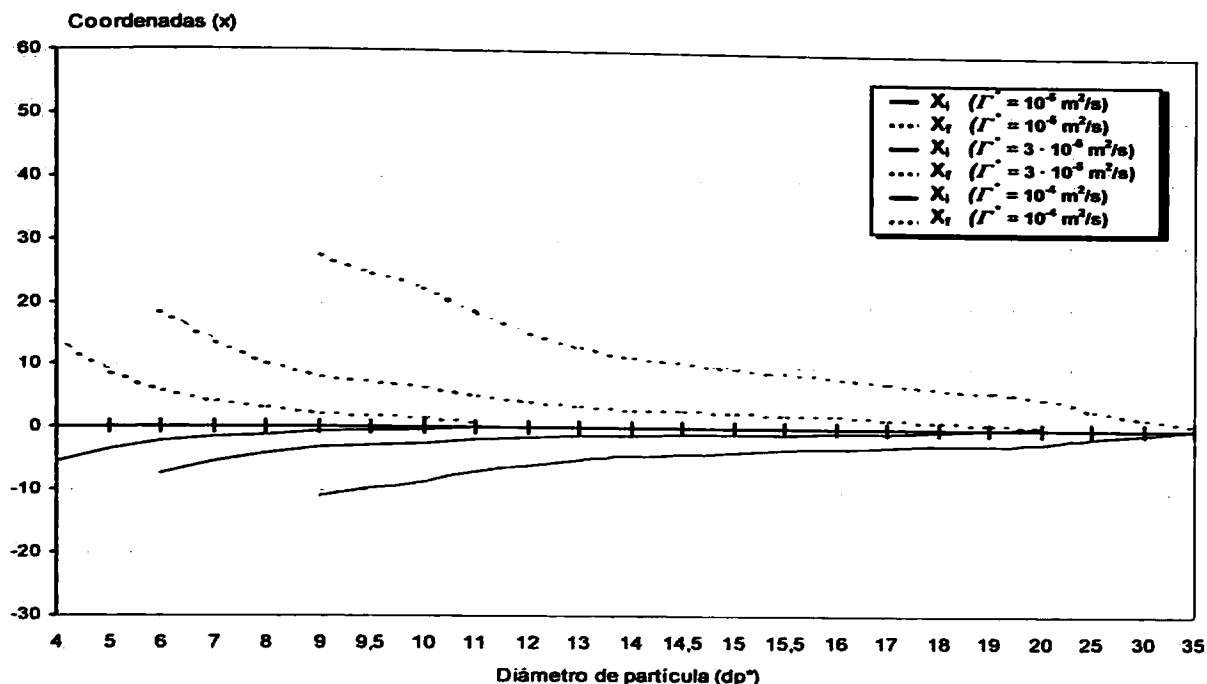


Figura 9-9: Límites de la malla de partículas en la región de captura del vórtice en función de d_p^* y Γ^* (caso del vórtice Kaufmann).

Determinación de la Constante de tiempo de escape (K_e)

Se realiza de un modo completamente idéntico al del vórtice Rankine (apartado 8.1.7.), introduciendo en el programa *Kemedia* los mismos datos de partida. Así se obtiene numéricamente el valor del Tiempo de escape adimensional (T_e) que sustituido en la ecuación (8.51) proporciona el valor de K_e .

En la siguiente Tabla 9-6, se muestran los distintos valores de V_t , S_t , T_e , K_e y también el valor de F_p -obtenido mediante la ecuación (6.53)- que recoge la influencia conjunta de V_t y S_t .

TABLA 9-6. Valores de la Constante de tiempo de escape (K_e) y del Tiempo de escape (T_e) en función de V_t , S_t y F_p , caso del vórtice Kaufmann

			V_t						
			0,006	0,008	0,02	0,03	0,04	0,06	...
S_t	0,1	F_p			0,00004		0,00016	0,00036	
		T_e			2250000		148991,26	31311,62	...
		K_e			0,009		0,00953	0,01014	
	0,3	F_p			0,000012		0,00048	0,00108	
		T_e			754166,67		53889,1	11928,7	...
		K_e			0,00905		0,010346	0,01159	
	0,7	F_p			0,00028		0,00112	0,00252	
		T_e			348499,58		25479,2	6137,28	...
		K_e			0,009758		0,0114	0,01392	
	1	F_p	0,000036	0,000064	0,000400	0,000900	0,001600	0,003600	...
		T_e	27777777	9179687,5	250384,65	54292,8	19199	4644,78	
		K_e	0,009	0,0094	0,010015	0,01099	0,0123	0,0150	
	3	F_p	0,000108	0,000192	0,001200	0,002700	0,004800	0,010800	...
		T_e	9259259,3	3352864,6	96568,5	22590,7	8528,65	2316,55	
		K_e	0,009	0,0103	0,01159	0,01372	0,01637	0,0021	
	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Fuente: Programa informático "Kemedía" de elaboración propia.

De esta Tabla es posible concluir que:

- Para un número de Froude tendiendo a cero ($F_p \rightarrow 0$) y para una Velocidad terminal de caída tendiendo a cero ($V_t \rightarrow 0$), la Constante de tiempo de escape tiende al valor 0,009 ($K_e \rightarrow 0,009$) para el vórtice Kaufmann.
- Da lugar a las siguientes representaciones:
 - Constante de tiempo de escape K_e frente al número de Froude de la partícula F_p para diferentes valores del número de Stokes S_t (Figura 9-10 y Figura 9-11).
 - Constante de tiempo de escape K_e frente a la Velocidad terminal de caída en fluido en reposo V_t para diferentes valores del número de Stokes S_t (Figura 9-12).

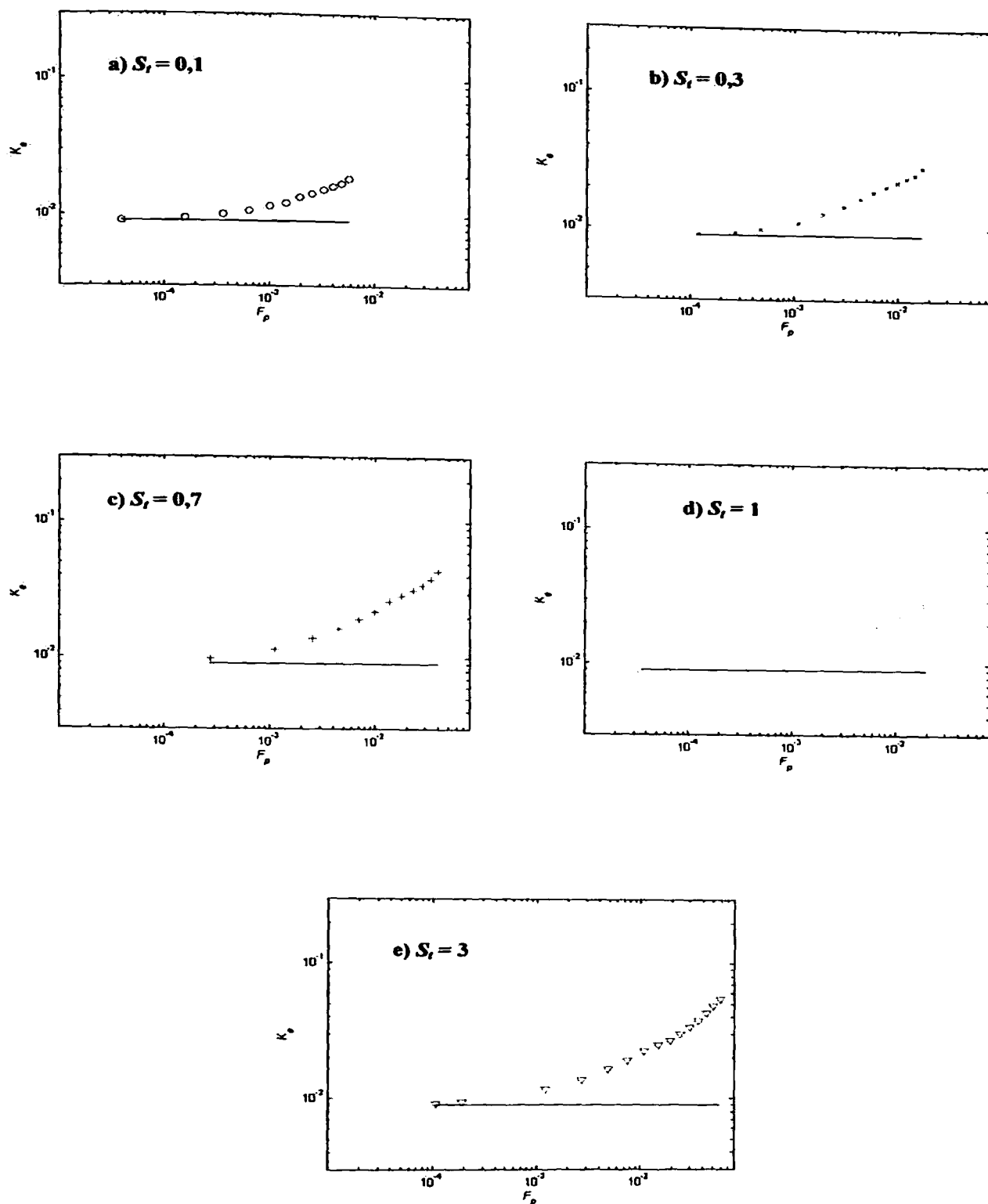


Figura 9-10: Constante de tiempo de escape (K_e) frente al número de Froude de la partícula (F_p) para diferentes números de Stokes (caso del vórtice Kaufmann).

En la Figura 9-10 se representan el valor constante 0,009 (*línea recta de color negro*) y el valor de K_e obtenido mediante la ecuación (8.51) a partir de los valores calculados numéricamente para el Tiempo de escape (*símbolos*), deduciéndose que para valores suficientemente pequeños del número de Froude de la partícula ($F_p < 10^{-3}$), la constante K_e tiende al valor 0,009 y que a medida que dicho parámetro disminuye, la coincidencia entre los resultados numéricos y dicho valor constante aumenta. Para mayores valores de F_p , el valor de K_e diverge de 0,009 por lo que la ecuación (8.33) que proporciona el Tiempo de escape deja de tener validez. La explicación a este hecho es la misma que se expuso para el vórtice Rankine en el apartado 8.1.7.

En la Figura 9-11 se representan conjuntamente las gráficas de la Constante de tiempo de escape (K_e) frente al número de Froude de la partícula (F_p) para los distintos valores del número de Stokes (S_t), observándose el mismo hecho que para el vórtice Rankine: las curvas K_e - F_p prácticamente coinciden. La explicación es exactamente la misma que la dada en aquella ocasión.

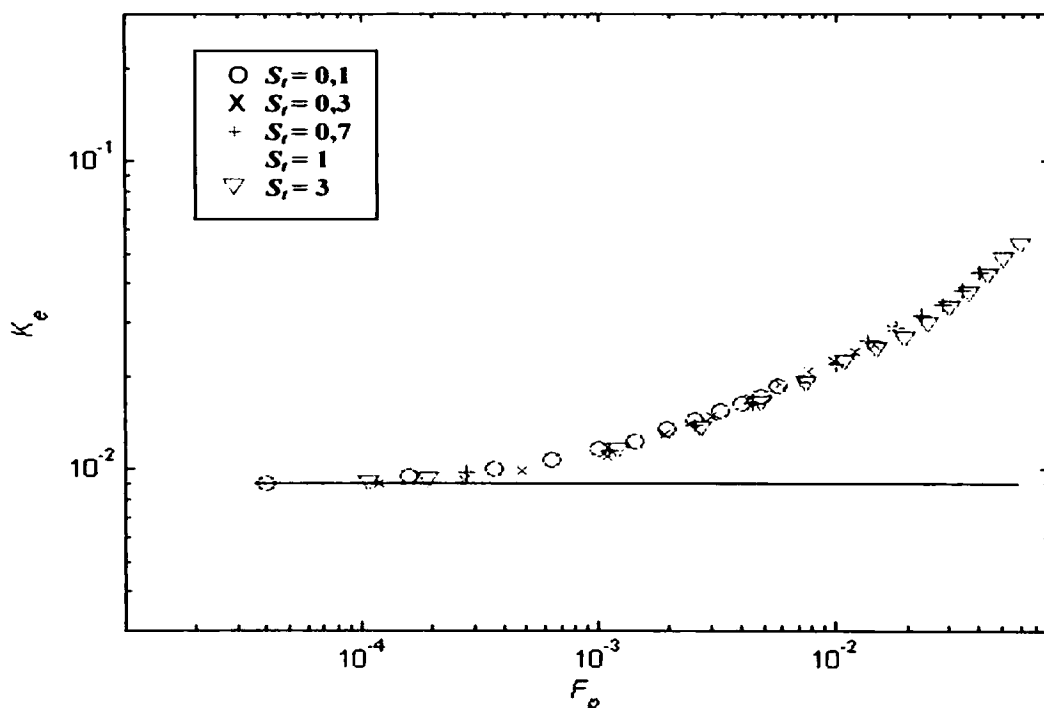


Figura 9-11: Comparación de la Constante de tiempo de escape (K_e) frente al número de Froude de la partícula (F_p) para distintos números de Stokes (caso del vórtice Kaufmann).

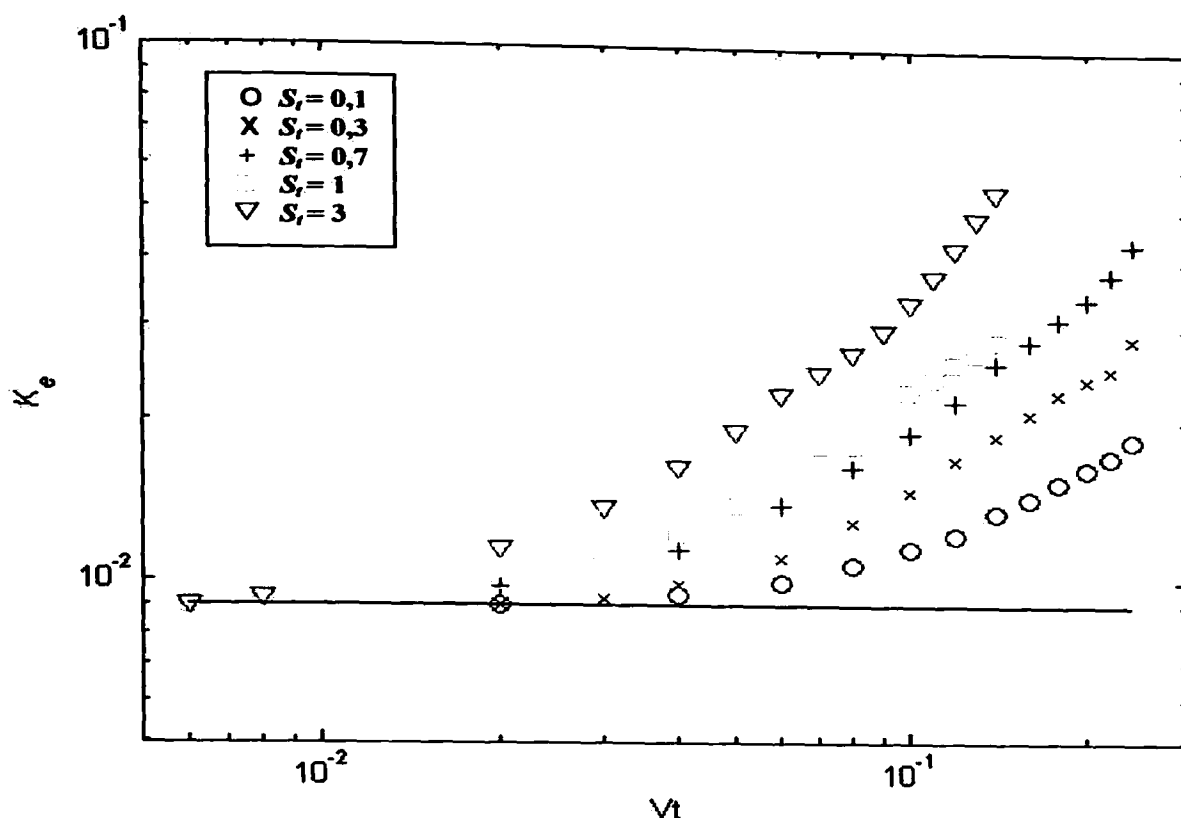


Figura 9-12: Constante de tiempo de escape (K_e) frente a la Velocidad terminal (V_t) para diferentes números de Stokes (caso del vórtice Kaufmann).

En la Figura 9-12, también se observa la tendencia anterior de K_e al valor 0,009 conforme disminuye la velocidad terminal V_t y que al disminuir la inercia de las partículas (S_t) menor es el valor de K_e . Ello se debe a la razón ya comentada para el vórtice Rankine de que las partículas son atrapadas por el vórtice más fácilmente.

Validez de la Fórmula

Tras obtener el valor de la Constante de tiempo de escape (K_e) en el caso del vórtice de Kaufmann, se procede a verificar -mediante simulación numérica- para este modelo la validez de la Fórmula (8.33) obtenida en esta Tesis para el Tiempo de escape. Al igual que para el vórtice Rankine, es conveniente realizarlo en términos de variables físicas con magnitudes tangibles por su utilidad práctica,

aunque por supuesto sería posible hacerlo en términos de magnitudes adimensionales. El procedimiento utilizado es el mismo que se detalló en el apartado 8.1.7. –caso vórtice Rankine–; los cálculos se han realizado con el programa *dtmedia* (Anexo II) con los mismos datos de partida y con los límites para la malla de partículas (x_i , x_f) indicados en la Tabla 9-5. El mencionado programa informático realiza los cálculos en términos de variables adimensionales obteniendo como resultado el valor adimensional del Tiempo de escape promedio $\langle T_e \rangle$ (Tabla 9-7). El correspondiente valor dimensional se obtiene por aplicación de la ecuación (6.49): $T_e^* = T_e (R_v^* / U_0^*) = T_e (R_v^{*2} / \Gamma^*)$ y su representación frente a d_p^* en la Figura 9-13.

TABLA 9-7. Valores adimensionales del Tiempo de escape promedio ($\langle T_e \rangle$) de un vórtice Kaufmann, en función de d_p^* y Γ^*

d_p^* (μm)	$\langle T_e \rangle$		
	$\Gamma^* = 10^{-5} \text{ (m}^2/\text{s)}$	$\Gamma^* = 3 \cdot 10^{-5} \text{ (m}^2/\text{s)}$	$\Gamma^* = 10^{-4} \text{ (m}^2/\text{s)}$
4	13518506,9		
5	1477066,4		
6	245511,1	6312310,5	
7	58061,7	1354919,1	
8	17280,8	359188,2	
9	6481,4	114878,7	4020735,3
9,5			2421136,9
10	2949,6	41598,2	1437772,6
11	1751,8	16915,2	561532,2
12		7557,3	237994,2
13		3711,3	107826,2
14		1979,8	52634,7
14,5		1478,1	
15		1128,6	27231,4
15,5		878,8	
16		697,3	
17		450,3	8557,8
18		319,7	
19		243,1	
20		218,1	2047,0
25			354,5
30			105,1
35			44,29

Fuente: Programa informático “*dtmedia*” de elaboración propia.

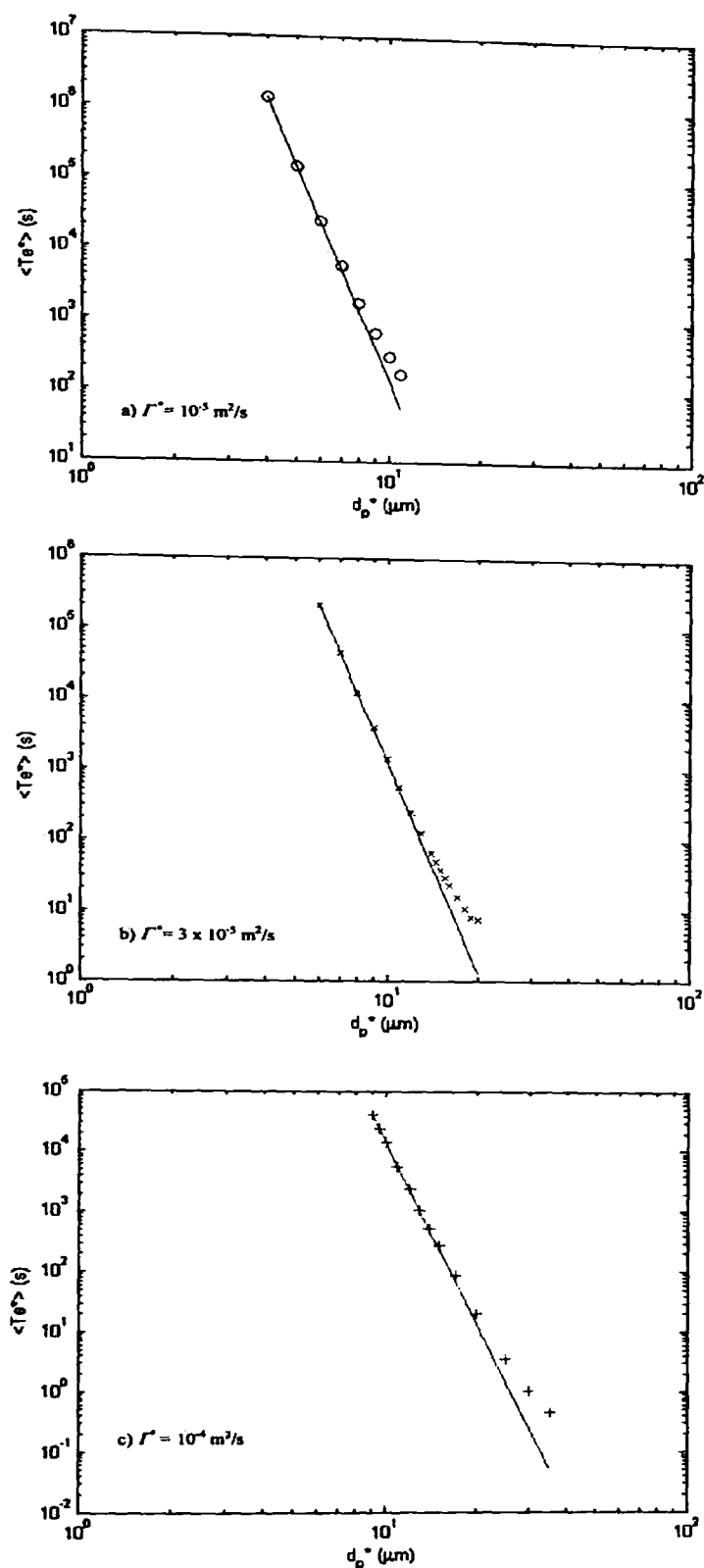


Figura 9-13: Tiempo de escape (T_e) frente al diámetro de la partícula (d_p) para distintos valores de la circulación del vórtice y radio del vórtice $R_v^* = 0,001 \text{ m}$ (caso del vórtice Kaufmann).

En dicha Figura 9-13 se han representado por *líneas sólidas* los resultados teóricos obtenidos con la ecuación (8.33) –con $K_e=0,009$ – y por *símbolos* los resultados obtenidos para el Tiempo de escape mediante simulación numérica. La figura muestra –al igual que ya se vio para el vórtice Rankine– que el Tiempo de escape obtenido mediante simulación numérica y el teórico proporcionado por la ecuación (8.33) coinciden para valores del diámetro de la partícula suficientemente pequeños ($\approx 10 \mu\text{m}$).

En la siguiente Figura 9-14 se recopila en una misma gráfica –para los distintos valores considerados de la circulación del vórtice– el Tiempo de Escape (T_e^*) frente al diámetro de la partícula (d_p^*). Se observa, como cabía esperar, que a igualdad de tamaño de partícula el Tiempo de escape aumenta con el incremento de la circulación del vórtice.

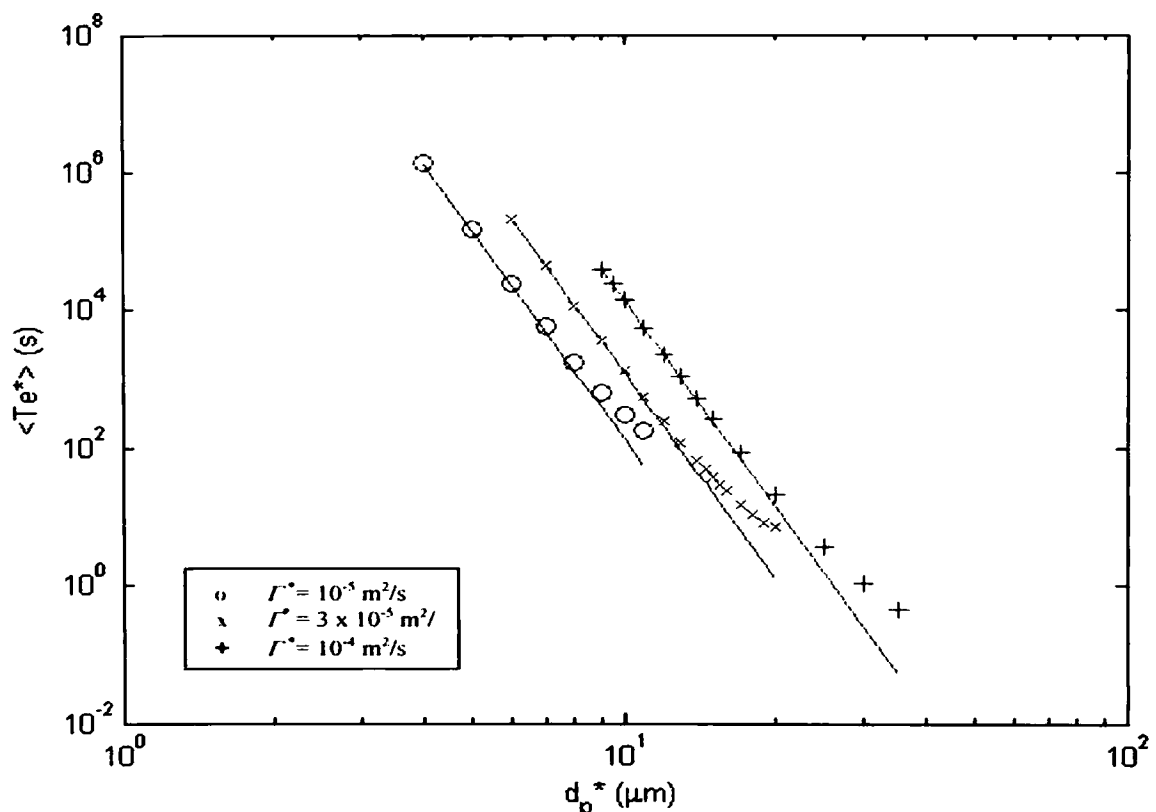


Figura 9-14: Comparación del Tiempo de escape (T_e^*) frente al diámetro de la partícula (d_p^*) para distintos valores de la circulación del vórtice y radio del vórtice $R_v^*=0,001 \text{ m}$ (caso del vórtice Kaufmann).

9.2. Análisis de la Velocidad media de sedimentación de partículas de un vórtice tridimensional

Como ya se ha hecho constar en otras ocasiones a lo largo del capítulo, vuelve a seguirse un procedimiento idéntico al utilizado para el vórtice Rankine (apartado 8.2.). Por tanto se sigue la metodología recogida en el diagrama de flujo de la Figura 7-2b y se utiliza para el cálculo numérico de la Velocidad media de sedimentación el programa informático *inclivel* (Anexo II). En él, se introducen los mismos datos de partida que para el vórtice Rankine y los límites para la malla de partículas indicados en la Tabla 9-5. Los resultados son los de la Tabla 9-8:

TABLA 9-8. Tiempo de escape promedio ($\langle T_e^* \rangle$) Numérico y Teórico (Fórmula) y Velocidad media de sedimentación ($\langle V_z \rangle$) de un vórtice Kaufmann, en función de d_p^* y Γ^*

d_p^* (μm)	Γ^* (m^2/s)								
	10^{-5}			$3 \cdot 10^{-5}$			10^{-4}		
	$\langle T_e^* \rangle$		$\langle V_z \rangle$	$\langle T_e^* \rangle$		$\langle V_z \rangle$	$\langle T_e^* \rangle$		$\langle V_z \rangle$
	(s)			(s)			(s)		
	Númerico	Fórmula		Númerico	Fórmula		Númerico	Fórmula	
4	1351850,7	1337000	0,047348						
5	147706,6	143600	0,073209						
6	24511,1	23200	0,104520	210410	208670	0,032849			
7	5806,2	5000	0,141054	45160	44670	0,044588			
8	1728,1	1300	0,188533	11970	11750	0,058102			
9	648,1	4000	0,233413	3380	3620	0,073375	40207,4	40207	0,0241386
9,5							24211,4	23415	0,0268726
10	299,9	1000	0,288722	1390	1260	0,090450	14377,7	14019	0,0297522
11	175,17	1000	0,335712	560	490	0,109074	5614,3	5405	0,0359468
12				250	200	0,130276	2379,9	2264	0,0427226
13				120	90	0,152619	1078,26	1017	0,0500759
14				70	40	0,176655	526,3	485	0,0580023
14,5				50	30	0,189077			
15				40	20	0,217706	272,3	243	0,0664860
15,5				30	20	0,231456			
16				20	10	0,245759			
17				20	10	0,274636	85,57	70	0,0849380
18				10	0	0,306654			
19				10	0	0,355536			
20				10	0	0,395939	20,47	14	0,116233
25							3,54	1	0,175215
30									
35									

Fuente: Programa informático "*inclivel*" de elaboración propia para $\langle V_z \rangle$
Programa informático "*dtmedia*" de elaboración propia para $\langle T_e^* \rangle$ numérico.

9.2.1. Representación gráfica de la Velocidad media de sedimentación frente al Tiempo de escape promedio

Una vez que, a partir del diámetro de las partículas d_p^* , se han obtenido los siguientes parámetros:

- 1) Tiempo de escape promedio $\langle T_e^* \rangle$ obtenido mediante Simulación numérica con el programa *dtmedia* (apartado 9.1.7.).
- 2) Tiempo de escape promedio $\langle T_e^* \rangle$ obtenido con la Fórmula (8.33) ó (8.53).
- 3) Velocidad media de sedimentación $\langle V_z \rangle$ obtenida mediante Simulación numérica con el programa *inclivel*.

Los resultados se sintetizan en la Figura 9-15; en la ella se representan - para los mismos valores de circulación del vórtice ya considerados en figuras anteriores- la Velocidad media de sedimentación $\langle V_z \rangle$ frente al Tiempo de escape promedio $\langle T_e^* \rangle$: con *líneas continuas* (el obtenido mediante la Fórmula) y con *símbolos* (el obtenido mediante la Simulación numérica).

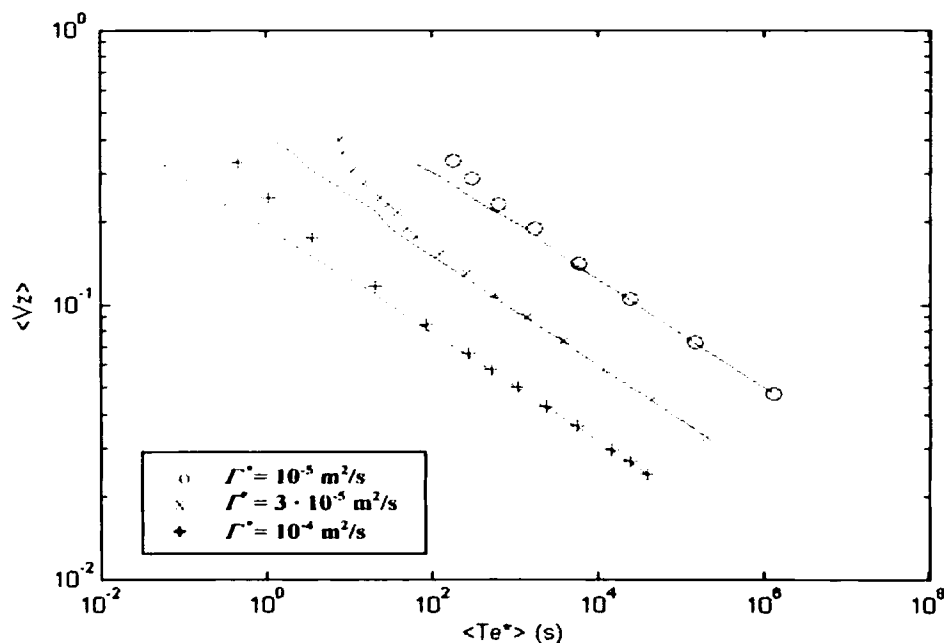


Figura 9-15: Velocidad media de sedimentación $\langle V_z \rangle$ frente al Tiempo de escape promedio $\langle T_e^* \rangle$ (caso del vórtice Kaufmann).

En la Figura 9-15 se observa –igual que con el vórtice Rankine- que para partículas suficientemente pequeñas (y por tanto con un tiempo de escape elevado) la curva $\langle V_z \rangle - \langle T_e^* \rangle$ representada en escala logarítmica es una línea recta, tanto para el tiempo de escape teórico como para el obtenido numéricamente; en cambio, para partículas grandes y pesadas los puntos de la gráfica ya no están sobre esa recta ni en el caso teórico ni en el numérico.

9.2.2. Obtención de la relación entre la Velocidad media de sedimentación y el Tiempo de escape promedio. Relación numérica

De la Figura 9-15 es posible establecer para el vórtice de Kaufmann las mismas relaciones (8.57) y (8.58) que se dedujeron para el vórtice Rankine en el apartado 8.2.4. Para ello, igual que en aquel caso, se escriben las ecuaciones algebraicas de las rectas que aparecen en la mencionada Figura 9-15. Ahora, el valor que toma la constante K_s en las ecuaciones (8.57) y (8.58) es de 0,744531243; 0,372392509 y 0,197889516 para $\Gamma^* = 10^{-5}$, $3 \cdot 10^{-5}$ y $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ respectivamente.

Se concluye que también para el vórtice Kaufmann, la velocidad media de sedimentación (adimensional) de pequeñas partículas pesadas situadas inicialmente en la región de captura es proporcional al inverso de la raíz quinta del Tiempo de escape promedio.

9.3. Análisis de la sedimentación de partículas en vórtices bidimensionales periódicos

Se ha seguido un procedimiento idéntico al empleado en el capítulo 8 para el vórtice Rankine, es decir, el descrito en el diagrama de flujo de la Figura 7-3 de esta Tesis (apartado 7.2).

9.3.1. Simulación de vórtices girando en el mismo sentido

Según se ha comentado anteriormente, el código informático implementado simula la existencia de los vórtices que se repiten periódicamente en las direcciones horizontal y vertical, girando todos ellos en el mismo sentido.

La diferencia con el capítulo 8 es que ahora se utiliza el campo de velocidades del vórtice Kaufmann en lugar de la del vórtice Rankine. Por tanto la representación esquemática de esta disposición de vórtices sigue siendo la de la Figura 8-23.

9.3.1.1. Análisis de trayectorias de partículas

Partículas sin inercia

Las trayectorias se obtienen de la misma forma que se expuso en detalle en el capítulo 8 para el vórtice Rankine. Por tanto se utiliza el programa informático *trahormuchos_s_i* sustituyendo el campo de velocidades del vórtice Rankine por el del vórtice Kaufmann. Por lo demás, los datos de partida y parámetros del programa son los mismos que se utilizaron en aquel caso.

Los resultados obtenidos para las trayectorias de algunas partículas son los que se muestran en la Tabla 9-9 y se representan en la Figura 9-16.

La deducción más destacable es al igual que para el vórtice Rankine, la posibilidad de suspensión permanente de algunas partículas, describiendo órbitas cerradas. Los mismos comentarios que se realizaron en aquella ocasión siguen siendo aplicables ahora.

TABLA 9-9. Posiciones de las partículas (sin inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos girando en el mismo sentido, caso del vórtice Kaufmann

x_0	y_0	t	x	y
1,5	90	0,1	0,495542	90,046153
		0,293098	0,460362	90,135096
		0,489468	0,380981	90,223112
		0,617805	0,296028	90,274358
		...	...	...
1,75	90	0,1	0,799991	90,011545
		0,6	0,783586	90,070720
		1,16623	0,732841	90,145764
		1,59278	0,660968	90,212916
		...	...	...
5	104	0,001741	4,999915	103,999215
		0,003337	4,999837	103,998514
		0,011320	4,999448	103,995009
		0,051233	4,997520	103,977493
		...	...	...
7,5	104	0,1	7,490997	103,944323
		0,6	7,445484	103,664015
		2,48823	7,270454	102,569966
		3	7,224442	102,261605
		...	...	...
10	104	0,1	9,987429	103,949980
		0,6	9,922097	103,699201
		1,96385	9,718941	103,006113
		3	9,532935	102,462240
		...	...	...
12,5	104	0,1	12,490984	103,955656
		0,6	12,444958	103,735207
		3,1	12,188767	102,672909
		4	12,084816	102,312235
		...	...	...
...	...	...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...

Fuente: Programa informático "trahormuchos_s_i" de elaboración propia.

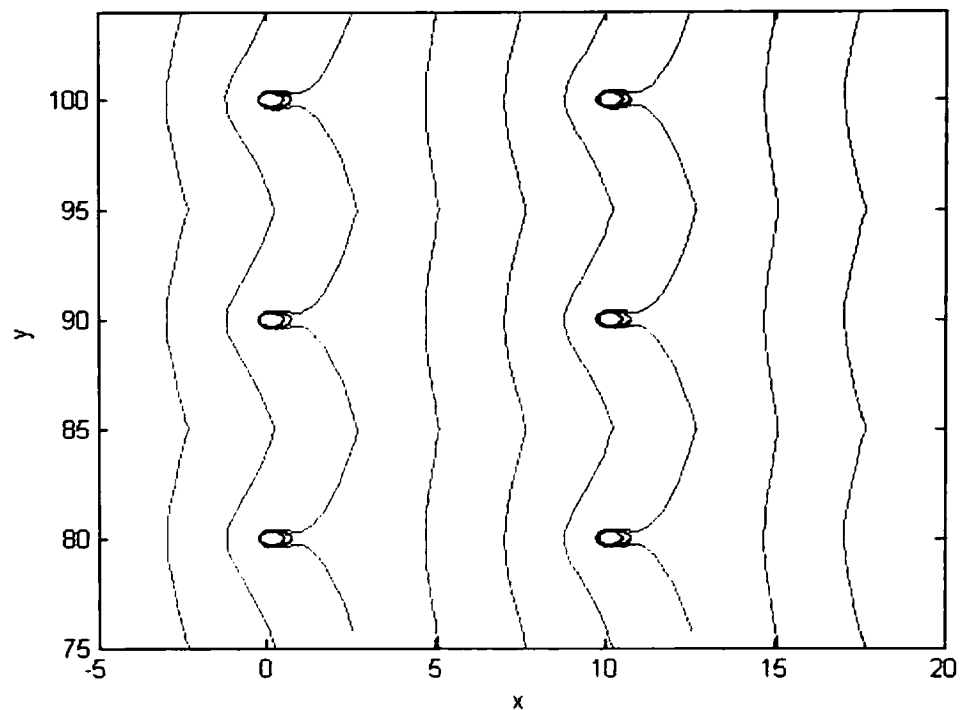


Figura 9-16: Trayectorias (adimensionales) de partículas sin inercia ($S_L = 0$), con vórtices girando en el mismo sentido, para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_t = 0,5$ (caso del vórtice Kaufmann).

Partículas con inercia

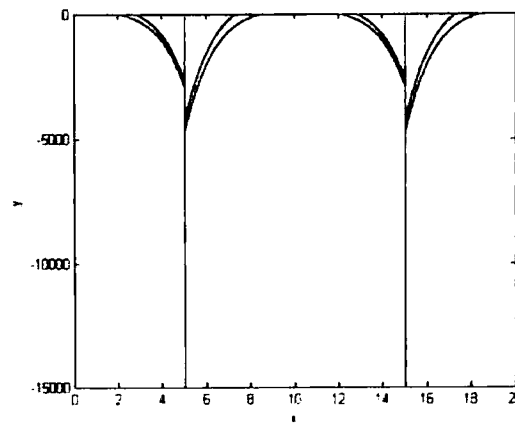
Como se ha reiterado en numerosas ocasiones a lo largo de este capítulo, se sigue el mismo procedimiento utilizado en su momento para el vórtice Rankine. Por tanto, se vuelve a utilizar el programa *trahormuchos* con los mismos datos de partida que en aquella ocasión pero introduciendo en el campo de velocidades el correspondiente al vórtice Kaufmann en lugar del correspondiente al vórtice Rankine.

Las posiciones “x, y” de algunas partículas en cada instante de tiempo son recogidas en la Tabla 9-10 y su visualización gráfica para diferentes valores de inercia en las siguientes figuras. Para inercia moderada ($S_L = 10, 20, 30, 35$), Figura 9-17.

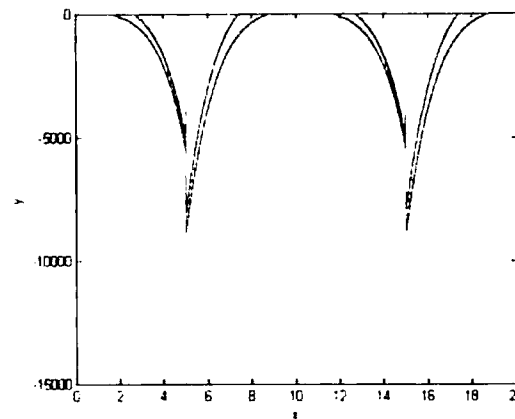
TABLA 9-10. Posiciones de las partículas (con inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos girando en el mismo sentido, caso del vórtice Kaufmann

x_0	y_0	t	x	y
1,5	0	0,1	1,500001	-0,049917
		0,6	1,500193	-0,297091
		1,71345	1,504018	-0,834808
		2,83328	1,555280	-1,362700
		...	...	...
3,5	0	0,1	3,500000	-0,049964
		0,6	3,5000036	-0,298742
		2,66073	3,502851	-1,307739
		4	3,508906	-1,952300
		...	...	...
5	0	0,1	5,000000	-0,050025
		0,6	5,000018	-0,300881
		3,1	5,002251	-1,571362
		4	5,004654	-2,034204
		...	...	...
6,5	0	0,1	6,500000	-0,050036
		0,6	6,5000036	-0,301258
		2,67637	6,502948	-1,361041
		4	6,509103	-2,047584
		...	...	...
8,5	0	0,1	8,500010	-0,050083
		0,6	8,500195	-0,302908
		1,69421	8,503982	-0,868517
		2,82145	8,515796	-1,463844
		...	...	...
11,5	0	0,1	11,50001	-0,049917
		0,6	11,00193	-0,297091
		1,71345	11,504018	-0,834808
		2,83328	11,515528	-1,362700
		...	...	...
...	...	...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...

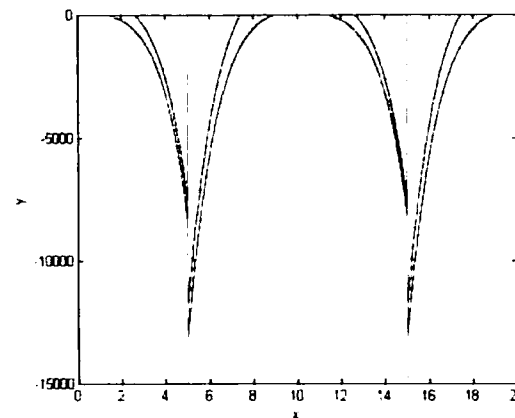
Fuente: Programa informático "trahormuchos" de elaboración propia.



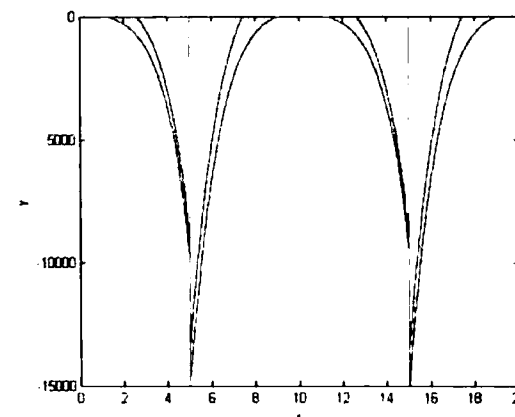
$S_t = 10$



$S_t = 20$



$S_t = 30$



$S_t = 35$

Figura 9-17: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia moderada ($S_t = 10$ a 35) para vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Kaufmann).

De la anterior Figura 9-17 se desprende que las trayectorias de las partículas utilizando este modelo de vórtice tienen cualitativamente unas características semejantes a las obtenidas con el vórtice Rankine:

- No se aprecian trayectorias cerradas -contrariamente al caso de partículas sin inercia- debido a la fuerza inercial centrífuga.
- A partir de un cierto instante de tiempo todas las partículas acaban oscilando alrededor de la línea media vertical situada entre dos líneas verticales de vórtices.
- Al aumentar el número de Stokes –y por tanto la inercia de las partículas- la amplitud de las oscilaciones es más pequeña, como cabía esperar.
- Las partículas se agrupan en el “canal” que se forma entre dos regiones vecinas de vorticidad. Debido a la *inclinación inercial* la partícula no se desplaza a lo largo de una línea de corriente del flujo sino que se mueva a lo largo de la periferia de la estructura vortical, tendiendo a zonas de baja vorticidad y baja tensión de flujo.

Para valores mayores del número de Stokes ($S_r = 60, 85, 110$ y 135) (Figuras 9-18 y 9-19), se vuelve a observar el cambio de comportamiento en las trayectorias de las partículas -ya constatado para vórtice Rankine-: las partículas no terminan oscilando en la zona central entre dos hileras verticales de vórtices, sino que se acumulan en unas determinadas regiones; diferenciándose los dos mismos tipos de zonas que para el vórtice Rankine, las *franjas de baja vorticidad* y las *regiones vacías*. Estas figuras también muestran –de forma coincidente con el caso el vórtice Rankine- que al aumentar la inercia de las partículas, más anchas son las franjas de baja vorticidad hasta que para una inercia muy elevada las partículas casi no son afectadas por el campo fluido. Simultáneamente, las regiones vacías se van haciendo más estrechas.

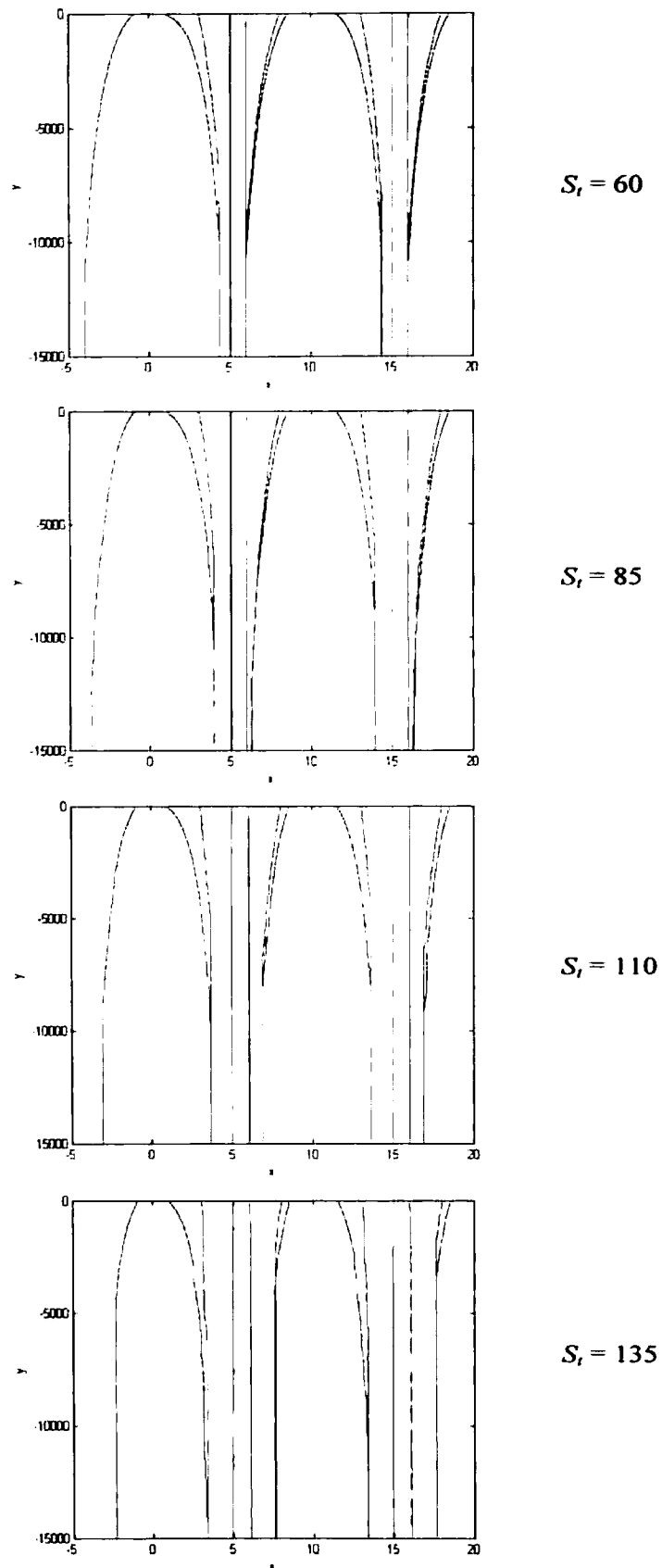


Figura 9-18: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia fuerte ($S_t = 60$ a 135) para vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Kaufmann).

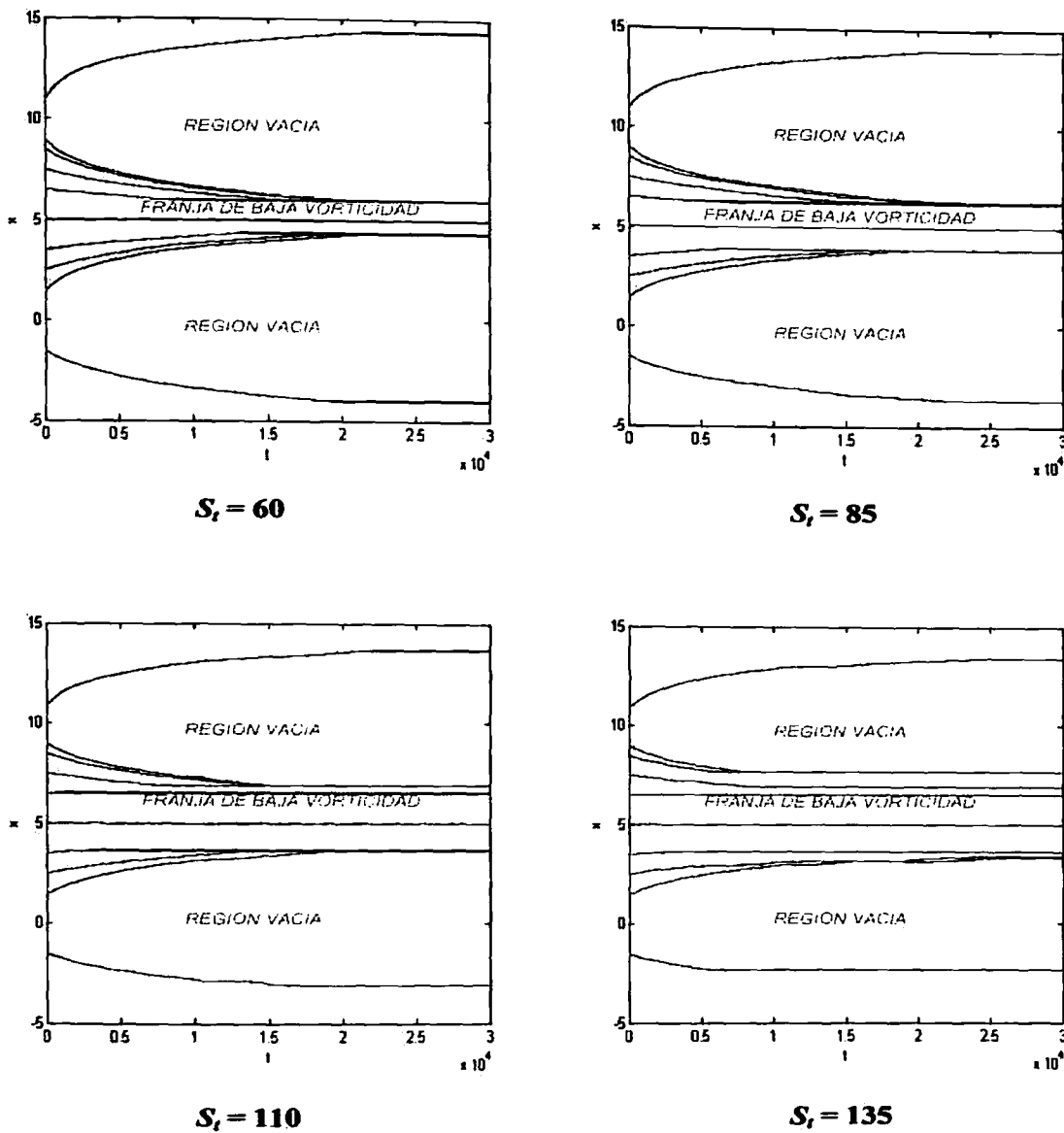


Figura 9-19: Evolución (adimensional) de la abscisa de partículas con inercia fuerte ($S_t = 60$ a 135) para vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Kaufmann).

9.3.1.2. Investigación del incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo

La velocidad de sedimentación promedio ($\langle V_y \rangle$) se ha calculado de idéntica manera a la seguida en el apartado 8.3.1.2. para el vórtice Rankine. Para ello, al programa informático *st_vel_hormuchos* se le ha ensamblado la función *kaufmann* en lugar de la función *rankine*. (Todos esos algoritmos informáticos están recogidos en el Anexo II). Los datos a introducir en el programa *st_vel_hormuchos* son los mismos que para el vórtice Rankine, obteniéndose la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) en función de la velocidad terminal adimensional (V_t). Los resultados concretos son los recogidos en la Tabla 9-11, que se representan gráficamente en la Figura 9-20.

TABLA 9-11. Incremento de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) respecto al caso de fluido en reposo (V_t) para vórtices Kaufmann periódicos girando en el mismo sentido

V_t	$\langle V_y \rangle$	$\frac{\langle V_y \rangle - V_t}{V_t} 100$
0	0,000347	-
0,05	0,063101	26,20
0,1	0,108680	8,68
0,2	0,205456	2,75
0,3	0,303715	1,24
0,4	0,401834	0,46
0,5	0,501869	0,37
0,6	0,601912	0,32
0,7	0,701940	0,28
0,8	0,801957	0,24
0,9	0,901968	0,22
1	1,001969	0,20
1,1	1,101969	0,18
1,2	1,201962	0,16
1,3	1,301956	0,15
1,4	1,401940	0,14

Fuente: Programa informático "st_vel_hormuchos" de elaboración propia.

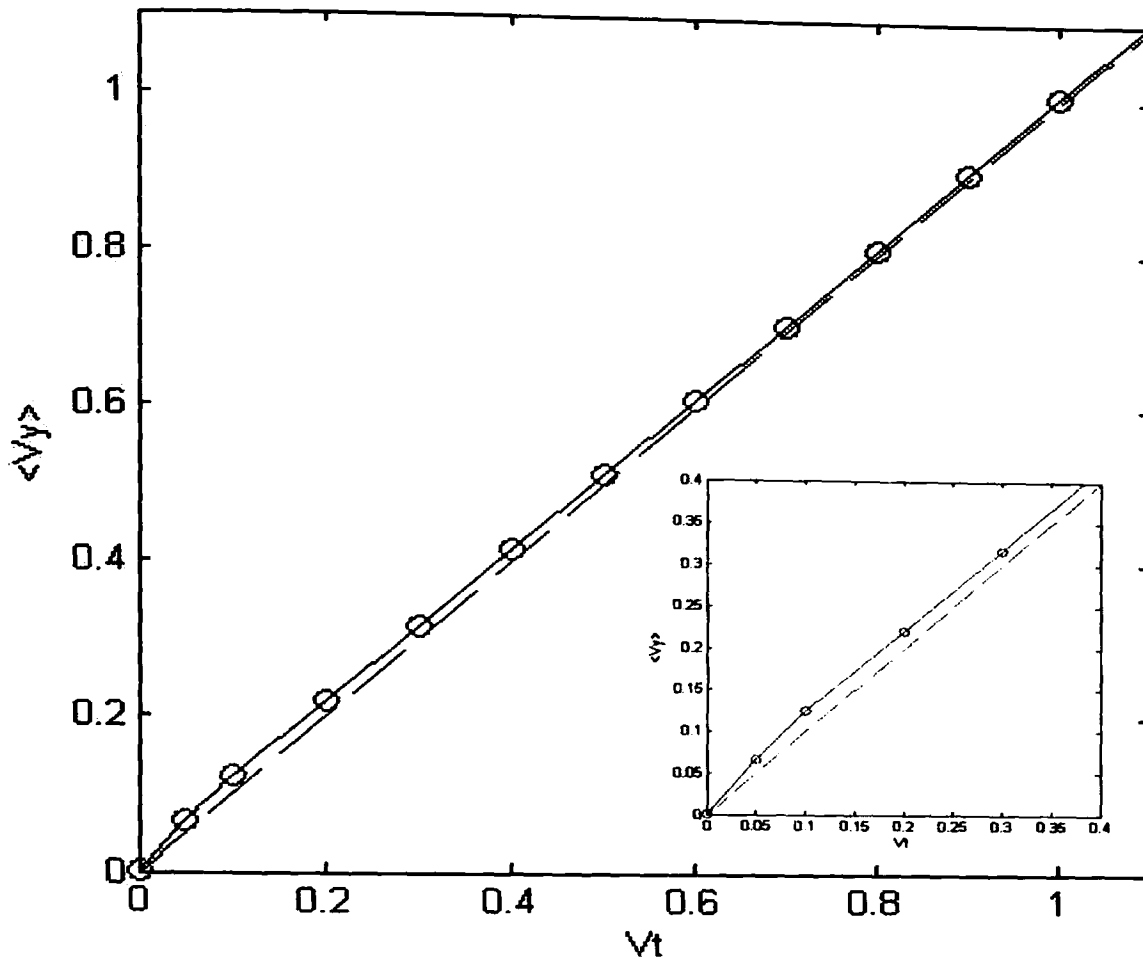


Figura 9-20: Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_t) para vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Kaufmann).

De la figura anterior se puede extraer la misma conclusión que para el vórtice Rankine: aunque este campo de flujo acelera la sedimentación de las partículas respecto al caso de fluido en reposo, únicamente para valores muy pequeños de la velocidad terminal es relativamente importante ese incremento de la velocidad media de sedimentación.

9.3.1.3. Análisis de la influencia de la inercia de las partículas

La velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) se obtiene de la misma forma que en el apartado 9.3.1.2.; se utiliza el programa *st_vel_hormuchos* pero se va variando el número de Stokes (S_t) manteniendo invariable la velocidad terminal ($V_t = 0,5$).

Los resultados son los mostrados en la Tabla 9-12 y representados gráficamente en la Figura 9-21.

TABLA 9-12. Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) en función del número de Stokes (S_t) para vórtices Kaufmann periódicos girando en el mismo sentido

S_t	$\langle V_y \rangle$
0,1	0,511023
0,4	0,511937
0,8	0,512537
2	0,513016
3	0,513149
6	0,513450
10	0,514623
20	0,515111
30	0,515328
40	0,514901
50	0,514003
75	0,513672
100	0,512998
150	0,511993
...	...

Fuente: Programa informático "st_vel_hormuchos" de elaboración propia.

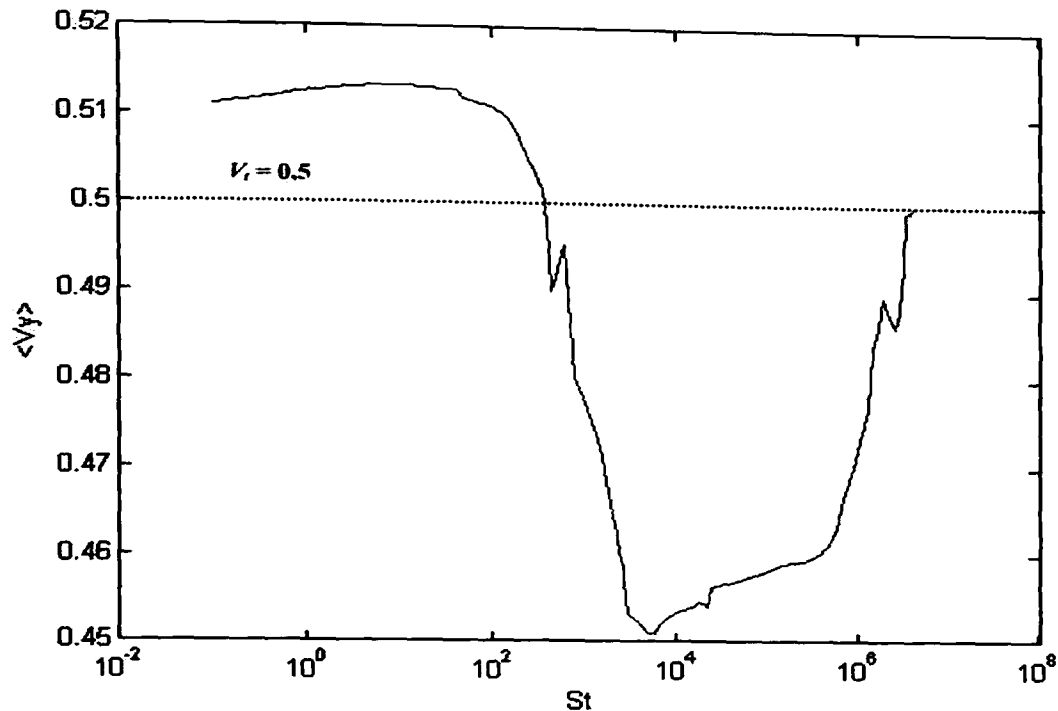


Figura 9-21: Velocidad media de sedimentación $\langle V_y \rangle$ frente a la inercia de las partículas (St) para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_t = 0,5$ con vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Kaufmann).

Los resultados son análogos a los obtenidos para el vórtice Rankine en el apartado 8.3.1.3.:

- La curva representada en la Figura 9-21 guarda algún parecido con los resultados teóricos y experimentales para turbulencia isotrópica ($\langle v_y \rangle > V_t$ para St pequeño y $\langle v_y \rangle < V_t$ para St grande), pero la aproximación no es muy exacta.
- La curva no es uniforme con presencia de bastantes picos en ella. La explicación es la ya dada en el mencionado apartado 8.3.1.3.

- Por tanto, con el vórtice Kaufmann se confirma la conclusión que ya fue obtenida con el vórtice Rankine: “este campo de flujo no parece apropiado como fundamento de un modelo Lagrangiano de sedimentación y dispersión de partículas en flujos turbulentos”.

9.3.2. Simulación de vórtices girando con sentidos de giro alternados

La representación esquemática de esta disposición de vórtices es la de la Figura 8-30.

Como en los demás casos analizados, la existencia de los vórtices repetidos periódicamente es simulada mediante el código informático implementado, que se ensambla en los programas informáticos desarrollados en aquellos casos en que sea necesario (Anexo II).

9.3.2.1. Análisis de trayectorias de partículas

Partículas sin inercia

Las trayectorias de partículas sin inercia se obtienen mediante el procedimiento que ya se ha descrito en varias ocasiones, pero utilizando el programa informático de elaboración propia *altertrahormuchos_s_i* (Anexo II).

Los datos de partida a introducir en dicho programa son los mismos que en el programa *trahormuchos_s_i*. La ejecución del programa proporciona la posición de cada partícula en cada instante de tiempo posterior (Tabla 9-13). La representación gráfica de dichas posiciones de las partículas (es decir, las trayectorias) es la de la Figura 9-22. En ella se observa que, al igual que para el vórtice Rankine, algunas partículas describen trayectorias cerradas y que las demás partículas siguen unas trayectorias que van rodeando los vórtices según el sentido de giro de los mismos.

TABLA 9-13. Posiciones de las partículas (sin inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos con sentidos de giro alternados, caso del vórtice Kaufmann

x_0	y_0	T	x	y
-0,5	90	0,489468	-0,380981	90,223120
		0,617805	-0,296028	90,274358
		0,714578	-0,207551	90,302962
		0,799083	-0,108145	90,311528
		...	...	...
-0,9	90	0,100000	-0,899851	90,004880
		0,600000	-0,894569	90,029795
		1,424326	-0,867214	90,076785
		2,000000	-0,829514	90,118692
		...	...	...
5	104	0,100000	5,004874	103,956123
		0,600000	5,029132	103,737554
		3,100000	5,144913	102,666413
		4,000000	5,182630	102,290093
		...	...	...
7,5	104	0,100000	7,509016	103,955656
		0,600000	7,555042	103,735207
		3,100000	7,811233	102,672909
		4,000000	7,915184	102,312235
		...	...	...
10	104	0,100000	10,012571	103,949980
		0,600000	10,077903	103,699201
		1,963852	10,281059	103,006113
		2,998045	10,466682	102,463291
		...	...	...
12,5	104	0,100000	12,509003	103,944323
		0,600000	12,554516	103,664015
		2,488230	12,729546	102,569966
		4,000000	12,858167	101,641881
		...	...	...
...	...	...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...

Fuente: Programa informático "altertrahormuchos_s_i" de elaboración propia.

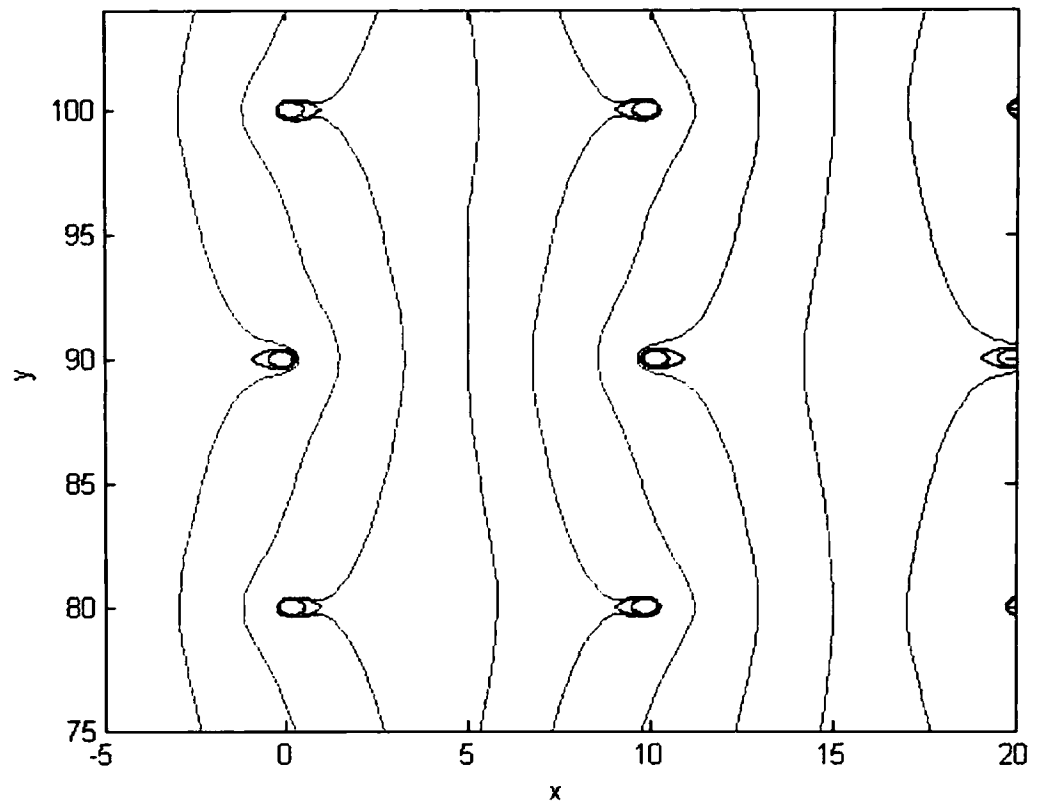


Figura 9-22: Trayectorias (adimensionales) de partículas sin inercia ($S_t = 0$), con vórtices con sentidos de giro alternados, para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_t = 0,5$ (caso del vórtice Kaufmann).

Partículas con inercia

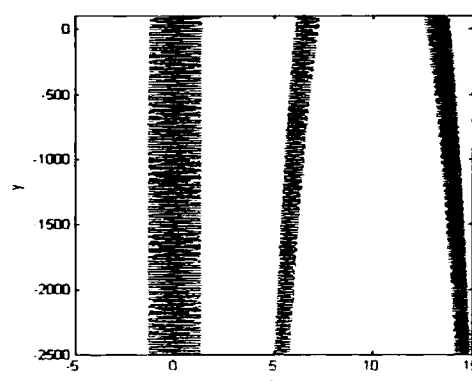
Las trayectorias se tienen por el procedimiento ya descrito en varias ocasiones, utilizando el programa de elaboración propia *altertrahormuchos*, en el que se introducen como datos de partida los que ya han sido también mencionados. Como resultado se obtienen las posiciones de las partículas en cada instante de tiempo (Tabla 9-14).

TABLA 9-14. Posiciones de las partículas (con inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos con sentidos de giro alternados, caso del vórtice Kaufmann

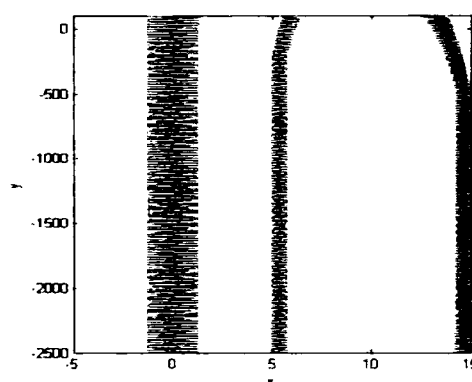
x_0	y_0	t	x	y
0	104	1,643528	-0,214165	103,172351
		1,818124	-0,241486	103,083222
		1,991090	-0,269284	102,994578
		2,160731	-0,297291	102,907259
		...	...	...
6	104	0,927675	6,051919	103,590409
		1,127020	6,064479	103,504549
		1,362109	6,079307	103,403691
		1,604190	6,094583	103,300291
		...	...	...
14	104	1,316285	14,074889	103,259122
		1,524798	14,087358	103,139257
		1,731515	14,099564	103,019992
		1,936164	14,111472	102,901488
		...	...	...
...	...	...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...
		...	...	...

Fuente: Programa informático "altertrahormuchos" de elaboración propia.

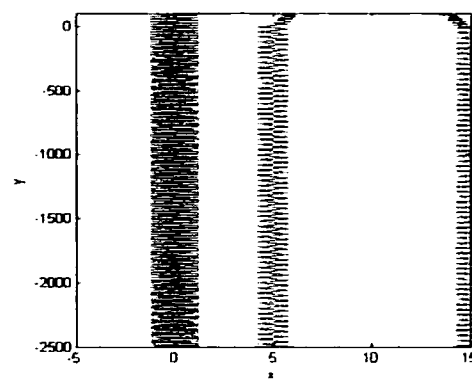
Las trayectorias de las partículas (con colores diferentes según su posición inicial) para diferentes valores del número de Stokes son las de las Figuras 9-23 y 9-24 (inercia moderada) y Figuras 9-25 y 9-26 (inercia fuerte).



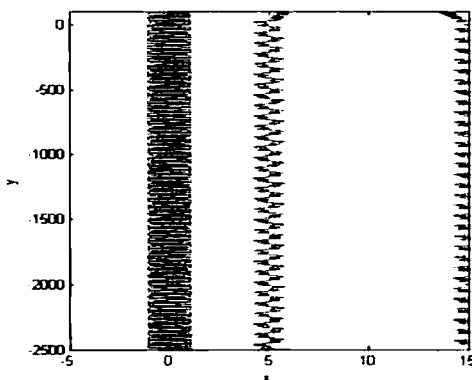
$S_t = 0,1$



$S_t = 0,5$



$S_t = 2$



$S_t = 4$

Figura 9-23: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia moderada ($S_t = 0,1$ a 4) para tiempos elevados en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Kaufmann).

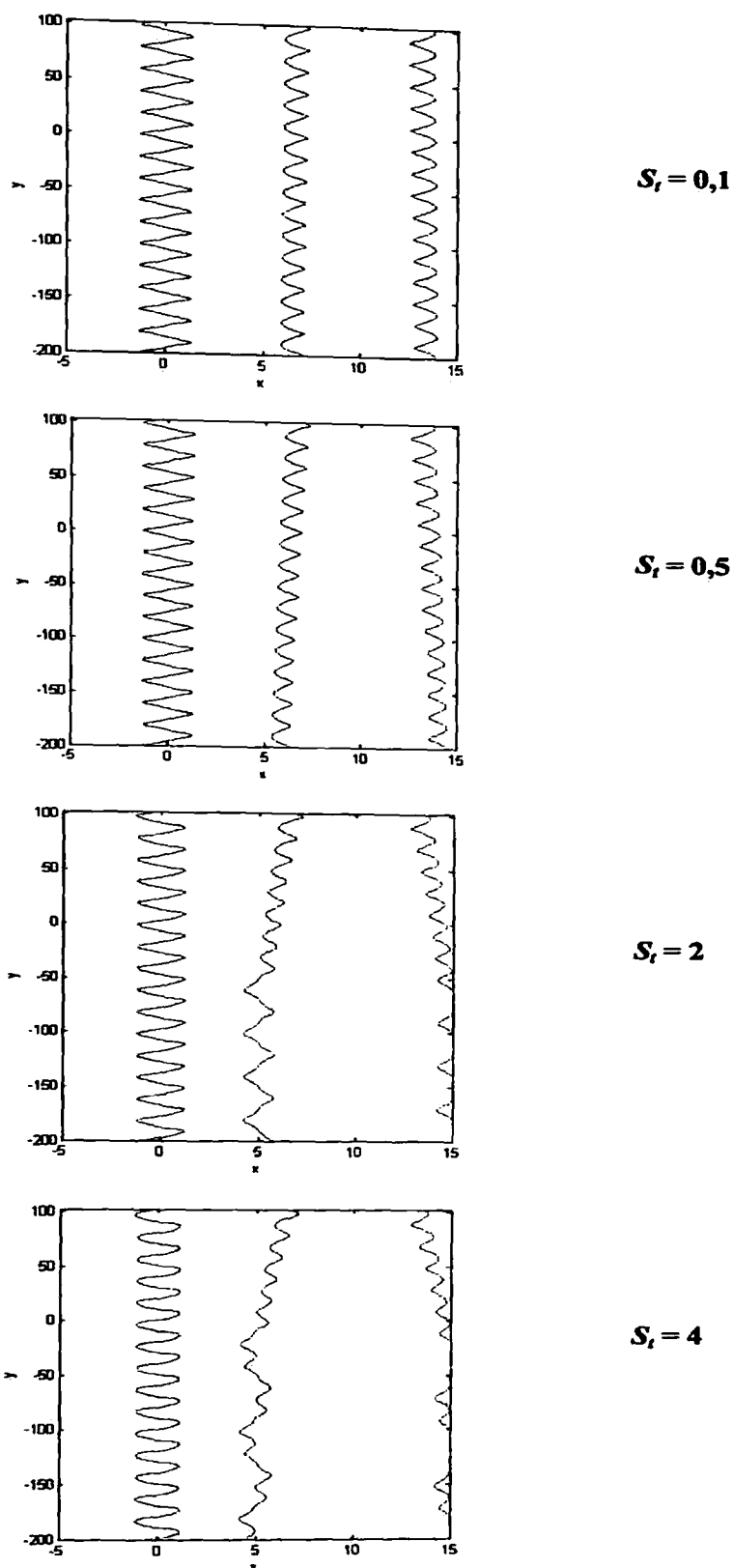


Figura 9-24: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia moderada ($S_t = 0,1$ a 4) para tiempos cortos en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Kaufmann).

Se han escogido tres partículas situadas en las mismas posiciones que se tomaron en el apartado 8.3.2.1. para el vórtice Rankine, por las mismas razones que entonces se apuntaron.

Para tiempos elevados y valores pequeños y moderados de la inercia de las partículas (números de Stokes hasta 4), la Figura 9-23 muestra que el comportamiento de las partículas es el mismo que ya se observó para el vórtice Rankine:

- La partícula cuya posición inicial se encuentra en la hilera vertical de vórtices (azul) va rodeando los mismos según su sentido de giro, siguiendo las líneas de corriente del flujo.
- Las otras partículas (rojo y verde), situadas en una zona de baja vorticidad, caen de una forma más o menos vertical pero con oscilaciones provocadas por la acción del campo de flujo.
- En conclusión, todas las partículas siguen una trayectoria próxima a la vertical pero con oscilaciones debidas a la acción de los vórtices.

Las oscilaciones mencionadas pueden observarse más detalladamente en la Figura 9-24, en la que se representan las mismas trayectorias de la Figura 9-23 en los instantes iniciales de tiempo.

A continuación –como ya se ha indicado antes- se representan en las Figuras 9-25 y 9-26 las trayectorias de las partículas, pero en el caso de valores elevados de la inercia de las mismas, es decir, para valores más elevados del número de Stokes.

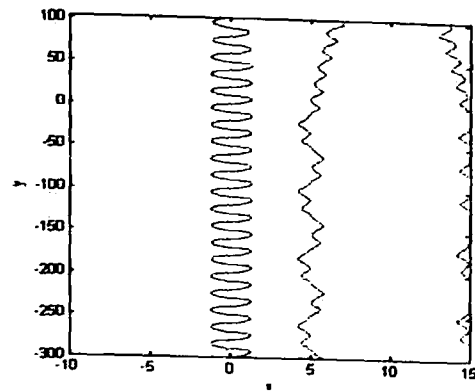
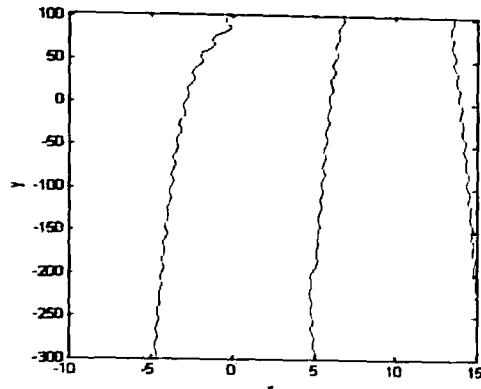
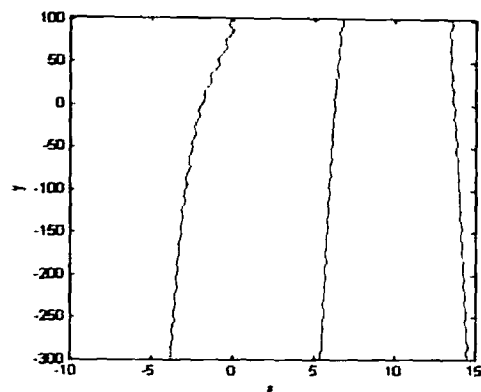
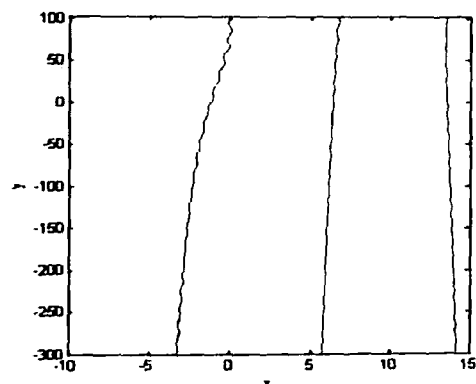
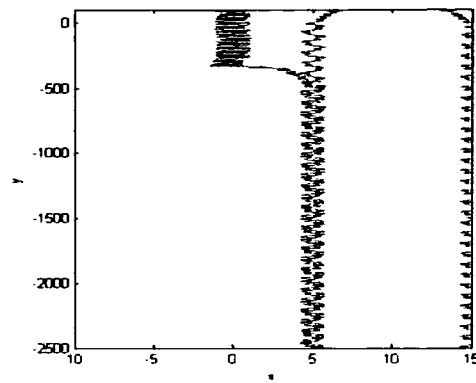
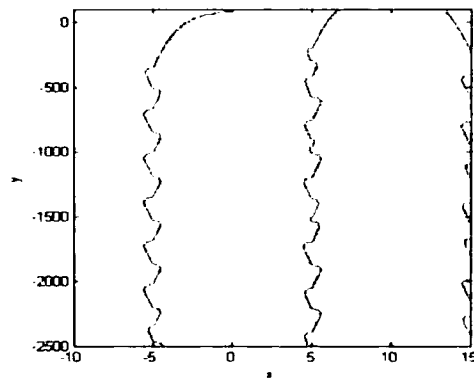
 $S_t = 5$  $S_t = 30$  $S_t = 60$  $S_t = 90$

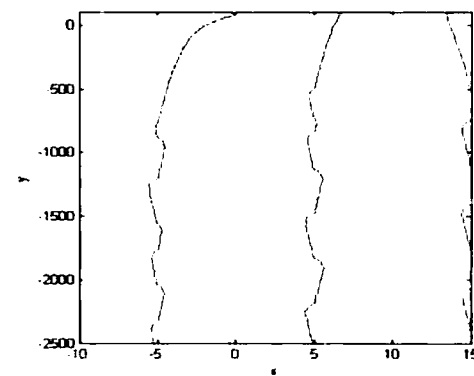
Figura 9-25: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia fuerte ($S_t = 5$ a 90) para tiempos cortos en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Kaufmann).



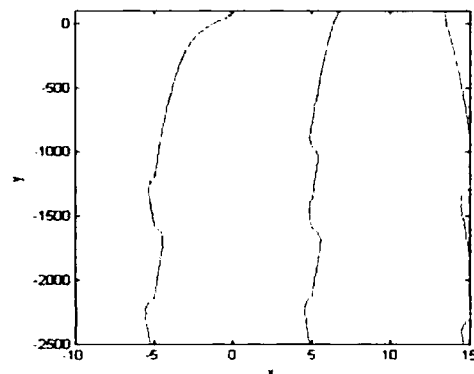
$S_t = 5$



$S_t = 30$



$S_t = 60$



$S_t = 90$

Figura 9-26: Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia fuerte ($S_t = 5$ a 90) para tiempos elevados en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Kaufmann) .

El comportamiento de las partículas vuelve a cambiar tal como se observó para el vórtice Rankine en análogas circunstancias:

- En los primeros instantes de tiempo (Figura 9-25) las trayectorias de las partículas son más o menos regulares (con oscilaciones alrededor de su vertical), pero cada vez la trayectoria se va separando un poco más de la línea vertical hasta separarse totalmente de ella.
- Para tiempos suficientemente grandes (Figura 9-26) las partículas siempre oscilan alrededor de la línea media situada justo en el centro entre dos filas verticales de vórtices (tales como $x = -5; 5; 15; \dots$). Las partículas se agrupan en el “canal” formado por dos regiones vecinas de vorticidad.
- Incluso para valores elevados de la inercia de las partículas se mantiene este comportamiento y no aparece la distinción entre franjas de baja vorticidad y regiones vacías que se encontró en el caso de vórtices girando en el mismo sentido. Ello es debido a la diferencia entre los campos de flujo utilizados en ambos casos.

9.3.2.2. Investigación del incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo

La velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) se ha obtenido de nuevo según el método ya especificado varias veces a lo largo de la Tesis. El programa informático de elaboración propia utilizado ahora ha sido *alter_st_vel* (Anexo II) con los mismos datos de partida de casos análogos.

Los valores de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo adimensional se muestran en la Tabla 9-15.

TABLA 9-15. Incremento de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) respecto al caso de fluido en reposo (V_t) para vórtices Kaufmann periódicos con sentidos alternados

V_t	$\langle V_y \rangle$	$\frac{\langle V_y \rangle - V_t}{V_t} 100$
0	0,000473	
0,05	0,079480	58,98
0,1	0,121805	21,81
0,2	0,213832	6,9
0,3	0,310234	3,4
0,4	0,407901	1,97
0,5	0,504542	0,9
0,6	0,603114	0,52
0,7	0,702123	0,3
0,8	0,801475	0,18
0,9	0,900967	0,11
1	1,000395	0,04
1,1	1,100039	0,0035
1,2	1,200039	0,0032
1,3	1,300038	0,0029
1,4	1,400037	0,0027

Fuente: Programa informático "alter_st_vel" de elaboración propia.

Se representan en la Figura 9-27, que muestra que:

- Para valores pequeños de la velocidad terminal (V_t) sedimentan más rápido en este campo de flujo que en fluido en reposo, como sucedía para el vórtice Rankine.
- Con valores elevados de V_t casi no hay diferencia entre la velocidad media de sedimentación y la velocidad terminal, resultado análogo –una vez más- al obtenido para el vórtice Rankine.

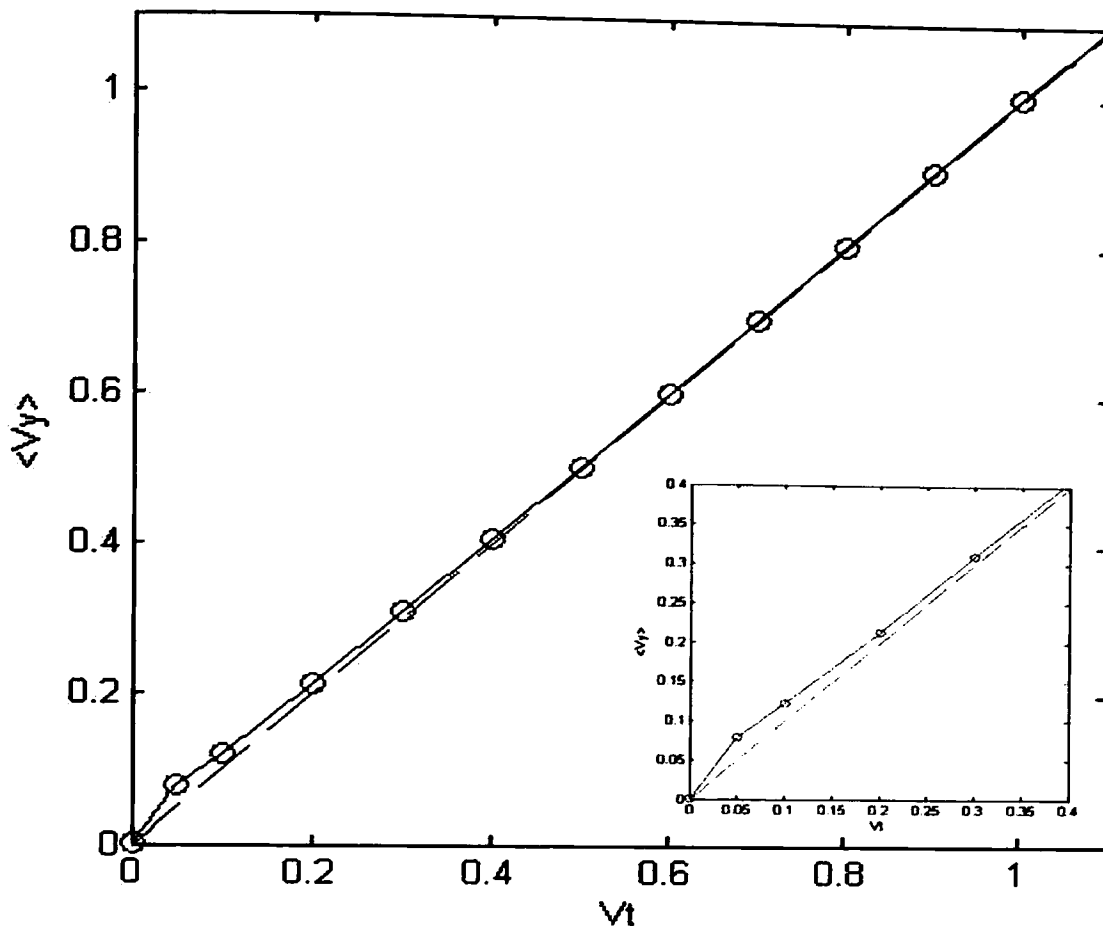


Figura 9-27: Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_t) para vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Kaufmann).

9.3.2.3. Análisis de la influencia de la inercia de las partículas

La velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) en función de la inercia de las partículas se ha obtenido mediante el procedimiento ya descrito en los apartados 8.3.1.3. y 8.3.2.3. -para el vórtice Rankine- y 9.3.1.3. -para el vórtice Kaufmann- utilizando el programa *alter_st_vel*. En dicho programa se han introducido los mismos datos de partida que en los casos anteriores y se ha ido variando el número de Stokes (S_t) manteniendo fija la velocidad terminal (V_t). Los resultados se muestran en la Tabla 9-16.

TABLA 9-16. Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) en función del número de Stokes (S_t) para vórtices Kaufmann periódicos girando con sentidos alternados

S_t	$\langle V_y \rangle$
0,05	0.500829
0.1	0.501051
0,2	0.501234
0,3	0.501323
0.5	0.501422
1	0.501555
3	0.501328
5	0.501138
10	0.500953
20	0.500695
30	0.500401
40	0.500040
...	...

Fuente: Programa informático "alter_st_vel" de elaboración propia.

Dichos resultados se representan gráficamente en la Figura 9-28, en la que puede comprobarse que –al igual que para el vórtice Rankine- se obtienen unos resultados bastante parecidos a los ya conocidos para turbulencia isótropa.

9.3.2.4. Posibilidad de aplicación a Modelo Lagrangiano de sedimentación y dispersión de partículas en flujos turbulentos

El resultado obtenido en el apartado anterior confirma de nuevo que *este campo de flujo es adecuado para simular aquellas estructuras vorticales presentes en los flujos turbulentos isótropos que hacen que la velocidad media de sedimentación aumente o disminuya*; por tanto, *puede servir como fundamento*

para el desarrollo de un modelo Lagrangiano para la sedimentación de partículas en flujos turbulentos.

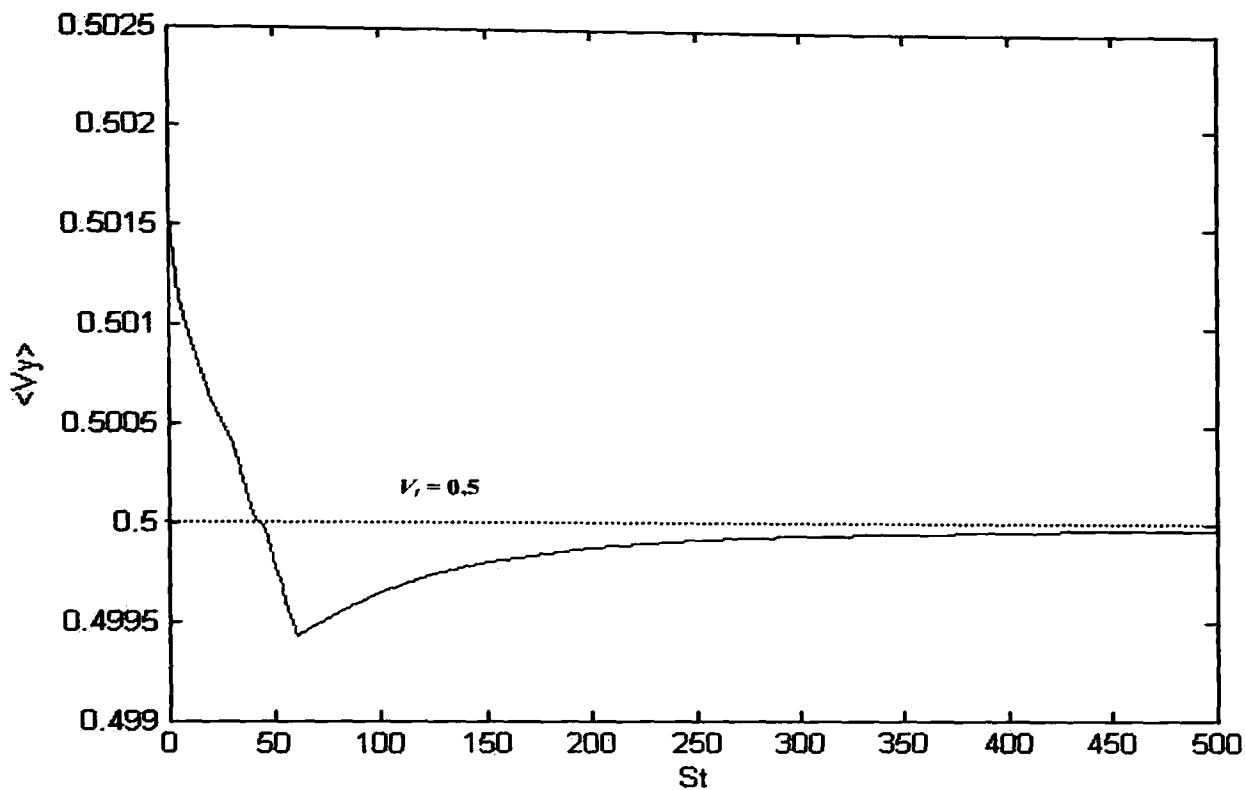


Figura 9-28: Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la inercia de las partículas (St) para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_t = 0,5$ con vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Kaufmann).

10. COMPARACIÓN ENTRE LOS VÓRTICES RANKINE Y KAUFMANN

Como ya se expuso en el capítulo 4 de la Tesis –y más concretamente en el apartado 4.9- se han desarrollado diversos modelos de vórtices que facilitan el estudio de la interacción de este tipo de flujo con partículas. En el apartado 4.11 se realizó una comparación entre dichos modelos, concluyéndose que –en el caso de vórtices con flujo puramente tangencial- los vórtices Rankine y Kaufmann podrían considerarse como una cota superior y una cota inferior respectivamente en relación con la velocidad tangencial.

También se comentó en el apartado 5.2 que entre los diversos modelos descritos, se ha decidido en esta investigación realizar los análisis con los mencionados vórtices Rankine y Kaufmann por la razón anteriormente señalada y por su formulación apropiada a los objetivos propuestos, evitando la innecesaria complicación que supondrían los modelos con componentes tangenciales y longitudinales de la velocidad.

En este capítulo, se pretende comparar dichos modelos desde el punto de vista concreto de los resultados obtenidos en los capítulos 8 y 9.

10.1 Análisis del Tiempo de Escape de partículas de un vórtice tridimensional

10.1.1. Trayectorias de partículas

En primer lugar hay que destacar que, desde el punto de vista de las trayectorias de las partículas, los resultados obtenidos con ambos tipos de vórtices son cualitativamente semejantes (Figuras 8-1, 8-2, 9-1 y 9-2) y que con el vórtice Rankine la amplitud de las trayectorias cerradas es mayor que con el vórtice Kaufmann. Ello es debido al hecho -ya comentado en el apartado 4.11- de que el

vórtice Kaufmann reduce a la mitad el valor proporcionado por el vórtice Rankine para la velocidad de giro.

10.1.2. Puntos de equilibrio y Longitud característica

La abscisa de los puntos de equilibrio en el caso del vórtice Rankine viene dada por las ecuaciones (8.9) y (8.10) en forma dimensional y por las ecuaciones (8.18) y (8.19) en forma adimensional y para el vórtice Kaufmann por las ecuaciones (9.4) y (9.5) en forma dimensional y (9.12) y (9.13) en forma adimensional. En ambos casos la posición del foco es cercana al origen de coordenadas y la abscisa del punto de silla es menor para el vórtice Kaufmann; la razón es la ya comentada en el apartado anterior.

Respecto a la Longitud característica, viene dada por la ecuación (8.12) –ó (8.22) en forma adimensional- para el vórtice Rankine y por la ecuación (9.7) –ó (9.17) en forma adimensional- para el vórtice Kaufmann. En ambos casos se verifica que cuando la velocidad terminal tiende a cero, la semidistancia entre los puntos de equilibrio tiende a la Longitud característica, que es el radio mínimo de las trayectorias de las partículas alrededor del vórtice

10.1.3. Trayectorias Límite

Están representadas –para varios valores de la velocidad terminal adimensional de caída en fluido en reposo (V_t)- en la Figura 8-5 (Rankine) y en la Figura 9-3 (Kaufmann).

En la siguiente Figura 10-1 se representan en una misma gráfica las trayectorias límite correspondientes a ambos modelos para un valor cualquiera de la velocidad terminal (programa *ligtravoin*). Así es posible comprobar mediante simulación numérica la amplitud de la trayectoria límite en cada caso.

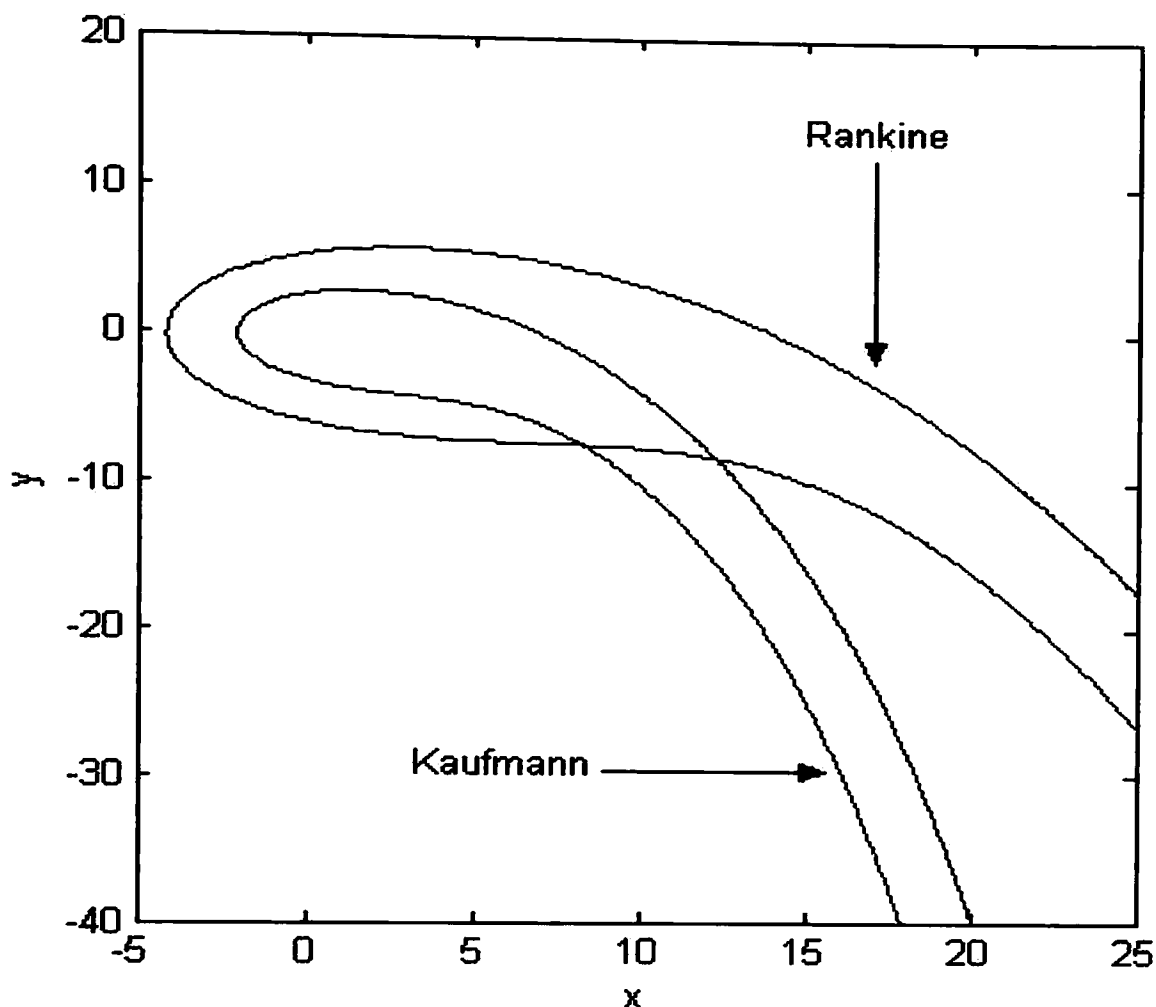


Figura 10-1: Comparación de la forma y amplitud de la región encerrada por las trayectorias límite entre los vórtices Rankine y Kaufmann para $S_t = 0,5$ y $V_t = 0,2$.

En la Figura 10-1 se observa que la amplitud de la región encerrada por las trayectorias límite es más amplia para el vórtice Rankine.

10.1.4. Obtención Numérica del Tiempo de escape y análisis de la influencia de variables

La primera variable que se ha estudiado en relación con el Tiempo de escape -capítulos 8 y 9- es la velocidad terminal V_t . Así, de la observación de las Figuras 8-8 (Rankine) y 9-5 (Kaufmann) se deduce que para ambos modelos el

Tiempo de escape disminuye de un modo monótono al aumentar la velocidad terminal para cualquier valor del número de Stokes. Para comparar ambos tipos de vórtices de un modo cuantitativo, se representa en la siguiente Figura 10-2 el Tiempo de Escape (T_e) frente a la velocidad terminal (V_t) para uno cualquiera de los valores del número de Stokes considerado en las Figuras 8-8 y 9-5. No se representa para todos los valores del número de Stokes para no restar claridad a la gráfica.

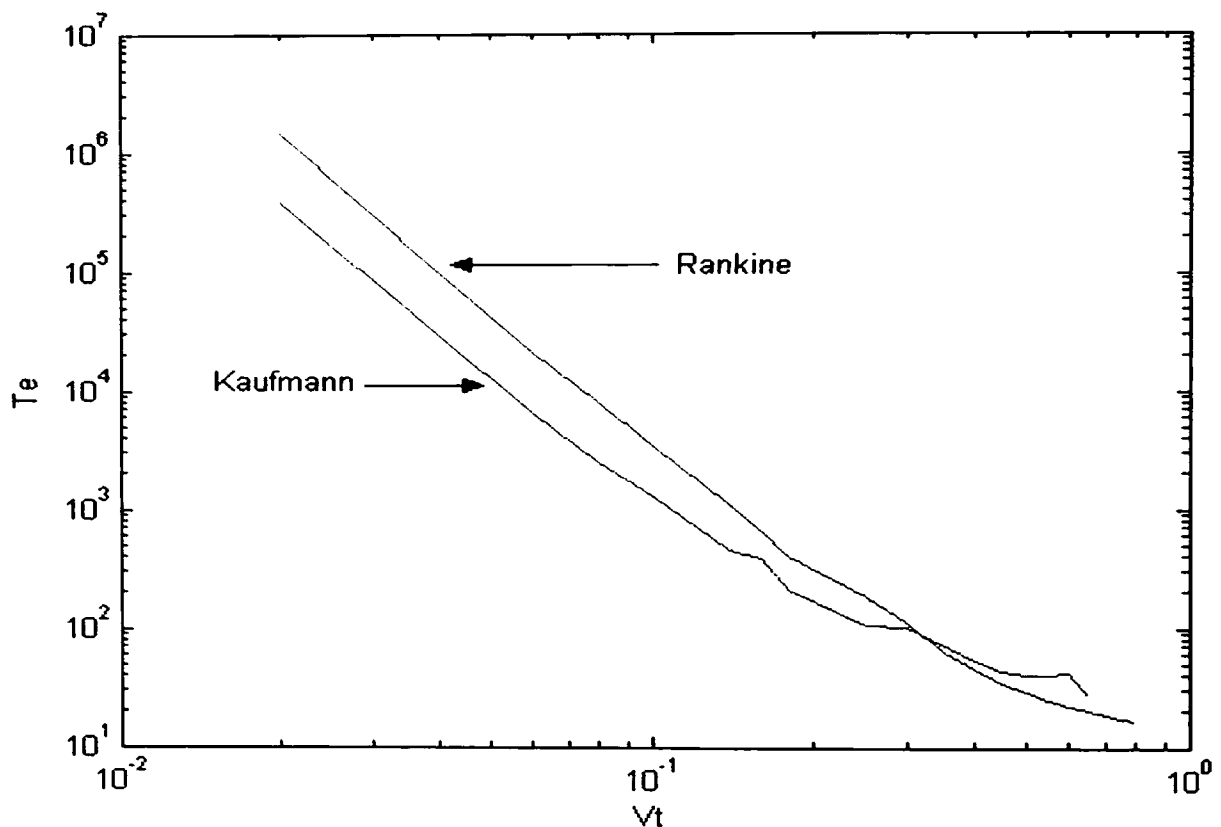


Figura 10-2: Comparación del Tiempo de escape (T_e) frente a la velocidad terminal de caída (V_t) entre los vórtices Rankine y Kaufmann para $S_r = 0,7$.

En esta Figura 10-2 puede observarse que el Tiempo de escape es mayor para el vórtice Rankine (excepto para valores muy elevados de V_t ya que entonces la partícula se ve muy poco influenciada por la acción del vórtice).

La influencia de la inercia de las partículas en el Tiempo de escape ha sido analizada en los capítulos anteriores mediante las Figuras 8-9 y 9-6. Se dedujo que para los dos vórtices considerados el Tiempo de escape tiende a disminuir conforme aumenta el número de Stokes (mientras mayor es la inercia de las partículas menos influenciadas estarán las mismas por la acción del vórtice). No obstante la mencionada disminución no es monótona sino que aparecen unas oscilaciones que en ambos casos se explican por el hecho de que en las zonas ascendentes de las mencionadas figuras la partícula está girando alrededor del eje del vórtice y al crecer el número de Stokes ésta pasa cada vez más cerca del punto de silla (Figuras 8-10 y 9-7). Para comparar la diferencia según el modelo de vórtice considerado, en la Figura 10-3 se representan en una misma gráfica los resultados obtenidos para el vórtice Rankine y para el vórtice Kaufmann.

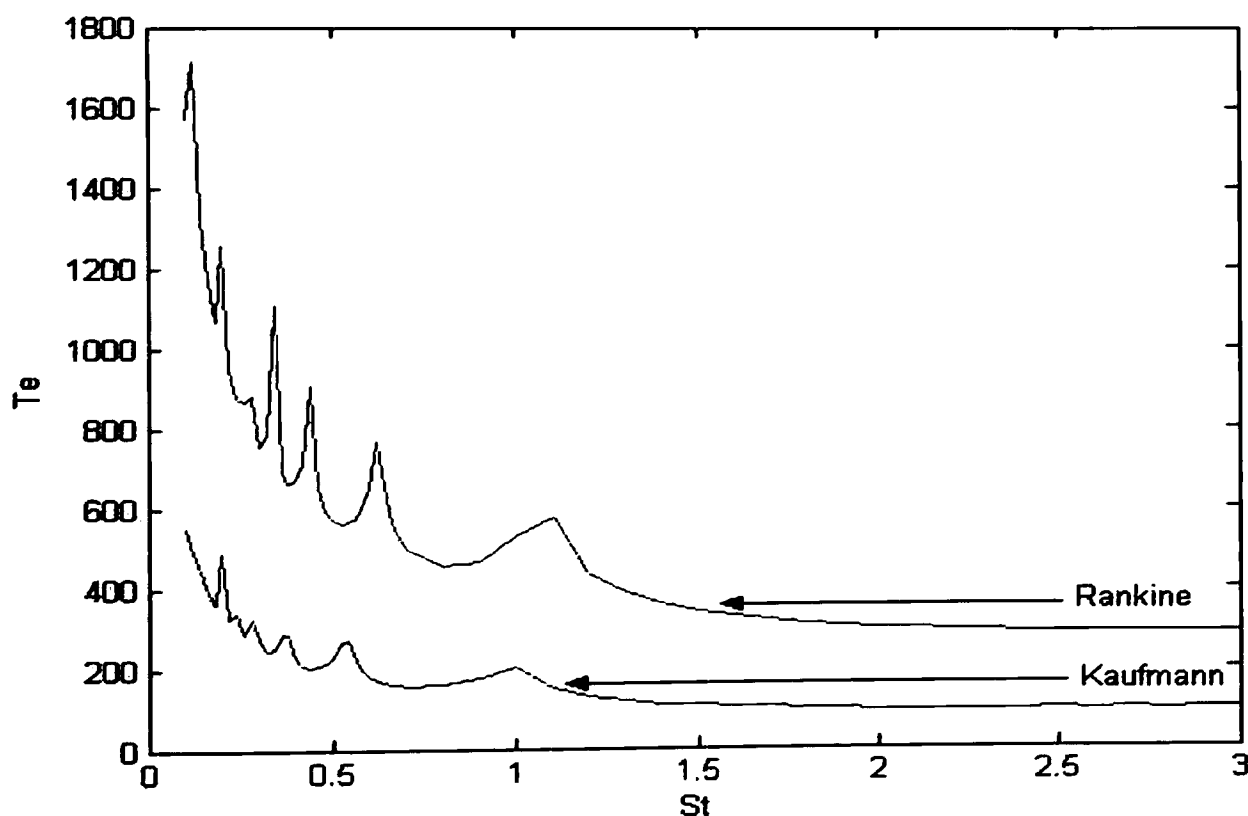


Figura 10-3: Comparación de la variación del Tiempo de escape (T_e) con la inercia de las partículas (St) entre los vórtices Rankine y Kaufmann para $V_i = 0,2$.

La Figura 10-3 confirma el hecho ya comentado anteriormente de que el Tiempo de escape es mayor para el vórtice Rankine.

10.1.5. Fórmula del Tiempo de escape

La Obtención Analítica de la fórmula del Tiempo de escape se ha llevado a cabo en el apartado 8.1.6. para el vórtice Rankine y en el apartado 9.1.6. para el vórtice Kaufmann. En ambos casos y mediante un proceso completamente idéntico se ha obtenido la expresión (8.33).

A continuación, se ha procedido a verificar mediante simulación numérica la validez de la fórmula desarrollada en los apartados 8.1.7. y 9.1.7. Previamente - en ambos apartados- se ha explicado el procedimiento para obtener un mallado de partículas equidistribuidas en la región de captura del vórtice para tomar valores promedio; para ello se han integrado las ecuaciones diferenciales que determinan la trayectoria límite, obteniendo su ecuación algebraica -ecuaciones (8.44) para el vórtice Rankine y (9.22) para el vórtice Kaufmann- y se ha resuelto iterativamente dicha ecuación algebraica obteniendo así los límites para la malla de partículas. El siguiente paso ha sido determinar el valor de la *Constante de tiempo de escape* (K_e) que aparece en la fórmula del Tiempo de escape (8.33). El valor obtenido ha sido $K_e = 0,036$ para el vórtice Rankine y $K_e = 0,009$ para el vórtice Kaufmann cuando el número de Froude de la partícula (F_p) y la velocidad terminal adimensional (V_t) tienden a cero. Los valores obtenidos mediante simulación numérica para la Constante de tiempo de escape K_e se representan frente al número de Froude de la partícula F_p en las Figuras 8-15 y 8-16 (Rankine) y 9-10 y 9-11 (Kaufmann); la representación en una misma gráfica es la que se muestra en la siguiente Figura 10-4, en la que se observan claramente las conclusiones que se acaban de comentar y se aprecia también que los valores de K_e obtenidos numéricamente son mayores para el vórtice Rankine.

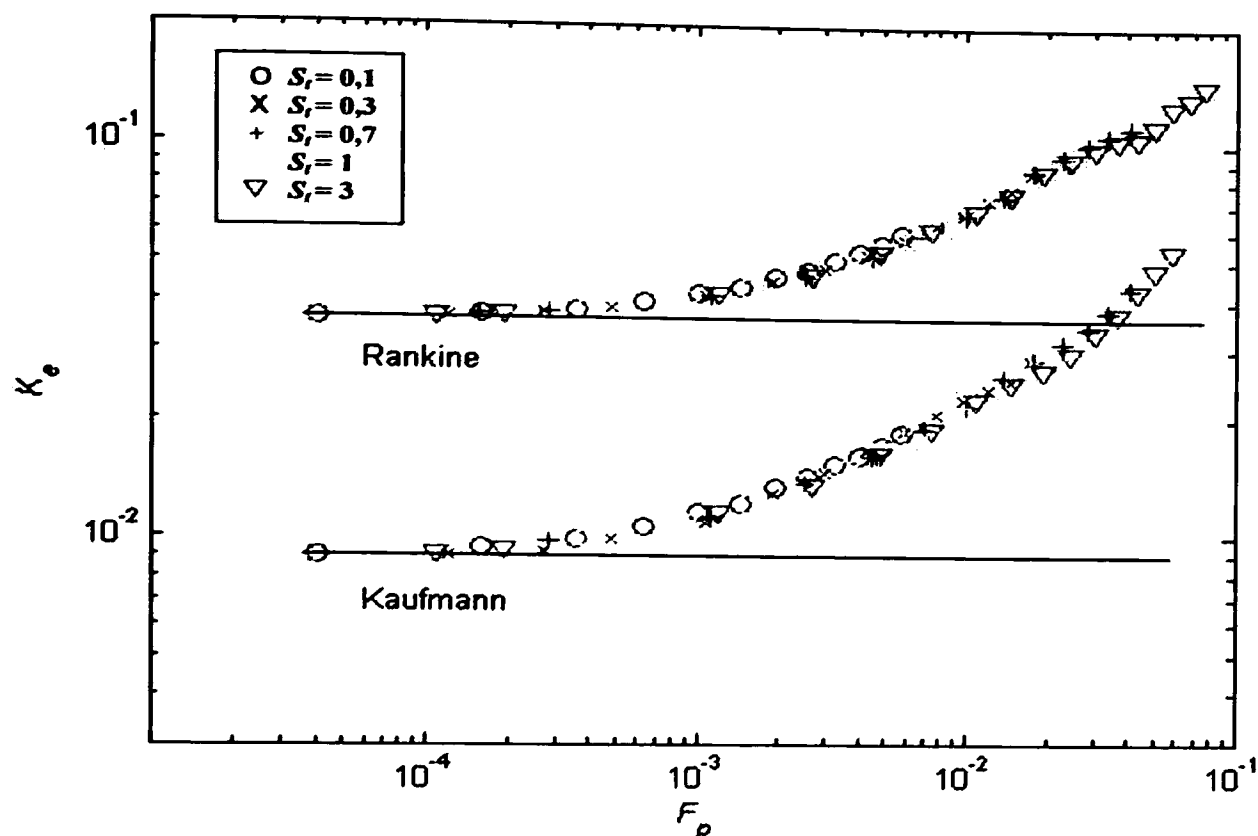


Figura 10-4: Constante de tiempo de escape (K_e) frente al número de Froude de la partícula (F_p) para distintos números de Stokes. Comparación entre los vórtices Rankine y Kaufmann.

Tras obtener el valor de K_e , se corroboró numéricamente para los dos modelos de vórtices la validez de la fórmula (8.33), obteniéndose como resultados los representados gráficamente en las Figuras 8-18 y 8-19 para el vórtice Rankine y las Figuras 9-13 y 9-14 para el vórtice Kaufmann. Recopilando dichos resultados en una misma gráfica se obtiene la Figura 10-5 que permite comparar una vez más los dos modelos que se han utilizado en esta Tesis. Esta figura muestra que -como cabía esperar- para un mismo diámetro de partícula, el tiempo de escape es mayor con el vórtice Rankine.

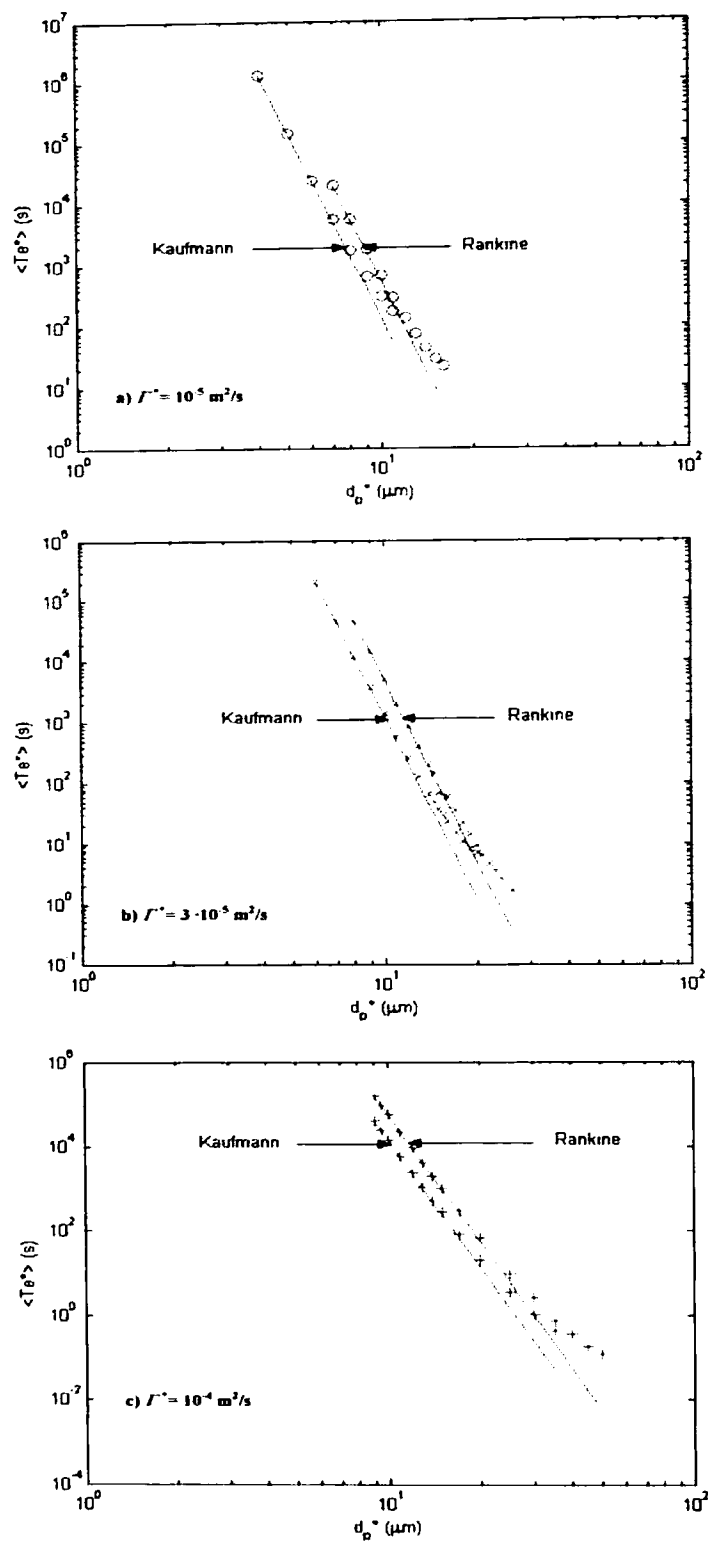


Figura 10-5: Comparación del Tiempo de escape (T_e) frente al diámetro de la partícula (d_p) entre los vórtices Rankine y Kaufmann para distintos valores de la circulación del vórtice ($\Gamma^* = 10^{-5}$ a $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$) y radio del vórtice $R_v^* = 0,001 \text{ m}$.

10.2 Velocidad media de sedimentación de partículas de un vórtice tridimensional

La velocidad media de sedimentación de partículas inicialmente situadas en la región de captura de un vórtice tridimensional se ha analizado en el apartado 8.2 para el modelo Rankine (Figura 8-22) y en el apartado 9.2 para el modelo Kaufmann (Figura 9-15). En los dos casos se ha obtenido una relación numérica entre la Velocidad media de sedimentación y el Tiempo de escape promedio: ecuación (8.57) para la Velocidad media de sedimentación adimensional y ecuación (8.58) para la Velocidad media de sedimentación dimensional. Para comparar dicha velocidad entre los dos vórtices, se recopilan en una misma gráfica los resultados representados en las mencionadas Figuras 8-22 y 9-15. El resultado es el mostrado en la siguiente Figura 10- 6:

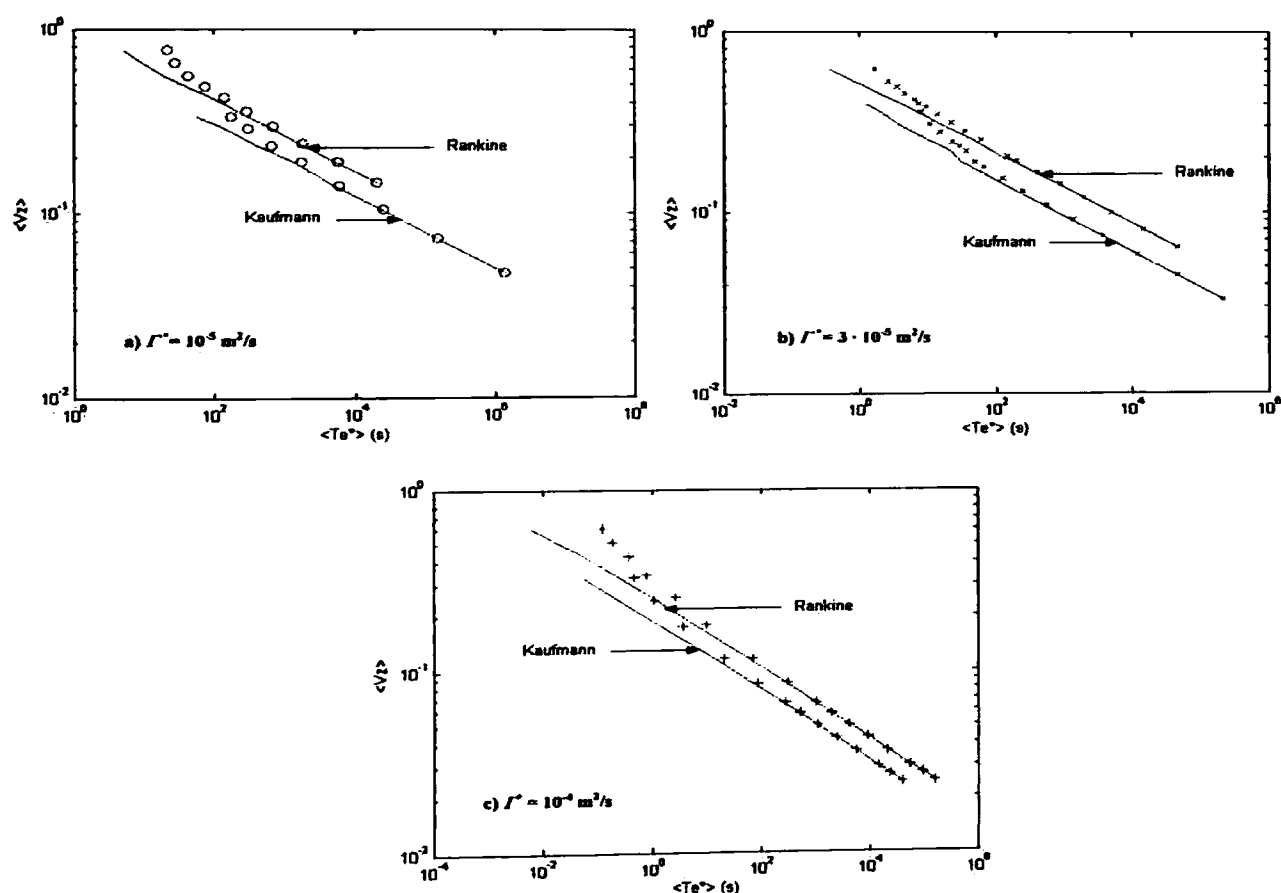


Figura 10-6: Comparación de la Velocidad media de sedimentación $\langle V_z \rangle$ frente al Tiempo de escape promedio $\langle T_e \rangle$ entre los vórtices Rankine y Kaufmann.

En la Figura 10-6 puede comprobarse que el vórtice Rankine presenta una Velocidad media de sedimentación mayor para cualquier valor del Tiempo de escape promedio y recíprocamente un Tiempo de escape promedio mayor para cualquier valor de la Velocidad media de sedimentación. Este hecho se explica una vez más por el valor más elevado de la velocidad tangencial del vórtice Rankine que hace que, por una parte, el efecto de captura de las partículas sea mayor y que por otra parte una vez que la partícula escapa del vórtice ésta sea despedida con una mayor fuerza centrífuga.

10.3. Análisis de la sedimentación de partículas en vórtices bidimensionales periódicos

El análisis se ha realizado en los apartados 8.3. y 9.3. para los vórtices Rankine y Kaufmann respectivamente.

10.3.1. Vórtices girando en el mismo sentido

10.3.1.1. Trayectorias de partículas

De la observación de las Figuras 8-24 y 9-16 en las que se representan las trayectorias de partículas sin inercia para los respectivos modelos se deduce que los resultados son cualitativamente semejantes en ambos y que las trayectorias cerradas son más amplias para el vórtice Rankine que para el Kaufmann. Sucede, por tanto, lo mismo que ya se expuso en el caso de un vórtice tridimensional (apartado 10.1.1.) y los comentarios allí realizados siguen siendo válidos.

En el caso de partículas con inercia, las Figuras 8-25, 8-26 y 8-27 y las Figuras 9-17, 9-18 y 9-19 muestran nuevamente resultados análogos para los dos tipos de vórtices:

- No hay trayectorias cerradas.

- Para inercia moderada todas las partículas terminan oscilando alrededor de la línea media vertical situada entre dos hileras verticales de vórtices.
- Para inercia fuerte el campo de flujo queda dividido en dos zonas, *franjas de baja vorticidad* (en las que no pueden entrar las partículas que inicialmente estaban fuera de ellas) y *regiones vacías* (en las que al cabo del tiempo no va a encontrarse ninguna partícula). Al aumentar la inercia de las partículas, más anchas son las franjas de baja vorticidad y más estrechas las regiones vacías.

La diferencia que se puede observar es que con el vórtice Rankine las partículas alcanzan su abscisa final antes que con el vórtice Kaufmann, debido al menor valor de la velocidad de giro proporcionado por este último. Por esa misma razón, la región vacía es más ancha y la franja de baja vorticidad más estrecha para el modelo Rankine que para el Kaufmann. No se han representado en una misma figura las trayectorias de las partículas con los dos modelos de vórtices porque queda una gráfica con poca claridad por la superposición de líneas resultante.

10.3.1.2. Incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo

Con los dos tipos de vórtices se ha constatado un pequeño incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo, pero únicamente para pequeños valores de la velocidad terminal (Figuras 8-28 y 9-20).

Para comparar los resultados de ambos vórtices en la siguiente Figura 10-7 se representan en una misma gráfica los respectivos valores de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_t).

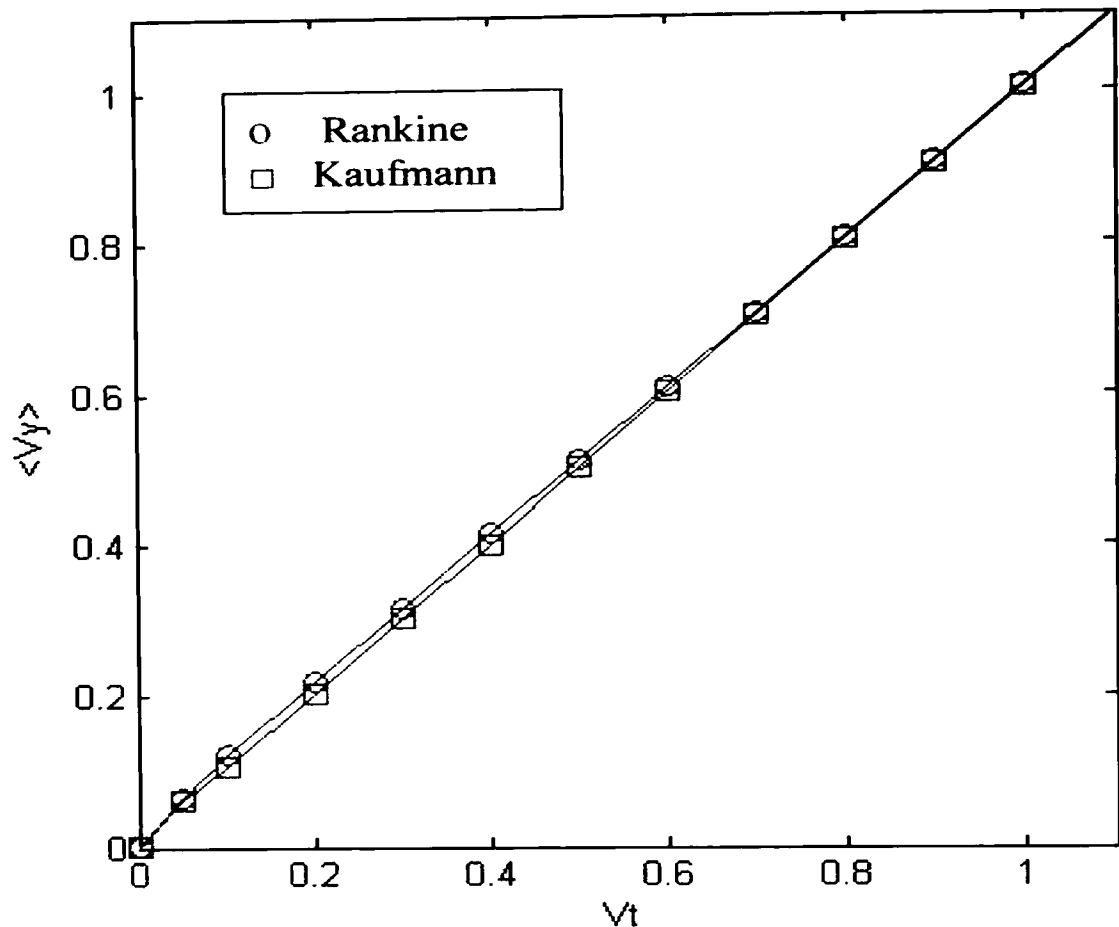


Figura 10-7: Comparación de la Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_t) para vórtices girando en el mismo sentido entre los vórtices Rankine y Kaufmann.

Puede observarse que el vórtice Rankine proporciona un valor de la velocidad media de sedimentación ligeramente mayor para pequeños valores de la velocidad terminal, no apreciándose prácticamente diferencia para mayores valores de V_t .

10.3.1.3. Influencia de la inercia de las partículas

Según se aprecia en las Figuras 8-29 y 9-21, en los dos casos se obtiene una curva con cierto parecido a los resultados conocidos para flujos turbulentos isótropos; sin embargo, la falta de uniformidad de dichas curvas hace pensar que este modelo de flujo no es el más adecuado para servir de fundamento a un modelo Lagrangiano de sedimentación y dispersión de partículas en flujos turbulentos. La representación de las mencionadas Figuras 8-29 y 9-21 en una misma gráfica da lugar a la Figura 10-8:

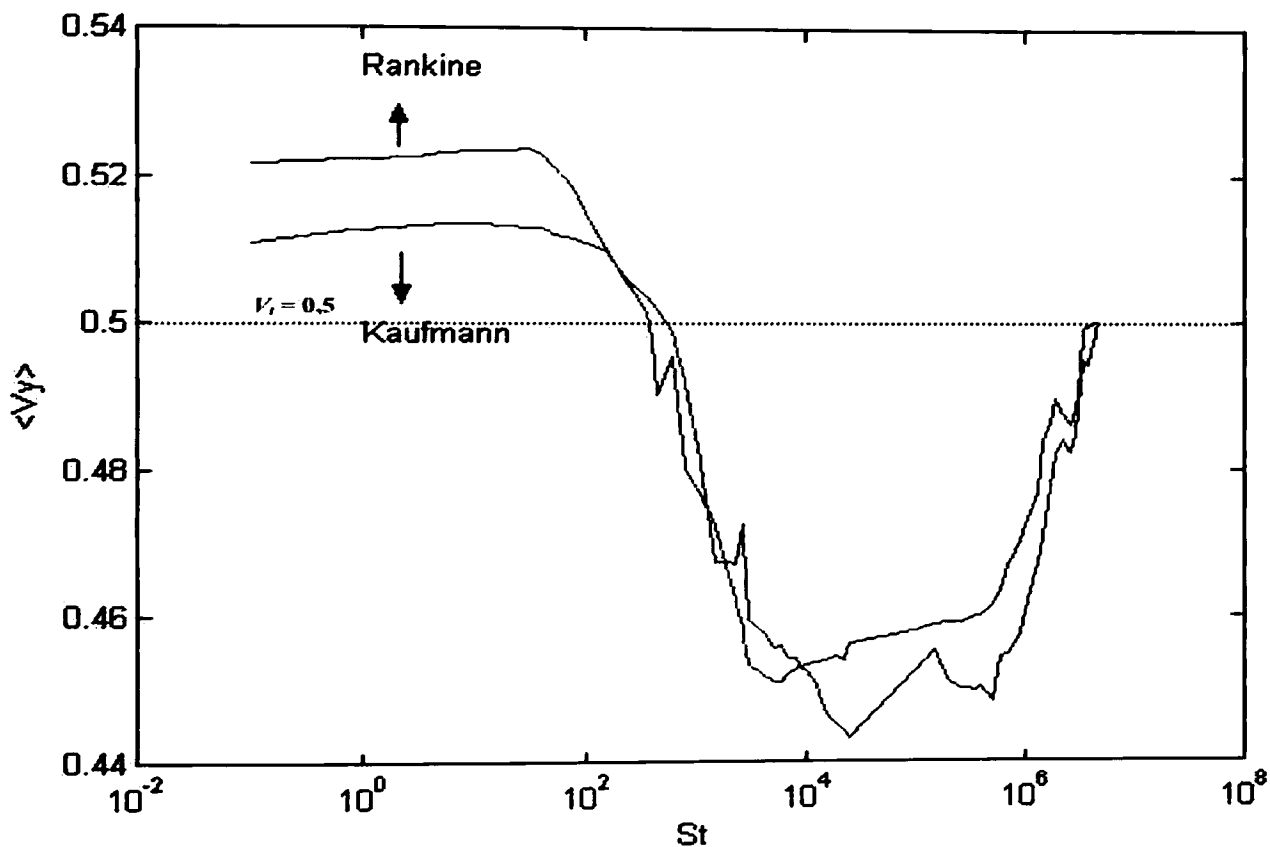


Figura 10-8: Comparación de la Velocidad media de sedimentación $\langle V_y \rangle$ frente a la inercia de las partículas (St) para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_t = 0,5$ con vórtices girando en el mismo sentido entre los vórtices Rankine y Kaufmann.

De la Figura 10-8 se desprende que para pequeños valores del número de Stokes la velocidad media de sedimentación es mayor para el vórtice Rankine, mientras que para mayores valores de la inercia de las partículas no se puede extraer ninguna conclusión en ese sentido.

10.3.2. Vórtices girando con sentidos de giro alternados

10.3.2.1. Trayectorias de partículas

Las trayectorias de partículas sin inercia son las de la Figura 8-31 para el vórtice Rankine y las de la Figura 9-22 para el vórtice Kaufmann. En los dos casos se aprecia la existencia de trayectorias cerradas para algunas partículas y el hecho de que las demás van rodeando los vórtices según el sentido de giro de los mismos. Además, igual que para los vórtices girando en el mismo sentido, las trayectorias cerradas son más amplias para el vórtice Rankine.

Para partículas con inercia, las correspondientes trayectorias están representadas en las Figuras 8-32, 8-33, 8-34 y 8-35 y las Figuras 9-23, 9-24, 9-25 y 9-26. Puede observarse que el comportamiento de las partículas es el mismo con ambos modelos de vórtices:

- Para valores pequeños o moderados de la inercia de las partículas, éstas describen una trayectoria cercana a la vertical pero con oscilaciones causadas por la acción de los vórtices.
- Para valores elevados de la inercia, todas las partículas terminan oscilando alrededor de la línea media situada entre dos filas verticales de vórtices.

La única diferencia es que, debido al menor valor de la velocidad de giro proporcionado por el modelo Kaufmann, con él las partículas alcanzan su abscisa final más tarde que con el vórtice Rankine.

10.3.2.2. Incremento de la velocidad media de sedimentación respecto al caso de fluido en reposo

Ambos modelos dan lugar a un incremento de la velocidad media de sedimentación para valores pequeños de la velocidad terminal, según se desprende de las Figuras 8-36 y 9-27.

Seguidamente, en la Figura 10-9 se representan en una misma gráfica los valores de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) obtenidos con ambos modelos frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_t).

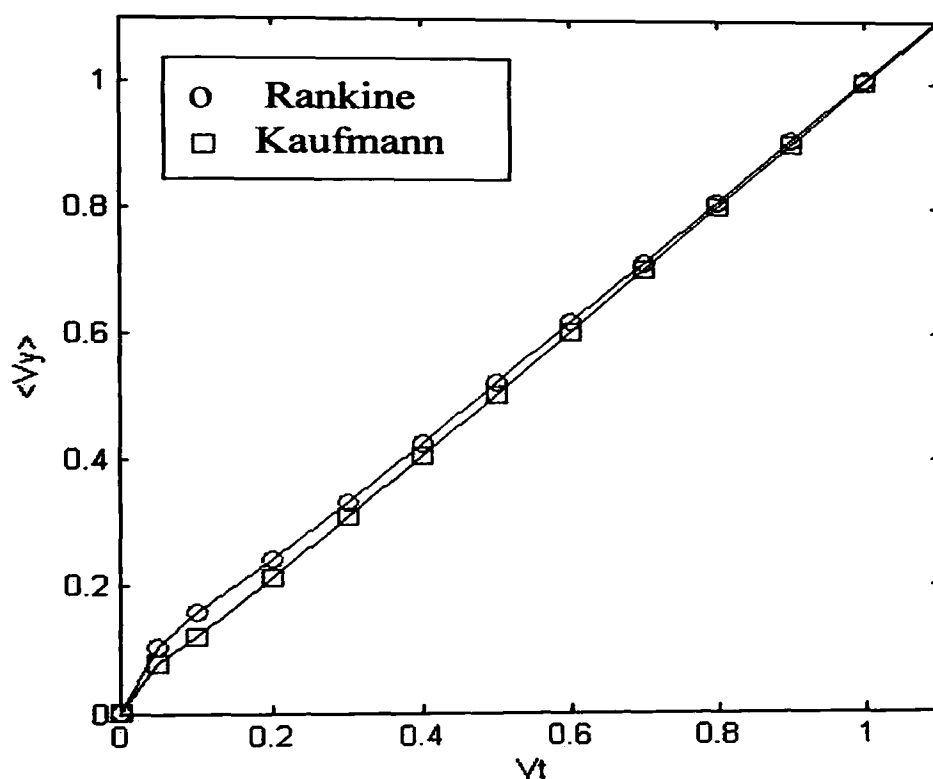


Figura 10-9: Comparación entre los vórtices Rankine y Kaufmann de la Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_t) para vórtices girando con sentidos de giro alternados.

La Figura 10-9 muestra que con el vórtice Rankine se obtiene un valor de la velocidad media de sedimentación ligeramente mayor para pequeños valores de la velocidad terminal que con el vórtice Kaufmann y que casi no hay diferencia para mayores valores de V_t .

10.3.2.3. Influencia de la inercia de las partículas

Las Figuras 8-37 y 9-28, que representan la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la inercia de las partículas (St), muestran que tanto con el vórtice Rankine como con el Kaufmann se obtienen unos resultados bastante aproximados a los conocidos para flujo turbulento isótropo. De la observación anterior es posible deducir que ambos modelos son adecuados para generar el campo de flujo analizado en esta Tesis, que parece una base de partida consistente para desarrollar un modelo Lagrangiano de sedimentación y dispersión de partículas en flujos turbulentos. En la Figura 10-10 pueden verse conjuntamente los resultados representados en las Figuras 8-37 y 9-28.

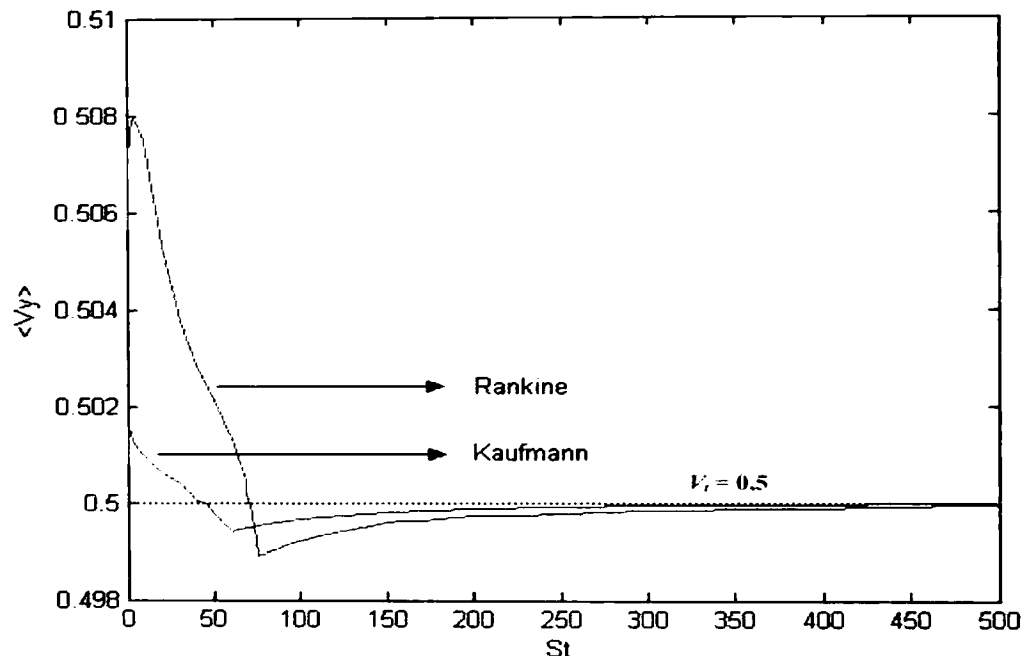


Figura 10-10: Comparación entre los vórtices Rankine y Kaufmann de la Velocidad media de sedimentación $\langle V_y \rangle$ frente a la inercia de las partículas (St) para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_t = 0,5$ con vórtices girando con sentidos de giro alternados.

Puede observarse que la velocidad media de sedimentación es mayor en el caso del vórtice Rankine para pequeños valores del número de Stokes. Para mayores valores de la inercia de las partículas prácticamente no se aprecia diferencia entre ambos vórtices.

A modo de conclusión final puede destacarse que los resultados obtenidos con ambos modelos son completamente idénticos desde un punto de vista cualitativo. Únicamente se aprecian ligeras diferencias cuantitativas por el hecho ya comentado de que el vórtice Kaufmann reduce a la mitad el valor máximo de la velocidad tangencial proporcionado por el vórtice Rankine. Como se comentó en el apartado 4.11, ambos tipos de vórtices pueden ser considerados como una cota inferior y una cota superior del valor de la velocidad tangencial; por tanto, podrían tomarse como buenas aproximaciones del Tiempo de Escape y de la Velocidad Media de Sedimentación la media aritmética de los valores obtenidos con cada uno de los dos modelos de vórtices.

Bloque IV
CONCLUSIONES

11. CONCLUSIONES FINALES

Dada la enorme importancia que tienen tanto en el mundo industrial como en el entorno natural los flujos bifásicos, con interacción entre partículas pesadas y fluidos, se han investigado en esta tesis dos problemas encuadrados dentro de dicho campo de la Mecánica de Fluidos.

En primer lugar se ha estudiado el tiempo que pequeñas partículas pesadas tardan en escapar de un vórtice tridimensional, *Tiempo de Escape* (la metodología seguida es la descrita en el apartado 7.1.1.). Los estudios previos (Fung, 2000 [11]) se habían centrado en el caso particular de un vórtice bidimensional horizontal y entre otras lagunas no habían obtenido una fórmula con la que obtener dicho Tiempo de Escape en función de los parámetros del problema. En esta Tesis Doctoral se han generalizado los resultados al caso tridimensional y se ha obtenido la fórmula mencionada comprobándose su validez mediante simulación numérica (en el Anexo II pueden consultarse los programas informáticos desarrollados para ello). En las simulaciones que se han realizado en términos dimensionales se ha tomado –sin pérdida de generalidad, apartado 8.1.7. de la Tesis- como viscosidad cinemática del fluido $\nu^* = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (es decir, la del aire) y para la relación entre las densidades de la partícula y del fluido el valor $\beta = (1000 \text{ Kg/m}^3) / (1,2 \text{ Kg/m}^3) = 833,33$ (es decir, para el fluido la densidad del aire y para la partícula la del agua con lo que una de ellas es mucho mayor que la otra); en cuanto a los parámetros característicos del vórtice -aunque sus valores como es lógico no influyen en la validez de la fórmula obtenida apartado 8.1.7. de la Tesis- se ha tomado un radio del vórtice $R_v^* = 0,001 \text{ m}$ y una circulación Γ^* desde 10^{-5} a $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ por ser estos valores del orden de magnitud habitual en flujos turbulentos. Una vez obtenida y comprobada numéricamente la fórmula desarrollada para el Tiempo de Escape, se ha analizado la velocidad media de sedimentación de las partículas situadas inicialmente en la región de captura del vórtice (la metodología seguida es la descrita en el apartado 7.1.2.), obteniéndose su relación con el Tiempo de Escape.

En segundo lugar se ha estudiado la sedimentación de pequeñas partículas pesadas en un campo de flujo que no había sido considerado hasta ahora, consistente en una disposición bidimensional de vórtices repetidos periódicamente en las direcciones horizontal y vertical (la metodología seguida es la descrita en el apartado 7.2.). Se han analizado dos situaciones diferentes, primero con todos los vórtices girando en el mismo sentido y luego con los vórtices girando con sentidos de giro alternados. En ambas situaciones se observa que para partículas sin inercia existe la posibilidad de suspensión permanente, de forma que las partículas describen órbitas cerradas, mientras que para partículas con inercia no sucede este hecho.

En el caso de vórtices girando en el mismo sentido, las partículas terminan sedimentando en la línea media vertical situada entre dos hileras verticales de vórtices, pero para valores de la inercia de las partículas suficientemente grandes, se ha observado el resultado un tanto sorprendente de que sus trayectorias van a parar siempre a unas líneas aisladas que separan dos tipos de regiones: unas franjas de baja vorticidad del flujo en las que no pueden entrar las partículas que inicialmente estaban fuera de ellas y unas regiones vacías en las que al cabo del tiempo no van a encontrarse ninguna partícula. La anchura de ambas regiones depende de la inercia de las partículas, como se comenta más adelante. Este resultado puede tener por tanto una enorme importancia como fundamento de un proceso de separación y clasificación de partículas. En cuanto a la velocidad media de sedimentación de partículas se ha obtenido un resultado con cierto parecido con los resultados teóricos y experimentales conocidos para turbulencia isotrópica pero no tan aproximado como sería deseable. También se ha podido comprobar que en esta disposición de flujo, las partículas sedimentan ligeramente más rápido que en fluido en reposo para pequeños valores de la velocidad terminal.

En el caso de vórtices girando con sentidos de giro alternados, hasta un cierto valor de la inercia de las partículas éstas siguen una trayectoria próxima a la vertical pero con oscilaciones debidas a la acción de los vórtices, pero para inercia

más fuerte todas las partículas terminan oscilando alrededor de la línea media situada en la zona central entre dos hileras verticales de vórtices. Como en el caso anterior se agrupan en el “canal” entre dos regiones vecinas de vorticidad. Por lo que respecta a la velocidad media de sedimentación, para valores pequeños de la velocidad terminal las partículas sedimentan en este flujo más rápidamente que en fluido en reposo y se obtienen resultados muy aproximados a los ya conocidos para turbulencia isótropa; por tanto este campo de flujo puede servir para modelar aquellas estructuras vorticales de los flujos turbulentos que son las responsables de que la velocidad media de sedimentación aumente y disminuya y puede ser la base para desarrollar un modelo lagrangiano de sedimentación de partículas en flujos turbulentos.

La investigación se ha llevado a cabo tomando dos modelos diferentes de vórtices: el vórtice de Rankine y el vórtice de Kaufmann (o modelo de Scully), ambos descritos en el apartado 4.9. Se han escogido los mismos por representar con relativa simplicidad el campo fluido generado por un vórtice, siendo los mismos adecuados a los objetivos perseguidos. El escoger otros modelos, como aquellos con componentes de la velocidad radiales y tangenciales, hubiese supuesto una complicación innecesaria y un importante incremento de los tiempos de computación. Los resultados obtenidos con los dos modelos utilizados son semejantes desde un punto de vista cualitativo, son generales y, por tanto, son válidos no sólo para un modelo concreto de vórtice. Únicamente se podría decir que se aprecian diferencias cuantitativas según se haya utilizado un modelo u otro. Desde un punto de vista cuantitativo, los resultados obtenidos con los modelos de Rankine y de Kaufmann pueden considerarse como una cota superior y una cota inferior, respectivamente, de los valores exactos.

Seguidamente se pasa a detallar con más profundidad las conclusiones y resultados que se han ido obteniendo a lo largo de la Tesis para cada uno de los objetivos propuestos.

11.1. Tiempo de escape

Se ha comenzado representando las trayectorias de las partículas para ambos modelos (capítulo 8 –vórtice Rankine- y capítulo 9 –vórtice Kaufmann-), concluyéndose:

- La posibilidad de captura de partículas sin inercia, describiendo trayectorias cerradas (Figuras 8-1 y 9-1).
- Para partículas con inercia, debido a la acción de la fuerza inercial centrífuga, ninguna partícula puede ser atrapada por el vórtice (Figuras 8-2 y 9-2).
- Se ha comprobado que los resultados obtenidos de las trayectorias de las partículas son independientes de las posiciones iniciales de las partículas (Figuras 8-3 y 8-4).
- Asimismo se ha constatado la simplificación que supone para el análisis el hecho de proyectar el movimiento sobre un plano perpendicular al eje del vórtice y considerar la componente de la velocidad terminal perpendicular a dicho eje.

A continuación se han calculado los puntos de equilibrio del sistema (aquellos donde el movimiento está detenido y las partículas podrían permanecer en ellos en reposo) para la mencionada proyección del movimiento sobre el plano perpendicular al eje del vórtice. Dichos puntos de equilibrio (que en el espacio tridimensional son realmente unas “líneas de equilibrio” paralelas al eje del vórtice) son un “foco inestable” y un “punto de silla” del sistema dinámico definido por las ecuaciones de movimiento. El cálculo de los puntos de equilibrio permite -analizando el caso en que ambos se condensan en un único punto- deducir el radio mínimo de las trayectorias de las partículas alrededor del vórtice, que es la escala de Longitud Característica del problema que se está investigando. *Tanto para el vórtice Rankine como para el Kaufmann se ha obtenido el resultado*

de que cuando la velocidad terminal tiende a cero, la semidistancia entre los puntos de equilibrio tiende a la Longitud Característica.

Seguidamente se han determinado las trayectorias límite, que son aquellas que comienzan en el punto de silla y que encierran una región que las partículas que vienen desde encima del vórtice no pueden alcanzar. Estas trayectorias son útiles a la hora de determinar el criterio de escape según el cual se considera si una partícula ha escapado del vórtice o no y para determinar la región de captura (aquella en la cual las partículas son atrapadas por el vórtice y giran alrededor del vórtice hasta que escapan de él). La amplitud de la región encerrada por las trayectorias límite es menor a medida que aumenta la velocidad terminal de caída, hasta que llega un valor para el que prácticamente puede considerarse que desaparece (Figuras 8-5 y 9-3).

Para alcanzar el **primer objetivo** de esta Tesis consistente en determinar “el tiempo que las partículas permanecen en el interior del vórtice hasta que escapan de él”, se ha formulado un criterio de escape según el cual *“se considera que la partícula ha escapado del vórtice cuando la distancia al foco es 1,5 veces la separación entre los puntos de equilibrio; es decir, tres veces la longitud característica”*. Posteriormente, se ha comprobado con la investigación realizada (Figuras 8-6 y 9-4) que dicho criterio es correcto. Seguidamente, se ha obtenido numéricamente el Tiempo de Escape y se ha analizado la influencia que tienen sobre el mismo diversas variables; concluyéndose:

1. Se ha comprobado que *el Tiempo de escape disminuye monótonamente al aumentar la velocidad terminal de caída en fluido en reposo* (Figuras 8-8 y 9-5).
2. Se ha determinado *la influencia de la inercia de las partículas sobre el Tiempo de escape* (Figuras 8-9 y 9-6). Así, éste tiende a disminuir a medida que la inercia de las partículas crece como cabría esperar (ya que éstas se verán menos influenciadas por el campo de flujo circundante); pero no lo hace monótonamente sino que sigue una serie de oscilaciones

que están relacionadas por un lado con las vueltas que da la partícula alrededor del eje del vórtice hasta que escapa de él, y por otro lado con la mayor o menor distancia entre la trayectoria de la partícula y el punto de silla (cuando el tiempo de escape aumenta con la inercia de la partícula se debe a que ésta al dar la última vuelta alrededor del eje del vórtice pasa cada vez más cerca del punto de silla -Figuras 8-10 y 9-7-).

3. Se ha corroborado que cuando *el vórtice está muy inclinado, el tiempo de escape es elevado* porque la partícula describe una trayectoria casi helicoidal alrededor del eje del mismo y a medida que el vórtice está menos inclinado, la partícula escapa más rápidamente de él (Figura 8-11).
4. Uno de los resultados más trascendente de esta Tesis Doctoral ha sido *la obtención analítica de la fórmula (8.33)* que proporciona el Tiempo de escape en función de los parámetros que influyen en el mismo y de una constante adimensional que se determina empíricamente denominada “Constante de tiempo de escape”.
5. Se han comparado los resultados numéricos con la fórmula teórica, comprobándose la validez de la misma. Para ello, se ha determinado primeramente el valor de la Constante de tiempo de escape. Se ha llegado a la conclusión de que para valores suficientemente pequeños del número de Froude de la partícula y de la velocidad terminal, dicha constante vale $K_e = 0,036$ (Figuras 8-15, 8-16 y 8-17) en el caso del vórtice Rankine y $K_e = 0,009$ para el vórtice Kaufmann (Figuras 9-10, 9-11 y 9-12). Después, *mediante simulación numérica se ha comprobado la validez de la expresión obtenida*, observándose que para un diámetro de partícula suficientemente pequeño ($\sim 10 \mu\text{m}$) el Tiempo de escape obtenido mediante simulación numérica coincide con el teórico proporcionado por la ecuación (8.33) mientras que se produce una divergencia entre ambos valores a medida que aumenta el diámetro de las partículas (Figuras 8-18, 8-19, 9-13 y 9-14).

6. Tras obtener la mencionada fórmula para el Tiempo de escape y comprobar numéricamente su validez, se ha aplicado la misma a un caso práctico (sedimentación de pequeñas partículas en flujos turbulentos atmosféricos). Concretamente, se ha visto como *el conocimiento del tiempo de escape permite determinar como algo novedoso (Figura 8-20) que a partir de un tamaño crítico de las partículas, éstas verifican bien la Teoría de Maxey (para diámetro de partícula < diámetro crítico) o bien la Teoría de Dávila & Hunt (para diámetro de partícula > diámetro crítico) sobre la velocidad media de sedimentación en flujos turbulentos.*
7. Se ha analizado numéricamente la Velocidad media de sedimentación de pequeñas partículas pesadas situadas inicialmente en la región de captura del vórtice frente al Tiempo de escape promedio (Figuras 8-22 y 9-15); concluyéndose que *mediante la simulación numérica es posible determinar la relación entre ambas variables, obteniéndose que para partículas suficientemente pequeñas la Velocidad media de sedimentación adimensional es del orden del Tiempo de escape promedio elevado a $-1/5$.*

11.2. Sedimentación de partículas pesadas en una disposición periódica bidimensional de vórtices

Para alcanzar el **segundo objetivo** de investigación de esta Tesis Doctoral, consistente en “estudiar la sedimentación de pequeñas partículas pesadas en una distribución bidimensional de vórtices” -en concreto para los vórtices Rankine (capítulo 8) y Kaufmann (capítulo 9)-, se han analizado dos situaciones diferentes: primero, con los vórtices girando en el mismo sentido y segundo, con sentidos de giro alternos para cada dos vórtices consecutivos. En ambos casos, la repetición periódica de los vórtices y los correspondientes sentidos de giro han sido simulados mediante los algoritmos informáticos que se han desarrollado y que son recogidos en el Anexo II (19 programas de elaboración propia).

11.2.1. Vórtices girando en el mismo sentido

- 1) Para partículas sin inercia se observa la posibilidad de suspensión permanente de algunas de ellas, que describirían órbitas cerradas (Figuras 8-24 y 9-16).
- 2) Para partículas con inercia moderada ya no se aprecian órbitas cerradas, sino un comportamiento un tanto sorprendente: para un tiempo suficientemente grande todas las partículas acaban oscilando alrededor de la línea media entre dos líneas verticales de vórtices cualquiera que sea su posición inicial (Figuras 8-25 y 9-17). Mientras mayor es la inercia de las partículas menor es la amplitud de esas oscilaciones.
- 3) La inclinación inercial hace que las partículas no se muevan a lo largo de una línea de corriente del flujo sino a lo largo de la periferia de la estructura vortical, agrupándose en el “canal” que se forma entre dos regiones vecinas de vorticidad.
- 4) Para partículas con un número de Stokes más elevado (es decir, para partículas con inercia mucho más fuerte) el comportamiento de las mismas es aún más sorprendente si cabe: las partículas en vez de terminar en la zona central entre dos hileras verticales de vórtices como en el caso anterior, siguen unas trayectorias en las que se aprecia como principal característica la existencia de unas curvas aisladas que separan dos tipos de zonas bien definidas en el campo fluido: por un lado, unas franjas de baja vorticidad del flujo -en las que no pueden entrar las partículas que inicialmente estaban fuera de ellas y en las que las partículas que inicialmente si se encontraban dentro de ellas caen casi verticalmente por el hecho de ser poco importante el efecto de la vorticidad en estas zonas- y por otro lado, unas regiones vacías en las que al cabo del tiempo no va a encontrarse ninguna partícula (Figuras 8-26, 8-27, 9-18 y 9-19).

- 5) Mientras más fuerte es la inercia de las partículas, mayor es la anchura de las franjas donde es poco importante la influencia de la vorticidad y menor la anchura de las regiones vacías.
- 6) Las curvas que separan los dos tipos de zonas (franjas de baja vorticidad y regiones vacías) corresponden a segmentos de las trayectorias asintóticas finales de las partículas; guardando cierto paralelismo con lo obtenido por Maxey & Corrsin en un flujo celular.
- 7) El hecho de que existan franjas de baja vorticidad junto a regiones vacías de diferentes anchuras según las inercias de las partículas podría ser de gran interés en determinados procesos naturales e industriales que precisen la clasificación de partículas o que requieran la separación de partículas de un fluido. Además, abre la posibilidad de desarrollar algún tipo de dispositivo físico que materialice el giro de los vórtices de forma que se pueda conocer la abscisa final a la que vayan a sedimentar las partículas que se quieran separar. En consecuencia este resultado proporciona un fundamento sólido para el desarrollo de un método de separación de partículas de un fluido y de clasificación de las mismas, alternativo a los que actualmente están en uso o en investigación.
- 8) Por lo que respecta a la velocidad media de sedimentación, en este campo de flujo las partículas sedimentan sólo ligeramente más rápido que en fluido en reposo para pequeños valores de la velocidad terminal; para mayores valores de la misma prácticamente no se aprecia diferencia (Figuras 8-28 y 9-20).
- 9) De la representación de la velocidad media de sedimentación frente al número de Stokes se deduce que, aunque el resultado obtenido guarda cierta similitud con los resultados teóricos y experimentales para turbulencia isótropa (Figuras 8-29 y 9-21), la concordancia no parece suficientemente buena. Hay que tener en cuenta que en las zonas centrales situadas entre dos hileras verticales de vórtices se origina una capa de

cortadura con velocidades en sentidos opuestos, que aunque de poca intensidad, no es simulada correctamente por este modelo.

- 10) Por tanto, esta disposición de flujo con los vórtices periódicos girando en el mismo sentido no parece un punto de partida adecuado para el desarrollo de un modelo lagrangiano de sedimentación de partículas en flujos turbulentos, pero tiene un indudable interés desde el punto de vista de alguna aplicación industrial en la que sea necesaria la separación de partículas.

11.2.2. Vórtices girando con sentidos alternados

- 1) Para partículas sin inercia sigue observándose la posibilidad de suspensión permanente de algunas de ellas, que siguen órbitas cerradas. Además la partículas que no permanecen atrapadas por los vórtices siguen una trayectoria que los va rodeando según el sentido de giro de los mismos (Figuras 8-31 y 9-22).
- 2) En cuanto a partículas inerciales, ya no existe posibilidad de captura por la acción de la fuerza inercial centrífuga.
- 3) Para inercia pequeña o moderada de las partículas, éstas siguen una trayectoria próxima a la vertical pero con oscilaciones debidas a la acción de los vórtices (Figuras 8-32, 8-33, 9-23 y 9-24).
- 4) Para valores mayores de la inercia el comportamiento vuelve a ser diferente. Si bien las partículas comienzan describiendo una trayectoria similar a la anterior (Figuras 8-34 y 9-25), como el camino que siguen va estando cada vez un poco más distanciado de los vórtices llega un momento en que se separan de la línea vertical de vórtices y para un tiempo suficientemente grande terminan oscilando alrededor de la línea media situada en la zona central entre dos hileras verticales de vórtices

(Figuras 8-35 y 9-26). Nuevamente ocurre que las partículas se agrupan en el “canal” formado por dos regiones vecinas de vorticidad como consecuencia de la inclinación inercial. En este caso en cualquier zona del campo fluido los vórtices adyacentes inducen velocidades en el mismo sentido, por lo que en las zonas centrales entre las distintas hileras de vórtices verticales la disminución de la influencia de la vorticidad no es tan importante como en el caso de los vórtices girando en el mismo sentido; por ello no tiene lugar la existencia de franjas de baja vorticidad que se daba en ese caso.

- 5) En cuanto a la velocidad media de sedimentación se puede concluir que: para una velocidad terminal de caída en fluido en reposo baja, las partículas sedimentan mucho más rápidamente en este campo de flujo de lo que lo harían en fluido en reposo (Figuras 8-36 y 9-27); para valores más elevados de la velocidad terminal de caída, casi no se aprecia diferencia y menos aún si la inercia de las partículas es mayor -ya que en ese caso su trayectoria sería casi vertical con alguna ligera desviación provocada por el campo de flujo-.
- 6) En relación a la influencia de la inercia de las partículas, se ha obtenido un resultado bastante similar a los ya conocidos –desde el punto de vista teórico como experimental- para turbulencia isótropa (Figuras 8-37 y 9-28).
- 7) Por tanto, este campo de flujo simulado en esta Tesis aproxima bastante bien el tipo de estructuras vorticales presentes en los flujos turbulentos isótropos, que son los responsables de que la velocidad media de sedimentación de las partículas aumente o disminuya, de tal manera que sería un punto de partida muy adecuado para un posterior establecimiento de un modelo lagrangiano para la sedimentación de pequeñas partículas pesadas en flujos turbulentos.

Como comentario final hay que destacar que los resultados obtenidos en esta investigación son de utilidad para:

- Explicar el comportamiento de diferentes campos de flujo y proporcionar nuevos conceptos para comprender la sedimentación y el transporte de partículas en flujos turbulentos. Además son consistentes con los experimentos llevados a cabo por Srdic (1999) [22] para partículas que sedimentan en turbulencia homogénea y aunque no son directamente aplicables a flujos turbulentos reales marcan la pauta de cómo una partícula pesada en oposición a un elemento fluido lagrangiano se moverá en respuesta a un determinado flujo y cómo esta respuesta afectará a ciertas magnitudes como el tiempo de escape y la velocidad media de sedimentación. Por tanto, servirán de fundamento para resolver situaciones más complejas.
- Analizar la dinámica de la sedimentación en flujos turbulentos -si el tiempo característico de deformación de las estructuras vorticales es mucho mayor que el tiempo característico del proceso de sedimentación-, ya que las visualizaciones de flujo (Perkins et al., 1991)[133] y las simulaciones numéricas directas (Squires & Eaton, 1991) [17] (Vincent & Meneguzzi, 1991) [7] muestran -en la mayoría de los flujos turbulentos tridimensionales- estructuras de vórtices organizados con una escala integral y un radio del orden de la microescala de Kolmogorov (Jiménez et al., 1993) [8] y sólo estos vórtices cuyos ejes son casi horizontales tienen un efecto importante en la sedimentación de partículas; por eso el estudio realizado en esta Tesis sobre el flujo -generado mediante los vórtices repetidos periódicamente- es relevante en la sedimentación de partículas en turbulencia.
- Estimar el desplazamiento de la partícula en flujos rotacionales -como los centrífugos- ya que en ellos los vórtices de la turbulencia tienden a alinearse paralelamente al eje de rotación (Dávila & Hunt, 2001) [1].

Bloque V
INVESTIGACIONES FUTURAS

12. PROPUESTA DE INVESTIGACIONES FUTURAS

Los resultados obtenidos en esta Tesis Doctoral abre otras posibles vías de investigación, tales como:

- ❑ Extender el análisis para partículas no necesariamente mucho más densas que el fluido circundante.
- ❑ Realizar el análisis para partículas cuyas formas sean diferentes de la esférica.
- ❑ Desarrollar un modelo numérico de flujo turbulento que sea de utilidad tanto para el análisis de la dispersión de partículas como de la sedimentación de éstas.
- ❑ Desarrollo y construcción de prototipos y aparatos que permitan reproducir los flujos analizados en esta Tesis Doctoral.

Puede verse por tanto, que las investigaciones que se han llevado a cabo y que han dado lugar al desarrollo de esta Tesis no constituyen un punto y final, sino que por el contrario abren una puerta a diversas líneas de investigación, como se va a exponer con más detalle en los apartados 12.1. y 12.2.

12.1. Tiempo de escape

Como continuación del primer objetivo de esta investigación (Tiempo de escape y Velocidad promedio de sedimentación de partículas situadas inicialmente en la región de captura del vórtice) sería interesante estudiarlo para un vórtice tridimensional pero *en el caso de partículas que no sean mucho más densas que el fluido que las rodea*, obteniéndose una nueva formulación para el tiempo de escape (o el tiempo que tarda la partícula en llegar al centro del vórtice en caso de ser menos densa que el fluido) en la que apareciera su dependencia de la densidad de las partículas.

Otro campo de gran interés sería analizar, para *partículas con formas diferentes a la esférica*, tanto las investigaciones realizadas en esta Tesis como las que se acaban de proponer. Hay situaciones, como por ejemplo en la combustión de biomasa, de paja o de astillas de madera, en las que el considerar que las partículas tienen forma cilíndrica o de disco representa una aproximación geométrica mucho más adecuada (Yin et. Al, 2003) [134].

12.2. Sedimentación de partículas en vórtices periódicos

En cuanto al segundo objetivo (Sedimentación de pequeñas partículas pesadas en una distribución bidimensional de vórtices), asimismo se podría *extender el análisis a partículas que no fueran mucho más densas que el fluido circundante*.

También se podrían seguir otras posibles líneas de investigación tales como las siguientes: en el dominio bidimensional puede buscarse el *acoplamiento del modelo desarrollado aquí con algún modelo existente de turbulencia isótropa* (como por ejemplo la simulación cinemática), de modo que pueda desarrollarse un *modelo lagrangiano que sea válido tanto para dispersión como para sedimentación de partículas en un flujo turbulento isótropo* (Sánchez & Dávila, 2003) [135] y posteriormente podría plantearse la *formulación de un modelo semejante al expuesto en esta Tesis pero en el dominio tridimensional*. Se podría pensar en una disposición de vórtices tridimensionales inclinados unos ángulos aleatorios respecto a los ejes coordenados, que se repitan de un modo periódico y luego a partir de los resultados que se obtengan desarrollar un modelo lagrangiano de turbulencia isótropa para el caso tridimensional.

Muy interesante y con una indudable aplicación práctica sería el *desarrollo de un prototipo que reproduzca la disposición bidimensional de vórtices periódicos* simulados numéricamente en esta Tesis, a fin de investigar de un modo experimental el método de separación y clasificación de partículas propuesto en la

misma. En este sentido ya han sido realizados algunos trabajos numéricos (Sánchez & Moreno-López, 2004 [136], [137], [138]);

Finalmente, también podrían extenderse para este segundo objetivo las propuestas anteriores y las investigaciones realizadas en esta Tesis al caso de *partículas con formas diferentes a la esférica*.

ANEXOS

ANEXO I

Integración Numérica

Cualquier problema descrito mediante *Ecuaciones Diferenciales* ordinarias de cualquier orden, puede reducirse al estudio de un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden cuya forma general es:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_N) \quad i = 1, \dots, N \quad (I.1)$$

donde las funciones f_i son conocidas. Para que el problema esté completamente definido, además de las ecuaciones diferenciales es preciso también especificar las **condiciones de contorno**. Tales condiciones de contorno son las que determinan el tipo de método de resolución a aplicar.

Hay dos tipos de problemas:

- **Problemas de valor inicial**: todas las y_i son dadas en algún valor inicial x_i y se desea conocer las y_i en algún punto final x_f o en algún rango discreto de puntos.
- **Problemas de valor de contorno**: las condiciones de contorno están especificadas en más de un punto.

Esta Tesis Doctoral abordará únicamente al problema de valor inicial. La idea para el procedimiento de resolución es la siguiente: reescribir las dy_i y dx como pasos finitos Δy_i y Δx y multiplicar la ecuación por Δx . Esto proporciona unas fórmulas algebraicas para el cambio en las funciones cuando la variable independiente x se incrementa una longitud de paso Δx . En el límite, cuando la longitud del paso es muy pequeña se consigue una buena aproximación de la ecuación diferencial. La implementación literal de este procedimiento es el **MÉTODO DE EULER**, conceptualmente importante pero que en la práctica no es recomendable. Todos los métodos que se suelen seguir en la práctica desarrollan la misma idea, añadir pequeños incrementos a las funciones correspondientes a las derivadas multiplicados por las longitudes de paso.

Entre los métodos existentes, destaca el MÉTODO DE RUNGE-KUTTA. Este método lo que hace es propagar una solución sobre un intervalo combinando la información de varios pasos semejantes a los utilizados por el método de Euler (cada uno incluyendo una evaluación de las funciones f_i) y utilizando luego esta información para ajustar un desarrollo en serie de Taylor en algún orden superior.

I.1. Método de Euler

El método de Runge-kutta se basa en el método de Euler [140], cuya fórmula es:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (I.2)$$

que avanza una solución desde x_n a $x_{n+1} = x_n + h$.

Esta fórmula resulta de tomar los dos primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de y_{n+1} , no es simétrica, avanza la solución a través de un intervalo h , usando la información de la derivada únicamente en el punto inicial del intervalo (Figura I-1).

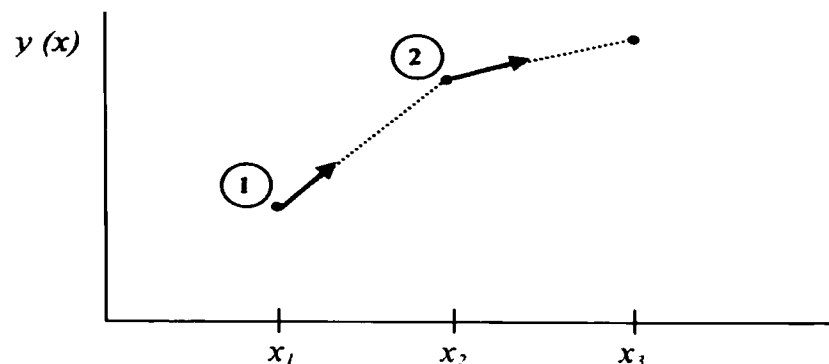


Figura I-1: Método de Euler.

Puede comprobarse que el *error de truncamiento* cometido es proporcional a h^2 . Este método no es recomendable por varias razones: no es muy preciso comparado con otros métodos, ni es muy estable.

I.2. Método de Runge-Kutta

Una mejora del citado método de Euler sería considerar un paso como el anterior para obtener un “paso de prueba” al punto medio del intervalo y después utilizar los valores tanto de x como de y en ese punto medio para computar el paso real a lo largo del intervalo completo (Figura I-2). Este procedimiento se denomina *Método de Runge-Kutta de segundo orden* o *Método de Mediapunto* [140].

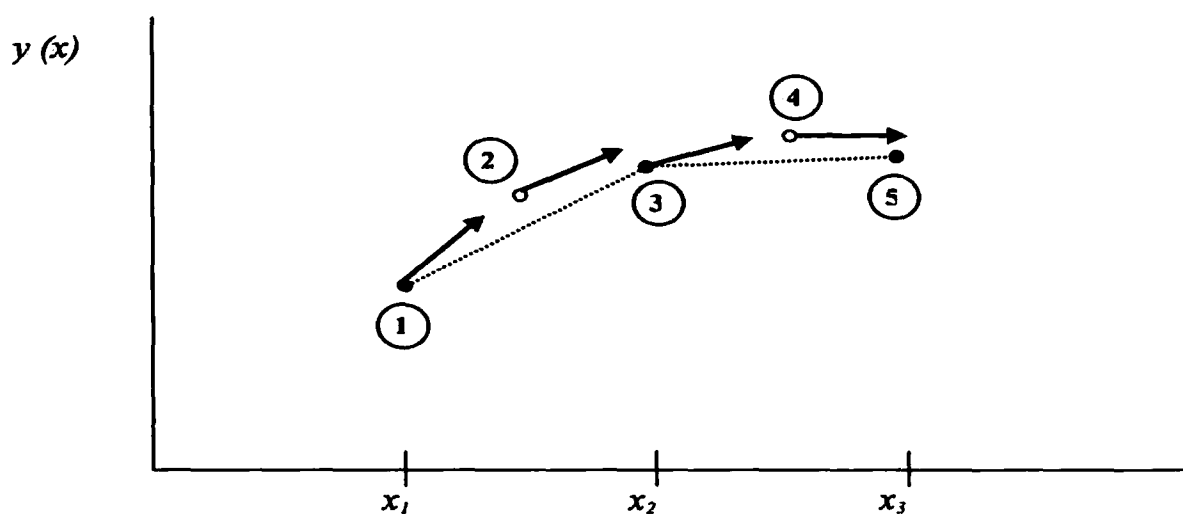


Figura I-2: Método de Runge-Kutta de segundo orden.

Las ecuaciones son:

$$k_1 = h f(x_n, y_n) \quad (I.3a)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \quad (I.3b)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2 + O(h^3) \quad (I.3c)$$

Sin embargo aún se pueden conseguir aproximaciones mejores. Hay muchas formas de evaluar $f(x,y)$, todas ellas de primer orden, pero aparecen

diferentes coeficientes de términos de error de orden superior. Sumando una combinación correcta de éstos se puede eliminar los términos de error, orden por orden. Esta es la idea básica del método de Runge-Kutta. Hay varias fórmulas específicas basadas en ella, pero la más frecuentemente usada es la fórmula clásica de *Runge-Kutta de cuarto orden* [140]:

$$k_1 = h f(x_n, y_n) \quad (1.4a)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (1.4b)$$

$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (1.4c)$$

$$k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3) \quad (1.4d)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5) \quad (1.4e)$$

Este método (Figura I-3) requiere cuatro evaluaciones de f por paso h : una en el punto inicial, dos en puntos de prueba intermedios y una en un punto de prueba final.

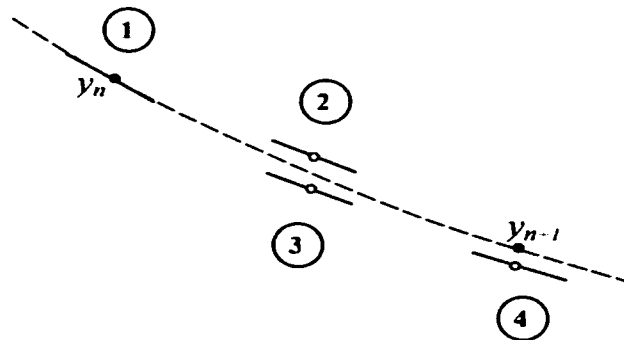


Figura I-3: Método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Este último método trata cada paso de idéntica manera, el comportamiento anterior de una solución no es utilizado en su propagación. Esta aproximación puede ser que no minimice el tiempo de computación e incluso puede fallar en aquellos problemas que requieran una longitud de paso variable. Por tanto un buen procedimiento de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias debería ejercer algún control adaptativo sobre su propio progreso, realizando frecuentes cambios en su longitud de paso. Usualmente el propósito de este control de la longitud de paso es obtener alguna precisión predeterminada con el mínimo esfuerzo computacional, y a veces esta exactitud podría ser demandada no directamente por la propia solución sino por alguna otra magnitud. Con el Runge-Kutta de cuarto orden la técnica más directa es el *doble paso*: se toma cada paso dos veces, una como un paso completo y luego independientemente como dos medios pasos (Figura I-4).

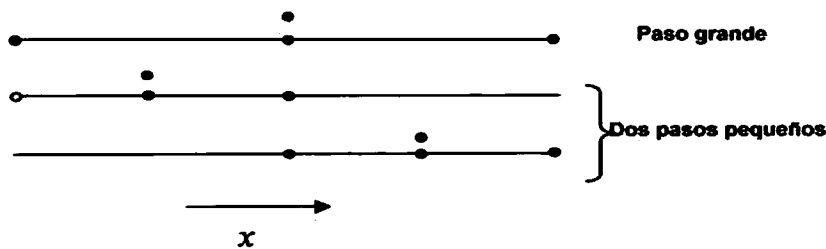


Figura I-4: Doble paso para el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Si se expresa la solución exacta para un avance de x a $x+2h$ por $y(x+2h)$ y las dos soluciones aproximadas por y_1 (un paso $2h$) e y_2 (dos pasos cada uno de longitud h), como el método es de cuarto orden la solución verdadera y las dos aproximaciones numéricas son:

$$y(x+2h) = y_1 + (2h)^5 \phi + O(h^6) + \dots \quad (1.5a)$$

$$y(x+2h) = y_2 + 2(h^5) \phi + O(h^6) + \dots \quad (1.5b)$$

donde, para el orden h^5 , el valor ϕ permanece constante a lo largo del paso. Hay que recordar que en el desarrollo en serie de Taylor “ ϕ ” es un número cuyo orden de magnitud es $y^{(5)}(x)/5!$. La diferencia entre esas dos estimaciones numéricas es un buen indicador del error de truncamiento:

$$\Delta = y_2 - y_1 \quad (1.6)$$

y esta es la diferencia que se debe procurar mantener para un grado de exactitud deseado, ni demasiado grande ni demasiado pequeña. Esto se lleva a cabo ajustando h . Entonces, ignorando los términos de orden h^6 y superiores, se puede resolver las dos ecuaciones (1.5) para obtener una estimación numérica de la verdadera solución:

$$y(x+2h) = y_2 + \frac{\Delta}{15} + O(h^6) \quad (1.7)$$

Esta estimación es aproximada al quinto orden, un orden superior que en los pasos Runge-Kutta originales; pero no hay forma de comprobar su error de truncamiento y además ya se ha comentado que un alto orden no implica siempre una alta exactitud.

Un algoritmo alternativo para ajustar la longitud del paso se basa en las *fórmulas de Runge-Kutta encajadas*, ideadas originalmente por Fehlberg [140]; éste descubrió un método de quinto orden con seis evaluaciones de funciones de modo que otra combinación de las seis funciones proporciona un método de cuarto orden. La diferencia entre las dos estimaciones de $y(x+h)$ puede usarse como una estimación del error de truncamiento para ajustar la longitud del paso. La forma general de la fórmula de *quinto orden de Runge-Kutta* [140] es:

$$k_1 = h f(x_n, y_n) \quad (1.8a)$$

$$k_2 = h f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} k_1) \quad (1.8b)$$

$$k_3 = h f(x_n + a_3 h, y_n + b_{31} k_1 + b_{32} k_2) \quad (1.8c)$$

$$k_4 = h f(x_n + a_4 h, y_n + b_{41} k_1 + b_{42} k_2 + b_{43} k_3) \quad (I.8d)$$

$$k_5 = h f(x_n + a_5 h, y_n + b_{51} k_1 + b_{52} k_2 + b_{53} k_3 + b_{54} k_4) \quad (I.8e)$$

$$k_6 = h f(x_n + a_6 h, y_n + b_{61} k_1 + b_{62} k_2 + b_{63} k_3 + b_{64} k_4 + b_{65} k_5) \quad (I.8f)$$

$$y_{n+1} = y_n + c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4 + c_5 k_5 + c_6 k_6 + O(h^6) \quad (I.8g)$$

Entonces la fórmula encajada de cuarto orden es:

$$y_{n+1}^* = y_n + c_1^* k_1 + c_2^* k_2 + c_3^* k_3 + c_4^* k_4 + c_5^* k_5 + c_6^* k_6 + O(h^5) \quad (I.9)$$

y el error estimado es:

$$\Delta = y_{n+1} - y_{n+1}^* = \sum_{i=1}^6 (c_i - c_i^*) k_i \quad (I.10)$$

Los valores particulares de las constantes fueron hallados por Cash & Karp [140] y son los que se muestran en la Tabla I-1.

TABLA I-1. Constantes de Cash & Karp

i	a _i	b _{ij}					c _i	c _i [*]
1							<u>37</u> 378	<u>2825</u> 27648
2	<u>1</u> 5	<u>1</u> 5					0	0
3	<u>3</u> 10	<u>3</u> 40	<u>9</u> 40				<u>250</u> 621	<u>18575</u> 48384
4	<u>3</u> 5	<u>3</u> 10	<u>- 9</u> 10	<u>6</u> 5			<u>125</u> 594	<u>13525</u> 55296
5	1	<u>- 11</u> 54	<u>5</u> 2	<u>- 70</u> 27	<u>35</u> 27		0	<u>277</u> 14336
6	<u>7</u> 8	<u>1631</u> 55296	<u>175</u> 512	<u>575</u> 13824	<u>44275</u> 110592	<u>253</u> 4096	<u>512</u> 1771	<u>1</u> 4
j =		1	2	3	4	5		

Ahora que se conoce cual es el error, es necesario considerar cómo mantenerlo por debajo del valor deseado. Par ello hay que determinar la relación entre Δ y h . De acuerdo con las ecuaciones (I.8) y (I.9) Δ es del orden de h^5 . Si tomamos un paso h_1 y se produce un error Δ_1 , entonces el paso h_0 habría dado algún otro valor Δ_0 estimado como:

$$h_0 = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.2} \quad (\text{I.11})$$

donde: Δ_0 es la precisión deseada. Esta ecuación (I.11) puede utilizarse de dos formas: si $\Delta_1 > \Delta_0$ la ecuación nos indica cuanto hay que disminuir la longitud del paso y si $\Delta_1 < \Delta_0$ dicha expresión indica cuanto se puede incrementar con seguridad la longitud del paso.

ANEXO II

Subrutinas informáticas

A continuación se relacionan los **programas informáticos** y las **subrutinas** que se han elaborado para la realización de esta Tesis Doctoral. La implementación de los propios programas ha sido necesaria por el carácter particular de los problemas estudiados, que hace que *“no exista en el mercado ningún software desarrollado que pueda ser utilizado para analizar los mismos”*.

El lenguaje de programación utilizado ha sido la versión de Borland del lenguaje C, es decir, Borland C ++ (concretamente la versión 5.02). El tratamiento estadístico de los resultados obtenidos y las representaciones gráficas de los mismos se ha realizado con Matlab (versión 6.5, R13).

Aunque la mayoría de los programas son de elaboración propia, algunas subrutinas y funciones son revisiones o modificaciones de otras existentes, que debo agradecer al Grupo de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Sevilla y muy especialmente al Dr. Javier Dávila.

En el encabezado de cada rutina se incluye una explicación de la utilidad de la misma y a lo largo de los listados aparecen abundantes líneas de comentarios con el sólo propósito de facilitar al lector la comprensión de la programación efectuada.

Los 19 PROGRAMAS informáticos desarrollados se agrupan en:

A) Trayectorias de partículas en un vórtice tridimensional (aplicación a los vórtices Rankine y Kaufmann).

- **ligtravoin_s_i**: Trayectorias de partículas en un vórtice cuyo eje forma unos ángulos θ y χ con el sistema de referencia fijo. Para partículas sin inercia. Todo referido a ejes ligados al vórtice.

- **ligtravoin:** Trayectorias de partículas en un vórtice cuyo eje forma unos ángulos tita y chi con el sistema de referencia fijo. Partículas con inercia. Todo referido a ejes ligados al vórtice.

B) Tiempo de escape de partículas en un vórtice tridimensional (aplicación a los vórtices Rankine y Kaufmann).

- **tescapeiner:** Tiempo de escape en un vórtice cuyo eje forma unos ángulos tita y chi con el sistema de referencia fijo. Partículas con inercia. Todo referido a ejes ligados al vórtice.
- **Kemedia:** Tiempo de escape en un vórtice cuyo eje forma unos ángulos tita y chi con el sistema de referencia fijo. Partículas con inercia. Promediando para muchas partículas. Todo referido a ejes ligados al vórtice.
- **dtmedia:** Tiempo de escape en un vórtice cuyo eje forma unos ángulos tita y chi con el sistema de referencia fijo. Partículas con inercia. Promediando para muchas partículas (en función del diámetro de las partículas). Todo referido a ejes ligados al vórtice.

C) Velocidad media de sedimentación de partículas en un vórtice tridimensional (aplicación a los vórtices Rankine y Kaufmann).

- **Inclivel:** Velocidad media de sedimentación de un determinado número de partículas situadas inicialmente en la región de captura de un vórtice tridimensional inclinado. Todo referido a ejes fijos.

D) Trayectorias de partículas en vórtices bidimensionales periódicos girando en el mismo sentido (aplicación a los vórtices Rankine y Kaufmann).

- **trahormuchos_s_i**: Trayectorias de partículas al moverse en dirección “y” a lo largo del tiempo sobre muchos vórtices horizontales sin inercia.
- **trahormuchos**: Trayectorias de partículas al moverse en dirección “y” a lo largo del tiempo sobre muchos vórtices horizontales. Partículas con inercia.

E) Velocidad media de sedimentación de partículas en vórtices bidimensionales periódicos girando en el mismo sentido (aplicación a los vórtices Rankine y Kaufmann).

- **st_vel_hormuchos**: Velocidad media de sedimentación de partículas situadas en un eje paralelo al “x” al moverse en dirección “y” a lo largo del tiempo sobre muchos vórtices horizontales con inercia.

F) Trayectorias de partículas en vórtices bidimensionales periódicos girando con sentidos de giro alternados (aplicación a los vórtices Rankine y Kaufmann).

- **altertrahormuchos_s_i**: Trayectorias de partículas al moverse en dirección “y” a lo largo del tiempo sobre muchos vórtices horizontales cuyos sentidos de giro alternan. Partículas sin inercia.
- **altertrahormuchos**: Trayectorias de partículas al moverse en dirección “y” a lo largo del tiempo sobre muchos vórtices horizontales cuyos sentidos de giro alternan. Partículas con inercia.

G) Velocidad media de sedimentación de partículas en vórtices bidimens. periódicos girando con sentidos de giro alternados (aplicación a los vórtices Rankine y Kaufmann).

- **alter_stvel:** Velocidad media de sedimentación de partículas situadas en un eje paralelo al “x” al moverse en dirección “y” a lo largo del tiempo sobre muchos vórtices horizontales que se repiten periódicamente según “x” e “y”, alternando sus sentidos de giro.

H) Campo de velocidades de un vórtice Rankine.

- **Función rank:** Campo de velocidades de un vórtice Rankine referido a sus propios ejes. Función utilizada habitualmente en programas relativos a vórtices inclinados.
- **Función rankine:** Campo de velocidades de un vórtice Rankine referido a sus propios ejes. Función utilizada habitualmente en programas relativos a vórtices horizontales.

I) Campo de velocidades de un vórtice Kaufmann.

- **Función kauf:** Campo de velocidades de un vórtice Kaufmann referido a sus propios ejes. Función utilizada habitualmente en programas relativos a vórtices inclinados.
- **Función kaufmann:** Campo de velocidades de un vórtice Kaufmann referido a sus propios ejes. Función utilizada habitualmente en programas relativos a vórtices horizontales.

J) Programas auxiliares utilizados en los programas principales.

- **funcs3.c:** Recopilación de funciones habituales utilizadas en los programas anteriores.
- **funcs3.h:** Formato de las funciones que aparecen en el programa “Funcs3.c”.

K) Programas de implementación computacional del método de integración de Runge-Kutta.

- **rgk_vect.c:** Integración por Método Runge-Kutta de 4º orden, paso variable (error de orden h^5).

Al final de este anexo se expone la simbología básica utilizada en los listados de los programas informáticos, relacionándola con la recogida en el apartado Siglas y Acrónimos. Ello se debe a la imposibilidad de transcribir mediante el compilador Borland C++ determinadas variables, como por ejemplo las representadas por letras griegas.

LISTADOS

```

/*+++++++ ligtravoin_s_i ++++++*/\
+   Trayectorias de partículas en un vórtice cuyo eje forma unos +
+   ángulos tita y chi con el sistema de referencia fijo. +
+   Para partículas sin inercia. Todo referido a ejes ligados al vórtice. +
\*+++++++*/

#include <stdio.h> /* para printf() y FILE */
#include <math.h>
#include "funcs3.h"
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#define pi 3.14159265358979323846

/* --- Declaración de funciones --- */

void ecs(double,double *,double *); /*-- Para RgK_noaut() --*/
int sigue(double *,double,int,double);
void rank (double, double,double,double,double *,double *,double *);
/*x,y,z,t,uvor,vvor,wvor */
void kauf (double, double,double,double,double *,double *,double *);
/*x,y,z,t,uvor,vvor,wvor */
void rkck_noaut(void (*)(double,double *,double *),const int,double,double
*,double *);
void RgK_noaut
(
void (*)(double,double *,double *), /* ecs(x,Y,DY) */
const int, /* N */
double *,double, /* x y xfin */
double **, /* Y */
double, /* hini */
const double, /* delta */
int (*)(double *,double,int,double) /* sigue() */
);

/* --- Variables globales ---*/

double Vt=0.5;
double ome=2.0;
double R=1;
double tita=pi/4;

```

```
double setita=sin(tita);
double cotita=cos(tita);
double err_t;
FILE *f_out;
```

```
/*=====Función main()=====*/
```

```
int main()
```

```
{
```

```
double *Y;
double hini=0.1;
double delta=1.0e-7;
double t,tfin;
char arch[33];
```

```
Y = (double *)vector(3,sizeof(double));
```

```
/* --- Inicialización para la integración --- */
```

```
/* posiciones iniciales */
```

```
Y[0]=2;
Y[1]=0;
Y[2]=3;
```

```
t = 0;
tfin = 250;
err_t = 0.0;
sprintf(arch,"pru.dat");
f_out = abrir_n(arch);
```

```
RGK_noaut(ecs,3,&t,tfin,&Y,hini,delta,sigue);
printf("\n\n Y[0]=%g, Y[1]=%g, Y[2]=%g ",Y[0],Y[1],Y[2]);
printf("\n\t Error estimado = %g",err_t);
free(Y);
fin();
return(1);
}
```

```
/*===== Función sigue(Y,t,inten,err_t_i) =====*/
```

```
int sigue(double *Y,double t,int inten,double err_t_i)
```

```
{
```



```
fprintf(f_out,"%-8f %-8f %-8f %-8f  \n",Y[0],Y[1],Y[2],t);  
err_t+=err_t_i;  
return( 1 );  
}
```

```
/*===== Función ecs() =====*/
```

```
void ecs( double t, double *Y,double *DY)
```

```
{  
  
    double uvor,vvor,wvor;  
  
    rank(Y[0],Y[1],Y[2],t,&uvor,&vvor,&wvor); /* Rankine */  
    /* kauf(Y[0],Y[1],Y[2],t,&uvor,&vvor,&wvor); */ /* Kaufmann */  
  
    DY[0]=uvor;  
    DY[1]=vvor-Vt*sin(tita);  
    DY[2]=-Vt*cos(tita);  
}
```

```

/*+++++++ ligtravoin ++++++*/
+   Trayectorias de partículas en un vórtice cuyo eje forma unos
+   ángulos tita y chi con el sistema de referencia fijo. Partículas con inercia.
+   Todo referido a ejes ligados al vórtice.
+
\*+++++++*/

```

```

#include <stdio.h> /* para printf() y FILE */
#include <math.h>
#include "funcs3.h"
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#define pi          3.14159265358979323846

/* --- Declaración de funciones --- */

void ecs(double,double *,double *); /*-- Para RgK_noaut() --*/
int sigue(double *,double,int,double);
void rank (double, double,double,double,double *,double *,double *);
/*x,y,z,t,tita,chi,uvor,vvor,wvor */
void kauf (double, double,double,double,double *,double *,double *);
/*x,y,z,t,tita,chi,uvor,vvor,wvor */
void rkck_noaut(void (*)(double,double *,double *),const int,double,double
*,double *);
void RGK_noaut
(
void (*)(double,double *,double *), /* ecs(x,Y,DY) */
const int, /* N */
double *,double, /* x y xfin */
double **, /* Y */
double, /* hini */
const double, /* delta */
int (*)(double *,double,int,double) /* sigue() */
);

/* --- Variables globales ---*/
double Vt=0.5;
double St=0.5;
double dp=0.000011;
double ome=2.0;
double R=1;
double grav=9.8;
double tita=pi/4;
double chi=0;
double tau;
double setita=sin(tita);

```

```
double cotita=cos(tita);
double sechi=sin(chi);
double cochi=cos(chi);
double err_t;
FILE *f_out;
```

```
/*=====Función main()=====*/
```

```
int main()
{
    double DIS;
    double RAIZ;
    double DEN;
    double XE1;
    double XE2;
    double d;
    double *Y;
    double hini=0.1;
    double delta=1.0e-7;
    double t,tfin;
    char arch[33];
    double uvor,vvor,wvor;

    Y = (double *)vector(6,sizeof(double));
    tau=3082716.049*dp*dp;
    /* Vt=tau*grav;
    St=tau*ome; */
    DIS=( 4*pow(Vt,2)*pow(setita,2) )/pow(R,2);
    RAIZ=sqrt( pow(ome,2)-DIS); /* Rankine */
    /* RAIZ=sqrt( (pow(ome,2))/4-DIS); */ /* Kaufmann*/
    DEN=(2*Vt*setita)/pow(R,2);
    XE1=(ome-RAIZ)/DEN; /* Rankine */
    XE2=(ome+RAIZ)/DEN; /* Rankine */
    /* XE1=((ome/2)-RAIZ)/DEN; /* Kaufmann*/
    XE2=((ome/2)+RAIZ)/DEN; */ /* Kaufmann */
    d=sqrt( pow( (XE2-XE1),2) );
    /*printf("\n XE1=%g XE2=%g d=%g", XE1,XE2,d); */
    /*printf("\n d=%g",d);
    printf("St=%g",St);
    printf("Vt=%g",Vt);
    printf("\n XE1=%g",XE1); */
    printf("\n XE2=%g",XE2);

    /* --- Inicialización para la integración --- */

    /* posiciones iniciales */
```

```

/* Y[0]=XE2+0.01;
Y[1]=0.001; */
Y[0]=3;
Y[1]=0;
Y[2]=3;

t = 0;
tfin = 200;
err_t = 0.0;
sprintf(arch,"pru.dat");
f_out = abrir_n(arch);

/* velocidades iniciales */

rank(Y[0],Y[1],Y[2],0,&uvor,&vvor,&wvor); /* Rankine */
/* kauf(Y[0],Y[1],Y[2],0,&uvor,&vvor,&wvor); */ /* Kaufmann*/
Y[3]=uvor;
Y[4]=vvor-(Vt*sin(tita));
Y[5]=-Vt*cos(tita);
RGK_noaut(ecs,6,&t,tfin,&Y,hini,delta,sigue);
/*printf("\n\n Y[0]=%g, Y[1]=%g, Y[2]=%g ",Y[0],Y[1],Y[2]); */
printf("\n\t Error estimado = %g",err_t);
free(Y);
fin();
return(1);
}

/*===== Función sigue(Y,t,inten,err_t_i) =====*/

int sigue(double *Y,double t,int inten,double err_t_i)

{

fprintf(f_out,"%-8f %-8f %-8f %-8f \n",Y[0],Y[1],Y[2],t);
err_t+=err_t_i;
return( 1 );
}

/*===== Función ecs() =====*/

void ecs( double t, double *Y,double *DY)

{
double uvor,vvor,wvor;

rank(Y[0],Y[1],Y[2],t,&uvor,&vvor,&wvor);

```

```
/* kauf(Y[0],Y[1],Y[2],t,&uvor,&vvor,&wvor); */  
  
DY[0]=Y[3];  
DY[1]=Y[4];  
DY[2]=Y[5];  
DY[3]=(1/St)*(uvor-Y[3]);  
DY[4]=(1/St)*(vvor-Y[4]-(Vt*setita));  
DY[5]=(1/St)*(-Y[5]-(Vt*cotita));  
  
}
```

```

/*+++++++ tescapeiner ++++++*\
+      Tiempo de escape en un vórtice cuyo eje forma unos ángulos      +
+      tita y chi con el sistema de referencia fijo. Partículas con inercia.  +
+      Todo referido a ejes ligados al vórtice.                          +
\*+++++++*/

```

```

#include <stdio.h> /* para printf() y FILE */
#include <math.h>
#include "funcs3.h"
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#define pi      3.14159265358979323846

```

```
/* --- Declaración de funciones --- */
```

```

void ecs(double,double *,double *);    /*-- Para RgK_noaut() --*/
int sigue(double *,double,int,double);
void rank (double, double,double,double,double *,double *,double *);
    /*x,y,z,t,tita,chi,uvor,vvor,wvor */
void kauf (double, double,double,double,double *,double *,double *);
    /*x,y,z,t,tita,chi,uvor,vvor,wvor */
void rkck_noaut(void (*)(double,double *,double *),const int,double,double
*,double *);
void RGK_noaut
(
    void (*)(double,double *,double *),    /* ecs(x,Y,DY) */
    const int,                            /* N */
    double *,double,                      /* x y xfin */
    double **,                            /* Y */
    double,                               /* hini */
    const double,                         /* delta */
    int (*)(double *,double,int,double)   /* sigue() */
);

```

```
/* --- Variables globales ---*/
```

```

double Vt=0.1;
double St=0.3;
double ome=2;
double R=1;
double tita=pi/4;
double chi=0;
double setita=sin(tita);
double cotita=cos(tita);
double sechi=sin(chi);

```

```

double cochi=cos(chi);

double err_t;
FILE *f_out;

/*=====Función main()=====*/

int main()
{
    double XE1;
    double DIS,RAIZ,DEN;
    double *Y;
    double hini=0.1;
    double delta=1.0e-7;
    double t,tfin;
    char arch[33];
    double uvor,vvor,wvor;

    Y = (double *)vector(6,sizeof(double));

    /* --- Inicialización para la integración --- */

    /* posiciones iniciales */

    DIS=( 4*pow(Vt,2)*pow(setita,2) )/pow(R,2);
    RAIZ=sqrt( pow(ome,2)-DIS); /* Rankine */
    /* RAIZ=sqrt( pow((ome/2),2)-DIS);*/ /* Kaufmann */
    DEN=(2*Vt*setita)/pow(R,2);
    XE1=(ome-RAIZ)/DEN; /*Rankine */
    XE2=(ome+RAIZ)/DEN; /*Rankine */
    /* XE1=((ome/2)-RAIZ)/DEN; /* Kaufmann */
    XE2=((ome/2)+RAIZ)/DEN;*/ /* Kaufmann */

    Y[0]=XE1+0.01;
    Y[1]=-0.01;
    Y[2]=3;

    t = 0;
    tfin = 7500;
    err_t = 0.0;
    sprintf(arch,"pru.dat");
    f_out = abrir_n(arch);

    /* velocidades iniciales */

    rank(Y[0],Y[1],Y[2],0,&uvor,&vvor,&wvor); /* Rankine */

```

```

/* kauf(Y[0],Y[1],Y[2],0,&uvor,&vvor,&wvor);*/ /* Kaufmann */
Y[3]=uvor;
Y[4]=vvor-(Vt*sin(tita));
Y[5]=-Vt*cos(tita);
RGK_noaut(ecs,6,&t,tfin,&Y,hini,delta,sigue);
/*printf("\n\n Y[0]=%g, Y[1]=%g, Y[2]=%g ",Y[0],Y[1],Y[2]);*/
printf("\n\t Error estimado = %g",err_t);
free(Y);
fin();
return(1);
}

/*===== Función sigue(Y,t,inten,err_t_i) =====*/

int sigue(double *Y,double t,int inten,double err_t_i)

{

double DIS=( 4*pow(Vt,2)*pow(setita,2) )/pow(R,2);
double RAIZ=sqrt( pow(ome,2)-DIS); /* Rankine */
/*double RAIZ=sqrt( pow((ome/2),2)-DIS);*/ /* Kaufmann */
double DEN=(2*Vt*setita)/pow(R,2);
double XE1=(ome-RAIZ)/DEN; /* Rankine */
double XE2=(ome+RAIZ)/DEN; /* Rankine */
/* double XE1=((ome/2)-RAIZ)/DEN; /* Kaufmann */
double XE2=((ome/2)+RAIZ)/DEN;*/ /* Kaufmann */
double d=sqrt( pow( (XE2-XE1),2) ); /* dist.entre ptos. eq. */
if( (sqrt( pow((Y[0]-XE1),2)+pow(Y[1],2)))>=(2.5*d) &&
    (sqrt( pow((Y[0]-XE1),2)+pow(Y[1],2)))<(3*d) ) {
printf(" %-8f %-8f \n", t,
sqrt( pow((Y[0]-XE1),2)+pow(Y[1],2) )-(2.5*d));
fprintf(f_out,"%-8f %-8f \n", t,
sqrt( pow((Y[0]-XE1),2)+pow(Y[1],2) )-(2.5*d) ); }
err_t+=err_t_i;
return( 1 );
}

/*===== Función ecs() =====*/

void ecs( double t, double *Y,double *DY)

{
double uvor,vvor,wvor;

rank(Y[0],Y[1],Y[2],t,&uvor,&vvor,&wvor); /* Rankine */
/* kauf(Y[0],Y[1],Y[2],t,&uvor,&vvor,&wvor); */ /* Kaufmann */

```



```
DY[0]=Y[3];
DY[1]=Y[4];
DY[2]=Y[5];
DY[3]=(1/St)*(uvor-Y[3]);
DY[4]=(1/St)*(vvor-Y[4]-(Vt*setita));
DY[5]=(1/St)*(-Y[5]-(Vt*cotita));
}
```

```

/*+++++ Kemediia +++++*/
+   Tiempo de escape en un vórtice cuyo eje forma unos ángulos tita y chi +
+   con el sistema de referencia fijo. Partículas con inercia.             +
+   Promediando para muchas partículas.                                   +
+   Todo referido a ejes ligados al vórtice.                             +
\+++++*/

```

```

#include <stdio.h> /* para printf() y FILE */
#include <math.h>
#include "funcs3.h"
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#define pi      3.14159265358979323846
#define M      22 /* partes en que divido los ejes */

double P[M+1][M+1];
double S[M+1][M+1];
double expo1[M+1][M+1];
double radicando[M+1][M+1];
double curva[M+1][M+1];

/* --- Declaración de funciones --- */

void ecs(double,double *,double *); /*-- Para RgK_noaut() --*/
int sigue(double *,double,int,double);
void rank (double, double,double,double,double *,double *,double *);
    /*x,y,z,t,tita,chi,uvor,vvor,wvor */
void kauf (double, double,double,double,double *,double *,double *);
    /*x,y,z,t,tita,chi,uvor,vvor,wvor */
void rkck_noaut(void (*)(double,double *,double *),const int,double,double
*,double *);
void RGK_noaut
(
    void (*)(double,double *,double *), /* ecs(x,Y,DY) */
    const int, /* N */
    double *,double, /* x y xfin */
    double **, /* Y */
    double, /* hini */
    const double, /* delta */
    int (*)(double *,double,int,double) /* sigue() */
);

/* --- Variables globales ---*/

double parcialTe;

```

```
double Te;
double told;
double cof;
double XE1;
double XE2;
double XA;
double DIS;
double RAIZ;
double DEN;
double d;
double Vt=0.012084246;
double St=0.024661728;
double ome=20;
double R=0.001;
double Lx;
double Ly;
double tita=pi/4;
double chi=0;
double setita;
double cotita;
double sechi;
double cochi;
double control; /* para saber si hay que poner más tiempo o no */
double err_t;
double *timescape;
FILE *f_out;
```

```
/*=====Función main()=====*/
```

```
int main()
```

```
{
    int i;
    int j;
    int numpart;
    double hini=0.1;
    double delta=1.0e-7;
    double t,tfin;
    char arch[33];
    double uvor,vvor,wvor;
    double *Y;
```

```
    Y=(double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));
    timescape=(double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));
```

```
/* --- Inicialización para la integración --- */
```

```
/* posiciones iniciales */
```

```
setita=sin(tita);
cotita=cos(tita);
sechi=sin(chi);
cochi=cos(chi);
numpart=pow(M+1,2);
DIS=( 4*pow(Vt,2)*pow(setita,2) )/pow(R,2);
RAIZ=sqrt( pow(ome,2)-DIS); /* Rankine */
/*RAIZ=sqrt( pow((ome/2),2)-DIS);*/ /* Kaufmann */
DEN=(2*Vt*setita)/pow(R,2);
XE1=(ome-RAIZ)/DEN; /* Rankine */
XE2=(ome+RAIZ)/DEN; /* Rankine */
/*XE1=((ome/2)-RAIZ)/DEN;
XE2=((ome/2)+RAIZ)/DEN;*/ /* Kaufmann*/
printf("XE1=%g",XE1);
printf("XE2=%g",XE2);
d=sqrt( pow( (XE2-XE1),2) );
XA=-13.173; /* depende de St y Vt; hay que calcularlo y ver si radicando >0 */
Lx=33.763-XA; /*idem*/
parcialTe=0;
```

```
/* malla de partículas */
```

```
for(i=0; i<=M; i++)
{
  for (j=0; j<=M; j++)
  {
    P[ i ] [ j ]=XA+(j*Lx/M);
    expol[ i ] [ j ]=(2*Vt*(P[ i ] [ j ]-XE2))/(ome*R*R); /* Rankine */
    /* expol[ i ] [ j ]=(4*Vt*(P[ i ] [ j ]-XE2))/(ome*R*R);*/ /* Kaufmann */

    /*printf("\n expol=%g",expol[ i ] [ j ]);*/
    cof=(XE2*XE2)+(R*R);
    radicando[ i ] [ j ]=(cof*exp(expol[ i ] [ j ]))-(P[ i ] [ j ]*P[ i ] [ j ])-(R*R);
    /*printf("\n radicando=%g",radicando[ i ] [ j ]);*/
    curva[ i ] [ j ]=sqrt(radicando[ i ] [ j ]);
    /*printf("\n P[ i ]=%g curva[ j ]=%g",P[ i ] [ j ],curva[ i ] [ j ]);*/
    /*printf("\n P=%g",P[ j ]);*/
    /*printf("\n curva=%g",curva[ i ] [ j ] ); */
  }
}
for(i=0 ;i<=M ;i++)
{
```

```

        for (j=0 ; j<=M ; j++)
        {
            S[ i ][ j ]=-curva[ i ][ j ] + ( 2*i*curva [ i ][ j ] / M);
        }
    }

    /* for (i=0 ; i <= M ; i++)
    {
        for (j=0 ; j<= M; j++)
        {
            printf("\n P=%g S=%g",P [ i ][ j ],S [ i ][ j ] );
        }
    } */

    for (j=0 ; j <6*pow(M+1,2) ; j+=6)
    {
        Y[ j ]=((double *)P+(j/6));
        Y[ j+1 ]=((double *)S+(j/6));
        Y[ j+2 ]=3;
        /*printf("\n j=%i Y[ j ]=%g Y[ j+1 ]=%g Y[ j+2 ]=%g",j,Y[ j ],Y[ j+1 ],Y[ j+2 ]
    );*/
    }
    /* Y[0]=XE1+0.01;
        Y[1]=-0.01;
        Y[2]=3; */

    t = 0;
    tfin = 100; /* cambiarlo también en "sigue" */
    err_t = 0.0;

    /* velocidades iniciales */

    for (j=0 ; j<6*pow(M+1,2) ; j+=6)
    {
        rank(Y[ j ],Y[ j+1 ],Y[ j+2 ],0,&uvor,&vvor,&wvor); /* Rankine */

        /*kauf(Y[ j ],Y[ j+1 ],Y[ j+2 ],0,&uvor,&vvor,&wvor);*/ /* kaufmann*/

        Y[ j+3 ]=uvor;
        Y[ j+4 ]=vvor-(Vt*sin(tita));
        Y[ j+5 ]=-Vt*cos(tita);
    }
    told=0;
    RGK_noaut(ecs,6*(M+1)*(M+1),&t,tfin,&Y,hini,delta,sigue);
    if (control==1)
    {

```

```

for (j=0 ; j<6*pow(M+1,2) ; j+=6)
{
    /*printf("\n partícula=%0i timescape[ j ]=%0g",j/6,timescape[ j ]);*/
    parcialTe+=timescape[ j ];
}
Te=parcialTe/pow(M+1,2);
printf("parcialTe=%0g N°part=%0i Te=%0g",parcialTe,numpart,Te);

sprintf(arch,"tescape02.dat");
f_out = abrir_n(arch);
fprintf(f_out,"%-8f %0i %-8f\n",parcialTe,numpart,Te);
}
else
{
    printf("hay que poner más tiempo de tfin=%0g",tfin);
    sprintf(arch,"tescape.dat");
    f_out = abrir_n(arch);
    fprintf(f_out,"hay que poner más tiempo de tfin=%0g",tfin);
}
printf("\n\t Error estimado = %0g",err_t);
fin();
free(Y);
free(timescape);
return(1);
}

/*===== Función sigue(Y,t,inten,err_t_i) =====*/

int sigue(double *Y,double t,int inten,double err_t_i)

{
    int j;
    double tfin=100;
    /* if (t>told)
    {
        printf("t=%9.2e\n",t);
        told+=2000;
    } */

    for (j=0 ; j<6*pow(M+1,2) ; j+=6)
    {
        /*printf("\n t=%0g j=%0i dist=%0g",t,j,sqrt(pow((Y[ j ]-XE1),2)+pow(Y[ j+1],2))));*/

        if ( (sqrt( pow((Y[ j ]-XE1),2)+pow(Y[ j+1],2))<(1.5*d) &&
            t==tfin)
        {

```

```

        control=-1;
    }

    if ( (sqrt( pow((Y[ j ]-XE1),2)+pow(Y[ j+1],2)))>=(1.5*d) &&
        (sqrt( pow((Y[ j ]-XE1),2)-pow(Y[ j+1],2)))<=(1.51*d) )
    {
        control=1;
        timescape[ j ]=t;
        /*printf("\n j=%i timescap[ j ]=%g",j,timescape[ j ]);*/
        /*parcialTe+=timescape[ j ];
        printf("parcialTe=%g",parcialTe); */
    }

}
err_t+=err_t_i;
return( 1 );
}

/*===== Función ecs() =====*/

void ecs( double t, double *Y,double *DY)

{

    int j;
    double uvor,vvor,wvor;

    for(j=0 ; j<6*pow(M+1,2) ; j+=6)
    {

        rank(Y[ j ],Y[ j+1],Y[ j+2],t,&uvor,&vvor,&wvor); /* Rankine */
        /* kauf(Y[ j ],Y[ j+1],Y[ j+2],t,&uvor,&vvor,&wvor);*/ /* Kaufmann */

        DY[ j ]=Y[ j+3];
        DY[ j+1]=Y[ j+4];
        DY[ j+2]=Y[ j+5];
        DY[ j+3]=(1/St)*(uvor-Y[ j+3]);
        DY[ j+4]=(1/St)*(vvor-Y[ j+4]-(Vt*setita));
        DY[ j+5]=(1/St)*(-Y[ j+5]-(Vt*cotita));
    }

}

```

```

/*+++++++ dtmedia ++++++*\
+   Tiempo de escape en un vórtice cuyo eje forma unos ángulos tita y chi +
+   con el sistema de referencia fijo. Partículas con inercia.             +
+   Promediando para muchas partículas.                                   +
+   (En función del diámetro de las partículas).                         +
+   Todo referido a ejes ligados al vórtice                             +
\*+++++++*/

```

```

#include <stdio.h> /* para printf() y FILE */
#include <math.h>
#include "funcs3.h"
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#define pi      3.14159265358979323846
#define M      14 /* partes en que divido los ejes */

```

```

double P[M+1][M+1];
double S[M+1][M+1];
double expo1[M+1][M+1];
double radicando[M+1][M+1];
double curva[M+1][M+1];

```

```
/* --- Declaración de funciones --- */
```

```

void ecs(double,double *,double *); /*-- Para RgK_noaut() --*/
int sigue(double *,double,int,double);
void rank (double, double,double,double,double *,double *,double *);
/*x,y,z,t,tita,chi,uvor,vvor,wvor */
void kauf (double, double,double,double,double *,double *,double *);
/*x,y,z,t,tita,chi,uvor,vvor,wvor */
void rkck_noaut(void (*)(double,double *,double *),const int,double,double
*,double *);
void RGK_noaut
(
void (*)(double,double *,double *), /* ecs(x,Y,DY) */
const int, /* N */
double *,double, /* x y xfin */
double **, /* Y */
double, /* hini */
const double, /* delta */
int (*)(double *,double,int,double) /* sigue() */
);

```

```
/* --- Variables globales ---*/
```

```
double parcialTe;
```



```
double Te;
double told;
double cof;
double XE1;
double XE2;
double XA;
double DIS;
double RAIZ;
double DEN;
double d;
double Vt;
double St;
double tau;
double diam;
double U;
double ome;
double R;
double grav=9.8;
double cama=0.00003;
double Rv=0.001;
double Lx;
double Ly;
double tita=pi/4;
double chi=0;
double setita;
double cotita;
double sechi;
double cochi;
double control; /* para saber si hay que poner más tiempo o no */
double err_t;
double *timescape;
FILE *f_out;
```

```
/*=====Función main()=====*
```

```
int main()

{
    int i;
    int j;
    int numpart;
    double hini=0.1;
    double delta=1.0e-7;
    double t,tfin;
    char arch[33];
    double uvor,vvor,wvor;
```

```

double *Y;
Y=(double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));
timescape=(double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));

/* --- Inicialización para la integración --- */

/* posiciones iniciales */

setita=sin(tita);
cotita=cos(tita);
sechi=sin(chi);
cochi=cos(chi);
numpart=pow(M+1,2);
U=cama/Rv;
ome=1;
R=1;
diam=0.000008;
tau=3082716.049*diam*diam;
St=tau*cama/(Rv*Rv);
Vt=tau*grav/U;
DIS=1.0*Vt*Vt*setita*setita/(R*R);
RAIZ=sqrt( (ome*ome)-DIS); /* Rankine */
/*RAIZ=sqrt( (ome*ome/4)-DIS);*/ /* Kaufmann */
DEN=1.0*Vt*setita/(R*R);
XE1=(ome-RAIZ)/DEN; /* Rankine */
XE2=(ome+RAIZ)/DEN; /* Rankine */
/* XE1=((ome/2)-RAIZ)/DEN;
XE2=((ome/2)+RAIZ)/DEN;*/ /* Kaufmann */

printf("\n St=%g",St);
printf("\n Vt=%g",Vt);
printf("\n XE1=%g",XE1);
printf("\n XE2=%g",XE2);
d=sqrt( pow( (XE2-XE1),2) );
printf("\n d=%g",d);
XA=-8.876; /* depende de St Y Vt; hay que calcularlo y ver si radicando >0*/
Lx=22.788-XA; /*idem*/
parcialTe=0;

/* malla de partículas */

for( i=0 ; i<=M ; i++)
{
    for ( j=0 ; j<=M ; j++)
    {
        P[ i ][ j ]=XA+(j*Lx/M);
    }
}

```

```

/*printf("\n x=%g",P[ i ][ j ]); */
expol[ i ][ j ]=(1*Vt*(P[ i ][ j ]-XE2))/(ome*R*R); /* Rankine */
/*expol[ i ][ j ]=(2*Vt*(P[ i ][ j ]-XE2))/(ome*R*R);*/ /*Kaufmann */
/*printf("\n expol=%g",expol[ i ][ j ]); */
cof=(XE2*XE2)+(R*R);
/*printf("\n cof=%g",cof); */
radicando[ i ][ j ]=(cof*exp(expol[ i ][ j ]))-(P[ i ][ j ]*P[ i ][ j ])-(R*R);
/*printf("\n radicando=%g",radicando[ i ][ j ]); */
curva[ i ][ j ]=sqrt(radicando[ i ][ j ]);
/*printf("\n P[ i ]=%g curva[ j ]=%g",P[ i ][ j ],curva[ i ][ j ]); */
/*printf("\n P=%g",P[ j ]); */
/*printf("\n curva=%g",curva[ i ][ j ]); */
}
}

for( i=0 ; i<=M ; i++)
{
for ( j=0 ; j<=M ; j++)
{
S[ i ][ j ]=-curva[ i ][ j ]+( 2*i*curva[ i ][ j ]/M);
}
}

/* for ( i=0 ; i<=M ; i++)
{
for ( j=0 ; j<=M ; j++)
{
printf("\n P=%g S=%g",P[ i ][ j ],S[ i ][ j ]);
}
} */

for ( j=0 ; j<6*pow(M+1,2) ; j+=6)
{
Y[ j ]=((double *)P+(j/6));
Y[ j+1 ]=((double *)S+(j/6));
Y[ j+2 ]=3;
/*printf("\n j=%i Y[ j ]=%g Y[ j+1 ]=%g "j/6,Y[ j ],Y[ j+1 ]);*/
}
/* Y[0]=XE1+0.01;
Y[1]=-0.01;
Y[2]=3; */

t = 0;
tfin = 1.0e6; /* cambiarlo también en "sigue" */
err_t = 0.0;

```

```

/* velocidades iniciales */

for (j=0 ; j<6*pow(M+1,2) ; j+=6)
{
    rank(Y[j],Y[j+1],Y[j+2],0,&uvor,&vvor,&wvor); /* Rankine */
    /*kauf(Y[j],Y[j+1],Y[j+2],0,&uvor,&vvor,&wvor);*/ /* Kaufmann */
    Y[j+3]=uvor;
    Y[j+4]=vvor-(Vt*sin(tita));
    Y[j+5]=-Vt*cos(tita);
}
told=0;
RGK_noaut(ecs,6*(M+1)*(M+1),&t,tfin,&Y,hini,delta,sigue);
/*printf("control=%i",control);*/
if (control==1)
{
    for (j=0 ; j<6*pow(M+1,2) ; j+=6)
    {
        /*printf("\n part.=%i timescap [j ]=%g x=%g y=%g" j/6,Y[j],Y[j+1],timescape[
j]);*/
        parcialTe+=timescape[j];
    }
    Te=parcialTe/pow(M+1,2);
    printf("\n parcialTe=%g N°part=%i Te=%g",parcialTe,numpart,Te);
    sprintf(arch,"tescape03.dat");
    f_out = abrir_n(arch);
    fprintf(f_out,"%-8f %i %-8f\n",parcialTe,numpart,Te);
}
if (control==-1)
{
    printf("hay que poner más tiempo de tfin=%g",tfin);
    sprintf(arch,"tescape03.dat");
    f_out = abrir_n(arch);
    fprintf(f_out,"hay que poner más tiempo de tfin=%g",tfin);
}
printf("\n\t Error estimado = %g",err_t);
fin();
free(Y);
free(timescape);
return(1);
}

/*===== Función sigue(Y,t,inten,err_t_i) =====*/

int sigue(double *Y,double t,int inten,double err_t_i)

{

```

```

int j;
double tfin=1.0e6;
/*if (t>told)
{
printf("t=%9.2e\n",t);
told+=1.0e6;
} */

for ( j=0 ; j<6*pow(M+1,2) ; j+=6)
{
/*printf("\n  t=%g   j=%i   dist=%g",t,j/6,sqrt(pow((Y[ j ]-XE1),2)+pow(Y[
j+1],2)))));*/

if ( (sqrt( pow((Y[ j ]-XE1),2)+pow(Y[ j+1],2)))<(1.5*d) &&
t==tfin)
{
control=-1;
/*return(1);*/
}

if ( (sqrt( pow((Y[ j ]-XE1),2)+pow(Y[ j+1],2)))>=(1.5*d) &&
(sqrt( pow((Y[ j ]-XE1),2)+pow(Y[ j+1],2)))<(1.55*d) )
{
control=1;
timescape[ j ]=t;
/*printf("\n j=%i timescap[ j ]=%g",j/6,timescape[ j ]);*/
/*parcialTe+=timescape[ j ];
printf("parcialTe=%g",parcialTe); */
}

}
err_t+=err_t_i;
return( 1 );
}

/*===== Función ecs() =====*/

void ecs( double t, double *Y,double *DY)
{
int j;
double uvor,vvor,wvor;

for( j=0 ; j<6*pow(M+1,2) ; j+=6)
{

```

```
rank(Y[j],Y[j+1],Y[j+2],t,&uvor,&vvor,&wvor); /* Rankine */  
/*kauf(Y[j],Y[j+1],Y[j+2],t,&uvor,&vvor,&wvor);*/ /* Kaufmann */
```

```
DY[j]=Y[j+3];  
DY[j+1]=Y[j+4];  
DY[j+2]=Y[j+5];  
DY[j+3]=(1/St)*(uvor-Y[j+3]);  
DY[j+4]=(1/St)*(vvor-Y[j+4]-(Vt*setita));  
DY[j+5]=(1/St)*(-Y[j+5]-(Vt*cotita));  
}
```

```
}
```

```

/*+++++++ Inclivel ++++++*/
+ Velocidad media de sedimentación de un determinado número de partículas +
+ situadas en la región de captura de un vórtice tridimens. inclinado +
+ Todo referido a ejes fijos. +
/*+++++++*/

```

```

#include <stdio.h> /* para printf() y FILE */
#include <math.h> /* para exp() */
#include "funcs3.h"
/* #include "RGK_NOAUT.h" */
#include <time.h> /* para randomize*/
#include <stdlib.h> /* para randomize*/
#define pi 3.14159265358979323846
#define M 14 /* (M+1)*(M+1) partículas */

```

```

double P[M+1][M+1];
double S[M+1][M+1];
double expo1[M+1][M+1];
double radicando[M+1][M+1];
double curva[M+1][M+1];

```

```

/* --- Declaración de funciones --- */
void ecs(double,double *,double *); /*-- Para RgK_noaut() --*/
int sigue(double *,double,int,double,double *);
void rankine(double,double,double *,double *);
void kaufmann(double,double,double *,double *);
void rkck_noaut(void (*)(double,double *,double *),const int,double,double
*,double *);
void RGK_noaut
(
void (*)(double,double *,double *), /* ecs(x,Y,DY) */
const int, /* N */
double *,double, /* x y xfin */
double **, /* Y */
double **, /* Q */
double, /* hini */
const double, /* delta */
int (*)(double *,double,int,double,double *) /* sigue() */
);

/* --- Variables globales ---*/
double err_t;

```

```
FILE *f_out;
double ome;
double R;
double Vt;
double St;
double told;
double cof;
double XE1;
double XE2;
double XA;
double DIS;
double RAIZ;
double DEN;
double tau;
double diam;
double U;
double grav=9.8;
double cama=0.00001;
double Rv=0.001;
double Lx;
double tita=pi/4;
double chi=0;
double setita;
double cotita;
double sechi;
double cochi;
```

```
/*=====Función main()=====*/
```

```
int main()
{
    int i;
    int j;
    double uvor,vvor;

    double *uvor0;
    double *vvor0;

    double *voru0;
    double *vorv0;
    double *vorw0;

    double *Y;
```



```

double *Q;
double *T;

double hini=0.1;
double delta=1.0e-6;
double t,tfin;
char arch[33];

uvor0 = (double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));
vvor0 = (double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));

voru0 = (double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));
vorv0 = (double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));
vorw0 = (double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));

Y = (double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));
Q = (double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));
T = (double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));

/* Y coordenadas y velocidades de particulas sist. ref. fijo */
/* Q coordenadas iniciales partículas sist. ref. fijo */
/* T coordenadas partículas sist. ref. ligado al vórtice */

/* --- Inicialización para la integración --- */
setita=sin(tita);
cotita=cos(tita);
sechi=sin(chi);
cochi=cos(chi);

U=cama/Rv;
ome=1;
R=1;
diam=0.000008;
tau=3082716.049*diam*diam;
Vt=tau*grav/U;;
St=tau*cama/(Rv*Rv);
DIS=1.0*Vt*Vt*setita*setita/(R*R);
/*RAIZ=sqrt( (ome*ome)-DIS); *//*Rankine*/
RAIZ=sqrt( (ome*ome/4)-DIS); /*Kaufmaa*/
DEN=1.0*Vt*setita/(R*R);
/*XE1=(ome-RAIZ)/DEN;*/ /*Rankine*/
/*XE2=(ome+RAIZ)/DEN; */ /*Rankine*/
XE1=((ome/2)-RAIZ)/DEN; /*Kaufmann*/
XE2=((ome/2)+RAIZ)/DEN; /*Kaufmann*/
printf("\n St=%g",St);

```

```

printf("\n Vt=%g",Vt);
printf("\n XE1=%g",XE1);
printf("\n XE2=%g",XE2);
XA=-1.076; /* depende de Vt; hay que calcularlo para que radicando>0*/
Lx=3.221-XA; /*idem*/

/*----- malla de partículas-----*/

for(i=0;i<=M;i++) { /* N° partes en que divido */

    for(j=0;j<=M;j++) {
        P[i][j]=XA+(j*Lx/M);
        /*expo1[i][j]=(1*Vt*(P[i][j]-XE2))/(ome*R*R); *//*Rankine*/
        expo1[i][j]=(2*Vt*(P[i][j]-XE2))/(ome*R*R); /*Kaufmann*/
        cof=(XE2*XE2)+(R*R);
        radicando[i][j]=(cof*exp(expo1[i][j]))-(P[i][j]*P[i][j])-(R*R);
        curva[i][j]=sqrt(radicando[i][j]);

    }
}
for(i=0;i<=M;i++) {
    for(j=0;j<=M;j++) {
        S[i][j]=-curva[i][j]+(2*i*curva[i][j]/M);
    }
}

/* for (i=0;i<=M;i++) {
    for(j=0;j<=M;j++) {
        printf("\n P[i][j]=%g S[i][j]=%g ", P[i][j], S[i][j]); } }*/

for(j=0;j<6*pow(M+1,2);j+=6) {
    T[j]=*((double*)P+(j/6));
    T[j+1]=*((double*)S+(j/6));
    T[j+2]=620; } /* coord. ligadas al vórtice */

/*-----transf. coord. obtener coord. respecto ejes fijos-----*/

for(j=0;j<6*pow(M+1,2);j+=6) {
    Y[j] = (cochi*T[j]) -( sechi*( (cotita*T[j+1]) - (setita*T[j+2]) ) );
    Y[j+1]=(sechi*T[j]) +( cochi*( (cotita*T[j+1]) - (setita*T[j+2]) ) );
    Y[j+2]=(setita*T[j+1]) + (cotita*T[j+2]);
}

for(j=0;j<6*pow(M+1,2);j+=6) { /* aquí guardo las posiciones iniciales */
    Q[j]=Y[j];
    Q[j+1]=Y[j+1];
    Q[j+2]=Y[j+2]; }

```

```

/*----- velocidades iniciales -----*/

for(j=0;j<6*pow(M+1,2);j+=6) {
/*rankine(T[j],T[j+1],&uvor,&vvor); */
kaufmann(T[j],T[j+1],&uvor,&vvor);
uvor0[j]=uvor;
vvor0[j]=vvor;
}

/* ahora obtengo las velocidades en el sist. ref. fijo*/

for(j=0;j<6*pow(M+1,2);j+=6) {

voru0[j]=(uvor0[j]*cochi)-(vvor0[j]*cotita*sechi);
vorv0[j]=(uvor0[j]*sechi)+(vvor0[j]*cotita*cochi);
vorw0[j]=vvor0[j]*setita;

}

for(j=0;j<6*pow(M+1,2);j+=6) {
Y[j+3]=voru0[j];
Y[j+4]=vorv0[j];
Y[j+5]=vorw0[j]-Vt;
/*printf("\n Vx=%g Vy=%g Vz=%g",Y[j+3],Y[j+4],Y[j+5]);*/}

/*----- integración -----*/

t = 0.0;
tfin = 51840; /* cambiarlo también en sigue */
err_t = 0.0;
sprintf(arch,"tresde.dat");
f_out = abrir_n(arch);
RGK_noaut(ecs,6*pow(M+1,2),&t,tfin,&Y,&Q,hini,delta,sigue);
printf("\n\t Error estimado = %g",err_t);
printf("fin de la integración");

free(Y);
free(Q);
free(T);

free(uvor0);
free(vvor0);

```

```

free(voru0);
free(vorv0);
free(vorw0);

fin();
return(1);
}

/*=====Función sigue(Y,t,inten,err_t_i,Q)=====*/

int sigue(double *Y,double t,int inten,double err_t_i,double *Q)
{
    int j;
    double sum;
    double Vy;
    double *A;
    A=(double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof (double));
    if(t>told) {
        printf("\n t=%-8f",t);
        told+=150.0; }
    sum=0;
    for(j=0;j<6*pow(M+1,2);j+=6) {
        A[j]=(Q[j+2]-Y[j+2]);
        sum+=A[j]; }
    Vy=sum/(pow(M+1,2));
    if (t>=51840) {
        printf("\n %-8f %-8f",t,Vy/t);
        fprintf(f_out,"%-8f %-8f \n",t,Vy);
        /*fprintf(f_out,"%-8f %-8f \n",t,Vy);*/ }
    err_t+=err_t_i;
    free(A);
    return( 1 );
}

/*=====Función ecs()=====*/
void ecs( double t, double *Y,double *DY)
{
    int j;
    double uvor,vvor;

    double *uvor0;
    double *vvor0;

    double *voru0;

```

```
double *vorv0;
double *vorw0;
```

```
double *T;
```

```
T = (double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));
```

```
uvor0 = (double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));
vvor0 = (double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));
```

```
voru0= (double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));
vorv0= (double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));
vorw0= (double *)vector(6*pow(M+1,2),sizeof(double));
```

```
for(j=0;j<6*pow(M+1,2);j+=6) /*coord. referidas al vórtice*/
{
```

```
T[j]=(Y[j]*cochi) + (Y[j+1]*sechi);
T[j+1]=(cotita)*(-Y[j]*sechi)+(Y[j+1]*cochi) +(Y[j+2]*setita);
/*T[j+2]=(-setita)*((-Y[j]*sechi)+(Y[j+1]*cochi))+(Y[j+2]*cotita);*/

}
```

```
/*-----velocidades iniciales-----*/
```

```
for(j=0;j<6*pow(M+1,2);j+=6)
{
```

```
/* rankine(T[j],T[j+1],&uvor,&vvor); */
kaufmann(T[j],T[j+1],&uvor,&vvor);
uvor0[j]=uvor;
vvor0[j]=vvor;

}
```

```
/* ahora obtengo las velocidades en el sist. ref. fijo*/
```

```
for(j=0;j<6*pow(M+1,2);j+=6) {
```

```
voru0[j]=(uvor0[j]*cochi)-(vvor0[j]*cotita*sechi);
vorv0[j]=(uvor0[j]*sechi)+(vvor0[j]*cotita*cochi);
vorw0[j]=vvor0[j]*setita;
```

```
    }  
  
    for(j=0;j<6*pow(M+1,2);j+=6) {  
  
        DY[j]=Y[j+3];  
        DY[j+1]=Y[j+4];  
        DY[j+2]=Y[j+5];  
        DY[j+3]=(voru0[j]-Y[j+3])/St;  
        DY[j+4]=(vorv0[j]-Y[j+4])/St;  
        DY[j+5]=(vorw0[j]-Y[j+5]-Vt)/St;    }  
  
    free(T);  
  
    free(uvor0);  
    free(vvor0);  
  
    free(voru0);  
    free(vorv0);  
    free(vorw0);  
  
    }
```

```

/*+++++++ trahormuchos_s_i ++++++*/
+   Trayectorias de partículas al moverse dirección en “y” a lo largo +
+   del tiempo sobre muchos vórtices horizontales sin inercia. +
\*+++++++*/

#include <stdio.h> /* para printf() y FILE */
#include <math.h>
#include "funcs3.h"
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#define pi      3.14159265358979323846

/* --- Declaración de funciones --- */

void ecs(double,double *,double *);    /*-- Para RgK_noaut() --*/
int sigue(double *,double,int,double,double *);
void rankine(double ,double,double *,double *);
void kaufmann(double ,double,double *,double *);
void rkck_noaut(void(*) (double,double *,double *),const int,double,double
*,double *);
void RGK_noaut
(
    void (*) (double,double *,double *),    /* ecs(x,Y,DY) */
    const int,                               /* N */
    double *,double,                         /* x y xfin */
    double **,                               /* Y */
    double **,                               /* Q */
    double,                                  /* hini */
    const double,                           /* delta */
    int (*) (double *,double,int,double,double *) /* sigue() */
);

/* --- Variables globales ---*/

double err_t;
FILE *f_out;
double ome;
double R;
double Vt;
double told;

```

```

/*=====Función main()=====*/

int main()
{
    double *Y;
    double *Q;
    double voru,vorv;
    double x,y;
    double l;
    double Lx;
    double Ly;
    double hini=0.1;
    double delta=1.0e-6;
    double t,tfin;
    char arch[33];

    Y = (double *)vector(2,sizeof(double));
    Q = (double *)vector(2,sizeof(double));

    /* --- Inicialización para la integración --- */

    ome=2;
    R=1;
    /* Vt=(ome*R)/4; */
    Vt=0.5;
    Lx=10;
    Ly=10;

    /*----- posiciones iniciales -----*/

    Y[0]=15;
    Y[1]=470;

    t = 0.0;
    tfin = 5000;
    err_t = 0.0;
    sprintf(arch,"pru.dat");
    f_out = abrir_n(arch);
    RGK_noaut(ecs,2,&t,tfin,&Y,&Q,hini,delta,sigue);
    printf("\n\t Error estimado = %g",err_t);
    printf("fin de la integración");
    free(Y);
    free(Q);
    fin();
    return(1);
}

```

```
/*===== Función sigue(Y,t,inten,err_t_i,Q) =====*/
```

```
int sigue(double *Y,double t,int inten,double err_t_i,double *Q)
```

```
{
    if (t>told) {
        printf("\n t=%-8f",t);
        told+=50; }
    /*printf("\n t=%g,x=%-8f,y=%-8f",t,Y[0],Y[1]);*/
    /*printf("\n t=%g,Vy=%-8f",t,Y[3]); */
    if (t>=0) {
        fprintf(f_out,"%-8f %-8f %-8f\n",t,Y[0],Y[1]); }
    /*fprintf(f_out,"%-8f %-8f\n",t,Y[3]); */
    err_t+=err_t_i;
    return( 1 );
}
```

```
/*===== Función ecs() =====*/
```

```
void ecs( double t, double *Y,double *DY)
```

```
{
    double voru,vorv;
    double x,y;
    /*double Vt=(ome*R)/4; */
    double Vt=0.5;
    double Lx=10;
    double Ly=10;

    x=Y[0];
    if (x<=0) {
        x-=(Lx/1)*( (int) ( (x-(Lx/2))/Lx ) ); }
    else { x-=(Lx/1)*( (int) ( (x+(Lx/2))/Lx ) ); }
    y=Y[1];
    if (y<=0) {
        y-=(Ly/1)*( (int) ( (y-(Ly/2))/Ly ) ); }
    else { y-=(Ly/1)*( (int) ( (y+(Ly/2))/Ly ) ); }
    rankine(x,y,&voru,&vorv); /* Rankine */
    /*kaufmann(x,y,&voru,&vorv);*/ /* Kaufmann */

    DY[0]=voru;
    DY[1]=vorv-Vt;
}
```

```

/*+++++trahormuchos+++++*/
+      T trayectorias de partículas al moverse en dirección "y" a lo largo      +
+      del tiempo sobre muchos vórtices horizontales. Partículas con inercia.  +
/*+++++*/

```

```

#include <stdio.h> /* para printf() y FILE */
#include <math.h> /* para exp() */
#include "funcs3.h"
#include <time.h> /* para randomize*/
#include <stdlib.h> /* para randomize*/
#define pi      3.14159265358979323846

/* --- Declaración de funciones --- */

void ecs(double,double *,double *); /*-- Para RgK_noaut() --*/
int sigue(double *,double,int,double,double *); /* Q */
void rankine(double ,double,double *,double *);
void kaufmann(double ,double,double *,double *);
void rkck_noaut(void (*)(double,double *,double *),const int,double,double
*,double *);
void RGK_noaut
(
void (*)(double,double *,double *), /* ecs(x,Y,DY) */
const int, /* N */
double *,double, /* x y xfin */
double **, /* Y */
double **, /* Q */
double, /* hini */
const double, /* delta */
int (*)(double *,double,int,double,double *) /* sigue() */
);

/* --- Variables globales ---*/

double err_t;
FILE *f_out;
double ome;
double R;
double Vt;
double told;

```

```
/*=====Función main()=====*/

int main()
{
    double *Y;
    double *Q;
    double voru,vorv;
    double x,y;
    double Lx;
    double Ly;
    double hini=0.1;
    double delta=1.0e-6;
    double t,tfin;
    char arch[33];

    Y = (double *)vector(4,sizeof(double));
    Q = (double *)vector(4,sizeof(double));

    /* ----- Inicialización para la integración ----- */

    ome=2;
    R=1;
    /* Vt=(ome*R)/4; */
    Vt=0.5;
    Lx=10;
    Ly=10;

    /*----- posiciones iniciales -----*/

    Y[0]=11.5;
    Y[1]=0;

    /*----- velocidades iniciales -----*/

    x=Y[0];
    if (x<=0) {
        x-=(Lx/1)* (int) ( (x-(Lx/2))/Lx ); }
    else { x-=(Lx/1)* (int) ( (x+(Lx/2))/Lx ); }
    y=Y[1];
    if (y<=0) {
        y-=(Ly/1)* (int) ( (y-(Ly/2))/Ly ); }
    else { y-=(Ly/1)* (int) ( (y+(Ly/2))/Ly ); }

    /* rankine(x,y,&voru,&vorv); */
    kaufmann(x,y,&voru,&vorv);
```

```

    Y[2]=voru;
    Y[3]=vorv-Vt;*/
/*  Y[2]=0;
    Y[3]=-Vt; */

    t = 0.0;
    tfin = 4; /* (2*Y[j+1])/Vt */
    err_t = 0.0;
    sprintf(arch,"pru.dat");
    f_out = abrir_n(arch);
    RGK_noaut(ecs,4,&t,tfin,&Y,&Q,hini,delta,sigue);
    printf("\n\t Error estimado = %g",err_t);
    printf("fin de la integración");
/* for(j=0;j<=21;j++)
    printf("\n j=%d,Y[j]=%g,Z[j]=%g",j,Y[j],Z[j]); */
    free(Y);
    free(Q);
    fin();
    return(1);
}

/*=====Función sigue(Y,t,inten,err_t_i,Q)=====*/

int sigue(double *Y,double t,int inten,double err_t_i,double *Q)

{
    if (t>told) {
        printf("\n t=%-8f",t);
        told+=10000; }
    printf("\n t=%g,x=%-8f,y=%-8f",t,Y[0],Y[1]);
    /*printf("\n t=%g,Vy=%-8f",t,Y[3]); */
    if (t>=0) {
        fprintf(f_out,"%-8f %-8f %-8f\n",t,Y[0],Y[1]); }
    /*fprintf(f_out,"%-8f %-8f\n",t,Y[3]); */
    err_t+=err_t_i;
    return( 1 );
}

/*=====Función ecs() =====*/

void ecs( double t, double *Y,double *DY)
{
    double voru,vorv;
    double x,y;
    /*double Vt=(ome*R)/4; */
    double Vt=0.5;

```

```
double St=20;
double Lx=10;
double Ly=10;
```

```
x=Y[0];
if (x<=0) {
  x=(Lx/1)* (int) ( (x-(Lx/2))/Lx ); }
else { x=(Lx/1)* (int) ( (x+(Lx/2))/Lx ); }
y=Y[1];
if (y<=0) {
  y=(Ly/1)* (int) ( (y-(Ly/2))/Ly ); }
else { y=(Ly/1)* (int) ( (y+(Ly/2))/Ly ); }
/*rankine(x,y,&voru,&vorv):*/
kaufmann(x,y,&voru,&vorv);
```

```
DY[0]=Y[2];
DY[1]=Y[3];
DY[2]=(1/St)*(voru-Y[2]);
DY[3]=(1/St)*(vorv-Y[3]-Vt);
```

```
}
```

```

/*+++++ st_vel_hormuchos +++++*\
+   Velocidad media de sedimentación de partículas situadas en un eje +
+   paralelo al "x" al moverse en dirección "y" a lo largo del tiempo sobre +
+   muchos vórtices horizontales con inercia. +
\*+++++*/

```

```

#include <stdio.h> /* para printf() y FILE */
#include <math.h>
#include "funcs3.h"
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#define pi      3.14159265358979323846
#define M      22 /* N° partes dividido eje x */

```

```
double P[M+1];
```

```
/* --- Declaración de funciones --- */
```

```

void ecs(double,double *,double *); /*-- Para RgK_noaut() --*/
int sigue(double *,double,int,double,double *);
void rankine(double ,double,double *,double *);
void kaufmann(double ,double,double *,double *);
void rkck_noaut(void(*) (double,double *,double *),const int,double,double
*,double *);
void RGK_noaut
(
    void (*) (double,double *,double *), /* ecs(x,Y,DY) */
    const int, /* N */
    double *,double, /* x y xfin */
    double **, /* Y */
    double **, /* Q */
    double, /* hini */
    const double, /* delta */
    int (*) (double *,double,int,double,double *) /* sigue() */
);

```

```
/* --- Variables globales ---*/
```

```

double err_t;
FILE *f_out;
double ome;
double R;
double Vt;
double told;

```

```

/*=====Función main()=====*/

int main()
{
    double voru,vorv;
    double x,y;
    double L;
    double Lv;
    double *Y;
    double *Q;
    double hini=0.1;
    double delta=1.0e-6;
    double t,tfin;
    char arch[33];
    int i;
    int j;

    Y = (double *)vector(4*(M+1),sizeof(double));
    Q = (double *)vector(4*(M+1),sizeof(double));

    /* --- Inicialización para la integración --- */

    ome=2;
    R=1;
    /* Vt=(ome*R)/4; */
    Vt=0.5;
    L=300;
    Lv=100;

    /*----- malla de partículas-----*/

    for(j=0 ; j<=M ; j++) {
        P[ j ]=(j*L/M)-(L/2); }

    for( j=0 ; j<=4*M ; j+=4) {
        Y[ j ]=((double *)P+(j/4));
        Y[ j+1 ]=625; }

    for( j=0 ; j<=4*M ; j+=4){
        Q[ j ]=Y[ j ];
        Q[ j+1 ]=Y[ j+1 ]; }

    /*----- velocidades iniciales -----*/

    t = 0.0;
    tfin = 2621440.e3;

```

```

err_t = 0.0;
sprintf(arch,"muchor02.dat");
f_out = abrir_n(arch);
for( j=0 ; j<=4*M ; j+=4) {
    x=Y [ j ];
    if(x<=0) {
        x=(Lv/1)*((int) ( (x-(Lv/2))/Lv ) ); }
    else {
        x=(Lv/1)*((int) ( (x+(Lv/2))/Lv ) ); }
    y=Y[ j+ 1];
    if(y<=0) {
        y=(Lv/1)*((int) ( (y-(Lv/2))/Lv ) ); }
    else {
        y=(Lv/1)*((int) ( (y+(Lv/2))/Lv ) ); }
    /* rankine(Y[ j ],Y[ j+1 ],&voru,&vorv);*/
    /* kaufmann(Y[ j ],Y[ j+1 ],&voru,&vorv);*/
    rankine(x,y,&voru,&vorv); /* Rankine */
    /*kaufmann(x,y,&voru,&vorv);*/ /* Kaufmann */
    Y[ j+2 ]=voru;
    Y[ j+3 ]=vorv-Vt;
    /* Y[j+2]=0;
    Y[j+3]=-Vt; */ }
RGK_noaut(ecs,4*(M+1),&t,tfin,&Y,&Q,hini,delta,sigue);
printf("\n\t Error estimado = %g",err_t);
printf("fin de la integración");
/* for( j=0 ; j<=21; j++)
    printf("\n j=%d,Y[ j ]=%g,Z[ j ]=%g",j,Y[ j ],Z[ j ]); */
free(Y);
free(Q);
fin();
return(1);
}

/*===== Función sigue(Y,t,inten,err_t_i,Q) =====*/

int sigue(double *Y,double t,int inten,double err_t_i,double *Q)

{

    int j;
    double sum;
    double Vy;
    double tp;
    double *A;
    A=(double *)vector(4*(M+1),sizeof (double));

```



```

sum=0;
/* if(t>told)
{
    printf(" t = %9.2e\n",t);
    told += 1.0e6 ;
} */

for(j=0 ; j<=4*M ; j+=4) {
    A[ j ]=(Q[ j+1 ]-Y[ j+1 ]);
    sum+=A[ j ]; }
Vy=sum/(M+1);
/*printf("\n t=%g",t);*/

/*if (t==327680000) {
    printf("\n t=%-8f Vy=%-8f",t,Vy/t);} */

/*fprintf(f_out,"%-8f %-8f \n",tp,Vy/20000);*/
/*if(t<4000) {
    fprintf(f_out,"%-8f %-8f\n",t,Vy); } */
if (t>=2621440.0e3) {
    fprintf(f_out,"%-8f %-8f\n",t,Vy/t); }

err_t+=err_t_i;
free(A);
return( 1 );
}

/*===== Función ecs() =====*/

void ecs( double t, double *Y,double *DY)
{
    double x,y;
    double voru,vorv;
    int j;
    /*double Vt=(ome*R)/4; */
    double Vt=0.5;
    double St=6200000.0;
    double Lv=100;

    for (j=0 ; j<=4*M ; j+=4)
    {
        x=Y[ j ];
        if(x<=0) {
            x-=(Lv/1)*((int) ( (x-(Lv/2))/Lv ) ); }
        else {
            x-=(Lv/1)*((int) ( (x+(Lv/2))/Lv ) ); }
    }

```

```

y=Y[ j+1 ];
if(y<=0) {
y=(Lv/1)* (int) ( (y-(Lv/2))/Lv ) ); }
else {
y=(Lv/1)* (int) ( (y+(Lv/2))/Lv ) ); }
rankine(x,y,&voru,&vorv); /* Rankine */
/*kaufmann(x,y,&voru,&vorv);*/ /* Kaufmann */
/* rankine(Y[ j ],Y[ j+1 ],&voru,&vorv);*/ /* Rankine */
/* kaufmann(Y[ j ],Y[ j+1 ],&voru,&vorv);*/ /* Kaufmann */

DY[ j ]=Y[ j+2 ];
DY[ j+1 ]=Y[ j+3 ];
DY[ j+2 ]=(1/St)*(voru-Y[ j+2 ]);
DY[ j+3 ]=(1/St)*(vorv-Y[ j+3 ]-Vt);
}
}

```

```

/*+++++++ altertrahormuchos_s_i ++++++*/
+ Trayectorias de partículas al moverse en dirección "y" a lo largo del
+ tiempo sobre muchos vórtices horizontales cuyos sentidos de giro
+ alternan. Partículas sin inercia.
\*+++++++*/

#include <stdio.h> /* para printf() y FILE */
#include <math.h>
#include "funcs3.h"
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#define pi 3.14159265358979323846

/* --- Declaración de funciones --- */

void ecs(double,double *,double *); /*-- Para RgK_noaut() --*/
int sigue(double *,double,int,double,double *);
void rankine(double ,double,double *,double *);
void kaufmann(double ,double,double *,double *);
void rkck_noaut(void (*)(double,double *,double *),const int,double,double
*,double *);
void RgK_noaut
(
void (*)(double,double *,double *), /* ecs(x,Y,DY) */
const int, /* N */
double *,double, /* x y xfin */
double **, /* Y */
double **, /* Q */
double, /* hini */
const double, /* delta */
int (*)(double *,double,int,double,double *) /* sigue() */
);

/* --- Variables globales ---*/

double err_t;
FILE *f_out;
double ome;
double R;
double Vt;
double told;

```

```

/*=====Función main()=====*/

int main()
{
    double *Y;
    double *Q;
    double x,y;
    double Lv;
    double L;
    double hini=0.1;
    double delta=1.0e-6;
    double t,tfin;
    char arch[33];

    Y = (double *)vector(2,sizeof(double));
    Q = (double *)vector(2,sizeof(double));

    /* --- Inicialización para la integración --- */
    ome=2;
    R=1;
    /* Vt=(ome*R)/4; */
    Vt=0.5;

    /*----- posiciones iniciales -----*/

    Y[0]=1;
    Y[1]=602;

    t = 0.0;
    /*printf("\ t=%-8f x=%-8f y=%-8f ",t,Y[0],Y[1]); */
    tfin = 30;
    err_t = 0.0;
    sprintf(arch,"pru.dat");
    f_out = abrir_n(arch);
    RGK_noaut(ecs,2,&t,tfin,&Y,&Q,hini,delta,sigue);
    printf("\n\t Error estimado = %g",err_t);
    printf("fin de la integración");
    free(Y);
    free(Q);
    fin();
    return(1);
}

```

```

/*===== Función sigue(Y,t,inten,err_t_i,Q) =====*/

int sigue(double *Y,double t,int inten,double err_t_i,double *Q)

{
    if(t>told) {
        printf("\n t=%-8f",t);
        told+=0.5e1; }

    /*fprintf(f_out,"%-8f %-8f\n",Y[0],Y[1]);*/
    if (t>=0) {
        /*printf("\n      t=%-8f      x=%-8f      y=%-8f      Vx=%-8f      Vy=%-
8f",t,Y[0],Y[1],Y[2],Y[3]);*/
        fprintf(f_out,"%-8f %-8f %-8f\n",t,Y[0],Y[1]); }
    /*if (t>=195000) {
        printf("\n Xfinal=%-8f",Y[0]); }*/
    err_t+=err_t_i;
    return( 1 );
}

/*===== Función ecs() =====*/

void ecs( double t, double *Y,double *DY)
{
    double voru,vorv;
    double x,y;
    double expox;
    double expoy;
    double sentidox,sentidoy;
    /*double Vt=(ome*R)/4; */
    double Vt=0.5;
    double Lv=10;

    x=Y[0];
    if (x<=0) {
        x=-Lv*( (int) ( (x-(Lv/2))/Lv ) ); }
    else {
        x=-Lv*( (int) ( (x+(Lv/2))/Lv ) ); }
    y=Y[1];
    if (y<=0) {
        y=-Lv*( (int) ( (y-(Lv/2))/Lv ) ); }
    else {
        y=-Lv*( (int) ( (y+(Lv/2))/Lv ) ); }
    rankine(x,y,&voru,&vorv); /* Rankine */
    /*kaufmann(x,y,&voru,&vorv);*/ /* Kaufmann */
}

```

```

x=Y[0];
if (x>=0) {
    expox=(int) ( (x+(Lv/2))/Lv ); }

else { expox=-(int) ( (x-(Lv/2))/Lv ); }
sentidox=pow(-1,expox);
y=Y[1];
if (y>=0) {
    expoy=(int) ( (y+(Lv/2))/Lv ); }
else { expoy=-(int) ( (y-(Lv/2))/Lv ); }
sentidoy=pow(-1,expoy);

if (sentidox*sentidoy>0) { DY[0]=voru;
                        DY[1]=vorv-Vt; }
else {
    DY[0]=-voru;
    DY[1]=-vorv-Vt;}
}

```

```

/*+++++++ altertrahormuchos ++++++*/
+   Trayectorias de partículas al moverse en dirección "y" a lo largo del +
+   tiempo sobre muchos vórtices horizontales cuyos sentidos de giro +
+   alternan. Partículas con inercia. +
/*+++++++*/

#include <stdio.h> /* para printf() y FILE */
#include <math.h>
#include "funcs3.h"
/* #include
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#define pi      3.14159265358979323846

/* --- Declaración de funciones --- */

void ecs(double,double *,double *);    /*-- Para RgK_noaut() --*/
int sigue(double *,double,int,double,double *);
void rankine(double ,double,double *,double *);
void kaufmann(double ,double,double *,double *);
void rkck_noaut(void (*)(double,double *,double *),const int,double,double
*,double *);
void RGK_noaut
(
    void (*)(double,double *,double *),    /* ecs(x,Y,DY) */
    const int,                             /* N */
    double *,double,                       /* x y xfin */
    double **,                             /* Y */
    double **,                             /* Q */
    double,                               /* hini */
    const double,                         /* delta */
    int (*)(double *,double,int,double,double *) /* sigue() */
);

/* --- Variables globales ---*/

double err_t;
FILE *f_out;
double ome;
double R;
double Vt;
double told;

```

```
/*=====Función main()=====*/
```

```
int main()
```

```
{
```

```
    double *Y;
```

```
    double *Q;
```

```
    double voru,vorv;
```

```
    double x,y;
```

```
    double Lv;
```

```
    double L;
```

```
    double expox,expoy,sentidox,sentidoy;
```

```
    double hini=0.1;
```

```
    double delta=1.0e-6;
```

```
    double t,tfin;
```

```
    char arch[33];
```

```
    Y = (double *)vector(4,sizeof(double));
```

```
    Q = (double *)vector(4,sizeof(double));
```

```
/* --- Inicialización para la integración --- */
```

```
    ome=2;
```

```
    R=1;
```

```
/* Vt=(ome*R)/4; */
```

```
    Vt=0.5;
```

```
    Lv=100; /* distancia entre vórtices */
```

```
/*----- posiciones iniciales -----*/
```

```
    Y[0]=0.5;
```

```
    Y[1]=600;
```

```
/*----- velocidades iniciales -----*/
```

```
    x=Y[0];
```

```
    if (x<=0) {
```

```
        x=(Lv/1)* ( (int) ( (x-(Lv/2))/Lv ) ); }
```

```
    else {
```

```
        x=(Lv/1)* ( (int) ( (x+(Lv/2))/Lv ) ); }
```

```
    y=Y[1];
```

```
    if (y<=0) {
```

```
        y=(Lv/1)* ( (int) ( (y-(Lv/2))/Lv ) ); }
```

```
    else {
```

```
        y=(Lv/1)* ( (int) ( (y+(Lv/2))/Lv ) ); }
```



```

rankine(x,y,&voru,&vorv); /* Rankine */
/*kaufmann(x,y,&voru,&vorv);*/ /* Kaufmann */

x=Y[0];
if (x>=0) {
    expox=(int) ( (x+(Lv/2))/Lv ); }

else { expox=-(int) ( (x-(Lv/2))/Lv ); }
sentidox=pow(-1,expox);
y=Y[1];
if (y>=0) {
    expoy=(int) ( (y+(Lv/2))/Lv ); }
else { expoy=-(int) ( (y-(Lv/2))/Lv ); }
sentidoy=pow(-1,expoy);

if (sentidox*sentidoy>0) { Y[2]=voru;
                        Y[3]=vorv-Vt; }
else { Y[2]=-voru;
      Y[3]=-vorv-Vt; }

/* Y[2]=0;
   Y[3]=-Vt; */

t = 0.0;
printf("\ t=%-8f x=%-8f y=%-8f Vx=%-8f Vy=%-8f",t,Y[0],Y[1],Y[2],Y[3]);
tfin = 2000;
err_t = 0.0;
sprintf(arch,"pru.dat");
f_out = abrir_n(arch);
RGK_noaut(ecs,4,&t,tfin,&Y,&Q,hini,delta,sigue);
printf("\n\t Error estimado = %g",err_t);
printf("fin de la integración");
free(Y);
free(Q);
fin();
return(1);
}

/*===== Función sigue(Y,t,inten,err_t_i,Q) =====*/

int sigue(double *Y,double t,int inten,double err_t_i,double *Q)

{
    if(t>told) {
        printf("\n t=%-8f",t);
    }
}

```

```

    told+=5.0e5; }

    /*fprintf(f_out,"%-8f %-8f\n",Y[0],Y[1]);*/
    if (t>=0) {
        /*printf("\n      t=%-8f      x=%-8f      y=%-8f      Vx=%-8f      Vy=%-
8f",t,Y[0],Y[1],Y[2],Y[3]);*/
        fprintf(f_out,"%-8f %-8f %-8f\n",t,Y[0],Y[1]); }
    /*if (t>=195000) {
        printf("\n Xfinal=%-8f",Y[0]); }*/
    err_t+=err_t_i;
    return( 1 );
}

/*===== Función ecs() =====*/

```

```

void ecs( double t, double *Y,double *DY)
{

```

```

    double voru,vorv;
    double x,y;
    double expox;
    double expoy;
    double sentidox,sentidoy;
    /*double Vt=(ome*R)/4; */
    double Vt=0.5;
    double St=5;
    double Lv=100;

```

```

    x=Y[0];
    if (x<=0) {
        x=-Lv*( (int) ( (x-(Lv/2))/Lv ) ); }
    else {
        x=-Lv*( (int) ( (x+(Lv/2))/Lv ) ); }
    y=Y[1];
    if (y<=0) {
        y=-Lv*( (int) ( (y-(Lv/2))/Lv ) ); }
    else {
        y=-Lv*( (int) ( (y+(Lv/2))/Lv ) ); }
    rankine(x,y,&voru,&vorv); /* Rankine */
    /*kaufmann(x,y,&voru,&vorv);*/ /* Kaufmann */

```

```

    DY[0]=Y[2];
    DY[1]=Y[3];

```

```

    x=Y[0];
    if (x>=0) {

```

```
        expox=(int) ( (x+(Lv/2))/Lv ); }

else    { expox=-(int) ( (x-(Lv/2))/Lv ); }
sentidox=pow(-1,expox);
y=Y[1];
if (y>=0) {
        expoy=(int) ( (y+(Lv/2))/Lv ); }
else    { expoy=-(int) ( (y-(Lv/2))/Lv ); }
sentidoy=pow(-1,expoy);
/* vortice(Y[0],Y[1],&voru,&vorv); */

if (sentidox*sentidoy>0) { DY[2]=(voru-Y[2])/St;
                        DY[3]=(vorv-Y[3]-Vt)/St; }
else
    {
        DY[2]=(-voru-Y[2])/St;
        DY[3]=(-vorv-Y[3]-Vt)/St;}

/* DY[0]=Y[2];
   DY[1]=Y[3];
   DY[2]=(1/St)*(voru-Y[2]);
   DY[3]=(1/St)*(vorv-Y[3]-Vt); */

}
```

```

/*+++++ alter_stvel +++++*\
+   Velocidad media de sedimentación de partículas situadas en un eje +
+   paralelo al "x" al moverse en dirección "y" a lo largo del tiempo sobre +
+   muchos vórtices horizontales que se repiten periódicamente +
+   según "x" e "y" alternando sus sentidos de giro. +
\*+++++*/

```

```

#include <stdio.h> /* para printf() y FILE */
#include <math.h>
#include "funcs3.h"
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#define pi      3.14159265358979323846
#define M      39 /* N° partes divido eje x */
double P[M+1];

```

```
/* --- Declaración de funciones --- */
```

```

void ecs(double,double *,double *); /*-- Para RgK_noaut() --*/
int sigue(double *,double,int,double,double *);
void rankine(double ,double,double *,double *);
void kaufmann(double ,double,double *,double *);
void rkck_noaut(void (*)(double,double *,double *),const int,double,double
*,double *);
void RGK_noaut
(
void (*)(double,double *,double *), /* ecs(x,Y,DY) */
const int, /* N */
double *,double, /* x y xfin */
double **, /* Y */
double **, /* Q */
double, /* hini */
const double, /* delta */
int (*)(double *,double,int,double,double *) /* sigue() */
);

```

```
/* --- Variables globales ---*/
```

```

double err_t;
FILE *f_out;
double ome;
double R;
double Vt;
double told;

```

```
/*=====Función main()=====*/

int main()

{
    double voru,vorv;
    double expox,expoy,sentidox,sentidoz;
    double x,y;
    double L;
    double Lv;
    double *Y;
    double *Q;
    double hini=0.1;
    double delta=1.0e-6;
    double t,tfin;
    char arch[33];
    int i;
    int j;

    Y = (double *)vector(4*(M+1),sizeof(double));
    Q = (double *)vector(4*(M+1),sizeof(double));

    /* --- Inicialización para la integración --- */

    ome=2;
    R=1;
    /* Vt=(ome*R)/4; */
    Vt=0.5;
    L=300;
    Lv=100;

    /*----- malla de partículas-----*/

    for( j=0 ; j<=M ; j++) {
        P[ j ]=(j*L/M)-(L/2);
    }

    for( j=0 ; j<=4*M ; j+=4) {
        Y[ j ]=*((double *)P+(j/4));
        Y[ j+1 ]=625; }
    for( j=0 ; j<=4*M ; j+=4){
        Q[ j ]=Y[ j];
        Q[ j+1 ]=Y[ j+1 ]; }
}
```

```

/*----- velocidades iniciales -----*/

t = 0.0;
tfin = 10000;
err_t = 0.0;
sprintf(arch,"pru.dat");
f_out = abrir_n(arch);
for( j=0 ; j<=4*M ; j+=4) {
    x=Y[ j ];
    if (x<=0) {
        x=Lv*( (int) ( (x-(Lv/2))/Lv ) ); }
    else {
        x=Lv*( (int) ( (x+(Lv/2))/Lv ) ); }
    y=Y[ j+1 ];
    if (y<=0) {
        y=Lv*( (int) ( (y-(Lv/2))/Lv ) ); }
    else {
        y=Lv*( (int) ( (y+(Lv/2))/Lv ) ); }

    rankine(x,y,&voru,&vorv); /* Rankine */
    /*kaufmann(x,y,&voru,&vorv);*/ /* Kaufmann*/

    x=Y[ j ];
    if (x>=0) {
        expox=(int) ( (x+(Lv/2))/Lv ) ; }

    else { expox=-(int) ( (x-(Lv/2))/Lv ) ; }
    sentidox=pow(-1,expox);

    y=Y[ j+1 ];
    if (y>=0) {
        expoy=(int) ( (y+(Lv/2))/Lv ) ; }
    else { expoy=-(int) ( (y-(Lv/2))/Lv ) ; }
    sentidoy=pow(-1,expoy);

    if (sentidox*sentidoy>0) { Y[ j+2 ]=voru;
                             Y[ j+3 ]=vorv-Vt; }
    else { Y[ j+2 ]=-voru;
           Y[ j+3 ]=-vorv-Vt; }

    /*printf("\n Vx=%-8f Vy=%-8f",Y[ j+2 ],Y[ j+3 ]);*/
    /* Y[ j+2 ]=0;
       Y[ j+3 ]=-Vt; */
}

```

```

RGK_noaut(ecs,4*(M+1),&t,tfin,&Y,&Q,hini,delta,sigue);
printf("\n\t Error estimado = %g",err_t);
printf("fin de la integración");
/* for(j=0;j<=21;j++)
    printf("\n j=%d,Y[ j ]=%g,Z[ j ]=%g",j,Y[ j ],Z[ j ]); */
free(Y);
free(Q);
fin();
return(1);
}

/*===== Función sigue(Y,t,inten,err_t_i,Q) =====*/

int sigue(double *Y,double t,int inten,double err_t_i,double *Q)

{
    int j;
    double sum;
    double Vy;
    double tp;
    double *A;
    A=(double *)vector(4*(M+1),sizeof(double));
    sum=0;
    if (t>told) {
        printf("t=%9.2e\n",t);
        told+=1.0e3;
    }
    for( j=0 ; j<=4*M ; j+=4) {
        A[ j ]=(Q[ j+1 ]-Y[ j+1 ]);
        sum+=A[ j ]; }
    Vy=sum/(M+1);
    /*printf("\n t=%g",t);*/
    if (t>0) {
        /*printf("\n %-8f %-8f",t,Vy); */
        /*fprintf(f_out,"%-8f %-8f \n",tp,Vy/20000);*/ }
    fprintf(f_out,"%-8f %-8f\n",t,Vy);
    err_t+=err_t_i;
    free(A);
    return( 1 );
}

/*===== Función ecs() =====*/

void ecs( double t, double *Y,double *DY)
{
    double x,y;

```

```

double voru,vorv;
double expox,expoy,sentidox,sentidoy;
int j;
/*double Vt=(ome*R)/4; */
/*double Vt=0.5;*/
double St=20.0;
double Lv=100;

for ( j=0 ; j<=4*M ; j+=4)
{
  x=Y[ j ];
  if (x<=0) {
    x=Lv*( (int) ( (x-(Lv/2))/Lv ) ); }
  else {
    x=Lv*( (int) ( (x+(Lv/2))/Lv ) ); }
  y=Y[ j+1 ];
  if (y<=0) {
    y=Lv*( (int) ( (y-(Lv/2))/Lv ) ); }
  else {
    y=Lv*( (int) ( (y+(Lv/2))/Lv ) ); }
  rankine(x,y,&voru,&vorv); /* Rankine */
  /*kaufmann(x,y,&voru,&vorv);*/ /* Kaufmann*/

  x=Y[ j ];
  if (x>=0) {
    expox=(int) ( (x+(Lv/2))/Lv ) ); }

  else { expox=-(int) ( (x-(Lv/2))/Lv ) ); }
  sentidox=pow(-1,expox);

  y=Y[ j+1 ];
  if (y>=0) {
    expoy=(int) ( (y+(Lv/2))/Lv ) ); }
  else { expoy=-(int) ( (y-(Lv/2))/Lv ) ); }
  sentidoy=pow(-1,expoy);

  DY[ j ]=Y[ j+2 ];
  DY[ j+1 ]=Y[ j+3 ];

  if (sentidox*sentidoy>0) { DY[ j+2 ]=(voru-Y[ j+2 ])/St;
    DY[ j+3 ]=(vorv-Y[ j+3 ]-Vt)/St; }
  else { DY[ j+2 ]=(-voru-Y[ j+2 ])/St;
    DY[ j+3 ]=(-vorv-Y[ j+3 ]-Vt)/St; }

}
}

```



```

/*+++++ Función rank +++++*\
+ Campo de velocidades de un vórtice Rankine referido a sus propios ejes. +
+ Función utilizada habitualmente en programas relativos a vórtices +
+ inclinados. +
\*++++*/

void rank(double x,double y, double z, double t,double *uvor, double *vvor,
double *wvor)
{

double den=1+pow((x/R),2)+pow((y/R),2);
*uvor=-(ome/den)*y;
*vvor=(ome/den)*x;
}

```

```

/*+++++ Función rankine +++++*/
+ Campo de velocidades de un vórtice Rankine referido a sus propios ejes. +
+ Función utilizada habitualmente en programas relativos a vórtices +
+ horizontales. +
/*+++++*/

```

```
void rankine(double x,double y,double *voru,double *vorv)
```

```

{
    double den;

    den=1+ ( (x/R)*(x/R) ) + ( (y/R)*(y/R) );
    *voru=-(ome*y)/den;
    *vorv=(ome*x)/den;
}

```

```

/*+++++++ Función kauf ++++++*/
+ Campo de velocidades de un vórtice Kaufmann referido a sus propios +
+ ejes. +
+ Función utilizada habitualmente en programas relativos a vórtices +
+ inclinados. +
\*+++++*/

void kauf(double x,double y, double z, double t,double *uvor, double *vvor,
double *wvor)
{

double den=1+pow((x/1),2)+pow((y/1),2);
*uvor=-y/den;
*vvor=x/den;
}

```

```

/*+++++ Función kaufmann +++++*\
+   Campo de velocidades de un vórtice Kaufmann referido a sus propios  +
+   ejes.                                                                +
+   Función utilizada habitualmente en programas relativos a vórtices  +
+   horizontales.                                                         +
\*+++++*/

```

```

void kaufmann(double x,double y,double *voru,double *vorv)
{
    double den;

    den=1+ ( (x/R)*(x/R) ) + ( (y/R)*(y/R) );
    *voru=-(ome*y/2)/den;
    *vorv=(ome*x/2)/den;
}

```

```
/*+++++++ funcs3.c ++++++*/
+   Recopilación de funciones habituales utilizadas en los programas +
+   anteriores. [141][142] +
/*+++++++*/

#include <stdio.h> /* para printf() */
#include <stdlib.h> /* para exit(1) */

/* --- Declaración de funciones --- */

#include "funcs3.h"

/*=====Función nerror=====*/

void nerror(char *s)
{
    fprintf(stderr, "\n Error en tiempo de ejecución: ");
    fprintf(stderr, "  %s \n\n", s);
    fprintf(stderr, " ... Saliendo del sistema ... \n");
    exit(1);
}

/*=====Función abrir_n(arch)=====*/

FILE *abrir_n(char *arch)
{
    char mensaje[40];
    FILE *f;

    f=fopen(arch, "w+t");
    if(f==NULL)
    {
        sprintf(mensaje, "No se pudo abrir el archivo %s.", arch);
        nerror(mensaje);
    }
    return f;
}

/*=====Función abrir_v(arch)=====*/

FILE *abrir_v(char *arch)
{
    char mensaje[40];
    FILE *f;
```

```

f=fopen(arch,"r+t");
if(f==NULL)
{
    sprintf(mensaje,"No se pudo abrir el archivo %s.",arch);
    nrerror(mensaje);
}
return f;
}

/*=====Función abrir_a(arch)=====*/

FILE *abrir_a(char *arch)
{
    char mensaje[40];
    FILE *f;

    f=fopen(arch,"a+t");
    if(f==NULL)
    {
        sprintf(mensaje,"No se pudo abrir el archivo %s.",arch);
        nrerror(mensaje);
    }
    return f;
}

/*=====Función vector=====*/

void *vector(int i_max,int tam)
{
    void *v;

    if( (v=(void *)malloc(i_max*tam)) == NULL )
        nrerror("Error en vector().");
    return v;
}

/*=====Función imatriz=====*/

int **imatriz(int i_max,int j_max)
{
    int **m;
    int i;

    if( (m=(int **)malloc(i_max*sizeof(int *))) == NULL )
        nrerror("Error en imatriz().");
}

```

```
    for(i=0;i<i_max;i++) m[i]=(int *)vector(j_max,sizeof(int));

    return m;
}

/*=====Función free_imatriz=====*/

void free_imatriz(int **mm,int col)
{
    int i;

    for(i=(col-1);i>=0;i--) free((char *)mm[i]);
    free((char *)mm);
}

/*=====Función dmatriz=====*/

double **dmatriz(int i_max,int j_max)
{
    double **m;
    int i;

    if( (m=(double **)malloc(i_max*sizeof(double *))) == NULL )
        nerror("Error en dmatriz().");

    for(i=0;i<i_max;i++) m[i]=(double *)vector(j_max,sizeof(double));

    return m;
}

/*=====Función free_dmatriz=====*/

void free_dmatriz(double **mm,int col)
{
    int i;

    for(i=(col-1);i>=0;i--) free((char *)mm[i]);
    free((char *)mm);
}

/*=====Función tensor_3D=====*/

double ***tensor_3D(int n,int m,int p)
{
    double ***punt;
    int i;
```

```
if( (punt=(double ***)malloc(n*sizeof(double **))) == NULL )
    nrerror("Error en asignación de tensor_3D.");

for(i=0;i<n;i++) punt[i]=dmatriz(m,p);

return punt;
}

/*===== Función free_tensor_3D =====*/

void free_tensor_3D(double ***punt,int n,int m)
{
    int i;

    for(i=(n-1);i>=0;i--) free_dmatriz(punt[i],m);

    free(punt);
}

/*===== Función fin() =====*/

void fin(void)
{
    printf("\n\n\t Fin del Programa.\n");
}
```



```
/*+++++++ funcs3.h ++++++*\n+      Formato de las funciones que aparecen en el programa “funcs3.c”[143] +\n/*+++++++*\n\n#include<stdio.h> /* -- para FILE * -- */\n\nvoid nerror(char *);\nFILE *abrir_n(char*); /* -- Abre un archivo nuevo para escritura -- */\nFILE *abrir_v(char *); /* -- Abre un archivo viejo para lectura -- */\nFILE *abrir_a(char *); /* -- Añade a un archivo (si no existe lo crea). -- */\nvoid *vector(int,int);\nint **imatriz(int,int);\nvoid free_imatriz(int **,int);\ndouble **dmatriz(int,int);\nvoid free_dmatriz(double **,int);\ndouble ***tensor_3D(int,int,int);\nvoid free_tensor_3D(double ***,int,int);\nvoid fin(void)
```

```

/*+++++ rgk_vect.c +++++*/
+   Integración por Método Runge-Kutta de 4º orden, paso variable   +
+   (error de orden  $h^5$ ) [144].                                     +
\*+++++*/

```

```

#include <math.h> /* para pow() y fabs() */
#define EPS 1.0e-15
#define SAFETY 0.9
#define CINCO 5.0
#define PGROW -0.2
#define PSHRINK -0.25
#define ERRORCON 1.89e-4 /*-- Equal to (CINCO/SAFETY)^(1/PGROW) --*/

```

```

/* --- Variables estáticas --- */

```

```

static double h;
static double *Yt,*Yerr;
static double *ak2,*ak3,*ak4,*ak5,*ak6;

```

```

/*=====Función RgK_vect()=====*/

```

```

void RGK_noaut
(
    void ecs(double,double *,double *),
    const int N,
    double *x,double xfin,
    double **Y, /*-- tiene que ser así para que pueda cambiar el puntero --*/
    double **Q,
    double hini,
    const double delta,
    int sigue(double *,double,int,double,double *)
)
{
    double *DY;
    double *Yswap;
    double aux,hnew;
    double errmax;
    int i,k;

```

```
/* --- Inicialización --- */
```

```
DY= (double *)vector(N,sizeof(double));  
Yt= (double *)vector(N,sizeof(double));  
Yerr= (double *)vector(N,sizeof(double));  
ak2= (double *)vector(N,sizeof(double));  
ak3= (double *)vector(N,sizeof(double));  
ak4= (double *)vector(N,sizeof(double));  
ak5= (double *)vector(N,sizeof(double));  
ak6= (double *)vector(N,sizeof(double));
```

```
h = hini ; i = 0 ;  
sigue(*Y,*x,i,0,*Q);
```

```
/* --- Integración --- */
```

```
do{
```

```
/* --- Integración y cálculo del nuevo incremento --- */
```

```
ecs(*x,*Y,DY);  
for(i=1; ;i++) /*-- i es el número de intentos por cada paso --*/  
{  
    rkck_noaut(ecs,N,*x,*Y,DY);  
    errmax = 0.0;  
    for(k=0;k<N;k++)  
        if( ( aux=fabs(Yerr[k]) ) > errmax ) errmax = aux ;  
    errmax /= delta;  
    if(errmax < 1.0) break; /*-- Step succeeded --*/
```

```
/* --- Reduce stepsize (no more than a factor of 10) --- */
```

```
    hnew = h*SAFETY*pow(errmax,PSHRINK);  
    if( hnew > (h*=0.1) ) h = hnew;  
}
```

```
(*x) += h;  
Yswap = *Y;  
*Y = Yt; /*-- Así me ahorro pasar los valores uno a uno --*/  
Yt = Yswap;
```

```
/* --- Intervalo para la próxima integración --- */
```

```
h *= ( errmax>ERRORCON ? SAFETY*pow(errmax,PGROW) : CINCO );  
if( h > (hnew=xfin-(*x)) ) { h = hnew; } else { hini = h; }
```

```

} while( sigue(*Y,*x,i,errmax*delta,*Q) && (hnew > EPS) );

/* --- Liberar memoria --- */

free(DY); free(Yt); free(Yerr);
free(ak2); free(ak3); free(ak4); free(ak5); free(ak6);
}

/*=====Función rkck_noaut()=====*/

#define a2 0.2
#define a3 0.3
#define a4 0.6
#define a5 1.0
#define a6 0.875
#define b21 0.2
#define b31 0.075
#define b32 0.225
#define b41 0.3
#define b42 -0.9
#define b43 1.2
#define b51 -11.0/54.0
#define b52 2.5
#define b53 -70.0/27.0
#define b54 35.0/27.0
#define b61 1631.0/55296.0
#define b62 175.0/512.0
#define b63 575.0/13824.0
#define b64 44275.0/110592.0
#define b65 253.0/4096.0
#define c1 37.0/378.0
#define c3 250.0/621.0
#define c4 125.0/594.0
#define c6 512.0/1771.0
#define dc1 (c1-2825.0/27648.0)
#define dc3 (c3-18575.0/48384.0)
#define dc4 (c4-13525.0/55296.0)
#define dc5 -277.0/14336.0
#define dc6 (c6-0.25)

void rkck_noaut(void ecs(double,double *,double *),
               const int N,double x,double *Y,double *DY)
{
    int k;
    for(k=0;k<N;k++) Yt[k] = Y[k] + b21*h*DY[k];
    ecs(x+a2*h,Yt,ak2);

```

```
for(k=0;k<N;k++) Yt[k] = Y[k] + h*(b31*DY[k] + b32*ak2[k]);
ecs(x+a3*h,Yt,ak3);
for(k=0;k<N;k++) Yt[k] = Y[k] + h*(b41*DY[k] + b42*ak2[k] + b43*ak3[k]);
ecs(x+a4*h,Yt,ak4);
for(k=0;k<N;k++) Yt[k] = Y[k] + h*(b51*DY[k] + b52*ak2[k]
                                + b53*ak3[k] + b54*ak4[k]);
ecs(x+a5*h,Yt,ak5);
for(k=0;k<N;k++) Yt[k] = Y[k] + h*(b61*DY[k] + b62*ak2[k] + b63*ak3[k]
                                + b64*ak4[k] + b65*ak5[k]);
ecs(x+a6*h,Yt,ak6);
for(k=0;k<N;k++) Yt[k] = Y[k] + h*(c1*DY[k] + c3*ak3[k]
                                + c4*ak4[k] + c6*ak6[k]);
for(k=0;k<N;k++) Yerr[k] = h*(dc1*DY[k] + dc3*ak3[k] + dc4*ak4[k]
                             + dc5*ak5[k] + dc6*ak6[k]);

}
```

SIMBOLOGÍA

Símbolo en los programas	Variable de la Tesis
ome	Ω
R	R_v
tita	θ
chi	ψ
d _p	d_p^*
grav	$\bar{g}$
tau	τ_p^*
XE1	x_{E1}
XE2	x_{E2}
Vt	V_t
St	S_t
hini	h
delta	Δ
uvor	u_x^*
vvor	u_y^*
wwor	u_z^*
diam	d_p^*
U	U_o^*
cama	Γ^*
Rv	R_v^*
voru	u_x^*
vorv	u_y^*
vorw	u_z^*
Te	T_e
Lv	L_v

ANEXO III
Listado de figuras

FIGURA	TÍTULO	PÁGINA
1-1	Vórtice polar en la zona ártica de la estratosfera de la tierra observado el 27 de Enero de 1992.	6
1-2	Gran mancha roja de Júpiter. Fotografía realizada por el Jet Propulsion Laboratory, Pasadena (USA).	6
1-3	Gran mancha oscura de Neptuno. Fotografía tomada por el Voyager 2 en Agosto de 1989.	7
1-4	Huracán tropical Gladys en Octubre 1968, observado por el Apolo 7.	7
1-5	Huracán Ava, fotografía tomada por el satélite NOAA el 7 de Junio de 1973.	8
3-1	Forma del espectro de energía tridimensional en todo el rango de números de onda.	61
3-2	Representación esquemática del espectro de energía de turbulencia bidimensional.	64
4-1	Tornado.	86
4-2	Vórtice que se forma al desaguar un líquido a través de un sumidero.	87
4-3	Torbellinos desprendidos de alas de avión.	88

FIGURA	TÍTULO	PÁGINA
4-4	Instante inicial de la interacción entre dos vórtices girando en el mismo sentido.	107
4-5	Instante posterior de la interacción entre dos vórtices girando en el mismo sentido.	107
4-6	Instante inicial de la interacción entre dos vórtices girando en sentidos opuestos.	108
4-7	Comparación de la velocidad tangencial de diversos modelos de vórtices	110
5-1	Transformación de coordenadas definida por los ángulos de Euler.	114
6-1	Representación esquemática de los distintos tipos de partículas según su densidad o masa.	126
6-2	Partícula en movimiento en el seno de un fluido en reposo.	128
6-3	Partícula en reposo en el seno de un fluido en movimiento.	128
6-4	Movimiento relativo partícula-fluido y número de Reynolds	133

FIGURA	TÍTULO	PÁGINA
6-5	Ley de Stokes, Correlación de Clift et al. y Corrección de Oseen para el Coeficiente de Resistencia (C_D).	138
7-1	Diagrama de flujo general de la metodología.	150
7-2a	Diagrama de flujo de la metodología para el análisis del tiempo de escape de partículas pesadas de un vórtice tridimensional.	153
7-2b	Diagrama de flujo de la metodología para el análisis de la velocidad media de sedimentación de partículas de un vórtice tridimensional.	155
7-3	Diagrama de flujo de la metodología para el análisis de la sedimentación de partículas en vórtices bidimensionales periódicos.	157
8-1	Trayectorias (adimensionales) de partículas sin inercia ($St=0$), para vórtice Rankine.	166
8-2	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia ($St=0,5$), para vórtice Rankine.	169
8-3	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia ($St=0,5$) para otro valor inicial de la coordenada "z" (caso del vórtice Rankine).	171

FIGURA	TÍTULO	PÁGINA
8-4	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia ($St=0,5$) para varios valores iniciales de la coordenada "y" (caso del vórtice Rankine).	172
8-5	Forma y amplitud de la región encerrada por las trayectorias límite para $S_t=0,5$ y diferentes valores de V_t (caso del vórtice Rankine).	179
8-6	Distancia de escape (D) para vórtice Rankine.	182
8-7	Distancia de escape (D^*) frente a la velocidad terminal de caída (V_t^*), para $S_t = 0.4$ y $\theta = \pi/4$ (caso del vórtice Rankine).	183
8-8	Tiempo de escape (T_e) frente a la velocidad terminal de caída (V_t) para diferentes St (caso del vórtice Rankine).	185
8-9	Variación del Tiempo de escape (T_e) con la inercia de la partículas (St) para $V_t = 0,2$ (caso del vórtice Rankine).	186
8-10	Trayectorias de una partícula en uno de los rangos de números de Stokes en que el tiempo de escape oscila (caso del vórtice Rankine).	187
8-11	Influencia del ángulo de inclinación (θ) en el tiempo de escape (T_e) para $S_t = 0,4$ y $V_t = 0,3$. (caso del vórtice Rankine).	189

FIGURA	TÍTULO	PÁGINA
8-12	Malla de partículas en la región de captura del vórtice para obtener valores promedio.	193
8-13	Límites de la malla de partículas en la región de captura del vórtice en función de V_t (caso del vórtice Rankine).	198
8-14	Límites de la malla de partículas en la región de captura del vórtice en función de d_p^* y I^* (caso del vórtice Rankine).	201
8-15	Constante de tiempo de escape (Ke) frente al número de Froude de la partícula (F_p) para diferentes números de Stokes (caso del vórtice Rankine).	205
8-16	Comparación de la Constante de tiempo de escape (Ke) frente al número de Froude de la partícula (F_p) para distintos números de Stokes (caso del vórtice Rankine).	206
8-17	Constante de tiempo de escape (Ke) frente a la Velocidad terminal (V_t) para diferentes números de Stokes (caso del vórtice Rankine).	207
8-18	Tiempo de escape (T_e^*) frente al diámetro de la partícula (d_p^*) para distintos valores de la circulación del vórtice y radio del vórtice $R_v^*=0,001$ m (caso del vórtice Rankine).	210
8-19	Comparación del Tiempo de escape (T_e^*) frente al diámetro de la partícula (d_p^*) para distintos valores de la circulación del vórtice y radio del vórtice $R_v^*=0,001$ m (caso del vórtice Rankine).	211

FIGURA	TÍTULO	PÁGINA
8-20	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_z \rangle$) de gotas de agua en aire frente al diámetro de la partícula (d_p).	215
8-21	Diagrama de flujo de obtención del tiempo de computación (t) para el que la velocidad de las partículas alcanza el valor asintótico.	219
8-22	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_z \rangle$) frente al Tiempo de escape promedio ($\langle T_e^* \rangle$) (caso del vórtice Rankine).	220
8-23	Representación esquemática de la disposición bidimensional de vórtices girando en el mismo sentido	223
8-24	Trayectorias (adimensionales) de partículas sin inercia ($S_r=0$), con vórtices girando en el mismo sentido, para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_{t^*}=0,5$ (caso del vórtice Rankine).	226
8-25	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia moderada ($S_r = 10$ a 80) para vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Rankine).	229
8-26	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia fuerte ($S_r = 130$ a 235) para vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Rankine).	231
8-27	Evolución (adimensional) de la abscisa de partículas con inercia fuerte ($S_r = 130$ a 235) para vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Rankine).	232

FIGURA	TÍTULO	PÁGINA
8-28	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_t) para vórtices girando en el mismo (caso del vórtice Rankine).	239
8-29	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la inercia de las partículas (S_i) para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_t = 0,5$ con vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Rankine).	241
8-30	Representación esquemática de la disposición bidimensional de vórtices girando con sentidos de giro alternados.	243
8-31	Trayectorias (adimensionales) de partículas sin inercia ($S_i=0$) con vórtices con sentidos de giro alternados, para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_t = 0,5$ (caso del vórtice Rankine).	245
8-32	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia moderada ($S_i = 0,1$ a 4) para tiempos elevados en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Rankine).	247
8-33	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia moderada ($S_i = 0,1$ a 4) para tiempos cortos en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Rankine).	249
8-34	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia fuerte ($S_i = 5$ a 90) para tiempos cortos en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Rankine).	251
8-35	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia fuerte ($S_i = 5$ a 90) para tiempos elevados en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Rankine).	252

FIGURA	TÍTULO	PÁGINA
8-36	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_t) para vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Rankine).	254
8-37	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la inercia de las partículas (St) para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_t = 0,5$ con vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Rankine).	256
9-1	Trayectorias (adimensionales) de partículas sin inercia ($St=0$), para vórtice Kaufmann.	260
9-2	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia ($St=0,5$), para vórtice Kaufmann.	262
9-3	Forma y amplitud de la región encerrada por las trayectorias límite para diferentes valores de V_t (caso del vórtice Kaufmann).	267
9-4	Distancia de escape (D) para vórtice Kaufmann.	268
9-5	Tiempo de escape (T_e) frente a la velocidad terminal de caída (V_t) para diferentes St (caso del vórtice Kaufmann).	270
9-6	Variación del Tiempo de escape (T_e) con la inercia de la partículas (St) para $V_t = 0,2$ (caso del vórtice Kaufmann).	271

FIGURA	TÍTULO	PÁGINA
9-7	Trayectorias de una partícula en uno de los rangos de números de Stokes en que el tiempo de escape oscila (caso del vórtice Kaufmann).	272
9-8	Límites de la malla de partículas en la región de captura del vórtice en función de V_t (caso del vórtice Kaufmann).	277
9-9	Límites de la malla de partículas en la región de captura del vórtice en función de d_p^* y Γ^* (caso del vórtice Kaufmann).	279
9-10	Constante de tiempo de escape (Ke) frente al número de Froude de la partícula (F_p) para diferentes números de Stokes (caso del vórtice Kaufmann).	281
9-11	Comparación de la Constante de tiempo de escape (Ke) frente al número de Froude de la partícula (F_p) para distintos números de Stokes (caso del vórtice Kaufmann).	282
9-12	Constante de tiempo de escape (Ke) frente a la velocidad terminal (V_t) para diferentes números de Stokes (caso del vórtice Kaufmann).	283
9-13	Tiempo de escape (T_e^*) frente al diámetro de la partícula (d_p^*) para distintos valores de la circulación del vórtice y radio del vórtice $R_v^*=0,001$ m (caso del vórtice Kaufmann).	285
9-14	Comparación del Tiempo de escape (T_e^*) frente al diámetro de la partícula (d_p^*) para distintos valores de la circulación del vórtice y radio del vórtice $R_v^*=0,001$ m (caso del vórtice Kaufmann).	286

FIGURA	TÍTULO	PÁGINA
9-15	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_z \rangle$) frente al Tiempo de escape promedio ($\langle T_e^* \rangle$) (caso del vórtice Kaufmann).	288
9-16	Trayectorias (adimensionales) de partículas sin inercia ($S_r=0$), con vórtices girando en el mismo sentido, para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_r=0,5$ (caso del vórtice Kaufmann).	292
9-17	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia moderada ($S_r = 10$ a 35) para vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Kaufmann).	294
9-18	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia fuerte ($S_r = 60$ a 135) para vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Kaufmann).	296
9-19	Evolución (adimensional) de la abscisa de partículas con inercia fuerte ($S_r = 60$ a 135) para vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Kaufmann).	297
9-20	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_z \rangle$) frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_r) para vórtices girando en el mismo (caso del vórtice Kaufmann).	299
9-21	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_z \rangle$) frente a la inercia de las partículas (S_r) para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_r = 0,5$ con vórtices girando en el mismo sentido (caso del vórtice Kaufmann).	301

FIGURA	TÍTULO	PÁGINA
9-22	Trayectorias (adimensionales) de partículas sin inercia ($S_i=0$), con vórtices con sentidos de giro alternados, para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_i=0,5$ (caso del vórtice Kaufmann).	304
9-23	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia moderada ($S_i = 0,1$ a 4) para tiempos elevados en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Kaufmann).	306
9-24	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia moderada ($S_i = 0,1$ a 4) para tiempos cortos en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Kaufmann).	307
9-25	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia fuerte ($S_i = 5$ a 90) para tiempos cortos en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Kaufmann).	309
9-26	Trayectorias (adimensionales) de partículas con inercia fuerte ($S_i = 5$ a 90) para tiempos elevados en vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Kaufmann).	310
9-27	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_i) para vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Kaufmann).	313
9-28	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la inercia de las partículas (S_i) para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_i = 0,5$ con vórtices con sentidos de giro alternados (caso del vórtice Kaufmann).	315

FIGURA	TÍTULO	PÁGINA
10-1	Comparación de la forma y amplitud de la región encerrada por las trayectorias límite entre los vórtices Rankine y Kaufmann para $S_i = 0,5$ y $V_i = 0,2$.	319
10-2	Comparación del Tiempo de escape (T_e) frente a la velocidad terminal de caída (V_i) entre los vórtices Rankine y Kaufmann para $S_i = 0,7$.	320
10-3	Comparación de la variación del Tiempo de escape (T_e) con la inercia de las partículas (S_i) entre los vórtices Rankine y Kaufmann para $V_i = 0,2$.	321
10-4	Constante de tiempo de escape (K_e) frente al número de Froude de la partícula (F_p) para distintos números de Stokes. Comparación entre los vórtices Rankine y Kaufmann.	323
10-5	Comparación del Tiempo de escape (T_e^*) frente al diámetro de la partícula (d_p^*) entre los vórtices Rankine y Kaufmann para distintos valores de la circulación del vórtice ($\Gamma^* = 10^{-5}$ a 10^{-4} m ² /s) y radio del vórtice $R_v^* = 0,001$ m.	324
10-6	Comparación de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente al Tiempo de escape promedio ($\langle T_e^* \rangle$) entre los vórtices Rankine y Kaufmann.	325
10-7	Comparación de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_i) para vórtices girando en el mismo sentido entre los vórtices Rankine y Kaufmann.	328

FIGURA	TÍTULO	PÁGINA
10-8	Comparación de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la inercia de las partículas (S_i) para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_f = 0,5$ con vórtices girando en el mismo sentido entre los vórtices Rankine y Kaufmann.	329
10-9	Comparación entre los vórtices Rankine y Kaufmann de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la velocidad terminal de caída en fluido en reposo (V_f) para vórtices girando con sentidos de giro alternados.	331
10-10	Comparación entre los vórtices Rankine y Kaufmann de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) frente a la inercia de las partículas (S_i) para una velocidad terminal adimensional de caída de la partícula $V_f = 0,5$ con vórtices girando con sentidos de giro alternados.	333
I-1	Método de Euler.	360
I-2	Método de Runge-Kutta de segundo orden.	361
I-3	Método de Runge-Kutta de cuarto orden.	362
I-4	Doble paso para el método de Runge-Kutta de cuarto orden.	363

ANEXO IV

Listado de tablas

Tabla	Título	Página
3-1	Características de las corrientes turbulentas	25
3-2	Rangos y Subrangos del espectro de energía de la turbulencia	62
8-1	Posiciones iniciales de las partículas (sin inercia), caso del vórtice Rankine	164
8-2	Posiciones de las partículas para cada instante de tiempo (sin inercia), caso del vórtice Rankine	165
8-3	Posiciones iniciales de las partículas (con inercia), caso del vórtice Rankine	167
8-4	Posiciones de las partículas para cada instante de tiempo (con inercia), caso del vórtice Rankine	168
8-5	Variables dimensionales correspondientes a las adimensionales tomadas en la Figura 8-2	170
8-6	Puntos de equilibrio y distancia entre ellos para los valores de los parámetros considerados en la Figura 8-2.	178
8-7	Tiempo de escape (T_e) para diferentes valores de V_i y S_i , caso del vórtice Rankine	184

Tabla	Título	Página
8-8	Valores adimensionales Límite para la malla de partículas en la región de captura de un vórtice Rankine, en función de V_i	197
8-9	Valores adimensionales Límite para la malla de partículas en la región de captura de un vórtice Rankine, en función de d_p^* y Γ^*	200
8-10	Valores de la Constante de tiempo de escape (K_e) y del Tiempo de escape (T_e) en función de V_i , S_i y F_p , caso del vórtice Rankine	203
8-11	Valores adimensionales del Tiempo de escape promedio ($\langle T_e \rangle$) de un vórtice Rankine, en función de d_p^* y Γ^*	209
8-12	Tiempo de escape promedio ($\langle T_e^* \rangle$) Numérico y Teórico (Fórmula) y Velocidad media de sedimentación ($\langle V_z \rangle$) de un vórtice Rankine, en función de d_p^* y Γ^*	218
8-13	Posiciones de las partículas (sin inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos girando en el mismo sentido, caso del vórtice Rankine	225
8-14	Posiciones de las partículas (con inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos girando en el mismo sentido, caso del vórtice Rankine	227
8-15	Obtención del diámetro de las partículas de plomo ($d_{p \text{ plomo}}^*$) que pueden separarse por sedimentación en aire en función del radio (R_v^*) y/o de la circulación de los vórtices (Γ^*)	235

Tabla	Título	Página
8-16	Obtención del radio (R_v^*) y de la circulación (Γ^*) de los vórtices en función del diámetro de las partículas (d_p^*) para la separación por sedimentación de partículas de plomo en aire	237
8-17	Incremento de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) respecto al caso de fluido en reposo (V_i) para vórtices Rankine periódicos girando en el mismo sentido	238
8-18	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) en función del número de Stokes (S_i) para vórtices Rankine periódicos girando en el mismo sentido	240
8-19	Posiciones de las partículas (sin inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos con sentidos de giro alternados, caso del vórtice Rankine	244
8-20	Posiciones de las partículas (con inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos con sentidos de giro alternados, caso del vórtice Rankine	246
8-21	Incremento de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) respecto al caso de fluido en reposo (V_i) para vórtices Rankine periódicos con sentidos alternados	253
8-22	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) en función del número de Stokes (S_i) para vórtices Rankine periódicos girando con sentidos alternados	255
9-1	Posiciones de las partículas para cada instante de tiempo (sin inercia), caso del vórtice Kaufmann	259

Tabla	Título	Página
9-2	Posiciones de las partículas para cada instante de tiempo (con inercia), caso del vórtice Kaufmann	261
9-3	Tiempo de escape (T_e) para diferentes valores de V_i y S_i , caso del vórtice Kaufmann	269
9-4	Valores adimensionales Límite para la malla de partículas en la región de captura de un vórtice Kaufmann, en función de V_i	276
9-5	Valores adimensionales Límite para la malla de partículas en la región de captura de un vórtice Kaufmann, en función de d_p^* y Γ^*	278
9-6	Valores de la Constante de tiempo de escape (K_e) y del Tiempo de escape (T_e) en función de V_i , S_i y F_p , caso del vórtice Kaufmann	280
9-7	Valores adimensionales del Tiempo de escape promedio ($\langle T_e^* \rangle$) de un vórtice Kaufmann, en función de d_p^* y Γ^*	284
9-8	Tiempo de escape promedio ($\langle T_e^* \rangle$) Numérico y Teórico (Fórmula) y Velocidad media de sedimentación ($\langle V_z \rangle$) de un vórtice Kaufmann, en función de d_p^* y Γ^*	287

Tabla	Título	Página
9-9	Posiciones de las partículas (sin inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos girando en el mismo sentido, caso del vórtice Kaufmann	291
9-10	Posiciones de las partículas (con inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos girando en el mismo sentido, caso del vórtice Kaufmann	293
9-11	Incremento de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) respecto al caso de fluido en reposo (V_i) para vórtices Kaufmann periódicos girando en el mismo sentido	298
9-12	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) en función del número de Stokes (S_i) para vórtices Kaufmann periódicos girando en el mismo sentido	300
9-13	Posiciones de las partículas (sin inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos con sentidos de giro alternados, caso del vórtice Kaufmann	303
9-14	Posiciones de las partículas (con inercia) para cada instante de tiempo en vórtices periódicos con sentidos de giro alternados, caso del vórtice Kaufmann	305
9-15	Incremento de la velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) respecto al caso de fluido en reposo (V_i) para vórtices Kaufmann periódicos con sentidos alternados	312

Tabla	Título	Página
9-16	Velocidad media de sedimentación ($\langle V_y \rangle$) en función del número de Stokes (S_r) para vórtices Kaufmann periódicos girando con sentidos alternados	314
I-1	Constantes de Cash & Karp	365

FUENTES BIBLIOGRÁFICAS

BIBLIOGRAFÍA

En este apartado, se enumeran en primer lugar las referencias más relevantes que han sido mencionadas en la presente Tesis Doctoral y seguidamente se incluye una lista, lo más completa posible, de fuentes relacionadas con los análisis realizados en la misma.

Bibliografía por orden de mención

- [1] DÁVILA, J. & HUNT, J. C. R. (2001). Settling of small particles near vortices and in turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 440, 117-145.
- [2] YULE, A. J. (1980). Investigations of eddy coherence in jet flows. In *The Role of Coherent Structures in Modelling Turbulence and Mixing*. (ed. J. Jiménez), 188-207, Springer.
- [3] CHUNG, J. N. & TROUTT, T. R. (1988). Simulation of particle dispersion in an axisymmetric jet. *J. Fluid. Mech.*, 186, 199-222.
- [4] FUNG, J. C. H. (1993). Gravitational settling of particles and bubbles in homogeneous turbulence. *J. Geophys. Res.*, 98, 20287-20297.
- [5] FUNG, J. C. H. (1997). Gravitational settling of small spherical particles in unsteady cellular flow fields. *J. Aerosol. Sci.*, 28(5), 753-787.
- [6] RUETSCH, G. R. & MAXEY, M. R. (1991). Small-scale feature of vorticity and passive scalar fields in homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Fluid*, 3, 1587-1597.
- [7] VINCENT, A. & MENEGUZZI, M. (1991). The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 225, 1-25.

- [8] JIMÉNEZ, J., WRAY, A. A., SAFFMAN, P. G. & ROGALLO, R. S. (1993). The structure of intense vorticity in isotropic turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 255, 65-90.
- [9] WANG, L. P. & MAXEY, M. R. (1993). Settling velocity and concentration distribution of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 256, 27-68.
- [10] VINCENT, A. & MENEGUZZI, M. (1994). The dynamics of vorticity tubes in homogeneous turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 258, 245-254.
- [11] FUNG, J. C. H. (2000). The residence time of inertial particles in a vortex. *J. Geophysical Res.*, 105 (65), 14261-14272.
- [12] MAXEY, M. R. & CORRSIN, S. (1986). Gravitational settling of aerosol particles in randomly oriented cellular flow field. *J. Atmos. Sci.*, 43, 1112-1134.
- [13] STOMMEL, H. (1949). Trajectories of small bodies sinking slowly through convection cells. *J. Marine Res.*, 8, 24-29.
- [14] WOOD, I. R. & JENKINS, B. S. (1973). A numerical study of the suspension of a non-buoyant particle within a turbulent flow. I.A.H.R. Intl. Symp. on River Mechanics. Bangkok. Thailand. Paper A38, 431-442.
- [15] REEKS, M. W. (1977). On the dispersion of small particles suspended in an isotropic turbulent fluid. *J. Fluid Mech.*, 83, 529-546.
- [16] MAXEY, M. R. (1987). The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields. *J. Fluid Mech.*, 174, 441-465.
- [17] SQUIRES, K. D. & EATON, J. K. (1991). Measurements of particle dispersion from direct numerical simulations of isotropic turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 226, 1-35.

- [18] YEH, F. & LEI, U. (1991). On the motion of small particles in a homogeneous isotropic turbulent flow. *Phys. Fluids*, 3, 2571-2586.
- [19] SHE, Z. S., JACKSON, J. & ORSZAG, S. A. (1990). Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence. *Nature*, 344, 266-268.
- [20] BRASSEUR, J. G. & LIN, W. Q. (1991). Structure and statistics of intermittency in homogeneous turbulent shear flow. *Advances in Turbulence*, 3, 3-12. Springer.
- [21] RUETSCH, G. R. & MAXEY, M. R. (1992). The evolution of small-scale structures in homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Fluids* 4, 2747-2760.
- [22] SRDIC, A. (1999). Interaction of dense particles with stratified and turbulent environments. Tesis Doctoral. Arizona State University.
- [23] FUNG, J. C. H., HUNT, J. D. C., MALIK, N. A. & PERKINS, R. J. (1992). Kinematic simulation of homogeneous turbulence by unsteady random Fourier modes. *J. Fluid. Mech.*, 236, 281.
- [24] MALIK, N. A. & VASSILICOS, J. C. (1999). A lagrangian model for turbulent dispersion with turbulent-like flow structure: Comparison with direct numerical simulation for two-particle statistics. *Phys. Fluids*, 11(6), 1572-1580.
- [25] CRESPO, A. (1992). Mecánica de Fluidos. Servicio de Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid.
- [26] MUNSON, B. R., YOUNG, D. & OKIISHI, Th. (1991). Fundamentals of Fluid Mechanics. John Willey & Sons, Nueva York.
- [27] FOX, R. W. & Mc DONALD, A. T. (1995). Introducción a la Mecánica de Fluidos. Mc Graw Hill.

- [28] BARRERO, A. (2000). Curso de Mecánica de Fluidos. E.S.I. Sevilla.
- [29] WHITE, F. M. (2004). Fluid Mechanics, 5ª ed. Mc Graw Hill.
- [30] LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. (1989). Course of Theoretical Physics, Vol.6: Fluid Mechanics. Mecanique Des Fluides, Mir Moscú.
- [31] BATCHELOR, G. K. (2000). An introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press.
- [32] DOUGLAS, J. F., GASIOREK, J. M. & SWAFFIELD, J. A. (2001). Fluid Mechanics, 4ª ed. Pearson.
- [33] HINZE, J. O. (1975). Turbulence. McGraw-Hill.
- [34] LESIEUR, M. (1997). Turbulence in fluids. Kluwer Academic, 3rd edition.
- [35] LIBBY, P. A. (1996). Introduction to Turbulence. Combustion: An International Series. Taylor & Francis.
- [36] KIEHN, R. M. (1999). 2-d turbulence is a myth. *Geophysical Research Abstracts*, 1(4), 814.
- [37] KRAICHNAN, R. H. & MONTGOMERY, D. (1980). Two-dimensional turbulence. *Reports on Progress in Physics*, 43, 547-619.
- [38] FRISCH, U. (1995). Turbulence. Cambridge University Press.
- [39] HASEGAWA, A. (1985). Self-organization processes in continuous media. *Adv. Phys.*, 34, 1-42.
- [40] REYNOLDS, O. (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluid and the determination of the criterion. *Phil. Trans. of the Royal Soc. of London, Series A*, 186-223.

- [41] TENNEKES, H. & LUMLEY, J. (1972). A first course in turbulence. The MIT Press, Cambridge, Mass.
- [42] LAUNDER, B. E. (1990). *Lecture Notes in Physics*, chapter Phenomenological modelling: Present... and future? Springer-Verlag, Berlín.
- [43] HANJALIC, K. (1994). Advanced turbulence closure models: A view of current status and future prospects. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 15, 178.
- [44] TAYLOR, G. I. (1935). Statistical theory of turbulence. *I. Proc. R. Soc. London A*, 151, 421-444.
- [45] LIN, C.C. & REID, W.H. (1963). Handbuch der Physik, volume VIII/2, chapter Turbulent Flow. Theoretical Aspects, pages 438-523. Springer-Verlag.
- [46] LIN, C.C. (1953). On Taylor's hypothesis and the acceleration terms in the Navier-Stokes equation. *Quart. Appl. Math.*, 10:295.
- [47] MCCOMB, W. D. (1990). The Physics of Fluid Turbulence. Oxford Engineering Science. Oxford University Press.
- [48] BATCHELOR, G. K. (1990). Kolmogorov's Work in Turbulence. *Bull. London Math. Soc.*, 22, 47-51.
- [49] LESIEUR, M. (1983). Introduction to two-dimensional turbulence. *Two-dimensional turbulence, J. Mec. Th. Appl., Suppl.*, 5-20.
- [50] BABIANO, A., BASDEVANT, C. & SADOURNY, R. (1985). Structure functions and dispersion laws in two-dimensional turbulence. *J. Atm. Sci.*, 42(9), 941-949.

- [51] BABIANO, A., BASDEVANT, C., LEGRAS, B. & SADOURNY, R. (1987). Vorticity and Passive-scalar dynamics in two-dimensional turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 183, 379-397.
- [52] BABIANO, A., BASDEVANT, C., LE ROY, P. & SADOURNY, R. (1990). Relative dispersion in two-dimensional turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 214, 535-557.
- [53] ELHMAÏDI, D., PROVENZALE, A. & BABIANO, A. (1993). Elementary topology of two-dimensional turbulence from a lagrangian viewpoint and single-particle dispersion. *J. Fluid. Mech.*, 257, 533-558.
- [54] ZOUARI, N. & BABIANO, A. (1990). Expériences numériques lagrangiennes à partir de modèles eulériens. *Atmosphere-Ocean*, 28(3), 345-364.
- [55] ZOUARI, N. & BABIANO, A. (1994). Derivation of the relative law in the inverse cascade of two-dimensional turbulence. *Physica D*, 76, 318.
- [56] SMAGORINSKY, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations. *Mon. Weath. Rev.*, 91, 99-164.
- [57] CARETA, A., SAGUÉS, F. & SANCHO, J. M. (1993). Stochastic generation of homogeneous isotropic turbulence with well-defined spectra. *Physical Rev. E*, 48(3), 2279-2287.
- [58] MARTÍ PÉREZ, A. C. (1997). Stochastic generation of turbulence and applications. Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona, Barcelona.
- [59] GARDINER, C. W. (1985). Handbook of Stochastic Methods. Springer-Verlag, Berlín.
- [60] KRAICHNAN, R. H. (1970). Diffusion by a random velocity field. *Phys. Fluids*, 13(1), 22-31.

- [61] VASSILICOS, J. C. & FUNG, J. C. H. (1995). The self-similar topology of passive interfaces advected by two-dimensional turbulent-like flows. *Phys. Fluids*, 7, nº 8, 1970-1998.
- [62] FUNG, J. C. H. & VASSILICOS, J. C. (1998). Two-particle dispersion in turbulentlike flows. *Phys. Rev. E*, 52, 1677-1690.
- [63] CASTILLA, R. (2000). Numerical simulations of particles diffusion in isotropic and homogeneous turbulent flows. In Redondo, J. and Babiano, A., editors, *Turbulent Diffusion in the Environment*, pages 67-76, Barcelona. Xarxa Temàtica de Dinàmica de Fluids i Turbulència Geofísica.
- [64] KIRCHHOFF, G. R. (1876). *Vorlesungen über mathematische physik. Mechanik*, Teubner, Leipzig.
- [65] LAMB, H. (1932). *Hydrodynamics*. 6th ed., Cambridge University Press, Cambridge, U. K.
- [66] OSEEN, C. W. (1912). Über wirbelbewegung in einer reibenden flussikeit. *Ark J. Mat. Astron. Fys.*, Vol. 7, 14-21.
- [67] BURGERS, J. M. (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 1, 171-199.
- [68] KUO, H.L. (1950). The motion of atmospheric vortices and the general circulation. *J. Meteor.*, 7, 247-258.
- [69] RANKINE, W. J. M. (1858). *Manual of Applied Mechanics*. C. Griffen Co., London.
- [70] KAUFMANN, W. (1962). Über die ausbreitung kreiszylindrischer wirbel in zähen flüssigkeiten. *Ing. Arch.*, Vol. 31, No 1., 1.

- [71] SCULLY, M. P. (1975). Computation of helicopter rotor wake geometry and its influence on rotor harmonic airloads. Massachusetts Institute of Technology Report No ASRL TR 178-1.
- [72] YAMAUCHI, G. K., BURLEY, C. L., MERCKER, E., PENGEL, K. & JANAKIRAM, R. (1999). Flow measurements of an isolated model tilt rotor. American Helicopter Society 55th Annual Forum, Montreal, Canadá.
- [73] BATCHELOR, G. K. (1964). Axial flow in trailing line vortices. *J. Fluid Mech.*, 20, 645-658.
- [74] STUART, J. (1967). On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers. *J. Fluid Mech.*, 29, 417-440.
- [75] MOORE, D. W. & SAFFMAN, P. G. (1971). Structure of a line vortex in an imposed strain. Aircraft wake turbulence, ed. A. Goldberg, J. H. Olsen & H. Rogers, New York: Plenum, 339-354.
- [76] SULLIVAN, J. P. & SCULLY, M. P (1972). Helicopter rotor wake geometry and airloads and development of caser Doppler velocimeter for use in helicopter rotor waves. Massachusetts Institute of Technology Aerophysics Laboratory Technical Report 183, MIT DSR No 73032.
- [77] KIDA, S. (1981). Motion of an elliptic vortex in an uniform shear flow. *J. Phys. Soc. Japan*, 50, 3517-3520.
- [78] VATISTAS, G. H. (1998). New model for intense self-similar vortices. *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 14, No 4, 462-469.
- [79] KUNDU, P. K. (1990). Fluid Mechanics. Academic Press.
- [80] BHAGWAT, M. J. & LEISHMAN, J. G. (2002). Generalized viscous vortex model for application to free-vortex wake and aeroacoustic calculations. 58th Annual Forum and Technology Display of the American Helicopter Society International, Montreal, Canadá.

- [81] BASSET, A. B. (1888). On the motion of a sphere in a viscous liquid. *Phil. Trans. R. Soc. London A*, 179, 43-63. También en: 1961 A Treatise on hydrodynamics 2, p. 285. Dover: New York.
- [82] BOUSSINESQ, J. (1903). *Theorie Analytique de la chaleur*, vol. 2, p. 224. L'Ecole Polytechnique: Paris.
- [83] OSEEN, C. W. (1927). *Hydrodynamik*. Akademische Verlagsgesellschaft: Leipzig.
- [84] TCHEN, C. M. (1947). Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid. Tesis Doctoral, Delft University.
- [85] CORRSIN, S. & LUMLEY, J. (1956). On the equation of motion for a particle in turbulent fluid. *Appl. Sci. Res.* 6: 114-116.
- [86] BUEVICH, Y. A. (1966). *Fluid Dynam.* 1, 119.
- [87] RILEY, J. J. (1971). Computer simulations of turbulent dispersion. Tesis Doctoral. The John Hopkins University, Baltimore, Maryland.
- [88] SOO, S. L. (1975). Equation of motion of a solid particle suspended in a fluid. *Phys. Fluids*, 18, 263-264.
- [89] GITTERMAN, M. & STEINBERG, V. (1980). Memory effects in the motion of a suspended particle in a turbulent fluid. *Phys. Fluids*, 23, 2154-2162.
- [90] MAXEY, M. R. & RILEY, J. J. (1983). Equation of motion for a small rigid sphere in a non-uniform flow. *Phys. Fluid*, 26, 883-889.
- [91] FAXEN, H. (1922). *Ark. Mat., Astron. Fys.*, 17, 1.
- [92] BURGERS, J. M. (1938). 2nd report on viscosity and plasticity. *Kön. Ned. Akad. Wet., Verhand. (Eerste Sectie)* 16, 113 (chap. 3).

- [93] GOATER, A. (2003). Dispersion of heavy particles in an isolated pancake-like vortex. Tesis Doctoral. Universidad de British Columbia.
- [94] ELGHOBASHI, S. (1991). Particle-laden turbulent flows: direct simulation and closure models. *Appl. Sci. Res.*, 48, 301-314.
- [95] ELGHOBASHI, S. (1994). On predicting particle-laden turbulent flows. *Appl. Sci. Res.*, 52, 309-329.
- [96] HADAMARD, J. S. (1911). Mouvement Permanent Lent d'une sphere liquide et visqueuse dans une liquid visqueuse. *C.R. Acad. Sci.*, 152, 1735-1738.
- [97] RYBCZYNSKY, W., (1911). On the translatory motion of a fluid sphere in a viscous medium. *Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lett. A. Sci. Math. Natur. Ser. A.*, 40-46.
- [98] BERLEMONT, A., DESJONQUERES, P. & GOUESBET, G. (1990). Particle lagrangian simulation in turbulent flows. *J. Multiphase Flow*, 16 (1), 19-34.
- [99] MANTON, M. J. (1974). On the motion of a small particle in the atmosphere. *Bound-Layer Meteor.*, 6, 487-504.
- [100] AUTON, T. R. (1981). The dynamics of bubbles, drops and particles in motion in liquids. Tesis Doctoral, University of Cambridge.
- [101] MAXEY, M. R. (1987). The motion of small spherical particles in a cellular flow field. *Phys. Fluid*, 30, 1915-1928.
- [102] CLIFT, R., GRACE, J.R. & WEBER, M. E. (1978). Bubbles, drops and particles. Academic Press, New York, 380 pp.

- [103] MEI, R., ADRIAN, R. J. & HANRATTI, T. J. (1991). Particle dispersion in isotropic turbulence under Stokes drag and Basset force with gravitational settling. *J. Fluid Mech.*, 125, 481-495.
- [104] MEI, R., LAWRENCE, C. J. & ADRIAN, R. J. (1991). Unsteady drag on a sphere with small fluctuations in the free-stream velocity. *J. Fluid Mech.*, 233, 613-631.
- [105] MEI, R. & ADRIAN, R. J. (1992). Flow past sphere with an oscillation in the free-stream velocity and unsteady drag at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 237, 323-341.
- [106] LOVALENTI, P. M. & BRADY, J. F. (1993). The force on a sphere in an uniform flow with small-amplitude oscillations at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 256, 607-614.
- [107] LOVALENTI, P. M. & BRADY, J. F. (1993). The force on bubble, drop or particle in arbitrary time-dependent motion at small Reynolds number. *Phys. Fluids, A*, VOL 5 (9), 2104-2116.
- [108] LOVALENTI, P. M. & BRADY, J. F. (1993). The hydrodynamic force on a rigid particle undergoing arbitrary time-dependent motion at small Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 256, 561-605.
- [109] MEI, R. (1994). Flow due to an oscillating sphere and an expression for unsteady drag on the sphere at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 270, 133-174.
- [110] CHANG, E. J. & MAXEY, M. R. (1994). Accelerated motion of rigid spheres in unsteady flow at low to moderate Reynolds number. Part I. oscillatory motion. *J. Fluid Mech.*, 277, 347-379.

- [111] LOVALENTI, P. M. & BRADY, J. F. (1995). The temporal behavior of the hydrodynamic force on a body in response to an abrupt change in velocity at small but finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 293, 35-46.
- [112] LAZARO, B. J. & LASHERAS, J. C. (1989). Particle dispersion in a turbulent, plane free shear layer. *Physics of Fluids A*, 1, 1035-1041.
- [113] MARTIN, J. E. & MEIBURG, E. (1994). The accumulation and dispersion of heavy particles in forced two-dimensional mixing layer. I. The fundamental and subharmonic cases. *Phys. Fluids.*, 6, 1116-1132.
- [114] RAJU, N. & MEIBURG, E. (1995). The accumulation and dispersion of heavy particles in forced two-dimensional mixing layer. II. The effect of gravity. *Phys. Fluids.*, 7, 1241-1264.
- [115] SIPPOLA, M. R. & NAZAROFF, W. W. (2002). Particle deposition from turbulent flow: review of published research and its applicability to ventilation ducts in commercial buildings. Lawrence Berkeley National Laboratory Report, LBNL-51432, Berkeley, CA 94720-1710.
- [116] OSEEN, C. W. (1927). Neure methoden und ergebnisse inder hydrodynamic. Akademie Verlagsgesellschaft. Leipzig.
- [117] PROUDMAN, I. & PEARSON, J. R. A. (1957). Expansions at small Reynolds number for the flow past a sphere and a cylinder. *J. Fluid Mech.*, 2, 237-262.
- [118] TUNGSTALL, E. B. & HOUGHTON, G. (1968). Retardation of falling spheres by hydraulic oscillations. *Chem. Engng. Sci*, 23, 1067-1081.
- [119] HWANG, P. A. (1985). Fall velocity of particles in oscillating flow. *J. Hydraulic Engng.* ASCE 111 (3), 485-502.

- [120] MEL, R. (1990). Particle dispersion in isotropic turbulence and unsteady particle dynamics at finite Reynolds number. Tesis Doctoral, Universidad de Illinois en Urbana-Champaign, Urbana, Illinois.
- [121] FUNG, J. C. H. (1998). The effect of nonlinear drag on the settling velocity of particles in homogeneous isotropic turbulence. *J. Geophys. Res.*, 103 C12, 27905-27917.
- [122] RAJU, N. & MEIBURG, E. (1997). Dynamics of small spherical particles in vortical and stagnation point flow fields. *Phys. Fluids*, 9, 299-314.
- [123] JONAS, P. R. (1996). Turbulence and clouds microphysics. *Atmos. Res.*, 40, 283-306.
- [124] PARRA, M.T., CASTRO, F., VILLAFRUELA, J.M. & MENDEZ, C. (2003). Ventilación y dispersión de contaminantes en una galería de mina. Reunión de usuarios Fluent, Barcelona.
- [125] SANTOS GARCIA, A. Influencia del tamaño de partícula de la sepiolita en la adsorción de vertidos ácidos. En prensa.
- [126] FRANK, T.H., WASSEN, E., YU, Q. & SCHNEIDER, J. (1999). Experimental and numerical investigation of particle separation in a symmetrical double cyclone separator. Proceedings of the 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conferences. San Francisco, California, USA.
- [127] DAWSON, J.R. (1990). Minimizing dust in livestock buildings. A review of possible alternatives to mechanical separation. *J. Agricultural Eng. Res.* 47: 235-248.
- [128] VEENHUIZEN, M.A. & BUNDY, D.S. (1990). Electrostatic precipitation dust removal system for swine housing. ASAE paper n° 904066, St. Joseph, MI. USA.

- [129] FRANK, T.H., WASSEN, E., YU, Q. (1998). Lagrangian prediction of disperse gas-particle flow in cyclone separators. ICMF '98-3rd International Conference on Multiphase flow, 1998, Lyon, France, June 8-12, 1998, CD-ROM proceedings, paper n° 217, pp.1-8
- [130] OGAWA, A., SUGIYAMA, K. & NAGASAKI, K. (1993). Separation mechanism for fine solid particles in the uniflow type of the cyclone dust collector. Filtech Conference, Harsham, West Sussex, UK., pp. 627-640.
- [131] FRANK, T.H., WASSEN, E., YU, Q. (1997). A 3-dimensional Lagrangian solver for disperse multiphase flows on arbitrary, geometrically complex flow domains using blockstructured numerical grids. Int. Symposium on Gas-Particle flows, ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, Vancouver, BC, Canada, June 22-26, 1997, CD-ROM Proceedings, FEDSM97-3590.
- [132] CRISTEA, E.D., MALFA, E. & COGHE, A.(1996). A 3-D numerical simulation and measurement of strongly swirling heavy dust-laden flow inside a cyclone separator. Engineering and Turbulence Modelling and Experiments, 3, W. Rodi and G. Bergeles (Editors), Elsevier Science B.V.
- [133] PERKINS, R., GHOSH, S. & PHILLIPS, J. C. (1991). The interaction between particles and coherent structures in a plane turbulent jet. Advances in Turbulence III. (Ed. A. V. Johansson & P. H. Alfrdsson). Springer.
- [134] YIN, C., ROSENDAHL, L., KAER, S. K. & SORENSEN, H. (2003). Modelling the motion of cylindrical particles in an nonuniform flow. *Chemical Engineering Science*, 58, 3489-3498.
- [135] SANCHEZ, U. & DAVILA, J. (2003). Lagrangian model of particle settling in homogeneous isotropic turbulence. 5th EUROMECH Fluid Mechanics Conference, Toulouse, Francia.

- [136] SANCHEZ, U. & MORENO-LOPEZ, M. J. (2004). Separation and sorting of heavy particles suspended in a fluid by settling in a periodic vorticity field. 21th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Varsovia, Polonia.
- [137] SANCHEZ, U. & MORENO-LOPEZ, M. J. (2004). Settling in a periodic array of eddies: a new procedure of separation and classification of heavy particles suspended in a fluid. *Research Journal of Chemistry and Environment*, vol. 8, nº 4, 16-25.
- [138] SANCHEZ, U. & MORENO-LOPEZ, M. J. (2005). Sedimentación de partículas en un tren de torbellinos periódicos. *Ingeniería Química*, nº 422, 167-170.
- [139] SANCHEZ, U. & MORENO-LOPEZ, M. J. (2005). The escape time of small heavy particles from a 3D vortex. *Computer-Aided Chemical Engineering*, 20A, 421-426.
- [140] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. & FLANNERY, B. P. (1992). Numerical Recipes in C. The art of scientific computing. Cambridge University Press.
- [141] PANTANO, C. (1992). Software "funcs3.c".
- [142] DÁVILA, J. (1994). Revisión Software "funcs3.c".
- [143] DÁVILA, J. (1994). Software "funcs3.h".
- [144] DÁVILA, J. (1995). Software "rgk_vect.c" basado en el libro "Numerical Recipes in C" de Press et al.

Bibliografía por orden alfabético

- ARIAS-ZUGASTI, M., GARCIA-YBARRA, P.L. & CASTILLO, J.L. (2000). Unsteady effects in droplet vaporization lifetimes at subcritical and supercritical conditions. *Combustion Science and Technology*, 153, 179-191.
- ARIAS-ZUGASTI, M., CASTILLO, J.L. & GARCIA-YBARRA, P.L. (2003). Supercritical vaporization: distinguishable fluid regions. *Physical Review E* 68 en prensa, 5 páginas,
- AUTON, T. R. (1981). The dynamics of bubbles, drops and particles in motion in liquids. Tesis Doctoral, University of Cambridge.
- AUTON, T. R., HUNT, J. C. R. & PRUD'HOMME, M. (1988). The force exerted on a body in inviscid unsteady nonuniform rotational flow. *J. Fluid Mech.*, 197, 241-257.
- BABIANO, A., BASDEVANT, C., LE ROY, P. & SADOURNY, R. (1987). Single particle dispersion, langrangian energy spectrum in two-dimensional incompressible turbulence. *J. Mar. Res.*, 45, 107-131.
- BABIANO, A., BASDEVANT, C., LE ROY, P. & SADOURNY, R. (1990). Relative dispersion in two-dimensional turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 214, 535-557.
- BABIANO, A., BASDEVANT, C., LEGRAS, B. & SADOURNY, R. (1987). Vorticity and Passive-scalar dynamics in two-dimensional turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 183, 379-397.
- BABIANO, A., BASDEVANT, C. & SADOURNY, R. (1985). Structure functions and dispersion laws in two-dimensional turbulence. *J. Atm. Sci.*, 42(9), 941-949.

- BABIANO, A., DUBRULLE, B. & FRICK, P. (1995). Scaling properties of numerical two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, 52(4), 3719-3729.
- BHAGWAT, M. J. & LEISHMAN, J. G. (2002). Generalized viscous vortex model for application to free-vortex wake and aeroacoustic calculations. 58th Annual Forum and Technology Display of the American Helicopter Society International, Montreal, Canadá.
- BARRERO, A. (2000). Curso de Mecánica de Fluidos. E.S.I. Sevilla.
- BASSET, A. B. (1888). On the motion of a sphere in a viscous liquid. *Phil. Trans. R. Soc. London A*, 179, 43-63. También en: 1961 A Treatise on hydrodynamics 2, p. 285. Dover: New York.
- BATCHELOR, G. K. (1964). Axial flow in trailing line vortices. *J. Fluid Mech.*, 20, 645-658.
- BATCHELOR, G. K. (1967). An Introduction to Fluid Dynamics. CUP.
- BATCHELOR, G. K. (1982). The Theory of Homogeneous Turbulence. Cambridge University Press.
- BATCHELOR, G. K. (1990). Kolmogorov's Work in Turbulence. *Bull. London Math. Soc.*, 22, 47-51.
- BATCHELOR, G. K. (2000). An introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press.
- BENZI, R., CILIBERTO, S., BAUDET, C. & RUIZ CHAVARRIA, G. (1985). On the scaling of three dimensional homogeneous and isotropic turbulence. *Physica D*, 80, 385-398.
- BENZI, R., CILIBERTO, S., BAUDET, C., RUIZ CHAVARRIA, G. & TRIPICCIÓN, C. (1993). Extended and self-similarity in the dissipation range of fully developed turbulence. *Europhys. Lett.*, 24, 275-279.

- BENZI, R., CILIBERTO, S., TRIPICCIONE, R., BAUDET, C., MASSAIOLI, F. & SUCCI, S. (1993). Extended self-similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. E*, 48, R29-R32.
- BECKERS, M. (1999). Dynamics of vortices in a stratified fluid. Tesis Doctoral. Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- BERLEMONT, A., DESJONQUERES, P. & GOUESBET, G. (1990). Particle lagrangian simulation in turbulent flows. *J. Multiphase Flow*, 16 (1), 19-34.
- BLEVINS, R. (1992). Applied Fluid Mechanics Handbook. Krieger, Malabar (Florida).
- BOUSSINESQ, J. (1903). Theorie Analytique de la chaleur, vol. 2, p. 224. L'Ecole Polytechnique: Paris.
- BRADSHAW, P. (1978). Turbulence. Springer-Verlag.
- BURGERS, J. M. (1938). 2nd report on viscosity and plasticity. *Kön. Ned. Akad. Wet., Verhand. (Eerste Sectie)* 16, 113 (chap. 3).
- BURGERS, J. M. (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. in Applied Mech.*, 1, 171-199.
- BRASSEUR, J. G. & LIN, W. Q. (1991). Structure and statistics of intermittency in homogeneous turbulent shear flow. *Advances in Turbulence*, 3, 3-12. Springer.
- BUEVICH, Y. A. (1966). *Fluid Dynam.* 1, 119.
- BURGERS, J. M. (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 1, 171-199.

- CARETA, A., SAGUÉS, F. & SANCHÓ, J. M. (1993). Stochastic generation of homogeneous isotropic turbulence with well-defined spectra. *Physical Rev. E*, 48(3), 2279-2287.
- CARNEVALE, G. F., MCWILLIAMS, J. C., POMEAU, Y., WEISS, J. B. & YOUNG, W. R. (1991). Evolution of vortex statistic in two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 66, 2735-2737.
- CASTILLA, R. (2000). Numerical simulations of particles diffusion in isotropic and homogeneous turbulent flows. In Redondo, J. and Babiano, A., editors, *Turbulent Diffusion in the Environment*, pages 67-76, Barcelona. Xarxa Temàtica de Dinàmica de Fluids i Turbulència Geofísica.
- CASTRO, F., CRESPO, A., MANUEL, F. & FRUMAN, D.H. (1997). Equilibrium of ventilated cavities in tip vortices. *Journal of Fluid Engineering (ASME)*, vol. 119, pp. 759-768, USA.
- CHANG, E. J. & MAXEY, M. R. (1994). Accelerated motion of rigid spheres in unsteady flow at low to moderate Reynolds number. Part I. oscillatory motion. *J. Fluid Mech.*, 277, 347-379.
- CHEIN, R. & CHUNG, J. N. (1987). Effects of vortex pairing on particle dispersion in turbulent shear flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 13, 785-802.
- CHUNG, J. N. & TROUTT, T. R. (1988). Simulation of particle dispersion in an axisymmetric jet. *J. Fluid. Mech.*, 186, 199-222.
- CLIFFORD, FRENCH & HARDISTY (1983). *Turbulence: perspectives on flow and sediment transport*. John Wiley & sons ltd.
- CLIFT, R., GRACE, J.R. & WEBER, M. E. (1978). *Bubbles, drops and particles*. Academic Press, New York, 380 pp.
- CORRSIN, S. & LUMLEY, J. (1956). On the equation of motion for a particle in turbulent fluid. *Appl. Sci. Res.* 6: 114-116.

- COTEL, A. J. & BREIDENTHAL, R. E. (1999). Turbulence inside a vortex. *Phys. Fluids*, vol. 11, nº10, 3026-3029.
- CRESPO, A. (1992). Mecánica de Fluidos. Servicio de Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid.
- CRISTEA, E.D., MALFA, E. & COGHE, A.(1996). A 3-D numerical simulation and measurement of strongly swirling heavy dust-laden flow inside a cyclone separator. Engineering and Turbulence Modelling and Experiments, 3, W. Rodi and G. Bergeles (Editors), Elsevier Science B.V.
- CROWE, C. T. (1978). On the vapor droplet flows including boundary droplet effects. *Two-Phase Transp. Reactor Saf.*, 1, 385-405.
- CROWE, C. T. (1982). Numerical models for dilute gas-particle flows. *J. Fluid Eng.*, 104, 297-301.
- CROWE, C. T., CHUNG, J. N. & TROUTT, T. R. (1995). Particle interaction with vortices (chapter 19), Fluid Vortices, Kluwer Academic Publishing.
- CROWE, C. T., SHARMA, M. P. & STOCK, D. E. (1977). The particle source in cell (PSI-CELL) model for gas-droplet flows. *J. Fluids Eng.*, 99, 325.
- CROWE, C. T. , SOMMERFELD, M. & TSUJI, Y. (1998). Multiphase flows with droplets and particles. CRC Press: Boca Raton.
- DÁVILA, J. (1994). Revisión Software “funcs3.c”.
- DÁVILA, J. (1994). Software “funcs3.h”.
- DÁVILA, J.(1995). Software “rgk_vect.c” basado en el libro “Numerical Recipes in C” de Press et al.
- DÁVILA, J. & HUNT, J. C. R. (2001). Settling of small particles near vortices and in turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 440, 117-145.

- DÁVILA, J., POLO, D., BRAVO-LEÓN, E. & VASSILICOS, J. C. (2000). Trajectories of particles in homogeneous isotropic turbulence. In *Conference on Dynamics of Particle-Laden Flows, Kappel (Suiza)*. ERCOFTAC.
- DAWSON, J.R. (1990). Minimizing dust in livestock buildings. A review of possible alternatives to mechanical separation. *J. Agricultural Eng. Res.* 47: 235-248.
- DEIGAARD, R. & HANSEN, E. A. (1994). Simulation of turbulent diffusion of suspended sediment by a random walk model. *Prog. Rep. (Inst. Hydrodyn. and Hydraulic Eng. Tech. Univ. of Denmark)*, 75, 1-17.
- DOUGLAS, J. F., GASIOREK, J. M. & SWAFFIELD, J. A. (2001). *Fluid Mechanics*, 4ª ed. Pearson.
- DRITSCHER, D. G. & LEGRAS, B. (1993). Modelling oceanic and atmospheric vortices. *Physics Today*, 46(3), 44-51.
- DRUZHININ, O. A. & ELGHOBASHI, S. (1988). Direct numerical simulations of bubble-laden turbulent flows using the two-fluids formulation. *Phys. Fluids.*, 10, 685-697.
- DU TOIT, C. G. & SLEATH, J. F. A. (1981). Velocity measurements close to rippled beds in oscillatory flow. *J. Fluid. Mech.*, 112, 71-96.
- DUKOWICZ, J, K, (1980). A particle-fluid numerical model for liquid sprays. *J. Comput. Phys.*, 35, 229-253.
- ELGHOBASHI, S. (1991). Particle-laden turbulent flows: direct simulation and closure models. *Appl. Sci. Res.*, 48, 301-314.
- ELGHOBASHI, S. (1994). On predicting particle-laden turbulent flows. *Appl. Sci. Res.*, 52, 309-329.

- ELHMAÏDI, D., PROVENZALE, A. & BABIANO, A. (1993). Elementary topology of two-dimensional turbulence from a lagrangian viewpoint and single-particle dispersion. *J. Fluid. Mech.*, 257, 533-558.
- ESWARAN, E. & POPE, S. B. (1988). An examination of forcing in direct numerical simulations of turbulence. *Comput. Fluids*, 16, 257-278.
- FAVRE, A., KOVASZNAY, L.S.G., DUMAS, R., GAVIGLIO, J. & COANTIC, M. (1976). *La Turbulence en Mécanique des Fluides*. Gauthier-Villars.
- FAXEN, H. (1922). *Ark. Mat., Astron. Fys.*, 17, 1.
- FERNÁNDEZ-FERIA, R., FERNÁNDEZ DE LA MORA, J. & BARRERO, A. (1995). Solution breakdown in a family of self-similar nearly inviscid axisymmetric vortices. *J. Fluid. Mech.*, 305, 77-91.
- FLOHR, P. & VASSILICOS, J. C. (2000). A scalar subgrid model with flow structure for large-eddy simulations of scalar variances. *J. Fluid. Mech.*, 407, 315-349.
- FLOR, J. (1994). Coherent vortex structures in stratified fluids. Tesis Doctoral. Eindhoven University of Technology. The Netherlands.
- FOX, R. W. & Mc DONALD, A. T. (1995). *Introducción a la Mecánica de Fluidos*. Mc Graw Hill.
- FRANK, T.H., WASSEN, E., YU, Q. (1997). A 3-dimensional Lagrangian solver for disperse multiphase flows on arbitrary, geometrically complex flow domains using blockstructured numerical grids. Int. Symposium on Gas-Particle flows, ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, Vancouver, BC, Canada, June 22-26, 1997, CD-ROM Proceedings, FEDSM97-3590.
- FRANK, T.H., WASSEN, E., YU, Q. (1998). Lagrangian prediction of disperse gas-particle flow in cyclone separators. ICMF '98-3rd International

Conference on Multiphase flow, 1998, Lyon, France, June 8-12, 1998, CD-ROM proceedings, paper n° 217, pp.1-8

FRANK, T.H., WASSEN, E., YU, Q. & SCHNEIDER, J. (1999). Experimental and numerical investigation of particle separation in a symmetrical double cyclone separator. Proceedings of the 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conferences. San Francisco, California, USA.

FRISCH, U. (1995). Turbulence. Cambridge University Press.

FRISCH, U., SULEM, P. L. & NELKIN, N. (1978). A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 87, 719-736.

FUNG, J. C. H. (1990). Kinematic simulation of turbulent flow and particle motion. Tesis Doctoral. University of Cambridge.

FUNG, J. C. H. (1993). Gravitational settling of particles and bubbles in homogeneous turbulence. *J. Geophys. Res.*, 98, 20287-20297.

FUNG, J. C. H. (1997). Gravitational settling of small spherical particles in unsteady cellular flow fields. *J. Aerosol. Sci.*, 28(5), 753-787.

FUNG, J. C. H. (1998). The effect of nonlinear drag on the settling velocity of particles in homogeneous isotropic turbulence. *J. Geophys. Res.*, 103 C12, 27905-27917.

FUNG, J. C. H. (2000). The residence time of inertial particles in a vortex. *J. Geophysical Res.*, 105 (65), 14261-14272.

FUNG, J. C. H., HUNT, J. D. C., MALIK, N. A. & PERKINS, R. J. (1992). Kinematic simulation of homogeneous turbulence by unsteady random Fourier modes. *J. Fluid. Mech.*, 236, 281.

FUNG, J. C. H. & VASSILICOS, J. C. (1998). Two-particle dispersion in turbulentlike flows. *Phys. Rev. E*, 52, 1677-1690.

- GARDINER, C. W. (1985). *Handbook of Stochastic Methods*. Springer-Verlag, Berlin.
- GITTERMAN, M. & STEINBERG, V. (1980). Memory effects in the motion of a suspended particle in a turbulent fluid. *Phys. Fluids*, 23, 2154-2162.
- GOATER, A. (2003). Dispersion of heavy particles in an isolated pancake-like vortex. Tesis Doctoral. Universidad de British Columbia.
- GRIDHAR, G. & KATZ, J. (1995). Drag and lift forces on microscopic bubbles entrained by a vortex. *Phys. fluids*, vol. 7, nº2, 389-399.
- GRIFFITHS, R. W. & HOPFINGER, E. S. (1987). Coalescing of geostrophic vortices. *J. Fluid. Mech.*, 178, 73-97.
- HADAMARD, J. S. (1911). Mouvement Permanent Lent d'une sphere liquide et visqueuse dans une liquid visqueuse. *C.R. Acad. Sci.*, 152, 1735-1738.
- HANJALIC, K. (1994). Advanced turbulence closure models: A view of current status and future prospects. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 15, 178.
- HASEGAWA, A. (1985). Self-organization processes in continuous media. *Adv. Phys.*, 34, 1-42.
- HERWEIJER, J. A. (1995). The small-scale structure of turbulence. Tesis Doctoral. Eindhoven University of Technology. The Netherlands.
- HINZE, J. O. (1975). *Turbulence*. McGraw-Hill.
- HOFFMANN, K. A. & CHIANG, S. T. (1998). *Computational Fluid Dynamics*, volume II. Engineering Education System, Kansas, USA, third edition.
- HOPFINGER, E. J. & VAN HEIJST, G. J. F. (1993). Vortices in rotating fluids. *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, 25, 241-289.

- HUA, B. L. & KLEIN, P. (1998). An exact criterion for the stirring properties of nearly two-dimensional turbulence. *Physica D*, 113, 98-110.
- HUA, B. L., MCWILLIAMS, J. & KLEIN, P. (1998). Lagrangian accelerations in geostrophic turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 366, 87-108.
- HUNT, J. C. R., AUTON, T. R., SENE, L., THOMAS, N. H. & KOWE, R. (1998). Bubble motions in large eddies and turbulent flows. In *Proceedings of the Conference on Transient Phenomena in Multiphase Flow*, edited by N. H. Afgan, Hemisphere, Bristol.
- HWANG, P. A. (1985). Fall velocity of particles in oscillating flow. *J. Hydraul. Eng. ASCE* 111 (3), 485-502.
- JIMÉNEZ, J. (2000). Intermittency and cascades. *J. Fluid. Mech.*, 409, 99-120.
- JIMÉNEZ, J., WRAY, A. A., SAFFMAN, P. G. & ROGALLO, R. S. (1993). The structure of intense vorticity in isotropic turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 255, 65-90.
- JONAS, P. R. (1996). Turbulence and clouds microphysics. *Atmos. Res.*, 40, 283-306.
- KÁRMÁN, T. V. & HOWARTH, L. (1938). On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 164, 192-215.
- KATZ, E. J. (1966). Atmospheric diffusion of settling particles with sluggish response. *J. Atmos. Sci.*, 23, 159-166.
- KAUFMANN, W. (1962). Über die ausbreitung kreiszylindrischer wirbel in zähen flüssigkeiten. *Ing. Arch.* Vol. 31, nº1, 1.
- KIDA, S. (1981). Motion of an elliptic vortex in an uniform shear flow. *J. Phys. Soc. Japan*, 50, 3517-3520.

- KIEHN, R. M. (1999). 2-d turbulence is a myth. *Geophysical Research Abstracts*, 1(4), 814.
- KIRCHHOFF, G. R. (1876). *Vorlesungen über mathematische physik. Mechanik*, Teubner, Leipzig.
- KLOOSTERZIEL, R. C. & VAN HEIJST, G. J. F. (1991). An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid. *J. Fluid. Mech.*, 233, 1-24.
- KOLMOGOROV, A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 30, 301-305.
- KOLMOGOROV, A. N. (1941). On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 31, 538-541.
- KOLMOGOROV, A. N. (1942). The equation of turbulent motion in an incompressible viscous fluid. *Izv. Akad. Nauk. SSSR*, VI, 56-58.
- KOLMOGOROV, A. N. (1962). A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid. Mech.*, 12, 82-85.
- KRAICHNAN, R. H. (1967). Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 10, 1417.
- KRAICHNAN, R. H. (1968). Small-scale structure convected by turbulence. *Phys. Fluids*, 11, 945-953.
- KRAICHNAN, R. H. (1970). Diffusion by a random velocity field. *Phys. Fluids*, 13(1), 22-31.
- KRAICHNAN, R. H. (1975). Remarks on turbulence theory. *Adv. In Mathematics*, 16, 305-331.

- KRAICHNAN, R. H. (1976). Eddy viscosity in two and three dimensions. *J. Atmos. Sci.*, 33, 1521-1536.
- KRAICHNAN, R. H. & MONTGOMERY, D. (1980). Two-dimensional turbulence. *Reports on Progress in Physics*, 43, 547-619.
- KUO, H.L. (1950). The motion of atmospheric vortices and the general circulation. *J. Meteor.*, 7, 247-258.
- LAMB, H. (1932). Hydrodynamics, 6th ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- LANDAHL, M. T. & MOLLO-CHRISTENSEN, E. (1986). Turbulence and random processes in fluid mechanics. Cambridge University Press.
- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. (1986). Física Teórica. Mecánica de Fluidos. Edit. Reverté.
- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. (1989). Course of Theoretical Physics, Vol.6: Fluid Mechanics. Mecanique Des Fluides, Mir Moscú.
- LAUNDER, B. E. (1990). *Lecture Notes in Physics*, chapter Phenomenological modelling: Present... and future? Springer-Verlag, Berlin.
- LAUNDER, B. E. & SPALDING, D. B. (1974). The numerical computation of turbulent flows. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 3, 269-289.
- LAZARO, B. J. & LASHERAS, J. C. (1989). Particle dispersion in a turbulent, plane free shear layer. *Physics of Fluids A*, 1, 1035-1041.
- LEITH, C. E. (1968). Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 11, 671-673.
- LESIEUR, M. (1983). Introduction to two-dimensional turbulence. *Two-dimensional turbulence, J. Mec. Th. Appl., Suppl.*, 5-20.

- LESIEUR, M. (1997). Turbulence in fluids. Kluwer Academic, 3rd edition.
- LESIEUR, M., COMTE, P. & MÉTAIS, O. (1995). Numerical simulations of coherent vortices in turbulence. *Appl. Mech. Rev.*, 48(3), 121-149.
- LOVALENTI, P. M. & BRADY, J. F. (1993). The force on a sphere in an uniform flow with small-amplitude oscillations at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 256, 607-614.
- LOVALENTI, P. M. & BRADY, J. F. (1993). The force on bubble, drop or particle in arbitrary time-dependent motion at small Reynolds number. *Phys. Fluids, A VOL 5* (9), 2104-2116.
- LOVALENTI, P. M. & BRADY, J. F. (1993). The hydrodynamic force on a rigid particle undergoing arbitrary time-dependent motion at small Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 256, 561-605.
- LOVALENTI, P. M. & BRADY, J. F. (1995). The temporal behavior of the hydrodynamic force on a body in response to an abrupt change in velocity at small but finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 293, 35-46.
- LIBBY, P. A. (1996). Introduction to Turbulence. Combustion: An International Series. Taylor & Francis.
- LIN, C.C. (1953). On Taylor's hypothesis and the acceleration terms in the Navier-Stokes equation. *Quart. Appl. Math.*, 10:295.
- LIN, C.C. & REID, W.H. (1963). Handbuch der Physik, volume VIII/2, chapter Turbulent Flow. Theoretical Aspects, pages 438-523. Springer-Verlag.
- LU, Q. Q. (1995). An approach to modelling particle motion in turbulent flows and in homogenous, isotropic turbulence. *Atmospheric Environment*, 29(3), 423-436.
- LUMLEY, J. L. (1970). Stochastic tools in turbulence. Academic Press.

- LUMLEY, J. L. (1962). The mathematical nature of the problem of relating lagrangian and eulerian statistical functions in turbulence. *Mécanique de la Turbulence. Colloques Intern., C.N.R.S., Paris*, 17-26.
- MAASSEN, S. (2000). Self-organization of confined two-dimensional flows. Tesis Doctoral. Eindhoven University of Technology. The Netherlands.
- MALIK, N. A. (1991). Studies in turbulent dispersion using kinematic simulation. Tesis Doctoral. University of Cambridge.
- MALIK, N. A. & VASSILICOS, J. C. (1999). A lagrangian model for turbulent dispersion with turbulent-like flow structure: Comparison with direct numerical simulation for two-particle statistics. *Phys. Fluids*, 11(6), 1572-1580.
- MANTON, M. J. (1974). On the motion of a small particle in the atmosphere. *Bound-Layer Meteor*, 6, 487-504.
- MARCU, B. E., MEIBURG, E. & NEWTON, R. K. (1995). Dynamics of heavy particles in a Burgers vortex. *Phys. Fluids*, 7(2), 400-410.
- MARTÍ PÉREZ, A. C. (1997). Stochastic generation of turbulence and applications. Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona, Barcelona.
- MARTIN, J. E. & MEIBURG, E. (1994). The accumulation and dispersion of heavy particles in forced two-dimensional mixing layer. I. The fundamental and subharmonic cases. *Phys. Fluids.*, 6, 1116-1132.
- MASSEY, B. S. (1998). *Mechanics of Fluids*. Stanley Thornes Ltd.
- MAXEY, M. R. (1987). The motion of small spherical particles in a cellular flow field. *Phys. Fluid*, 30, 1915-1928.

- MAXEY, M. R. (1987). The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields. *J. Fluid Mech.*, 174, 441-465.
- MAXEY, M. R. & CORRSIN, S. (1986). Gravitational settling of aerosol particles in randomly oriented cellular flow field. *J. Atmos. Sci.*, 43, 1112-1134.
- MAXEY, M. R. & RILEY, J. J. (1983). Equation of motion for a small rigid sphere in a non-uniform flow. *Phys. Fluid*, 26, 883-889.
- MCCOMB, W. D. (1990). The Physics of Fluid Turbulence. Oxford Engineering Science. Oxford University Press.
- MCWILLIAMS, J. C. (1984). The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 146, 21-43.
- MCWILLIAMS, J. C. (1990). The vortices of geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 219, 387-404.
- MCWILLIAMS, J. C. (1990). The vortices of two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 219, 361-385.
- MEI, R. (1990). Particle dispersion in isotropic turbulence and unsteady particle dynamics at finite Reynolds number. Tesis Doctoral, Universidad de Illinois en Urbana-Champaign, Urbana, Illinois.
- MEI, R. (1994). Flow due to an oscillating sphere and an expression for unsteady drag on the sphere at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 270, 133-174.
- MEI, R. & ADRIAN, R. J. (1992). Flow past sphere with an oscillation in the free-stream velocity and unsteady drag at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 237, 323-341.

- MEI, R., ADRIAN, R. J. & HANRATTI, T. J. (1991). Particle dispersion in isotropic turbulence under Stokes drag and Basset force with gravitational settling. *J. Fluid Mech.*, 125, 481-495.
- MEI, R., LAWRENCE, C. J. & ADRIAN, R. J. (1991). Unsteady drag on a sphere with small fluctuations in the free-stream velocity. *J. Fluid Mech.*, 233, 613-631.
- MELANDER, M. V., ZABUSKY, N. J. & MCWILLIAMS, J. C. (1988). Symmetric vortex merger in two dimensions: causes and conditions. *J. Fluid Mech.*, 195, 303-340.
- MELESHKO, V. V. & VAN HEIJST, G. J. F. (1994). Interacting two-dimensional vortex structures: point vortices, contour kinematics and stirring properties. *Chaos, Solitons & Fractals*, 4, 977-1010.
- MENTER, F. R. (1992). Assessment of higher order turbulence models for complex two and three-dimensional flow fields. NASA-TM-103944.
- MONIN, A. S. & YAGLOM, A. M. (1975). Statistical Fluid Mechanics, volume 2. The MIT Press.
- MOORE, D. W. & SAFFMAN, P. G. (1971). Structure of a line vortex in an imposed strain. Aircraft wake turbulence, ed. A. Goldberg, J. H. Olsen & H. Rogers, New York: Plenum, 339-354.
- MOORE, D. W. & SAFFMAN, P. G. (1975). The density of organized vortices in a turbulent mixing layer. *J. Fluid Mech.*, 69, 465-473.
- MUNSON, B. R., YOUNG, D. & OKIISHI, Th. (1991). Fundamentals of Fluid Mechanics. John Wiley & Sons, Nueva York.
- NICOLLEAU, F. & VASSILICOS, J. C. (1998). Kinematic simulation for stratified flows. In Frisch, U. editor, *Advances in Turbulence VII*, 543-546. Kluwer Academics.

- NIELSEN, P. (1984). On the motion of suspended sand particles. *J. Geophys. Res.*, 89, 616-626.
- OGAWA, A. (1993). Vortex Flow. CRC Series on Fine Particle Science and Technology. CRC Press Inc.
- OGAWA, A., SUGIYAMA, K. & NAGASAKI, K. (1993). Separation mechanism for fine solid particles in the uniflow type of the cyclone dust collector. Filtech Conference, Harsham, West Sussex, UK., pp. 627-640.
- ONSLOW (1993). Vorticity and sand transport: the dynamics of ripples and dunes. In Clifford, French & Hardisty, *Turbulence: perspectives on flow and sediment transport*. Wiley.
- OSEEN, C. W. (1912). Über wirbelbewegung in einer reibenden flussigkeit. *Ark. J. Mat. Astron. Fys.*, Vol 7, 14-21.
- OSEEN, C. W. (1927). Hydrodynamik. Akademische Verlagsgesellschaft: Leipzig.
- OSEEN, C. W. (1927). Neue methoden und ergebnisse inder hydrodynamic. Akademie Verlagsgesellschaft. Leipzig.
- OTT, S. & MANN, J. (2000). An experimental investigation of the relative diffusion of particle pairs in three-dimensional turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 422, 207-223.
- OVERMAN, E. A. & ZABUSKY, N. J. (1982). Evolution and merger of isolated vortex structures. *Phys. Fluids*, 25, 1297-1305.
- PANTANO, C. (1992). Software "funcs3.c".
- PARRA, M.T., CASTRO, F., VILLAFRUELA, J.M. & MENDEZ, C. (2003). Ventilación y dispersión de contaminantes en una galería de mina. Reunión de usuarios Fluent, Barcelona.

- PARRA, M.T., DWYER, HARRY & NAKANISHI. (2000). Applications of overset grids to multi-phase flow. 5th Symposium on Overset Grids & Solution Technology, USA.
- PEDLOSKY, J. (1986). Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag, New York.
- PERKINS, R., GHOSH, S. & PHILLIPS, J. C. (1991). The interaction between particles and coherent structures in a plane turbulent jet. Advances in Turbulence III. (Ed. A. V. Johansson & P. H. Alfrdsson). Springer.
- PERKINS, R. J. & HUNT, J. C. R. (1995). The interaction between heavy particles and an isolate vortex. Abstract submitted to the 2nd International Conference on Multiphase Flow, Kyoto.
- PERKINS, R. J. & SLEATH, J. F. A. (1983). Near bed velocities in combined steady plus oscillatory flow. Proc. XXth Congress IAHR VII, 173-177.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. & FLANNERY, B. P. (1992). Numerical Recipes in C. The art of scientific computing. Cambridge University Press.
- PROTAS, B., BABIANO, A. & KEVLAHAN, N. R. (1999). On geometrical alignment properties of two-dimensional forced turbulence. *Physica D*, 128, 169-179.
- PROUDMAN, I. & PEARSON, J. R. A. (1957). Expansions at small Reynolds number for the flow past a sphere and a cylinder. *J. Fluid Mech.*, 2, 237-262.
- PROVENZALE, A. (1999). Transport by coherent barotropic vortices. *Annu. Rev Fluid Mech.*, 31, 55-93.
- RAJU, N. & MEIBURG, E. (1995). The accumulation and dispersion of heavy particles in forced two-dimensional mixing layer. II. The effect of gravity. *Phys. Fluids.*, 7, 1241-1264.

- RAJU, N. & MEIBURG, E. (1997). Dynamics of small spherical particles in vortical and stagnation point flow fields. *Phys. Fluids*, 9, 299-314.
- RANKINE, W. J. M. (1858). Manual of Applied Mechanics. C. Griffen Co., London.
- REEKS, M. W. (1977). On the dispersion of small particles suspended in an isotropic turbulent fluid. *J. Fluid Mech.*, 83, 529-546.
- REEKS, M. W. (1980). Eulerian direct interaction applied to the statistical motion of particles in a turbulent fluid. *J. Fluid Mech.*, 97, 569-590.
- REYNOLDS, O. (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluid and the determination of the criterion. *Phil. Trans. of the Royal Soc. of London, Series A*, 186-223.
- RILEY, J. J. (1971). Computer simulations of turbulent dispersión. Tesis Doctoral. The John Hopkins University, Baltimore, Maryland.
- RIVERO, M. (1991). A numerical investigation of the forces exerted on a spherical body by an accelerated flow. Tesis Doctoral. Institut National Polytechnique de Toulouse.
- RUETSCH, G. R. & MAXEY, M. R. (1991). Small-scale feature of vorticity and passive scalar fields in homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Fluid*, 3, 1587-1597.
- RUETSCH, G. R. & MAXEY, M. R. (1992). The evolution of small-scale structures in homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Fluids* 4, 2747-2760.
- RYBCZYNSKY, W., (1911). On the translatory motion of a fluid sphere in a viscous medium. *Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lett. A. Sci. Math. Natur. Ser. A.*, 40-46.

- SADOURNY, R. & BASDEVANT, C. (1985). Parametrization of subgrid scale barotropic eddies in quasi-geostrophic models: anticipated potential vorticity method. *J. Atmos. Sci.*, 42, 1353-1363.
- SAFFMAN, P. G. (1992). Vortex dynamics. Cambridge University Press.
- SÁNCHEZ, M., CASTRO, F., TINAUT, F. & MELGAR, A. (2000). Considerations on the gas-phased field in a non-evaporating diesel spray. *Atomization and Sprays*, vol. 10.
- SÁNCHEZ, U. (2003). Influence of the nutation angle in gravitational settling of particles near vortices and in turbulence. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, vol. 22/4, 369-377.
- SÁNCHEZ, U. & DÁVILA, J. (2002). Trapping of heavy particles by vortex lines. ERCOFTAC Conference on Small Particles in Turbulence, Sevilla.
- SANCHEZ, U. & DAVILA, J. (2003). Lagrangian model of particle settling in homogeneous isotropic turbulence. 5th EUROMECH Fluid Mechanics Conference, Toulouse, Francia.
- SANCHEZ, U. & MORENO-LOPEZ, M. J. (2004). Separation and sorting of heavy particles suspended in a fluid by settling in a periodic vorticity field. 21th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Varsovia, Polonia.
- SANCHEZ, U. & MORENO-LOPEZ, M. J. (2004). Settling in a periodic array of eddies: a new procedure of separation and classification of heavy particles suspended in a fluid. *Research Journal of Chemistry and Environment*, vol. 8, nº 4, 16-25.
- SANCHEZ, U. & MORENO-LOPEZ, M. J. (2005). Sedimentación de partículas en un tren de torbellinos periódicos. *Ingeniería Química*, nº 422, 167-170.

- SANCHEZ, U. & MORENO-LOPEZ, M. J. (2005). The escape time of small heavy particles from a 3D vortex. *Computer-Aided Chemical Engineering*, 20A, 421-426.
- SANTOS GARCIA, A. Influencia del tamaño de partícula de la sepiolita en la adsorción de vertidos ácidos. En prensa.
- SCULLY, M. P. (1975). Computation of helicopter rotor wake geometry and its influence on rotor harmonic airloads. Massachusetts Institute of Technology Report No ASRL TR 178-1.
- SENE, K. J., HUNT, J. C. R. & THOMAS, N.H. (1994). The role of coherent structures in bubble transport by turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, 259, 219-240.
- SHAMES, I. H. (1995). Mecánica de Fluidos. Mc Graw Hill.
- SHE, Z. S., JACKSON, J. & ORSZAG, S. A. (1990). Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence. *Nature*, 344, 266-268.
- SHE, Z. S. & LÉVEQUE, E. (1994). Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 72, 336.
- SIPPOLA, M. R. & NAZAROFF, W. W. (2002). Particle deposition from turbulent flow: review of published research and its applicability to ventilation ducts in commercial buildings. Lawrence Berkeley National Laboratory Report, LBNL-51432, Berkeley, CA 94720-1710.
- SIRIGNANO, W. A. (1972). Introduction to analytical models of high frequency combustion instability. In Liquid Propellant Rocket Combustion Instability, D. T. Harrje and F. H. Reardon eds., NASA SP 194. U. S. Government Printing Office: Whashington DC.
- SIRIGNANO, W. A (1986). The formulation of spray combustion models: resolution compared to droplet spacing. *J. Heat Transfer*, 108, 633-639.

- SIRIGNANO, W. A (1993a). Computational spray combustion. In Numerical Modelling in Combustion. T. J. Chung, ed. Hemisphere: Washington DC.
- SIRIGNANO, W. A (1993b). Fluid dynamics of sprays-1992 Freeman Scholar Lecture. *J. Fluid. Eng.*, 115, 345-378.
- SIRIGNANO, W. A (1999). Fluid dynamics and transport of droplets and sprays. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- SMAGORINSKY, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations. *Mon. Weath. Rev.*, 91, 99-164.
- SOO, S. L. (1975). Equation of motion of a solid particle suspended in a fluid. *Phys. Fluids*, 18, 263-264.
- SPALART, P. R. & ALLMARAS, S. R. (1992). A one-equation turbulence model for aerodynamics flows. AIAA-92-1439.
- SPALDING, D. B. (1991). Kolmogorov's two-equation model of turbulence. *Proc. R. Soc. Lon.*, A 434, 165-182.
- SQUIRE, H. B. (1965). The growth of a vortex in turbulent flow. *Aeronautical quarterly*, 16, 302-306.
- SQUIRES, K. D. & EATON, J. K. (1991). Preferential concentration of particles by turbulence. *Phys. Fluids A* 3, 1169-1178.
- SQUIRES, K. D. & EATON, J. K. (1991). Measurements of particle dispersion from direct numerical simulations of isotropic turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 226, 1-35.
- SRDIC, A. (1999). Interaction of dense particles with stratified and turbulent environments. Tesis Doctoral. Arizona State University.
- SREENIVASAN, K. R. (1995). On the universality of the Kolmogorov constant. *Phys. Fluids*, 7, 2778-2784.

- STOMMEL, H. (1949). Trajectories of small bodies sinking slowly through convection cells. *J. Marine Res.*, 8, 24-29.
- STUART, J. (1967). On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers. *J. Fluid Mech.*, 29, 417-440.
- SULLIVAN, J. P. & SCULLY, M. P (1972). Helicopter rotor wake geometry and airloads and development of caser Doppler velocimeter for use in helicopter rotor waves. Massachusetts Institute of Technology Aerophysics Laboratory Technical Report 183, MIT DSR No 73032.
- TAYLOR, G. I. (1935). Statistical theory of turbulence. *I. Proc. R. Soc. London A*, 151, 421-444.
- TCHEN, C. M. (1947). Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid. Tesis Doctoral, Delft University.
- TENNEKES, H. & LUMLEY, J. (1972). A first course in turbulence. The MIT Press, Cambridge, Mass.
- TING, L. & KLEIN, R. (1991). Viscous Vortical Flows. Lecture Notes in Physics Vol. 374. Springer-Verlag, Berlin.
- TIO, K. K., GAÑÁN-CALVO, A. M. & LIÑÁN, A. (1993). The dynamics of bubbles in periodic vortex flows. *Applied Scientific Research*, 51, 285-290.
- TOOBY, P. F., WICK, G. L. & ISAACS, J. D. (1977). The motion of small sphere in a rotating velocity field: a possible mechanism for suspending particles in turbulence. *J. Geophysical Res.*, 82, nº 15, 2096-2100.
- THOMSON, D. J. (1990). A stochastic model for the motion of particles pairs in isotropic high-Reynolds-number turbulence, and its application to the problem of concentration variance. *J. Fluid. Mech.*, 210, 113-153.

- TOWNSEND, A. A. (1976). The structure of turbulent shear flow. Cambridge University Press.
- TRIELING, R. R. (1996). Two-dimensional vortices in strain and shear flows. Tesis Doctoral. Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- TRIELING, R. R., BECKERS, M. & VAN HEIJST, G. J. F. (1997). Dynamics of monopolar vortices in a strain flow. *J. Fluid. Mech.*, 345, 165-261.
- TRIELING, R. R. & VAN HEIJST, G. J. F. (1998). Kinematic properties of monopolar vortices in a strain flow. *Fluid Dyn. Res.*, 23, 319-341.
- TUNGSTALL, E. B. & HOUGHTON, G. (1968). Retardation of falling spheres by hydraulic oscillations. *Chem. Engng. Sci.*, 23, 1067-1081.
- VASSILICOS, J. C. & FUNG, J. C. H. (1995). The self-similar topology of passive interfaces advected by two-dimensional turbulent-like flows. *Phys. Fluids*, 7, nº 8, 1970-1998.
- VASSILICOS, J. C., MALIK, N. A., DÁVILA, J. & SAKAI, Y. (1998). Kinematic simulation. *Advances in Turbulence VII*, 581-584.
- VASSILICOS, J. C. & NIKIFORAKIS, N. (1997). Flamelet-vortex interaction and the Gibson scale. *Combustion and Flame*, 109, 293-302.
- VATISTAS, G.H. (1998). New model for intense self-similar vortices. *J. of propulsion and power*, vol. 14, nº 4, 462-469.
- VATISTAS, G. H., KOZEL, V. & MIH, W. C. (1991). A simpler model for concentrated vortices. *Experiments in fluids*, 11, 73-76.
- VEENHUIZEN, M.A. & BUNDY, D.S. (1990). Electrostatic precipitation dust removal system for swine housing. ASAE paper nº 904066, St. Joseph, MI. USA.

- VELASCO, O. (1994). Two-dimensional vortices with background vorticity. Tesis Doctoral. Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- VINCENT, A. & MENEGUZZI, M. (1991). The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 225, 1-25.
- VINCENT, A. & MENEGUZZI, M. (1994). The dynamics of vorticity tubes in homogeneous turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 258, 245-254.
- VOSBEEK, P. (1998). Contour dynamics and applications to 2D vortices. Tesis Doctoral. Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- WANG, L. P. & MAXEY, M. R. (1993). Settling velocity and concentration distribution of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence. *J. Fluid. Mech.*, 256, 27-68.
- WEN, F., KAMALU, N., CHUNG, J. N., CROWE, C. T. & TROUTT, T. R. (1992). Particle dispersion by vortex structures in plane mixing layers. *J. Fluids Engineering*, 114, 657-666.
- WHITE, F. M. (2004). Fluid Mechanics, 5ª ed. Mc Graw Hill.
- WIDNALL, S. E. (1975). The structure and dynamics of vortex filaments. *Annual Review of Fluid Mech.*, 7, 141-165.
- WILCOX, D. C. (1988). Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26, 1299-1310.
- WILLIAMS, F. A. (1985). Combustion theory; the fundamental theory of chemical reacting flow systems. 2nd ed. Benjamin/Cummings: Menlo Park, CA.
- WOOD, I. R. & JENKINS, B. S. (1973). A numerical study of the suspension of a non-buoyant particle within a turbulent flow. I.A.H.R. Intl. Symp. on River Mechanics. Bangkok. Thailand. Paper A38, 431-442.

- WYNGAARD, J. C. (1992). Atmospheric turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 24, 205-233.
- YAMAUCHI, G. K., BURLEY, C. L., MERCKER, E., PENGEL, K. & JANAKIRAM, R. (1999). Flow measurements of an isolated model tilt rotor. American Helicopter Society 55th Annual Forum, Montreal, Canadá.
- YEH, F. & LEI, U. (1991). On the motion of small particles in a homogeneous isotropic turbulent flow. *Phys. Fluids*, 3, 2571-2586.
- YEUNG, P. K. (1994). Direct numerical simulations of two-particle relative diffusion on isotropic turbulence. *Phys. Fluids*, 6, 3416.
- YIN, C., ROSENDAHL, L., KAER, S. K. & SORENSEN, H. (2003). Modelling the motion of cylindrical particles in an nonuniform flow. *Chemical Engineering Science*, 58, 3489-3498.
- YULE, A. J. (1980). Investigations of eddy coherence in jet flows. In *The Role of Coherent Structures in Modelling Turbulence and Mixing*. (ed. J. Jiménez), 188-207, Springer.
- ZAVALA, L. (2000). The effects of topography on rotating barotropic flows. Tesis Doctoral. Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- ZEIDLER, R. B. (1976). Coastal dispersion of pollutants. *J. of the Waterways Harbors and Coastal Eng. Division*, WW2, 235-253.
- ZOUARI, N. & BABIANO, A. (1990). Expériences numériques lagrangiennes à partir de modèles eulériens. *Atmosphere-Ocean*, 28(3), 345-364.
- ZOUARI, N. & BABIANO, A. (1994). Derivation of the relative law in the inverse cascade of two-dimensional turbulence. *Physica D*, 76, 318.

RECURSOS ELECTRÓNICOS

Inicialmente se recopilan las páginas web mencionadas en la Tesis y a continuación otros recursos electrónicos relacionados con las investigaciones realizadas y que son de interés en el campo de la Mecánica de Fluidos.

Recursos electrónicos por orden de mención

- I-1 <http://www.lmm.jussieu.fr/MEMBRES/ROSSI/TELECHARGER/VortexPorquerolles.pdf>
- I-2 http://deslab.mit.edu/DesignLab/new_deslab/pubs/files/SM/daguo_SM_thesis.pdf
- I-3 http://www.kilty.com/t_model.htm
- I-4 <http://saratoga.nmsu.edu/~shashi/jmppaper.pdf>
- I-5 <http://www.irphe.univ-mrs.fr/~ledizes/web/PoF2000b.html>
- I-6 http://www.cerfacs.fr/~cfdbib/repository/TR_CFD_01_79.pdf
- I-8 http://www.math.udel.edu/research/techrept/tcrpt_2001_03.pdf
- I-7 <http://www.edpsciences.org/articlesproc/Vol.7/pdf/sipp.pdf>
- I-9 <http://www.nssl.noaa.gov/seminars/abs/wood3.html>
- I-10 <http://flux.aps.org/meetings/BAPSDFD96/abs/S920007.html>
- I-11 <http://www.gfdl.noaa.gov/~gth/netscape/1979/gw7901.html>
- I-12 http://www.cmc.ec.gc.ca/rpn/wgne/2004/individual-articles/08_Deo_A._A._08-wgne04.pdf
- I-13 <http://www.atmos.washington.edu/~durrand/vortanim1.html>
- I-14 <http://aeroacoustics.imamod.ru/Papers/AKD.pdf>
- I-15 <http://www.nrel.gov/docs/fy04osti/36118.pdf>
- I-16 <http://baeder-pc.umd.edu/osho/rsingh2.ppt>
- I-17 <http://www.galcit.caltech.edu/~cpantano/vortex.htm>

- I-18 <http://www.galcit.caltech.edu/~cpantano/vortex/DLES4.pdf>
- I-19 <http://scitation.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet?prog=normal&id=PHFLE6000014000011003973000001&idtype=cvips&gifs=yes>
- I-20 <http://ctr.stanford.edu/ResBriefs03/lin.pdf>
- I-21 http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_udi=B6TJ7-3SPV439-3&_coverDate=11%2F30%2F1997&_alid=250552436&_rdoc=1&_fmt=&_orig=search&_qd=1&_cdi=5303&_sort=d&view=c&_acct=C000050221&_version=1&_urlVersion=0&_userid=10&md5=2d33c78967133e74bb00da78b0115ba1
- I-22 <http://scitation.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet?prog=normal&id=PFADEB000002000002000123000001&idtype=cvips&gifs=yes>
- I-23 <http://flux.aps.org/meetings/BAPSDFD96/abs/S670004.html>
- I-24 <http://www.gefd.damtp.cam.ac.uk/computer/documentation.html>
- I-25 <http://www.sdu.dk/Nat/MCI/rm/wcna2004papers/cppp-i17.pdf>
- I-26 http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-bib_query?bibcode=2003APS..DFD.MP012Z&db_key=PHY

Otros recursos electrónicos

Revistas científicas

- | | |
|--|---|
| American Institute of Aeronautics and Astronautics | http://www.aiaa.org |
| American Society of Mechanical Engineers | http://www.asme.org/pubs/ |
| Annual Review of Fluid Mechanics | http://www.annurev.org/series/fluid/fluid.htm |

Computers & Fluids	http://www.sciencedirect.com/science?_ob=JournalURL&_cdi=5694&_auth=y&_acct=C000050221&_version=1&_urlVersion=0&_userid=10&md5=196ab023b0c0a183cafcc553f9306dd6
European Journal of Mechanics-B/Fluids	http://www.elsevier.com/wps/find/journaldescription.cws_home/600738/description#description
International Journal of Fluid Mechanics Research	http://www.begellhouse.com/journals/71cb29ca5b40f8f8.html
International Journal of Heat and Fluid Flow	http://www.elsevier.com/wps/find/journaldescription.cws_home/525006/description#description
International Journal of Heat and Mass Transfer	http://www.elsevier.com/wps/find/journaldescription.cws_home/210/description#description
International Journal of Multiphase Flow	http://probe.usp.br/cgi-bin/sciserv.pl?collection=journals&journal=03019322
Journal of Applied Mechanics	http://scitation.aip.org/ASMEJournals/AppliedMechanics/
Journal of Computational Physics	http://gnarly.lanl.gov/Jcp/Jcp.html
Journal of Fluids Engineering	http://scitation.aip.org/ASMEJournals/Fluids/
Journal of Fluid Mechanics	http://www.cup.cam.ac.uk/Journals/JNLSCAT95/flm/flm.html
Journal of Heat Transfer	http://scitation.aip.org/ASMEJournals/HeatTransfer/
Physics of Fluids	http://scitation.aip.org/journals/doc/PHFLE6-home/top.jsp

Editoriales

Academic Press	http://www.apnet.com
Cambridge University Press	http://www.cup.cam.ac.uk/books
CRC Press	http://www.crcpress.com
Elsevier Science	http://www.elsevier.com/
Prentice Hall	http://www.prenhall.com
Springer	http://www.springer.de
John Wiley & Sons	http://www3.interscience.wiley.com/
McGraw Hill	http://www.mhhe.com/engcs

Bibliotecas

Biblioteca Nacional	http://www.bne.es
Bibliothèque Nationale de France	http://www.bnl.fr
British Library	http://www.bl.uk
Enciclopedia Britanica	http://www.britannica.com

Centros

CFD-Online, University of Chalmers	http://www.cfd-online.com
CFD Animations	http://www.itsc.com/alinks.html
Computational Fluid Dynamics on the Internet	http://www.cfdnet.com

Computer Assisted Learning in Fluid	http://www.aero.gla.ac.uk/Research/CFD/Education/CALF/web_calf.html
Gallery of Turbulent Flows	http://www-fpc.stanford.edu/CTR/gallery/gallery.html
Los Álamos National Laboratories	http://www.lanl.gov
Sandia National Laboratories	http://www.sandia.gov
University of Texas	http://www.utexas.edu/world/lecture
Von Karman Institute	http://www.vki.ac.be

SIGLAS Y ACRÓNIMOS

θ	Angulo de nutación, coincidente con la segunda coordenada esférica
Φ	Angulo de precesión
α_k	Angulo que forma el eje mayor de la elipse con el eje x en el vórtice de Kida
Γ	Circulación
$R(\lambda)$	Coeficiente de autocorrelación espacial
$R(\tau)$	Coeficiente de autocorrelación temporal
λ_E	Coeficiente de estacionariedad en el método de simulación cinemática de la turbulencia
C_D	Coeficiente de resistencia aerodinámica
$C_{D_{uid}}$	Coeficiente de resistencia aerodinámica en el caso de altos números de Reynolds
ν	Coeficiente de viscosidad cinemática
μ	Coeficiente de viscosidad dinámica
V_i'	Componente de la velocidad terminal de caída que no es paralela al eje del vórtice
$E_I(n)dn$	Contribución al promedio del cuadrado de la velocidad turbulenta del fluido de todas las frecuencias entre n y n+dn
K_s	Constante de sedimentación
K_e	Constante de tiempo de escape
U_p	Constante relacionada con el potencial vector
$R_L(r)$	Correlación longitudinal de velocidades
$R_T(r)$	Correlación transversal de velocidades
ρ_p	Densidad material de la partícula
ρ	Densidad material del fluido
$\phi(\omega)$	Densidad espectral de intensidad de una señal (Transformada de Fourier de su autocorrelación)
$\langle a'^2 \rangle^{1/2}$	Desviación cuadrática media de la fluctuación de la magnitud a
d_{cr}^*	Diámetro crítico de partícula donde se produce la transición entre las dos teorías de sedimentación de partículas en flujos turbulentos
d_p	Diámetro de la partícula
D_m	Difusividad de masa
ϵ	Difusividad turbulenta
ε	Disipación de energía cinética por unidad de masa de fluido y por unidad de por unidad de tiempo o disipación viscosa media
$g(\omega)$	Disipación de enstrofia
$G(\omega)$	Disipación de viscosidad
D	Distancia a la que una partícula ha escapado del vórtice

Ω	Doble de la velocidad angular del vórtice
E_c	Energía Cinética
Z	Enstrofia
l_c	Escala de corte en la simulación numérica directa de la turbulencia
η	Escala de longitud de Kolmogorov característica de los torbellinos disipativos
t_c^*	Escala de tiempo característica para las partículas
τ	Escala de tiempo de Kolmogorov característica de los torbellinos disipativos
τ_p	Escala de tiempo de relajación del movimiento relativo
υ	Escala de velocidad de Kolmogorov característica de los torbellinos disipativos
L_1	Escala integral de espacio relacionada con las fluctuaciones a gran escala
L_2	Escala integral de espacio relacionada con las fluctuaciones a pequeña escala
T_1	Escala integral de tiempo asociada a las variaciones a gran escala
T_2	Escala integral de tiempo asociada a variaciones rápidas del flujo
T	Escala integral de tiempo
L_l	Escala integral longitudinal de espacio
L_t	Escala integral transversal de espacio
l_d	Escala máxima en la simulación numérica directa de la turbulencia
$\Omega_Z(k, t)$	Espectro de enstrofia
δ	Espesor de la capa límite
a'	Fluctuación de la magnitud a
$\langle a'^2 \rangle^{1/2} / \langle A \rangle$	Fluctuación relativa de la magnitud a
v'	Forma genérica de las fluctuaciones de velocidad en el flujo turbulento
n	Frecuencia
$F(\omega)$	Fuente exterior de vorticidad
$\bar{f}$	Fuerzas másicas externas por unidad de volumen
ψ	Función de corriente
$P(a)$	Función de densidad de probabilidad de la magnitud a
$E_1(k_l)$	Función de espectro de energía de las fluctuaciones de velocidad longitudinales
$E_2(k_l)$	Función de espectro de energía de las fluctuaciones de velocidad transversales
$E(k, t)$	Función de espectro de energía tridimensional

$S_3(l)$	Función de estructura de tercer orden
$\overline{G}_{\Delta x}$	Función de filtro en el método "Large-Eddy Simulation"
$T_E(k)$	Función de transferencia de energía
ω_i	Inestabilidad asociada con el modo de onda i en la Simulación Cinemática de la turbulencia
B	Integral de barrido de la longitud de sedimentación diferencial
I	Integral de Loitsianskii
I_k	Intensidad del flujo de tensión uniforme en el vórtice de Kida
$W(k)$	Inyección de energía debida a una fuente exterior de vorticidad en el método de Generación Estocástica de la turbulencia
β_Z	Inyección de enstrofia
K	Kurtosis (flatness)
l	Longitud
L_0	Longitud característica de fluctuación del campo fluido
L_c^*	Longitud característica del campo fluido
l'	Longitud de mezcla
m_p	Masa de la partícula
m	Masa del fluido
l_e	Medida promedio de los torbellinos conteniendo energía
$L_{\lambda L}$	Microescala longitudinal de Taylor
$L_{\lambda T}$	Microescala transversal de Taylor
M	Número de divisiones de los ejes que determinan la región de captura
F_p	Número de Froude de la partícula
N	Número de modos de la Simulación Cinemática de la turbulencia
k_e	Número de onda asociado al máximo del espectro de energía de la turbulencia
k_d	Número de onda asociado al tamaño de los torbellinos que proporcionan la mayor contribución a la disipación total
k	Número de onda
Re	Número de Reynolds
Re_p	Número de Reynolds de la partícula (del movimiento relativo entre la partícula y el fluido)
L_S	Número de Squire
St	Número de Stokes
$J(\cdot, \cdot)$	Operador jacobiano bidimensional
∇^2	Operador laplaciano

$\mathcal{Q}[\lambda_G^2 \nabla^2]$	Operador que establece el espectro de energía en el método de Generación Estocástica de la turbulencia
∇	Operador “nabla”
$\mathcal{R}_m$	Parámetro de relación de masa
σ_c	Parámetro que caracteriza al flujo de cortadura en el vórtice de Moore-Saffman
λ_G	Parámetro que controla la escala integral en el método de Generación Estocástica de la turbulencia
ε_0	Parámetro que controla la intensidad del flujo en el método de Generación Estocástica de la turbulencia
$\bar{A}$	Potencial vector
$\bar{P}$	Presión modificada en el método “Large-Eddy Simulation”
p	Presión
r	Primera coordenada cilíndrica, coincidente con la distancia radial al centro del vórtice
d	Primera coordenada esférica
$\langle A \rangle$	Promedio de la magnitud A
$\bar{x}_{E12}^\bullet$	Puntos de equilibrio
R_p	Radio de la partícula
R	Radio de una esfera sobre la que incide una corriente fluida para la deducción de la Ley de Stokes
R_v	Radio del vórtice
β	Relación entre la viscosidad de la partícula y la viscosidad del fluido
χ	Relación entre los semiejes de la elipse en el vórtice de Moore-Saffman y en el de Kirchhoff
$\bar{F}$	Resultante de las fuerzas de presión y viscosidad que el fluido ejerce sobre la partícula
γ_k	Rotación uniforme en el flujo de tensión en el vórtice de Kida
ξ_G	Ruido gaussiano blanco en el método de Generación Estocástica de la turbulencia
φ	Segunda coordenada cilíndrica, coincidente con la tercera coordenada esférica
L_v	Separación entre vórtices
S	Sesgo (skewness)
Δ	Tamaño de la discretización espacial tamaño de la discretización espacial de la turbulencia en el método de Generación Estocástica de la turbulencia
z	Tercera coordenada cilíndrica, coincidente con la tercera coordenada cartesiana

Q_{ij}	Tensor de correlación de velocidades tridimensional
$\bar{S}_{ij}$	Tensor de deformación del campo filtrado en el método "Large-Eddy Simulation"
ε_{ij}	Tensor de disipación viscosa
T_{ij}	Tensor de escala de submalla en el método "Large-Eddy Simulation"
τ'_{ij}	Tensor de esfuerzos aparentes de Reynolds
E_{ij}	Tensor de espectro de energía tridimensional
$\bar{\bar{\tau}}$	Tensor de tensiones
$\bar{\bar{\gamma}}$	Tensor de velocidades de deformación
$\bar{\bar{\xi}}$	Tensor de velocidades de rotación
t_c	Tiempo característico correspondiente a la escala de corte del flujo en el método de simulación numérica de la turbulencia
t_d	Tiempo característico correspondiente a la escala de máxima del flujo en el método de simulación numérica de la turbulencia
τ_r	Tiempo característico de residencia del fluido
T_e^*	Tiempo de escape de las partículas
t	Tiempo
$\hat{f}(\omega)$	Transformada de Fourier de $f(t)$
Ω_v	Velocidad angular del vórtice
U_0	Velocidad característica de fluctuación del campo fluido
u_d	Velocidad de deformación
V	Velocidad de la corriente fluida que incide sobre una esfera para x tendiendo a infinito
$\bar{v}$	Velocidad de la partícula
u_{rot}	Velocidad de rotación
$\bar{u}$	Velocidad del fluido
U	Velocidad máxima del vórtice
$\langle V_z \rangle$	Velocidad media de sedimentación
V_t	Velocidad terminal adimensional de caída en fluido en reposo
V_t^*	Velocidad terminal de caída en fluido en reposo
ν_t	Viscosidad cinemática turbulenta
μ_t	Viscosidad dinámica turbulenta
ω	Vorticidad



Universidad
de Huelva

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes
en el día de la fecha, para Juzgar la Tesis Doctoral de
D. / D^a. URBANO JESÚS SANCHEZ DOMÍNGUEZ
Titulada SIMULACIÓN MINÉICA DEL DUEÑO DE
ESCAPE EN UN VÓRTICE TRIDIMENSIONAL Y DE LA
acordó otorgarle la calificación de SOBRESALIENTE

Huelva, 9 de OCTUBRE de 19 2006

El Vocal

El Vocal

El Vocal

El Presidente

El Secretario

El Doctorando

Martín

[Signature]

Urbano J. Sánchez D.

