

# Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía



## El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas : un estudio de casos

Memoria para optar al grado de doctor  
presentada por:

**Álvaro Aguilar González**

Fecha de lectura: 5 de febrero de 2016

Bajo la dirección de los doctores:

José Carrillo Yáñez

María de la Cinta Muñoz Catalán

**Huelva, 2016**



Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y  
Filosofía



Universidad  
de Huelva

El conocimiento especializado de una maestra  
sobre la clasificación de las figuras planas. Un  
estudio de caso.

Tesis Doctoral

Álvaro Aguilar González

Dirigida por

José Carrillo Yáñez

María de la Cinta Muñoz Catalán

Huelva 2015

Este trabajo de tesis se ha desarrollado en el Centro de Investigación en Didácticas Específicas y Formación en el Aula (CIDIESIA), en colaboración con el Grupo de Investigación “Formación inicial y desarrollo profesional del Profesorado (DESYM)” con código HUM-168 del Plan Andaluz de Investigación.

La realización y mejoramiento constante de este trabajo ha tenido como marco los proyectos de investigación “Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento” (EDU2009-09789EDUC), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España (2012-2013) y “Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas” (EDU2013-44047P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. (2014-2017).

## *Agradecimientos*

Este trabajo ha sido posible gracias al esfuerzo desarrollado por los miembros del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva. Este grupo me ha enseñado lo que es trabajar de forma colaborativa. A todos los miembros que lo integran y con los que he compartido discusiones, reflexiones o charlas, gracias.

A todas las personas que desarrollaron y participaron en el Proyecto de Investigación Educativa “Aprender a ser competentes. Progresión del aprendizaje de contenidos matemáticos desde la Educación Infantil hasta la E.S.O.” y en el Proyecto de Innovación Docente: “Nuestra mejora profesional a través de la reflexión sobre el conocimiento necesario para una formación matemática continua de Infantil a Primaria”. Con vuestras experiencias, y comentarios siempre he podido aprender.

Al Dr. José (Pepe) Carrillo, director de esta tesis doctoral. Mi más sincero agradecimiento por todo el tiempo que me has dedicado desde que te llamé aquel día por junio de 2009 para “descartar” el Máster por estar ubicado en Huelva y descolgar ese teléfono, los momentos que hemos compartido en estos años, y todos los consejos que me has brindado. Mira cómo hemos acabado.

A la Dra. Cinta Muñoz, codirectora. Sin tu ayuda tampoco habría sido posible este trabajo. Gracias por abrirme tu casa, animarme en los momentos más duros y profundizar en cada aspecto desarrollado. Tu interés y dedicación son una muestra de profesionalidad, sin duda, puedo afirmar que esto no habría sido lo mismo sin ti.

A la Dra. Nuria Climent, siempre dispuesta a ayudar a los demás. Gracias a tu trabajo ha sido posible realizar éste. Nunca olvidaré tu ofrecimiento y cómo has compartido todo lo que tenías en tus manos de manera altruista.

A las revisoras externas, Dra. Rute Monteiro y Dra. Pilar Azcárate, así como al Dr. Luis Carlos Conteras. Gracias por vuestros comentarios y apreciaciones, especialmente porque ha sido un trabajo a contrarreloj.

A mis amigos y personas que siempre se interesaron por mí, Kike, Miguel Ángel, José Luis, Eric, Dina, Diana, Nielka, Miguel Ribeiro, Tere, Mayka, Hortensia, María Elena, Javi, y todos los que me puedo olvidar. Gracias, siempre tuvieseis unas palabras que compartir conmigo.

Hay tantas personas que se han interesado en mi a lo largo de tantos años que podría no acabar. A todos os agradezco vuestro esfuerzo en interesaros por cómo se estaba desarrollando este trabajo.

*A Encarni por ser mi apoyo, mi amiga, y mi compañera durante esta travesía llamada vida. Este trabajo está dedicado principalmente a ti, porque no hubiera sido posible sin tu ayuda. Eres la mejor persona con la que hubiera podido emprender y finalizarlo. Gracias por todo.*

*A mi familia, mi madre, mi padre, y mi hermano. Siempre me habéis ayudado durante estos 28 años. Gracias por estar junto a mí y saber la importancia que es tener personas como vosotros a mi lado.*

# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	1
<b>CAPÍTULO I: MARCO TEÓRICO</b> .....	7
I. Introducción .....	9
I.1 Conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de las matemáticas.....	9
I.1.1 Investigaciones anteriores en conocimiento de los profesores de matemáticas .	12
I.1.1.1 Investigaciones sobre SMK .....	12
I.1.1.2 Investigaciones sobre PCK .....	15
I.1.2 Modelos de Investigación sobre el conocimiento profesional .....	18
I.1.3 Mathematics Teachers’ Specialized Knowledge (MTSK) .....	23
I.1.3.1 Dominio del Conocimiento Matemático.....	25
- Conocimiento de los temas matemáticos (KoT) .....	25
- Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM) .....	28
- Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) .....	30
I.1.3.2 Dominio de Conocimiento didáctico del contenido (PCK) .....	31
- Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) .....	31
- Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) .....	33
- Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) .....	37
I.2 Concepciones del maestro de Primaria sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de la matemática.....	39
I.3 Geometría: La clasificación de figuras planas .....	42
I.4 Síntesis .....	47

<b>CAPÍTULO II: DISEÑO METODOLÓGICO</b> .....	51
II. Introducción.....	53
II.1 Objetivos y problemas de investigación.....	53
II.2 Aspectos metodológicos sobre investigaciones en MK y PCK.....	55
II.3 Caracterización de la investigación.....	58
II.4 Diseño del estudio: Estudio de caso.....	60
II. 4.1 Nuestro caso, la maestra Inés <i>¿Por qué volver al caso de Inés?</i> .....	61
II.5 Instrumento de recogida de información: La observación de aula.....	63
II.6. Técnicas e instrumentos de análisis de la información.....	64
II.6.1. Instrumentos de análisis.....	64
II.6.1.1 Instrumento de análisis de las manifestaciones de las concepciones del maestro de Primaria respecto de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática..	64
II.6.2 Análisis de la información.....	71
II.6.2.1 La transcripción de las grabaciones.....	71
II.6.2.2 Estructuración de las sesiones.....	71
II. 6.2.3 Elaboración de informes por sesión.....	74
II. 6.2.4 Informe conjunto.....	78
<b>CAPÍTULO III: ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN</b> .....	83
INFORME DEL ANÁLISIS V1.....	85
Relaciones MTSK – V1.....	92
INFORME DEL ANÁLISIS V2.....	97
Relaciones MTSK – V2.....	103

INFORME DEL ANÁLISIS V3 .....	107
Relaciones MTSK – V3 .....	118
INFORME DEL ANÁLISIS V4 .....	123
Relaciones MTSK – V4 .....	127
INFORME DEL ANÁLISIS V5 .....	129
Relaciones MTSK – V5 .....	134
INFORME DEL ANÁLISIS V6 .....	137
Relaciones MTSK – V6 .....	144
INFORME DEL ANÁLISIS V7 .....	147
Relaciones MTSK – V7 .....	159
INFORME DEL ANÁLISIS V8 .....	163
Relaciones MTSK – V8 .....	167
<b>CAPÍTULO IV: DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES</b> .....	<b>173</b>
IV. Introducción .....	175
IV.1 Conclusiones relativas a los resultados de la investigación .....	175
IV.1.1 Las concepciones como ayuda para encontrar relaciones MTSK .....	175
IV.1.1.1 Concepción de la Matemática Escolar .....	176
IV.1.1.2 Concepciones sobre Metodología en el aula de matemáticas. ....	178
IV.1.1.3 Concepción del aprendizaje .....	180
IV.1.1.4 Papel del alumno .....	182

IV.1.1.5 Papel de la maestra.....	184
IV.1.2 Sobre el conocimiento especializado de la maestra.....	186
IV.1.2.1 Dominio de conocimiento matemático .....	186
IV.1.2.1.1 Sobre el Conocimiento de los Temas (KoT).....	186
IV.1.2.1.2 Sobre el Conocimiento de la estructura matemática (KSM).....	188
IV.1.2.1.3 Sobre el Conocimiento de la práctica matemática (KPM).....	188
IV.1.2.2 Dominio de conocimiento didáctico del contenido.....	189
IV.1.2.2.1 Sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	189
IV.1.2.2.2 Sobre el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) .....	189
IV.1.2.2.3 Sobre el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).....	191
IV.2 Conclusiones en relación con los objetivos planteados en el estudio .....	191
IV.3 Limitaciones del estudio y futuras líneas de investigación .....	194
<b>REFERENCIAS</b> .....	197
<b>ANEXOS</b> .....	210

# INTRODUCCIÓN

## Motivación, objeto de estudio y enfoque del trabajo

Este trabajo parte de la necesidad profesional y personal de seguir creciendo y desarrollándome en mi labor como investigador y docente una vez concluida mi formación inicial como maestro. El interés que me suscita intentar comprender los conocimientos que manifiestan los maestros ha sido una clave desde mi comienzo como investigador, y está principalmente originado por la vivencia que había tenido con la realidad educativa mientras realizaba mis prácticas de maestro en educación primaria.

El grupo de investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva y el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM), han sido un pilar fundamental para la realización de esta tesis doctoral, que se suma a las ya presentadas (Rojas, 2014; Moriel Junior, 2014; Montes, 2015; Flores-Medrano, 2015; Escudero-Ávila, 2015) y a otras que están en construcción, continuando así la línea de investigación en la que desarrollan su actividad.

Según la propuesta de Shulman (1986) sobre el conocimiento profesional, comprender la enseñanza presupone una comprensión del pensamiento y acción del profesor, siendo esta comprensión plena cuando se estudien estos dos dominios en conjunto y cada uno de ellos se examine en relación con el otro. Es a partir del modelo de este autor, cuando los grupos de investigación en Educación Matemática comienzan a trabajar en esta temática.

En nuestro interés por conocer qué conocimientos manifiestan los maestros, surgió la siguiente pregunta: ¿Qué conocimiento profesional moviliza un profesor en la clase respecto de la enseñanza de las matemáticas?

Con esa pregunta se inicia esta investigación, para ello comenzamos revisando diferentes estudios sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Entre ellos, destacamos el de Climent (2005) desarrollado dentro del Proyecto de Investigación Colaborativa de la Universidad de Huelva, donde se había analizado el desarrollo profesional de una maestra en el contexto de la enseñanza de las figuras planas, obteniendo unos resultados en los que la maestra había presentado un desarrollo sobre diferentes aspectos analizados, entre ellos su conocimiento profesional y sus

concepciones. La positiva valoración de este caso como buena informante hizo que decidiéramos profundizar en él.

La pregunta que nos habíamos planteado inicialmente se modificó a la siguiente: ¿Qué conocimiento especializado para la enseñanza evidencia una maestra de primaria, en el contexto de la clasificación de figuras planas? ¿Qué papel juegan las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en dichos conocimientos?, formulándose así nuestra principal pregunta de investigación. A partir de ella, nuestro objetivo principal ha sido identificar y comprender el conocimiento matemático especializado para la enseñanza de una maestra de primaria respecto de la enseñanza de polígonos.

Nuestro enfoque como investigadores ha sido interpretar qué es lo que ocurría en el aula de matemáticas, puesto que estamos preocupados en comprender la realidad que nos rodea. Esta interpretación será a partir de lo que consideramos que se pone de manifiesto en las actuaciones de la maestra en su aula.

El trabajo se encuentra estructurado en cinco capítulos, los cuales pretenden mostrar el proceso de investigación que se ha desarrollado.

Se inicia con una Introducción, donde se presenta la temática y estructura del trabajo.

En el primer capítulo – I. Marco Teórico – se incluye las fundamentaciones teóricas para el desarrollo de la investigación. Está dividido en tres bloques, el primero se refiere a los fundamentos teóricos relativos al Conocimiento profesional, concretando en el del profesor para la enseñanza de las matemáticas, donde encuadramos este trabajo, y las bases teóricas que hemos tomado. Dentro de ese bloque, un primer apartado Investigaciones anteriores en conocimiento de los profesores de matemáticas; un segundo sobre Modelos de Investigación sobre el conocimiento profesional y el último apartado sobre el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) creado por el grupo SIDM. El segundo bloque lo integran las concepciones del maestro de Primaria sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de la matemática, y por último, un bloque de Geometría donde se fundamentan los diferentes aspectos geométricos sobre los que versa la temática de esta investigación.

En el segundo capítulo – II. Diseño Metodológico – presentamos los fundamentos metodológicos de la investigación. Este capítulo está dividido en seis partes, en la

primera se plantean los problemas y objetivos de la investigación. La segunda, aspectos metodológicos sobre investigaciones en conocimiento profesional. La tercera, la caracterización de la investigación, en cuarto lugar el diseño del estudio (un estudio de caso), en quinto lugar el instrumento de recogida de información, y por último las técnicas e instrumentos de análisis de datos.

En el tercer capítulo – III. Análisis de los datos – se presentan los informes del análisis de las aulas que han sido videograbadas. En total ocho sesiones. En este informe serán analizados los conocimientos especializados y las concepciones de la maestra de Primaria sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de la matemática.

En el cuarto capítulo – IV. Discusión de resultados y conclusiones – se refiere a la discusión resultante del análisis del capítulo anterior y en general del contexto en el que ha estado inmersa esta investigación. Así como las conclusiones donde se incluyen las limitaciones y reflexión sobre la posible prospectiva que ha suscitado este trabajo.

**CAPÍTULO I:**  
**MARCO TEÓRICO**

## CAPÍTULO I: MARCO TEÓRICO

I. Introducción .....	9
I.1 Conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de las matemáticas.....	9
I.1.1 Investigaciones anteriores en conocimiento de los profesores de matemáticas .	12
I.1.1.1 Investigaciones sobre SMK .....	12
I.1.1.2 Investigaciones sobre PCK .....	15
I.1.2 Modelos de Investigación sobre el conocimiento profesional .....	18
I.1.3 Mathematics Teachers’ Specialized Knowledge (MTSK) .....	23
I.1.3.1 Dominio del Conocimiento Matemático.....	25
- Conocimiento de los temas matemáticos (KoT): .....	25
- Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM) .....	28
- Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) .....	30
I.1.3.2 Dominio de Conocimiento didáctico del contenido (PCK) .....	31
- Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) .....	31
- Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) .....	33
- Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)	
37	
I.2 Concepciones del maestro de Primaria sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de la matemática.....	39
I.3 Geometría: La clasificación de figuras planas .....	42
I.4 Síntesis .....	47

## **I. Introducción**

En este capítulo revisamos las investigaciones relacionadas con este estudio que conforman aspectos principales: (I.1) Conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de las matemáticas, (I.2) Concepciones del maestro de Primaria sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de la matemática. Estos aspectos no los consideramos separados debido a que las concepciones y los conocimientos están íntimamente conectados (e.g., Thompson, 1984, 1992). (I.3) Geometría: La clasificación de figuras planas.

### **I.1 Conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de las matemáticas**

En la literatura de investigación han ido apareciendo distintas propuestas de caracterización de la naturaleza del conocimiento profesional (cómo es el conocimiento profesional), su origen, sus fuentes y sus componentes (responden a en qué consiste, cómo se genera y sobre la base de qué), y sus vías de desarrollo (cómo se genera, sobre la base de qué y ligado a qué estrategias formativas). (Porlán y Rivero, 1998).

Siguiendo a Ball, Lubienski y Mewborn (2001), los profesores y sus conocimientos han sido un foco importante de investigaciones desde la publicación de la tercera edición del *Handbook of Research on Teaching* (Wittrock, 1986). En este Handbook, Shulman (1986) argumenta que hay “una falta de programa” en la investigación educativa sobre el estudio de la “comprensión cognitiva de los profesores sobre el conocimiento del contenido y las relaciones entre esa comprensión y la instrucción que los profesores ofrecen a sus alumnos” (1986, p.25) e indica que el conocimiento del profesor es uno de los hechos más importantes que influencia en una clase.

Basándonos en Climent (2005) en donde se señalan las principales características que se atribuyen al conocimiento profesional, nos posicionamos entendiendo el conocimiento profesional con la misma naturaleza:

Podemos afirmar que el conocimiento está *situado y contextualizado*, ya que éste se genera en contextos profesionales exclusivos y cada contexto es único e irrepetible, además, este contexto se da en un entorno *social*, en el que el profesor va desarrollando

experiencia en esta interacción social, permitiéndole comprender las situaciones a las que se enfrenta, y obteniendo diferentes herramientas que le permiten elegir alternativas ante las situaciones a las que se pueda enfrentar, es decir, es *práctico* puesto que es un conocimiento para la práctica y que se nutre de la misma, por ello, el conocimiento profesional, es *personal*, porque es propio del individuo y diferente del de otro profesor; depende de sus concepciones, valores y actitudes (Blanco, Mellado y Ruiz, 1995), y es característico de cada individuo. Este conocimiento se desarrolla sobre todo con la experiencia (*parcialmente tácito*) y este desarrollo es cambiante a lo largo de la actividad docente puesto que el conocimiento profesional es *dinámico, integrado y complejo*, crece a través de las interacciones con los alumnos, las experiencias profesionales, constituyendo un sistema en el que los elementos son difíciles de aislar.

En la misma línea en la que se refieren Estepa (2000), Climent (2005), Muñoz-Catalán (2009) y Ribeiro (2010), entendemos por conocimiento profesional el conjunto de los saberes y experiencias que posee y utiliza un profesor en el desarrollo de su labor docente, que va adquiriendo y construyendo a lo largo de toda su carrera profesional como muestra de una perspectiva de aprendizaje permanente, y por lo tanto un proceso de apropiación de conocimientos y experiencias personales, y, necesariamente, la interpretación de estos.

En este trabajo, a pesar de que vamos a estudiar el conocimiento profesional del profesor, debemos de limitarnos a algunas de las características expuestas anteriormente, debido a que las partes que constituyen el conocimiento profesional hacen inviable un estudio al completo de éste. Las dimensiones tomadas para este estudio son el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (apartado I.1.3.) y las concepciones (apartado I.2).

Para estudiar las dimensiones del conocimiento profesional vamos a tomar como referencias los estudios iniciados por Shulman (1986) acerca de los componentes del conocimiento profesional. Este autor ha sido una fuente de inspiración para los estudios actuales que se están llevando a cabo en esta línea de investigación.

Shulman (1986, 1987) propone siete componentes del conocimiento profesional. Conocimiento del contenido, conocimiento didáctico del contenido, conocimiento de los alumnos y sus características, conocimiento de los contextos educativos, conocimiento de las necesidades educativas, conocimiento curricular y conocimiento didáctico

general. De estos componentes el autor (Shulman, 1986) considera que hay tres componentes fundamentales, que apoyan a la especialidad de cada materia que se enseñe. Estas son las siguientes:

- Conocimiento del contenido (SMK<sup>12</sup>): Se refiere a la cantidad y organización del conocimiento que existe en la mente del profesor. Incluye el conocimiento de hechos y conceptos de un dominio, así como la comprensión de las estructuras de la materia, es decir, lo que el autor denomina las estructuras sustantivas y sintácticas de la materia. (Shulman y Grossman, 1988).

En la perspectiva de Shulman (1986) el test definitivo para confirmar la comprensión de un tema es la capacidad para enseñarlo, transformando el conocimiento en enseñanza. De este modo, es esencial analizar el conocimiento didáctico del profesor.

- Conocimiento didáctico del contenido (PCK<sup>3</sup>): “Incluye las formas más útiles de representar los contenidos, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, y demostraciones más poderosas –en una palabra, las formas de representar y formular la materia que la haga comprensible a los demás” (Shulman, 1986, p.9). Se incluye en esta categoría el conocimiento de cómo los aprendices interpretan las matemáticas y cómo piensan en relación con dominios matemáticos concretos.

De acuerdo con el autor este conocimiento (PCK) está más enfocado para la acción y se traduce en una comprensión profunda del tema que se enseña, y en la capacidad de transformarlo y presentarlo para que los alumnos puedan comprenderlo. Es la forma en que los profesores tienen que tener y usar las matemáticas para enseñar las matemáticas.

- El profesor deberá poseer un conocimiento didáctico general, al nivel de la gestión del aula, la planificación de los temas, estrategias de enseñanza, así como un conocimiento de sus alumnos. En nuestro estudio, no tomaremos en consideración el conocimiento didáctico general debido a las características propias de éste.

Un avance respecto a esta visión es la de Ball y Bass (2000), en donde sustentan que es la manera de conocer y utilizar las matemáticas lo que difiere de la forma en que los matemáticos tienen y usan las matemáticas. En la enseñanza de las matemáticas, Ball y

---

<sup>1</sup> En adelante las abreviaturas serán del idioma anglosajón.

<sup>2</sup> Subject Matter Knowledge (SMK)

<sup>3</sup> Pedagogical Content Knowledge (PCK)

Bass (2000, 2003) exploran el PCK de los profesores con su propuesta de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT<sup>4</sup>).

De este modo, podemos afirmar que el conocimiento del profesor es "un gran sistema integrado, que funciona con cada parte difícil de aislar" (Fennema y Franke, 1992, p.152) e incluye, además de otros componentes, a los que se mencionaron anteriormente.

Por todo lo anterior, y porque para hacer el análisis de en qué términos podemos comprender el conocimiento profesional del profesor, debemos de posicionarnos comprendiendo la naturaleza del conocimiento profesional según Climent (2005), sirviéndonos ésta de apoyo para caracterizar las dos componentes del conocimiento profesional que vamos a estudiar (MK y PCK).

### **I.1.1 Investigaciones anteriores en conocimiento de los profesores de matemáticas**

Este apartado se ha desglosado en dos: Investigaciones sobre SMK y PCK, esto es debido a que gran parte de la literatura de investigación que ha sido consultada, se fijaba en uno de los dos dominios de conocimiento que estableció Shulman (1986), aunque en varios de estos estudios se preocupen por estudiar ambos dominios, la información facilitada está centrada en alguno de esos dominios, por lo que se ha decidido hacer una distinción entre ambos dominios de conocimiento.

#### **I.1.1.1 Investigaciones sobre SMK**

El rol del maestro de Primaria es ayudar a sus estudiantes a lograr una comprensión del conocimiento del contenido que se les está facilitando. En relación con este conocimiento, el maestro necesita tener un sólido conocimiento sobre el conocimiento del contenido que imparte. "Un maestro que tiene conocimiento matemático sólido para la enseñanza es más capaz de ayudar a sus estudiantes a lograr una comprensión significativa de la materia" (Even, 1990, p.521). La comprensión y el conocimiento de los profesores de matemáticas han sido un foco de atención por parte de los investigadores, siendo varias las terminologías que han sido acuñadas para describir el conocimiento del contenido (SMK).

---

<sup>4</sup> Mattheamtical Knowledge for Teaching (MKT)

SMK es uno de los conocimientos para los que mejor están preparados los maestros. Pero, ¿"Qué es un conocimiento sólido matemático"? Inicialmente se consideraba que el SMK del profesor se define por el número de asignaturas cursadas en la universidad o las puntuaciones en los exámenes estandarizados (e.g., Wilson, Shulman y Richert, 1987).

Algunos autores como Leinhard y Smith (1985) describen el SMK en detalle e incluye "comprensión conceptual, las operaciones algorítmicas específicas, la conexión entre los diferentes procedimientos algorítmicos, el subconjunto del sistema de numeración, la comprensión de las clases de errores de los estudiantes y presentación de curriculum" (p.248). Shulman (1986) realiza una distinción entre el SMK y el PCK, alejándose de la definición por el número de asignaturas cursadas o las puntuaciones de los exámenes, pero analiza lo que es saber matemáticas.

Pero, ¿Qué significa saber matemáticas? Siguiendo a Shulman (1986) el profesor no debe solo saber *que* algo es así, sino que debe entender *por qué* es así, por qué motivos se puede afirmar, y en qué circunstancias nuestra creencia como justificación puede debilitarse e incluso ser negada. Por otra parte, esperamos que el maestro entienda por qué un determinado tema es particularmente esencial para una disciplina, mientras que otra puede ser algo periférico (Shulman, 1986, p.9). Este autor distingue dos tipos de comprensión de la materia que el profesor necesita tener – saber "*qué*" y saber "*por qué*". Necesitan no sólo definir el hecho matemático o facilitar una afirmación a sus estudiantes, sino también debe ser capaz de explicar "por qué se considera que una determinada proposición está justificada, por qué vale la pena conocer, y cómo se relaciona con otras propuestas, tanto dentro de la disciplina como por fuera, tanto en la teoría como en la práctica" (p.9). Por lo tanto, según Shulman, pensar en conocimiento del contenido correcto debe ir más allá del conocimiento de los hechos o conceptos de un dominio, también requiere la comprensión de la estructura de la materia, que Schwab (1978) definió hace décadas, además, Shulman (1987) replantea la definición del conocimiento de la materia para incluir la comprensión de la "naturaleza, la forma, la organización y el contenido de conocimiento de los maestros" (Grossman, 1989, pp.25-26). Por lo tanto, el SMK incluye los hechos claves, conceptos, principios, y marcos explicativos de la disciplina, así como las reglas y evidencias utilizadas para guiar las investigaciones.

Basado en la definición previa, Ball (1988, 1991) identifica la comprensión del profesor de matemáticas como ideas *de (of)* y *sobre (about)* matemáticas (1990b, 1991). Ball (1990b) asocia al conocimiento *de* matemáticas la comprensión del conocimiento de los hechos, conceptos y procedimientos matemáticos, las relaciones entre éstos y los significados y principios subyacentes, y el segundo al conjunto de reglas, de “normas de sintaxis” de las matemáticas, de su naturaleza y cómo evoluciona y se genera. “Comprender de dónde viene el conocimiento y cómo se justifica, qué es *saber* hacer matemáticas, qué conexiones hay entre las matemáticas y otros dominios” (p.21). Además, el análisis de los conocimientos de los maestros *sobre* matemáticas incluye el conocimiento acerca de la naturaleza de las matemáticas (Even, 1990). Este es un conocimiento más general sobre una disciplina, la cual orienta el uso del conocimiento conceptual y procedimental. Ball (1988) indica que cada profesor debe tener conocimiento de las matemáticas, que se caracteriza por una comprensión conceptual explícita de los principios y significados, procedimientos matemáticos subyacentes y conectividad de matemáticas, reglas y definiciones. También encuentra que los futuros profesores no piensan sobre las matemáticas desde una perspectiva disciplinaria, sino como un conjunto de normas y procedimientos donde piensan que “*hacer matemáticas*” significa hacer los procedimientos y usar las herramientas estándar para llegar al resultado correcto. Realizan los algoritmos sin comprender qué hay detrás de ellos. Por otra parte, para el conocimiento substantivo, indica que los futuros profesores tienen dificultades para explicar por qué un procedimiento funciona, y los enlaces que se establecen entre las matemáticas y otros dominios.

En los estudios desarrollados por Fennema y Franke (1992) también utilizan el modelo de Shulman como base para discutir cinco componentes de los docentes: el conocimiento del contenido de las matemáticas, el conocimiento de la pedagogía, el conocimiento de los alumnos, el conocimiento específico de contexto y creencias de los profesores. El contenido de las matemáticas incluye conocimiento de los profesores de los conceptos, los procedimientos y los procesos de resolución de problemas en el dominio en el que se enseñan. Aunque su visión tiene un carácter interactivo y dinámico del conocimiento para la enseñanza, hace que intenten buscar las interacciones entre todas las componentes anteriormente citadas.

Ma (1999) proporciona, además, la idea de la Comprensión Profunda de Matemáticas Fundamentales (PUFM<sup>5</sup>) que tiene como características: 1) profundidad 2) amplitud, y 3) rigurosidad. Según Ma, los profesores chinos presentaron su propio "paquete de conocimiento" a través de hacer explícitas las conexiones entre dos o más temas de matemáticas para facilitar el aprendizaje. Finalmente establece cuatro propiedades sobre PUFM: conectividad, perspectivas múltiples, ideas básicas y coherencia longitudinal que facilitan.

Según Kilpatrick, Swafford y Findell (2001), los profesores deben tener no sólo conocimiento de los conceptos matemáticos y procedimientos, de su relación, de la representación y las matemáticas como una disciplina, sino también una "consideración de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas" (p. 371).

Además, Ball, Hill y Bass (2005) conceptualizan "Conocimiento Matemático para la Enseñanza" (MKT) basado en cuatro modelos de enseñanza comunes (es decir, la enseñanza de un tema, la respuesta a un error de un estudiante, la generación de una representación de un tema determinado, y responder a una idea ingenua planteada por los estudiantes). Se puede establecer que la enseñanza de las matemáticas de alta calidad requiere que los maestros tengan suficiente conocimiento de las matemáticas que se ha ido mencionando anteriormente.

### **I.1.1.2 Investigaciones sobre PCK**

De acuerdo con Shulman (1986) el conocimiento didáctico del contenido (PCK) es el conocimiento de los contenidos que más afín está a su educabilidad. En esta caracterización incluye "los temas más enseñados regularmente en la propia materia, las formas más útiles de representación de las ideas, las analogías más poderosas, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones, en una palabra, las formas de representar y formular el tema que lo hacen comprensible a los demás" (p. 9). El PCK incluye: 1) "cómo se utiliza la forma de la representación para que la materia sea comprensible para los demás"; 2) "la comprensión que hace a los temas específicos de aprendizaje fácil o difícil"; Además, los profesores deben tener 3) "la comprensión de la idea errónea que los estudiantes pueden tener y cómo ayudar a éstos para superarla." (p.9). Esto significa que los profesores tienen que conocer temas específicos y

---

<sup>5</sup> Profound Understanding of Fundamental Mathematics (PUFM).

cuestiones para que sean apropiadas a la variedad e intereses de sus alumnos (Borko, Eisenhart, Brown, Underhill, Jones, y Agard, 1992).

Aunque el PCK comúnmente se cree ser una transformación de al menos dos áreas de conocimiento que lo constituyen: el conocimiento pedagógico general y el conocimiento de la materia, la interpretación de PCK tiene ambigüedades (Marks, 1990). Desde las ambigüedades, muchos investigadores desarrollaron su estudio del PCK, centrándose en diferentes aspectos. Este autor indicó las ambigüedades del PCK en tres razones. En primer lugar, PCK contiene elementos del SMK y del conocimiento pedagógico general. En segundo lugar, los docentes en sus diseños se anticipan al error del estudiante, por lo que intentan evitar que los cometan y, además, los profesores son conscientes de identificar los conceptos más problemáticos. Por último plantea la cuestión de si existe una diferencia de PCK sobre las matemáticas a enseñar (o aprender) a aplicar a otros contenidos además de las matemáticas. En Marks (1990) se plantea que un profesor sin un conocimiento matemático rico parece difícil desarrollar conocimiento didáctico de contenido específico en matemáticas.

Otros autores se han centrado en el error y representación dentro del conocimiento del estudiante, por ejemplo Ma (1999) que indica que los maestros chinos utilizan la representación múltiple y enfoques computacionales alternativos para encontrar sentido al algoritmo de la multiplicación y su inverso. El estudio de Ma ofrece un aspecto importante de los conocimientos matemáticos de los profesores para la enseñanza. "La noción de paquetes de conocimiento de Ma representa una forma y una estructura para el conocimiento del contenido pedagógico "(Ball, et al., 2001, p.449).

En el modelo de conocimiento de Fennema y Franke (1992) el conocimiento pedagógico es el conocimiento de los procedimientos de enseñanza, donde está incluida la planificación, organización, gestión y motivación de los maestros. Las cogniciones de los estudiantes incluyen el conocimiento de cómo los estudiantes piensan y aprenden.

Kilpatrick et al. (2001) argumenta que los profesores deben tener conocimiento de la práctica docente, que "incluye el conocimiento del plan de estudios, el conocimiento de las tareas y herramientas importantes para la enseñanza idea matemática, el conocimiento de cómo diseñar y gestionar el discurso en el aula, y el conocimiento de las normas de clase que apoya el desarrollo de la competencia matemática" (Kilpatrick et al., 2001, p.372). Esto requiere que los maestros no sólo tengan un profundo

conocimiento de las matemáticas como una disciplina, sino que también tienen una comprensión del desarrollo cognitivo de los estudiantes con el fin de diseñar y planificar la enseñanza en el aula.

El análisis de los diferentes trabajos publicados en educación matemática, por parte de Pinto y González (2006), donde se ha utilizado el PCK como teoría para explorar el conocimiento del profesor ha permitido caracterizar diferentes cuestiones de tipo conceptual y metodológico como: “los principales tópicos estudiados, los sujetos participantes, los diseños de investigación y los instrumentos de recogida de datos.” (p. 93). Para ello, Pinto y González (2006) consultaron cerca de 20 investigaciones, desde la aparición del PCK hasta la actualidad<sup>6</sup>. Aunque cada investigación es de diferente naturaleza, contexto, propósito, metodología de investigación y son únicas, estos autores han podido concretar unos resultados comunes a estas investigaciones. Cabe resaltar de entre todos ellos que los resultados dan cuenta de lo complejo que es investigar el Conocimiento Didáctico del Contenido. Esto último ha representado un desafío para los investigadores, ya que la cognición del profesor, como lo es el Conocimiento Didáctico del Contenido, no puede ser observada directamente, pues por definición, el Conocimiento Didáctico del Contenido es particularmente un “constructo interno” (Baxter y Lederman, 1999, p.94).

En resumen, debido a la cantidad de investigaciones acerca de la definición sobre PCK y SMK, actualmente los investigadores definen y exploran la idea de PCK para la comprensión y el desarrollo de la instrucción de maestros de diferentes maneras. Para Shulman (1987), SMK se convierte o transforma al PCK, que es una forma adecuada para la enseñanza. De acuerdo con Kinach (2002), la interfaz obvia entre SMK y PCK es central al proceso de transformación. Actualmente las ideas desarrolladas por el grupo de Ball et al. (2001) exploran el estudio de Shulman y desarrollan la idea de MKT para identificar el conocimiento del profesor; además existen otros desarrollos, que se detallan en el siguiente apartado.

---

<sup>6</sup> Carpenter, Fennema, Peterson y Carey (1988), Wallece (1990), Marks (1990a y 1990b), Even (1990), Hutchison (1992), Even (1993), Llinares, Sánchez y García (1994), Even y Tirosh (1995), Baturo y Nason (1996), Swenson (1998), Fan (1998), Howald (1998), Baxter y Lederman (1999), Smith (2000), Wanko (2000), Llinares (2000), Durand (2003); Badillo (2003), Sánchez y Llinares (2003 y 2002), An, Kulm y Wu (2004), Chen (2004), Chinnappan y Lawson (2005), y Llinares y Krainer (2006).

### **I.1.2 Modelos de Investigación sobre el conocimiento profesional**

Es a partir del modelo creado por Shulman cuando muchos investigadores en Educación Matemática empezaron a trabajar en esta temática, teniendo como base su trabajo relativo al conocimiento profesional para los profesores. Estos seguidores han hecho adaptaciones para el dominio de la Enseñanza Matemática.

La literatura de investigación ha prestado gran interés al conocimiento que los profesores deben poseer para ejercer su labor docente, todavía poco se sabe acerca del contenido de dicho conocimiento que influye directamente en la enseñanza (Chinnappan y Lawson, 2005).

En el PME de 2009 celebrado en Tesalónica (Grecia), el primero de los cinco *Research Fora* tuvo como título: “Teacher knowledge and teaching: considering a complex relationship through three different perspectives” (Ball, Charalambous, Thames y Lewis, 2009). En este Forum se discutió acerca de la relación sobre tres diferentes perspectivas del conocimiento matemático para la enseñanza: Mathematics for teaching (Davis y Simmt, 2006)<sup>7</sup>, Knowledge Quartet (Rowland Huckstep y Thwaites, 2005)<sup>8</sup> y Mathematical Knowledge for Teaching (Ball, Thames y Phelps, 2008). Estas perspectivas de los diferentes autores tienen como base el trabajo de Shulman (1986), en tanto que suponen una adaptación del modelo de Shulman al dominio de la matemáticas, por eso pueden considerarse como una evolución del cuadro de Shulman.

---

<sup>7</sup> Davis y Simmt (2006) usan la noción de *matemáticas para la enseñanza* (Mft) desde un posicionamiento teórico que considera a los profesores como sistemas y su foco está en comprender cómo aprenden. Sitúan las matemáticas para la enseñanza como una rama específica dentro de la disciplina de las matemáticas y organizan las investigaciones en torno a ‘estudio de conceptos’, una estructura de aprendizaje colectiva a través de la cual los educadores matemáticos identifican, interpretan, interrogan, inventan y elaboran imágenes metáforas, analogías, ejemplos, ejercicios, gestos y aplicaciones a los que los profesores recurren (explícita e implícitamente) para apoyar la comprensión de los estudiantes

<sup>8</sup> El Knowledge Quartet (KQ) (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005) representa un marco teórico basado en la práctica, desarrollado de manera inductiva a partir del análisis de vídeos de estudiantes para maestro de primaria. Abarca cuatro categorías de conocimiento:

- foundations: incluye el conocimiento, las concepciones y las comprensiones adquiridas antes y durante la formación académica.
- transformations: se ocupa de aspectos del conocimiento en la acción como se pone de relieve durante la planificación y la enseñanza. Está íntimamente relacionado con el uso de representaciones adecuadas del contenido, de ejemplos y de demostraciones de procedimiento.
- connections: Se refiere al conocimiento que despliegan los profesores cuando establecen conexiones entre las distintas partes del contenido matemático. Incluye la secuenciación del material para la instrucción y la consideración de las demandas cognitivas que cada tópico y tarea requieren.
- contingency: Se manifiesta en aquellas situaciones en las que los profesores han de responder ante eventos inesperados que emergen durante la instrucción.

Carrillo (2010), en su artículo “Building Mathematical Knowledge in Teaching by means of Theorised Tools”, establece semejanzas y diferencias entre algunas perspectivas y evidencia que los referidos modelos teóricos constituyen herramientas útiles para los profesores que deseen reflexionar sobre su conocimiento profesional. Cada modelo ofrece una perspectiva diferente que nos permite aproximarnos al objeto de estudio (el conocimiento profesional). Así por ejemplo, el KQ ofrece una herramienta para el análisis más allá de “cuestiones de gestión, tanto a nivel primario y secundario, en los contextos de los profesores en formación y en ejercicio.” (p. 274), y pone en primer plano el conocimiento del contenido matemático en el estudio de la enseñanza de las matemáticas. Por otra parte, Ball et al., (2008), analizan la práctica de la enseñanza y así se facilita a los investigadores el obtener información sobre la naturaleza y las dimensiones del conocimiento matemático para la enseñanza. Es de especial interés centrarnos en este grupo ya que debido a las características de cómo entienden la naturaleza y las dimensiones del conocimiento matemático, se acercan a nuestro posicionamiento.

El grupo de investigación de Deborah Ball de la Universidad de Michigan, se preocupa por discutir algunas cuestiones, con el objetivo de conceptualizar el conocimiento matemático de los profesores y su papel en la enseñanza: (a) ¿Cuál es su naturaleza?, (b) ¿Cuáles son las partes que lo integran?, (c) ¿Qué conocimientos matemáticos precisan los profesores para enseñar?, (d) ¿Cómo se relacionan sus conocimientos matemáticos con su práctica?

Deborah L. Ball y sus colegas (Ball y Bass, 2003; Ball, Hill y Bass, 2005; Hill, Rowan y Ball, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008) con su modelo MKT pretenden profundizar en qué significa que un profesor comprenda el contenido matemático para la enseñanza. Este conocimiento, en conexión con su papel en la práctica, lo definen como: “el conocimiento matemático usado para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de las matemáticas. Ejemplo de este trabajo de enseñanza incluye explicar términos y conceptos a los estudiantes, interpretar sus afirmaciones y soluciones, juzgar y corregir el tratamiento que los libros de texto realizan sobre determinados tópicos, usar representaciones con exactitud en la clase, proporcionar a los estudiantes ejemplos de conceptos matemáticos, algoritmos y pruebas” (Hill, Rowan y Ball, 2005, p. 373).

Ball et al. (2008) se interesaron por el estudio del conocimiento profesional, fundamentalmente por qué conocimientos matemáticos serían necesarios para realizar la tarea de enseñar matemática, de este modo, se profundizó en el Conocimiento Matemático para la enseñanza (MKT). Ball et al. (2008) observaron que para realizar las tareas necesarias de la enseñanza de matemáticas eran exigidos conocimientos específicos, como por ejemplo, conocimientos matemáticos más allá de los conocimientos de los alumnos, y la enseñanza. Un profesor tenía que tener conocimientos en matemáticas diferentes pero no menos exigentes que los de otros profesionales. El profesor tiene que ser capaz de detectar un error, pero no solo detectarlo, sino saber cuál es el origen de ese error matemático, y ser capaz de reaccionar rápidamente, también debe explicar procedimientos, hacerlos visibles a sus estudiantes (Ball et al. 2008).

Subdividieron el conocimiento del contenido en conocimiento común del contenido y conocimiento especializado del contenido, y horizonte matemático por un lado, y por otro, conocimiento didáctico del contenido de Shulman fue dividido en conocimiento del contenido y de los alumnos, y conocimiento del contenido y de la enseñanza y conocimiento curricular.

Deborah L. Ball y sus colegas (Ball y Bass, 2003; Ball, Hill y Bass, 2005; Hill, Rowan y Ball, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008), partiendo del trabajo de Shulman, han propuesto un modelo multidimensional, cuyos dominios aparecen en la siguiente imagen:

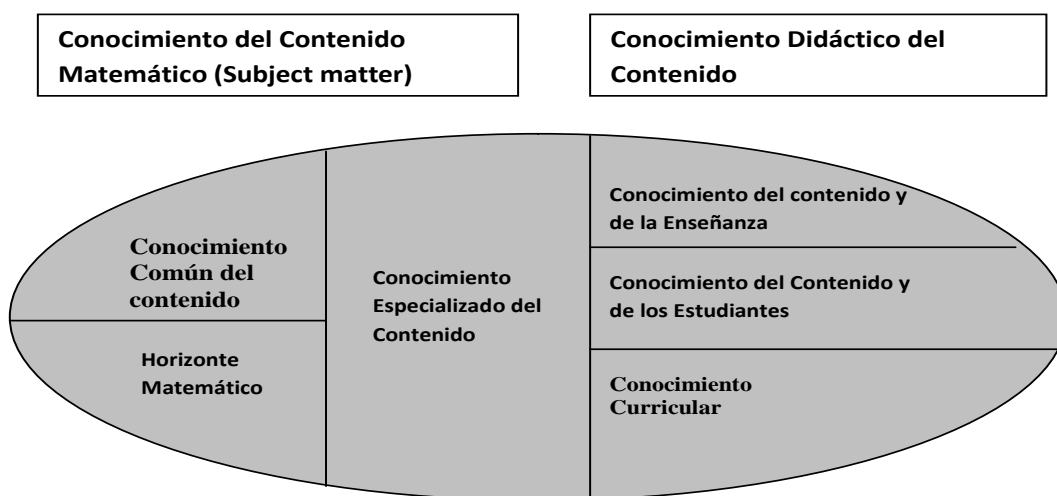


Imagen 1: Dominios de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball et al., 2008, p.403)

El Conocimiento Común del Contenido (CCK): Conocimiento matemático y habilidades necesarias para resolver las tareas que los estudiantes están realizando. Los profesores necesitan ser capaces de hacer las tareas que ellos están signando a sus alumnos. El conocimiento común del contenido es un conocimiento no necesariamente único de los profesores, por ejemplo en primaria, puede ser que parte del conocimiento matemático de los contenidos sea común entre los profesores y otros, como pueden ser los padres de familia.

Conocimiento Especializado del Contenido (SCK): Conocimiento constituido por el conocimiento matemático y las habilidades que son únicas de la profesión de los profesores, pues incluye la capacidad que tienen los profesores para saber varias formas de solucionar un problema pero también para distinguir, averiguar, valorar e interpretar la validez de diversas e inesperadas respuestas que pueden dar los alumnos cuando los profesores supervisan el trabajo de sus alumnos, en sí, es un conocimiento que permite a los profesores identificar patrones sobre errores que cometen los alumnos y poder saber si alguna de las soluciones que dan sus alumnos podrían funcionar en general o no.

En el SCK se destaca el hecho de que los profesores tienen que desarrollar una clase de conocimiento matemático que lo hace especial, pues los profesores requieren de un entendimiento y razonamiento matemático único de su profesión para realizar sus tareas escolares día a día. El propio trabajo de la enseñanza de las matemáticas crea la necesidad de un cuerpo de conocimiento matemático especializado para la enseñanza.

Para explicar este concepto, vamos a ver el siguiente ejemplo extraído de Aguilar (2011): durante una sesión de clase, surge la siguiente operación matemática:

$$\frac{12}{4} = 3$$

Los alumnos rápidamente conocen cuál es el resultado de esta operación (que es 3). El profesor también lo conoce (Conocimiento Común del Contenido), ya que para hacer esta operación no es necesario otro tipo de conocimiento. El profesor, plantea la siguiente operación:

$$12 = 4 \times 3$$

Los alumnos encuentran que existe una relación entre la multiplicación y la división, pero desconocen el proceso que conlleva el pasar el denominador al otro lugar de la

igualdad. El profesor sí conoce cuál es ese proceso, y aquí es donde sí existe un conocimiento especializado del contenido (SCK)

$$\frac{a}{b} = a \left(\frac{1}{b}\right)$$

Éste es un ejemplo de qué puede considerarse conocimiento especializado del contenido, pero pueden existir otros: puede analizar un error, preguntándose respecto de los pasos que fueron dados, qué suposiciones fueron hechas por los alumnos, etc.; conocer las etapas de resolución de un problema y su significado, saber explicar cómo se resuelve la operación de división.

Horizonte Matemático: Esta categoría incluye las habilidades que tienen los profesores para saber la importancia que tiene un determinado contenido matemático durante su trayectoria curricular.

Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (KCS): Conocimiento que incluye las habilidades que tienen los profesores para predecir lo que a los alumnos les parecerá fácil, difícil, interesante, aburrido, agobiante o motivador. Los profesores se hacen una imagen de lo que posiblemente harán los alumnos en las tareas que les asignen, en este tipo de conocimiento se considera también la capacidad que tienen los profesores para escuchar e interpretar el pensamiento que expresan los alumnos en su lenguaje usual.

El KCS es una amalgama entre el entendimiento del contenido y saber lo que los alumnos pueden pensar o hacer matemáticamente. El KCS también incluye las habilidades de los profesores para identificar y dar solución a las concepciones erróneas acerca de un contenido matemático particular.

Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (KCT): Conocimiento que incluye las habilidades que tienen los profesores para saber qué representaciones son más adecuadas para enseñar un contenido específico y usar diferentes métodos y procedimientos para enseñar ese contenido matemático. También se refiere a la capacidad que tiene el profesor para decidir con qué ejemplo empezar, cuáles usar para enfatizar cierta idea matemática, que aportaciones de los alumnos tomar en cuenta, cuáles ignorar y cuáles destacar para usarlas posteriormente, además de saber cuándo aclarar más una idea, cuándo hacer una nueva pregunta o encomendar una nueva tarea para fomentar más el pensamiento matemático de los alumnos. Utilizar determinados

recursos, como por ejemplo, el tangram para la enseñanza de figuras equivalentes, utilizar el material didáctico – regletas de Cuisinaire – para la comprensión del algoritmo de la división, la comparación de fracciones entre sí, etc.

Conocimiento Curricular: Conocimiento acerca de la dirección que debe tomar el aprendizaje de los alumnos y el tipo de contenidos que debe aprender. En este conocimiento se toma en cuenta lo siguiente:

- El currículo es presentado mediante programas diseñados para la enseñanza de contenidos en un nivel dado, junto con alguna variedad de materiales de instrucción disponibles en relación con los programas de estudio (por ejemplo libro(s) de texto).
- Se espera que el profesor se familiarice con los materiales curriculares de sus estudiantes de otras áreas que estén estudiando al mismo tiempo (especialmente en Secundaria, Bachillerato y Universidad).

### **I.1.3 Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK)**

Este modelo de conocimiento surge como un avance de los estudios planteados por Shulman (1986) y Ball et al., (2008) anteriormente descritos. Toma en cuenta el carácter especializado del conocimiento del profesor de manera integral a todos los subdominios que lo componen, siendo esta ampliación un avance respecto del MKT donde se consideraba que el profesor de matemáticas tiene un conocimiento propio especializado que le permite realizar su actividad diaria comprimiéndolo a un solo subdominio: Conocimiento Especializado del Contenido (SCK).

En Flores, Escudero y Carrillo (2013) se realiza un análisis de este subdominio y se llega a la conclusión de que resulta conflictivo considerar el subdominio como exclusivo del dominio matemático. En la literatura de investigación predominan dos ideas, respecto al SCK en relación con otros subdominios, no necesariamente excluyentes, para diferenciar a este subdominio. Por un lado, se habla de una forma de entender a las matemáticas (entendimiento común versus entendimiento especializado del contenido matemático) y, por otro lado, se habla de distintos usuarios del conocimiento (contenidos que es común conocer versus contenidos que conoce especialista). El modelo MTSK acaba con esta problemática planteada, ya que el

extender esa especialización a todos los subdominios hace que se eliminen los referentes externos planteados hasta el momento.

La especialización de MTSK debe permitir que se diferencie de conocimientos generales de pedagogía (conocimiento de la pedagogía y la psicología en general, que también forma parte del conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. El MTSK está especializado en materia de enseñanza de las matemáticas.

Este modelo mantiene la diferenciación propuesta por Shulman (1986) y seguida por Ball et al. (2008) en dos dimensiones del conocimiento: conocimiento matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido matemático (PCK). A continuación vamos a realizar la separación entre ellos para poder definirlos y caracterizar estos dominios.

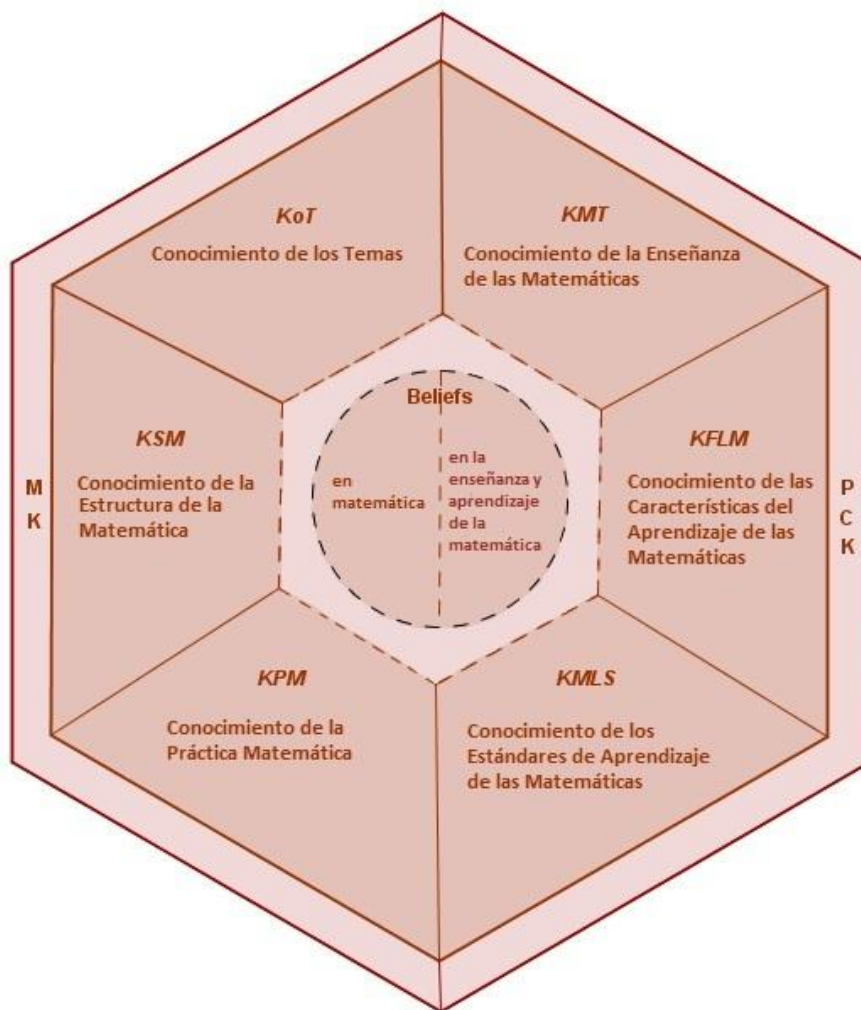


Imagen 2: Subdominios del MTSK (Carrillo et al, 2013).

### I.1.3.1 Dominio del Conocimiento Matemático

Desde la década de los 80, este dominio ha sido un foco de interés de investigación debido a que el conocimiento matemático juega un papel crucial en una sesión de clase. El maestro debe tener un buen conocimiento matemático sólido para ayudar a sus alumnos a comprender de manera significativa la materia que está impartiendo Even (1990).

Se consideran tres subdominios que componen y dan sentido al conocimiento matemático: el conocimiento profundo del contenido matemático en sí (el *conocimiento de los temas matemáticos KoT*<sup>9</sup>), de su estructura (*conocimiento de la estructura matemática KSM*<sup>11</sup>) y de cómo se procede y produce en matemáticas (*conocimiento de la práctica matemática KPM*<sup>12</sup>) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, (2013); Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán (2013); Flores, Escudero y Aguilar (2013); Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo (2014); Montes, Flores-Medrano, Carmona, Huitrado y Flores (2014)

- Conocimiento de los temas matemáticos (KoT)

Para poder explicar, identificar y conceptualizar este subdominio es necesario detallar cada aspecto que se incluye en él, de manera general es el conocimiento avanzado necesario para entender cualquier tema en particular. Incluimos conocimiento acerca de los diferentes significados de un tema podría tener, como es el caso con las fracciones (Llinares y Sánchez, 1997). También consideramos aquí los aspectos fenomenológicos relacionados con el conocimiento de un tema matemático (Freudenthal, 1983; Rico 1997), significados, definiciones, ejemplos..., que caractericen aspectos del tema abordado, además de referirse al contenido disciplinar que figura en manuales y textos matemáticos.

Supone conocer los contenidos matemáticos (conceptos, procedimientos, hechos, reglas, etc.) y sus significados de manera fundamentada. Integra el contenido que queremos que aprenda el alumno, con un nivel de profundización mayor, así como conocer su fundamentación. Dado que consideramos que dicho conocimiento debe ser transmitido a

---

<sup>9</sup> Se ha decidido respetar la las siglas anglófonas del modelo, tanto en sus acrónimos como en las imágenes del modelo.

<sup>10</sup> Knowledge of Topics

<sup>11</sup> Knowledge of the Structure of Mathematics

<sup>12</sup> Knowledge of the Practice of Mathematics

los estudiantes de manera que estos también puedan encontrar sentido a la matemática que construyen y desarrollan (Flores, Escudero y Carrillo, 2013; Carrillo, Climent et al., 2013), el profesor deberá reconocer características específicas del contenido desde un punto de vista puramente matemático, por ejemplo, significados de las operaciones aditivas y multiplicativas, según el tipo de fracciones que los integran y las acciones que requieren (Contreras, 2012; Flores, 2008)

Definimos el KoT como el conocimiento que tiene el profesor sobre los contenidos matemáticos escolares, desde una perspectiva de amplitud y profundidad como la referida en el modelo de Schoenfeld y Kilpatrick (2008), cuyas bases se refieren al trabajo de comprensión profunda de Ma (1999). Esto supone más que sólo conocer el conocimiento de la matemática como disciplina; el profesor debe conocer y entender los contenidos de la matemática escolar, requiriendo así de comprender sus propiedades y significados de manera fundamentada, los procedimientos, estándar y alternativos, que se emplean al abordar un determinado contenido, o las distintas formas de representación matemática o registros de representación asociados al mismo, además de los fenómenos que pudieran estar asociados a la naturaleza de los contenidos, así como aspectos epistemológicos ligados a la matemática que permiten al profesor comprender diferentes significados que pueden atribuírsele al contenido (Carrillo, Climent et al., 2013; Carrillo, Contreras et al., 2013).

Esto coincide con las componentes de conocimiento de matemáticas que Climent (2005) y Muñoz- Catalán (2009) consideran como parte de la caracterización del conocimiento profesional del profesor, en la que se refieren al conocimiento del conjunto de conceptos y procedimientos matemáticos, tanto los estructurantes de la materia (los que se refieren a la matemática en general) como los más específicos o locales de contenidos concretos; los hechos; las propiedades y relaciones; los significados que los sustentan; sus representaciones; y las relaciones entre los contenidos (que en el MTSK situaremos en otro subdominio).

Dentro de este subdominio vamos a considerar las siguientes categorías desarrolladas por Escudero-Ávila (2015).

La categoría de *Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático*. Se refiere al conocimiento sobre propiedades específicas del contenido matemático y los fundamentos que estas tienen, los cuales le dan sentido y

significado. Por ejemplo se puede saber que la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado, lo cual corresponde a conocer una propiedad de los triángulos. Además, el conocer el fundamento matemático (quizá la demostración) de esta propiedad también forma parte de esta categoría.

Consideramos en esta categoría el conocimiento del conjunto de propiedades que permiten definir un objeto determinado, y las formas alternativas que utilice el profesor para definir (aunque no incluimos aquí el conocimiento de las características que ha de tener una definición), dado que en la matemática escolar es común definir los objetos matemáticos utilizando una serie de propiedades que cumplen estos. Por ejemplo, saber que la superposición de los ángulos interiores de un triángulo sobre un ángulo llano, dará como resultado este último y es invariante o saber que no basta con conocer que no toda figura plana es un polígono, puesto que esta es también una propiedad de las figuras abiertas que no son polígonos.

La categoría de *Conocimiento de registros de representación asociados a un contenido matemático*. Esta categoría se encuentra inspirada en los trabajos de Duval (e.g. Duval, 1995) sobre los distintos registros de representación semiótica, en los cuales puede representarse un determinado concepto dentro de la matemática. Por ejemplo, para el caso de una fracción podría distinguirse diferentes tipos de registros en los cuales puede representarse el concepto de un medio (D'Amore, 2009). Consideramos importante incluir en este subdominio el conocimiento sobre la existencia de distintos registros en los cuales puede representarse un determinado contenido (registro numérico, gráfico, verbal, analítico, etcétera), así como el conocimiento de la notación y vocabulario adecuado asociado a dichas representaciones (un medio, la mitad, etcétera).

La categoría *Fenomenología* tiene un carácter bivalente. Por un lado consideramos el conocimiento que el profesor tiene acerca de modelos atribuibles a un tópico, vistos estos como fenómenos que pueden servir para generar conocimiento matemático, entre ellos, los que aparecen en la génesis del propio concepto y, por otro lado, se considera el conocimiento que tiene acerca de usos y aplicaciones de un tópico que ya fue enseñado. Que el profesor conozca el concepto de número natural en una variedad de fenómenos (contar folios, expresar el número de cerillas dentro de una caja, medir el peso de diferentes objetos, resolver  $6+4$ , el número de carnet, cuál turno tienes cuando esperas para comprar) es un ejemplo de esta categoría.

- Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM)

Entendemos que el conocimiento matemático del profesor debe incluir un sistema integrado de conexiones que le permita comprender y desarrollar conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y conceptos elementales mediante el tratamiento a través de una visión avanzada. El profesor debe de conocer e identificar los nexos que se establecen entre los distintos contenidos estableciendo una red de conceptos y/o procedimientos.

Esta red interconectada de conocimientos que supone la matemática como estructura (esta idea de estructura es recogida por Ball y Bass (2009) como una componente del HCK). Es el conocimiento profundo de esta estructura de la matemática (KSM) lo que permite al profesor entender la matemática más allá de la comprensión de los conceptos como elementos aislados, sino integrados en un sistema de conexiones interconceptuales (Figueiras, Ribeiro, Carrillo, Fernández, y Deulofeu, 2011).

En Montes, Aguilar et al. (2013) señalan la importancia de hacer una distinción entre lo que Ball y Bass (2009) llaman HCK (T) y HCK (P), puesto que su naturaleza y riqueza conceptual son sustancialmente distintas. Consideramos que el HCK (P) tiene entidad suficiente para considerarse como un subdominio de conocimiento matemático del profesor, por lo que lo ubicaremos como parte de nuestro subdominio de la Práctica Matemática (descrito más adelante). El HCK (V) está más vinculado a las concepciones y creencias que a los conocimientos. Y con respecto a las conexiones extra-matemáticas las consideramos como parte del conocimiento de la fenomenología que está ya ubicado en el KoT.

Definimos entonces un subdominio que engloba los conocimientos de conexiones interconceptuales y conocimientos tanto avanzados, como elementales (con respecto al contenido que se atiende), que permiten al profesor trabajar la matemática desde un punto de vista integral y estructurado.

Dentro de este subdominio vamos a considerar las siguientes categorías desarrolladas por Escudero-Ávila (2015).

La categoría de *Conocimiento de la complejización de un contenido matemático* donde las conexiones relacionan los contenidos enseñados con contenidos que se abordarán en niveles posteriores. Una visión de la matemática elemental desde un punto de vista

avanzado (Klein, 1933) se refleja en la proyección de los contenidos enseñados como potenciadores para contenidos a enseñar en un futuro. Por ejemplo, el conocimiento que tiene un maestro para medir la longitud de los lados de un triángulo en Primaria, donde puede usar el teorema de Pitágoras, hasta la trigonometría en Secundaria.

La categoría de *Conocimiento de la simplificación de un contenido matemático* donde las conexiones relacionan los contenidos enseñados con contenidos abordados en niveles anteriores. Una visión de la matemática avanzada desde un punto de vista elemental (Klein, 1933) se refleja en la retrospectiva de los contenidos enseñados potenciados por los previos.

Montes, Contreras y Carrillo (2013) muestran el ejemplo de un profesor que establece una conexión de simplificación entre la forma de operar los números racionales y la de operar las expresiones algebraicas, al intentar ayudar a una estudiante que tiene

dificultades para resolver la expresión algebraica  $\frac{-\sqrt{(x^2+1)^3} + \frac{(x-1)-3(x^2+1)^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}}{(x^2+1)^3}$  para lo cual el profesor sugiere a la estudiante considerar que el trabajo de simplificación de la expresión es equivalente a manipular la expresión  $\frac{3+\frac{1}{4}}{7}$ .

Otra categoría es *Conocimiento de conexiones transversales entre contenidos matemáticos* que se refiere a conexiones que tienen distintos contenidos y pueden relacionarse por alguna cualidad común y, por los modos de pensamiento asociados a dichos temas, contemplan esta característica común. Además incluimos aquí las ideas transversales a las matemáticas como elementos que estructuran diferentes contenidos de la matemática (Carrillo, Contreras et al., 2013).

Y por último, la categoría *Conocimiento de conexiones auxiliares entre contenidos matemáticos*. Pensemos por ejemplo en el uso de ecuaciones para determinar los ceros (o determinar la no existencia de estos) de una función, consideramos que la conexión que se establece entre ecuaciones y funciones es de tipo interconceptual. No se trata de una conexión intraconceptual, ya que la ecuación no es una cualidad de la función, sino más bien un elemento auxiliar en la obtención de los ceros de la función (la existencia de los ceros de la función y por tanto las raíces de la ecuación para obtenerla, depende de la continuidad de la función en el punto evaluado) y tampoco es una complejización o simplificación entre ecuaciones y funciones. Aquí la necesidad de encontrar los ceros

puede hacer de la ecuación un elemento auxiliar para la función. A este tipo de conexión lo llamaremos conexión auxiliar.

- Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM)

Incluye el conocimiento de la comprensión acerca de la naturaleza del conocimiento y de la actividad matemática (Ball, 1991), de las formas de conocer, crear o producir en matemáticas (conocimiento sintáctico según Schwab, 1978), conocimiento de aspectos de la comunicación matemática, del razonamiento y la prueba. Saber, por ejemplo, qué es definir y cómo usar definiciones.

Consideramos el conocimiento que tiene el profesor acerca de la lógica proposicional, de los modos de proceder (el conocimiento de heurísticos en la resolución de problemas, por ejemplo) y de la sintaxis propia de las matemáticas.

Para este subdominio hemos construido las siguientes categorías, que nos permiten diferenciar el conocimiento ligado a la matemática general y el ligado a la idea de temática en matemáticas.

Para la categoría *Prácticas ligadas a la Matemática en General* considera un tipo de conocimiento sobre cómo se desarrollan las matemáticas independientemente del concepto abordado, como pudiera ser, por ejemplo, saber el significado de una condición necesaria y una condición suficiente o saber que las cualidades de una definición (por ejemplo, que posee límites). Este conocimiento, usado para trabajar genéricamente en matemáticas, es necesario en el profesor ya que provee de estructuras lógicas de pensamiento que ayudan a entender el funcionamiento de diversos aspectos matemáticos.

Un ejemplo de la categoría *Prácticas ligadas a una Temática en Matemáticas* aparece cuando, por ejemplo, un profesor, al trabajar con conjuntos numerables infinitos, recurre a la inducción para probar cierta propiedad. Es posible que la use porque sepa que esa propiedad en concreto requiere una demostración que ha memorizado, caso en el que no podríamos hablar de un conocimiento de gran profundidad, pero también es posible que ese profesor use la inducción en dicha propiedad al saber que, como el conjunto es infinito y numerable, una aproximación al razonamiento sobre dichos conjuntos mediante un pensamiento inductivo suele usarse para la búsqueda de generalización.

### **I.1.3.2 Dominio de Conocimiento didáctico del contenido (PCK)**

Está compuesto de tres subdominios que componen y dan sentido al conocimiento didáctico del contenido: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT<sup>13</sup>); Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM<sup>14</sup>) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS<sup>15</sup>)

- Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)

Incluye conocer distintas estrategias que permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales. Conocer modos de representación (Shulman, 1986) para hacer comprensible un contenido determinado, conocer recursos que permitan al profesor hacer que sus alumnos descubran mediante la manipulación ciertos conceptos matemáticos, o ejemplos que consigan despertar en sus alumnos la intuición respecto de algunos conceptos, forma parte de este subdominio. En el uso de ejemplos potentes: saber qué hacer para ayudar a la alumna a continuar. (Montes, Contreras y Carrillo, 2014)

Consideramos las siguientes categorías desarrolladas en Escudero-Ávila (2015): *Conocimiento de teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático* Este conocimiento está fundamentado en teorías que han resultado de la investigación en Educación Matemática o en la observación y reflexión de la actividad matemática en el aula, por lo que este conocimiento puede provenir tanto de investigaciones, como de las propuestas didácticas que tiene el currículo, o de la experiencia previa del profesor. De acuerdo con Schoenfeld y Kilpatrick (2008), estas teorías condicionan la actuación del profesor y el uso que hace del conocimiento.

Consideramos importante explicitar aquí la incorporación de una categoría que dé cabida al conocimiento de las formas de enseñanza asociadas a un determinado contenido matemático. En este caso se trata de la inclusión de elementos teóricos que derivan directamente de los estudios específicos de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica, correspondientes a teorías de enseñanza, por ejemplo el conocimiento de la estructura general propuesta en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007) [Acción, Formulación, Validación e Institucionalización] bajo las

---

<sup>13</sup> Knowledge of Mathematics Teaching

<sup>14</sup> Knowledge of Features of Learning Mathematics

<sup>15</sup> Knowledge of Mathematics Learning Standards

cuales pueden diseñarse actividades para el aula y ambientes de trabajo matemático ad hoc a dichas actividades.

La categoría de *Conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático*. En esta categoría nos referimos al conocimiento de características matemáticas específicas de recursos y materiales utilizados para la enseñanza de un contenido particular y no solo al conocimiento de un recurso como tal, es decir, no incluimos como parte de esta categoría el que un profesor conozca la existencia del Geoplano como recurso didáctico, pero sí incluimos el conocimiento que tiene de este como instrumento para representar figuras planas, o el conocimiento de que es imposible representar en él triángulos equiláteros. Estas características sí están asociadas con el contenido matemático y no con aspectos pedagógicos generales. Evidencias sobre la importancia de reconocer las características matemáticas de los recursos matemáticos puede consultarse en Climent y Carrillo (2002), en donde se habla sobre la discusión que hacen estudiantes para profesor sobre el uso de la trama de puntos para trabajar la clasificación de triángulos y en el que se observa que este recurso tiene las mismas limitaciones que el Geoplano para construir triángulos equiláteros y la importancia de que el profesor conozca y reconozca las características matemáticas de los recursos que utiliza en clase.

Categoría de *Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático*. Como hemos mencionado anteriormente, el profesor necesita conocer los instrumentos que tiene disponibles para abordar el contenido, sus potencialidades, sus limitaciones y las repercusiones que tendría el usarlo como medio para presentar un contenido matemático. Por lo cual se incluyen en esta categoría los conocimientos sobre la potencialidad matemática que pueden tener ciertas secuencias de actividades, tareas, estrategias o técnicas didácticas, que los profesores consideren potentes en el abordaje de un contenido matemático y un momento particular de enseñanza.

Este subdominio involucra conocimientos sobre la potencialidad de actividades, estrategias o técnicas para enseñar un contenido matemático, así como sus limitaciones, o los obstáculos (de dicha actividad o recurso, por ejemplo) que deberán superarse para que la estrategia sea exitosa. Finalmente, los ejemplos elegidos para representar un contenido, las metáforas, las situaciones y las explicaciones, constituyen conocimiento

sobre la enseñanza del contenido. Sirva como ejemplo el conocimiento de la metáfora de pedir prestado como explicación de la resta con llevada (y en un nivel de mayor profundidad, las posibles dificultades que puede propiciar y explicaciones alternativas como la de reagrupar de Ma (1999)). Es evidente en este ejemplo la vinculación entre el KMT y el KFLM, puesto que la elección de cierta metáfora o tarea específica provocará una determinada forma de aprender la resta, además el tener conocimiento sobre las dificultades que puede generar el uso de un cierto recurso permitirá al profesor prever las formas en las que los estudiantes abordarán la tarea, las preguntas que tendrán al respecto de los procedimientos o los errores que podrían cometer, ya sean los derivados del uso de la metáfora o los que provienen de la construcción misma de los significados de la resta, en este caso.

Consideramos aquellos elementos que denotan la intencionalidad de enseñanza del profesor en un tema determinado. En Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo (2014) se menciona como ejemplo para esta categoría saber “en qué momento y qué tipo de ayuda brindar a los estudiantes, qué ejemplos son más potentes de acuerdo al momento e intencionalidad de la clase o conocer alguna tarea específica para propiciar el aprendizaje de un contenido matemático (conocer la Situación Didáctica del rompecabezas para el tema de proporciones)” (p. 65). Incluimos el conocimiento de ejemplos adecuados para cada etapa o contexto determinado, el conocimiento del abordaje de una secuencia estructurada de ejemplos para ayudar a entender el significado de un contenido matemático, así como el conocimiento de condiciones específicas del aula a la que se dirigen determinadas secuencias de aprendizaje, las cuales norman el proceder del profesor, todo esto en función del contenido matemático que se aborda.

Estos conocimientos permitirán al profesor elegir un determinado material para el aprendizaje de un concepto o un procedimiento matemático, le capacitan para seleccionar los ejemplos más potentes o elegir un libro de texto en función de los beneficios que tenga este como recurso de enseñanza.

- Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)  
Se refiere al conocimiento de las características del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, del lenguaje asociado a cada concepto, así como de errores, dificultades u obstáculos posibles a cada concepto o el lenguaje

habitualmente usado por los estudiantes en relación con el concepto tratado en clase. Por ejemplo, el profesor debe de saber identificar y conocer (a priori) la dificultad de los alumnos respecto a las expresiones algebraicas.

En Flores-Medrano, Escudero-Avila, Montes y Carrillo, (en prensa) se analiza la evidente necesidad de que el profesor conozca aspectos relacionados con los procesos de aprendizaje de sus estudiantes, la cual ha derivado en la elaboración de trabajos de investigación sobre las relaciones profesor-estudiante y estudiante-contenido, necesarias en el proceso de enseñanza y aprendizaje (e.g. Cantoral y Farfán, 2003; Serrano y Pons, 2008;). Estas relaciones se refieren a dos formas distintas de interpretar los procesos de construcción del conocimiento matemático. La relación profesor-estudiante pone en el centro el conocimiento que tiene el profesor acerca del estudiante como sujeto cognoscente. En contraste, la relación estudiante-contenido se enfoca en el conocimiento que tiene el profesor del propio proceso de aprendizaje. Estas dos formas de interpretar las relaciones implicadas en los procesos de aprendizaje parecen provocar un cambio importante en los procesos de análisis del conocimiento del profesor.

Desde nuestra perspectiva, el foco central del conocimiento especializado debe estar en el contenido matemático, por lo que decidimos centrar nuestra atención en los conocimientos del profesor sobre las características de aprendizaje inherentes a un contenido matemático en particular o a la matemática en general, cuyo contenido no está centrado en el conocimiento de los estudiantes como actores principales en el proceso de aprendizaje, lo cual no implica que se pretenda restar importancia al papel del estudiante en el proceso de aprendizaje, sino que nos interesa reconocer las características de aprendizaje derivadas de su interacción con el contenido matemático y las características del contenido matemático en sí mismo como objeto de aprendizaje (Escudero y Carrillo, 2014).

Después de explorar distintas formas de organización del contenido del subdominio (Flores- Medrano et al., en prensa), en esta investigación nos hemos decidido por utilizar una categorización cuyo respaldo esté en los trabajos que toman como base la propuesta inicial de Shulman (1986) y cuyo foco central está en el profesor como conocedor de características específicas del contenido matemático como objeto de aprendizaje:

La categoría *Conocimiento de teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático*. Se refiere al conocimiento que tiene el profesor acerca de los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático. Incluye el conocimiento de estructuras o teorías sobre el desarrollo cognitivo del estudiante tanto para la matemática en general como para contenidos particulares.

Como mencionamos anteriormente, a nuestro parecer, la consideración explícita del conocimiento sobre constructos teóricos provenientes de la experiencia profesional o de la investigación sobre la generación de marcos que permitan explicar los procesos de construcción de conocimiento matemático desde el punto de vista de la enseñanza y de su aprendizaje, da cabida al análisis de los conocimientos que pueda tener un profesor sobre algunos de los resultados derivados de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica. Esto puede permitirnos saber cómo usa el profesor dichos conocimientos, o identificar posibles vías de desarrollo de los mismos. Un ejemplo de conocimiento a ubicar en esta categoría sería el conocimiento de un profesor sobre la teoría cognitiva desarrollada por Piaget, donde el conocimiento no es una simple acumulación de datos, son los elementos de información, y sus relaciones lo que forman un todo organizado y significativo. El desarrollo de un conocimiento intuitivo del sentido de número, hasta un conocimiento formal donde el alumno tiene medios eficaces para realizar cálculos aritméticos.

La categoría *Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático*. La creciente cantidad de investigación cognitiva sobre el aprendizaje del estudiante, desarrollada en las últimas décadas, ha producido muchos resultados enfocados a la identificación de concepciones, errores, obstáculos y dificultades de los estudiantes y de su pensamiento matemático (Even y Tirosh, 1995). Esto nos lleva a incluir en este subdominio los conocimientos sobre los errores, obstáculos y dificultades, típicas y atípicas, relacionados con las características y procesos de aprendizaje (Muñoz-Catalán, 2009; Sosa, 2011); sin embargo, es importante señalar que incluimos solo las que son propias del contenido matemático específico, es decir, las que están asociadas directamente con las características matemáticas y no pedagógicas del contenido. Un ejemplo de este tipo de conocimiento es el que tiene el profesor de que los estudiantes de secundaria tienden a creer que  $(a)^2 = a^2$  por una confusión con respecto a la comprensión de que el cuadrado de un número  $n$  equivale a  $n \times n$  por ejemplo  $-2^2 = a$  menos dos al cuadrado = 4; mientras que

$(-2)^2 =$  al opuesto de dos al cuadrado  $= -4$ , o el conocimiento sobre las confusiones que los estudiantes de primaria pueden tener con los algoritmos de división y multiplicación de fracciones, al no comprender los fundamentos de dichos algoritmos.

Además, hemos querido considerar aquí el conocimiento de características que podrían utilizarse como ventajas o potencialidades aprovechables para el aprendizaje, asociados a la naturaleza de la matemática de un contenido particular. Por ejemplo, en Climent y Carrillo (2002) se observa una marcada tendencia a dibujar triángulos en tramas de puntos haciendo coincidir por lo menos uno de los lados con líneas horizontales y/o verticales de la trama, lo cual limita el trazado de triángulos distintos y la identificación y clasificación de éstos. Esta tendencia ha sido reportada dentro de la literatura de investigación (e.g. Azcárate, 1997) como una dificultad común asociada con el trabajo en los ejes coordenados y el uso habitual de la altura como elevación con respecto a las horizontales, entre otros.

Estos conocimientos pueden estar asociados al contexto específico en el cual se aprende el contenido matemático, de manera que puedan reconocerse distintos matices en las características de aprendizaje de un grupo particular de individuos. Ubicamos, por tanto, aquí el conocimiento que pueda tener el profesor sobre las dificultades, errores o potencialidades matemáticas asociadas al aprendizaje de un contenido específico de un grupo o lugar específico, así como a estudiantes particulares (Pinto y González, 2006).

La categoría *Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático*. Se refiere a conocimiento que tiene el profesor sobre los procesos y estrategias de los estudiantes, tanto los típicos como los no habituales (Sosa, Aguayo y Huitrudo, 2013). Además se categorizan aquí los conocimientos sobre el lenguaje o vocabulario formal o informal, así como los gestos o figuras usadas comúnmente por los estudiantes al abordar un determinado contenido, por ejemplo saber que los estudiantes tienen tendencia a usar representaciones clásicas de figuras geométricas como podría ser el uso de triángulos equiláteros o con bases horizontales o que suelen usar representaciones de figuras convexas y no cóncavas al trabajar con polígonos

La categoría *Conocimiento de los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemática*. En esta categoría se pretende dar cabida a los conocimientos que tiene el profesor sobre las expectativas e intereses que tienen los

estudiantes con respecto a las matemáticas, el conocimiento sobre las preconcepciones de facilidad o dificultad asociadas comúnmente a las distintas áreas de la matemática, así como las preconcepciones o concepciones erróneas que pueden existir sobre un determinado tópico. Por ejemplo el conocimiento de que el paso de una Geometría en el plano a los cuerpos geométricos es problemático para los estudiantes o el conocimiento de que los estudiantes de primaria piensan que al multiplicar siempre se obtiene un número mayor que cualquier factor.

- Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)

Es el conocimiento que posee el profesor acerca de lo que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado. Es aquello que el profesor sabe sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueve en determinados momentos educativos. Consideramos, además de lo prescrito en el currículo institucional, lo que proviene de las investigaciones y de las opiniones de profesores expertos acerca de logros de aprendizaje.

Este subdominio da cabida a los conocimientos sobre los contenidos propuestos en las normativas curriculares institucionales, para saber lo que se prescribe en cada etapa, es decir, dar una ubicación temporal y contextual al contenido abordado, además de introducir el conocimiento de objetivos y estándares de aprendizaje no oficiales que pueda tener el profesor, así como objetivos y estándares procedentes de asociaciones profesionales o de los investigadores, o los que proceden de la experiencia del profesor respecto a los logros de aprendizaje, añadiendo un elemento de juicio y crítica en relación con lo prescrito por la administración educativa.

Nos referiremos a estándar de aprendizaje como aquello que indica el nivel de capacidad- atribuible a los estudiantes en un determinado momento escolar- para entender, construir y saber matemáticas.

A diferencia del conocimiento ubicado en el Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM), aquí se hace referencia a una ubicación temporal de los contenidos matemáticos y no a las conexiones interconceptuales que puedan existir entre distintos contenidos.

Para la profundización en la caracterización de este subdominio, hemos considerado las siguientes categorías desarrolladas en Escudero-Ávila (2015):

La categoría *Conocimiento de las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico*. Se refiere al conocimiento que tiene el profesor sobre lo que se espera que el estudiante aprenda en un determinado nivel escolar. Esto se refiere a los contenidos matemáticos a abordar que deben ser presentados a los estudiantes. Este conocimiento puede ser adquirido por el profesor a través de consultas de un documento rector que indique cuáles son esos contenidos, o como abstracción de las capacidades matemáticas específicas que requiere desarrollar en sus estudiantes en ese momento escolar. Por ejemplo, ubicaremos aquí el conocimiento que pueda tener el profesor de que la multiplicación es abordada en el primero y segundo ciclos de primaria según el Ministerio de la Educación (2006).

La categoría *Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar*. Esta categoría se refiere al conocimiento sobre la profundidad con la que debe ser abordado un determinado contenido matemático, en relación con un ciclo escolar determinado. Por ejemplo, saber que en el primer ciclo de educación primaria la división se trabaja como eliminación de objetos, realizándose la transición hacia el segundo ciclo, donde se ve como resta abreviada o reiterada,

Y la categoría *Conocimiento de la secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar*. A diferencia de los conocimientos ubicados en el KSM, esta categoría se refiere al conocimiento sobre la secuenciación de diversos contenidos matemáticos, ya sea dentro de un mismo curso o pensando en cursos anteriores, es decir, los conocimientos y capacidades previas que tiene un estudiante para aprender un nuevo contenido en términos de lo que los estándares marcan que se debe conocer antes de abordar un determinado contenido, y lo que aportará este en el abordaje de temas posteriores, que no tiene por qué coincidir con las conexiones de Complejización o Simplificación que matemáticamente puedan construirse. Continuando con el ejemplo de la división, ubicaríamos aquí el conocimiento que tiene el profesor del segundo ciclo de que los estudiantes han trabajado ya la división como el número de veces sustraídas.

## I.2 Concepciones<sup>16</sup> del maestro de Primaria sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de la matemática

En el punto anterior (2.1 Conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de las matemáticas) se ha fundamentado la perspectiva en el que nuestro trabajo se encuentra inmerso. En lo que respecta al estudio de las concepciones del maestro sobre la E-A de la matemática trataremos de presentar y fundamentar cómo éstas están intrínsecamente ligadas al conocimiento del maestro, es decir, lo permean.

En la literatura de investigación se pone de relieve que en la formación del profesorado debería centrarse en el desarrollo de las creencias (e.g., Thompson, 1992; Ernest, 1988; Cooney y Shealy, 1994; Ponte, 1992; Wilkins y Brand, 2004), debido a que éstas, influyen el comportamiento de los profesores en su instrucción (e.g., Thompson, 1984, 1992). Aunque las creencias son difíciles de cambiar (Pajares, 1992), sí existen investigaciones donde los futuros maestros después de participar en un curso de pregrado, las modifican (e.g., Wilkins y Brand, 2004), por lo que consideramos que es un aspecto fundamental en la comprensión del profesor.

Existen diversos enfoques por parte de los investigadores de cómo se consideran las concepciones de los profesores. Por ejemplo, algunos investigadores comprenden las concepciones como una parte del PCK de los profesores (e.g., Ball, 1990; Fennema y Franke, 1992; Gess-Newsome y Lederman, 1999). Otros como Thompson (1984, 1992) hacen una distinción explícita entre el conocimiento y las concepciones (donde incluye las creencias).

Los investigadores están interesados en el estudio de las creencias sobre la enseñanza, el aprendizaje, y la naturaleza de las matemáticas, porque estos factores pueden afectar a los comportamientos instructivos de los profesores (Thompson, 1984, 1992). Las creencias de los profesores se han estudiado durante varias décadas y se han considerado de diferentes naturalezas, según el investigador (e.g., Thompson, 1984; Pajares, 1992; Ponte, 1994; Carrillo, Climent y Contreras<sup>17</sup>)

---

<sup>16</sup> Usaremos fundamentalmente, como hemos justificado, el término *concepción*, aunque en ocasiones emplearemos indistintamente el de *creencia*.

<sup>17</sup> Entre otros: Carrillo, 1995, 1996, 1998a, 1999a; Contreras, 1998, 1999; Carrillo y Contreras, 1994, 1995; Carrillo, Climent y Contreras, 1998; Contreras, Carrillo y Climent, 1999; Contreras, Climent y Carrillo, 2000.

Gess-Newsome (1999) indica que las "diferencias en las creencias y concepciones de los docentes sobre la materia están directamente relacionadas con los juicios sobre el contenido, y se observó como un factor principal que determina la planificación" (p.52). Este autor interpreta la definición de Shulman de SMK vinculados entre "los docentes poseen conocimientos, las acciones educativas que emplean, y el aprendizaje, actitudes y creencias de los estudiantes a quienes enseñan" (p.52). Asimismo, Peterson, Fennema y Carpenter (1991) indicaron que las creencias de los maestros acerca de los conocimientos de los alumnos, así como su forma de pensar sobre la enseñanza, el aprendizaje, y la evaluación de todos, fueron influenciadas por sus creencias y sus conocimientos.

Ball (1991) considera la idea de creencias de los profesores como parte de su conocimiento. Se distingue entre el conocimiento *de* matemáticas (la materia) y el conocimiento *sobre* matemáticas (su naturaleza y el discurso). Para Ball el conocimiento *sobre* matemáticas incluyen: La comprensión acerca de la naturaleza del conocimiento y de la actividad matemática: "lo que implica hacer matemáticas y cómo la verdad se establece en el dominio (p.7)."

Sin embargo, Thompson (1992) discute la distinción entre el conocimiento de los maestros y de las creencias. Según Thompson, "una característica de las creencias es que se pueden mantener con mayor o menor convicción" (p.129), donde el conocimiento es, por lo general, no pensado de esta manera. Philipp (2007) proporciona un ejemplo: se podría decir que una persona cree algo con fuerza, mientras que uno no podría conocer un hecho de fuerza. Otra característica distintiva de las creencias es que no son consensuales. Por ejemplo, uno es generalmente consciente de que otros pueden creer de manera diferente y que sus posiciones no se pueden refutar, mientras que con respecto a los conocimientos, se encuentra en un "acuerdo general acerca de los procedimientos para evaluar y juzgar su validez" (Thompson, 1992, p.130). Además, discute, además, dos puntos de vista muy diferentes sobre la naturaleza de las matemáticas. En primer lugar, "Las matemáticas son una disciplina que se caracteriza por unos resultados precisos y procedimientos infalibles... Saber matemáticas es equivalente a ser hábil en la ejecución de los procedimientos y de ser capaz de identificar los conceptos básicos de la disciplina" (p.127). Este concepto de las matemáticas conduce a la enseñanza en el aula, "donde los conceptos y procedimientos se presentan de forma clara y las oportunidades se conceden a los estudiantes para

practicar la identificación de conceptos y la realización de procedimientos" (p.127). Por lo tanto, cambia el punto de vista de las concepciones de la gente sobre de la naturaleza de las matemáticas de la que saben verlas a la vista de la construcción de las matemáticas (Sowder, Philipp, Flores, y Schappelle, 1999).

Aún sabedores de que hemos diferenciado las concepciones del conocimiento profesional del profesor, y la discusión que existe al respecto, estamos de acuerdo con Abelson (1979), que diferencia lo que denomina *sistemas de creencias* de *sistemas de conocimiento*, debido a que las primeras no están fundamentadas por el consenso. Además, utiliza tanto el término de *creencia* como de *concepciones* y la definición de las *concepciones* incluye las *creencias*. Ella se refiere a las concepciones de los profesores "como una estructura mental más general, que abarca creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, las preferencias, y similares" (p.130). Establece una clara distinción entre las creencias y conocimientos a través de la *convicción y consensualidad*.

Ernest (1988) señala que hay tres elementos claves matemáticos que influyen la enseñanza en el aula. 1) el contenido mental de los profesores o esquemas, especialmente el sistema de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, 2) El contexto social de la situación de enseñanza, en particular las limitaciones y las oportunidades que ofrece, y 3) el nivel del maestro en procesos de pensamiento y reflexión. En su modelo, realiza un listado para el conocimiento y las creencias. El componente de conocimiento incluye el conocimiento de las matemáticas, el conocimiento de otro tema, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (didáctica de las matemáticas y currículo de matemáticas), el conocimiento de la organización del aula y la gestión de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento del contexto de la enseñanza de las matemáticas, y el conocimiento de la educación (Psicología de la educación, y la enseñanza de las matemáticas). El componente de creencias incluye la concepción de la naturaleza de las matemáticas, los modelos de las creencias de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y principios de la educación, Ernest (1988, 1991). A su vez, indica que los enfoques de los docentes en la enseñanza de las matemáticas dependen fundamentalmente de sus sistemas de creencias, en particular en sus concepciones de la naturaleza y el significado de las matemáticas, y sus modelos mentales de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Thompson (1992) también indica las diferencias entre las creencias y conocimientos a través de dos perspectivas. En primer lugar, las creencias pueden ser consideradas con varios grados de convicción, mientras que los conocimientos generalmente no se piensa de esta manera. Además, las creencias no son consensuales, pero el conocimiento sí lo es (Thompson, 1992). También aborda la importante relación entre el conocimiento y las creencias. "Mirar a la investigación sobre las creencias y concepciones aisladas de la investigación sobre los conocimientos de los profesores de matemáticas resultará en una imagen incompleta" (p.131). Sin embargo, el estudio se centra en la relación y conexión entre estos dos aspectos que se pueden explorar. Thompson (1992) definió las concepciones del profesor sobre la naturaleza de las matemáticas, la concepción sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como " conscientes o inconscientes [conjunto de] creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias relativas a la disciplina de las matemáticas" (p. 132), incluyendo 1) una disciplina dinámica orientada al problema, 2) un cuerpo estático unificado de conocimiento, y 3) una bolsa de herramientas.

Nosotros vamos a entender las concepciones (sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática) como "el conjunto de creencias y posicionamientos que el investigador interpreta posee el individuo, a partir del análisis de sus opiniones, respuestas a preguntas sobre y su descripción de su práctica, su acción y los documentos que produce en torno a ésta" (Climent, 2005, p. 23).

### **I.3 Geometría: La clasificación de figuras planas**

Esta investigación está centrada en una unidad didáctica en la que se trabaja Geometría. El principal objetivo por parte de la maestra, es trabajar la clasificación de figuras planas. Por ello, en este apartado, se pretende sustentar teóricamente por qué este procedimiento es idóneo para trabajar los conceptos geométricos en el aula.

La clasificación de los objetos geométricos se realiza para estudiar con más facilidad sus propiedades, y poder generalizar el comportamiento de éstas para resolver problemas. En Educación Primaria los alumnos comienzan a realizar clasificaciones más analíticas, fijándose en qué elementos de la figura plana pueden aislar de la figura, para extraer propiedades. Estos elementos son cada vez más abstractos y formales (lado, vértice, ángulo, diagonal), acercándose a clasificaciones con criterios matemáticos cada vez más precisos y potentes (paralelismo y perpendicularidad, tipo de ángulo, simetría). Estas

clasificaciones con criterios estándar no deben poner el énfasis en las clasificaciones resultantes sino en el propio procedimiento de clasificar. En algunos casos, las clasificaciones estándar podrán obtenerse como refinamientos de clasificaciones personales de los alumnos (Muñoz-Catalán, Montes, Carrillo, Climent, Contreras, y Aguilar, 2013).

El trabajo desarrollado por Pierre van Hiele y Dina van Hiele-Geldof (Niveles de Van Hiele) en la didáctica de la geometría ha sido un referente para la comprensión y el dominio de las nociones y habilidades espaciales por parte de los alumnos. El modelo, contiene cinco niveles que describen procesos de pensamiento que se ponen en juego ante tareas y situaciones geométricas. En el trabajo de Jaime y Gutierrez (1990) se resumen estos niveles, de los que extraemos los tres primeros, puestos que son los que se trabajan en la Educación Primaria:

**Nivel 0: Visualización.** Los objetos se conciben según su apariencia reconociendo las figuras y las nombran basándose en las características visuales globales que tienen. Por ejemplo, los alumnos identifican cuadrados en un conjunto de recortables. Otro aspecto de este nivel es que reconocen propiedades de las formas, pero no piensan explícitamente sobre estas propiedades. Por ejemplo, los ángulos son señalados como esquinas o los marcan en la figura.

**Nivel 1: Análisis.** Los objetos de pensamiento son clases de formas, es decir, consideran todas las formas incluidas en una clase en lugar de una forma singular. Por ejemplo, los cuadriláteros poseen cuatro lados, es posible hablar sobre todos los cuadriláteros, siendo capaz de reconocer diferencias entre figuras. Además, es capaz de señalar diferencias y semejanzas entre cuadrados y rectángulos. Otro aspecto a considerar los estudiantes es que comienzan a establecer clases, por ejemplo, los cubos, tiene las propiedades correspondientes a esa clase únicamente (tienen seis caras congruentes, y cada una de estas caras es un cuadrado). Lo fundamental para los alumnos en este nivel son las propiedades de las formas.

**Nivel 2: Deducción informal.** A medida que los estudiantes comienzan a ser capaces de pensar sobre propiedades de los objetos geométricos establecen relaciones entre estas propiedades. Por ejemplo, si la suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ , de un cuadrilátero que está formado por dos triángulos es  $360^\circ$ . El alumno es capaz de reconocer el papel de las explicaciones lógicas para justificar los hechos. Por ejemplo,

formula una definición para una cometa y la usa para explicar qué es cometa y qué no. Los estudiantes comienzan a desarrollar un argumento deductivo informal sobre las formas y sus propiedades, por ejemplo, justifica la igualdad de los ángulos opuestos de un paralelogramo.

A partir del estudio de estos niveles, en el Proyecto de Investigación Colaborativa (PIC) durante los cursos 2012-2014, se desarrolla un material para la docencia centrado en la clasificación de figuras planas. En él se incluyen diferentes aspectos relacionados con la clasificación, que nos sirven para ganar *sensibilidad teórica* (Strauss y Corbin, 1994) para poder identificar conocimientos ligados al contenido:

Siguiendo a Muñoz-Catalán, et al., (2013) donde se establecen diferentes contenidos asociados a la clasificación de figuras planas encontramos: la identificación de atributos (I) de una forma plana, es el procedimiento base para clasificar y elegir criterios para ello, además de encontrar atributos globales de la figura (como forma y tamaño), esto hace que se incorpore el reconocimiento de atributos que suponen aislar elementos de la figura. En particular, desde el primer ciclo adquiere protagonismo la noción de ángulo (de modo más intuitivo primero, como amplitud, concretándose más tarde en tipos de ángulos) y las direcciones relativas de rectas (paralelismo y perpendicularidad, relacionado con la propia noción de ángulo, suponiendo aislar los lados de la figura hacia un atributo más abstracto que el número de lados). Se incluye también la identificación de figuras simétricas, como un reconocimiento visual en primer ciclo y con reconocimiento de sus elementos y características (eje de simetría y simétrico de un elemento geométrico –punto, línea, región- respecto de un eje) finalizando el segundo ciclo.

La comparación (C) estaría menos ligada al reconocimiento de atributos (tendría sentido sobre todo en el primer ciclo y en lo relativo a los inicios de conceptos ligados a atributos de las figuras planas) y más relacionada con el procedimiento de análisis de una figura plana y la adquisición de los conceptos mencionados anteriormente como ángulo y direcciones relativas de rectas.

Debe aunarse la clasificación con criterios elementales y formales. La progresión hacia ese formalismo, que tendrá reflejo tanto conceptual como en la terminología usada para referirse a los conceptos, forma parte de la complejización del procedimiento (de modo que el enriquecimiento conceptual y procedimental van de la mano).

Las parejas de características “criterios elementales/formales”, “no simultáneos/simultáneos” (CL/CLS), y “en grupos disjuntos/inclusivos” (CLD/CLI) marcan el avance en el procedimiento de clasificar, situándose el segundo elemento de cada par en el segundo y tercer ciclo de la etapa. A este respecto debemos puntualizar varias cuestiones. Por un lado, esto no significa que iniciados en clasificaciones más complejas (con criterios formales, con más de un criterio a la vez, y en clasificaciones inclusivas) se abandonen clasificaciones con las otras características. Por otra parte, las características mencionadas presentan distinto grado de dificultad. Mientras que ya en el primer ciclo los niños suelen estar preparados para considerar más de un criterio a la vez a la hora de clasificar, y respecto de algunos elementos y atributos tienen madurez perceptiva y tienen interiorizados suficientemente los conceptos relativos para poder considerar criterios formales (por ejemplo, número de lados), no ocurre lo mismo con la consideración de clasificaciones inclusivas. Consideramos que desde finales del segundo ciclo puede iniciarse a los alumnos en clasificaciones inclusivas, solicitándose agrupamientos (en el sentido de ordenar como organizar (O)) que supongan diferenciar unas figuras dentro de grupos que las engloban, y abordando clasificaciones parcialmente inclusivas. En este último sentido, puede, por ejemplo, dentro de una clasificación disjunta de los cuadriláteros, considerarse inclusiones entre la clase de los paralelogramos (por ejemplo, entre cuadrados, rectángulos y rombos). Además, la comparación (C) de figuras incidiendo en lo que tiene en común (no sólo en lo que las diferencia) supone un primer paso hacia la comprensión de clasificaciones inclusivas.

Finalmente los pares de criterios mencionados no deben entenderse como polos extremos. En la línea de lo indicado en el párrafo anterior, puede iniciarse progresivamente a los alumnos de modo que se vaya posibilitando clasificar desde todas las perspectivas señaladas.

Como clasificaciones con criterios formales cabe destacar la clasificación en polígonos y no polígonos, pareja a la construcción del concepto de polígono. La diferenciación de características que intervienen en la definición del concepto será cada vez más precisa, implicando mayor número de tipos de ejemplos y ejemplos cada vez más afines. Nos referimos a considerar (además de formas planas y espaciales, figuras abiertas y cerradas, limitadas por líneas poligonales o con trazos curvos) figuras simples y compuestas, con lados alineados o polígonos estrellados. Además, la consideración de criterios potentes matemáticamente debe potenciar no sólo las clasificaciones estándar,

sino también otras clasificaciones. Sería el caso de clasificaciones según la simetría de las figuras (si son o no simétricas, el número de ejes de simetría, por ejemplo) o según sus diagonales (interiores/exteriores/semi-interiores, igualdad, número, cómo se cortan). Estas clasificaciones suponen un análisis más preciso de las figuras planas, sus características y relaciones entre dichas características. Además, algunas de estas clasificaciones no estándar pueden venir dadas por combinaciones de criterios en modos no convencionales. Realizar todas estas clasificaciones permite, por un lado, que el énfasis esté puesto no sólo en las clases resultantes (esto es, la clasificación como contenido conceptual, como hecho) y, por otra parte, poder comparar las distintas clasificaciones, sopesando cuáles son más potentes y adecuadas según los objetivos que nos propongamos con dicha clasificación (relacionado con la elección de criterios (E)).

La clasificación de figuras planas, y en realidad de objetos geométricos, debe verse como una actividad contextualizada, con una finalidad que va más allá del gusto de explorar las figuras. En ese sentido, conviene proponer situaciones que posibiliten apreciar las ventajas para otros procedimientos (como, por ejemplo, demostrar), para el análisis conceptual de las figuras y para resolver situaciones en contextos reales y matemáticos. Las distintas finalidades harán más adecuados unos criterios que otros, y elegir criterios adecuados (E) forma parte de la comprensión de la situación, del propio procedimiento de clasificar y de los elementos conceptuales implicados en la clasificación elegida. La elección de distintos criterios y la discusión sobre su conveniencia supone ver la matemática como una herramienta que permite resolver problemas, desde una perspectiva múltiple más que como verdades únicas e inmutables, como construcción social, y desarrollar el aprecio por la eficiencia matemática (entendida como la mejor respuesta matemáticamente –más corta, directa, simple...).

La ordenación de figuras (O) tiene sentido en esta etapa sobre todo desde el punto de vista cualitativo (como organización de elementos en distintos grupos, puede que sin explicitar criterios y sin organizar todas las figuras según un/os mismo/s criterios, entendiéndose de este modo como previo a la clasificación) y al principio de la etapa (primer ciclo) o a los inicios de un tipo de clasificación (como la indicada anteriormente en grupos inclusivos).

La transformación de figuras en otras de clases próximas (T) supone comparar distintas figuras y llegar a clasificaciones de modo dinámico. Sería el caso, por ejemplo, de

considerar un cuadrado hecho con geotiras y buscar transformarlo en rombo. Esta transformación permite identificar las semejanzas y diferencias entre ambas, y las características definitorias de las dos clases. Geogebra puede ser un recurso potente para trabajar estas clasificaciones dinámicas, que consideramos encierran más complejidad que las clasificaciones más estáticas. Es por ello que vemos que este tipo transformaciones tienen sentido a partir del segundo ciclo de Primaria, estando relacionadas con las clasificaciones inclusivas y con un pensamiento flexible.

En resumen, consideramos que la Geometría implicada en este estudio es un contenido que nos permite acercarnos al conocimiento profesional de la maestra. Con este apartado se ha pretendido establecer aspectos propios del contenido que se trabajan a nivel conceptual y procedimental en la etapa de Educación Primaria y que son manifestados por la maestra en su aula.

## **I.4 Síntesis**

En este capítulo se revisan los estudios previos acerca del conocimiento profesional del profesor, y las concepciones sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las matemáticas. Estos aspectos han sido estudiados por los investigadores durante décadas y actualmente siguen siendo objeto de estudio.

Las concepciones de los maestros, según hemos expuesto entendidas como en Climent (2005), nos ayudará a comprender, por parte del investigador, el posicionamiento y el conjunto de creencias que posee el maestro, tales como: metodología, la concepción de la matemática escolar, la concepción del aprendizaje, el papel del alumno y el papel del maestro.

Por otra parte, los conocimientos están íntimamente conectados con las concepciones, como expone Thompson (1984, 1992). Este campo de estudio es de gran interés y han surgido grandes grupos de investigación respecto de este objeto de estudio. Las últimas investigaciones nos conducen a utilizar el modelo del MTSK para comprender el conocimiento que el profesor (Carrillo et al., 2013). La principal característica para justificar el uso de este modelo es que el carácter especializado del conocimiento del profesor se extiende a todos los subdominios desarrollados, y elimina la restricción que existía con otros modelos. Es importante señalar las principales características de este modelo. En esencia, se sigue manteniendo la división establecida por Shulman (1986),

entre dominios del SMK y PCK, pero sus contenidos han sido desarrollados, obteniéndose subdominios como: conocimiento de los temas matemáticos (KoT), donde se da cabida a lo relacionado con el propio contenido; una estructura matemática (KSM), como la red que sustenta todos esos contenidos; una práctica matemática (KPM), como la forma de conocer, crear o producir matemáticas. Y por la parte del PCK, el conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), cómo el profesor conoce estrategias, modos de representación, ejemplos...; El conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), como el conocimiento del proceso de comprensión de los estudiantes; y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), como el currículo institucional, la literatura de investigación.

Como aspecto tema matemático se ha considerado el bloque de Geometría, concretamente la unidad de clasificación de figuras planas, donde se profundiza en los diferentes contenidos conceptuales y procedimentales que han sido manifestados en el aula por parte de la maestra. Consideramos que un estudio en profundidad de este tema matemático, nos ayuda a encontrar diferentes aspectos del conocimiento de la maestra.

# **CAPÍTULO II: DISEÑO METODOLÓGICO**

## CAPÍTULO II: DISEÑO METODOLÓGICO

II. Introducción .....	53
II.1 Objetivos y problemas de investigación .....	53
II.2 Aspectos metodológicos sobre investigaciones en MK y PCK.....	55
II.3 Caracterización de la investigación .....	58
II.4 Diseño del estudio: Estudio de caso .....	60
II. 4.1 Nuestro caso, la maestra Inés <i>¿Por qué volver al caso de Inés?</i> .....	61
II.5 Instrumento de recogida de información: La observación de aula .....	63
II.6. Técnicas e instrumentos de análisis de la información.....	64
II.6.1. Instrumentos de análisis .....	64
II.6.1.1 Instrumento de análisis de las manifestaciones de las concepciones del maestro de Primaria respecto de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática..	64
II.6.2 Análisis de la información.....	71
II.6.2.1 La transcripción de las grabaciones.....	71
II. 6.2.2 Elaboración de informes por sesión.....	74
II. 6.2.3 Informe conjunto .....	78

## **II. Introducción**

En este capítulo se presentan los problemas y objetivos que han dado lugar a esta investigación, y las estrategias metodológicas que se ponen en juego para abordar los problemas planteados y conseguir los objetivos previstos, justificando los diversos instrumentos que han sido empleados. El diseño será el de un estudio de caso.

### **II.1 Objetivos y problema de investigación**

Dentro de las etapas fundamentales de una investigación, es la generación de la pregunta de investigación con sus respectivos objetivos la que acota el trabajo por parte del investigador y lo impulsa. En nuestro caso, partimos de nuestro interés por comprender más acerca del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y nos formulamos la siguiente pregunta general: ¿Qué conocimiento profesional moviliza un profesor en la clase respecto de la enseñanza de las matemáticas?

Para la resolución de este problema de investigación, actualmente se están desarrollando distintos modelos que ofrecen diferentes aproximaciones al objeto de estudio en cuestión, los cuales fueron presentados y discutidos en el (apartado I.1.2). En nuestro caso, el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) tiene una naturaleza dual que se adapta a esta investigación. Por un lado, es un modelo, con sustento teórico, que nos permite acceder de modo analítico al conocimiento matemático del profesor, y a su vez puede usarse como herramienta metodológica para explorar dicho conocimiento en las situaciones donde el profesor ejerce su labor, gracias a la construcción de categorías internas a cada subdominio con las que podemos profundizar en el fenómeno observado (Flores-Medrano, 2015).

Otro de los focos en el que nos centramos en la presente investigación es en las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este aspecto está considerado en el modelo MTSK, que las ubica justo en el centro como elemento que permea al conjunto de los subdominios, aunque no han sido foco de atención en los trabajos desarrollados hasta el momento. Esto nos ofrece un campo donde poder profundizar en cómo las concepciones nos ayudarán a encontrar relaciones entre los subdominios del MTSK. Pretendemos que las concepciones guíen el análisis de modo

que, ante la identificación de una concepción determinada podamos conectarla con elementos de conocimiento de los subdominios. La identificación de esas conexiones puede ayudarnos a entender cómo se pone en la acción esos conocimientos.

Como consecuencia de lo anterior, concretamos la pregunta general que nos habíamos planteado inicialmente en las siguientes:

- ¿Qué conocimiento especializado para la enseñanza evidencia una maestra de primaria, en el contexto de la clasificación de figuras planas? ¿Qué papel juegan las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en dichos conocimientos?

Afrontamos la respuesta a esta pregunta de investigación mediante el siguiente objetivo:

Identificar y comprender el conocimiento matemático especializado para la enseñanza de una maestra de primaria respecto de la enseñanza de polígonos.

En particular, tratamos de:

- Identificar y comprender elementos de los distintos subdominios del MTSK de la maestra en relación con la enseñanza de polígonos, así como las posibles relaciones entre dichos subdominios.
- Detectar las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y su relación con los subdominios del conocimiento especializado de la maestra para la enseñanza de polígonos.
- Obtener una visión integrada del MTSK de la maestra (comprensión de los subdominios inspirada por el conocimiento (del investigador) de las concepciones de aquella).

A continuación presentamos una revisión de diferentes estudios en los que especifican los diferentes aspectos metodológicos que han utilizado para tratar de comprender el Conocimiento Profesional del profesor.

## **II.2 Aspectos metodológicos sobre investigaciones en MK y PCK.**

Después de caracterizar y conceptualizar el MK y PCK (en el marco teórico), en la siguiente revisión destacamos los principales aspectos metodológicos presente en las distintas investigaciones que se han llevado a cabo desde la década de los 80 en relación con el conocimiento profesional. Según Hill, Sleep, Lewis y Ball (2007), la mayor parte de los esfuerzos, por parte de los investigadores, ha sido intentar evaluar la adecuación de los conocimientos individuales de los profesores o de la calidad de su instrucción. Por otro lado, existen diversos investigadores que han tratado de evaluar los conocimientos de los profesores ligados a su comportamiento en el aula (e.g., Borko et al., 1992; Leinhardt y Smith, 1985).

En los estudios revisados se han utilizado tanto enfoques cuantitativos y/o cualitativos, para el tratamiento de la información que se ha recogido a través de, por ejemplo, entrevistas, cuestionarios, videos, observaciones de clases, mapas conceptuales (Williams, 1998), entre otros, con el fin de examinar el SMK y PCK. En esta revisión vamos a comenzar por aquellos trabajos que han adoptado un enfoque cuantitativo, para, posteriormente, centrarnos en los que se han conducido desde un enfoque cualitativo, destacando, en ambos casos, los principales instrumentos que han sido utilizados por los diferentes investigadores.

Dentro de las investigaciones que han dado un tratamiento cuantitativo a la información, encontramos estudios que han utilizado las entrevistas y los cuestionarios para examinar SMK, PCK (e.g., Ball, 1988, 1990; Even, 1990, 1993 Ma, 1999). En Ball (1990a) el cuestionario y la entrevista fueron diseñados para explorar ideas, sentimientos y formas de relacionarse de los participantes con las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. Los cuestionarios se “basan en escenarios de enseñanza en el aula y están entrelazados con conocimiento del contenido” (Ball, 1990a, p.452) Para el análisis, se calcularon las frecuencias para las respuestas al cuestionario, y se realizó un análisis sustantivo de la preguntas, lo que dio lugar a la creación de un conjunto de categorías de respuesta, así como un conjunto de categorías de los tipos de cambios que se observaban en las respuestas de los encuestados. Ball (1988, 1990a, 1990b) estudia principalmente conocimiento de la materia (Subject Matter Knowledge –SMK-) a los estudiantes en formación inicial (conocimiento sustantivo) al principio del programa de pregrado. En

el estudio (Ball, 1990a), Ball utiliza cuestionarios y entrevistas para evaluar la comprensión de los profesores sobre la división de fracciones. En esos cuestionarios, las preguntas están constituidas por una expresión matemática (por ejemplo: " $4 \frac{1}{4} \div 1/2$ ") y cinco problemas, de los cuales solo uno se corresponde con dicha expresión de manera correcta.

En el siguiente estudio, Ball (1990b) entrevistó además a los futuros profesores para examinar los conocimientos matemáticos y pedagógicos sobre la división. Los futuros profesores se encontraban en el mismo escenario que con el estudio anterior (Ball, 1990a), proporcionando otros dos escenarios sobre la división por cero y la resolución de ecuaciones algebraicas que involucran la división. Los futuros profesores en este estudio tenían que preguntar a los estudiantes la respuesta de qué es 7 dividido entre 0. Dado que según las respuestas obtenidas, el conocimiento sobre la división, parecía fundado más en la memorización que en la comprensión conceptual (Ball, 1988, 1990a, 1990b), los futuros profesores no podían dar respuestas articuladas con principios y significado (Ball, 1990b). En estos estudios no disponemos de las técnicas de análisis que se emplearon, puesto que están sacados de artículos en los que no incluían la parte empírica de la investigación seguida.

Otro de los autores que usa un análisis cuantitativo es Even (1990, 1993) que utilizó el cuestionario y la entrevista para hacer frente al estudio del SMK y PCK de futuros profesores. Eligió 162 estudiantes para construir un marco teórico de SMK para enseñar conceptos matemáticos en general y el concepto de función, en particular. Dentro del SMK acerca de la comprensión conceptual de la función se estudió: la arbitrariedad y la ambivalencia. El cuestionario incluyó nueve problemas no estándar que abordan los diferentes aspectos de SMK de profesores sobre las funciones y seis artículos que se refieren sobre "los estudiantes" donde se exponían soluciones erróneas o malentendidos que se deben analizar. Además, se llevó a cabo una entrevista, y se pidió a los estudiantes que reflejaran su forma de pensar y de explicar y aclarar sus respuestas al cuestionario. Muchos de los futuros profesores afirmaron que los conceptos que funcionaban son las ecuaciones y todas las funciones pueden ser representadas por las fórmulas. En este estudio, también se obvian las técnicas de análisis que fueron empleadas.

Existen otros estudios que han dado un tratamiento cualitativo a los datos recogidos para su análisis. Por ejemplo, los mapas conceptuales han sido utilizados como un método directo para mirar la organización y la estructura del conocimiento de un individuo dentro de un dominio particular (Williams, 1998). Los investigadores han argumentado que los mapas conceptuales pueden representar gráficamente la evolución de los conocimientos construidos y reconstruidos (Kinchin, Hay y Adams, 2000). La construcción de un mapa conceptual está destinada las concepciones del autor del mapa, en lugar de una reproducción de datos memorizados (Jonassen, Ambruso y Olesen, 1991, 1992).

Una técnica de recogida de información bastante habitual entre estos estudios es la observación en el aula. El abordaje analítico seguido se basa en el uso de instrumentos y procesos adaptados específicamente al tópico de estudio, usando principalmente una codificación manual (Borko et al., 1992; Leinhardt y Smith, 1985; y Hill et al., 2007). Aunque el método prioritario de recogida de datos era la observación de aula, los investigadores lo combinaron con otros métodos para profundizar en el conocimiento matemático para la enseñanza (Hill, et al., 2007 p.125).

Borko et al. (1992) examinaron los conocimientos mediante la observación de la enseñanza de futuros maestros. El estudio se centró en unos pocos minutos de una sesión en la formación inicial de maestros en el que el formador de maestros proporciona una explicación sobre la división del algoritmo de fracciones. Los resultados muestran que este profesor utiliza un modelo concreto para representar la multiplicación en lugar de la división. Con base en la observación en el aula, los investigadores utilizaron los datos de la entrevista y problemas matemáticos abiertos para explicar su instrucción en el aula.

Los estudios que tratan de comprender SMK y PCK de los profesores han puesto de relieve la relevancia de la observación de aula como método para la recogida de información. Estas observaciones proporcionan oportunidades interesantes para acceder al conocimiento matemático del profesor que se moviliza en la acción (Flores-Medrano, Escudero, Aguilar, 2013). Aunque suelen complementarse con otros métodos (como por ejemplo, entrevistas personales, cuestionarios, viñetas, entre otros), las observaciones constituyen un contexto privilegiado para estudiar el conocimiento, pues como indican Ball et al (2008), “solamente sentándose por unos momentos basta para darse cuenta de

que las matemáticas que los maestros trabajan con la instrucción no son las mismas matemáticas enseñadas y aprendidas en las clases de la universidad” (p. 404).

### **II.3 Caracterización de la investigación**

Como hemos mencionado anteriormente, el objetivo de nuestra investigación es la comprensión del conocimiento matemático especializado de una maestra de Primaria en relación con la enseñanza de polígonos.

Comenzaremos aclarando el paradigma con el que hemos afrontado esta investigación. Seguimos la definición de Bassey (1999) que lo define como “una red de ideas coherentes sobre la naturaleza del mundo y de las funciones de los investigadores que, aceptadas por una comunidad de investigadores, condicionan las pautas de razonamiento y sustentan las acciones en la investigación” (p. 42). Puede entenderse que el paradigma es un esquema teórico, un modo de percibir y comprender el mundo, que nos lleva a identificar determinadas áreas problemáticas e implica también una determinada forma de acercarse a ella, para analizarla e interpretarla (Muñoz-Catalán, 2009).

Existen tres cuestiones básicas que constituyen un paradigma: una perspectiva ontológica, otra epistemológica y otra metodológica (Lincoln y Guba, 1985). Éstas son tres cuestiones distintas pero están inter-relacionadas entre sí, pues la forma como nos posicionemos ante una de las cuestiones repercute directamente en las otras dos (Santos, 2002).

Respecto a la cuestión ontológica, consiste en la interpretación particular que el investigador realiza sobre la realidad, es decir, “en la forma como nos acercamos a la realidad y lo que consideramos posible saber sobre esa misma realidad” (Santos, 2002, p.158).

En este trabajo, no creemos que exista un conocimiento matemático especializado totalmente objetivable al que seamos capaces de acceder y reflejar en nuestro informe de investigación. Por el contrario consideramos que el conocimiento profesional es un fenómeno social, construido por la maestra informante en este estudio en interacción con los distintos contextos donde se desarrolla su quehacer profesional y como

consecuencia de su compromiso con mejorar su práctica en relación con las matemáticas.

En cuanto a nuestra perspectiva epistemológica, entendida como la relación entre lo que se sabe y se puede saber (Santos, 2002), consideramos que nuestros resultados son una interpretación que como investigadores realizamos del conocimiento de la maestra. Este conocimiento que resulta de la investigación, nos permite conocer la realidad y cuál es la base de ese conocimiento (Muñoz- Catalán, 2009).

En cuanto a la cuestión metodológica, la metodología se refiere a cómo construimos conocimiento respecto de la realidad, es decir, cómo podemos obtener dicho conocimiento. En este apartado es cuando el investigador se pregunta cómo debería proceder y el porqué de las decisiones que toma.

Desde esta perspectiva, podemos afirmar que nos hemos acercado al fenómeno de estudio bajo un paradigma interpretativo (Bassegy, 1999), ya que estamos preocupados en comprender, descubrir, e interpretar la realidad, más que en probar hipótesis previamente determinadas (Merriam, 1988). No pretendemos “explicar, controlar y predecir” como en el paradigma positivista, ni “conseguir la emancipación y transformación de la realidad, como pretende el paradigma crítico” (Muñoz-Catalán, 2009, p. 149). Cuando el propósito principal es comprender e interpretar la realidad, entonces consecuentemente se suele hacer uso de métodos y técnicas de naturaleza cualitativas (sin que por ello se excluyan el uso de técnicas de naturaleza cuantitativa, aunque supeditados al interés interpretativo) que permitan conocer la realidad en un proceso de indagación. En este abordaje interpretativo somos conscientes de que construimos nuestra propia interpretación del fenómeno a partir de lo que consideramos que se pone de manifiesto en las actuaciones por parte de la maestra.

Como último aspecto, una vez mencionado el paradigma, el siguiente paso es profundizar en el diseño de la investigación. El diseño consiste en un estudio de caso único, Inés, que también sigue las características del *estudio de caso instrumental* de Stake (2000, 2005), que desarrollaremos en el siguiente apartado.

## II.4 Diseño del estudio: Estudio de caso

En este trabajo nos centramos en el maestro y en su actividad en el aula, y nuestro interés es comprender el conocimiento especializado del profesor que pone de manifiesto en ella, por lo que se decidió optar por un diseño coherente con un Estudio de Caso, en el que el informante fuese único, y que nos permitiera responder a los objetivos formulados.

Coincidimos con la definición que proporciona de Bassey (1999) sobre qué es un estudio de caso: “Un estudio de caso es el estudio de una singularidad conducida en profundidad en entornos naturales” (p. 47), es por tanto, la búsqueda de esa singularidad la que caracteriza el estudio. A este aspecto añadimos la profundidad, puesto que los procedimientos de análisis nos han permitido adentrarnos en los datos hasta aspectos minuciosos, y por último, su entorno natural, puesto que se ha ido al aula para observar a la maestra.

Desde esta perspectiva, los estudios de caso se pueden describir desde dos perspectivas: los objetivos que persigue y los resultados obtenidos (Stake, 2000, 2005). En función de los primeros, nuestro estudio es *intrínseco*, puesto que corresponden a estudios que se llevan a cabo para profundizar y obtener una mayor comprensión del caso en sí mismo, y entender el caso particular. Por otro lado, están los estudios *instrumentales*, en los que se examina un caso particular con el fin de proporcionar más información sobre un tema o para formular una abstracción. Un caso de tipo instrumental aporta datos (es un instrumento) para comprender otros fenómenos; y por último *múltiples o colectivos*, consisten en grupos de estudios individuales que se realizan para obtener una imagen más completa del fenómeno a estudiar; es un estudio instrumental que se extiende a varios casos.

En función de los resultados Stake diferencia entre *descriptivo*, que proporciona narraciones y busca describir un caso particular, aportando información básica, el cual es nuestro caso; *exploratorio*, como piloto para otros estudios o preguntas de investigación; y por último *explicativo*, que prueba teorías y provee la interpretación.

Podemos decir, que nuestro estudio, según la primera clasificación y de acuerdo al objetivo general y específicos planteados, adopta las características del *estudio de caso intrínseco* en el que se busca profundizar y obtener una mayor comprensión del caso en

sí mismo, y entender el caso particular. El caso aporta información sobre el conocimiento especializado de la maestra, lo que puede servir como base para contrastar los resultados con otros casos e investigaciones, con el objetivo de comprender la naturaleza en sí del fenómeno. Asimismo, afirmamos que es un estudio de tipo *descriptivo*, porque busca describir y comprender la realidad observada a partir de las acciones de la maestra en su aula. Esto nos permite construir interpretaciones sobre el conocimiento especializado del profesor, respecto del contenido matemático de estudio.

#### **II. 4.1 Nuestro caso, la maestra Inés *¿Por qué volver al caso de Inés?***

Como hemos mencionado anteriormente, la informante Inés se seleccionó para el estudio del desarrollo profesional en la tesis de Climent (2005). En este apartado se presenta una justificación de por qué volver al caso de Inés, indicando su valor como informante que la convierte en un caso especial para nuestro estudio.

Cuando se realizaron las videograbaciones de aula en la tesis anteriormente referida, la maestra poseía una experiencia de 20 años en Educación Primaria, se encontraba insatisfecha con su actuación en la enseñanza de la matemática y sentía carencias respecto de ésta. Así, tomó la decisión de formar parte de un Proyecto de Investigación Colaborativa (PIC) formado por otras maestras de Primaria y formadores investigadores, con el cual afrontó un proceso de mejora de su práctica para hacerla coherente con la resolución de problemas.

Los resultados obtenidos de la investigación de Climent (2005), nos invitaron a profundizar en este caso principalmente porque se evidenciaron modificaciones en distintos aspectos de su desarrollo profesional. En lo que respecta a los conocimientos, se observó un cambio en la necesidad de conocimiento de contenido matemático, puesto que al inicio del estudio, la maestra, consideraba que no necesitaba más conocimiento que el del contenido que se iba a enseñar. A la finalización del estudio, había establecido nexos entre el contenido y su enseñanza, manifestando un cambio en el que era necesario saber más matemáticas que el contenido matemático escolar. Estos conocimientos le permitían tomar decisiones fundamentadas sobre la enseñanza, ser crítica con el libro de texto, entre otros. Además, se evidenció un cambio y ampliación

en sus conocimientos didácticos del contenido en aspectos matemáticos específicos, y sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática general. En cuanto a las concepciones, se observó un cambio en sus concepciones respecto de su visión de la matemática escolar, sobre todo relacionado con qué y para qué enseñar, Además las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática se mantuvieron se mantuvieron constantes a lo largo del estudio, produciéndose un afianzamiento más que un cambio.

Estos resultados mencionados, y las características de la maestra, convierten a Inés en buena informante para este trabajo. Sin embargo, Inés como caso del presente estudio, presenta características propias que caracterizamos basándonos en los dos rasgos analíticos que proporciona Silverman (2008, p.127), apoyándose en Punch (1998):

Primer rasgo: *“Cada caso será un caso de algo en lo que el investigador está interesado. Por tanto, la unidad de análisis debe definirse al principio con el fin de clarificar la estrategia de investigación”*.

Teniendo en cuenta que nuestro objetivo es conocer y comprender el conocimiento profesional de una maestra, respecto de la enseñanza de las matemáticas, nos encontramos ante una maestra, que participaba en un Proyecto de Investigación Colaborativa, que tenía interés por su formación implicándose en un proceso de mejora de su práctica, que era buena informante, y la más fundamental de sus características, es que había sido ya analizada, obteniéndose unos resultados interesantes respecto de su conocimiento.

Segundo rasgo: *“Cada caso tiene sus límites que deben ser identificados en una fase temprana de la investigación”*

Un caso es un sistema altamente complejo y en el que interviene una gran cantidad de variables que le otorgan su significado. En el caso de Inés, hemos tomado dos criterios para establecer los límites:

-Límite temporal: El tiempo en el que se realizó la recogida de información fue durante el curso 1999/2000, en el mes de mayo, y se recogieron observaciones de aula relacionadas con el tema de polígonos. En total fueron 8 sesiones aproximadamente de una hora cada sesión.

-Límite en los contextos donde se recoge la información: En nuestro caso el contexto de su aula es idóneo ya que en él podemos visualizar los diferentes conocimientos que se pone en juego en su quehacer como profesional de la educación.

## **II.5 Instrumento de recogida de información: La observación de aula**

Las observaciones de aula fueron grabadas en vídeo y contienen casi la totalidad de la interacción de la maestra con sus alumnos en gran grupo. La observación suele ser la técnica de recogida de datos de base del estudio de caso, pues el investigador observa los fenómenos que suceden, apreciando las características de los elementos de análisis en su entorno natural: una clase, un profesor, un grupo de personas, una escuela o una comunidad (Cohen y Manion, 2002).

Las videograbaciones están centradas en la unidad didáctica sobre polígonos. En total se registraron 8 videograbaciones de una duración aproximada de una hora cada una. Anteriormente se había trabajado con la unidad de fracciones, y esta unidad daba comienzo al bloque de geometría. Durante las sesiones la cámara de vídeo se situó en la parte trasera del aula, de modo que se pudiera observar y grabar la totalidad del escenario, a los niños (dispuestos en forma de “U”), y a la maestra (que apenas se mantiene en un sitio fijo). La cámara se posaba sobre un trípode, cuidando que el campo de visión incluyera sobre todo a la maestra y los niños que en ese momento intervenían, siendo la maestra el foco principal de la videograbación. El papel de Climent durante la observación fue no participante, habiendo algunas llamadas de atención por parte de Inés sobre su presencia a los alumnos para que contaran qué habían realizado en relación con la unidad en otros momentos del día que no habían sido observados por su parte.

El principal motivo por el que se eligió esta unidad es porque en ese periodo se intensificó la recogida de información en el contexto de Climent (2005) sobre la práctica de la maestra, debido a que en el seguimiento de sus fichas y sus declaraciones sobre su práctica, se observaba su progresivo afianzamiento y ampliación de la perspectiva de resolución de problemas en sus aulas. Esta característica, y puesto que

nuestro interés está en el conocimiento de la maestra en acción, hace que esta unidad didáctica sea de especial interés por nuestra parte.

## **II.6. Técnicas e instrumentos de análisis de la información**

### **II.6.1. Instrumentos de análisis**

Para el análisis del conocimiento matemático de nuestro caso utilizamos el instrumento de análisis MTSK, con los dominios, subdominios y categorías descritas en el apartado I.1.3 del capítulo I (Marco Teórico).

Respecto a las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática, se ha utilizado el instrumento CEAM, adaptado por Climent (2005) de Carrillo (1998) para el caso del maestro de primaria, que describimos en el siguiente apartado.

#### **II.6.1.1 Instrumento de análisis de las manifestaciones de las concepciones del maestro de Primaria respecto de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.**

A continuación, pasamos a describir el instrumento de análisis de las concepciones de los maestros de Primaria respecto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se trata de un instrumento que adaptó Climent (2005, p. 42-54) del elaborado por Carrillo (1998) para el caso del profesor de Secundaria. La finalidad con la que utilizamos este instrumento no es para ubicar a Inés en alguna de las tendencias consideradas por el modelo, sino que nuestra familiarización con él nos ha permitido ganar *sensibilidad teórica* (Strauss y Corbin, 1994) para poder identificar sus concepciones.

Precisamente debido a que no pretendemos ubicar a la maestra en una tendencia, hemos realizado una reorganización del instrumento inicial para adaptarlo a este estudio. Los instrumentos de Climent (2005) y Carrillo (1998) están presentados en una tabla que incluye descriptores de tendencias didácticas (tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa) agrupados por categorías y subcategorías, organización que permite realizar una doble lectura: horizontal para establecer diferencias entre las distintas tendencias, y vertical, cuyos indicadores que caracteriza a cada de las tendencias.

Para este trabajo, hemos utilizado como organizadores principales las categorías: Metodología (tabla 1, p.67); concepción de la matemática escolar (tabla 2, p.68); concepción sobre el aprendizaje (tabla 3, p.69); papel del alumno (tabla 4, p.70); y papel del profesor (tabla 5, p.70). En cada una de ellas identificamos las categorías que las caracterizan y, a continuación, indicamos cómo se definen en el caso de cada una de las tendencias (indicadores), por lo que la tabla invita a una lectura en horizontal.

Como dijimos en el apartado I.1.3 del Marco Teórico, las concepciones se encuentran ubicadas en el centro del modelo de conocimiento MTSK<sup>18</sup>. Aclaremos que la categoría Concepción de la Matemática Escolar la consideramos asociadas al subdominio *Concepciones en Matemática*, esto es debido a la naturaleza de la propia categoría. En la etapa de Educación Primaria, no encontramos sentido a hablar de concepciones en matemática, ya que prácticamente la totalidad de la matemática que se trabaja es una matemática escolar, entendida ésta como el conjunto de significados que elabora el niño como consecuencia de la actividad matemática y que provoca el desarrollo de capacidades y habilidades personales que le permiten comprender la realidad (Azcárate y Cardeñoso, 1994). Además, en el estudio de Climent (2005), se destacó la progresión que tuvo esta concepción respecto del resto de sus concepciones, que permanecían constantes, por lo que también se decidió separarlas. Todas las demás categorías las relacionamos con el subdominio de *Concepciones sobre el aprendizaje y enseñanza de la matemática* del modelo MTSK.

Se ha respetado igualmente la distinción de las cuatro tendencias didácticas que se presentan en ambos trabajos (tradicional, TR; tecnológica, TE; espontaneísta, E; e investigativa, I), dentro de cada categoría. Hacemos un resumen de cada una de ellas, como se presentan en el trabajo de Climent (2005).

**TRADICIONAL:** La tendencia tradicional se caracteriza principalmente por la adquisición de conceptos y uso de la exposición magistral como técnica habitual. El libro de texto es el único material curricular que se usa en el aula. La asignatura se guía por una programación prescrita y se presupone que el aprendizaje se realiza utilizando la memoria como único recurso, es decir, el alumno se hace responsable de su aprendizaje y aprende los conocimientos por el simple hecho de que el profesor se los presente.

---

<sup>18</sup> En la representación de la imagen del modelo aparece 'Beliefs', hemos decidido respetar las siglas anglófonas, aunque se va a usar indistintamente el término concepción y beliefs.

**TECNOLÓGICA:** En esta tendencia, el profesor simula el proceso de construcción de los contenidos apoyado habitualmente en medios técnicos, y sigue una programación cerrada, aunque tiene un interés en los procesos lógicos, y prima un carácter práctico. Presupone que para aprender, al alumno le basta entender, asimilar el conocimiento que proviene del exterior, considerando al alumno como el principal responsable de los resultados del aprendizaje. El alumno imita el estilo cognitivo del profesor, pues reproduce el proceso lógico mostrado por éste cuando transmite los contenidos de aprendizaje.

**ESPONTANEÍSTA:** La tendencia espontaneísta se caracteriza por un conocimiento no organizado a partir de una propuesta por parte del profesor de actividades de manipulación de modelos. La programación didáctica es un documento que no dispone de una organización inicial puesto que está en constantes cambios. La asignatura posee un carácter formativo, con objeto de servir de instrumento para un cambio actitudinal del alumno (con respecto al aprendizaje y la vida), así como para la adquisición de valores racionales que le permitan conformar una actitud lógica ante los problemas cotidianos. El profesor, por su marcado carácter humanista y especialista en dinámica de grupos, induce al alumno a participar en las actividades que promueve, que constituyen la clave de la motivación de éste, y éste pasa de una a otra, participando intensamente en cada una de ellas.

**INVESTIGATIVA:** La tendencia investigativa se caracteriza por la adquisición de unos conocimientos determinados, a través de la investigación. El profesor no dispone de un recorrido concreto en su programación puesto que interesan tanto la adquisición de conceptos, como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia y el trabajo escolar en general, siendo éstos (materia y trabajo escolar) los que determinan el peso específico de cada una de las componentes citadas. Además, piensa que el aprendizaje se produce a través de investigaciones que han sido planificadas por él, manteniendo como dinamizador ideal del aprendizaje el equilibrio entre los intereses y estructura mental de los alumnos y los de la matemática. Los objetos de aprendizaje, tienen la capacidad de ser aplicados en contextos diferentes de donde fueron aprendidos.

<b>Metodología</b>	La actividad en el aula	TR1: La actividad del aula se caracteriza por la repetición iterada de ejercicios tipo.
		TE1: La actividad del aula se caracteriza por la repetición de ejercicios que intentan reproducir los procesos lógicos y, coherentemente, el estudio de los errores por parte de los alumnos.
		E1: Los ejercicios son sustituidos por una actividad experimental no reflexiva. Hay cierta tendencia a poner en juego métodos, recursos, etc.
		I1: Los alumnos se enfrentan habitualmente a situaciones para las que no poseen procesos de resolución dados (situaciones problemáticas, ya sean problemas o investigaciones, frecuentemente contextualizadas en problemáticas reales).
	Praxis	TR2: Explicación del maestro, a menudo siguiendo la presentación del libro de texto, como técnica habitual.
		TE2: El maestro expone los contenidos pero no en su fase final, sino simulando su proceso de construcción, apoyado en estrategias expositivas (uso de ejemplos, cuestiones a los alumnos, uso de material para ejemplificar...).
		E2: El maestro propone actividades de manipulación de modelos (propiciando, a menudo, el uso de materiales manipulativos), a través de los cuales se producirá, eventualmente, un conocimiento no organizado.
		I2: El maestro tiene organizado el proceso que llevará al alumno a la adquisición de unos conocimientos determinados, a través de su investigación.
	Fuentes de información	TR3: La principal fuente de información para el alumno la constituyen el maestro y el libro de texto.
		TE3: El libro de texto se ve ampliado por otros materiales donde se encuentra el “conocimiento establecido” (enciclopedias, libros especializados...). Se mantiene el papel del maestro como principal fuente de información.
		E3/ I3: La información que se moviliza en el aula puede provenir del maestro, de los alumnos, de otras personas que intervengan, de situaciones cotidianas...
	Diferenciación individual	TR/TE4: El maestro “enseña” para un alumno ficticio que identifica con el alumno “medio” del grupo-clase, homogeneizando el grupo. No se realiza diferenciación individual en el proceso de enseñanza
		E4: La actividad que se genera en el aula permite que cada alumno la realice según sus posibilidades, contando con la ayuda de sus compañeros. Se atiende implícitamente (no planificado) a la diferenciación individual.
		I4: Se atiende explícitamente a la diferenciación individual mediante el planteamiento de actividades que permiten el trabajo en distintos niveles y con actividades específicas para cada necesidad.
	Uso de materiales manipulativos	TR5: No se usan materiales manipulativos.
		TE5: Se usan materiales manipulativos para reforzar, explicar o dar utilidad a la teoría, de manera aislada (Se usan para ejemplificar contenidos concretos, sin ampliar la posibilidad de los recursos más que a esos tópicos concretos.)
		E5: Se usan asiduamente materiales variados sobre todo para motivar a los alumnos y facilitar su comunicación. Es fundamental que éstos los manipulen.
		I5: Se usan materiales como apoyo a y detonante de la investigación matemática del alumno, y para apoyar el paso del pensamiento concreto al abstracto.
	Objetivos	TR6: Los contenidos se identifican con los conceptos, enunciados como objetivos de carácter terminal. El propio tratamiento de contenidos que podrían ser procedimentales los convierte en conceptuales
		TE6: Se persiguen objetivos terminales y funcionales, poniéndose más énfasis en objetivos procedimentales locales (De los contenidos procedimentales de la matemática de Primaria se consideran los específicos de tópicos concretos (como por ejemplo la suma de fracciones) más que los procedimientos generales como heurísticos o establecer conjeturas.)
E6: Los objetivos definen un marco genérico de actuación (carácter orientativo) y están sujetos a modificaciones en cuanto a consecución (flexibles)		
I6: Los objetivos marcan claramente las intenciones educativas, pero están sujetos a reformulaciones bien fundamentadas.		
Programación	TR7: El maestro sigue una programación prescrita de antemano, externa a él y rígida, sin plantearse relaciones entre las unidades.	
	TE7: Para el maestro la programación es un documento cerrado, que elabora previamente en función de sus conocimientos (de la materia escolar, de sus alumnos, de su experiencia previa en la enseñanza de esos contenidos...).	
	E8: La programación es un documento vivo que, por basarse en los intereses que, en cada momento, manifiestan los alumnos y en la negociación con ellos, no dispone de una organización inicial.	
	I8: El maestro dispone de una propuesta organizativa de los elementos del programa, pero no está vinculado a un recorrido concreto. Existe una trama que vincula y organiza el conocimiento por la que el maestro se mueve dependiendo de los intereses, nivel... de los alumnos.	

Tabla 1: Instrumento CEAM (I)

<b>Concepción de la Matemática Escolar</b>	Orientación	TR9: La asignatura está orientada, exclusivamente, hacia la adquisición de conceptos y reglas.
		TE9: Interesan tanto los conceptos y reglas como los procesos lógicos que los sustentan.
		E9: No interesan tanto los conceptos como los procedimientos y el fomento de actitudes positivas (hacia el trabajo escolar y como ciudadano).
		I9: Interesan tanto la adquisición de conceptos, como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia, el trabajo escolar en general y como ciudadano, siendo la materia y el trabajo escolar los que determinan el peso específico de cada una de las componentes citadas.
	Contenido	TR10/TE10: La matemática escolar coincide con la que se muestra básicamente en los libros de texto. Se identifica con contenidos matemáticos escolares y dentro de éstos se suelen considerar casi exclusivamente las normas del sistema de numeración decimal (números naturales, decimales, enteros y fraccionarios) y sus operaciones, poniendo énfasis en estas últimas. No se suelen considerar contenidos geométricos y si se hace consiste en un listado de nombres (de figuras, de unidades de medida...) y fórmulas. No se establecen relaciones entre los contenidos.
		E10: La matemática inmersa en la problemática real es el único referente de los conocimientos a movilizar en el aula. (Se trata de la matemática del entorno sociocultural, que no se circunscribe en principio a los números y sus operaciones (tiene cabida, por ejemplo, la geometría del entorno o la organización de la información)
		I10: La matemática escolar tiene su punto de partida en la etnomatemática de los alumnos y recoge las necesidades socio-políticas, culturales... “Hacer matemáticas” con un carácter más formal (con la formalidad que tiene sentido alcanzar en esta etapa educativa) proviene del análisis de lo concreto. Como contenidos matemáticos escolares se consideran tanto los numéricos propios de la etapa, como los geométricos, la medida, el tratamiento de la información y la resolución de problemas, destacando este último.
	¿Cómo es?	TR11/TE11: La matemática escolar es exacta y se concibe acabada.
		E11: Se potencia la estimación y la aproximación, ligadas a contextos reales, y se concibe en construcción (se construye en el propio contexto escolar por parte de los alumnos).
		I11: La matemática escolar muestra su doble perspectiva de exactitud/aproximación dependiendo del contexto y se concibe en construcción.
	Finalidad	TR12: La finalidad de la asignatura es poner en conocimiento de los alumnos un cierto “panorama matemático” que se espera que aprendan y dotarles de las destrezas básicas para la vida diaria (desde un punto de vista muy restringido, casi de las aplicaciones numéricas básicas) y para el estudio tanto de otras disciplinas como el estudio futuro de la propia matemática (por los conocimientos que aporta).
		TE12: La asignatura ha de tener un carácter práctico que permita su aplicación utilitaria en la vida cotidiana y como instrumento para el estudio tanto de otras disciplinas como el estudio futuro de la propia matemática (tanto por los conocimientos que aporta como por contribuir al desarrollo del razonamiento en el alumno).
E12: La asignatura posee un carácter formativo, con objeto de servir de instrumento para un cambio actitudinal del alumno (con respecto al aprendizaje y a la vida), así como para la adquisición de los valores racionales que le permitan conformar una actitud lógica ante los problemas cotidianos.		
I12: La finalidad última de la asignatura es favorecer el desarrollo de una forma de pensamiento (matemático) que permita al alumno organizar, interpretar y comprender la realidad que le rodea, dotándolo de unos instrumentos que le posibiliten el aprendizaje autónomo.		

Tabla 2: Instrumento CEAM (II)

<b>Concepción del aprendizaje</b>	Aprendizaje	TR13: Se presupone que el aprendizaje se realiza, utilizando la memoria como principal recurso, por superposición de unidades de información.
		TE13: El aprendizaje se sigue concibiendo como memorístico, organizándose internamente según la lógica estructural de la materia.
		E13: Se aprende cuando el objeto de aprendizaje, que surge aleatoriamente del contexto, posee un significado para el alumno.
		I13: Los objetos de aprendizaje no sólo tienen significado, sino también la capacidad de ser aplicados en contextos diferentes de donde fueron aprendidos, adquiriendo así un carácter móvil a través de una malla conceptual.
	Tipo y forma	TR14: El único aprendizaje efectivo y correcto es el que proviene de un proceso deductivo (regla general-aplicación a casos particulares).
		TE14: Aunque el aprendizaje pueda comenzar por la observación de un proceso inductivo (de hecho es así como suele presentar el maestro los contenidos en la simulación de su construcción), el verdadero aprendizaje ha de apoyarse en un proceso deductivo.
		E14: El aprendizaje se produce a partir de la participación activa del alumno en procesos inductivos.
		I14: El aprendizaje comienza, por la observación de regularidades que permiten aflorar una conjetura; pero a ésta ha de seguir una comprobación razonable y, en la medida de lo posible, una generalización adecuada (adecuadas tanto la generalización como la comprobación al nivel de los alumnos).
	Procesos	TR15: El alumno se hace con los conocimientos por el simple hecho de que el maestro se los presente.
		TE15: Para aprender, al alumno le basta entender, asimilar el conocimiento que proviene del exterior.
		E15: El aprendizaje se produce, de manera espontánea, cuando el alumno está inmerso en situaciones que propician el descubrimiento.
		I15: El aprendizaje se produce a través de investigaciones que han sido planificadas por el maestro. Además, para que se produzca aprendizaje éste debe institucionalizarse.
	Importancia argumentativa	TR16: El maestro desea que el alumno explicita lo aprendido con la expresión usada por él. No le interesa la idea sino la mecánica. De ahí que no conceda especial importancia a que el alumno argumente sus conclusiones.
		TE16: Es importante que el alumno explicita la comprensión de los contenidos (se trata de una verbalización para comprobar que se está produciendo el aprendizaje deseado). La expresión de lo aprendido, con las palabras del alumno, muestra el resultado del aprendizaje.
		E16: Es importante que el alumno comunique (más que argumente de un modo más o menos justificado) sus conclusiones.
		I16: La expresión de lo que aprende por parte del alumno es una parte importante del propio proceso de aprendizaje. Es importante, además, que el alumno argumente sus conclusiones.
	Interacción maestro-alumnos-materia	TR17/TE17: El alumno interactúa con la materia y el maestro, siendo el último el intermediario entre ésta y el alumno. La interacción que se produce entre el profesor y el alumno no es equilibrada, siendo más fuerte el flujo en la dirección profesor alumno que la inversa.
		E17: El alumno interactúa con la materia, el maestro y sus compañeros, pero el énfasis se coloca en la interacción con los compañeros y el maestro.
		I17: Los principales elementos del entorno de aprendizaje interactúan entre sí (el alumno interactúa con la materia, el maestro y sus compañeros) de manera equilibrada.
	Tipo de agrupamiento	TR18/TE18: La única forma de agrupamiento que permite un verdadero aprendizaje es el trabajo individual.
		E18: La forma ideal de agrupamiento que propicia el aprendizaje es el trabajo en grupo, con sus correspondientes debates.
		I18: La forma de agrupamiento aconsejable para la producción de aprendizaje depende de la actividad a desarrollar.
	Dinamizador	TR19: La estructura de la propia asignatura, plasmada en la programación, es el dinamizador ideal del aprendizaje.
		TE19: El dinamizador ideal del aprendizaje es la lógica subyacente a los contenidos matemáticos escolares.
E19: El motor del aprendizaje son los intereses de los alumnos.		
I19: El dinamizador ideal del aprendizaje es el equilibrio entre los intereses y estructura mental de los alumnos y los de la matemática.		
Aptitud	TR20/TE20: La capacitación del alumno es inalterable y justifica en gran medida los resultados del aprendizaje.	
	E21/I21: La capacitación del alumno puede ser modificada.	
Actitud	TR22: La actitud del alumno hacia el aprendizaje es raramente transformable.	
	TE22: En la actitud del alumno hacia el aprendizaje hay aspectos que pueden sufrir cambios.	
	E22/I22: La actitud del alumno puede ser modificada.	

Tabla 3: Instrumento CEAM (III)

Capítulo II: Diseño Metodológico

<b>Papel del alumno</b>	Participación en el diseño didáctico	TR23/TE23: El alumno no condiciona ni directa ni indirectamente el diseño de las actividades, programación, etc.
		E23: El alumno condiciona indirectamente la selección y/o secuenciación de contenidos y objetivos (a través de la negociación de intereses), y en el diseño didáctico (a través de sus intervenciones en el quehacer del aula).
		I23: El alumno condiciona directa e indirectamente el diseño didáctico.
	Clave de transferencia E-A	TR24: En los casos en que exista una “buena enseñanza”, la responsabilidad de los resultados del aprendizaje (que dependen del grado de sumisión) es exclusiva del alumno.
		TE24: Cuando los procesos de enseñanza se realizan en un contexto adecuado, la responsabilidad del aprendizaje recae en el alumno.
		E24: La motivación proveniente de la propia acción es la clave de los buenos resultados del aprendizaje.
		I24: Para que se dé aprendizaje es necesario que el alumno otorgue significado a lo que aprende, siendo consciente de su propio proceso de aprendizaje. La responsabilidad del aprendizaje recae en la marcha del proceso completo (con todos los elementos y factores que intervienen en éste).
	¿Qué hace?	TR25: El alumno escucha la explicación del maestro para poder repetir posteriormente el proceso explicado.
		TE25: El alumno, al enfrentarse a cada una de sus tareas educativas, reproduce el proceso lógico mostrado por el maestro, imitando así su estilo cognitivo.
		E25: El alumno pasa de actividad en actividad, participando intensamente en cada una de ellas.
		I25: La actividad del alumno está organizada (interna o externamente) hacia la búsqueda de respuestas a determinados interrogantes.
		TR26/TE26: Al ser el maestro el que proporciona la clave para la repetición/reproducción posterior, es fundamental la atención a éste
		E26: La actividad del alumno no incluye un tiempo para la reflexión sobre su propia acción.
		I26: El alumno toma conciencia de qué hace y para qué lo hace.
TR27: El alumno no se plantea procesar la información que proviene del maestro, ni en forma ni en fondo.		
TE27: La confianza del alumno en lo expuesto por el maestro, inducida por la técnica empleada, le impide cuestionarse sobre el fondo del contenido.		
E27: El ambiente dinámico que se propicia en la clase, permite que el alumno comunique sus experiencias y sentimientos con el maestro y los demás compañeros.		
I27: El alumno mantiene una actitud crítica ante las informaciones que se movilizan en el aula.		

Tabla 4: Instrumento CEAM (IV)

<b>Papel del profesor</b>	¿Qué y cómo hace?	TR28: El maestro transmite verbalmente los contenidos de aprendizaje, mediante explicación de lo reflejado en el libro de texto, realizando una reproducción literal de éste. Actúa como un especialista en el contenido.
		TE28: El maestro organiza los contenidos de aprendizaje, los cuales transmite mediante exposición, utilizando estrategias organizativas/expositivas que procuran ser atractivas. Actúa como un técnico del contenido y del diseño didáctico.
		E28: Por su marcado carácter humanista y especialista en dinámica de grupos, induce al alumno a participar en las actividades que promueve, analizando las reacciones y respuestas a sus propuestas.
		I29 El maestro provoca la curiosidad del alumno conduciendo su investigación hacia la consecución de aprendizajes. Su carácter de experimentador interactivo del contenido y de los métodos le obliga a analizar los procesos en el contexto del aula (investigación-acción).
	Validación de la información	TR30: El maestro (y/o el libro de texto) es el que valida las ideas que se movilizan en el aula, corrigiendo a los alumnos en caso de errores y aportando él mismo la información correcta.
		TE30: El maestro es el que valida las ideas que se movilizan en el aula, planteando interrogantes a los alumnos cuyas respuestas llevan a la “autocorrección” (en verdad es una corrección enmascarada del maestro).
		E30: La información que se moviliza en el aula es validada por el grupo (grupo-clase o pequeños grupos de trabajo). En ocasiones se sustituye el papel de la corrección que en TR/TE juega el maestro por los compañeros, pero no se potencia que los alumnos “se paren a reflexionar” sobre sus ideas ni que desarrollen estrategias de autovalidación de las mismas.
		I30: La información que se moviliza en el aula es validada por el grupo, por el maestro o por el propio alumno. En cualquier caso, se potencia la reflexión de los alumnos y el desarrollo de estrategias para su autocorrección, propiciándose que los estudiantes asuman responsabilidad a la hora de juzgar la adecuación de sus ideas.

Tabla 5: Instrumento CEAM (V)

## **II.6.2 Análisis de la información**

Como explicamos en el apartado II.1, los objetivos y problemas de la investigación están centrados en la comprensión del conocimiento profesional del profesor y sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje. Concebimos el análisis como un proceso de interpretación (Blumer, 1969), en el que juega un papel crucial la habilidad del investigador para reconocer y atribuir significado, la cual procede tanto de su inmersión en los datos como de su conocimiento profesional y procedente de su experiencia. A esto es lo que se conoce como *sensibilidad teórica* (Strauss y Corbin, 1994).

El análisis se ha abordado en cuatro fases, entre las cuales incluimos la transcripción, aunque en un nivel muy próximo a los datos:

### **II.6.2.1 La transcripción de las grabaciones**

Las transcripciones suponen un primer análisis ya que consiste en una selección de la información, que está más cerca de los datos en bruto recogidos. A continuación presentamos sus principales características.

Las transcripciones de los videos fueron realizadas por Climent (2005). En éstas se han descrito lo que se observa. Se describe casi la totalidad de la sesión, salvo algunos trozos que no interesaban, señalándose sus omisiones. Tras contrastarlas con las observaciones y comprobar que las manifestaciones recogidas de Inés y de los alumnos coincidían con los intereses de esta investigación, decidimos aceptarlas como estaban.

El cuerpo de nuestras transcripciones lo constituye la reproducción literal del discurso de la maestra. Esto es de especial interés puesto que todo lo que la maestra dice en su discurso en el aula es reflejado en diferentes líneas de transcripción que nos son útiles, como investigadores, para poder localizar unidades de información codificadas en el texto de manera numerada. Las transcripciones, por tanto, son una construcción que realiza el investigador y no son la realidad en sí misma.

### **II.6.2.2 Estructuración de las sesiones**

Guiados por nuestro objetivo principal de investigación, nos interesaba trabajar, principalmente, con el discurso literal de la maestra Inés, y solo con aquellas intervenciones de alumnos que nos permitían comprender mejor su conocimiento profesional. Con el fin de familiarizarnos con los datos, comenzamos a organizarlos y

estructurarlos siguiendo el modelo presentado por Schoenfeld (1998a; 1998b; 2000), y las adaptaciones efectuadas por Monteiro (2006), Monterio, Carrillo y Aguaded (2008) y por Ribeiro, Carrillo y Monteiro (2009). Entendemos que este paso supone un segundo análisis, en el que cada sesión se estructura en episodios y, para ayudar en el análisis, combinamos una descripción de cada episodio con la transcripción asociada. No es una transcripción modificada, sino que es una nueva selección de unidades de información relevantes para cada episodio que localizamos mediante la numeración atribuida a cada línea de transcripción. Se han incluido en el Anexo I debido por motivos de estructuración del propio trabajo.

Este modelo permite dividir en episodios las grabaciones de aula. Considera al aula un todo que está dividido en episodios, y a estos episodios le corresponden un conjunto de acciones ejecutadas por el profesor, con un determinado objetivo específico. En nuestro caso, sólo nos centramos en el aspecto de poder dividir los episodios de aula en subepisodios, para ello establecemos diferentes niveles inclusivos numerándose correlativamente.

Para la identificación de episodios hemos tomado como criterio los momentos en que se inicia un objetivo, un evento desencadenante o una actividad por parte de la maestra. A cada episodio se le asigna un nombre, en el cual consta el contenido matemático, la acción tratada por la maestra, o una idea general. Para esta identificación partimos de la descrita por Climent (2005), puesto que en nuestra revisión previa de las transcripciones, Climent había identificado estos episodios y subepisodios, correspondiendo con los criterios mencionados anteriormente. A continuación, tuvimos la necesidad de incorporar las selecciones de fragmentos de transcripción a cada uno de los episodios y subepisodios para tener ambos en el mismo documento y facilitar así la interpretación y lectura.

A continuación, se representa, a modo de ejemplo, un esquema de una sesión de clase. Creamos columnas, con diferentes niveles. En la primera columna (nivel 1) ubicamos el nombre asignado al episodio y entre corchetes el número de línea de la transcripción que ocupa [XX-XX]. Cada episodio o subepisodio se acompaña de un resumen en el que destacamos las ideas que consideramos más significativas para identificarlo. En total, en el conjunto de las sesiones hemos identificados episodios hasta el tercer nivel. Hemos añadido una columna en el que incorporamos aquellos fragmentos de

transcripción correspondientes a cada episodio que son relevantes para el análisis del conocimiento especializado de Inés. Mostramos un ejemplo en la tabla 6:

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Transcripción
<p><b>1. Presentación de la actividad [3-55]</b></p>	<p><b>1.1[3-31] 1.1[3-31] Explicación de pautas generales del trabajo</b></p> <p>Inés cuenta primero, sin haber entregado aún las fichas preparadas, en qué va a consistir, a grandes rasgos, la sesión de hoy. Sitúa a los alumnos en cuál es el objetivo que se persigue: recordar qué es un polígono. Para eso se entregará una ficha con varias figuras dibujadas de las cuales hay unas que son polígonos pero hay otras que no lo son.</p> <p>Cuenta la estructura del trabajo: primero lo pensará cada alumno individualmente, anotando si es o no polígono y pensando por qué lo es o no lo es. Después se reunirá en pequeños grupos, donde discutirá con sus compañeros lo que han pensado. Tendrá que intentar "convencer" de lo que piensa o aceptará ser convencido si los argumentos de los compañeros le hacen caer en la cuenta de que tienen razón. Finalmente pondrán en común lo que ha pensado cada grupo.</p>		<p>[6-14] [6-14] Inés: Lo primero que vamos a hacer es una hoja de matemáticas en la que aparecen varias figuras. A cada una de ellas le he puesto un número, para identificarlas, para que podamos hablar de ellas, la figura 1, la figura 8... Todas estas figuras las tenéis todos iguales. Cada uno las va a tener las mismas que el otro. Las vamos a mirar durante un ratito y vamos a intentar descubrir cuáles de ellas son polígonos. Os acordáis de los polígonos, ¿verdad? Niños: Sí (a coro). Inés: Bueno, pues hay unas que son polígonos pero hay otras que no lo son. Entonces vamos a ver si nos acordamos o no nos acordamos...</p>
	<p><b>1.2. [32-55] Instrucciones más precisas del trabajo.</b></p> <p>Inés entrega las fichas y hace algunos comentarios concretos sobre el trabajo. Vuelve a insistir en la necesidad de buscar razones para que sean o no polígonos. La orden concreta es que cada niño vaya poniendo cuáles de esas figuras son polígonos.</p> <p>Inés se da cuenta de que los niños no se acuerdan del concepto de polígono.</p>		<p>[32-55] Inés: Bueno, pues entonces vamos a mirarlas. Como digo, si queréis le podéis ir poniendo alguna señal... algunas no han salido muy claras, pero bueno, se notan todas, algunas se nota que la raya está borrada... En la número siete, por ejemplo, se nota un poquito, ¿verdad?, se nota, lo que ocurre es que se ve la raya un poco borrada, pero se nota que está ahí. Después esta hojita la pegaremos en el cuaderno para que no se nos pierda, ¿eh? (Inés acaba de repartir las hojas y vuelve al principio de la clase, delante de la mitad de la pizarra, pero pegando a la primera fila de mesas). Inés: Bueno, pues venga, la estamos mirando durante un ratito, si os parece le vamos poniendo una señal a la que nos parezca que sí y a la que nos parezca que no, pero ya sabéis, pensando por qué, porque luego cuando estemos en el grupo vamos a tener que convencer, y convencer no se convence diciendo "oye ésta sí", "pues yo digo que no", "pues yo que sí"; no, para convencer hay que decir: "yo digo que sí porque fíjate tú cómo...". Mar: Pero ¿y si no tienes razón con lo que dices? Inés: Pues entonces el otro te convencerá a ti, y tú dirás "pues tienes tú razón", ¿no? Así que vamos a mirarlas un poquito y cada uno va anotando la que le parece que sí y la que le parece que no, solito, ¿eh? Cada uno va poniendo, repito, "cuáles de esas figuras son polígonos".</p>

2. [57-298] <b>Trabajo de los niños</b>	2.1. [57-274] <u>Trabajo individual</u>  Resumen		[65-72]  Transcripción de la grabación de aula
		[76-269]: Ejemplos	[76-269]  Transcripción de la grabación de aula
	2.2. [275-286] <u>Instrucciones para el trabajo en pequeños grupos.</u>		[275-286]
	2.3. [288-298]: <u>Trabajo en pequeño grupo.</u>  Resumen		[289-294]  Transcripción de la grabación de aula
3. [299-389] <b>Puesta en común</b>			[299-300] Transcripción de la grabación de aula
			[307-389] Transcripción de la grabación de aula
4. [389-395] <b>Cierre de la sesión.</b>			[389-3395] Transcripción de la grabación de aula

Tabla 6: Fragmento de la estructura de la sesión de V1

### II. 6.2.3 Elaboración de informes por sesión

Este informe supone un tercer análisis individual de cada grabación (en el capítulo III, están desarrollados cada informe) y contiene la elaboración de un informe individual por sesión.

A priori, entendemos que existirán tres tipos de relaciones: en primer lugar, para que en un episodio dos (o más) subdominios de conocimiento estén relacionados, deben existir diferentes indicios o evidencias (Flores-Medrano, 2015) que nos ayuden a interpretar qué conocimiento ha manifestado la maestra; en segundo lugar, para que podamos decir que un subdominio de conocimiento está relacionado con una concepción, debemos poder inferir que la concepción actúa permeando el subdominio de conocimiento en el episodio, permitiéndonos acceder a una comprensión más detallada al conocimiento de la maestra; por último, para relacionar una concepción con dos (o más) subdominios de conocimiento, dicha concepción debe de guiar el análisis de modo que esas relaciones ayuden a entender, y poner de relieve, cómo se pone en acción esa concepción, permeando los dos (o más) subdominios de conocimiento.

Estos tres tipos de relaciones podemos encontrarlas tanto en el análisis interpretativo por episodios, como en el apartado de relaciones MTSK.

El informe posee la siguiente estructura y cada una de sus partes supone un nivel de análisis diferente:

**a) Resumen:** Presentamos un texto narrado donde se realiza una descripción general de lo acontecido en los diferentes episodios (identificados en el segundo análisis) que se han dado a lo largo de la sesión, siendo estos episodios la estructura del resumen. Este resumen ha servido para tener una lectura rápida de lo que ha ocurrido en cada sesión.

**b) Análisis interpretativo por episodio:** Hemos analizado cada videograbación de aula según los instrumentos de análisis MTSK y CEAM. Con ello, hemos obtenido un informe que refleja nuestra interpretación sobre qué conocimientos o concepciones ha puesto en juego la maestra Inés en su puesta en práctica de la unidad didáctica sobre polígonos. Hemos analizado solo aquellos episodios que hemos considerado más relevantes. El informe ha sido realizado utilizando un enfoque *interpretativo* puesto que nuestro objetivo principal era profundizar en los datos con el fin de encontrar estructuras y relaciones de significado que no eran aparentes en el texto (Kvale, 1996), y cada conocimiento o concepción identificado se le ha codificado mediante su acrónimo correspondiente, y un número consecutivo, para facilitar al lector su localización posterior. Esta numeración es continua a lo largo de todas las sesiones, por lo que si un determinado conocimiento está en diferentes videograbaciones, se respecta el número que se le asignó la videograbación en la que apareció por primera vez. También se han incluido unidades de información, codificados con su localización en la transcripción mediante las líneas de transcripción. A continuación, en la tabla 7, se expone un ejemplo:

La maestra, pregunta a un grupo de alumnos sobre qué es un polígono y ellos le dan dos características: *Porque tiene ángulos y está cerrada* [V1. 311-313]. A lo que la maestra acepta, y continúa preguntando a otros grupos. En esta unidad de información, identifica la existencia de distintas cualidades y atributos de las figuras: región exterior, interior y frontera; y los ángulos. Se confirma que manifiesta un conocimiento acerca de las propiedades de las figuras planas (KoT1).

Tabla 7: Ejemplo de análisis interpretativo por episodio

**c) Relaciones MTSK:** Este apartado del informe podría compararse con la finalidad que posee el zoom de las cámaras fotográficas. Cuando nos acercamos al máximo al objeto de nuestro interés logramos captar con gran profundidad y detalle todas sus características, pero perdemos la visión de conjunto, que es precisamente lo que conseguimos cuando nos alejamos (en cuanto a distancia) de nuestro foco.

El objetivo de este apartado es destacar las conexiones entre las concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas que hemos inferido de la práctica de Inés y los conocimientos con los que parece estar relacionados. Este informe se realiza con la intención de que las concepciones sean el hilo conductor transversal al análisis. Así, presentamos una concepción determinada y destacamos la conexión que parece existir con elementos de conocimiento de los subdominios, de modo que esas relaciones nos ayuden a entender cómo esa concepción permea el conocimiento. Nuestro interés está centrado solamente en ese tipo de relaciones, por lo tanto, las relaciones entre dos o más concepciones no son consideradas, al no ser el foco de este estudio. No obstante, las relaciones entre subdominios de conocimiento sí están consideradas, al igual que en el apartado b), ya que nuestro principal interés es comprender el conocimiento profesional.

Mostramos un ejemplo, en la tabla 8, del enfoque de este apartado en la siguiente tabla

En la descripción de la presentación de la actividad a los alumnos pone énfasis en qué supone retomar lo que se trabajó. Es importante en el proceso para llegar a la definición que los alumnos justifiquen las ideas que les llevan a considerar una figura como polígono o no (un objetivo es justificar la inclusión o exclusión del grupo, y su contenido asociado). Parece existir una relación entre su concepción sobre el aprendizaje donde es importante que el alumno comunique y argumente sus opiniones [I15], y su conocimiento de cómo se hacen matemáticas [KPM1].

Tabla 8: Ejemplo de relaciones MTSK por episodio

**d) Esquema de MTSK:** Finalmente, se muestra un *gráfico de relaciones internas MTSK correspondiente a  $Vx$* , que contiene, por un lado, los indicadores de conocimiento y concepciones identificados a lo largo de la sesión, expresados mediante los códigos utilizados. Los indicadores de cada subdominio, ya sea de conocimiento o de concepciones (ubicadas en el centro de la Imagen del Modelo), se han inscrito en círculos con dos tamaños diferentes: el de menor tamaño se usa para conocimientos o concepciones que se hayan identificado en dos o menos ocasiones; el de mayor tamaño (tres o más) son para los conocimientos o concepciones que se hayan usado con más regularidad a lo largo de la sesión. Esto nos sirve como apoyo visual para poder identificar cuál subdominio de conocimiento o concepción ha sido el predominante durante la sesión. Si algún subdominio o concepción no es identificado en el análisis, no es mostrado con círculos. No obstante, la predominancia no sólo se pone de relieve sobre la base del tamaño del círculo, sino también en función del número de conexiones que llegan o salen de un determinado subdominio. También se incluye alrededor de la imagen los diferentes conocimientos y concepciones que han sido relacionadas a modo resumen para facilitar al lector la comprensión. Mostramos un ejemplo de una sesión-V1.

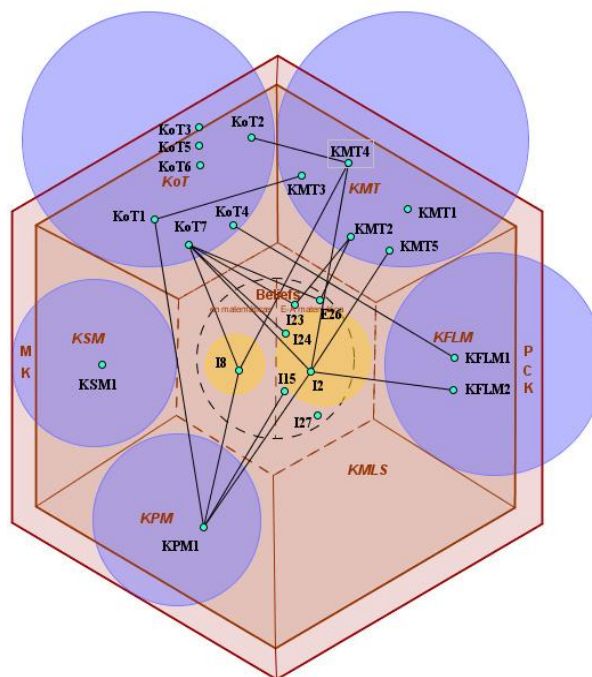


Imagen 3: Gráfico de relaciones internas MTSK correspondiente a V1

Este Imagen3 pone de relieve que las concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la maestra que están guiando la práctica de Inés en esta sesión son I8 e I2 por el número de segmentos que las conectan con otros indicadores de conocimiento. Por otro lado, que posee un gran peso en esta sesión los conocimientos procedentes de los subdominios KoT y KMT. Finalmente, conviene destacar que aunque solo existe un único indicador en el subdominio KPM, se observa que es potente por el de segmentos que lo conectan con otros indicadores, principalmente, con concepciones en este caso.

### II. 6.2.4 Informe conjunto

Este informe supone un cuarto nivel de análisis, su intención es hacer un análisis conjunto de todas las sesiones: Está desarrollado en el capítulo IV de discusión de resultados y conclusiones. Por nuestra parte, nos interesaba realizar un análisis más macro una vez realizado el análisis micro, considerando todas las grabaciones de manera conjunta. Nuestro interés con los tres primeros análisis era observar qué aspectos de sus concepciones y de su conocimiento se ponen de manifiesto en cada sesión, así como las posibles relaciones entre ambos. Ahora, nos interesa alejarnos de esta visión tan cercana a cada una, para poder establecer posibles patrones sobre las relaciones encontradas.

El informe está organizado de la siguiente manera: En primer lugar, mostramos las conclusiones relativas a los resultados de la investigación, donde se incluye el apartado sobre concepciones como ayuda para encontrar relaciones MTSK, y el apartado del conocimiento especializado de la maestra. A continuación, expresamos las conclusiones en relación con los objetivos planteados en el estudio, y para finalizar, identificamos las limitaciones de este estudio y proponemos futuras líneas de investigación.

**CAPÍTULO III:**  
**ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN**

## CAPÍTULO III: ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

INFORME DEL ANÁLISIS V1 .....	85
Relaciones MTSK – V1 .....	92
INFORME DEL ANÁLISIS V2 .....	97
Relaciones MTSK – V2 .....	103
INFORME DEL ANÁLISIS V3 .....	107
Relaciones MTSK – V3 .....	118
INFORME DEL ANÁLISIS V4 .....	123
Relaciones MTSK – V4 .....	127
INFORME DEL ANÁLISIS V5 .....	129
Relaciones MTSK – V5 .....	134
INFORME DEL ANÁLISIS V6 .....	137
Relaciones MTSK – V6 .....	144
INFORME DEL ANÁLISIS V7 .....	147
Relaciones MTSK – V7 .....	159
INFORME DEL ANÁLISIS V8 .....	163
Relaciones MTSK – V8 .....	167

## **INFORME DEL ANÁLISIS V1**

### **Resumen**

Se observa cómo la maestra usa una actividad propuesta desde la perspectiva de resolución de problemas para introducir lo fundamental del tema: el concepto de polígono [Episodio1]. La actividad está planificada para que el alumno investigue y construya el significado de este concepto. El material empleado son unas fichas donde vienen dibujadas varias figuras planas (abiertas y cerradas). Esta actividad consiste en la observación y análisis de propiedades y elementos de las figuras dadas, para encontrar una definición de polígono [Episodio2], a través del consenso general donde se justifican las ideas, se piden argumentos sobre las ideas de los otros, se analizan las ideas de los demás y las propias, se aceptan las críticas justificadas y se completa lo pensado con las aportaciones de los demás, para finalmente llegar a acuerdos consensuados [Episodio3]. Se finaliza con la escritura de la definición por parte de cada niño (la definición que sugiere lo trabajado en la actividad) en el [Episodio 4].

### **Episodios**

1. [V1. 3-55] Presentación de la actividad

1.1. [V1. 3-31] Explicación de pautas generales del trabajo

Inés explica primero, sin haber entregado aún las fichas preparadas, en qué va a consistir, a grandes rasgos, la sesión de hoy. Sitúa a los alumnos en el objetivo que se persigue: recordar y definir qué es un polígono. Para eso se entregará una ficha con varias figuras dibujadas de las cuales hay unas que son polígonos pero hay otras que no lo son. Parece insistir así en la comprensión de lo que se pide en la actividad (explicándola dos veces, primero de manera general, más familiar, y después con más detalle, dando las órdenes precisas).

Cuenta la estructura del trabajo: primero lo pensará cada alumno individualmente, anotando si es o no polígono y pensando por qué lo es o no lo es. Parece conocer que el procedimiento de la comparación (C) es necesario para la identificación de las

cualidades, por ello insiste a los alumnos en que reflexionen sobre las propiedades y elementos de las figuras [KMT1]. Después se reunirán en pequeños grupos, donde discutirán con sus compañeros lo que han pensado. Tendrán que intentar "convencer" de lo que piensan o aceptarán ser convencidos por los argumentos de los compañeros. Finalmente pondrán en común lo que ha pensado cada grupo. Entrega la siguiente ficha:

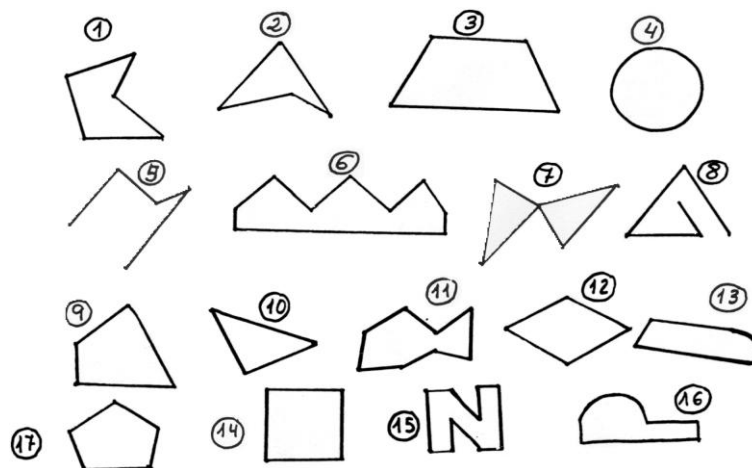


Figura 1: Figuras en V1

Los alumnos han trabajado ya los polígonos (al menos se ha comentado, aunque no se ha llegado a la identificación de una definición). Inés intenta que retomen esta idea para construir la definición. Intenta aprovechar aprendizajes anteriores y experiencias para enlazar conocimientos previos con la finalidad de la sesión (definición de polígono). Podemos observarlo en las líneas: *Las vamos a mirar durante un ratito y vamos a intentar descubrir cuáles de ellas son polígonos, os acordáis de los polígonos, ¿verdad? [...] Bueno, pues hay unas que son polígonos pero hay otras que no lo son. Entonces vamos a ver si nos acordamos o no nos acordamos...* [V1. 6-14]. Inés parece conocer que este contenido matemático tiene una característica propia asociada a las formas de aprendizaje por parte del alumnado [KMT2]: tienen que buscar qué aspecto diferenciador existe entre las figuras y qué aspecto tienen en común para conseguir definir polígono. Queda clara la intención que se fija: valorar y usar las experiencias y aprendizajes previas, sobre las que construir otros nuevos. El papel que da a los alumnos queda marcado claramente, ya que ellos son los que van a tener la responsabilidad sobre el control en su proceso de aprendizaje [E26], así como en la búsqueda de respuestas al interrogante planteado por parte de la maestra [I23].

A continuación, insiste en que hay que justificar por qué es o no polígono. Se pone el énfasis en que el alumno analice y explicité las propiedades que está considerando y que argumente (*pero ya sabéis que no vale decir: "la número tal sí, o la número cuál no", sino que hay que decir: "la número tal sí porque..." o "no, porque..." Si es o no es, pero además diciendo por qué os parece que sí o por qué os parece que no* [V1. 18-21]). Parece conocer, de manera justificada, las propiedades y elementos de los polígonos que le servirán para poder corroborar la definición dada por los alumnos [KOT1], por lo que está enfatizando el papel de la justificación en matemáticas al exigir el porqué de sus afirmaciones [KPM1].

Explicita la importancia de que se mantenga una actitud crítica, aceptando también las críticas justificadas a las ideas propias. Se vuelve a reforzar la necesidad de los argumentos matemáticos (para "convencer" o "que te convencan"). El alumno toma conciencia de qué hace y para qué lo hace [I24]: *Pasado ese tiempo vamos a trabajar en un grupo pequeño, como siempre, de tres o de cuatro y entonces vamos a contar unos a otros cuál nos parece que es polígono, cuál nos parece que no y por qué, y si alguien no lo tiene como nosotros lo vamos a intentar convencer. O a lo mejor nos convencen a nosotros de lo contrario* [V.1 25-29].

## 1.2. [V1. 32-55] Instrucciones más precisas del trabajo

En la ficha de polígonos [Figura 2], las figuras que presenta la maestra contienen varios elementos críticos en la definición de polígono y que problematizan el concepto, obligando a un análisis de sus características definitorias. La definición de polígono lleva de modo bastante claro a muchos de los ejemplos y contraejemplos que Inés recoge en la ficha. Existen figuras abiertas y cerradas, cóncavas y convexas, con una sola componente conexa y varias, con lados curvos y rectos, con distinto número de lados, la circunferencia, con lados iguales o diferentes, con ángulos y lados iguales o diferentes, en posiciones estándar (por ejemplo, el cuadrado) y no estándar (por ejemplo, el triángulo)... En esta ficha se puede apreciar, que previamente a su elaboración, se han identificado (I) distintas cualidades o atributos atribuibles a los polígonos.

Parece claro que intencionadamente introduce los diversos elementos que forzarán a las características de la definición de polígono como por ejemplo: cerrada, línea poligonal, formada por una sola componente conexa. Estos elementos son atributos relevantes de

polígonos (aquellos que contribuyen a elaborar la definición), y también variantes en las figuras que sí son polígonos, es decir, atributos irrelevantes como por ejemplo distinto número de lados, cóncavos y convexos, regulares e irregulares, con lados iguales y desiguales y finalmente atributos incorrectos, como figuras abiertas. La selección de estas imágenes se ha realizado intencionadamente por parte de Inés, considerando estos tres tipos de elementos y considerando la diferencia entre definición e imagen del concepto. La elección de imágenes ricas, que incluyan atributos relevantes, irrelevantes e incorrectos respecto de la definición de polígono pone de relieve aspectos de su conocimiento de diferenciación entre definición e imagen del concepto [KMT3]. Además, conoce las propiedades y elementos de los polígonos [KoT1] que le van a servir para definirlo.

Vuelve a insistir en la importancia de tener argumentos, de que hay que convencer con razones [V1. 42-46]. También en que hay que aceptar los argumentos de los compañeros si te convencen [V1. 47-52]. Trata de hacer al alumno consciente de la importancia de qué hace y para qué lo hace constantemente [I24].

## 2. [V1. 57-298] Trabajo de los niños

### 2.1. [V1. 57-274] Trabajo individual

Durante el trabajo individual, sigue dando peso a la argumentación [V1. 61- 62]. Ayuda a los niños que no recuerdan qué es un polígono, con una experiencia anterior (el estudio de poliedros) para que a partir de aquí puedan reconstruir su idea de polígono. En aquella ocasión, clasificaron cuerpos geométricos según distintos criterios que dijeron los propios niños. *Inés: Los pusimos aquí en el centro, Mari, aquí en el centro pusimos todos los cuerpos geométricos. Y alguien dijo: vamos a hacer el grupo de todos los cuerpos geométricos que están formados por polígonos. Y nos pusimos a hacer grupos. Y había algunos que tenían polígonos de una sola clase y había otros que tenían polígonos de varias clases Alguno de ellos fue que sus caras estaban formadas por polígonos* [V1. 65-72]. Da las pautas de aquella actividad esperando que de este modo los alumnos la "revivan" y puedan recuperar con ella algunas imágenes que lleven a poder analizar la idea de polígono. Podemos observar que parece conocer que el contenido que actualmente está trabajando y los que están en la base de su aprendizaje [KSM1] están relacionados (relaciones entre los conceptos de formas planas y tridimensionales), así como el papel que juegan las formas planas en la

composición de los objetos tridimensionales (los poliedros están formados por figuras planas), para ello hace uso de la identificación (I) de distintas cualidades o atributos.

Ante las dudas repetidas de varios alumnos, retoma la sugerencia de relacionar los polígonos con los poliedros, ahora para el gran grupo. Advierte de que no todos los cuerpos geométricos estaban formados por polígonos, mientras que los niños que, siguiendo sus sugerencias, han cogido cuerpos geométricos para ayudarse a recordar qué era un polígono, parecen haber cogido cualquier cuerpo geométrico. *Lo único que hemos hecho, María, es que cuando estuvimos trabajando los cuerpos geométricos, recordáis que hicimos un grupo de los cuerpos geométricos que estaban formados por polígonos. Había un grupo que estaba formado por polígonos. Pero había otros cuerpos geométricos que no estaban formados por polígonos* [V1. 76-83]. Vuelve a insistir dando detalles del proceso que siguieron en la actividad, para que los niños recuerden a qué llegaron con respecto a los polígonos. Pregunta a los niños que han cogido cuerpos de revolución si sus caras son polígonos o pertenece al otro grupo que hicieron (cuerpos geométricos redondos). Conoce que los cuerpos geométricos están compuestos por cuerpos redondos y poliedros [KoT2] y su conocimiento de la estrategia de recordar los polígonos a partir de los cuerpos geométricos [KMT4] es parte de su conocimiento de la enseñanza.

Hace que los alumnos recuerden cómo llegaron a establecer esa división: *Yo puse todos los cuerpos geométricos ahí en el centro y ahora cada uno fue mirándolos, observándolos durante un ratito y ahora [...] ¿recordáis? hicimos muchos grupos, ¿no?, y luego apuntamos en el cuaderno, y yo espero que también se apuntara aquí (señalando el “coco”) dos grupos que fueron con los que nos quedamos, bueno, luego hicimos dos más, pero... a ver, ¿alguien se acuerda?* [V.1 105-112]. Se establece una elección (E) de criterios de clasificación adecuados a una situación.

Pregunta por cuerpos geométricos cuyas caras sean polígonos e intervienen algunos niños que han cogido tales cuerpos. Les cuestiona sobre qué polígonos son sus caras: *¿Tú tienes alguno? (A un niño que levanta la mano con un cuerpo geométrico). Pues enséñalo a todos. (Es un prisma hexagonal) ¡Ese es un cuerpo geométrico formado por polígonos! ¿Qué polígonos forman ese cuerpo geométrico?* [V.1 140-159]. A lo que el niño contesta que está formado por hexágonos, dando Inés el visto bueno. Podemos observar que conoce que los poliedros están limitados por polígonos y reconoce el tipo

de polígonos que lo forman **[KoT3]** identificando (I) la existencia de distintas cualidades y atributos de las figuras que observan: la forma. A continuación, intervienen todos los niños que tienen cuerpos geométricos, exponiendo de qué tipos son sus caras, los otros alumnos los corrigen si no están de acuerdo con lo que aquellos dicen. Por ejemplo, un prisma rectangular está formado por rectángulos, volviendo Inés a aceptar dicha afirmación. De este modo se retoma con la ayuda del grupo (la colaboración de todos) lo que vieron en aquella actividad sobre polígonos. Se establece una clasificación (CL) con criterios no simultáneos entre cuerpos geométricos redondos y polígonos.

En la intervención anterior en gran grupo, fuerza a que los alumnos definan lo que es un rectángulo [V1. 184-265]. Volviendo a insistir: *¿Y tú cómo sabes que son rectángulos?* [V.1 184-190] *Pero, ¿por qué? ¿qué tiene? es que yo no sé lo que es un rectángulo. ¿cómo lo puedo yo saber?* [V1. 199-206]. Fuerza a que analicen sus propiedades y elementos a través de la identificación de cualidades, en este caso la forma. Desechando las imágenes globales que éstos aportan (del tipo "se parece a..."). Les da pautas de la variable en que tienen que fijarse: número de lados *¿Cuántos lados tiene?* [V.1 206], cómo son entre sí: *¿Y cómo son entre sí los lados largos? ¿El lado largo con el lado largo?* [V.1 210] *qué ángulo forman: ¿y cómo son los ángulos ésos que tiene?* [V.1 236] Los alumnos van interviniendo aportando estas características y los elementos: tiene cuatro lados, cuatro vértices y cuatro ángulos [V1. 223-229]. Estas características son una identificación de las cualidades de las figuras que observan (forma, lados, paralelismo y perpendicularidad) y aunque en algún caso, son redundantes, se aceptan todas. Parece conocer la estructura conceptual de los elementos que componen los polígonos **[KoT4]**, además la maestra pide a los alumnos que precisen con expresiones los conceptos que ya han estudiado antes (como "líneas secantes perpendiculares"). [V.1 238] *¿Cómo se llamaban las líneas ésas que al cruzarse formaban cuatro ángulos rectos?* La maestra, desde su conocimiento, está forzando al alumno a usar un determinado vocabulario, que es preciso en el contenido matemático que están trabajando **[KFLM1]**.



## 2.2. [V1. 275-286] Instrucciones para el trabajo en pequeños grupos

Inés dispone a los niños por parejas, vuelve a insistir en que se convencen entre sí, que usen argumentos. *Si tu compañero te convence de algo que tú no tenías, no borrar lo que tenías sino diferenciar las dos respuestas (lo que pensabas antes y lo que piensas*

*ahora, tras debatir con él). Comparar con tu compañero cuáles son polígonos y cuáles no, comparar los argumentos. En el caso de que te convenza de alguno que no tenías antes, dejar marcadas ambas respuestas (la tuya y la que te ha aportado tu compañero) [V.1 275-286]. Vuelve a mostrar una concepción sobre el papel del alumno donde tiene que tomar conciencia de qué hace y para qué lo hace [I24]:*

3. [V1. 300-389] Puesta en común

Primero exponen los grupos que tienen problemas en alguna figura y que no están de acuerdo entre los miembros: *Vamos a empezar primero por la 6. ¿Quién es el grupo que tiene problemas con la seis?* [V.1 299-300]. Pide que cada miembro del grupo aporte sus razones y el resto de los niños opinen sobre cuáles creen que son válidas. Por ejemplo, pregunta a un grupo y le dan dos características: *Porque tiene ángulos y está cerrada* [V.1 311-313]. Identifica (I) la existencia de distintas cualidades y atributos de las figuras: región exterior, interior y frontera; ángulos. Se vuelve a confirmar que manifiesta un conocimiento acerca de las propiedades de las figuras planas [KoT1].

Sigue profundizando en que sean concretos cuando precisen y utilicen el lenguaje, ya que un alumno le dice que las líneas tienen poco espacio. *No te entiendo, ¿que está abierta quieres decir? [...]Creo que está diciendo que no son, los ángulos que se forman, no son todos hacia fuera (y hace la señal  con las manos), sino que algunos son hacia dentro (y hace la señal ), ¿no? ¿eso es lo que tú dices? (Es asiente). Bueno, Jo, ¿y qué es lo que tú dices? ¿que sí puede ser o que todos los polígonos tienen que tener los ángulos hacia fuera? Tú crees que sí, ¿no? [V.1 314-322]. En esta ocasión demuestra un conocimiento acerca de los tipos de ángulos que forman las figuras [KoT5], a través de la identificación (I) de los ángulos cóncavos y convexos.*

Pone a la clase, en el lugar de validar las ideas de los alumnos que intervienen, es decir, los alumnos son la fuente de la información. Pues *entonces* (dirigiéndose a Es) *hasta ahora es lo que piensan todos, que el que tenga dos lados así* (y representa con las manos un ángulo cóncavo) *no importa para que sea un polígono. Lo importante es que tenga lados, que tenga ángulos, que tenga vértices, ¿no?, y que esté cerrada, han dicho por ahí también, que esté la línea cerrada* [V.1 334-339]. Repite las razones que consensuan los niños para que un polígono cóncavo pueda ser también tomado como polígono. La información que se moviliza en el aula es validada por el grupo, y por la

maestra, potenciándose la reflexión de los alumnos y asumiendo responsabilidad (por parte del alumnado) a la hora de juzgar la adecuación de sus ideas [I27].



Cuando comienzan a trabajar la figura 13 se añade a las condiciones anteriores (por acuerdo de la mayoría de los grupos) que no puede tener lados curvos: *Ah! Si fuera entera no sería polígono pero si tiene una parte de lados y de vértices sí es un polígono. ¿Y Jesús qué dice? (dice que no con la cabeza). Y él dice que no por la curva. Vamos a ver qué dicen los demás grupos [V.1 349-353]. [Inés va preguntando grupo por grupo y dicen que no puede tener curvas]. No puede tener curvas, sólo puede tener ángulos, vértices... pero curvas no. [V.1 354-355]. Inés conoce que los polígonos no poseen lados curvilíneos [KoT6].*

Al final de la clase manejan las características: tiene lados, ángulos y vértices, es cerrada, y no tiene "partes redondas". Hay discrepancias en la 7 (cumple todo lo anterior pero tiene dos componentes conexas). Finalmente no da tiempo a abordar la figura 7.

#### 4. [389-395] Cierre de la sesión

Ante las últimas dudas propone que cuando vuelvan del recreo va a escribir cada uno individualmente su definición de polígono. De este modo, introduce aquí una parada para explicitar cada uno qué definición está manejando y para reflexionar sobre las características que considera y las que cumplen las figuras dadas: *Cada uno va a escribir para contarnos lo que es un polígono, para que nosotros sepamos distinguirlo. Nos dice: "un polígono es...", y ahora lo contamos, ¿de acuerdo? [V.1 392-394]. Podemos afirmar que el aprendizaje se ha producido a través de una pequeña investigación que ha sido planificada por Inés para utilizar esta definición en la sesiones posteriores [I2]. Parece que Inés es conocedora de las dificultades que tienen sus alumnos para unir una serie de características como definición de polígono [KFLM2], y trata de conducir la institucionalización de los aprendizajes a través de la explicitación de las diferentes definiciones, donde desempeña un papel relevante la reflexión individual.*

### **Relaciones MTSK – V1**

*Las concepciones como ayuda para encontrar relaciones entre elementos de los subdominios de MTSK – V1*

Las concepciones más importantes que se observan en esta sesión son dos. En primer lugar respecto de la Metodología: *La maestra parece tener organizado el proceso que llevará al alumno a la adquisición de unos conocimientos determinados a través de su investigación [I2]*, y en segundo lugar la concepción de la matemática escolar: *Interesan tanto la adquisición de conceptos, como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia, el trabajo escolar en general y como ciudadano, siendo la materia y el trabajo escolar los que determinan el peso específico de cada una de las componentes citadas [I8]*. Los conocimientos que se relacionan con dichas concepciones, son varios: por un lado, el objetivo de la sesión es conceptual (definir polígono y enumerar sus elementos) [KoT7], además se espera que los alumnos apliquen la definición a la identificación de figuras (distinguir en un conjunto de figuras cuáles son polígonos). Podemos interpretar que la maestra utiliza su conocimiento de la Práctica Matemática [KPM1] en el propio procedimiento de definir (expresión clara, ordenada y precisa), saber lo que es una definición y cuáles son sus características, porque conoce cómo se explora y se genera conocimiento en matemáticas y cuáles son los elementos con los que se hacen matemáticas. Por otro lado, la concepción [I2] está relacionada con su conocimiento sobre las actividades que más potentes son para los alumnos [KMT5].

Otro aspecto a destacar es el reflejo de la matemática que quiere que los alumnos aprendan: matemática con significado, conceptual (frente a mecánica). Se añade también un interés por centrarse en que los alumnos adquieran procedimientos de cómo llegar a la definición matemática: expresarse con orden, claridad, precisión, definir abstrayendo las características fundamentales e imprescindibles, distinguir entre elementos y cualidades o propiedades. Podemos observar cómo Inés hace que el alumno tome conciencia de lo que significa construir una definición, qué características debe cumplir ésta, cuáles son las partes de la definición de polígono y qué encierra la definición [I24]. Es claro aquí cómo la toma de conciencia de lo que encierra una definición potencia un análisis de la propia definición de polígono. Así, la maestra parece conocer qué características tienen algunos de los elementos con los que se hacen matemáticas, en este caso: qué es una definición [KoT7].

En su propia descripción de la presentación de la actividad a los alumnos pone énfasis en qué supone retomar lo que se trabajó. Es importante en el proceso para llegar a la definición que los alumnos justifiquen las ideas que les llevan a considerar una figura

como polígono o no (un objetivo es justificar la inclusión o exclusión del grupo, y su contenido asociado). Parece existir una relación entre su concepción sobre el aprendizaje donde es importante que el alumno comunique y argumente sus opiniones [I15], y su conocimiento de cómo se hacen matemáticas [KPM1].

En el cierre de la sesión, la maestra es conocedora de las dificultades que tienen sus alumnos para unir una serie de características como definición de polígono [KFLM2], donde les hace recordar una situación reciente en la que ellos distinguieron y usaron la idea de polígonos (al trabajar los cuerpos geométricos), haciendo que los alumnos busquen y usen sus aprendizajes anteriores. Esto supone desde la perspectiva de la maestra, el cambio en el desarrollo previsto de la actividad y es su conocimiento sobre las actividades que más potentes son para los alumnos [KMT5], lo que conduce a la institucionalización de los aprendizajes a través de la explicitación de las diferentes definiciones, donde desempeña un papel relevante la reflexión individual. Puede considerarse esta reflexión sobre las características, comparando las que cumplen las figuras dadas, como una estrategia en la que el aprendizaje se ha producido a través de una pequeña investigación que ha sido planificada [I2].

Por otra parte, la concepción de la maestra sobre el papel del alumno tiene una gran presencia, por ejemplo, al principio de la sesión, donde la maestra conoce que el aprendizaje del concepto de polígono y su definición tienen una característica propia asociada de aprendizaje por parte del alumno [KMT2]. Queda clara la intención que se fija: valorar y usar las experiencias y aprendizajes de los alumnos para que estos realicen otros nuevos.

El conocimiento de la maestra sobre la definición de polígono [KoT7] y la situación que plantea al alumno donde debe de tomar conciencia de qué está haciendo y para qué lo está haciendo [I24], queda marcado claramente, ya que ellos son los que van a tener la responsabilidad sobre el control en su proceso de aprendizaje [E26], así como en la búsqueda de respuestas al interrogante planteado por parte de la maestra [I23].

Posteriormente, en el trabajo en pequeños grupos es claro el énfasis de la maestra en el aprendizaje social (*el papel que le da al alumno*) donde aprenden unos de otros. Destaca aquí cómo tienen que llegar a un acuerdo, resumir y concluir.

**KoT (Conocimiento de los temas matemáticos)**

*Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático*

**KoT1:** Conoce de manera justificada las propiedades y elementos de los polígonos que le servirán para poder corroborar la definición dada por los alumnos

**KoT2:** Conoce que los cuerpos geométricos están compuestos por cuerpos redondos y poliedros

**KoT3:** Conoce que los poliedros están limitados por polígonos y reconoce el tipo de polígonos que los forman

**KoT4:** Conoce la estructura conceptual de los elementos que componen los polígonos

**KoT5:** Conoce los tipos de ángulos que forman las figuras planas

**KoT6:** Conoce que las curvas es una propiedad que no define a los polígonos

**KoT7:** Conoce qué es una definición y cuáles son sus características (para construir la definición de polígono)

**KSM (Conocimiento de la Estructura de la Matemática)**

*Conocimiento de la simplificación de un contenido matemático*

**KSM1:** Conoce que el contenido que actualmente está trabajando y los que están en la base de su aprendizaje están relacionados: relaciones entre los conceptos de formas planas y tridimensionales, así como, conocer el papel que juegan las formas planas en la composición de los objetos tridimensionales

**KPM (Conocimiento de la Práctica Matemática)**

*Conocimiento de Prácticas ligadas a una Temática en Matemáticas*

**KPM1:** Conoce qué características tienen algunos de los elementos con los que se hacen matemáticas, en este caso: qué es una definición

**KMT (Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas)**

*Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático*

**KMT1:** Conoce que la comparación es una buena estrategia de enseñanza para que los alumnos aprecien las diferencias de las figuras.

**KMT2:** Conoce que buscar aspectos diferenciadores entre las figuras y aspectos que tienen en común ayuda a los alumnos a construir la definición de polígono

**KMT3:** Conoce qué imágenes son adecuadas para construir la definición de polígono.

**KMT4:** Conoce por qué actividad comenzar para trabajar el contenido

**KMT5:** Conoce actividades más potenciadoras para los alumnos

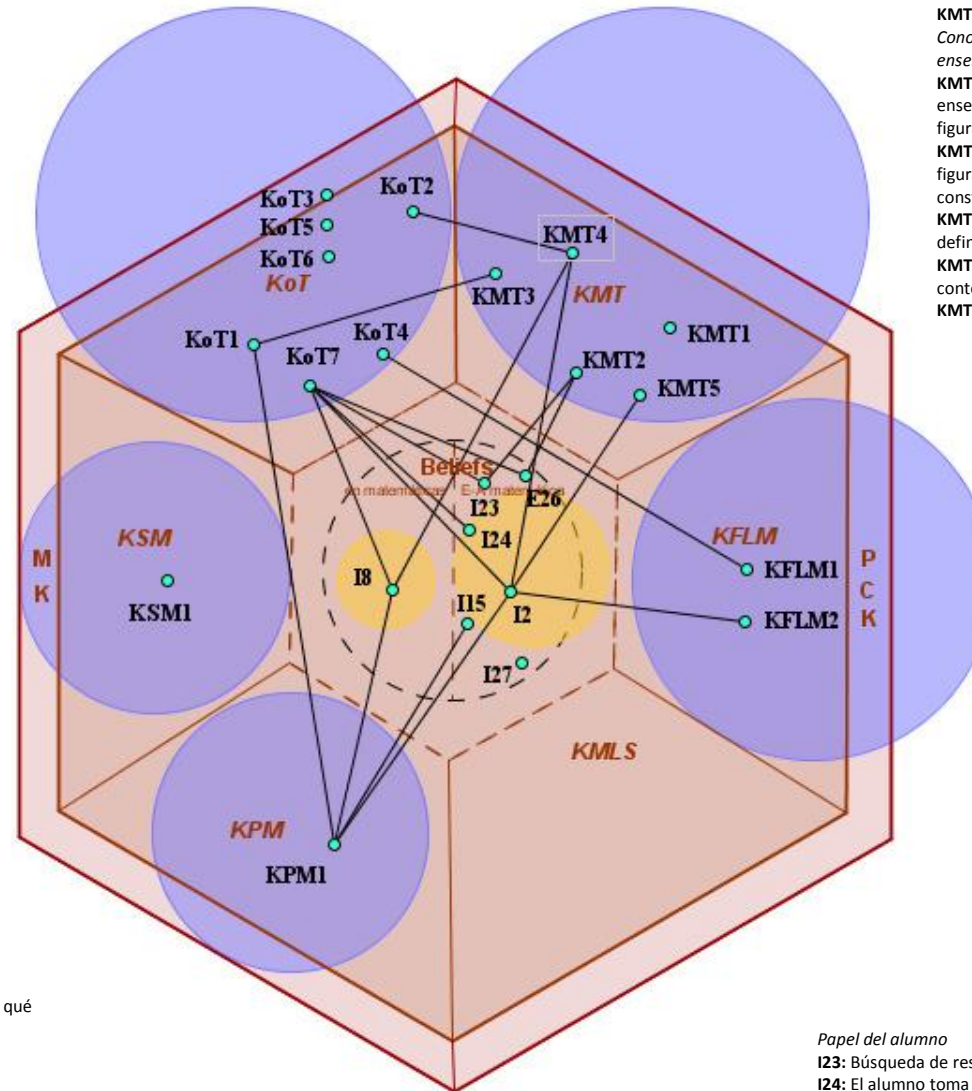
**KFLM (Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas)**

*Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático*

**KFLM 1:** Conoce la importancia de la precisión del vocabulario en el contenido matemático

*Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático*

**KFLM 2:** Conoce las dificultades asociadas al aprendizaje correspondientes al contenido matemático (polígonos)



Concepciones

*Metodología*

**I2:** La maestra tiene organizado el proceso que llevará al alumno a la adquisición de unos contenidos determinados a través de su investigación

*Concepción de la matemática escolar*

**I8:** Interesan tanto la adquisición de conceptos, como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia, el trabajo escolar en general y como ciudadano, siendo la materia y el trabajo escolar los que determinan el peso específico de cada una de las componentes citadas.

*Concepción del aprendizaje*

**I15:** Concepción sobre el aprendizaje donde es importante que el alumno comunique y argumente sus opiniones

*Papel del alumno*

**I23:** Búsqueda de respuestas al interrogante planteado por parte de la maestra  
**I24:** El alumno toma conciencia de qué hace y para qué lo hace

*Papel del maestro*

**E26:** El papel que da a los alumnos queda marcada claramente, ya que, ellos son los que van a tener la responsabilidad sobre el control en su proceso de aprendizaje

**I27:** La información que se moviliza en el aula es validada por el grupo, por el maestro o por el propio alumno. En cualquier caso, se potencia la reflexión de los alumnos y el desarrollo de estrategias para su autocorrección, propiciándose que los estudiantes asuman responsabilidad a la hora de juzgar la adecuación de sus ideas

**Imagen 4: Gráfico de relaciones internas MTSK correspondiente a V1**

## INFORME DEL ANÁLISIS V2

### Resumen

En esta sesión de clase, se puede observar que la maestra vuelve a usar la resolución de un problema para introducir conceptos (los tipos de triángulos) [Episodio1]. Esta actividad está planificada para que el alumno pueda construir en una trama de puntos, diferentes triángulos tratando de acogerse a la definición consensuada previamente [Episodio2]. La maestra trata de hacer conscientes a los alumnos de los diferentes tipos de triángulos que existen, en ocasiones forzándolos a buscar otros que aún no habían dibujado, realizando preguntas y profundizando en determinados aspectos (longitud de los lados, ángulos) [Episodio3]. Se finaliza esta sesión con la realización de estos dibujos, pero postergando su corrección para el día siguiente [Episodio4].

### Episodios

1. [V2. 6-54] Detección y activación de los conocimientos previos de los alumnos sobre polígono

1.1 [V2. 6-45] La definición de polígono

La clase comienza haciendo recordar a sus alumnos sobre cuál fue la definición (sobre polígonos) a la que llegaron por consenso el día anterior. *Vamos a ver algunas [de las definiciones que escribieron los niños de polígonos para que sepamos en qué quedamos [V.2 6-7].* En este punto la maestra hace una analogía entre las dificultades asociadas a la construcción de la definición de ejes de simetría (que ya habían trabajado) y la que han encontrado en esta ocasión mientras definían polígono. Manifiesta que en la construcción de ambas definiciones matemáticas existen características generales semejantes, aplicando entre ellos una relación o una propiedad que está establecida en el otro. *Volvimos a ver las dificultades de la otra vez, cuando definimos ejes de simetría, ¿verdad, que nos costó mucho trabajo?, pero parece que al menos, teníamos las cosas un poquito más claras [V.2 7-9].* En esta unidad de información nos encontramos con una práctica matemática [KPM2] donde se establece una relación entre la construcción

de la definición de dos contenidos matemáticos (simetría y polígono) donde la maestra manifiesta una estructura lógica de pensamiento que le ayuda a entender el funcionamiento de ambos aspectos matemáticos. Finalmente, hace mención a esas dificultades *Los errores más importantes fue que no completaban la definición, dejaban la definición a medias, con lo cual, algunas figuras tal y como habían dicho la definición, entraban* [V.2 10-12]. Conoce los errores asociados a la definición de polígono [KFLM4].

La maestra continua: *porque claro, algunos decían: "un polígono es una figura plana y cerrada". Entonces, claro, una figura plana y cerrada hay muchas ahí, y sin embargo no son polígonos, ¿verdad, José?* [V.2 12-14] El alumno siente que sus ideas, sus problemas, sus logros son considerados, y son importantes para la maestra [I24]. *A él le pasó eso, a unos cuantos. Entonces, claro, para que sea una definición y podamos identificar perfectamente lo que son polígonos tenemos que decir más cosas. [...] Y luego, ya pues salieron los demás detalles, que no sólo estaba cerrada y era plana sino que además tenía otros detalles. Tenía...vértices y tenía ángulos, y así ya se quedó completa* [V.2 14-21]. Cuando Inés vuelve a enfatizar sobre el propio procedimiento de definir (expresión, clara, ordenada y precisa), está volviendo a manifestar un [KoT7] sobre qué es una definición y cuáles son sus características, como ya hizo en la V1. Destaca cómo la definición a la que se llegó es el resultado del consenso tras el trabajo realizado, es una elaboración conjunta del grupo. No sólo se da la definición sino que Inés revive el proceso seguido, en cuanto a las dificultades que surgieron, sus causas y los alumnos que tuvieron problemas. De este modo llama la atención sobre la importancia de hacerse consciente del propio proceso de aprendizaje, de las dificultades encontradas, y de los progresos que se observan [I22] (*"costó menos trabajo que en el caso anterior de la simetría"*).

A continuación, profundiza en un error concreto cuando se define: *Entonces una cosa es los elementos de que está compuesto y otra son las propiedades, sí, propiedades, ¿no? o yo le llamaría cualidades. Y a la hora de ordenar la definición salían elementos y por otro lado propiedades. [...]Entonces ordenamos la definición. Por un lado se decían las cualidades y por otro lado se decían los elementos que componían los polígonos, ¿verdad? Y ya pues más o menos quedaron estructuradas y ordenada* [V.2 23-31]. Esta manifestación de conocimiento podemos evidenciar [KoT8] referente al orden de la definición, así como al conocimiento propio sobre la definición de polígono (está

compuesto por elementos y esas figuras poseen propiedades). Aunque, se acepta una definición en los términos en los que se expresan los alumnos, no hay un énfasis en llegar a la definición formal, ya que es con la definición que van a trabajar (es correcta pero no completa), el alumno ha sido quien ha condicionado la actividad [I23]. La definición de polígono con la que trabaja es la que se ajuste a las figuras que considera como tal, no se tienen en cuenta las posibles consecuencias matemáticas de la definición que se construye. No atribuye importancia al hecho de que en la definición se incluyan los elementos y que la propia definición no recoja las características de las figuras sin que sea necesario hacer mención a éstos. El punto de vista de la matemática escolar muestra su doble perspectiva de exactitud/aproximación dependiendo del contexto y se concibe en construcción [I10].

## 1.2. [V2. 46-54] Los elementos de los polígonos

Es clara cómo su finalidad con esta construcción de la definición de polígono es que se analice la definición y se aprenda de manera constructiva, con significado. De ahí que diferencie las propiedades de los elementos (no para diferenciar lo que entra y no en la definición puesto que las dos entran, es para analizar mejor el contenido de la definición): *Luego completamos con los elementos de que estaba compuesto el polígono, que, claro, era repetir un poco para aclarar lo que era la definición* [V.2 46-47]. En este punto parece manifestar que conoce, además de la definición que han dado sus alumnos, algún elemento más que componen los polígonos. *Todos llegaron a la misma conclusión, que estaban formados por vértices, ángulos y lados. Yo les dije si eran capaces de encontrar algún otro elemento que se encontraba en el polígono, pero nadie encontró otro elemento. Así que, bueno, pues ya lo iremos descubriendo poco a poco, los demás elementos* [V.2 48-54]. Aunque no fuerza a los alumnos a recordar las diagonales como elementos de los polígonos (seguramente debido a que están trabajando con triángulos), sí deja constancia de que más adelante surgirá este elemento (V7).

## 2. [V2. 54-173] Presentación de la actividad

### 2.1. [V2. 54-86] Problematización de lo que vamos a trabajar

Cuando comienza la actividad le da significado al propio concepto de triángulo, problematizándolo. *Así que hoy, vamos a pensar, lo primero, en a ver qué polígono sois*

*capaces vosotros de formar, o que conocéis y que tenga el mínimo número de lados* [V.2 54-56]. De este modo, parece justificado su estudio como un tipo de polígono especial. También de esta manera motiva a los alumnos a su estudio, le da sentido. Manifiesta un conocimiento sobre la potencialidad que tiene el problematizar esta actividad [KMT6]. Además de estar Identificando (I) distintas cualidades o atributos atribuibles a los polígonos: número de lados. A continuación se aborda esta problemática en el gran grupo [V.2 70-86]: pidiendo a los alumnos que validen las ideas de sus compañeros, que las critiquen, que aporten razones, argumentos: *¿por qué no se puede?* [V.2 78] (dibujar un polígono con menos de tres lados). Aprovecha este abordaje en gran grupo para recordar los términos estudiados antes (mediante la aportación de unos niños y otros, el recuerdo colectivo). *¿Y alguien recuerda cómo se llamaban los polígonos que tenía tres lados? [...]Triángulos, claro, se llamaban triángulos* [V.2 83-86]. Conocimiento de que los triángulos son el polígono con menor número de lados [KoT9].

## 2.2. [V2. 86-173] Instrucciones para la actividad a realizar.

Quiere que los alumnos dibujen todos los triángulos distintos que se les ocurran para luego clasificarlo, en la clasificación no se va a considerar el tamaño (ni la posición), sino la forma, por lo que concreta que es esto lo que interesa. *Y no quiero que sean diferentes porque uno sea más grande y otro más chico, sino diferentes porque sean totalmente diferentes* [V.2 89-91]. Identifica (I) cualidades o atributos atribuibles a los polígonos: formas. En este caso, acota las posibles clasificaciones posteriores, centra la atención de los alumnos en lo que le interesa a ella.

*Ya sabéis que los triángulos, como todos los polígonos tienen lados, tienen ángulos y tienen vértices. Bueno, intentad vosotros, con los elementos de los triángulos (que son los lados, que son los ángulos, que son los vértices) intentad dibujar triángulos diferentes, que se diferencien por sus elementos, que se diferencien por lados, que se diferencien por sus ángulos, que se diferencien por sus vértices, no sé, ¿de acuerdo? A ver si podemos encontrar triángulos diferentes* [V.2 91-101]. Vuelve a mostrar conocimiento de los elementos que componen los triángulos: lados, ángulos y vértices [KoT10].

Otra vez (como en ocasiones anteriores) aborda explícitamente con los niños lo que significa el trabajo en pequeño grupo: valorar críticamente las ideas de los compañeros

y discutir las, contrastar ideas, dar argumentos, llegar a acuerdos, llegar a compartir aprendizajes [V.2 108-114]. El alumno toma conciencia de qué hace y para qué lo hace [I24].

Aclara el uso del recurso, con los posibles malentendidos que cree puede provocar *Estos puntitos nos sirven para los vértices. Es decir, este puntito (señalando uno de la trama) es un vértice, pues de ahí sale una raya y de ahí voy a ir a éste que es el otro vértice, y luego voy a ir abajo que es el otro vértice.* [V.2 122- 136]. Y procede a continuación a dibujar un triángulo en la pizarra:



### 2.3 [V2. 142-167] ("Dificultades con triángulos en posición no estándar")

El niño que interviene tiene dificultades para reconocer como triángulo el dibujado por Inés sobre la trama, porque no lo identifica con su imagen de triángulo (no tiene ningún lado sobre la horizontal). Sabe que debe ser un triángulo pero no lo es "de pleno derecho". Sus intervenciones parecen claras a ese respecto: *¿Pero hay que dibujar triángulos normales o...? [...] Porque tiene la base... (otro niño dice: "está de lado, ¿no?"). La superficie... [...] está como así, como torcida (otro niño dice que está al revés).* Inés indaga en estas preguntas *Éste es normal, ¿por qué no va a ser normal? ¿qué le pasa para que sea anormal? es un triángulo anormal, ¿por qué?* [V.2 145-146].

Es otro compañero el que detecta dónde está el problema para estos niños. Inés resalta que no es esto en lo que se tienen que fijar, sino en hacer triángulos diferentes (fijándose en sus elementos, refiriéndose a su forma como había comentado anteriormente). En principio no le atribuye mucha importancia a este hecho.

El que Inés utilice un triángulo en posición no estándar hacer intervenir a un estudiante poniendo de manifiesto la oportunidad de profundizar en las opciones metodológicas que sigue la profesora en su curso, viendo, por ejemplo, qué valoración hace de enfrentar a los estudiantes con situaciones poco habituales. Además, la profesora aborda la dificultad que asalta al estudiante, cuestionando las suposiciones de éste, pidiendo explicaciones, y consensua lo entendido con el grupo. La concepción sobre el aprendizaje donde es importante que el alumno comunique y argumente sus opiniones [I15] nos proporciona la oportunidad de volver a observar cómo actúa ante los argumentos que expresan los alumnos y además explorar el conocimiento que pone en

juego cuando decide cómo afrontar dificultades expresadas por los estudiantes y cómo aprovecha las participaciones de éstos, sobre todo las erradas [KMT7]. Por otro lado, ante la clasificación de normal y anormal que propone el estudiante, encontramos una evidencia por parte de Inés sobre el tipo de clasificaciones que quiere encontrar (según sus formas).

Después se verá la incidencia que tiene en la generalidad de los alumnos [V.2 190-237]. La restricción de las imágenes que los alumnos atribuyen a los conceptos geométricos, hace que cobre mayor fuerza estas imágenes que la propia definición. Este desconocimiento de las dificultades del aprendizaje geométrico ligadas a las restricciones que derivan de los ejemplos de los que se hace uso (los dibujos modelos), puede parecer contradictorio con la introducción de los polígonos (su uso de variedad de imágenes). Puede usar esa variedad de imágenes para el análisis del concepto, pero no mantener esa diversidad para la ejemplificación. En este punto, podemos creer que existe una oportunidad para profundizar acerca de las formas de aprendizaje por parte de los alumnos, ya que la maestra parece estar intentando comprender qué ocurre en su clase pero no llega a conocer de manera formal el desarrollo cognitivo al que sus alumnos han llegado para este contenido particular [KFLM3].

### 3. [V2. 175-188] Organización del trabajo

Inés da algunas pautas para que los alumnos hagan los triángulos con precisión: *Inés: Para dibujar los triángulos os ayudáis de los puntos para los vértices. Fijad los vértices, decid: “el vértice uno está aquí, el dos aquí y el tres aquí”. Y ahora, o bien con la regla o bien con un lápiz, para trazar las líneas que salgan derechitas, ¿vale?* [V.2 178-187]. Parece que con esta afirmación pretende buscar los diferentes tipos de triángulos haciendo uso de la trama de puntos.

### 4. [V2. 190-237] Trabajo en grupos

Inés parece sorprendida por el hecho de que los niños ni siquiera identifiquen claramente lo que es un triángulo. Parece que creía que el concepto de triángulo era claro para ellos. Parece claro que en el concepto de triángulo consideraba la definición y la identificación de cualquier figura que la cumpliera. No se sabe hasta qué punto se percata por los dibujos de los alumnos de las restricciones de la horizontal, de la altura,

o de los isósceles. Insiste en la necesidad de que justifiquen por qué son diferentes. Parece manifestar un conocimiento acerca de cómo los alumnos interaccionan con el contenido matemático [KFLM4], ya que está pretendiendo buscar qué están entendiendo los alumnos finalmente por triángulo.

Ante las dificultades de los grupos para dibujar más triángulos distintos, hace referencia a las características de las clasificaciones por lados y ángulos y propone de este modo una búsqueda intencionada de triángulos para las distintas clases. *Ya tengo uno con los tres lados iguales y otro con dos lados iguales y otro más largo...*, *¿O no hay más combinaciones?* [V.2 220-233] De esta forma, la actividad de clasificación de triángulos se dirige más a una actividad de dar significado a las clasificaciones estándar [TE12]. Prima la comprensión conceptual a otros fines. Parece que Inés está abordando la búsqueda de elección (E) criterios de clasificación como objeto de aprendizaje, que con su intervención anterior está institucionalizando esa búsqueda. En este momento de clase, parece no percibir la limitación de este recurso empleado, dicha limitación quedará constatada en V3, cuando veremos que no ha contemplado la imposibilidad de encontrar triángulos equiláteros.

## **Relaciones MTSK – V2**

*Las concepciones como ayuda para encontrar relaciones entre elementos de los subdominios de MTSK – V2*

Durante la sesión principalmente se trabaja las clasificaciones de triángulos según sus lados y según sus ángulos (el contenido conceptual), además de que los triángulos son polígonos de 3 lados, 3 ángulos y 3 vértices, a partir de una elección (E) de criterio para dibujar distintos triángulos en la trama de puntos. Esto da lugar a que se establezcan clasificaciones con criterios no simultáneos (CL).

Esta definición parece recoger en "tiene ángulos y lados" el hecho de estar formada por una línea poligonal (basándose en esto desecharon las figuras con lados curvos). La definición usada (con esa identificación) se ajusta a la aceptada académicamente. Es de especial relevancia el papel que le otorga al alumno [I24] cuando la maestra hace destacar la importancia de la construcción de la definición de polígono [KPM1], manifestando una estructura lógica de pensamiento que le ayuda a entender el

funcionamiento de los aspectos matemáticos involucrados, así como los errores asociados a la construcción propiamente dicha [KFLM4]. Para ello, la maestra desde su conocimiento [KoT7] sobre qué es una definición y cuáles son las características que debe poseer está supeditada a la matemática escolar [I10], puesto que la definición depende del contexto en el que se está desarrollando y en este caso, aunque en la definición se incluyen elementos de las figuras y no recoge las características de las figuras sin que sea necesario hacer mención a éstos.

Parece que se observó en la identificación, por parte de los niños, de las dificultades asociadas a los triángulos no estándar y las dificultades para dibujar triángulos distintos. Ante este imprevisto se modifica la perspectiva de esta sesión y pretende profundizar en cómo afrontar dificultades expresadas por los estudiantes y cómo aprovecha las participaciones de éstos, sobre todo las erradas [KMT7]. Esta dificultad parece un problema imprevisto del que la maestra no esperaba que surgiese en clase, con lo que con la resolución y trabajo en esta dificultad, podemos afirmar que amplía su conocimiento sobre el aprendizaje geométrico y sus dificultades. El problematizar el aprendizaje de conceptos geométricos, proponiendo figuras no estándar, no nos hace saber hasta qué punto detecta las variables que influyen en esa estandarización, aunque la maestra sí percibe las restricciones de imágenes de los alumnos por dibujos "modelos".

Otro aspecto a destacar es el aprendizaje social compartido (el papel que le da al alumno), sigue siendo una constante. Por otro, se aprecia la importancia de construir haciendo uso, y relacionando con lo ya aprendido (la idea de qué es un polígono). En conjunto, podemos decir que hace un trabajo procedimental (dibujar distintos tipos de triángulos [Comparación (C)], analizarlos (Identificación de atributos (I)), distinguir clases (Clasificaciones con criterios no simultáneos (CL)), búsqueda de criterios para distinguirlos (Elección (E))] asociado a la clasificación de figuras planas (en este caso los triángulos). Al igual que en V1 parece tener organizado el proceso que llevará al alumno a la adquisición de unos contenidos determinados a través de su investigación [I2].

Aunque en su intervención con María (que ponía objeciones a los triángulos "no normales") parece que no le daba demasiada importancia a esta dificultad, va descubriendo que es un problema general en la clase. Las dificultades no surgen

inmediatas, suponen una búsqueda de las causas de los problemas que se manifiestan. Parece que Inés percibe la importancia de las dificultades detectadas [KFLM5]. Todo ello gira en torno al concepto de triángulo y sus elementos, y las restricciones y dificultades de los alumnos para analizarlos e identificarlos. Toma en cuenta los contenidos específicos y profundiza en ellos desde el punto de vista de su aprendizaje [KFLM6]. Podemos observar la complejidad del aprendizaje geométrico (no es una definición y ejemplos de ésta).

Pasado un tiempo, como observa que no se avanza, detiene la actividad para sugerirles que es bueno y efectivo dibujar y buscar siguiendo un criterio, por ejemplo los lados. Con esta ayuda para realizar las clasificaciones a las que se quieren llegar, Inés aporta un organizador de la búsqueda de criterios para clasificar (Elección de criterios (E)).

Podemos observar que intenta ser precisa en los términos usados por los alumnos (frente a "ángulos chicos y grandes" ella repite la expresión del alumno usando los términos "*ángulos agudos y obtusos*"). Lo que parece dirigirle en esos momentos es la precisión del vocabulario en el contenido matemático asociado a los tipos de ángulos [KFLM1] y el deseo de centrar la actividad para obtener lo que se pretende de ella.

Finalmente, ante las dificultades de los grupos para dibujar más triángulos distintos, hace referencia a las características de las clasificaciones por lados y ángulos y propone de este modo una búsqueda intencionada de triángulos para las distintas clases. *Ya tengo uno con los tres lados iguales y otro con dos lados iguales y otro más largo...*, *¿O no hay más combinaciones?* [V.2 220-233] De esta forma, la actividad de clasificación de triángulos se dirige más a una actividad de dar significado a las clasificaciones estándar [TE12].

### Capítulo III: Análisis de la Información – V2

**KoT [Conocimiento de los Temas Matemáticos]**

Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático

**KoT7:** Conoce qué es una definición y cuáles son sus características

**KoT8:** Conoce que la construcción de la definición de polígono debe seguir un orden.

**KoT9:** Conoce que los triángulos son el polígono con menor número de lados

**KoT10:** Conoce los elementos de los triángulos (lados, ángulos, y vértices)

**KPM [Conocimiento de la Práctica Matemática]**

Conocimiento de Prácticas ligadas a la Matemática en General

**KPM2:** Conoce que en la construcción de ambas definiciones matemáticas (polígono y simetría) existen características generales semejantes, aplicando entre ellos una relación o una propiedad que está establecida en el otro.

**KMT [Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas]**

Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático

**KMT6:** Conoce la potencialidad que tiene el problematizar esta actividad (polígono de menor número de lados)

**KMT7:** Conoce cómo afrontar dificultades expresadas por los estudiantes y cómo aprovecha las participaciones de éstos, sobre todo las erradas en este caso con los triángulos en posición no estándar.

**KFLM [Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas]**

Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático

**KFLM 1:** Conoce la importancia de la precisión del vocabulario en el contenido matemático

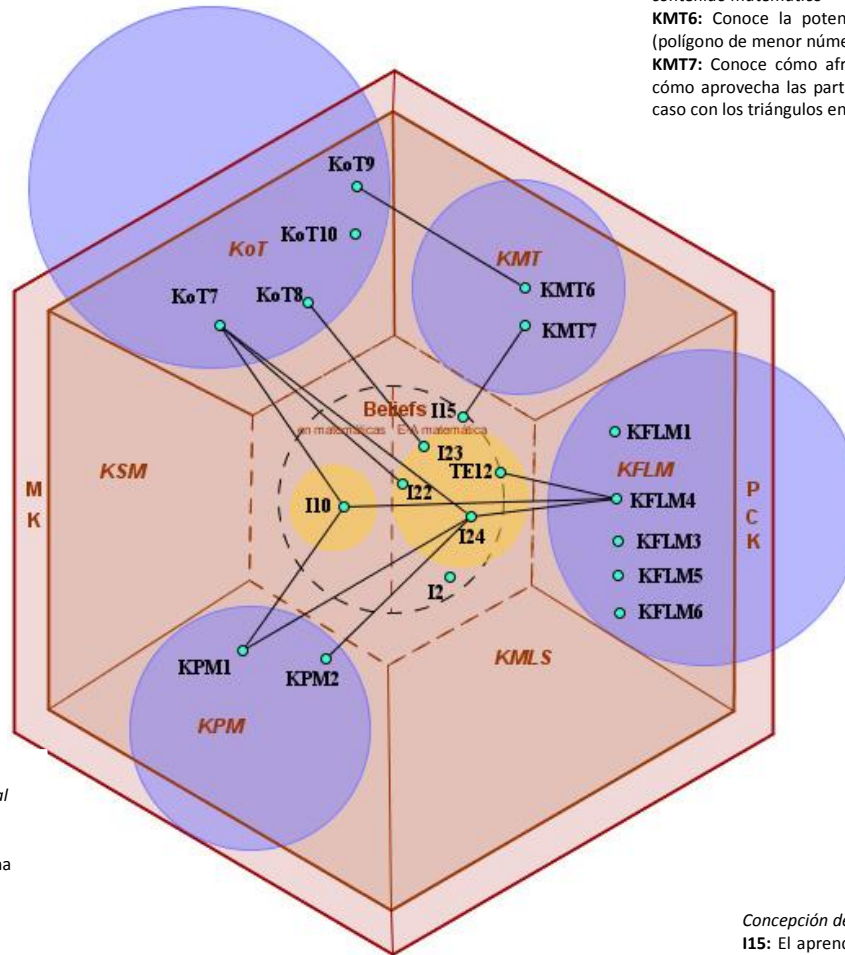
**KFLM4:** Conoce los errores asociados a la definición de polígono

**KFLM5:** Conoce que las dificultades no surgen inmediatamente, suponen una búsqueda de las causas de los problemas que se manifiestan (triángulos posición no estándar).

Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático

**KFLM3:** Conoce de manera formal el desarrollo cognitivo al que sus alumnos han llegado para este contenido particular

**KFLM6:** Conoce cómo los alumnos están interaccionando con el contenido pretendiendo buscar qué están entendiendo los alumnos finalmente por triángulo



Concepciones

**Metodología**

**I2:** La maestra tiene organizado el proceso que llevará al alumno a la adquisición de unos contenidos determinados a través de su investigación

**Concepción de la Matemática Escolar**

**I10:** La matemática escolar tiene su punto de partida en la etnomatemática de los alumnos y recoge las necesidades socio-políticas, culturales... "Hacer matemáticas" con un carácter más formal (con la formalidad que tiene sentido alcanzar en esta etapa educativa) proviene del análisis de lo concreto. Como contenidos matemáticos escolares se consideran tanto los numéricos propios de la etapa, como los geométricos, la medida, el tratamiento de la información y la resolución de problemas, destacando este último.

**TE12:** La asignatura ha de tener un carácter práctico que permita su aplicación utilitaria en la vida cotidiana y como instrumento para el estudio tanto de otras disciplinas como el estudio futuro de la propia matemática (tanto por los conocimientos que aporta como por contribuir al desarrollo del razonamiento en el alumno).

**Concepción del Aprendizaje**

**I15:** El aprendizaje se produce a través de investigaciones que han sido planificadas por el maestro. Además, para que se produzca aprendizaje éste debe institucionalizarse.

**Papel del alumno**

**I22:** Para que se dé aprendizaje es necesario que el alumno otorgue significado a lo que aprende, siendo consciente de su propio proceso de aprendizaje. La responsabilidad del aprendizaje recae en la marcha del proceso completo (con todos los elementos y factores que intervienen en éste)

**I23:** El alumno condiciona directa e indirectamente el diseño didáctico.

**I24:** El alumno toma conciencia de qué hace y para qué lo hace

**Imagen 5: Gráfico de relaciones internas MTSK correspondiente a V2**

## INFORME DEL ANÁLISIS V3

### Resumen

Esta sesión comienza con la puesta en común de los resultados de los trabajos de los pequeños grupos del día anterior [Episodio1]. Se usa el trabajo de los grupos, los triángulos que éstos dibujaron sobre las tramas, para trabajar la clasificación de triángulos [Episodio2]. Aunque a los grupos se les dio la consigna de dibujar triángulos diferentes y los criterios que se señalaron para que fueran diferentes giraban en torno a los lados y ángulos (a las clasificaciones que se pretende llegar), ellos no clasificaron los triángulos dibujados, sólo se aseguraron de que eran diferentes. Al final de la sesión, se cierra la actividad para llegar al contenido conceptual pretendido trabajando individualmente en unos ejercicios para aplicar las clasificaciones anteriores. [Episodio3]. La recogida de conclusiones se realiza como en V1, completando las órdenes preestablecidas.

### Episodios

#### 1. [V3. 5-23] Órdenes para recoger los resultados

Resalta cómo lo que se aprende es lo que se construye entre todos, con las aportaciones de todos los grupos (*Naturalmente esas expresiones no las podemos completar hasta que no veamos el trabajo de todos los grupos, ¿eh?, o sea que los espacios que están vacíos hay que dejarlos todavía vacíos* [V3. 21-23]). Con esta afirmación, Inés, parece estar haciendo consciente al alumno del proceso de aprendizaje en el que están envueltos, por qué hacen y para qué lo hacen [I22][I24].

#### 2. [V3. 24-507] Clasificación de los triángulos de la trama

##### 2.1. [V3. 24-34] Introducción de la puesta en común

Se exponen en la pizarra los triángulos de todos los grupos (una trama de cada grupo). Inés propone ver cuáles son diferentes y cuáles son iguales. Esta especie de "puesta en común" pretende ser una comparación de las clasificaciones implícitas que ha usado

cada grupo, completando las que se han usado entre todos y organizándolas. (*De lo que se trata ahora es de ver cuáles son diferentes y cuáles son iguales* [V3. 27-28]). Con esta orden está delimitando las clasificaciones con criterios no simultáneos (CL), además esto conlleva el que se creen grupos disjuntos (CLD). Esta clasificación, hará que durante el resto de la sesión esté condicionada por esta delimitación.

Inés esperaba en el trabajo en los pequeños grupos que se dibujaran distintas clases de triángulos. Sin embargo los grupos dibujan distintos triángulos, a veces no de distintas clases pero sí de distinta forma. Inés parece que piensa más en clases y los niños en formas. Durante la sesión usa el trabajo de los grupos como fuente de las figuras que clasificar: *Inés: De lo que se trata ahora es de ver cuáles son diferentes y cuáles son iguales. Para ver cuáles son diferentes y cuáles son iguales, ¿en qué nos podemos fijar?* (Los niños dicen: "los ángulos, los lados, los vértices..."). [...] *Vamos a empezar si queréis por los lados* [V3. 27-30]. Por último, es ella quien elige (E) el criterio para realizar la clasificación, deciden fijarse primero en los lados.

## 2.2. [35-269] Clasificación según los lados.

[V3. 42-102] A continuación, un alumno selecciona un triángulo aparentemente isósceles,



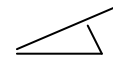
e Inés le pregunta por *lo que tiene y cómo tiene los lados* [V3. 49]. Podemos apreciar que ella está analizando ese triángulo desde dos puntos de vista: ¿cómo son los lados? En cuanto a razón de longitud, y cómo están dispuestos. Aunque aparentemente no es consciente de esta segmentación del triángulo, sí que es un conocimiento necesario que está manifestando sobre los triángulos isósceles **[KoT11]**. Establece una Elección (E) de criterios de clasificación adecuados a una situación: triángulos según sus lados.

El alumno parece no saber qué es lo que se le está solicitando, y contesta que uno recto. A lo que Inés contesta que todos los lados tienen que ser rectos, ya que si tuvieran lados curvos no podrían ser triángulos. Vuelve a manifestar un conocimiento sobre las curvas es una propiedad que no define a los polígonos **[KoT6]**. Tras esta intervención, el alumno da una contestación sobre que los lados "son obtusos" a lo que Inés vuelve a profundizar sobre qué es lo que el alumno está intentando explicitar. *¿Y los lados son obtusos? ¿O los lados son largos y cortos y...? ¿Cómo son los lados?* [V3. 58]. El alumno vuelve a dar una contestación errónea diciendo que son los vértices a lo que

Inés corrige. *Los ángulos son rectos, son obtusos, son agudos... Pero ahora no estamos mirando los ángulos. Ahora estamos mirando triángulos iguales pero fijándonos en sus lados. Y los lados sólo pueden ser o largos o cortos, no pueden ser de otra manera. Porque rectos ya hemos visto que son todos, ¿no?* [V3. 65-68]. La estrategia que está tomando para comenzar la actividad (que está determinada por cómo trabaja este contenido) ha hecho que la maestra busque y profundice en la naturaleza del error que el alumno ha manifestado para así intentar subsanarlo [KMT8]. Aún así, parece que no llega a profundizar en las concepciones del alumno, ¿cuál de los lados es el que ve recto? ¿cómo son los demás? ¿Qué entiende por lado recto?; ¿Podría dibujar o señalar un vértice obtuso? ¿Qué está entendiendo por esto? Y solo se decanta por facilitar la respuesta matemática correcta.

La discusión continúa ya que el alumno identifica que los tres lados son de diferentes longitudes, Inés pide a los niños que respeten las ideas del que está interviniendo, esperando que éste se explique para exponer después sus objeciones. Surge la concepción sobre el aprendizaje donde es importante que el alumno comunique y argumente sus opiniones [I15].

Inés pone en manos del resto de los alumnos la corrección de las ideas de los que intervienen. La intervención de un alumno donde intenta refutar a su compañero expresando que un triángulo no puede formarse con esas características.



A lo que Inés pregunta: *¿Entonces no puede haber un triángulo que tenga un lado mediano, otro más largo y otro más corto, no puede haber eso? [...] Ya lo veremos, ¿no? Si hay alguno que...* [V3. 96-97]. Este comentario puede identificarse de dos maneras; la primera es si con esas características pueden formarse triángulos, a lo que ella deja para más adelante esta respuesta, ya que surgirán los triángulos escalenos (que sí cumplen este criterio). Pero por otra parte, está el conocimiento que posee acerca de la desigualdad triangular donde cualquier lado siempre es menor en longitud que la suma de los restantes [KoT12].

En toda esta discusión anterior, Inés, está intentando comprender cómo los alumnos están asimilando el contenido matemático al que están enfrentándose para ello pretende durante toda la intervención poner en contradicción al alumno, por ejemplo preguntando *¿Y los lados son obtusos?* [V.3 58], con esa pregunta está intentando comprender (desde su conocimiento) la confusión que existe entre lados y tipos de ángulos [KFLM7].

[V3. 103-121] Triángulos con dos lados iguales y uno distinto

A continuación, los alumnos son los que intervienen señalando triángulos de este tipo y argumentándolo. A lo que Inés va dando el visto bueno. La información que se moviliza en el aula es validada por el grupo, y por el maestro, potenciándose la reflexión de los alumnos y asumiendo responsabilidad (por parte del alumnado) a la hora de juzgar la adecuación de sus ideas [I27].

Un niño parece relacionar la superficie que encierra un triángulo con su forma (y ésta con el tipo según los lados). Inés le corrige, desplazando la atención del interior (no es lo que interesa) a cómo son los lados. No se detiene más en este asunto, no entrando a profundizar qué encerraba esa forma de corroborar si ese triángulo cumplía con las características con las que estaban trabajando.

[V3. 124-139]

En un primer momento no se comprueba de ningún modo la igualdad o no de los lados, más que "a ojo". A partir de que de este modo no se llega a acuerdo (hay niños que visualizan algunos lados iguales y otros distintos), introduce el uso de una regla graduada para comprobar si son iguales las medidas de los lados [V3. 131]. Es ella en este caso la que introduce el elemento de comprobación. Se usa en adelante la regla como elemento de comprobación de la igualdad o no de los lados ([V3. 144-148], [V3. 151-155]).

El tercer triángulo de la quinta hoja, que se cataloga como isósceles [V3. 129-135], no lo es. Los dos lados identificados como iguales, tomando la unidad de medida natural de la trama, miden respectivamente  $6u.$  y  $4\sqrt{2}u.$  Sin embargo, medidos con la regla lo han identificado con ambos de igual longitud (7,5cm). De todos modos, no se debe esto sólo a la falta de precisión de la regla como instrumento de medida [KMT9]. Parece que no ha trabajado previamente el geoplano como recurso porque salta a la vista que es difícil la identificación de una longitud horizontal o vertical y una que no esté en esas direcciones, porque la última debe ser fruto de un cuadrado perfecto. El uso de la regla como medida "extraña", las dificultades de cada una de las unidades de medida asociadas y la potencialidad, y el posible uso de la comparación sin llegar a medir hace que use el recurso sólo como ayuda al dibujo. No se hace un análisis previo de su potencialidad ni se problematiza su uso en sí (tanto desde el punto de vista del

contenido como de su aprendizaje). Este conocimiento le proveería de elementos de control sobre el recurso. Del mismo modo es catalogado erróneamente como isósceles el segundo triángulo de la sexta ficha [V3. 143- 144].

A continuación, surge un problema con el cuarto de la sexta ficha. María dice que ese triángulo es más alto a lo que Inés responde: *María, no estamos hablando de más alto o de más bajo. Estamos hablando de si ese triángulo, como todos los 1, tiene dos lados iguales y uno distinto. Eso es lo que estamos viendo, María* [V3. 147-151]. Al igual que en [V3. 103-121] No se detiene más en este asunto, no entrando a profundizar qué encerraba esa forma de corroborar si ese triángulo cumplía con las características con las que estaban trabajando.

A partir de un momento se da cuenta de que no siempre está considerando los segmentos sobre la trama, sino que está considerando los rotulados (a veces no entre vértices de la trama) [V3. 158-163]. Pero justamente después cuenta los puntos entre los vértices *En uno de los triángulos, el tercero de la ficha 4, Por los puntitos, ¿ves? (señalándolos con el dedo a medida que los va contando en voz alta): un puntito, dos puntitos, tres puntitos, cuatro puntitos. ¿Sabes qué es lo que pasa? Que el rotulador, al ser tan gordo, nos está haciendo dudar mucho* [V3. 169-174]. Parece que está intentando solventar la limitación de haber usado ese material buscando posibles soluciones a la medición de los lados **[KMT10]**.

[V3. 181-194] Triángulos con los tres lados distintos.

Se interviene como en el caso anterior: los niños señalan cuáles son, individualmente y solicitando la intervención, y se discute entre todos. Se mantiene respecto de sesiones anteriores, la participación de todos los alumnos que lo solicitan (que es una gran mayoría), la discusión entre los alumnos, la argumentación. Se comprueba midiendo con la regla cuando alguien no está de acuerdo. Se hace a los alumnos responsables de la validación de las ideas que se movilizan en el aula **[I27]**.

Del mismo modo anterior, los niños van levantando la mano cuando ven alguno de ese tipo, Inés les pide que lo digan y se discuten. Si todos los niños lo ven se le pone un 2. Un niño le objeta que "si no lo mide ni nada". Inés dice que ya lo han medido antes, pero que si alguien tiene alguna duda que lo diga y se vuelve a medir. Dice que ella va

poniendo el 2 hasta que alguien le diga que no está de acuerdo. Hay veces que se repite la medición porque algún niño dice no estar de acuerdo [V3. 185- 189].

En varias ocasiones llamará la atención a los alumnos sobre este aspecto y avisa de que si nadie dice lo contrario, ella lo da por bueno, por lo que hay que estar atentos [V3. 298-299].

[V3. 195-205] Triángulos con los tres lados iguales.

Inés pretende buscar un tercer grupo que aún no ha salido (debido a la limitación de la trama de puntos) y fuerza a que los alumnos recuerden ese grupo de triángulos: *Bueno, pues resulta que ya tenemos un grupo 1, un grupo 2, ¿se podrían hacer más grupos, aunque ahí no estén?* [V3. 195-205] a lo que un alumno contesta que los 3 lados iguales. Identificación (I) de distintas cualidades o atributos atribuibles a los polígonos: longitud de los lados. Manifiesta un conocimiento acerca de las clasificaciones de triángulos por sus lados, ya que conoce que falta un diferentes grupos por aparecer **[KoT13]**.

[V3. 205-224] ¿Más clases?

Tras varias intervenciones que son invalidadas, deciden que no hay más clases (según los lados).

[V3. 224-238] Se completa la orden con las conclusiones de lo obtenido

Se sacan las conclusiones de lo que han obtenido en gran grupo y se escriben en gran grupo (los niños construyen lo que hay que completar en gran grupo, Inés lo escribe en la pizarra y cada niño en su cuaderno). Inés fuerza a la precisión, dando expresiones adecuadas. Conoce el lenguaje correcto para poder caracterizar los grupos que han encontrado **[KFLM1]**.

[V3. 240-269] El nombre de cada clase

Inés pide a los niños que busquen en el libro "cómo llama el que ha escrito el libro" a cada grupo de los que ellos han encontrado ("que coinciden con los que ha encontrado el que ha escrito el libro"). El libro de texto se presenta como una fuente de información fiable. Sirve para formalizar, para organizar lo que se ha descubierto previamente **[TR27]**

Se recoge junto con las descripciones obtenidas de las clases de triángulos según sus lados, sus nombres, los que vienen en el libro de texto. Además, Inés hace que los niños repitan varias veces estos nombres y la descripción de los grupos a los que pertenecen. Es claro, por un lado, que se da importancia a los contenidos conceptuales. Por otro, que se busca una comprensión conceptual de los contenidos, que se dé significado a éstos. Este significado lo aporta el propio proceso seguido (la propia actividad realizada para llegar a los conceptos) y el análisis de lo que encierran los conceptos a que obliga dicha actividad.

### 2.3. [V3. 270-507] Clasificación según los ángulos.

#### [V3. 270-281] Triángulos con un ángulo recto y dos agudos

Inés plantea de manera problemática (como pregunta abierta) cómo pueden ser los tres ángulos de un triángulo. Al igual que en anteriores ocasiones, opta por problematizar la actividad, manifestando un conocimiento sobre la potencialidad que tiene el problematizar esta clasificación [KMT6], ya que parece ser que con la anterior clasificación por lados ha tenido problemas desde el principio, queriendo cambiar para esta ocasión. Esta decisión provoca algunas dificultades en algunos niños, ya que no consiguen visualizar qué combinaciones pueden realizarse y cuáles serían imposibles. Establece una Elección (E) de criterios de clasificación adecuados a una situación: triángulos según ángulos.

En algunas de estas ocasiones (de intervenciones de los niños aportando "combinaciones imposibles"), se observa de nuevo (como en [V3. 84-103]) cómo algunas ideas se desechan porque los compañeros no están de acuerdo (y son erróneas, por lo que la maestra mantiene el acuerdo del resto). La concepción sobre el aprendizaje donde es importante que el alumno comunique y argumente sus opiniones [I15]. *¿qué podemos encontrar? ["Dos ángulos obtusos y uno recto", dice María]. Dos ángulos obtusos y uno recto... [Miguel dice que eso no se puede hacer]. Inés: María, dice Miguel que no se puede hacer un triángulo que tenga dos ángulos obtusos y uno recto ("Pues...dos agudos y uno recto...", dice María]. Bueno, espérate, ¿no? ¿ya te has rendido? ¿ya has dicho: "bueno, es verdad, Miguel"? A ver, ¿qué decís los demás? [Repite la idea de Miguel. Jesús dice que está de acuerdo con Miguel]. No se puede construir un triángulo así [V3. 270-281].*

Se observa cómo van buscando triángulos que tengan esas características (dos agudos y uno recto). Se asegura de que están comprendiendo lo que hacen (pide en cada caso que se señale cuál es el ángulo que se considera recto y cómo son los otros dos). Identificación (I) de distintas cualidades o atributos atribuibles a los polígonos: tipos de ángulos.

[V3. 281-362]

Ante las distintas visiones sobre si un ángulo es recto o no, Inés pide modos de comprobarlo. Se observan problemas en la Identificación (I) de ángulos rectos porque algunos niños lo asocian a la horizontal-vertical (hecho que fue percibido por Inés en V2). Inés explica cómo este hecho es independiente de la posición del triángulo, centrando la atención en cómo se cortan las rectas que lo forman, preguntando *¿y cuál es el ángulo recto?* [V3. 315]; *¿cómo tienen que ser esas líneas?* [V3. 322]; *¿qué ángulo forman?* [V3. 326]. Hace referencia a un aprendizaje anterior ("las rectas secantes perpendiculares") para que los alumnos consideren las formas en que se deben cortar las rectas para que se forme un ángulo recto. Manifiesta un conocimiento de la Secuenciación de diversos Temas en el mismo curso (las líneas secantes perpendiculares con la clasificación de triángulos a través de sus ángulos) y con las capacidades previas que tiene un estudiante para enfrentar esta tarea **[KMLS1]**.

Utiliza un triángulo rectángulo recortado en papel para apoyarse en su explicación. En esta explicación sigue haciendo cuestiones a los alumnos para que piensen sobre la situación *¿este triángulo no es rectángulo?* [V3. 333]; *¿y si ahora lo pongo así, ya no tiene ángulo recto?* [Moviéndolo de posición sobre la horizontal] [V3. 336-337]. También hace referencia a la asociación que hacían los niños (en V2) entre el triángulo y su posición, aclarada en aquella situación. Aprovecha ocasiones de aprendizaje anteriores para que el alumno tome conciencia del paralelismo entre ambas. La concepción sobre el aprendizaje donde es importante que el alumno comunique y argumente sus opiniones **[I15]** nos proporciona la oportunidad de volver a observar cómo actúa ante los argumentos que expresan los alumnos y además explorar el conocimiento que pone en juego cuando decide cómo afrontar dificultades expresadas por los estudiantes y cómo aprovecha las participaciones de éstos, sobre todo las erradas respecto a la horizontalidad de las figuras planas **[KMT11]**.

Durante la explicación anterior, Inés, aporta la estrategia para comprobar si un ángulo es recto o no: superponer sobre éste un ángulo recto de una plantilla de papel. Está potenciando una visión dinámica de la geometría, en la que interviene el movimiento como un elemento que en este momento no distingue las figuras (frente a la visión estática). Ha planteado una situación abierta que incitan a la exploración, que puede resolverse por distintos procedimientos, donde la observación, y el razonamiento son necesarios para la comprensión. Manifiesta un conocimiento donde los ángulos rectos nunca van a variar la amplitud del ángulo [KoT14] y utiliza un recurso propio del contenido que están trabajando como estrategia de enseñanza [KMT12] [KMT13].

[V3. 362-401]

Ante el uso de la plantilla del ángulo recto, algunos niños vuelven a reflejar problemas con el concepto de ángulo, percibiendo el tamaño de los ángulos en función del de las líneas que lo conforman. La maestra vuelve a plantear cuestiones para que se fijen en los ángulos y no en los lados, guiándoles para que identifiquen el concepto de ángulo con la amplitud. Ante las dificultades de comprensión que percibe [KMT14], explica, haciendo cuestiones a los alumnos que hacen centrar su atención donde reside el problema [KFLM6]. *Pero es que todos los ángulos rectos son iguales, ¿o no? ¿es que hay ángulos rectos grandes y ángulos rectos chicos? [José dice que hay grandes y chicos]. Pero no estoy hablando de la línea, estoy hablando del ángulo. Los lados sí pueden ser, puede ser este lado así de largo y éste lado así de largo (haciendo la señal con las manos como si alargara mucho las líneas que conforman el ángulo recto del triángulo de papel que muestra a los alumnos), ¿pero el ángulo es diferente o es igual? [José contesta que es igual]. La que no, bueno, vamos a hacer un triángulo más grande. Hasta aquí, y por aquí (señalando como si alargara las líneas que conforman el ángulo recto del triángulo de papel), ¿qué es más grande?, el lado, ¿no? ¿pero el ángulo es más grande? ¡el ángulo es igual! (Laura asiente) [V3. 358-375].*

En adelante, se sigue haciendo uso de la plantilla de ángulo recto para comprobar si los ángulos que señalan los alumnos son rectos o no (en casos dudosos). También en este caso se cometen errores en la clasificación identificándose como ángulos rectos algunos que no lo son, pero que se aproximan mucho y con la plantilla no se percibe la diferencia. Inés parece no percatarse de esas diferencias.

[V3. 401-410] ¿Otras posibilidades?

María vuelve a plantear un caso con dos ángulos obtusos (él mismo planteaba, al principio de la clasificación según los ángulos, el de dos ángulos obtusos y uno recto, que se desechaba porque el resto no estaba de acuerdo con que fuera posible). En esta ocasión Inés le incita a que imagine mentalmente el dibujo, pero no se le aportan más argumentos (tampoco se le invita a que intente hacer el dibujo, como al final de la sesión, cuando sigue insistiendo en esta combinación). Vuelve a insistir en que debe explicar y argumentar por qué esa combinación no es posible efectuarla. *Tú sabes que no puede ser pero no sabes explicar por qué (a Miguel). Habrá que decir por qué sí o por qué no (a otros niños que dicen pensar igual que Miguel pero que no tienen razones), habrá que tener una razón...* [V3. 405-407]. La concepción sobre el aprendizaje donde es importante que el alumno comunique y argumente sus opiniones [I15].

[V3. 410-421] Triángulos con dos ángulos agudos y uno obtuso.



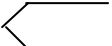
Los niños siguen indicando triángulos de esta clase. Inés fuerza al uso preciso de los términos. *Los niños dicen que el ángulo del triángulo dibujado es más agudo que el recto de la plantilla. Más agudo no, más pequeño, no hay más ángulos más agudos o más obtusos* [V3. 418-421]. [KFLM1] precisión en el lenguaje usado.

[V3. 422-439] Triángulos con los tres ángulos agudos

María identifica como recto un ángulo que no lo es. Para mostrarle lo que representa la amplitud del ángulo recto, Inés coloca un abanico en posición de ángulo recto y lo muestra más abierto y más cerrado, para que vea cuando es mayor y menor que el recto. Elige otra representación que potencia la visión dinámica del concepto de ángulo (y permite conceptualizar la noción de ángulo como amplitud) En este caso, la representación no es afín a la matemática (es un abanico), pero sí sirve para poder mostrar la amplitud del ángulo recto al alumno [KMT14].

[V3. 439-491] ¿Más clases?

Para algunos niños, sigue siendo posible para algunos de ellos la existencia de triángulos con dos ángulos rectos o con dos obtusos (vuelve a ser María el que plantea esta posibilidad). El resto de los niños dice que no pero Inés pide argumentos para convencerlos. Les pide que se imaginen primero mentalmente la situación, que intenten dibujarlo con la cabeza. Algunos niños dan razones: no se cerraría, no sería un

triángulo... Al no convencerse los alumnos, Inés les pide que intenten dibujarlos en la pizarra. Inés va poniendo objeciones a los dibujos de los niños por ejemplo: no tiene tres lados  hay vértices donde se encuentran más de dos lados . En esta ocasión es ella quien valida si es válido o no, pero haciendo observar a los alumnos que no cumplirían con las características principales de qué es un triángulo (figura plana, cerrada, con 3 lados). Pide que describan las clases que han obtenido según los ángulos. Se continúa haciendo en gran grupo, con las intervenciones de diversos niños. Fuerza a la precisión en las descripciones [KFLM1] [V3. 440- 441]. En esta ocasión, intenta profundizar en la comprensión de la alumna María (quiere reflejar un triángulo con dos ángulos obtusos ) al contrario de cuando ocurrió anteriormente [V3. 401-410], intenta buscar por qué este alumno piensa que sí puede construir un triángulo de tales características, conociendo ella que no es posible [KoT12].

[V3. 491-508] Clases obtenidas y el nombre de cada clase.

Del mismo modo que con la clasificación según los lados, escriben (Inés en la pizarra y los niños en su cuaderno) la descripción de cada clase obtenida. Después, igualmente, buscan en el libro de texto el nombre de cada clase. *El que termine de copiarlo que busque en el libro cómo le llama a estos grupos el que ha escrito el libro. A ver cómo le llama a los triángulos del grupo "A", es decir, a los que tienen dos ángulos agudos y uno recto; a ver cómo les llama a los del grupo "B", es decir, los triángulos que tienen dos ángulos agudos y uno obtuso; y a ver cómo le llama a los triángulos del grupo "C", que son los que tienen los tres agudos* [V3. 496-501]. Con esta afirmación, está validando el conocimiento que se ha puesto en juego durante toda la sesión con el suyo propio (tipos de clasificaciones de triángulos dadas por sus ángulos) [KoT15].

3. [V3. 509-545] Ejercicios de aplicación.

Los dos ejercicios son de clasificación de triángulos según los lados y los ángulos (cada triángulo se clasifica de las dos formas). Se propone para que se realice de manera individual. El descubrimiento se hace en gran grupo y la aplicación, el afianzamiento se hace de manera individual.

### **Relaciones MTSK – V3**

*Las concepciones como ayuda para encontrar relaciones entre elementos de los subdominios de MTSK – V3*

Durante la sesión, Inés, parece mostrar un conocimiento sobre la secuencia de acciones que debe llevar a cabo para que el alumno aprenda el contenido que están trabajando. La maestra tiene organizado el proceso que llevará al alumno a la adquisición de unos contenidos determinados a través de su investigación [I2]. Podemos observarlo como cuando por ejemplo empieza dando ella el criterio sobre qué elemento considerar como la primera clasificación en [V3. 27-30], siendo los lados el elemento más visual posible para elegir. Posteriormente, cuando deciden realizarlo con los ángulos (concepto más abstracto), prefiere cambiar la estrategia para problematizar su petición de clasificación por ángulos [KMT6], viendo que la actividad como algo más complejo que la anterior, durante toda la sesión se manifiesta que está tomando en consideración la forma en cómo sus alumnos aprenden matemáticas [KFLM8].

Aunque los niños aluden en principio a diferenciar los triángulos por los lados, ángulos y vértices. Es la propia maestra la que decide empezar por los lados. Tras la obtención de las dos clasificaciones no se abordan otras posibles (por ejemplo, por los vértices). Parece menor en este caso el interés porque los niños clasifiquen ("con sus propias clasificaciones", como en los cuerpos geométricos) que por llegar a las clasificaciones establecidas (aunque hemos visto que el único fin no es el conceptual). Con esta orden está delimitando las clasificaciones con criterios no simultáneos (CL), además esto conlleva el que se creen grupos disjuntos (CLD). Esta clasificación, hará que durante el resto de la sesión esté condicionada por esta delimitación.

Cuando la maestra solicita a un alumno de por qué una figura con lados curvos no es un polígono [KoT6], y éste vuelve seguir con su razonamiento en la que sí lo incluye, toma por iniciativa comenzar la actividad (que está determinada por cómo trabaja este contenido) ha profundizando en la naturaleza del error que el alumno ha manifestado para así intentar subsanarlo [KMT8]. Aún así, parece que no llega a profundizar, y pregunta ¿cuál de los lados es el que ve recto? ¿cómo son los demás? ¿Qué entiende por lado recto?; ¿Podría dibujar o señalar un vértice obtuso? ¿Qué está entendiendo por esto? Y solo se decanta por facilitar la respuesta matemática correcta. La discusión continúa ya que el alumno identifica que los tres lados son de diferentes longitudes, Inés

pide a los niños que respeten las ideas del que está interviniendo, esperando que éste se explique para exponer después sus objeciones. Surge la concepción sobre el aprendizaje donde es importante que el alumno comunique y argumente sus opiniones [I15].

Por otra parte, parece que las imágenes de los triángulos modelo distorsionan las clases sobre las que se está trabajando, así como se percibe en diversas ocasiones durante los procesos de clasificación según los lados y los ángulos existen errores. Por ejemplo, cuando están clasificando los triángulos según los lados, varias veces los niños hacen referencia a comparar los lados no sólo en cuanto a "lados iguales/lados diferentes" sino a "lados mayores/menores", "cortos/largos". Éste parece que es para ellos el resultado más natural de la comparación de los lados. En todas las ocasiones es Inés la que corrige a los alumnos guiando la clasificación hacia el camino que considera para realizar la clasificación y tomando el vocabulario exacto para que no ocurran confusiones [KFLM1].

La maestra plantea de manera problemática (como pregunta abierta) cómo pueden ser los tres ángulos de un triángulo. Al igual que en anteriores ocasiones, opta por problematizar la actividad, manifestando un conocimiento sobre la potencialidad que tiene el problematizar esta clasificación [KMT6]. Esta decisión provoca algunas dificultades en algunos niños, ya que no consiguen visualizar qué combinaciones pueden realizarse y cuáles serían imposibles obligando a que el alumno comunique y argumente sus opiniones [I15] durante esta actividad.

El uso del recurso sólo como ayuda al dibujo hace que se limite la actividad, ya que no se hace un análisis previo de su potencialidad ni se problematiza su uso en sí (tanto desde el punto de vista del contenido como de su aprendizaje). En un momento determinado, alterna usar los puntos para comparar los lados (cuando están en horizontal y vertical) con medir (cuando están en otra posición), pero no explicita esta diferencia. Vemos aquí una posible oportunidad de profundizar en el conocimiento de la maestra, ya que no sabemos con seguridad si posee el conocimiento para poder utilizar este recurso con plenitud.

No tienen más argumentos que la visualización, por lo que no pueden aportar justificaciones a los que dicen no estar de acuerdo. Finalmente (al final de la clasificación de los ángulos), cuando muchos niños dicen que no hay más tipos y otros proponen tipos "con como dos ángulos rectos y uno agudo", usa el dibujo (de los niños

que defienden esto) para que visualicen que es imposible dibujar triángulos con esos ángulos. El alumno siente que sus ideas, sus problemas, sus logros son considerados, y son importantes para la maestra [I24].

**KoT (Conocimiento de los Temas Matemáticos)**

Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático

**KoT6:** Conoce que las curvas es una propiedad que no define a los polígonos

**KoT11:** Conoce qué es necesario para construir los triángulos isósceles en cuanto a razón de longitud y cómo están dispuestos los lados

**KoT12:** Conoce la propiedad de la desigualdad triangular

**KoT13:** Conoce los tipos de clasificaciones de triángulos según sus lados

**KoT14:** Conoce que los ángulos rectos nunca van a variar la amplitud del ángulo

**KoT15:** Conoce los tipos de clasificaciones de triángulos según sus ángulos

**KMT (Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas)**

Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático

**KMT6:** Conoce la potencialidad que tiene el problematizar esta actividad (clasificación de triángulos con un ángulo recto y dos agudos)

**KMT8:** Conoce las dificultades que genera el comenzar la actividad por una estrategia concreta

**KMT11:** Conoce dificultades respecto a la horizontalidad de las figuras planas

**KMT12:** Conoce las dificultades respecto al concepto de ángulo con la amplitud  
Conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático

**KMT9:** Conoce el uso de la regla milimetrada para medir

**KMT10:** Conoce la limitación del uso de la regla milimetrada como recurso para medir

**KMT13:** Conoce el uso de recursos como estrategia de enseñanza (medición de ángulos con papel).

**KMT14:** Conoce el uso de recursos para medir la amplitud de los ángulos (abanico).

**KFLM (Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas)**

Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático

**KFLM1:** Conoce la importancia de la precisión del vocabulario en el contenido matemático

Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático

**KFLM6:** Conoce cómo los alumnos están interaccionando con el contenido pretendiendo buscar qué están entendiendo los alumnos finalmente por triángulo

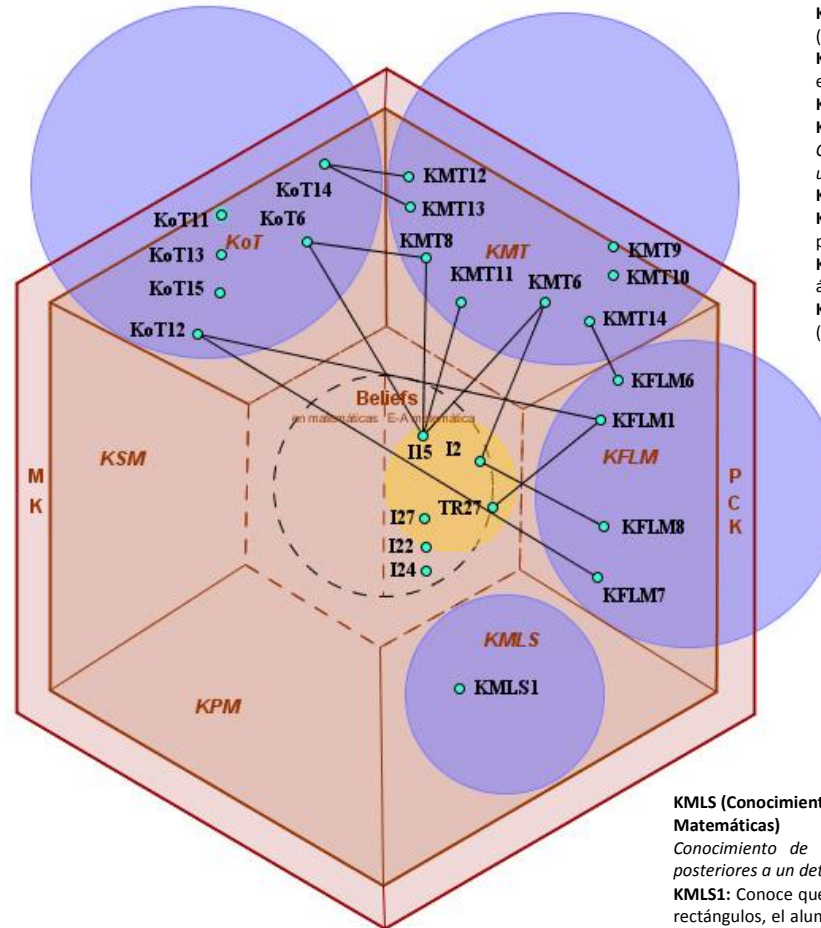
**KFLM7:** Conoce la confusión que existe entre lados y tipos de ángulos

**KFLM8:** Conoce que los alumnos interaccionan de diferente forma respecto a la clasificación por lados y ángulos.

**KMLS (Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas)**

Conocimiento de la secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar

**KMLS1:** Conoce que previamente a la clasificación de triángulos rectángulos, el alumno ha aprendido que los ángulos rectos son construidos por rectas secantes perpendiculares



*Concepciones*

*Metodología*

**I2:** La maestra tiene organizado el proceso que llevará al alumno a la adquisición de unos contenidos determinados a través de su investigación

*Papel del alumno*

**I22:** Para que se dé aprendizaje es necesario que el alumno otorgue significado a lo que aprende, siendo consciente de su propio proceso de aprendizaje. La responsabilidad del aprendizaje recae en la marcha del proceso completo (con todos los elementos y factores que intervienen en éste)

**I24:** El alumno toma conciencia de qué hace y para qué lo hace

*Concepción del Aprendizaje*

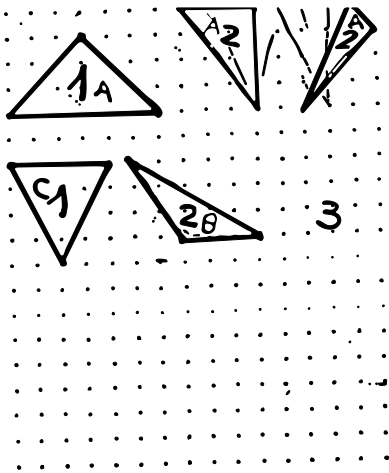
**I15:** El aprendizaje se produce a través de investigaciones que han sido planificadas por el maestro. Además, para que se produzca aprendizaje éste debe institucionalizarse.

*Papel del profesor*

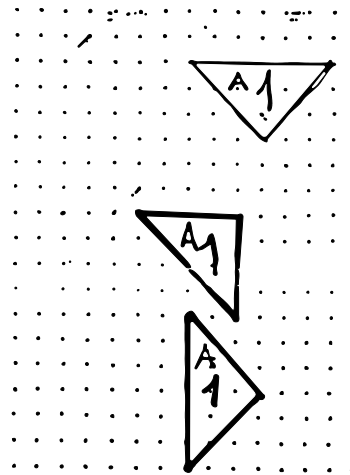
**TR27:** El maestro (y/o el libro de texto) es el que valida las ideas que se movilizan en el aula, corrigiendo a los alumnos en caso de errores y aportando él mismo la información correcta

**I27:** La información que se moviliza en el aula es validada por el grupo, y por el maestro, potenciándose la reflexión de los alumnos y asumiendo responsabilidad (por parte del alumnado) a la hora de juzgar la adecuación de sus ideas

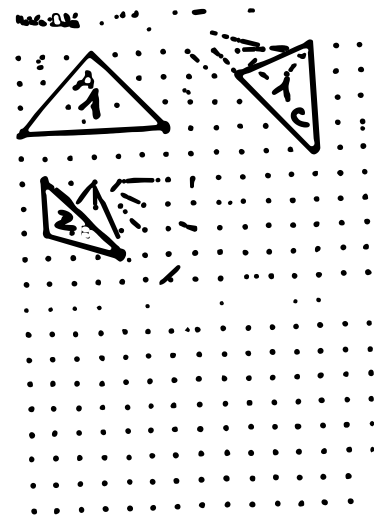
**Imagen 6: Gráfico de relaciones internas MTSK correspondiente a V3**



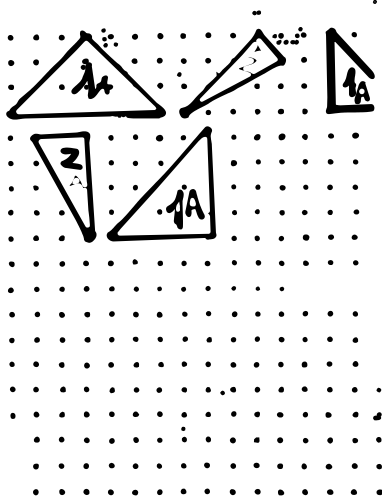
Ficha del Grupo 1



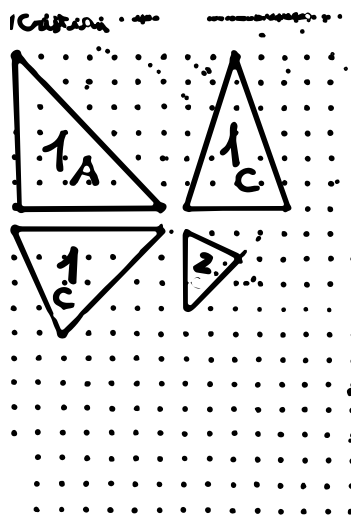
Ficha del Grupo 2



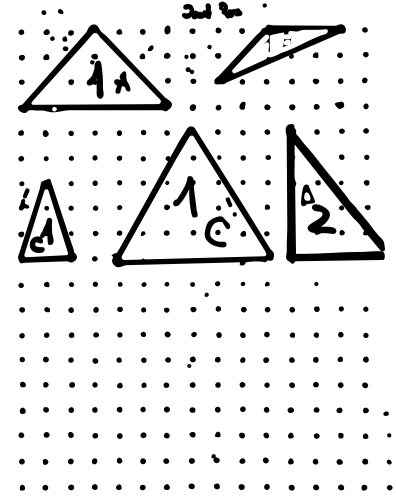
Ficha del Grupo 3



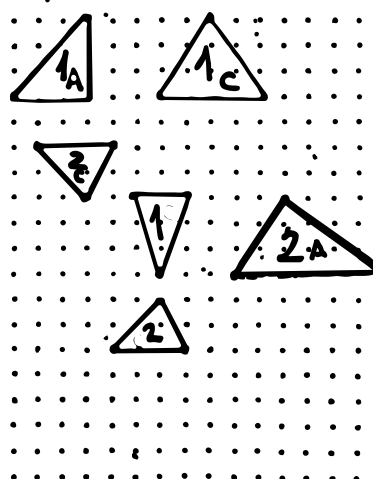
Ficha del Grupo 4



Ficha del Grupo 5



Ficha del Grupo 6



Ficha del Grupo 7

- 1: triángulos isósceles
- 2: triángulos escalenos
- 3: triángulos equiláteros
- A: triángulos rectángulos
- B: triángulos obtusángulos
- C: triángulos acutángulos

Figura 2: Fichas de los alumnos y cómo quedaron clasificadas en V3

## INFORME DEL ANÁLISIS V4

### Resumen

La actividad que se plantea para esta sesión está dividida en dos partes: por un lado tiene una la aplicación de los contenidos trabajados en la sesión anterior (clasificación de los triángulos según sus lados y según sus ángulos) [Episodio1-2] y por otra parte es una situación problemática nueva propuesta a los alumnos (deben de comprobar que la suma de los ángulos corresponden a la suma de dos ángulos rectángulos) [Episodio3]. Donde cada niño interviene diciendo de qué tipo es su triángulo según sus lados y según sus ángulos y por qué. El resto de los niños expresen su acuerdo o no. En caso de no estar de acuerdo, justifican por qué y cómo consideran ellos que es el triángulo. En ocasiones es la maestra la que corrige, haciendo a los alumnos preguntas para que identifiquen correctamente los ángulos y lados de la figura. En otros casos es ella la que corrige, poniendo objeciones (argumentos en contra) a las ideas de los alumnos, explicando cuestiones confusas o problemáticas. Finalmente, cierra la actividad dejando sin hacer la segunda parte prevista, proponiendo la maestra a sus alumnos que piensen en cómo resolver el problema planteado [Episodio4].

### Episodios

1. [V4. 12-17] Cuestiones sobre el día anterior

Miguel hace una observación que enuncia en forma de cuestión a la maestra: *Miguel: Señorita, que los triángulos escalenos no tienen que ser obtusángulos* a lo que Inés contesta que no [V4. 12-14].

El comentario del niño puede deberse a la consideración de realizar alguna clasificación donde exista un triángulo con todos sus ángulos agudos y todos los lados diferentes. Inés no parece darle importancia a este hecho. En V3, se dio la orden de saber qué triángulos eran iguales o diferentes, esto hizo que se delimitasen las clasificaciones con criterios no simultáneos (CL), y conllevase el que se creen grupos disjuntos (CLD).

Podemos observar que un alumno lo que pretende buscar son clasificaciones inclusivas, pero Inés no parece apreciar este matiz.

## 2. [V4. 18-65] Presentación de la actividad

La maestra comienza a presentar la actividad: *Inés: Hoy le voy dar yo a cada uno un triángulo, no sabemos de momento a qué grupo pertenece pero ahora cada uno lo va mirando y me va diciendo a qué grupo pertenece según sus lados y según sus ángulos. Y después tiene que pensar una forma... a ver de qué forma podemos conseguir ver que si juntamos todos los ángulos de un triángulo, todos juntos todos van a medir lo mismo que dos ángulos rectos juntos* [V4. 19-23].

Inés enlaza una actividad de aplicación del contenido trabajado en la sesión anterior con la introducción del nuevo contenido. Quiere trabajar la suma de los ángulos de un triángulo, para lo que les entrega a los niños triángulos recortados en papel para que recorten a su vez los ángulos y los unan (En V5 cómo los alumnos proponen este procedimiento). Aprovecha estos triángulos para afianzar la identificación de triángulos según sus lados y ángulos y el nombre de cada clase, además está enfrentando al alumno con una situación para la que no tiene una solución dada previamente [I1]. *Y después tiene que pensar una forma... a ver de qué forma podemos conseguir ver que si juntamos todos los ángulos de un triángulo, todos juntos, todos van a medir lo mismo que dos ángulos rectos juntos [...] Pues después tenemos que buscar una forma para conseguir ver que los tres ángulos de un triángulo, los tres juntos, entre los tres valen lo mismo que dos ángulos rectos. Esto es un ángulo recto, ¿sí o no? (dibujando en la pizarra:  $\perp$  ).[...] ¿Y éste es otro ángulo recto o no? (completando el dibujo anterior del modo:  $\perp \perp$  ). O sea que desde aquí hasta aquí son dos ángulos rectos juntos, ¿no? (señalando las dos líneas extremo del ángulo de  $180^\circ$  dibujado en la pizarra)* [V4. 18-42]. Está manifestando conocer que la suma de los tres ángulos internos es  $180^\circ$  [KoT16].


La segunda cuestión que propone (*si juntamos los tres ángulos valen lo mismo, suman lo mismo que dos ángulos rectos* [V4. 43-46]) es un conocimiento de problematizar el problema. Manifiesta un conocimiento sobre la potencialidad que tiene el problematizar esta actividad [KMT3] motivando a sus alumnos poniendo como condición un aspecto matemático que van a trabajar a posteriori.

Para facilitar la comprensión de qué es lo que se pide recuerda la ocasión en que en las simetrías (trabajadas antes de los polígonos) buscaron un modo de ver cuándo una figura era simétrica de la otra. Pregunta sobre cómo comprobaban que lo era. *Igual que decíamos "bueno, ¿y cómo podemos saber que una figura es simétrica de otra?". Pues encontramos una manera de ver cuando una figura era simétrica de la otra, ¿no? A ver, Daniel, ¿cómo lo hacíamos?* [V4. 49-51]). Al igual que en V1 hace una analogía entre la solución que optaron para saber si una figura era simétrica a otra y la que han encontrado en esta ocasión (solución a la suma de los ángulos interiores). Manifiesta que para la solución de ambos problemas van a existir características generales semejantes, ya que en el caso de la simetría tuvieron que buscar el eje de simetría como solución, en este caso, van a necesitar de alguna propiedad de los triángulos para dar esa solución al problema planteado. Nos encontramos con una práctica matemática donde se establece una relación entre la respuesta a un problema matemático a través de propiedades matemáticas [KPM2], la maestra explicita que existen “características generales semejantes” entre ambas soluciones matemáticas que se han planteado en el aula. Podemos observar que su praxis con respecto al proceso que llevará al alumno a la adquisición de la comprobación en matemáticas va a determinar cómo se adquieren esos conocimientos [I2].

### 3. [V4. 66-189] Cada niño clasifica su triángulo

Cada niño interviene diciendo de qué tipo es su triángulo según sus lados y según sus ángulos y por qué. El resto de los niños expresen su acuerdo o no. En caso de no estar de acuerdo, justifican por qué y cómo consideran ellos que es el triángulo. En ocasiones es la maestra la que corrige, haciendo a los alumnos preguntas para que identifiquen correctamente los ángulos y lados de la figura.

Inés pregunta a un alumno acerca de su triángulo, el niño le contesta que es escaleno según sus lados, y acutángulo según sus ángulos. A lo que Inés profundiza, queriendo buscar el error en la afirmación de este alumno. Conoce que un triángulo con esas características no podría formarse [KoT17], además de querer buscar la procedencia de ese error [KFLM10]. Finalmente, el alumno se da cuenta de que tiene que tener un ángulo recto, para ello Inés afirma: *¡Tiene un ángulo recto! (afirma Inés). ¿Ya lo ves, David? ¡Dale vueltas!* [V4. 91-92], y se da cuenta de que el error tiene que ver con la naturaleza de la posición horizontal-vertical pidiendo al alumno que lo coloque de modo



 . Para confirmar que se trata de un triángulo rectángulo.

Sigue insistiendo de este modo en la visión dinámica de los conceptos geométricos, intentando atajar las asociaciones con la posición y dotando a los alumnos de un recurso para identificar las representaciones. De este modo, los alumnos están valorando explícitamente la independencia de las características en que se están fijando respecto de la posición. Se sigue usando el recurso de girar la figura para identificar los ángulos durante toda la sesión (tanto por parte de la maestra como por parte de los niños).

[V4. 97-100]

Cuando surgen diferencias de opiniones sobre cómo es un triángulo según sus lados, es Inés la que vuelve a proponer el uso de la regla y la que mide los lados de la figura [V4. 101- 104]. Al igual que en V3, vuelve a usar la como medida. Este conocimiento le provee de elementos de control sobre la medición de los triángulos **[KMT6]**.

[V4. 107-124]

Mientras continúa por cada alumno, Mar dice que su triángulo es obtusángulo, pero rápidamente corrige y dice que es agudo. Inés le pregunta para que tomen conciencia del error conceptual que están cometiendo: un ángulo no es obtuso por ser más cerrado que un obtuso sino más abierto que un recto: *Mira, ¿éste es obtuso? ¿y éste?* [Inés coloca sus manos  y luego en ]. *¿Y si lo sigo abriendo todavía más, es obtuso?* [V4. 117-128]. De nuevo está volviendo a buscar la procedencia del error asociado a cómo el alumno está interaccionando con el contenido, en este caso qué es un ángulo obtuso **[KFLM11]**, así como la importancia argumentativa por parte del alumno **[E16]**.

[V4. 129-145]

Seguidamente, otra alumna confunde al identificar el ángulo recto de su triángulo, que declara que es rectángulo, señala los lados en lugar de los ángulos. *Inés: ¿Pero como que éste si esto es un lado? [Entonces la niña señala el otro lado]. ¡Si esto también es un lado! ¿El ángulo cuál es? [La niña parece señalar uno de los vértices del triángulo]. El ángulo es el que está formado entre un lado y otro lado, ¿no? ¿y ese ángulo cómo es? [el que la niña dice que es rectángulo]* [V4. 129-145]. De nuevo buscar la procedencia del error asociado a cómo el alumno está interaccionando con el contenido, en este caso la identificación de lado-vértice **[KFLM12]**.

[V4. 154-169]

María dice que uno de los triángulos colocado de una forma es isósceles pero de otra no. A lo que Inés responde que si girándolo ya no es isósceles, e intenta hacer comprender al alumno que la posición no varía el tipo de triángulo que es. De nuevo, está buscando la procedencia del error asociado a cómo el alumno está interaccionando con el contenido, en este caso la identificación de la base horizontal-vertical del triángulo [KFLM13].

[V4. 169-185]

En esta ocasión es Inés la que pone objeciones a las clasificaciones de los alumnos: *¿De verdad te parece que tiene los tres lados iguales?* [V4. 171- 177]. En esta ocasión usa como recurso para comprobar que un ángulo es recto la superposición del ángulo del triángulo sobre el ángulo recto dibujado en la pizarra [KMT10].

4. [V4. 191-200] Cierre de la actividad.

No da tiempo a hacer la segunda parte de la actividad propuesta. Les propone que piensen cómo pueden resolver esa segunda cuestión y que cada niño mañana cuente la forma que ha pensado. Se anima a los niños a pensar y aportar sus ideas al día siguiente. Esto, además, es una realidad en sus clases, por lo que los alumnos se motivan ante la posibilidad de aportar sus ideas.

### **Relaciones MTSK – V4**

*Las concepciones como ayuda para encontrar relaciones entre elementos de los subdominios de MTSK – V4*

En esta sesión no se han conseguido establecer relaciones entre subdominios de conocimiento y concepciones, esto puede ser debido a que es una clase principalmente de trabajo autónomo del alumnado.

### Capítulo III: Análisis de la Información – V4

#### KoT [Conocimiento de los Temas Matemáticos]

Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático

**KoT16:** Conoce que la suma de los ángulos interiores de los triángulos son dos ángulos rectos suplementarios, sumando 180°

**KoT17:** Conoce qué elementos y propiedades debe de cumplir un triángulo escaleno

#### KMT [Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas]

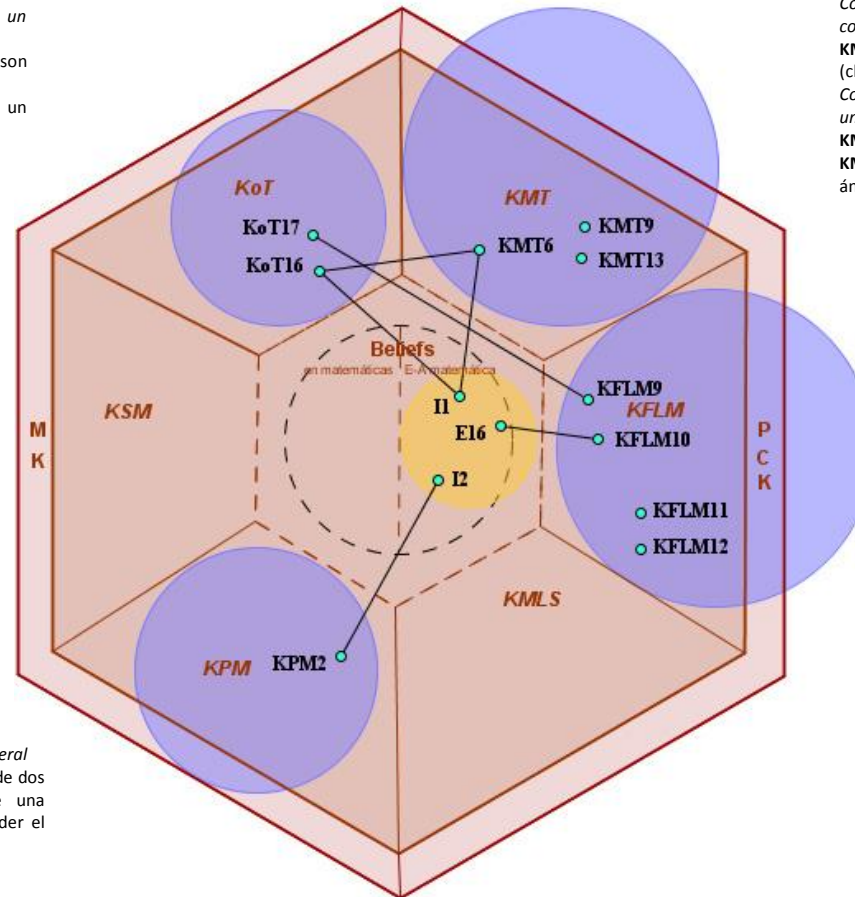
Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático

**KMT6:** Conoce la potencialidad que tiene el problematizar esta actividad (clasificación de triángulos)

Conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático

**KMT9:** Conoce el uso de la regla milimetrada para medir

**KMT13:** Conoce el uso de recursos como estrategia de enseñanza (medición de ángulos con papel).



#### KFLM [Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas]

Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático

**KFLM9:** Conoce que las dificultades no surgen inmediatas, suponen una búsqueda de las causas de los problemas que se manifiestan (composición de triángulos escalenos).

Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático

**KFLM10:** Conoce cómo el alumno está interaccionando con el contenido: qué es un ángulo obtuso

**KFLM11:** Conoce cómo el alumno está interaccionando con el contenido: lado-vértice

**KFLM12:** Conoce cómo el alumno está interaccionando con el contenido: horizontal-vertical

#### KPM [Conocimiento de la Práctica Matemática]

Conocimiento de Prácticas ligadas a la Matemática en General

**KPM2:** Conoce que entre la construcción de la definición de dos contenidos matemáticos (simetría y polígono) existe una estructura lógica de pensamiento que le ayuda a entender el funcionamiento de ambos aspectos matemáticos.

#### Concepciones

##### Metodología

**I1:** Los alumnos se enfrentan habitualmente a situaciones para las que no poseen procesos de resolución dados (situaciones problemáticas, ya sean problemas o investigaciones, frecuentemente contextualizadas en problemáticas reales).

**I2:** La maestra tiene organizado el proceso que llevará al alumno a la adquisición de unos contenidos determinados a través de su investigación

##### Concepción del aprendizaje

**E16:** El alumno interactúa con la materia, el maestro y sus compañeros, pero el énfasis se coloca en la interacción con los compañeros y el maestro.

**Imagen 7: Gráfico de relaciones internas MTSK correspondiente a V4**


## INFORME DEL ANÁLISIS V5

### Resumen

Las principales finalidades de esta sesión son: el trabajo conceptual; la comprobación por superposición de los ángulos interiores de un triángulo (la suma de los ángulos de un triángulo es como dos ángulos rectos) [Episodio1] y trabajo procedimental; la introducción en la medida de ángulos con el transportador (el propio procedimiento de comprobación). Se pretende que el alumno trabaje en los procedimientos para solucionar la situación planteada para que los alumnos finalmente escriban individualmente lo que han comprobado y cómo lo han hecho. [Episodio 2-3-4]


### Episodios

1. [V5. 1-197] ¿Cómo comprobamos que los tres ángulos de un triángulo miden lo mismo que dos ángulos rectos?

Inés comienza preguntando sobre la tarea que había sido mandada para trabajar en casa (comprobar que los tres ángulos de un triángulo miden lo mismo que dos ángulos rectos). *Se trataba de ver que los ángulos de un triángulo (dibujando en la pizarra  ) eran lo mismo que un ángulo recto y que otro ángulo recto (señalando los dos ángulos rectos del dibujo anterior), de eso se trataba* [V5. 8-13]. Con esta tarea pone de manifiesto su conocimiento sobre que la suma de los ángulos interiores de un triángulo, da como resultado dos ángulos rectos [KoT16]. Además, en su comentario *pero... veréis cómo a todos les ocurre lo mismo* [V5. 9-10]. Pone de manifiesto un conocimiento de diferentes formas de poder comprobar esa propiedad matemática, e intenta indagar sobre qué ideas han pensado los alumnos para comprobar lo que ella afirma [KFLM2]. Está haciendo partícipe al alumnado de una situación en la que no poseen la solución a la problemática planteada, y necesitan buscar un proceso para poder solucionarla [I1].

Varios alumnos expresan que han tenido dificultades con la tarea porque dicen no haberla entendido o no saber cómo hacerla. La maestra sugiere a una alumna que la ha

entendido, pero no sabe cómo comprobarlo, que lo explique con sus palabras al resto de la clase. *Hombre, claro, nadie lo sabe, si todo el mundo lo supiera, ¿tú me quieres decir a mí para qué vamos a hacerlo si ya todo el mundo lo sabemos?* [V5. 23-25]. De este modo además de explorar con esta niña cuál es su dificultad para no saber cómo hacerlo, expone que esta explicación puede servir para aclarar la orden a los alumnos que no la entienden. Se evidencia un conocimiento sobre las dificultades asociadas a la comprensión del problema matemático propuesto, en la que la maestra planea buscar el origen de esa dificultad [KFLM13]. Usa a los alumnos como fuente de ayuda y de información para los otros alumnos y lo hace explícito, de modo que los alumnos sean conscientes del valor de las ideas de sus compañeros y de lo que eso puede suponer para su propio aprendizaje [I24].

Ante los comentarios reiterados de los alumnos en su no comprensión de qué es exactamente lo que tienen que hacer, Inés, trata de utilizar otro recurso, en este caso, un folio. Coge tijeras y papel, dibuja en el papel el dibujo de la pizarra y lo recorta, obteniendo:  donde el rectángulo representa el papel recortado y el segmento discontinuo lo dibujado en ese papel. *Pues vamos a comprobar que los tres ángulos de un triángulo miden lo mismo que los dos rectos, que éste y que éste (señalando los dos ángulos rectos del papel que ha recortado).* [V5. 43-44]. En este episodio, la maestra utiliza un conocimiento sobre la enseñanza del concepto de ángulo llano, y cómo un material manipulativo puede servir para una mejor comprensión de este concepto, dotando la instrucción dada con un potencial mayor [KMT15].

A los alumnos les resulta difícil comprender qué significa "igual que dos ángulos rectos". Ante el dibujo de José (y la representación recortada en papel) de dos ángulos rectos unidos formando un ángulo llano, una niña objeta que "son dos ángulos rectos juntos". Para aclarar la situación ejemplifica con un caso visual y cercano: "¿qué quiere decir que seis dedos de Inés son como dos de una niña más tres de otra, más cinco de otra?". La maestra, usa esa situación tanto para aclarar lo que se pide en la orden (que han de ser los dos ángulos rectos juntos) como para que los alumnos piensen en estrategias para comprobarlo y poder pasar de esa situación a la que les ocupa. Ve paralelismo entre las dos situaciones, puesto que un procedimiento en la de los dedos es unir los dedos de las niñas y superponerlos sobre los de Inés (el que espera usen los alumnos para comprobar el caso de los ángulos). Es decir, recortar y unir los ángulos interiores sobre una línea horizontal que representa un ángulo llano [KoT18].

*Vamos a ver... Coge en tu mano dos dedos, y ahora María tres dedos, y ahora Miriam un dedo [las tres niñas, que están sentadas juntas, "cogen" cada una los dedos que la maestra indica]. Yo digo que entre las tres tenéis lo mismo que yo (y señala seis dedos suyos). [Los niños cuentan y dicen: "sí, seis"]. Vosotras sois los tres ángulos de un triángulo y yo soy los dos ángulos rectos. Yo he dicho que entre vosotras tres tenéis lo mismo que yo. Pues ahora digo que entre los tres ángulos de un triángulo, entre los tres, miden lo mismo que dos ángulos rectos, ¿lo entiendes ahora, Mar? [Ésta dice que sí]. Pues hay que encontrar una manera ahora de comprobar que eso es verdad, que no estoy mintiendo. Y ahora de lo que se trataba es de que tú me dijeras: "pues es verdad, señorita, porque yo lo he hecho de esta manera y efectivamente miden lo mismo que dos ángulos rectos". Pues vamos a ver, imagínate tú que me lo tuvieras que demostrar ahora así, con lo de los deditos, ¿tú cómo lo harías para ver que vosotras tres tenéis lo mismo que yo? [V5. 58-70].*

Las primeras estrategias que proponen los alumnos para resolver la situación anterior son numéricas, por lo que sigue preguntando sobre otras posibles estrategias. Surge entonces la superposición. La maestra está guiando al alumnado hacia un conocimiento sobre un procedimiento de comprobación sobre una propiedad que cumplen todos los triángulos **[KoT19]**.

La resolución de la situación problemática propuesta se hace de manera colectiva. Unos niños van aportando ideas, sobre las que se apoyan otros para dar nuevas ideas. De este modo, se va manipulando progresivamente la situación hasta llegar a su resolución (una resolución con la que la maestra da por finalizada la situación problemática porque se llega a lo previsto). Los niños intervienen intentando aportar ideas nuevas y teniendo una actitud crítica hacia los conocimientos que se están movilizándose en el aula **[I25]**.

Los alumnos consiguen llegar a la resolución de la situación de los dedos por superposición, por lo que Inés, pasa de nuevo a la situación inicial, esperando que los alumnos puedan transferir la estrategia de superposición: *A ver si podemos, a ver si podemos hacerlo bien, venga. Yo pongo éste, que es el de ella (acercándose a Miriam y colocando uno de sus dedos sobre el de la niña). Ahora pongo tres que son los de ella y ahora pongo dos que son los de ella (uniendo los dedos de Mar y María, y superponiéndolos a los suyos de la otra mano), y así comprobamos que tenemos lo mismo, ¿no? Eso es otra forma, ¿no? Eso no es sumándolo, eso es superponiéndolo,*

*estos tres sobre estos tres y estos dos sobre estos dos... Ésta no es sumar, ¿veis como es otra forma? [...] ahora quiero que pensemos una forma para comprobar que los tres ángulos de un triángulo miden lo mismo que esos dos ángulo rectos (señalando los de la pizarra)* [V5. 95-122]. La maestra tiene organizado un proceso en el que el alumno debe adquirir un determinado conocimiento, por lo que reconduce su clase para la consecución final **[E3/I3]**.

Los alumnos siguen aportando ideas. Inés propone a los alumnos que sugieren una estrategia (uno habla de "juntar" los ángulos) que intenten hacerlo con su triángulo. Un alumno propone una comprobación visual para el caso de un triángulo rectángulo "con los otros dos ángulos la mitad de uno recto". Inés objeta la falta de generalidad de ese procedimiento (*necesitan uno que se pueda hacer con cualquier triángulo*) [V5. 140-144]. El conocimiento mostrado en este episodio es sobre la generalización de una propiedad, es decir, conoce que el procedimiento es válido para ese caso, pero no es extrapolable a todos los casos **[KoT18]**.

La maestra sigue dando a los niños un papel principal, puesto que incita a que sigan aportando estrategias. Se analizan todas las propuestas. El diálogo es en su mayor parte entre el niño que interviene y la maestra, mientras que el resto están atentos, e intervienen ayudando a explicarse al niño en cuestión **[I27]**. Las objeciones a los procedimientos que plantean y sus posibles limitaciones son señaladas por Inés **[KFLM14]**. Ante estas limitaciones, otros niños proponen modos de solucionarlas. De esta forma se llega a la propuesta de recortar los tres ángulos, unirlos y comprobar que coinciden con los dos rectos. Una vez unidos los tres ángulos los niños tienen problemas para superponer éstos sobre los dos ángulos rectos. La maestra explica por qué coinciden y cómo hay que superponerlos [V5. 186-191]. Conoce las limitaciones del material que han construido y con el que están trabajando, al tratarse de un material manipulativo en el que lo que se intenta es recortar los ángulos interiores de un triángulo cualquiera, el tamaño importa para la consecución del objetivo final **[KMT16]**. Finalmente, propone a los alumnos que haga cada uno lo mismo con su triángulo.

2. [V5. 199-204] Aplicación de la estrategia

Cada alumno recorta los ángulos de su triángulo y los pega sobre dos ángulos rectos unidos. Inés pasa por las mesas para ver las dificultades con el material de los niños y trata de solucionarlos **[KMT16]**.

3. [V5. 206-224] Comprobación de la igualdad en todos los triángulos.

Los niños comprueban que a todos les ha salido lo mismo: dos ángulos rectos. Inés hace explícitos los problemas que habían tenido algunos niños: porque no estaban considerando los ángulos del triángulo sino otros del triángulo recortado en cada pico. Hace a los niños conscientes de esa diferencia. *Los tenías mal colocados porque los niños no se habían dado cuenta que al cortar los ángulos había un trozo en el que se veían los lados, ése es el ángulo.* [V5. 213-215]. Conoce que, en la superposición, los ángulos interiores de un triángulo son invariantes **[KoT18]**.

4. [V5. 226-267] Otro modo: la medida de ángulos.

La maestra introduce el uso del transportador de ángulos como otro modo de comprobar la igualdad que acaban de ver. *Bueno, pues ahora os voy a enseñar una forma, que yo os dije que había otra forma de hacerlo y que yo os iba a enseñar cómo era, ¿no? [Inés coge un transportador de ángulos de madera, de los que se usan para la pizarra y se lo muestra los niños]. Vosotros habéis visto por la clase esto, ¿verdad? [Los niños asienten]. Estos es un instrumento que sirve para medir. [“Para medir los círculos, ¿no?”, dice un niño]. Para medir los ángulos.* [V5. 226-230]. Conoce que ese instrumento (transportador de ángulos) de medida es apropiado para la actividad que están trabajando, además de los beneficios asociados al uso de éste como apoyo para la enseñanza **[KMT17]**. Además, este material de apoyo, tiene como finalidad el paso de un pensamiento concreto a una formalización y comprobación del contenido matemático **[I5]**.

Inés, intenta que sus alumnos utilicen una terminología correcta para referirse a un tipo de ángulo **[KFLM1]**. *¿Alguien me puede decir, ahora mismo, a qué ángulo se parece? Yo lo veo y digo: “uy, a mí esto se parece a un ángulo...” ¿A cuál se parece? [“Al ángulo obtuso”, responde un niño]* [V5. 230-235].

Vuelve a potenciarse que sea un alumno el que explique a un compañero que no comprende la situación que se está abordando [V5. 244-248]. La maestra, propicia primero una análisis en el gran grupo del instrumento, qué ángulo representa en total, si

es agudo, obtuso o recto. Posteriormente, a partir del comentario de un alumno, aborda otras cuestiones que introducen (Miguel, que sigue de pie junto a la maestra, dice que un círculo tiene  $360^\circ$ ), a lo que Inés pregunta: *cuántos ángulos de éstos (rectos) hay en una circunferencia* [V5. 257]. Conoce que una circunferencia cuando es cortada por su punto central con dos rectas perpendiculares, se forman cuatro ángulos iguales [KoT20].

Termina la sesión, con lo que dejan para el siguiente día aprender a usarlo.

### **Relaciones MTSK – V5**

*Las concepciones como ayuda para encontrar relaciones entre elementos de los subdominios de MTSK – V5*

Durante parte de la sesión [V5. 1-196], Inés, es consciente de que existe una dificultad con la comprensión de la tarea propuesta, tratando de indagar cuál es concretamente. Está utilizando su conocimiento de [KFLM2] en el trabajo de este episodio (comprobar que los tres ángulos de un triángulo miden lo mismo que dos ángulos), para ello utiliza como apoyo, un conocimiento de su [KoT16] en diversas ocasiones. Cuando consigue reconducir la sesión a su planteamiento inicial, la maestra es consciente de que el proceso que llevará al alumno a la adquisición de unos contenidos determinados a través de su trabajo [I2].

Su papel a lo largo de la sesión es como la figura que valida las ideas de los alumnos en muchas ocasiones, dando argumentos en contra de éstos, pero siempre tratando de poner al alumno en una situación de validar su propio conocimiento, es decir, haciéndolo responsable sobre sus ideas y argumentos [I27], y es muy estricta con la utilización de un vocabulario exacto para que no ocurran confusiones [KFLM1].

Se sigue manteniendo a lo largo de la sesión, y como en las sesiones anteriores, que el aprendizaje es social compartido (el papel que le da al alumno), sigue siendo una constante.

Respecto al uso del transportador de ángulos, su presentación al alumnado y puesta en práctica de qué propiedades posee (dispone de  $180^\circ$ ), conoce que el instrumento de medida es apropiado para la actividad que se desarrolla, y que es beneficioso para los

alumnos como apoyo para la enseñanza [KMT17] y que este material tiene como finalidad el paso de un pensamiento concreto a una formalización y comprobación de dicho contenido matemático [I5]. Cuando es interrumpida por el argumento de un alumno de que no observa que el transportador tenga dos ángulos de  $90^\circ$  como ella propone, para profundizar en esa dificultad, y que el niño la solventa, propone a una alumna que solucione la duda que ha planteado su alumno. A lo que finalmente utilizando su [KoT10] *¿Y entonces eso no es un ángulo obtuso, todo entero? (Señalando la amplitud del transportador) ¿Y dónde estarían los dos lados del ángulo obtuso?* [V5. 235-255]. Es decir, está utilizando su conocimiento sobre las partes que integran los ángulos para justificar la amplitud de éste.

Respecto a la (I) Identificación de contenidos procedimentales, lo que pretende la maestra durante toda la sesión es que los alumnos conozcan qué es la amplitud del ángulos, qué tipo de ángulo están trabajando, y para qué sirve el material utilizado. En las sesiones posteriores, se verá cómo esta identificación ayuda al alumnado a poder clasificar las figuras geométricas que están trabajando.



## INFORME DEL ANÁLISIS V6

### Resumen

La actividad principal que se plantea la maestra para esta sesión es el uso del transportador para medir ángulos. La sesión comienza dando a los alumnos un papel importante, puesto que leen en gran grupo las conclusiones a las que llegaron en la sesión anterior y que habían puesto por escrito, atendiendo a dos órdenes: *qué hemos comprobado y cómo lo hemos comprobado* [Episodio1]. Una vez concluidas las intervenciones de los alumnos, la maestra introduce la actividad propuesta para ese día [Episodio2]. “*comprobar (la medición de los ángulos) de otra forma, que era usando un instrumento que sirve para medir los ángulos y que se llama transportador*” [V6. 30-31]. En la presentación del instrumento avoca a los alumnos a recordar qué ángulos eran equivalentes, a partir de ese comentario se establece una discusión en gran grupo acerca de qué era un ángulos agudo, obtuso o recto, y la maestra va detectando diferentes dificultades de los alumnos a partir de sus comentarios. Para la solución de estas dificultades, recurre a un mecano y construye un ángulo con dos piezas, que le servirá para hacer posicionar al alumno con todos los tipos de ángulos que se pueden construir con las dos tiras unidas por su extremo.

Una vez los alumnos son capaces de reconocer que dos semirrectas con origen común determinan dos ángulos, la maestra, lo utiliza para otorgar sentido a la representación de un ángulo con un arco, y cuál de ellos se está considerando. Es a raíz de esta representación cuando un alumno interviene para comentar que los ángulos representan las agujas del reloj. Durante la discusión un alumno lanza una conjetura: “un triángulo no tiene tres ángulos, tiene seis”, a lo que la maestra intenta hacer visualizar que lo que caracteriza a los triángulos son sus ángulos interiores, y no los exteriores. Durante la actividad del reloj, los alumnos van planteando dudas o dificultades con el contenido y el instrumento que están utilizando, a lo que la maestra trata de profundizar y corregir.

Finalmente, la maestra explica cómo se miden los ángulos con el transportador, y propone una actividad individual para que la realicen los alumnos [Episodio3].

## Episodios

### 1. [V6. 4-28] La escritura de lo que se hizo el día anterior

Con la lectura de la tarea que se propuso el día anterior (atendiendo a dos órdenes: *qué hemos comprobado* y *cómo lo hemos comprobado*), la maestra hace tomar conciencia a los alumnos de lo que se ha hecho y el proceso seguido [I24]. Es importante que diferencien ambos aspectos, debido a que es una forma de motivar a los alumnos en la introducción de la medida de los ángulos con el transportador (*también recogimos por escrito que hoy íbamos a aprender a hacerlo de otra forma que era midiendo los ángulos con el transportador, para ver el valor de cada uno* [V6. 8-10]).

### 2. [V6. 29-307] El uso del transportador.

#### 2.1. [V6. 29-287] Algunos aspectos sobre los ángulos y su representación.

##### 2.1.1. [V6. 29-44] Repaso a la clasificación de los ángulos según su medida.

La maestra con el transportador en la mano, hace imaginar a los alumnos diferentes tipos de ángulos sobre el transportador para que digan qué características cumplen. Los alumnos realizan intervenciones identificando el ángulo completo del transportador como dos ángulos rectos o uno obtuso, Inés hace una precisión acerca de la diferencia entre las dos identificaciones: la primera es “*exacta*”, la segunda no nos dice exactamente cuál es la amplitud del ángulo (*lo que ocurre es que el obtuso no tiene una medida exacta. El obtuso puede estar más abierto, menos abierto, y sigue siendo obtuso* [V6. 34-36]). Esto lo realiza porque quiere aclarar los conceptos que se están trabajando, intentando que no relacionen ángulos obtusos con dos ángulos rectos. La maestra está mostrando un conocimiento acerca de una propiedad que cumplen un tipo de ángulos (el recto siempre mide  $90^\circ$ ) mientras que los obtusos son mayores de  $90^\circ$  [KoT5], además está intentando que los conceptos que se están trabajando, no se produzcan equívocos entre ellos puesto que parece conocer los errores que se producen entre ambos [KFLM6].


##### 2.1.2. [V6. 50-63] Utilización del transportador de ángulos

La maestra enseña a los alumnos a interpretar los números inscritos que hay en el material, así como su valor según la posición en el que haya situado el transportador sobre el plano.


A partir de lo que se trabajó el día anterior sobre el transportador, el análisis que se hizo de éste, la maestra explica las características de este recurso. (*Tenéis que fijaros que hay dos filas de números, una que va para acá y otra que va para allá, en un sentido y en otros sentido, desde el cero, diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta,... hasta llegar a 180°. Llega hasta 180° porque la mitad es 90° y 90° es lo que mide un ángulo recto, pero no 90 cm, [“90 grados”, dice un niño], como pasa con el metro, ni 90dm, ni 90... Si no, entonces, se les llama grados.*)[V6. 50-59]. La maestra conoce el recurso material que está usando, sus características y funciones [KMT17]. Además, realiza una aclaración respecto a la utilización del grado como medida angular, comparándola con otras unidades de medida para que los alumnos comprendan que se trata de otro tipo de medida diferente [KoT21].

Es a partir de la intervención de una alumna sobre las filas de números que compone el transportador de ángulos, cuando Inés, además de conocer, la función de dichos números, conoce que es requisito indispensable saber *situar* [V6. 62] [KoT22] *el transportador en el plano para la medida de ángulos, puesto que éstos están definidos partiendo de que un ángulo recto tiene 90°* [KMT17].

### 2.1.3. [V6. 79-178] Dos semirrectas con origen común determinan dos ángulos


Se entabla entonces un dialogo entre los alumnos e Inés a partir del siguiente dibujo en la pizarra  en el que se discute si es un ángulo agudo u obtuso y la razón. A lo que se llega a la conclusión de que es agudo. Pero la maestra lanza una conjetura: *Bueno, ángulo agudo depende de por dónde lo miremos, ¿o no? ¿Cuántos ángulos hay ahí? [Los niños dicen que uno]. ¿Todo el mundo dice que hay uno? [Los niños dicen que sí]. Pues yo digo que hay dos. A ver quién descubre dónde está el otro* [V6. 79-82]. Esta acción la hace para trabajar un nuevo aspecto sobre los ángulos: la necesidad de marcar el ángulo que se está considerando a la hora de dibujar dos semirrectas con origen en común, puesto que ambas definen dos ángulos. La maestra conoce la necesidad de señalar el ángulo que se está tratando [KoT23] [KFLM15].

Se establece un diálogo entre los alumnos y la maestra, a lo que Inés plantea objeciones a las ideas erróneas de los alumnos que intervienen, bien directamente o preguntando a otros alumnos o al grupo-clase sobre la validez de las afirmaciones [I25]. Plantea la situación como un problema a resolver entre todos, animando a los niños a pensar en ello y a aportar ideas *A ver, ¿alguien lo ha visto además de Miguel? ¡Venga las cabezas pensando!* [V6. 101-103]. Su papel como maestro es movilizar los conocimientos que se están trabajando en el aula, y hace que los alumnos reflexionen sobre su conjetura planteada. Los estudiantes están asumiendo responsabilidad sobre las ideas que se están planteando en ese mismo momento [I27].

Ante la dificultad de los alumnos para entender dónde ve el compañero un ángulo obtuso, Inés hace uso del mecano. Coge dos barras y las une por uno de los extremos, poniendo las barras en posición:  y marca los dos ángulos formados con las barras, pero a continuación, superpone una barra a otra y pregunta: *Ahora mismo no hay un ángulo, ¿verdad? porque está un lado sobre el otro* [V6. 112-113]. Comienza con las dos barras una sucesión creciente de ángulos, que van surgiendo por la ampliación del anterior, en el sentido positivo de giro. En cada caso pide a los niños que sigan el ángulo y digan qué tipo de ángulo es [V6. 116-130]



La maestra de este modo, busca que los niños den el salto de considerar sólo ángulos menores que uno llano, a ángulos mayores, para que así puedan ver, el ángulo recto, y después el ángulo obtuso. Muestra de nuevo y potencia una visión dinámica del ángulo, poniendo de relieve que va ligado a la amplitud. Con esta visión dinámica, hace notar cómo se forman en cada caso dos ángulos [KoT14]. Durante la utilización de este recurso, cuando llega a la situación f), parece que conoce que el alumno iba a dar una respuesta errónea *¿Pero, bueno, por qué os vais aquí? (señalando el ángulo agudo que determinan los segmentos en la posición anterior). ¿Veis como vosotros mismos os vais de un lado a otro? Primero empezamos por aquí arriba, ¿no? ...*[V6. 134-135]. Su conocimiento sobre las dificultades asociadas a la amplitud del ángulo mientras usa el recurso son claras [KFLM6], además de la correcta utilización del material para potenciar una visión dinámica de la amplitud de ángulo [KMT14].

Inés vuelve a colocar las barras del mecano formando el siguiente ángulo:  volviendo a asegurarse de que el alumnado identifica que existe un ángulo recto y un

ángulo obtuso. A continuación propone diferentes situaciones, para que contesten y va solventando las posibles dificultades, pero utiliza estas situaciones para crear la necesidad con la que empezó esta utilización del mecano: señalar el ángulo que se está considerando [*Depende de por donde lo mires. Agudo si tú lo miras por aquí, pero si lo miras por aquí no es agudo (señalando respectivamente las porciones de los ángulos agudo y obtuso). Si lo miras por aquí es obtuso. O sea que depende de por donde lo miremos*] [V6. 175-177].

#### 2.1.4. [V6. 179-193] La representación de un ángulo mediante un arco.

A partir de la actividad anterior (se representan dos ángulos en cada caso) otorga sentido a que en muchos libros se use el arco correspondiente para indicar el ángulo que se está considerando: *Por eso muchas veces en los libros vosotros os daréis cuenta de que cuando os dibujan un ángulo os ponen una cosita así (señalando el arco de circunferencia que señala el ángulo agudo dibujado en la pizarra), eso es para que sepáis vosotros de qué ángulo se está hablando. Si se está hablando del ángulo que se ha formado aquí o si está hablando del ángulo que se ha formado aquí (señalando respectivamente las porciones de los ángulos agudo y obtuso). No quiere decir que el ángulo... que el ángulo sea este trocito (señalando lo que queda dentro del arco). [...]. Es todo esto (señalando la porción de ángulo entre los dos segmentos, fuera del arco).* [V6. 179-185]. La maestra está considerando qué contenido matemático debe de enseñarse en este momento puntual, puesto que en los libros que trabaja en el aula, viene dibujado el arco del ángulo, y es un aspecto del conocimiento del estudiante que deben de aprender en ese nivel [KMLS2].

*Bueno, y todavía más porque ya sabéis que las líneas no tienen fin. Hombre, las tengo que dejar de dibujar en algún momento porque si no, no tendrían fin, las tengo que dejar de dibujar, pero no quiere decir que terminen aquí (señalando el fin de uno de los segmentos que determinan e) ángulo agudo dibujado). Sigue hasta el infinito, y éste igual (señalando el otro segmento). Y el ángulo es este trozo que se ha abierto (señalando el ángulo agudo). Este trocito quiere decir, no que éste sea el ángulo, sino que vamos a trabajar con el ángulo que se forma en este lado, no con el que se forma en el otro lado.* [V6. 180-192]. La maestra en este subepisodio, está considerando dos conocimientos sobre el tema que son necesarios para la aclaración de ellos, por un lado el infinito de dos semirrectas, y por otro la amplitud del ángulo no la determina el arco

[KoT25]. Esto es posible a que posea un conocimiento sobre una falsa asociación que suelen hacer los alumnos: identificar el ángulo con el arco o con lo que encierran el arco y los dos segmentos desde el origen [KFLM15].

2.1.5. [V6. 193-287] Los ángulos que representan las agujas del reloj.

Inés sigue representando ángulos en el mecano para que los alumnos digan qué dos ángulos se forman. Aprovechando una intervención de un alumno (que relaciona los ángulos que se están representando en el mecano con un reloj), pide que digan posiciones de las agujas del reloj que correspondan a ángulos rectos [V6. 193-287]. Por un lado, aprovecha la aportación del alumno para hacer uso de sus experiencias en el aprendizaje [E25]. Por otro lado, sigue reforzando la identificación de ángulos, aspecto problemático, como ha sido observado en V3, especialmente la identificación de ángulos rectos en determinadas posiciones, en lo que ahora incide [KFLM5], volviendo a insistir para que no asocien el ángulo recto a la posición. Los alumnos validan las ideas de sus compañeros [I25] durante la realización de esta actividad.

[V6. 222-244] Una conjetura: "un triángulo no tiene tres ángulos sino seis".

A partir de la intervención de una alumna, donde dice que un triángulo no tiene tres ángulos, sino seis, Inés pregunta a los alumnos por la justificación de esta conjetura. Ella propone su idea: *No, pero se llamará triángulo porque tiene tres, no al revés, ¿qué decís?* [V6. 229] pero no su justificación. Un alumno argumenta que son tres porque la línea es cerrada e Inés valida esa justificación. Aclara entonces qué se considera triángulo (la superficie encerrada por la línea cerrada) y por qué, por tanto, tiene tres ángulos *Lo de fuera también es un ángulo, lo que pasa que no es del triángulo. ¿Qué es el triángulo? ¿La superficie que está aquí fuera? ¿La que está dentro? ¿o lo que está fuera y lo que está dentro? ¡Lo que está dentro!, ¿no? ¿Y qué hay dentro? ¡tres ángulos, no seis! Es distinto cuando estamos hablando de un ángulo, porque el ángulo no está cerrado, el ángulo no está cerrado, el ángulo sigue (señalando la parte "infinita" del ángulo), pero el triángulo sí está cerrado.* [V6. 236-242]. Inés está utilizando la definición que trabajaron en V1, donde un polígono era considerada una figura plana, cerrada. La maestra está conectando el concepto de polígono, con una de las propiedades que determinan los triángulos [KoT1], además de volver a hacer explícito que los ángulos exteriores de una figura son "infinitos" respecto a una semirrecta [KoT25].

Tras la discusión de la conjetura anterior vuelven a surgir problemas con la identificación de ángulos rectos en posiciones no horizontal-vertical, por lo que Inés vuelve a abordarlo [244-287]. Usa la misma ejemplificación que otras veces



Haciendo referencia a la amplitud: *No te fijas en cómo están los lados, fíjate en cómo está abierto, en el hueco* [V6. 263-264]. Aclara los conceptos cada vez que detecta dificultades en algún alumno [**KFLM16**]. Intenta asegurar la comprensión de todos los niños.

### 2.2. [V6. 287-305] Cómo se miden los ángulos con el transportador.

Inés explica con uno de los ángulos dibujados en la pizarra, usando un transportador transparente como el que ha entregado a cada niño, cómo hay que colocar el transportador para medir el ángulo (cómo se coloca respecto del vértice del ángulo y un lado), y cómo se lee lo que mide. Aclara que el lado del ángulo tiene que coincidir con la marca sobre el segmento recto del transportador, no con el borde exterior de ese segmento. Hace un uso correcto de su conocimiento sobre el material que está usando, ejemplificando [**KMT17**].

### 2.3. [V6. 305-307] Propuesta de actividad individual: medir ángulos.

Tras esa explicación Inés propone a los niños que midan los ángulos que aparecen en uno de los ejercicios del libro. Parece que se propone que aprendan a usarlo correctamente como instrumento.

### 3. [V6. 309-318] Ejercicios individuales.

Un comentario de Inés: *Los problemas que tienen los niños con la medición son: que se fijan a veces en la graduación en sentido inverso a la que corresponde o ponen el transportador, que es transparente, en su cara inversa, de modo que ven los números al revés.* [V6. 311-315]. Nos aporta su conocimiento sobre las limitaciones del instrumento, así como de las dificultades asociadas a su utilización [**KMT17**].

## **Relaciones MTSK – V6**

*Las concepciones como ayuda para encontrar relaciones entre elementos de los subdominios de MTSK – V6*

La sesión se centra principalmente en el uso de manera instrumental del transportador de ángulos, esto se refleja en la preocupación que tiene la maestra por que los alumnos usen con precisión y exactitud los instrumentos de medida (como con el uso de la regla).

Es con el dibujo de un ángulo para ejemplificar sobre él el uso del transportador, cuando Inés aprovecha para afirmar que representa un ángulo agudo y uno obtuso, creando así la necesidad de introducir el arco del ángulo [KoT26]. Es importante señalar el uso del mecano para dar carácter dinamizador a la amplitud de los ángulos que va representado con ello, su uso es para facilitar la visualización y aclarar conceptos. Además es potenciado con un ejemplo propuesto por un alumno (el reloj) que le permite abordar la problemática sobre las concepciones de los alumnos [E18] respecto a los ángulos rectos [KFLM17]. El uso de ambos recursos busca y potencia una visión dinámica de los conceptos geométricos, y su adecuación a la finalidad conceptual que busca [KMT15].

Además, cabe señalar que cuando surge un aspecto que parece importante aclarar (desde el punto de vista de una comprensión conceptual) se adentra en él hasta asegurarse de que los alumnos lo entienden (es el caso de la diferencia entre la amplitud exacta de un ángulo, esto es, su medida, y su tipificación en obtuso, agudo o recto) [KFLM18].

Las aportaciones de los alumnos son tomadas en cuenta, pero principalmente son validadas por la maestra que es la que toma en consideración las ideas de los alumnos que intervienen. Aunque cada aportación sí es compartida, en el sentido de que cada aportación va redefiniendo la situación para todos [I27]. Por último, el trabajo individual es al final de la sesión y tiene como objetivo que cada niño se ejercite en lo aprendido.

**KoT (Conocimiento de los Temas Matemáticos)**

- Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático
- KoT1:** Conoce que el concepto de polígono determina las propiedades de los triángulos.
- KoT5:** Conoce distintos tipos de ángulos (agudos, recto y obtuso).
- KoT22:** Conoce que para medir ángulos con el transportador es requisito necesario situarlo correctamente.
- KoT23:** Conoce la necesidad de señalar el ángulo
- KoT24:** Conoce que los ángulos se forman a partir de dos semirrectas con mismo origen.
- KoT25:** Conoce que las semirrectas que forman un ángulo son infinitas
- KoT26:** Conoce que la amplitud del ángulo no la determina el arco dibujado.
- KoT21:** Conoce la utilización del grado como medida angular

**KMT (Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas)**

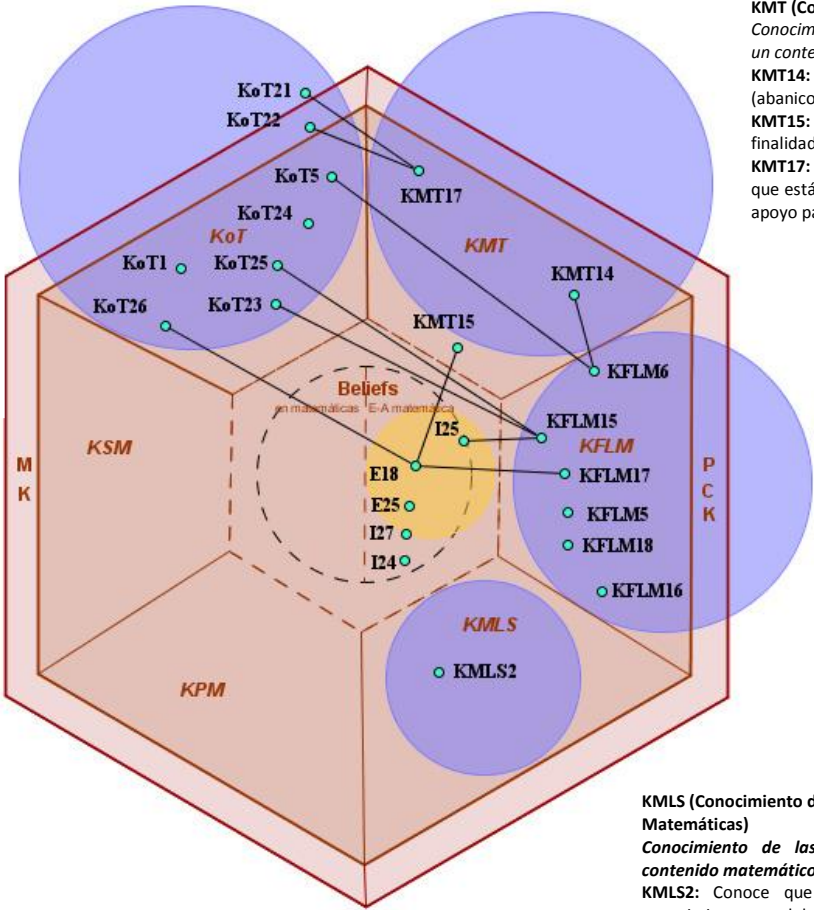
- Conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático*
- KMT14:** Conoce el uso de recursos para medir la amplitud de los ángulos (abanico).
- KMT15:** Conoce que la utilización de un material manipulativo potencia la finalidad conceptual
- KMT17:** Conoce que el transportador de ángulos es apropiado para la actividad que están trabajando, además de los beneficios asociados al uso de éste como apoyo para la enseñanza.

**KFLM (Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas)**

- Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático*
- KFLM6:** Conoce cómo los alumnos están interaccionando con el contenido pretendiendo buscar qué están entendiendo los alumnos finalmente por amplitud de ángulo
- KFLM15:** Conoce la necesidad de señalar el arco del ángulo que se está considerando.
- KFLM16:** Conoce las dificultades asociadas a la amplitud del ángulo
- KFLM17:** Conoce que las concepciones de los alumnos sobre los ángulos rectos son una dificultad en su aprendizaje
- KFLM18:** Conoce que el alumno puede identificar el ángulo con el arco o con lo que encierran el arco y los dos segmentos desde el origen
- Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático*
- KFLM5:** Conoce que las dificultades no surgen inmediatamente, suponen una búsqueda de las causas de los problemas que se manifiestan (asociación ángulo recto a la posición).

**KMLS (Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas)**

- Conocimiento de las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico*
- KMLS2:** Conoce que el arco de la circunferencia es un conocimiento que debe ser enseñado en ese curso escolar



*Concepciones*

- Concepción del aprendizaje*
- E18:** El motor del aprendizaje son los intereses de los alumnos.
- Papel del alumno*
- I24:** El alumno toma conciencia de qué hace y para qué lo hace
- E25:** El ambiente dinámico que se propicia en la clase, permite que el alumno comunique sus experiencias y sentimientos con el maestro y los demás compañeros.
- I25:** El alumno mantiene una actitud crítica ante las informaciones que se movilizan en el aula.
- Papel del profesor*
- I27:** La información que se moviliza en el aula es validada por el grupo, y por el maestro, potenciándose la reflexión de los alumnos y asumiendo responsabilidad (por parte del alumnado) a la hora de juzgar la adecuación de sus ideas

**Imagen 9: Gráfico de relaciones interna MTSK correspondiente a V6**

## INFORME DEL ANÁLISIS V7

### Resumen

Esta sesión tiene dos claras partes diferenciadas, una primera parte donde se trabajan los ángulos (haciendo una corrección de los ejercicios mandados el día previo, un pequeño repaso sobre conceptos acerca de los ángulos, y una última actividad donde los alumnos deben de comprobar que los ángulos de un triángulo suman dos ángulos rectos) [Episodio1]; y una segunda parte donde se trabaja con cuadriláteros (propiedades, y clasificaciones) [Episodio2].

En la primera parte de la sesión donde un alumno va diciendo los resultados de su realización de los ejercicios mandados de tarea (de medición de ángulos). Los otros niños e Inés lo corrigen. Ante las diversas opiniones de los alumnos, resultan algunas dudas, para la solución de esto se miden con el transportador y salen de dudas. A continuación, al trabajar los ejercicios anteriores, Inés retoma qué tipos de ángulos son (agudo, obtuso, recto) y la medida en grados de ángulos compuestos por varios ángulos rectos. Plantea diversas cuestiones a los alumnos y estos aportan sus ideas y corrigen a sus compañeros. Por último, Inés propone como tarea para casa, comprobar usando el transportador que los tres ángulos de un triángulo (juntos) suma  $180^\circ$ . Se plantea en el gran grupo cómo se realizaría la tarea, dejando la ejecución del plan para el trabajo individual en casa.

En la segunda parte de la sesión, Inés entrega a los niños la ficha sobre los cuadriláteros. Realizan en gran grupo un primer análisis de éstas viendo qué tienen en común (son cuadriláteros), los nombres que recuerdan de ellas, en qué se diferencian y en qué se parecen algunas de ellas. Finalmente ponen debajo de cada dibujo correspondiente los nombres que conocen (cuadrado, romboide, rectángulo, rombo y trapecio). Posteriormente, propone clasificar los cuadriláteros de la ficha. Como "pista", Inés sugiere que tengan en cuenta las cosas sobre las que antes han hablado (de los lados, de los ángulos, de que algunos tienen los lados iguales y otros diferentes, algunos también han dicho por ahí algo de los lados paralelos y los lados no paralelos...), y finalmente realizan una puesta en común donde se establecen las clasificaciones propuestas por los alumnos: "Clasificación según la longitud de los lados"; "Clasificación según los ejes de

simetría"; y "Clasificación según tengan lados paralelos". Finalmente, Inés propone a los niños que busquen en el libro el nombre que se da a las clases obtenidas en la última clasificación. Con la consulta de estos nombres se acaba la sesión.

## Episodios

### 1. [V7. 1-110] Ángulos

#### 1.1. [V7. 1-38] Corrección de los ejercicios de medición de ángulos

La sesión comienza con la corrección de los ejercicios enviados como tarea para casa, por Inés, en la sesión anterior. Un niño va leyendo los grados que cree que mide cada ángulo de los dos ejercicios propuestos del libro. A lo que la maestra hace un inciso para matizar que la notación correcta para denominar los ángulos es en grados y que ello se *“podía escribir con la palabra grados o poniéndole el cerito arriba”* [V7. 9-10]. Al igual que en la sesión V6, la maestra, muestra una cierta preocupación porque el significado del grado sea como medida angular **[KoT21]**.

#### 1.2. [V7. 38-78] Repasamos algunas cosas sobre los ángulos

A raíz de los ejercicios anteriores, la maestra aprovecha la situación para repasar algunos conceptos sobre los ángulos. Comienza haciéndoles preguntas a los alumnos sobre la (I)Identificación de los tipos de ángulos que se han visto en el ejercicio, dejando claro que un ángulo agudo es menor de  $90^\circ$ , uno recto es de  $90^\circ$  y uno obtuso es mayor de  $90^\circ$ . Aprovecha esta situación para recordar el uso que se le podía dar al transportador de ángulos y qué medida tiene éste. Trabaja a la vez los tipos de ángulos y su medida, relacionándolos (la medida por comparación con el ángulo recto) **[KoT5]**. *¿Entonces dos ángulos rectos cuánto miden? [Laura señala que  $180^\circ$ ]. ¡ $180^\circ$ ! Igual que lo que mide el transportador [...]. Todo el transportador mide dos ángulos rectos, o sea, noventa y otros noventa,  $180$ , ¿verdad? ¿Y si pusiéramos otro transportador aquí debajo, entonces cuántos ángulos rectos tendría, Jesús? [V7. 50-54].* La maestra conoce que una de las dificultades asociadas a la utilización del material es la visualización de los ángulos rectos en el transportador **[KFLM19]**. Y a continuación relaciona el número de ángulos rectos que se encuentran incluidos en dos transportadores de ángulos, con la figura plana que forman. *Bueno ¿y eso cuánto sale? Miguel dice que le sale  $360^\circ$ , ¿a*

*todo el mundo le sale 360°? [Los niños dicen que sí. Miguel dice que eso es lo que mide un círculo]. Claro, nos sale un círculo, si yo pongo otro transportador aquí, ¿qué figura es la que me sale? Una circunferencia, el borde es lo que tenemos que contar, ¿no? Una circunferencia. Entonces mide 360° o cuatro ángulos rectos, ¿no? [...] [V7. 56-78]. La maestra conoce cómo hacer la construcción de una circunferencia a partir del material utilizado, y su argumento matemático de que la construcción es correcta y da como resultado una circunferencia, es que la suma de los 4 ángulos rectos formados da 360° [KPM3], al igual que se vio en V5. Inés propicia y valora las aportaciones de los alumnos, incorporándolas al proceso [I25] durante este subepisodio, haciendo que los alumnos intervengan, hagan observaciones, y apreciaciones sobre lo que se está trabajando.*

1.3. [V7. 79-110]. Otro modo de comprobar que los ángulos de un triángulo suman dos ángulos rectos

Inés propone como tarea para casa comprobar con el transportador que los tres ángulos de un triángulo miden 180° (como dos rectos). Cada niño debe hacerlo con un triángulo que le dará la maestra. Hace recordar a los alumnos que ya sabían una forma de hacer (mediante la superposición de los ángulos) e insta a recordar el proceso seguido. *¿Y cómo dije yo que era la otra forma? Con el transportador, pero ¿qué es lo que tenemos que hacer con el transportador? [...] A ver, Jesús, ¿qué hay que hacer? [Jesús pregunta que si medir los ángulos]. Primero medir un ángulo, ¿no? y lo apunto lo que mide, ¿y ahora qué hago? [Le indican que medir los otros ángulos]. Los mido y lo apunto. Tendré que medir los tres, ¿no? ¿Un triángulo no tiene tres ángulos? [Inés repite cómo sería el proceso]. ¿Y ahora qué hago? [Le indican que se suma todo]. Sumo los tres, ¿no? ¿Y qué pasa? ¿Qué me tiene que salir cuando lo sume? [“Lo que mide...”, contesta Jesús]. Los tres juntos, ¿verdad? lo que miden los tres juntos. Y entonces comprobaremos si de verdad sale siempre 180°. [...], ¿no eran dos ángulos rectos? ¿A quién no le salían dos ángulos rectos? ¿A nadie, no? Pues seguramente con los triángulos, cuando los midamos, nos va a salir, 180° [V7. 79-107].* En esta intervención de la maestra, aprovecha aprendizajes anteriores para construir los nuevos sobre éstos, relacionándolos, y suele recurrir a que se recuerde la propia actividad realizada, como medio de recuperar lo que se aprendió con ella (en V5 se muestra la aplicación de la otra estrategia). La maestra utiliza una forma procedimental para la argumentación matemática sobre la propiedad de que la suma de todos los ángulos interiores de un

triángulo suman  $180^\circ$  [KoT16] (tanto en V5 como en V7), podemos considerar que su conocimiento sobre la práctica matemática en este caso es principalmente a partir de técnicas procedimentales [KPM4]. No se sabe hasta qué punto la maestra otorga más valor a esta demostración (como menos concreta, más general) que a la manipulativa de V5: *Y entonces comprobaremos si de verdad sale siempre  $180^\circ$*  [V7. 97-98]. Inés puede pensar que la primera demostración aun siendo igual de concreta que la segunda, es "menos demostración" por ser manipulativa, frente a esta segunda que es numérica.

## 2. [V7. 111-481] Cuadriláteros

2.1. [V7. 111-192] Introducción. Algunas ideas sobre los cuadriláteros. La ficha de los cuadriláteros

La maestra introduce una nueva actividad para trabajar otro polígono, en este caso, cuadriláteros. Inés reparte una ficha a cada alumno con cuadriláteros en diferentes posiciones, cóncavas y convexas, con distintas longitudes en sus lados, con lados iguales o diferentes, con ángulos y lados iguales o diferentes, en posiciones estándar y no estándar, algunos de ellos en los dos tipos de posiciones (los cuadrados 1 y 7, los rectángulos 4 y 5), previsiblemente para que los alumnos no asocien el reconocimiento de las figuras a su posición. A continuación, pregunta a los alumnos “¿son todos polígonos? [Daniel dice que lo son todos, porque están cerrados, porque no tiene líneas curvas...]. Porque tienen lados, porque tienen ángulos, vértices... [Inés está repitiendo lo que dicen los niños]. Cumplen todas las condiciones para ser polígono, ¿verdad?” [V7. 116-118]. Inés está utilizando la definición que se construyó en V1 sobre qué es un polígono, para comprobar que los elementos que han señalado sus alumnos, a la hora de definir un cuadrilátero, cumplen todos los requisitos que establecieron [KoT1].

Los alumnos van (I) Identificando todos como cuadriláteros, hasta que Inés pregunta por la número 4, a lo que contestan que es un rectángulo, la maestra aprovecha para hacer notar que los rectángulos son un grupo de cuadriláteros que cumplen una condición [KoT27] “¿Pero además tiene un apellido!, ¿no? Es un cuadrilátero pero además tiene un nombre especial, ¿eh?” [V7. 124-125]. Continúa con cada figura asignando nombres, presenta y hace constar a los alumnos que el rombo está en su situación habitual y no habitual. Finalmente, ante el cuadrado en posición no habitual, Inés pregunta a Laura si está segura. *Es un cuadrado pero en otra posición que el*

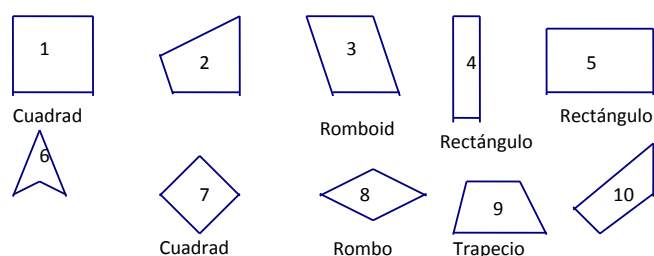
*número uno, es como si estuviera apoyado en un vértice.* [V7.128-132]. El conocimiento que emerge de esta interacción y su inquietud por presentar figuras en posiciones no estándar puede estar motivado, al igual que en la V2, porque el alumno presenta dificultades asociadas a la horizontalidad de las figuras trabajadas. En este caso, la maestra quiere que el alumno reconozca las figuras planas en cualquier posición en el plano [KFLM2]. Vuelve a reforzarse que la inclusión de estas figuras ha sido intencionada cuando pregunta a una alumna: “*A que tú no has visto el rombo normalmente así, Laura? (refiriéndose al rombo "doblado", número ocho).*” [V7.140-141]. Esta alumna, en la sesión anterior tenía problemas para identificar ángulos rectos en posiciones no estándar.

Los alumnos aportan sus apreciaciones sobre las figuras, estableciendo relaciones también con anteriores aprendizajes. Se corrigen entre ellos [I23]. [*Un niño hace alusión a que la figura nueve es como un trozo de pirámide, otro le corrige y le dice que de triángulo*]. *Eso es, porque una pirámide no es una figura plana...* [V7.146-148]. La maestra, conoce que en ese comentario por parte del alumno no procede a relacionar figuras geométricas con figuras planas, puesto que no es el trabajo que están realizando en ese preciso momento, es más bien, una precisión conceptual al hilo de las aportaciones del alumno (“las pirámides no son figuras planas”). [KoT3].

Sigue trabajando con los alumnos, tomando en consideración todos sus comentarios y haciendo aportaciones [E23]. *¿El número nueve? [“Un trapecio”, contesta María]. ¿Pero no es un cuadrilátero? [“Sí”; contestan]. ¡Ah! Pero es un cuadrilátero especial que se llama trapecio* [V7. 149-153]. Y al igual que con el rectángulo, se establece un grupo denominado trapecios [KoT27].

Pide argumentos, razones y en otras ocasiones pone en manos de los alumnos la validación de las ideas de los que intervienen [I25]: *Laura recuerda que los niños llamaban al tres trapecio pero que Inés les dijo que se llamaba romboide, y que trapecio era el nueve*. *¿Pero, por qué? ¿Qué diferencia hay entre el tres y el nueve? [“Que el nueve tiene todos los lados iguales”, contesta un niño]. ¿El nueve tiene todos los lados iguales? ¿Sí? ¿Estáis de acuerdo con él? [Los niños dicen que no. Miguel dice que el de arriba y el de abajo no son iguales, y los laterales tampoco]. ¿Qué quiere decir iguales?* [V7.154-159].

Finalmente, se acaba este primer análisis de los cuadriláteros de la ficha repasando el nombre de cada uno de los que conocen. Consiguiendo hacer clasificación de los paralelogramos, sus nombres y características. *Bueno, ¿qué característica común tienen todos estos polígonos? [“Que son cuadriláteros”, contestan todos]. ¿Que son cuadriláteros todos! Lo que tienen todos en común es que todos son cuadriláteros, todos tienen cuatro lados, cuatro vértices, cuatro ángulos,... Pero evidentemente no son todos iguales [V7.160-163].* Además de los nombres "establecidos" que recuerdan, un niño propone un nombre para el trapecio: "tronco de triángulo". Inés lo desecha *porque no se le llama tronco de triángulo, se le llama otra cosa...* [V7.175-176]. Parece que no quiere que se le ponga un nombre para después ponerle "el estándar". Quedando así la clasificación:



## 2.2. [V7. 192-481] Clasificaciones de los cuadriláteros

### 2.2.1. [V7. 192-201] Proposición de la tarea

La maestra propone hacer grupos con los cuadriláteros con las figuras trabajadas. Para ello sugiere fijarse en *"lo que se ha ido hablando"* (*Hemos ido hablando de los lados, de los ángulos, de que algunos tienen los lados iguales y otros diferentes, algunos también han dicho por ahí algo de los lados paralelos y los lados no paralelos ... así, esas pistas nos pueden servir para formar los grupos [V7. 198-201]*). Se asegura de este modo de que salga la clasificación que se pretende (según el paralelismo de sus lados). Veremos cómo después surgen clasificaciones alternativas (según los ejes de simetría) que son consideradas, valoradas y apreciadas por la maestra.

### 2.2.3. [V7. 210-463] Puesta en común

Tras el trabajo en grupo de los alumnos, éstos intervienen dando sus clasificaciones y/o criterios. La maestra organiza toda la puesta en común y presta especial interés a que una clasificación sea completa antes de pasar a otra [V7. 271-276]. Durante la actividad,

la maestra pide al resto de los alumnos que validen lo que dice el que interviene [I25], responsabilizándolos de ello (*Atentos, no sea que María diga lo que no es (a los demás niños)*) [V7.361]). En ocasiones es ella la que hace cuestiones al niño que interviene para que vislumbre una incorrección o considere casos que no estaba considerando ([V7.224-231], [V7.240-245]), o la que corrige [V7. 286-292]. (*[...] Hay desacuerdo también en el nueve que algunos lo incluyen en este grupo pero otros dicen que tiene tres lados iguales y otro distinto]. ¿Cómo que tres iguales? Parece un trapecio isósceles pero con los dos lados iguales distintos de los dos desiguales. Un niño dice que son dos distintos y dos iguales]. ¿Son dos distintos y dos iguales! ¿No son dos distintos y dos iguales? ¿Los dos lados de aquí cómo son? (refiriéndose a los no paralelos). [Los niños contestan que iguales]. ¿Y ahora los dos de arriba cómo son? [Los niños contestan que distintos]. Dos distintos y dos iguales [V7.286-292]). Inés hace explícita la importancia de valorar las aportaciones de los compañeros [I25].*

Una vez que un alumno propone una clase, el gran grupo es el que realiza el análisis de las figuras que pertenecen a esa clase, bien validando o poniendo objeciones al análisis del niño que interviene, bien realizando de manera conjunta el análisis (unos completan a otros). Ellos acuerdan qué cuadriláteros pertenecen a esa clase y cuáles no. La construcción de las clasificaciones se hace de manera conjunta en el gran grupo, apoyándose en las ideas de los alumnos y la guía de Inés.

#### 2.2.3.1. [V7. 216-312] Clasificación según la longitud de los lados

La primera clasificación que surge en el aula es según la longitud de los lados de la figuras, es decir, con un criterio no simultáneo (CL), se sigue, en el análisis de las figuras que pertenecen a una clase, la estrategia que propone un alumno: ir en orden según el número de las figuras y estudiar una a una si pertenece o no a dicha clase [V7. 258-260]. Incorpora de este modo otra propuesta de un alumno, por lo que se potencia y aprecia que los alumnos intervengan de este modo [I23]. Ante la duda de si una figura pertenece o no a uno de los grupos formados, Inés, utiliza la medición directa como solución. “*¿No te parece que son iguales? ¡Coge una regla y lo mides!*” [V7. 232-233]. El primer grupo que surge son los cuadriláteros con los cuatro lados iguales, y los que no los tienen.

A continuación, comienza con otro grupo que ha realizado una clasificación atendiendo a “cuadriláteros que no tienen ningún lado igual” Ante las dudas con la igualdad o no de

los lados de una figura, que hace que no haya acuerdo entre los alumnos, la maestra las mide, dando el resultado de esta medición. (*[[...] Un niño vuelve a dudar de que la figura 6 no pertenezca a este grupo porque no le ve dos lados iguales. Inés mide en su mesa con una regla los dos lados superiores de la figura, obteniendo 2'4 cm y 2'5 cm]. Este lado mide un milímetro más que éste (señalando ambos). Efectivamente, o sea, que el número 6, que parecía que no, lo vamos a tener que incluir en este grupo, aunque parezca que sí. (Inés añade en la pizarra junto al 2 y al 10, el 6) [V7. 266-271]*). Se pone de manifiesto cómo los alumnos expresan su análisis de las figuras y manifiestan sus desacuerdos con la información que se moviliza en el aula. Tanto en este subepisodio como en el anterior, la maestra muestra un conocimiento de cómo comprobar matemáticamente si una figura cumple el criterio de inclusión de un grupo o no, en este caso, es la medición directa con la regla **[KPM4]**.

La maestra continúa preguntando a otro alumno, *¿Y cuál sería el tercer grupo, José?* [V7. 271]. A lo que el alumno contesta que los que tengan líneas paralelas, Inés en ese momento, no quiere que se desvíe la clasificación atendiendo al criterio inicial, según la longitud de los lados, por lo que centra la atención a seguir buscando grupos atendiendo a dicho criterio. *“¡Pero no estamos hablando ahora de paralelas! Estamos hablando de los que tienen lados iguales... Después hacemos grupos fijándonos en las paralelas pero ése es otro grupo distinto. Ahora estamos mirando cómo son sus lados, pero no si tienen sus lados paralelos, sino de corto o de largo [V7.273-276]*. Conoce que la clasificación que está realizando la clase atiende a un criterio (según longitud de lados), y no puede permitir que se mezclen con otras clasificaciones, es decir, atiende a una intencionalidad específica de buscar las figuras para enseñar una determinada clasificación **[KMT18]**.

La maestra va dando pistas para completar las clases según el criterio que se está siguiendo: *han surgido los cuadriláteros que tienen todos los lados iguales y los que tienen todos distintos, pero no surge ninguna más [V7. 276-278]*; Inés llama la atención sobre el rectángulo: *Y luego hay un tercer grupo que tienen... como por ejemplo el rectángulo, el número cuatro que tienen... [V7. 279-280]*. De la misma forma, una vez desechado el trapecio como miembro de la clase "*lados iguales dos a dos*", sugiere que debe hacerse otra clase con "*solamente dos lados iguales*" [V7. 298- 300].

Sobre las respuestas de los alumnos, introduce expresiones más precisas para describir la situación [KFLM1], es decir, busca la expresión adecuada (que no es sólo una cuestión lingüística, sino que está relacionada con la propia observación y expresión de ideas matemáticas): [*"Dos lados más largos y dos más cortos..."*, dice un niño]. *O sea, que tienen lados iguales, pero dos a dos. Entonces, éste, el número cuatro, tiene lados iguales pero no los cuatro iguales, sino dos a dos. Entonces sería...* [Escribiendo a la vez en la pizarra: 3º- Cuadriláteros que tienen lados iguales dos a dos] [V7.280-283].

La clasificación que se obtiene es una construcción conjunta de los niños y la maestra, y aunque la clasificación a la que se llega es excluyente (CLD), no exhaustiva (cabría la clase de los que tienen 3 lados iguales, por ejemplo). Quedando finalmente la clasificación:

1º Cuadriláteros con todos 4 lados iguales: 1, 7 y 8.

2º Cuadriláteros que no tienen ningún lado igual: 2, 10 y 6.

3º Cuadriláteros que tienen lados iguales dos a dos: 3, 4 y 5.

4º Cuadriláteros que tienen sólo dos lados iguales: 9.

#### 2.2.3.2. [V7. 312-364] Clasificación según los ejes de simetría

A partir de la intervención de una alumna (*Mar: Digo, en los polígonos, que si tuvieran un eje de simetría me saldrían iguales* [V7.315]), que propone un eje de simetría (la elección del criterio es la simetría (E)), Inés plantea buscar las figuras que tienen ejes de simetría y las que no (CL y CLD). Se analiza, como en los restantes casos, las figuras que contendría. Inés parece valorar esta clasificación, porque permite realizar una clasificación atendiendo a un elemento no visible de los cuadriláteros. Aprovecha esta situación para recordar que los ejes de simetría es un elemento que componen las figuras planas, y que en V2 se hizo una pequeña apreciación de que se trabajaría [KoT1]. Finalmente la consideración de las ideas de los alumnos y del trabajo realizado por éstos, es tomado en cuenta [I23].

Ante las dificultades de encontrar si las figuras poseen un eje de simetría, Inés propone doblar el papel por los ejes, para comprobar si son o no ejes de simetría de la figura correspondiente. Ella misma dobla en algún caso dudoso y compara su resultado con el de los demás. Corrige directamente en algunos casos. *A mí no me coincide. A mí se me*

*queda dividido en dos triángulos, ¿no?, uno y otro (mostrando la hoja desdoblada y señalando ambos triángulos), ¿a vosotros también? Pero esos triángulos no me coinciden. Miradlos así al trasluz, ya veréis, no me coinciden. No tiene eje de simetría, ¿eh?* [V7. 323-326]. Esta forma de comprobación es procedimental, al igual que en los casos anteriores, su conocimiento para proceder en la comprobación es a través de un procedimiento [KPM4].

A continuación, la maestra va preguntando a los alumnos y comprobando si las figuras poseen o no eje de simetría. *¿Cuántos tiene el cuatro? [Mar dice que uno, pero los niños no están de acuerdo]. Al menos dos, que yo le vea ahora mismo dos, ¿tiene alguno más? [Los niños dicen que no. Mi empieza a decir que no porque habría que partirlo]. El número cinco... ["Cuatro", dicen los niños, horizontal, vertical y oblicuo]. El oblicuo siempre nos da problemas, venga, dobladlo, no coincide. Entonces, el número cinco sólo tiene dos ejes de simetría. [Siguen comprobando con el seis, al que al principio encuentran un eje de simetría, en vertical]. No, porque ya vimos que no eran iguales... venga, doblad/o. [Los niños lo doblan e I corrige a Es que lo dobla mal]. ¡No es por donde a ti te dé la gana, Estela! ¡Es por donde hay que doblarlo! ¿Lo ves? Sí que el seis no, el siete.* [V7. 331-339]. Esta actuación atiende a que quiere hacer consciente al alumno de qué hace y por qué lo está haciendo [I24].

Finalmente, escribe en la pizza cómo queda la clasificación que han construido los alumnos:

1º Cuadriláteros que tienen ejes de simetría: 1, 4, 5, 7, 8 y 9.

2º Cuadriláteros que no tienen ejes de simetría: 2, 3, 6 y 10.

#### 2.2.3.3. [V7. 364-463] Clasificación según tengan lados paralelos

Al igual que con la primera clasificación (según la longitud de sus lados), Inés trata que las clasificaciones según sean paralelos sus lados (CLI), y no queden en dos grupos mutuamente excluyentes porque cumplan una propiedad y otros no la cumplen. (E)Elección del criterio para realizar la clasificación. Por lo que intenta profundizar en hacer un análisis más detallado para que afinen en la clasificación e intenta hacer que se precise en cada caso cuántos lados paralelos tienen, para que se diferencien las clases de los paralelogramos y trapecios. Esto podemos observarlo en las siguientes unidades de información:

a) *Ahora vamos a intentar hacer otra clasificación según tengan lados paralelos [V7. 381].*

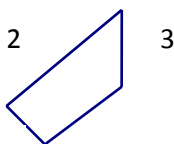
b) *A ver, el uno, ¿cuántos lados paralelos tiene? [...] ¡Ah! ¡Son paralelos dos a dos!, ¿no? [...] Lo que tiene es los cuatro lados paralelos, pero paralelos dos a dos, lo que quiere decir el de abajo con el de arriba y el de la izquierda con el de la derecha, ¿no? [V7. 394-399].*

c) *¿Entonces, María, esta figura, la nueve, tiene lados paralelos? A lo que la alumna contesta que sí. ¿Dos a dos? A lo que contesta que no. Por lo que pregunta: ¿Entonces, cuáles son los lados paralelos? A lo que María contesta: "El de arriba con el de abajo" e Inés contesta: Sólo el de arriba con el de abajo, tiene cuatro lados pero sólo tiene dos lados paralelos, no los tiene dos a dos. Ésta no es como las que hemos dicho hasta ahora. Las otras tenían lados paralelos dos a dos y ésta tiene sólo dos lados paralelos [V7. 410-419].*

A lo largo la clasificación, la maestra, sigue interviniendo para que se precise el análisis y la expresión de éste ("*no son cuatro lados paralelos sino paralelos dos a dos*") la maestra trata de que se utilice un correcto vocabulario, puesto que ello puede conllevar a errores conceptuales [KFLM1], además es una fuente para intentar solventar errores en los alumnos, *¿Cuáles son los lados paralelos? [María dice que el de arriba con el de al lado. Otros niños dicen que no, que ésas se chocan, que son paralelos el de arriba con el de abajo. Al preguntar Inés a María por qué son lados paralelos éste responde que porque miden lo mismo]. ¿Dos lados paralelos son aquellos que miden lo mismo? ¿Alguien le puede decir a María qué son dos líneas paralelas? [Daniel dice que son aquellas que nunca se cortan]. ¿Y ésta con ésta se tocan o no se tocan? (señalando la de arriba y la de un lado de la figura). [María dice que sí, que las que no se tocan son la de arriba con la de bajo]. ¡Ya lo creo! Reconoce un error en el aprendizaje de las líneas paralelas/secantes e intenta que con las aportaciones de los alumnos, este error se solviente [KFLM6]. A lo largo de este subepisodio, los niños discuten sus puntos de vista y expresan su acuerdo y desacuerdo, se corrigen, aportan información a sus compañeros (promovido por Inés) [I25].*

La maestra vuelve a insistir, haciendo cuestiones a este alumno, hasta que se asegura de su comprensión:

Inés: *[[...] En la número diez los niños dicen que tienen lados paralelos. Inés le pregunta a María qué cuáles son paralelos y éste no responde. Inés reproduce en la pizarra la figura]. María no se ha enterado... María no se ha enterado... Vamos a ver, María, ¿cuáles son los lados paralelos? ¡Los que no se van a encontrar! [Inés les pone números a los lados:*



María: *El uno...*

Inés: *¿Con quién? ¡Tendrá que 1 par 4 o con alguien...! El uno con quién es paralelo... [V7. 423-434]*

Inés continúa aclarando a este alumno el concepto de paralela, cuestionándole sobre cuáles son paralelas en esa figura porque sabe que es un error que ha detectado en el alumno asociado a ese concepto **[KFLM6]** [V7. 435-451].

Finalmente, los alumnos dictan las clases que se han obtenido para escribir las conclusiones. Sigue responsabilizándose al grupo de la corrección de la asignación de las figuras a las clases y de las descripciones de las clases que dan los compañeros, potenciándose una actitud crítica en los alumnos [V7. 456-463].

Inés se va a la pizarra y los niños le van diciendo los grupos, que ella escribe:

1º- Cuadriláteros que tienen lados paralelos dos a dos: 1, 3, 4, 5, 7 y 8.

2º- Cuadriláteros que tienen sólo dos lados paralelos: 9 y 10.

3º- Cuadriláteros que no tienen ningún lado paralelo: 2 y 6.

#### 2.2.4. [V7. 464-481] Nombres de los grupos

Finalmente, al igual que en V3, el caso de las clasificaciones de los triángulos, se propone la búsqueda de los nombres "reales" de las clases obtenidas en el libro de texto. Se considera de manera parecida la aportación de esta fuente **[KMLS3]** ("*el que ha escrito el libro debe ser matemático, porque sabe mucho de matemáticas*"). Propone en este caso que se busque el nombre de las clases según la última clasificación **[I14]**. El uso que se hace del libro de texto es el mismo que en la sesión de las clasificaciones de triángulos.

## **Relaciones MTSK – V7**

*Las concepciones como ayuda para encontrar relaciones entre elementos de los subdominios de MTSK – V7*

A lo largo de la sesión, la maestra parece buscar un equilibrio entre que los alumnos analicen las figuras y sus características, (C)comparándolas, que se ejerciten en el propio proceso de clasificar (con lo que eso conlleva de análisis); que los alumnos aporten sus propias clasificaciones, valorando sus ideas y la originalidad [I23]; y que se llegue a la clasificación en paralelogramos, trapecios y trapezoides (CLI), comprendiendo las cualidades de cada uno de ellos y el sentido de esta clasificación. Como en el caso de la clasificación de los triángulos, la actividad que se propone es una situación problemática para los alumnos [I1], que trabaja de modo más rico y más relacionado los contenidos, que el libro de texto presenta fragmentados. Esto podemos verlo por ejemplo en: [María dice que el ocho se parece al tres pero que el ocho es más estrechito, Inés le dice que eso es lo que dijo Miguel]. María, la diferencia entre el ocho y el tres es lo que dijo Miguel, que el ocho tiene los cuatro lados iguales. Mira, ¿lo ves?, mientras que el número tres no tiene los lados iguales, ¿a qué no? El número tres tiene dos lados que son más cortos que los otros dos [V7. 141-145]).

La actividad va más orientada a potenciar una comprensión más conceptual (en el sentido de ahondar más en los conceptos, en sus relaciones, frente al aprendizaje con menos significado de éstos) y que los conceptos no se presentan ya elaborados, y se justifican en mayor medida dándoseles más sentido. La adquisición de conceptos, como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia, y el trabajo escolar en general determinan el peso específico de cada una de esas componentes [I9]. Este indicador está relacionado, por ejemplo, en cómo comprueba matemáticamente [KPM4] si una figura cumple el criterio de inclusión en un grupo.

Es reseñable en esta sesión cómo al final de la clase se realiza una comprobación de las clasificaciones que han trabajado con respecto al libro de texto. Esta forma de actuar, al igual que como en el caso de la clasificaciones de triángulos, señala que la institucionalización es un punto importante para la maestra [I14]. Además, siguiendo en similitud a la sesión V3, las conclusiones se realizan en gran grupo, dando al alumno un papel importante sobre qué ha trabajado y por qué lo ha trabajado [I24]. Éstos a lo largo

de toda la sesión aportan ideas, corrigen a sus compañeros, validan lo que surge en el aula, explican sus ideas, las argumentan, y precisan sus expresiones, gracias al papel de la maestra, que cuestiona, pide razones, pone la validación en manos de los alumnos, incorpora las ideas de los alumnos, corrige, plantea objeciones a algunas de las ideas que surgen, completa, precisa, da pistas, aclara, insiste en cuestiones problemáticas y se asegura de que los alumnos entienden los conceptos [I27].

**KoT (Conocimiento de los Temas Matemáticos)**

Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático

**KoT1:** Conoce que el concepto de polígono determina las propiedades de los triángulos.

**KoT3:** Conoce que los poliedros están limitados por polígonos y reconoce el tipo de polígonos que los forman

**KoT5:** Conoce distintos tipos de ángulos (agudos, recto y obtuso).

**KoT16:** Conoce que la suma de los ángulos interiores de los triángulos son dos ángulos rectos suplementarios, sumando 180°

**KoT21:** Conoce la utilización del grado como medida angular

**KoT27:** Conoce los tipos de clasificaciones de cuadriláteros según sus ángulos y lados

**KPM (Conocimiento de la Práctica Matemática)**

Conocimiento de Prácticas ligadas a una Temática en Matemáticas

**KPM3:** Conoce cómo hacer la construcción de una circunferencia y su argumento matemático

**KPM4:** Conoce como argumentación matemática diferentes procedimientos: medición y superposición de figuras (simetría)

*Concepciones Metodología*

**I1:** Los alumnos se enfrentan habitualmente a situaciones para las que no poseen procesos de resolución dados (situaciones problemáticas, ya sean problemas o investigaciones, frecuentemente contextualizadas en problemáticas reales).

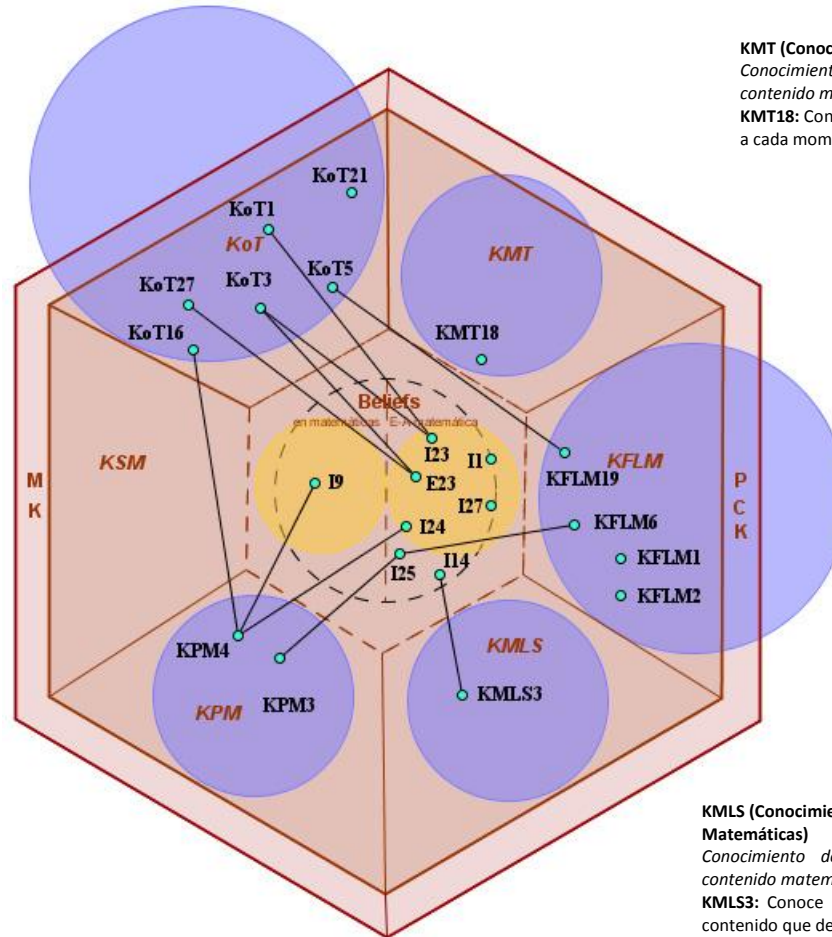
*Concepción del aprendizaje*

**I14:** El aprendizaje se produce a través de investigaciones que han sido planificadas por el maestro. Además, para que se produzca aprendizaje éste debe institucionalizarse.

*Concepción de la matemática escolar*

**I9:** La matemática escolar tiene su punto de partida en la etnomatemática de los alumnos y recoge las necesidades socio-políticas, culturales... "Hacer matemáticas" con un carácter más formal (con la formalidad que tiene sentido alcanzar en esta etapa educativa) proviene del análisis de lo concreto. Como contenidos matemáticos escolares se consideran tanto los numéricos propios de la etapa, como los geométricos, la medida, el tratamiento de la información y la resolución de problemas, destacando este último.

**Imagen 10: Gráfico de relaciones interna MTSK correspondiente a V7**



**KMT (Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas)**

Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático

**KMT18:** Conoce una intencionalidad específica de buscar las figuras apropiadas a cada momento para enseñar una determinada clasificación

**KFLM (Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas)**

Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático

**KFLM 1:** Conoce la importancia de la precisión del vocabulario en el contenido matemático

Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático

**KFLM 2:** Conoce las dificultades asociadas al aprendizaje correspondientes al contenido matemático (posicionalidad)

**KFLM6:** Conoce cómo los alumnos están interaccionando con el contenido pretendiendo buscar qué están entendiendo los alumnos finalmente por líneas paralelas y secantes.

**KFLM19:** Conoce las dificultades asociadas a la utilización de material específico (visualización de ángulos rectos en el transportador)

**KMLS (Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas)**

Conocimiento de las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico

**KMLS3:** Conoce las clasificaciones de los cuadriláteros son un contenido que debe aprenderse en ese grado escolar

*Papel del alumno*

**E23:** El alumno pasa de actividad en actividad, participando intensamente en cada una de ellas.

**I23:** La actividad del alumno está organizada (interna o externamente) hacia la búsqueda de respuestas a determinados interrogantes.

**I24:** Para que se dé aprendizaje es necesario que el alumno otorgue significado a lo que aprende, siendo consciente de su propio proceso de aprendizaje. La responsabilidad del aprendizaje recae en la marcha del proceso completo (con todos los elementos y factores que intervienen en éste).

**I25:** La actividad del alumno está organizada (interna o externamente) hacia la búsqueda de respuestas a determinados interrogantes.

*Papel del profesor*

**I27:** La información que se moviliza en el aula es validada por el grupo, y por el maestro, potenciándose la reflexión de los alumnos y asumiendo responsabilidad (por parte del alumnado) a la hora de juzgar la adecuación de sus ideas

## INFORME DEL ANÁLISIS V8

### Resumen

La finalidad de esta sesión es la deducción de la suma de los ángulos de un cuadrilátero, para ello han trabajado qué relación existe entre los cuadriláteros y los triángulos en la primera parte de la sesión [Episodio1]. Durante el episodio de la suma de los ángulos de triángulos, Inés aprovecha para comprobar y recordar qué dos procedimientos han utilizado en las sesiones anteriores y lo enlaza con el concepto de esta sesión (suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero) a partir de la siguiente pregunta: ("¿qué relación hay entre el cuadrado y el triángulo?"[V8. 42-43]) [Episodio2]. A partir de esta pregunta, comienza un debate de discusión entre alumnos-profesor trabajando dicha pregunta. Finalmente, los alumnos llegan por deducción a cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un rectángulo e Inés les propone que lo escriban para que a posteriori lo expliquen a toda la clase.

### EPISODIOS

1. [V8. 3-36] ¿La suma de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$ ?

La sesión comienza haciendo un pequeño repaso de los dos métodos que han utilizado para comprobar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo son  $180^\circ$ . El primer método fue por superposición, insta a los niños a describir lo que se hizo en aquella ocasión. Puesto que lo que ahora se trabaja es continuación de aquello, se hace a los niños tomar conciencia de lo que se está haciendo y su objetivo (para qué se hace), para darle un significado [I24].

A continuación, Inés pone de relieve que a todos los alumnos le ha salido  $180^\circ$ , a lo que un alumno le pregunta "¿Por qué?", respondiendo Inés: *¿Por qué? Porque es así. Porque la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo miden  $180$  grados, siempre. No falla* [V8. 30-32]. La maestra está mostrando su conocimiento de que ambos procesos es una comprobación suficiente para que los triángulos cumplan esa propiedad matemática [KoT16].

2. [V8. 38-286] La suma de los ángulos de un cuadrilátero.

2.1. [V8. 38-100] Relación entre el cuadrilátero y el triángulo.

La maestra propone entonces primero a los alumnos relacionar los cuadriláteros de la ficha con triángulos, para ello lanza la siguiente pregunta: ("*¿qué relación hay entre el cuadrado y el triángulo?*" [V8. 42-43]) **[I1]**. Sabe que con esta pregunta crea en el alumno una intriga, puesto que es una pregunta donde están relacionando dos figuras, que en principio no tienen relación (para los estudiantes), para que busquen algún aspecto que sea común a ambas **[I13]** **[KMT4]**. Se discuten las aportaciones de los distintos alumnos que piden intervenir. Salen relacionados todos los conceptos que han tomado como vertebradores de la unidad didáctica de polígonos (son polígonos, tienen lados, vértices, están cerradas, son planas...). Sigue pidiendo relaciones hasta que llega a la que interesa. [*Miguel dice que si se traza el otro oblicuo salen cuatro triángulos. Sí, más pequeñitos pero cuatro triángulos. Así que si cojo un cuadrado y le trazo una raya de vértice a vértice, pasando por el centro, pues entonces me salen dos triángulos. Bueno, vamos a ver la siguiente figura, la número dos* [V8. 60-63]]

Siguiendo la actividad, Inés pide a los niños en el resto de las figuras (una a una) que observen las relaciones, insistiendo, si los niños no lo dicen, en si se cumple también que queda dividida en dos triángulos (C). Este análisis de las figuras está dirigido a que comprueben que en cada caso el cuadrilátero queda dividido en dos triángulos. Como resultado de este análisis la maestra resalta esa propiedad, desechando de nuevo (no interesa estudiar si ocurre siempre) el caso de la división en cuatro triángulos:

*Inés: Bueno, cualquiera de estas figuras, cualquiera de los cuadriláteros, los podemos formar, ¿con qué? ["Con triángulos", contestan los niños]. ¿Con cuántos? ["Con dos", contestan los niños]. Con dos triángulos. ["O con cuatro", recuerda un niño]. Bueno, con cuatro si fueran más pequeños, pero a lo mejor no con todos.* [V8. 96-99].

2.2. [V8. 100-194] Deducción de la suma de los ángulos de un cuadrilátero.

Inés comienza preguntado: *¿Cuánto creéis vosotros que miden los ángulos del cuadrilátero número 1, o el 2, o el 3, o el 4, o el 5, o el 6,...? [...] Repito que lo que hay ahí es una pista* [V8. 103-105]... Da la pista para que los niños establezcan el nexo deductivo (la implicación) **[I1]**. Distintos niños plantean sus deducciones, todas basadas en la relación entre el triángulo y el cuadrilátero (en algunos casos en algunos

cuadriláteros especiales, como el cuadrado) y en que la suma de los ángulos del triángulo es  $180^\circ$ . Inés hace cuestiones a estos alumnos para que expliquen su razonamiento y plantea las objeciones a sus razonamientos. Por ejemplo, ante el primer razonamiento que se expone, pone de manifiesto su falta de generalización, puesto que sólo considera el caso de que el cuadrilátero tenga un ángulo recto: *[Laura repite su idea, pensada a partir de un cuadrado. Si en el triángulo que hay tres ángulos es 180, en el cuadrado que hay cuatro habría 180 más 90. Dice que le añade un ángulo recto porque es un cuadrado]*. A lo que Inés responde: *Inés: ¿Y tú porque sabes que hay un ángulo recto? Sabemos que hay cuadriláteros que tienen ángulos rectos pero hay otros, como éste que no. ¿Por qué son 90 más? ¿Por qué no son  $100^\circ$ ? ¿O  $60^\circ$ ? ¿A que a ti te ha salido 180 y a lo mejor no hay ninguno de 90? [Refiriéndose a la suma de los tres ángulos del triángulo]. ¿A qué no? Por eso te pregunto, ¿por qué añades 90? ¿Es que hay un ángulo recto? [La niña no contesta]. No, no hay ninguna razón, Laura, a lo mejor en éste sí (señalando uno de la ficha que ha pegado en la pizarra en que sí se cumple), pero en otro no. En éste, claro, porque todos son ángulos rectos. [Refiriéndose a la figura uno de la ficha, un cuadrado [V8. 129-138]. Esta respuesta de la maestra, invalidaría su generalización en el caso de cualquier cuadrilátero [KoT28].*

Es a partir de la intervención de un alumno, cuando se expone el razonamiento correcto (según el argumento basado en los dos triángulos), la maestra, no le pone objeciones, sino que lo expone a los alumnos para que expresen su opinión sobre él.

*Daniel: Creo que son 360. [Ante la pregunta de Inés de por qué]: porque hemos hecho dos triángulos en cada cuadrilátero y como cualquier triángulo entre todos los ángulos miden 180, pues he multiplicado dos veces el 180. [...]* *Inés: ¿Habéis oído a Daniel? ¿Y qué os parece? [José dice que eso era lo que él tenía pensado. Miguel dice que hay otra forma de comprobarlo] [V8. 139-143].*

Hace que los alumnos valoren las ideas de los que intervienen y las respeten, criticándolas [I25] [V8. 143-145]. Respetándose el turno de palabra, se discuten las aportaciones de todos los niños (se valoran todas).

Inés queriendo profundizar en el interés de otro alumno, pregunta a Miguel sobre otra forma que tenía otra manera de comprobarlo y de saber cuánto miden los ángulos de un cuadrilátero. *[Miguel explica su forma: En cualquier triángulo la suma de sus ángulos es  $180^\circ$ . Un cuadrilátero tiene cuatro ángulos. Como el cuadrado tiene cuatro ángulos*

*rectos, sus ángulos miden  $90 \times 4 = 360$ . Y si en el cuadrado la suma de sus ángulos mide  $360^\circ$ , en los demás cuadriláteros tiene que medir lo mismo]. Puede que no, eso no es así, Miguel, eso no es así. Porque fíjate, nosotros medimos un triángulo y decimos: "entre los tres mide  $180^\circ$ . ¡Ah, entonces cualquier triángulo mide  $180^\circ$ !". ¿Hicimos eso? No, ¿verdad? Tú probaste con uno, él con otro, ella con otro,... [Miguel argumenta que como en cualquier triángulo suman  $180^\circ$ ...]. No es así, Miguel, no tiene por qué. Yo creo que eso lo has hecho de una manera muy ligera, por lo menos te tienes que apoyar en algo, igual que hemos hecho con los triángulos. [Miguel vuelve al ataque: "por eso y porque como cualquier cuadrilátero trazando una línea se obtienen dos triángulos, pues como cada triángulo entre los tres miden 180, pues entonces...]. Eso sí, eso es construir una casa con cimientos fuertes [V8. 182-194].*

Finalmente propone, al igual que hicieron en el caso de los triángulos, comprobarlo también midiendo con el transportador **[KMT17] [KoT22]**.

### 2.3. [V8. 195-286] Escribimos lo que hemos hecho.

A continuación, propone que pongan por escrito qué es lo que han hecho. Es una forma de hacerlos conscientes de lo que se aprende, de reforzar y asegurar ese aprendizaje, posteriormente es corregida y completada en el gran grupo.

#### 2.3.1. [V8. 205-213] Propuesta de la tarea.

Se pide que se recoja tanto el resultado (el hecho: "los ángulos de un cuadrilátero miden  $360^\circ$ ") como el procedimiento seguido para comprobarlo (*averiguarlo*, dice Inés). Interesan tanto el contenido conceptual al que se llega, como el procedimiento y el resultado, así como, el proceso **[KoT29]**. También insiste en la precisión conceptual en cuanto a la expresión de la medida de ángulos (en grados) **[KFLM1]**.

#### 2.3.2. [V8. 216-221] Escritura de las conclusiones.

Escritura de las conclusiones. Durante cinco minutos cada uno escribe sus conclusiones.

#### 2.3.3. [V8. 224-286] Puesta en común.

Los niños y la propia maestra corrigen lo que han escrito los niños que intervienen. En la mayoría de los casos es Inés la que pone objeciones a la expresión de los alumnos,

haciéndoles que precisen, que concreten, que completen, de manera que lo que escriban describa con exactitud lo que se ha hecho [KFLM1], del modo:

*María: Lo he averiguado trazando una línea en un cuadrilátero...*

*Inés: Una línea, así... ¿Es una línea, María, por donde queremos?*

*María: En un vértice...*

*Inés: ¿En un vértice ? ¿Esto es trazar una línea en un vértice? [indicando una de las diagonales trazada a un cuadrilátero de la ficha de la pizarra], ¿sólo hemos ocupado un vértice? ¡Entonces...! Hemos trazado una línea...[...]*

*Inés: ¡Ah! Hemos trazado una línea en el cuadrilátero para que me salgan dos triángulos, o de vértice a vértice, bueno, en fin ... [V8. 227-245]*

La maestra pregunta a todos niños, uno por uno, de manera que se corrigen las expresiones de cada uno. Le da un sentido además, a esta lectura para el aprendizaje del resto de los compañeros: para que les sirva para corregir y mejorar su propia expresión de las conclusiones. De nuevo se observa cómo hace explícita la valoración de los compañeros como fuente de aprendizaje, lo que pueden aportar al aprendizaje individual y apoyar, la actitud crítica y abierta que se debe mantener ante las ideas que se expresan [I25]. (Inés pregunta a los niños uno por uno y pide que atiendan a lo que han escrito sus compañeros para que valoren si lo han escrito mejor que ellos y pueden rectificar los suyos [V8. 263-264]).

### **Relaciones MTSK – V8**

*Las concepciones como ayuda para encontrar relaciones entre elementos de los subdominios de MTSK – V8*

Durante toda la sesión, la maestra va desarrollando un proceso deductivo a partir de pequeñas cuestiones, es decir, se trata de una deducción guiada en la que la maestra es el eje principal del argumento. El desarrollo de la sesión finaliza, de nuevo, con una institucionalización de lo que se ha construido promoviendo la toma de conciencia por parte de cada alumno de lo que se ha hecho y aprendido [I24] (en la forma de escritura individual de lo que se ha hecho y corrección posterior en el gran grupo), esto se

produce cuando la maestra pregunta “por qué” a sus alumnos cuando están comprobando la suma de los tres ángulos, está utilizando su conocimiento sobre esa propiedad matemática **[KoT16]**.

Es de resaltar que para el proceso de la deducción se utilice al gran grupo donde la aportación de ideas por parte de los alumnos, la construcción conjunta al apoyarse unas aportaciones sobre las otras y el ir redefiniendo juntos la situación problemática hacen de ello un trabajo colectivo. Es la maestra la que valida, pone objeciones y dirige (como en la sesión anterior). También se corrigen en el gran grupo las distintas conclusiones escritas por los niños. Vuelve a ser la maestra la que corrige para que los alumnos sean precisos en la expresión, sean concretos, completen, de manera que escriban con exactitud lo que se ha hecho **[KFLM1]**, es tomada en cuenta la valoración de los alumnos, sus expresiones, y se apoya a que comuniquen sus ideas **[I25]**.

Por otro lado, a diferencia de otras sesiones en las que, para que los alumnos "deduzcan" los contenidos no se ha propuesto directamente la deducción sino que se han planteado actividades que lleven a ellos (como en el caso de la introducción de las fracciones, V2, o la definición de polígono, V3), en esta ocasión no hay una actividad de la misma envergadura que lleve a la deducción. En aquellos casos se proponía una tarea en principio independiente de la deducción, que situaba a los alumnos ante una situación problemática cuya resolución llevaba a los contenidos. Uniendo lo anterior con otros aspectos del contenido matemático que ha trabajado en sus clases (lo que es una definición y el propio proceso de definir, el proceso de razonamiento deductivo en este caso), se puede apreciar que la matemática escolar es trabajada en clase **[I9]**.

**KoT (Conocimiento de los Temas Matemáticos)**

*Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático*

**KoT16:** Conoce que la suma de los ángulos interiores de los triángulos son dos ángulos rectos suplementarios, sumando 180°

**KoT22:** Conoce que para medir ángulos con el transportador es requisito necesario situarlo correctamente.

**KoT28:** Conoce que es necesario determinar la generalización de que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero son 360°

**KoT29:** Conoce la importancia del conocimiento conceptual, procedimental y el resultado obtenido.

**KMT (Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas)**

*Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático*

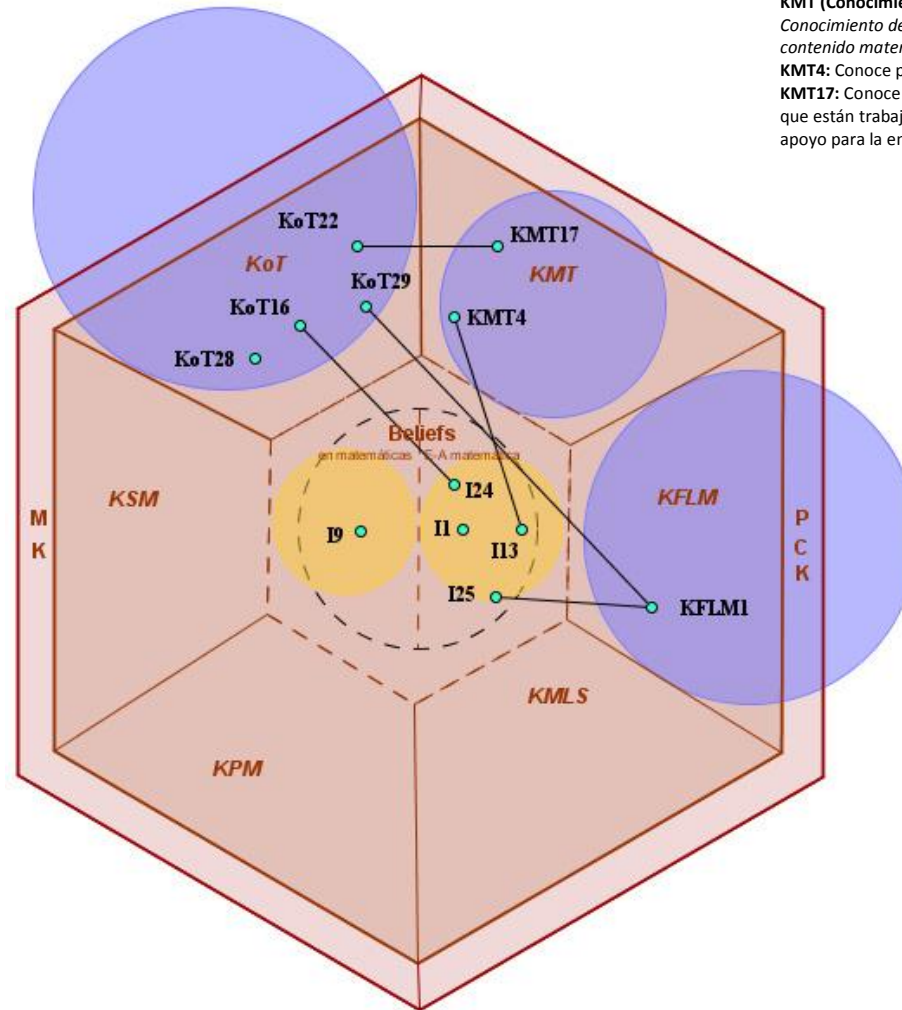
**KMT4:** Conoce por qué actividad comenzar para trabajar el contenido

**KMT17:** Conoce que el transportador de ángulos es apropiado para la actividad que están trabajando, además de los beneficios asociados al uso de éste como apoyo para la enseñanza.

**KFLM (Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas)**

*Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático*

**KFLM1:** Conoce la importancia de la precisión del vocabulario en el contenido matemático



*Concepciones*

*Metodología*

**I1:** Los alumnos se enfrentan habitualmente a situaciones para las que no poseen procesos de resolución dados (situaciones problemáticas, ya sean problemas o investigaciones, frecuentemente contextualizadas en problemáticas reales).

*Concepción de la matemática escolar*

**I9:** La matemática escolar tiene su punto de partida en la etnomatemática de los alumnos y recoge las necesidades socio-políticas, culturales... "Hacer matemáticas" con un carácter más formal (con la formalidad que tiene sentido alcanzar en esta etapa educativa) proviene del análisis de lo concreto. Como contenidos matemáticos escolares se consideran tanto los numéricos propios de la etapa, como los geométricos, la medida, el tratamiento de la información y la resolución de problemas, destacando este último.

*Concepción de aprendizaje*

**I13:** El aprendizaje comienza, normalmente, por la observación de regularidades que permiten aflorar una conjetura; pero a ésta ha de seguir una comprobación razonable y, en la medida de lo posible, una generalización adecuada (adecuadas tanto la generalización como la comprobación al nivel de los alumnos).

*Papel del alumno*

**I24:** El alumno toma conciencia de qué hace y para qué lo hace

**I25:** El alumno mantiene una actitud crítica ante las informaciones que se movilizan en el aula.

**Imagen 11: Gráfico de relaciones internas MTSK correspondiente a V8**

**CAPÍTULO IV:**  
**DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y**  
**CONCLUSIONES**

## CAPÍTULO IV: DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

IV. Introducción .....	175
IV.1 Conclusiones relativas a los resultados de la investigación .....	175
IV.1.1 Las concepciones como ayuda para encontrar relaciones MTSK .....	175
IV.1.1.1 Concepción de la Matemática Escolar .....	176
IV.1.1.2 Concepciones sobre Metodología en el aula de matemáticas. ....	178
IV.1.1.3 Concepción del aprendizaje .....	180
IV.1.1.4 Papel del alumno .....	182
IV.1.1.5 Papel de la maestra.....	184
IV.1.2 Sobre el conocimiento especializado de la maestra.....	186
IV.1.2.1 Dominio de conocimiento matemático .....	186
IV.1.2.1.1 Sobre el Conocimiento de los Temas (KoT).....	186
IV.1.2.1.2 Sobre el Conocimiento de la estructura matemática (KSM).....	188
IV.1.2.1.3 Sobre el Conocimiento de la práctica matemática (KPM).....	188
IV.1.2.2 Dominio de conocimiento didáctico del contenido .....	189
IV.1.2.2.1 Sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) .....	189
IV.1.2.2.2 Sobre el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) .....	189
IV.1.2.2.3 Sobre el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) .....	191
IV.2 Conclusiones en relación con los objetivos planteados en el estudio .....	191
IV.3 Limitaciones del estudio y futuras líneas de investigación .....	194

## **IV. Introducción**

Este apartado del informe se centra en cerrar el ciclo de la investigación, mostrando la discusión de resultados, conclusiones y aportaciones del estudio. Se ha estructurado en dos bloques:

En primer lugar, realizaremos una discusión de los conocimientos y concepciones identificados en la acción, en Inés. A lo largo del análisis de las ocho videograbaciones de aula pertenecientes a la Unidad Didáctica de polígonos. No vamos a describir qué hemos observado, sino que intentaremos mostrar relaciones entre ambos aspectos, puesto que entendemos que es plausible esta discusión. Se trata, por tanto, de una interpretación del proceso observado con el objetivo de evidenciar el complejo entramado de relaciones existentes entre los conocimientos y las concepciones de la maestra.

Para facilitar la comprensión de la información se han elaborado unos gráficos CEAM-MTSK. Se han incluido las categorías de las concepciones en su relación con los subdominios de conocimiento. Para la realización de estos gráficos nos hemos inspirado en los *mapas cognitivos de las estructuras de acción* de Monteiro, Carrillo, y Aguaded (2008). En todos los gráficos de MTSK se ha incluido en el centro del modelo la concepción que permea al resto de subdominios con los que está relacionado.

En segundo lugar, se realiza una reflexión sobre las conclusiones en relación con los objetivos planteados, así como las limitaciones de este estudio, y la prospectiva que deriva de este.

### **IV.1 Conclusiones relativas a los resultados de la investigación**

#### **IV.1.1 Las concepciones como ayuda para encontrar relaciones MTSK**

Comenzaremos con un análisis desde la perspectiva de cómo las concepciones ayudan a encontrar relaciones MTSK, puesto que nos sirve para poder comprender de manera más completa el conocimiento especializado que ha sido puesto en acción, gracias a que las concepciones permean el conocimiento.

#### **IV.1.1.1 Concepción de la Matemática Escolar**

En esta parte del análisis se ha pretendido profundizar su sustento en las relaciones que tienen en la *Concepción de la Matemática escolar*. Recordamos, como dijimos en el apartado II.6.1.1, que esta es la única categoría del Instrumento CEAM (Climent, 2005) y que, por otra parte, está incluida en el subdominio del MTSK de *Concepciones sobre la matemática*.

Durante varias sesiones se ha apreciado cómo en Inés se ha mostrado en sus clases un interés por buscar una armonía entre conceptos, procedimientos y actitudes (Indicador *Orientación* sobre la matemática escolar). Así por ejemplo, en V1, se unen el concepto de polígono y el propio proceso de definir; en V5 y V8, la suma de los ángulos interiores (triángulos y cuadriláteros), el proceso de comprobación y de las diferentes estrategias que usa para ello; en V3, V4 y V7 el procedimiento de clasificar los triángulos y cuadriláteros, con el propio procedimiento de clasificar, comparar y analizar las diferentes figuras. Podemos afirmar que la maestra está pretendiendo orientar a los alumnos hacia la adquisición de habilidades, enfatizando la comprensión (Serrazina, 1998).

El conocimiento de la maestra sobre las propiedades que se necesitan para establecer la definición de polígono, se pone de relieve claramente durante V1 y V2, así como en V7, cuando la maestra trabaja con las características de los cuadriláteros. La introducción del concepto de polígono es un ejemplo de cómo la concepción de la Matemática Escolar está relacionada con el conocimiento. Cuando la maestra pide a los alumnos que analicen las figuras, comparen, establezcan criterios, e identifiquen qué propiedad tienen, se pone de manifiesto su conocimiento sobre las propiedades necesarias para construir la definición de polígono, interesándole, también, el concepto desde un punto de vista comprensivo por parte del alumnado. Asimismo se puede observar cómo su conocimiento sobre el concepto de ángulo y sus dificultades de aprendizaje, proporcionan el que los alumnos no lo asocien a su posición ni a la longitud de los lados.

Entendemos que el conocimiento sobre la práctica matemática es fundamental para que la maestra pueda saber cómo se razona y produce en matemáticas así, se pone de relieve la solidez del conocimiento acerca del tema que está trabajando. Es remarcable también cómo (desde su conocimiento) sabe gestionar los razonamientos matemáticos puestos

en juego por sus alumnos, a la hora de aceptarlos, refutarlos, o refinarlos, en caso de ser necesario. Queda de manifiesto en todas las sesiones esta constante interacción con el papel que tiene el alumno y cómo ella quiere que expliquen el porqué de su razonamiento matemático,

Junto a los conocimientos matemáticos que se han relacionado con esta concepción, cabe mencionar un conocimiento asociado a las dificultades que presentan los alumnos cuando tratan de definir qué es un polígono. Se puede evidenciar que el conocimiento de la maestra de la práctica matemática lleva asociado una componente didáctica, que es la dificultad de entender cómo se razona en matemáticas.

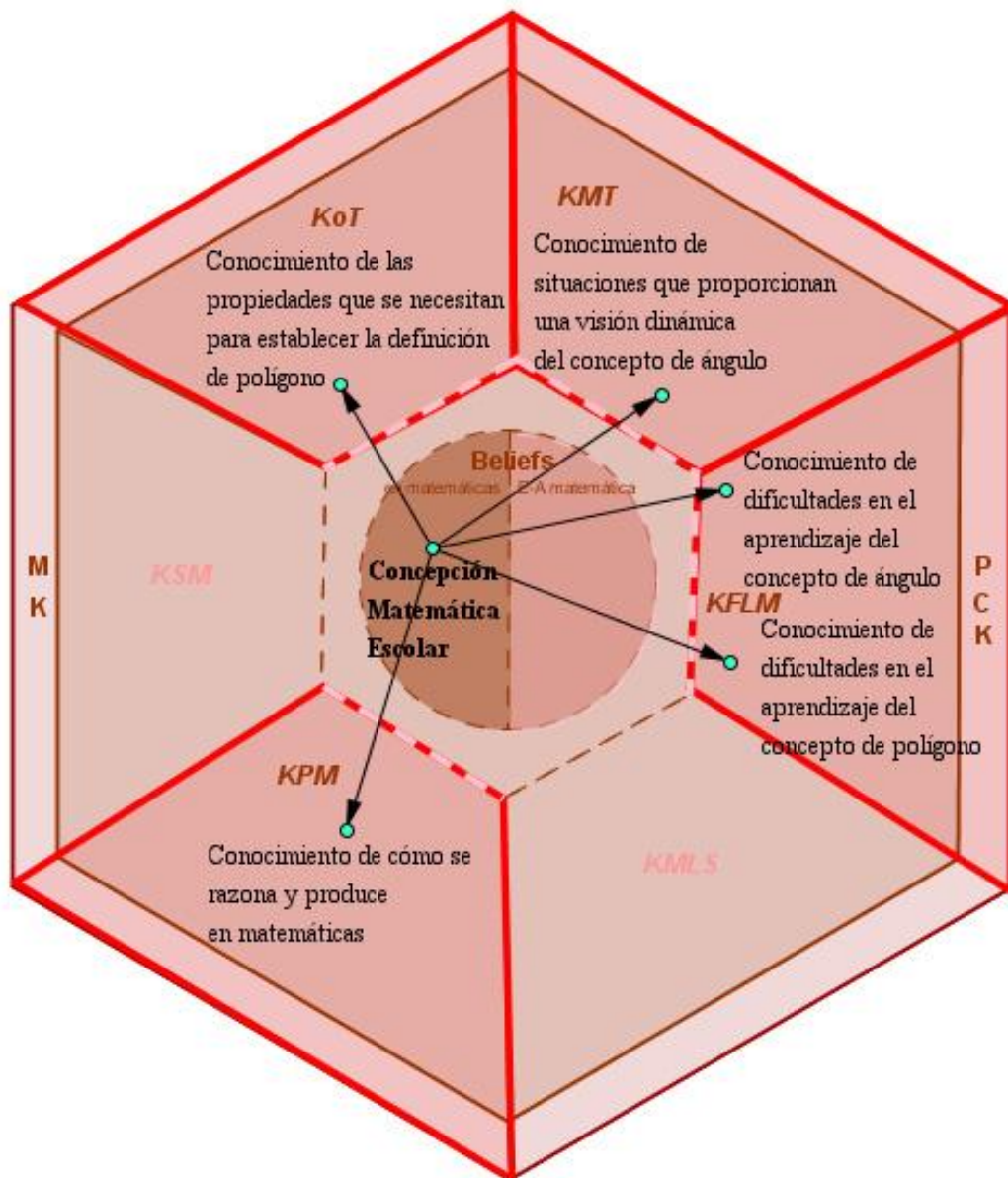


Imagen 12: Relaciones Concepciones (Matemática Escolar) - Subdominios de MTSK de la maestra

#### **IV.1.1.2 Concepciones sobre Metodología en el aula de matemáticas.**

Con la puesta en práctica de la unidad didáctica de polígonos, se han podido observar diversos indicadores sobre metodología en las sesiones analizadas. Es de especial relevancia hacer un inciso en cómo la *actividad en el aula* y la *praxis* se ha desarrollado en el aula, puesto que son indicadores que han surgido en casi la totalidad de las sesiones.

Para la maestra, enfrentar al alumno con situaciones para las que no poseen procesos de resolución dados, es una forma de guiar y hacer su docencia. Esta actividad en el aula requiere de un rico conocimiento. Así por ejemplo, esta situación se observa claramente en las sesiones V4, donde el trabajo se centra en la clasificación de triángulos, y V5, cuando se está trabajando la suma de los ángulos interiores. La maestra plantea la actividad de clasificación de triángulos conociendo el gran potencial que hay detrás ella; es decir, su conocimiento de las tareas para la enseñanza de un contenido matemático en concreto le hace plantear la actividad así. Además, su conocimiento del tema matemático es primordial para la realización de ésta. A lo largo del desarrollo de las sesiones, donde se da esta conexión, está también incluido su conocimiento sobre las formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático, conoce de las dificultades a las que se enfrentan los alumnos, así también manifiesta un conocimiento de cómo profundizar en ellas para solventarlas. El interés de la maestra dirigido a que los alumnos construyan conocimientos a través de estas situaciones tiene una organización en la que la construcción individual y colectiva del conocimiento matemático escolar es principal (Restrepo Becerra, 2010).

Ahora bien, profundizando en el aspecto de la *praxis*, la maestra en el proceso de adquisición de conocimientos por parte del alumno, va a requerir de sus propios conocimientos para poder desarrollar su actividad. Esto lo vemos reflejado por ejemplo en V1, sesión centrada en la construcción de concepto de polígono, donde su conocimiento sobre qué es una definición y cuáles son sus características están en la base del desarrollo de toda la actividad. Al hilo, podemos afirmar que su conocimiento sobre por qué actividad comenzar a trabajar dicho concepto es de especial relevancia, puesto que condiciona la definición matemática con la que se va a trabajar el resto de las sesiones. En su afán de problematizar la actividad, podemos observar cómo en V3 intenta potencializar la clasificación de los triángulos - con un ángulo recto y 2 agudos- incidiendo en los aspectos problemáticos de los contenidos cada vez que hay alumnos

que manifiestan dificultades. Es de especial relevancia la conexión que se establece entre la *praxis* y su conocimiento de la práctica matemática en V4. Su conocimiento de cómo se construye una definición en matemáticas ya había sido trabajada con anterioridad en la unidad didáctica de simetría, por lo que esa misma estructura lógica de pensamiento es aplicada al trabajo que ahora tiene organizado. Servirá al alumno para adquirir los conocimientos que ella le está requiriendo.

En cuanto a la información movilizada en el aula, la maestra es quien la moviliza en la mayoría de las ocasiones. Esto se evidencia en la sesión V5, cuando Inés propone a los alumnos que superpongan los ángulos interiores de un triángulo para dar como resultado dos ángulos rectos. La maestra es quien propone ese método de comprobación y el resultado obtenido es invariante independientemente del procedimiento que se use. Podemos observar cómo su conocimiento sobre la enseñanza está relacionado con la concepción sobre metodología. Está procurando que los alumnos comprendan qué quiere enseñar (Brown y Borko, 1992, con estudiantes para maestro). Por otro lado, su concepción sobre los materiales manipulativos usados en clase emerge como detonante para que el alumno pase de un pensamiento concreto al abstracto (Gellert, 2000, con estudiantes para maestro), por ejemplo, en el uso de la medición de los ángulos en V6.

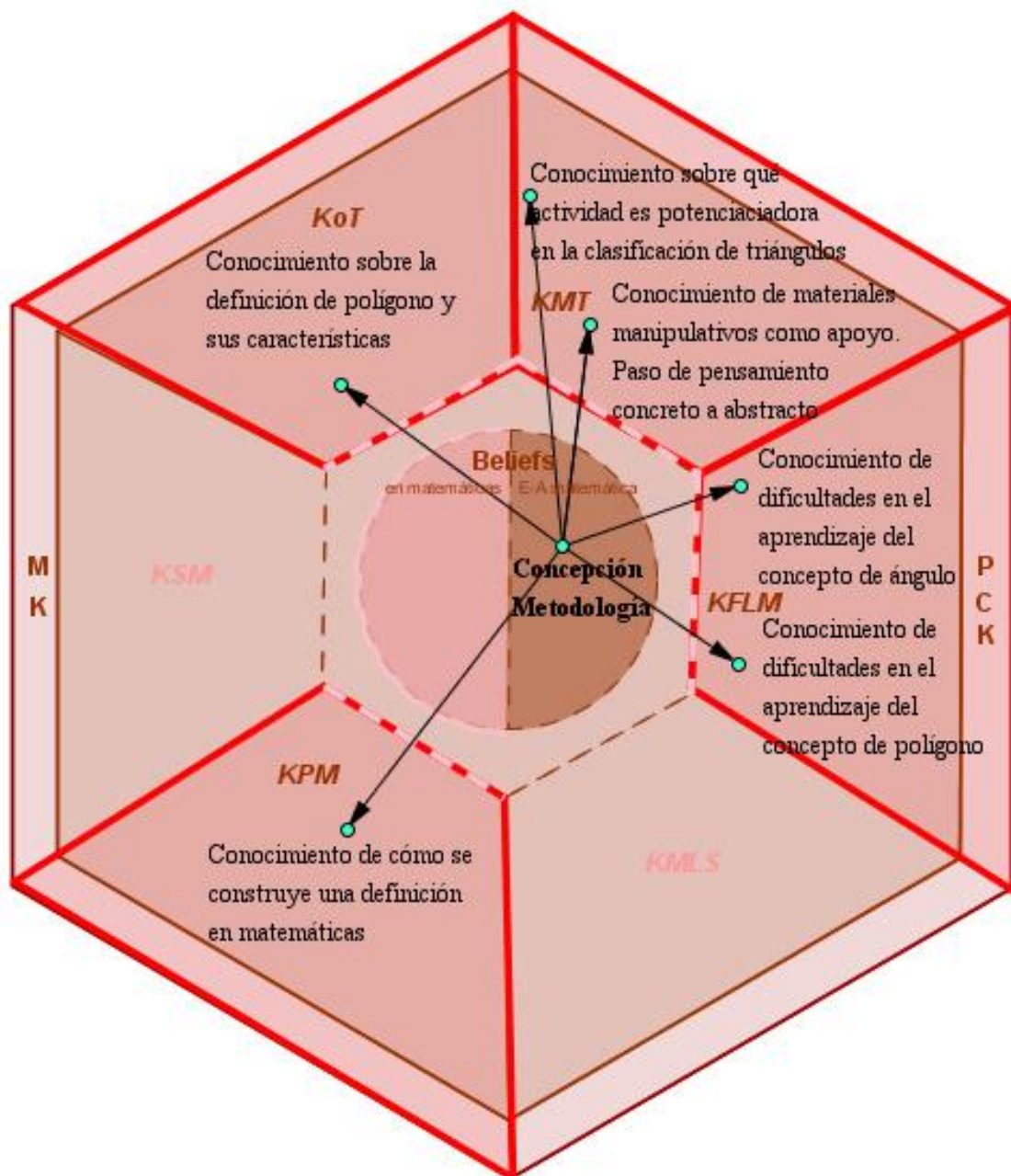


Imagen 13: Relaciones Concepciones (Metodología) - Subdominios de MTSK de la maestra

#### IV.1.1.3 Concepción del aprendizaje

Para la maestra, el aprendizaje es considerado como un constructo social, ya que los alumnos son fuente de información y, en su interacción con otros miembros del grupo, posibilitan que puedan superar dificultades y convertirse en el centro del proceso de Enseñanza-Aprendizaje.

El papel que le otorga al alumno al comienzo de la unidad didáctica es primordial, puesto que permite al alumno observar las diferentes figuras con las que están trabajando, estableciendo conjeturas sobre qué es un polígono y qué no lo es,

siguiéndole a esa clasificación una comprobación matemática y una generalización adecuada para el resto de figuras. Este conocimiento que está trabajando Inés es un proceso que puede ser extrapolable a otros contextos diferentes donde el alumno va a necesitar de esos conocimientos matemáticos.

Cabe mencionar que este aprendizaje se produce por las investigaciones que han sido planificadas por la maestra, es decir, existe una intencionalidad por parte de Inés de que se aprenda de determinada manera, puesto que es primordial para que el aprendizaje se produzca.

Un aspecto a resaltar de la institucionalización del aprendizaje, es el hecho de que son los propios alumnos los que realizan el esfuerzo de tomar conciencia y explicitar qué han aprendido, aunque finalmente se remitan a los libros de texto para comprobar que contenido trabajado es el que se refleja en él. Parece que la maestra entiende qué primero debe ser la comprensión y después la memorización (Barrantes y Blanco, 2006, en alumnos para formación inicial). También podemos relacionar este aspecto con su conocimiento sobre qué contenidos matemáticos se requieren enseñar en ese grado escolar, puesto que las clasificaciones de los triángulos deben ser aprendidas en ese momento escolar.

Siguiendo con el anterior aspecto, la *importancia argumentativa* es un factor importante y reiterativo en las sesiones, puesto que la expresión por parte del alumnado de sus ideas y sus argumentaciones y justificaciones son consideradas dentro del propio proceso de aprendizaje. La importancia de que sea la expresión correcta y precisa parte del conocimiento que la maestra tiene sobre la utilización del lenguaje correcto en este contexto matemático, y es tomada como parte del proceso de aprendizaje. Esto se puede observar en V1, cuando indica a los alumnos que escriban lo aprendido y su posterior puesta en común. Para la maestra, las argumentaciones se deben llevar a cabo en cualquier afirmación que se realice, siendo el aula un ámbito en el que se enseñe a argumentar lógicamente (Crespo, 2005).

Existe una interacción constante entre la maestra y el alumno (Restrepo Becerra, 2010), puesto que la maestra es quien entiende la enseñanza desde esa perspectiva, y su conocimiento de lo que requiere cada situación hace que el trabajo de aula se intensifique, siendo el papel del maestro como un dinamizador entre los intereses y la estructura mental de los alumnos y de la matemática que pretende trabajar.

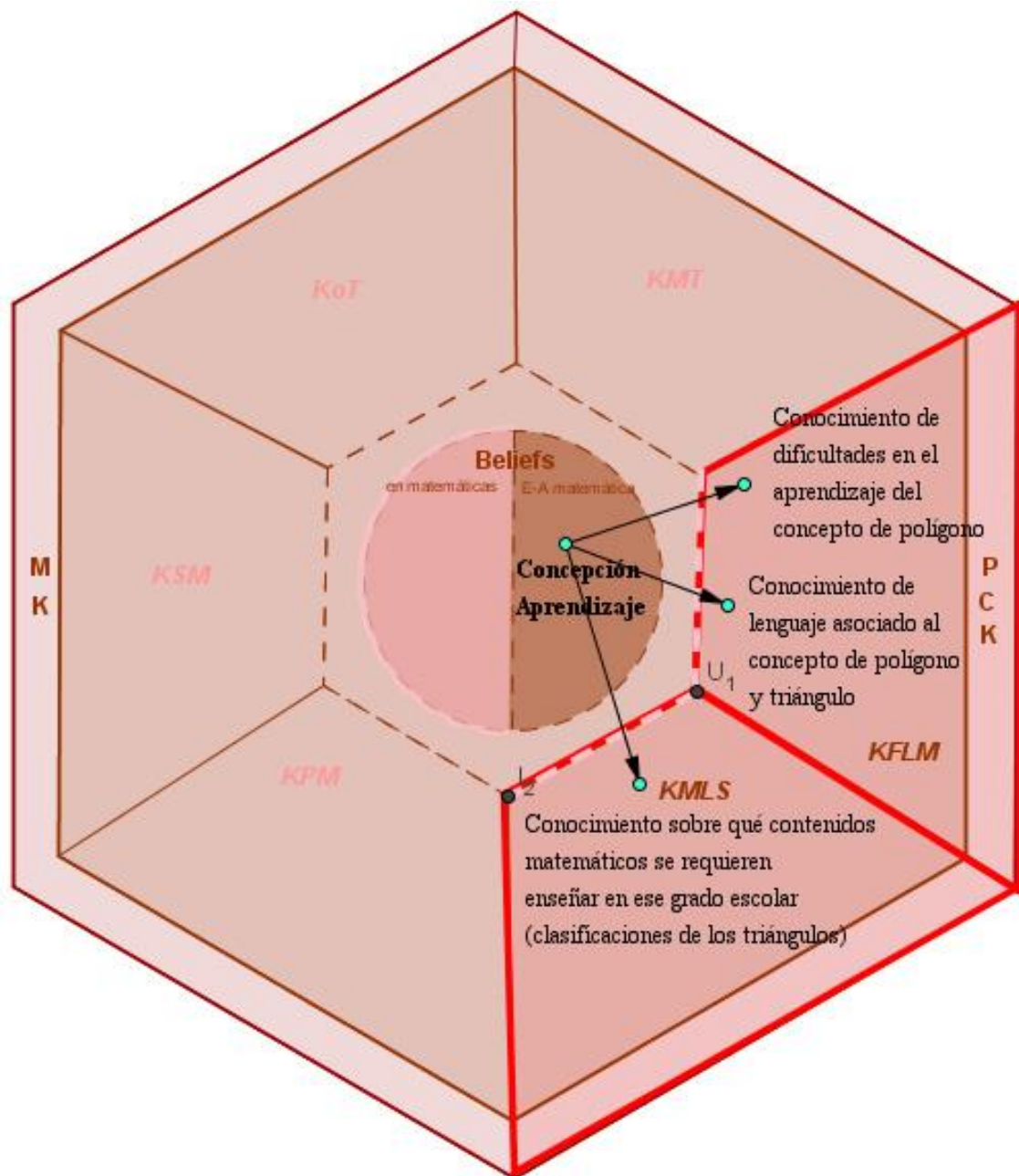


Imagen 14: Relaciones Concepciones (Aprendizaje) - Subdominios de MTSK de la maestra

#### IV.1.1.4 Papel del alumno

El papel que adquiere el alumno a lo largo de las sesiones es como agente que critica los conocimientos que se movilizan en el aula, dando sus argumentos, intercambiando diferentes puntos de vista con sus compañeros y, en general, reflexionando sobre el proceso que se está trabajando. Para la maestra es primordial que el alumno tome conciencia de qué y por qué está aprendiendo, este papel que le otorga tiene que ver con su visión del proceso de E-A en el que su conocimiento de ambos aspectos está

interaccionando. Es más, incluso el alumno condiciona directamente el diseño didáctico, como podemos observar en V1, puesto que ellos son los que deciden qué definición de polígono es la aceptada por el grupo. El estudiante asume parte de la responsabilidad del control sobre su aprendizaje (Graent, Hiebert y Wearne, 1998).

Este interés por parte de la maestra de que el alumno sea consciente de lo que hace y para qué, encontramos que está relacionado con la mayoría de conocimientos (tanto matemáticos como didácticos), siendo un aspecto a considerar en las relaciones establecidas entre distintos conocimientos. Esto podemos observarlo en V2, donde, preguntando a los alumnos por los elementos que componen los triángulos, quiere movilizar una actitud crítica ante las informaciones que se movilizan en el aula, y es su conocimiento sobre la forma de proceder ante el objeto matemático (definición de polígono), lo que determina ese papel principal, no sin ello evidenciar un conocimiento acerca de los errores que conlleva la construcción propiamente dicha.

Por otro lado, el alumno interviene constantemente en el aula y sus aportaciones son consideradas por Inés en todo momento, llegando en ocasiones a utilizar su conocimiento sobre las dificultades asociadas, por ejemplo, a los triángulos en posición no estándar. En este ejemplo, es a raíz de la utilización de un triángulo en posición no estándar y la intervención del alumno preguntando sobre si es o no un triángulo, cuando la maestra manifiesta su conocimiento sobre la valoración de hacer enfrentar a los estudiantes con situaciones poco habituales como la descrita, puesto que cuestiona las suposiciones del alumno, pidiendo explicaciones, y consensua lo entendido con el grupo, lo cual nos proporciona una imagen de sus conocimientos.

Esta situación anteriormente descrita tiene influencia en su conocimiento sobre el diseño de actividades, puesto que, por ejemplo en V7, vemos cómo al introducir los cuadriláteros los sitúa en posiciones no estándar, creando así en el alumno una variedad rica de ejemplos.

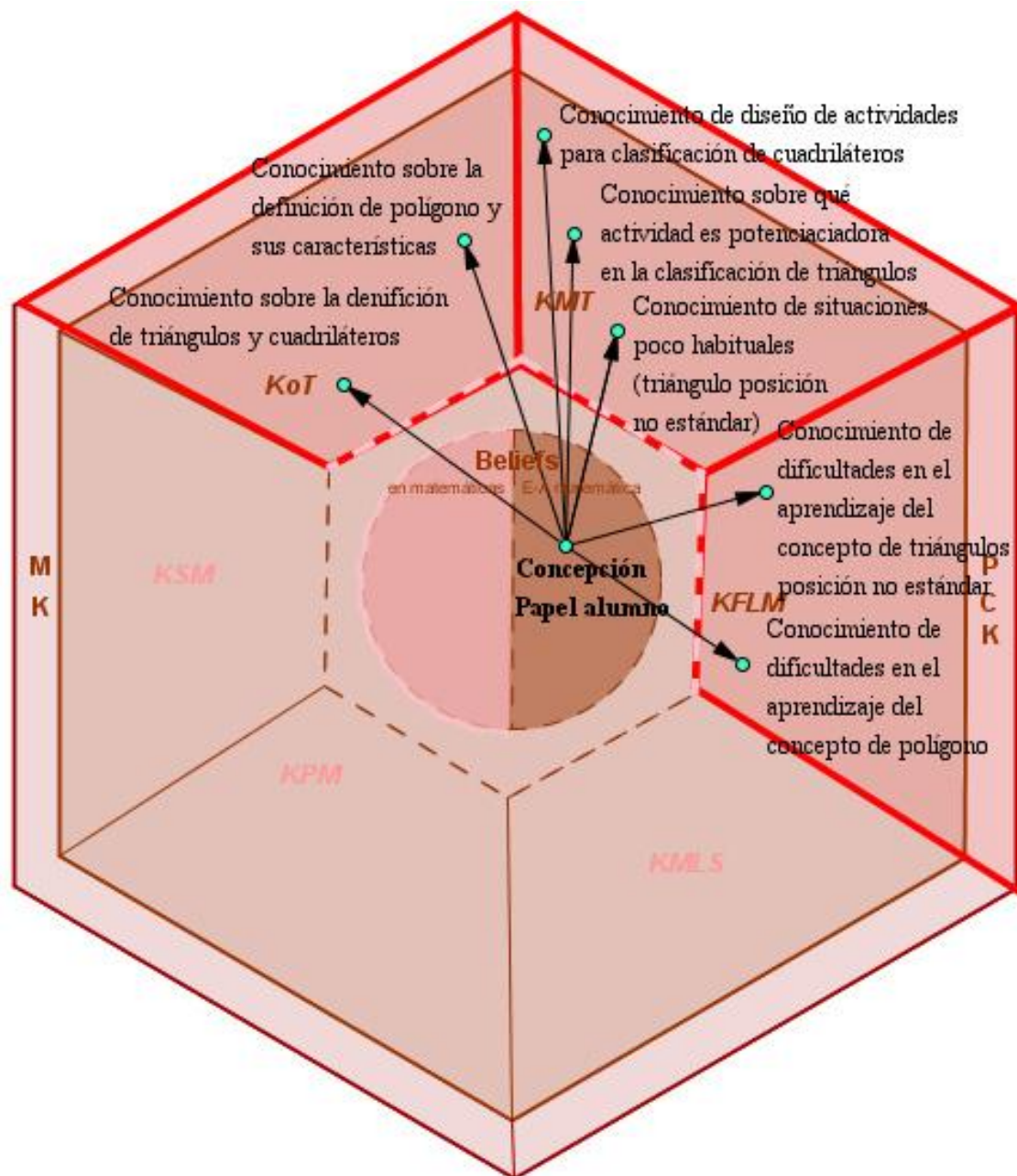


Imagen 15: Relaciones Concepciones (Papel del alumno) - Subdominios de MTSK de la maestra

#### IV.1.1.5 Papel de la maestra

Según lo descrito en los anteriores apartados, el protagonismo de Inés en las sesiones es como organizadora de las informaciones que se movilizan en el aula (Grant, Heibert y Wearne, 1998). Se observa que sus intervenciones van destinadas a aportar cuestiones de conocimientos, como por ejemplo cuando introduce la actividad de la clasificación de los triángulos, reconduciendo las situaciones o completando y precisando algunos aspectos esenciales para el trabajo de aula. En esas aportaciones es cuando observamos su conocimiento sobre el tema, cómo entiende la matemática escolar o qué errores

quiere corregir a los alumnos, es decir, está potenciando la reflexión y el desarrollo de estrategias para que los alumnos asuman responsabilidad a la hora de juzgar la adecuación de sus ideas, jugando así un papel determinante en el proceso de enseñanza (Lezama, 2003).

Por otro lado, esta concepción podemos relacionarla con su conocimiento sobre cómo se aprende, pues utiliza en varias ocasiones los aprendizajes anteriores y las experiencias propias de cada uno. Esto podemos verlo cuando trabaja los poliedros en V1, o cuando hace referencia a la similitud de la construcción de la definición de simetría-polígono. Estos contenidos están determinados por su conocimiento y cuando introduce la actividad cuestiona a los alumnos sobre sus ideas previas.

Otro aspecto a destacar de la maestra como movilizadora de la información, es cuando pregunta a los alumnos sobre el número mínimo de lados para construir un polígono. La maestra está pretendiendo que el contenido trabajado sea relevante desde un punto de vista conceptual, puesto que intenta motivar el estudio de los triángulos en los alumnos (Gellert, 2000, con estudiantes para maestro).

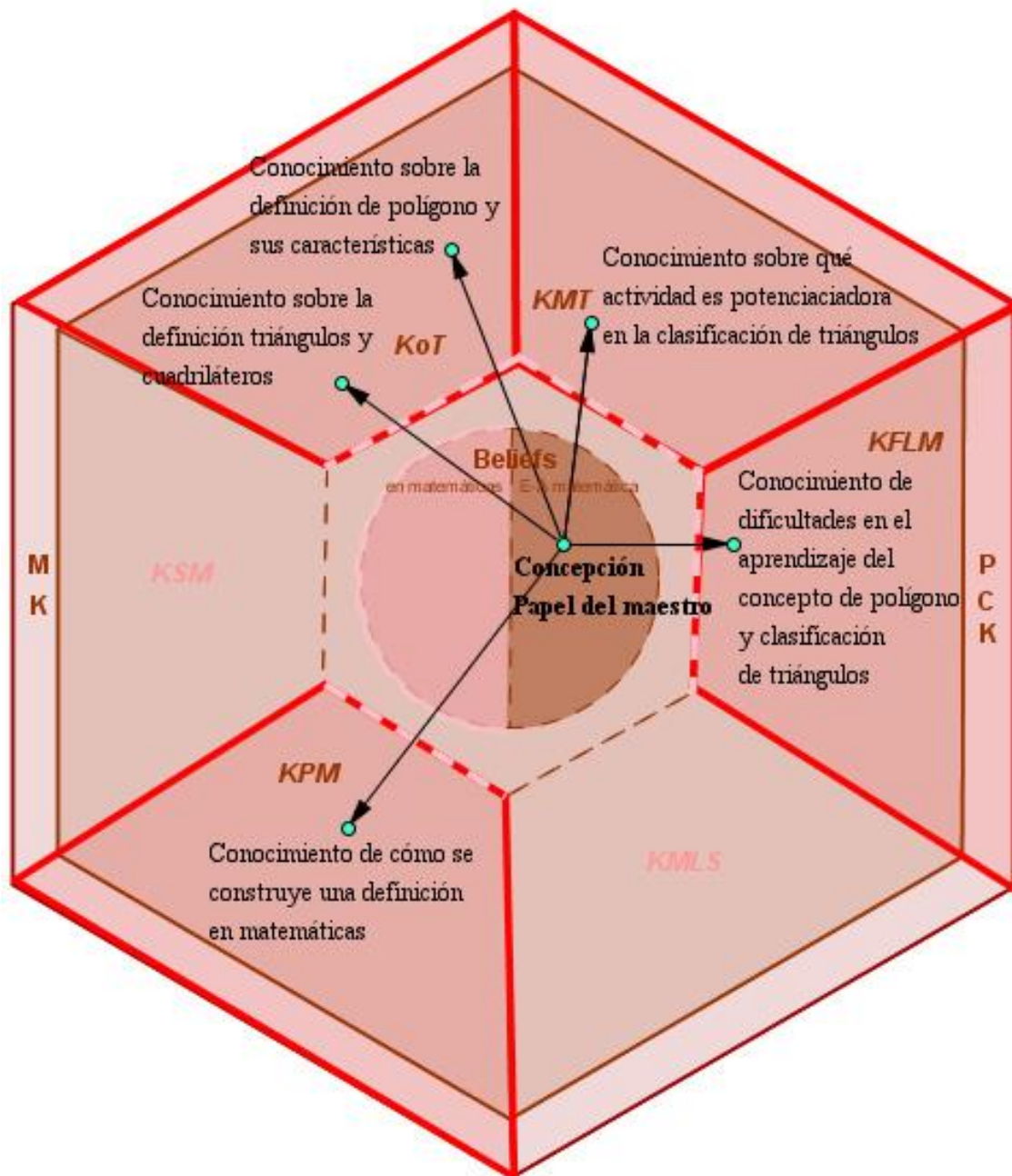


Imagen 16: Relaciones Concepciones (Papel del maestro) - Subdominios de MTSK de la maestra

## IV.1.2 Sobre el conocimiento especializado de la maestra

### IV.1.2.1 Dominio de conocimiento matemático

#### IV.1.2.1.1 Sobre el Conocimiento de los Temas (KoT)

El análisis de este subdominio se centra en los *qué* y *por qué* de los contenidos escolares que se trabajan desde un punto de vista matemático. Estos conocimientos están vinculados a otros subdominios del conocimiento especializado del profesor, por lo que

en algunos casos, se hará mención a ellos. A continuación se desglosan las evidencias de conocimiento que asignamos a este subdominio siguiendo el esquema de categorías descritas en el Marco Teórico y que se han evidenciado en su práctica docente.

***Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático.***

A lo largo de las sesiones, la maestra manifiesta su conocimiento de las propiedades y elementos de los polígonos, de manera fundamentada, que le sirven para poder corroborar la definición dada por los alumnos, este conocimiento es el pilar sobre el que se trabajan las sesiones posteriores, puesto que sobre dicha definición se suceden el resto de actividades y limitaciones cuando se aplican a las clasificaciones de figuras planas. Podemos afirmar que conoce qué es una definición y cuáles son sus características (orden, precisión, entre otros) (Carreño, y Climent, 2010).

Según van desarrollándose las sesiones y se profundiza cada vez en aspectos más concretos, van emergiendo diferentes conocimientos como por ejemplo en V3, cuando manifiesta conocer qué es necesario para construir los triángulos isósceles en cuanto a la longitud de los lados y cómo están dispuestos. Este conocimiento, nos hace entender que el fundamento tras la afirmación es su conocimiento de la propiedad de la desigualdad triangular.

Con respecto a sus conocimientos sobre los ángulos (la suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ , y no solo para determinados casos; la superposición de los ángulos interiores de un triángulo sobre un ángulo llano, dará como resultado este último y es invariante; la amplitud del ángulo no la determina el arco dibujado; o la utilización del grado como medida angular), nos muestra cómo de importante es trabajar ese conocimiento para ella, puesto que además de conocer qué es un ángulo y qué tipos hay, nos manifiesta una comprensión fundamentada de las propiedades asociadas a éstos.

Aunque consideramos que Inés posee otros conocimientos asociados a este tema matemático, y sobre las propiedades de éstos, son estos conocimientos básicos sobre los que reposa su práctica docente. Existen otros indicadores que hemos podido evidenciar, pero que son complementarios a estos grandes aspectos que hemos señalado anteriormente.

#### **IV.1.2.1.2 Sobre el Conocimiento de la estructura matemática (KSM) Conocimiento de la simplificación de un contenido matemático**

Esta categoría nos especifica las conexiones donde se relacionan los contenidos enseñados con contenidos abordados en niveles anteriores. En nuestro caso, Inés muestra un conocimiento en V1 donde establece relaciones entre los conceptos de las formas planas y tridimensionales, así como el papel que juegan las formas planas en la composición de los objetos tridimensionales. Esta conexión entre ambos aspectos geométricos parte de la aproximación a la Geometría a través de objetos reales y tridimensionales iniciada en etapas anteriores, lo que supone realizar un tratamiento intuitivo y exploratorio del espacio y de los objetos que rodean a los alumnos.

#### **IV.1.2.1.3 Sobre el Conocimiento de la práctica matemática (KPM) Prácticas ligadas a la Matemática General**

En nuestro caso, la maestra nos manifiesta que conoce las condiciones necesarias para establecer el concepto de polígono; posee el conocimiento de qué es una definición, y cómo se construye.

En la construcción del concepto de polígono, la maestra uso su conocimiento de la práctica matemática similar a cuando trabajó el concepto de simetría.

#### ***Prácticas ligadas a una Temática en Matemáticas***

Esta categoría del conocimiento, tiene que ver con cómo la maestra utiliza una práctica, en este caso, la construcción de la circunferencia para justificar que una circunferencia posee  $360^\circ$ . Para ello, recurre a la explicación de cómo se construyen los ángulos rectos a partir de dos rectas secantes perpendiculares, donde cada parte del corte, da como resultado  $90^\circ$ ; cómo los alumnos han trabajado los ángulos llanos como dos ángulos rectos de  $90^\circ$ , sigue con la misma lógica de construcción, y afirma que una circunferencia posee esa característica.

Esta forma de proceder está relacionada con cómo es su argumentación matemática y cómo usa diferentes procedimientos para ello, por ejemplo, en V7 observamos que la medición y la superposición son usadas como procedimientos de comprobación matemáticos, puesto que aunque ambos aspectos sirven para intentar comprender el mismo concepto matemático, está usando dos formas de justificar su razonamiento.

### **IV.1.2.2 Dominio de conocimiento didáctico del contenido**

#### **IV.1.2.2.1 Sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)**

##### ***Conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático***

En nuestro caso, la maestra usa diversos recursos, por ejemplo la trama de puntos es usada como ayuda al dibujo por parte de los alumnos, y para eliminar posibles obstáculos que se les planteen al realizar una actividad de esas características. Aunque no se realiza un uso profundo de este recurso, sí es evidenciado que conoce diferentes limitaciones acerca del material, como por ejemplo, el grosor de los puntos utilizados como vértices, ya que limita el punto de origen del segmento.

Otros materiales que la maestra utiliza y usa para ejemplificar y aclarar aspectos de los triángulos, es el transportador de ángulos. Podemos afirmar que la maestra conoce que, este material utilizado, potencia la visión dinámica de los conceptos geométricos que está trabajando.

##### ***Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático***

El conocimiento que manifiesta acerca de las diferentes potencialidades, limitaciones y las repercusiones de comenzar la enseñanza por unas determinadas actividades, se manifiesta, por ejemplo, cuando problematiza la actividad de encontrar polígonos con el número menor de lados para conseguir con ello trabajar las elementos y propiedades de éstos; conoce que va a repercutir en cómo se va a enseñar este aspecto matemático. Utiliza esta misma forma de actuar cuando propone la clasificación de triángulos en V4.

El conocimiento acerca de cómo afrontar las dificultades expresadas por los alumnos es de gran relevancia en todas las sesiones, puesto que, como se ha mencionado anteriormente, el peso de cómo se desarrolla la docencia recae principalmente en el alumno, por lo que aprovechar estas intervenciones (sobre todo las erradas) para crear un conocimiento en el alumno, es una constante en su forma de enseñar.

#### **IV.1.2.2.2 Sobre el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)**

##### ***Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático***

El conocimiento manifestado de la maestra sobre los errores, obstáculos y dificultades asociados al proceso de aprendizaje, del concepto de polígono y de clasificación de triángulos, se evidencia a lo largo de la mayoría de las sesiones. Un ejemplo de este tipo de conocimiento es el que manifiesta la maestra en V1, en el que los alumnos creen que los lados curvos son un elemento que definen los polígonos, por una confusión con respecto a la comprensión de que es un elemento definitorio del concepto.

Además, la maestra conoce las características que podrían utilizarse como ventajas o potencialidades aprovechables para el aprendizaje, asociados a la naturaleza de la matemática de un contenido particular. Por ejemplo, cuando la maestra explicita, en V3, a los alumnos que deben de dibujar en la trama de puntos triángulos diferentes y en posiciones diferentes, lo cual potencia el trazado de triángulos distintos y la identificación y clasificación de éstos.

### ***Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático***

Estos conocimientos son los que más asiduamente se manifiestan por parte de la maestra, puesto que la interacción de los estudiantes con el contenido es elevada durante la mayoría de las sesiones. Aquí podemos encontrar que la maestra conoce las dificultades a la hora de clasificar triángulos atendiendo a sus lados o ángulos; la posición de los triángulos en horizontal-vertical, entre otros..

Otros de los aspectos a destacar es el conocimiento de las características del proceso de comprensión de los alumnos sobre el lenguaje asociado a cada concepto. El esfuerzo de la maestra porque los alumnos usen una terminología correcta en relación con el concepto tratado en clase, es de especial importancia. Por ejemplo, cuando la maestra, en V3, sabe identificar la dificultad de un alumno al referir que un ángulo es “más agudo” que otro. Inés desde su conocimiento acerca de la importancia de la correcta expresión matemática de un concepto, aboca a los alumnos a utilizar correctamente todos los conceptos, elementos o procedimientos que se utilizan para desarrollar la unidad (Restrepo Becerra, 2010).

Un aspecto a concretar de su conocimiento es su interés de que los alumnos trabajen los ángulos ampliamente, esto podemos verlo, por ejemplo, cuando la maestra exige que marquen el ángulo al que se está refiriendo, puesto que los alumnos están teniendo

dificultades con este contenido matemático, o por ejemplo, con las dificultades asociadas a identificar el ángulo con la amplitud del arco o con lo que encierra el interior del arco.

#### **IV.1.2.2.3 Sobre el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)**

##### ***Conocimiento de las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico***

El conocimiento de las expectativas de la maestra condiciona la unidad didáctica. La maestra espera que los alumnos aprendan el concepto de polígono, los ángulos y la clasificación de figuras planas en ese determinado nivel escolar. Por ejemplo, cuando trabaja el concepto de arco del ángulo en V6, ya que en el libro de texto existe dicho concepto.

##### ***Conocimiento de la secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar***

La maestra manifiesta conocer los conocimientos que tienen los alumnos para aprender un nuevo contenido, y lo que aportará este en el abordaje de las clasificaciones de triángulos. Por ejemplo, cuando la maestra manifiesta, en V3, que para construir ángulos rectos, se requiere de un conocimiento de cómo se deben de cortar los segmentos, ya que fue un concepto tratado en el tema anterior.

## **IV.2 Conclusiones en relación con los objetivos planteados en el estudio**

Comenzaremos examinando los Objetivos específicos de esta investigación que corresponden a identificar, detectar y comprender el conocimiento matemático especializado del maestro de Educación Primaria, así como las concepciones sobre Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas, y las relaciones entre ambas.

El primer objetivo específico de esta investigación consiste en: *Identificar y comprender elementos de los distintos subdominios del MTSK de la maestra en relación con la enseñanza de polígonos, así como las posibles relaciones entre dichos subdominios.* A partir del análisis detallado de los datos, identificamos componentes de conocimiento para cada subdominio del modelo MTSK. Podemos afirmar que los conocimientos de la maestra, se destacan especialmente en tres subdominios y sus relaciones: el

conocimiento de los temas matemáticos (KoT), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), al igual que en el trabajo de investigación de Rojas (2014) para el estudio de maestros de Educación Primaria.

Respecto al conocimiento del contenido matemático, identificamos que la maestra conoce los conceptos y procedimientos asociados al trabajo con polígono, y concretamente, a la clasificación de figuras planas. Estos conocimientos están en continua interacción con los otros subdominios, y es un aspecto destacado de su quehacer como docente ya que juega un papel muy importante en su práctica, en los aspectos que trabaja, o las decisiones de profundizar en un tema concreto como en el caso del concepto de ángulo. Esta profundización en diferentes elementos del tema hace que manifieste un amplio campo de conocimientos.

Respecto de su conocimiento didáctico del contenido matemático se evidencia que la puesta en práctica de la perspectiva de resolución de problemas es la principal fuente de trabajo con la que la maestra pretende enseñar. De este modo, las dificultades que percibe en esta unidad le hacen tomar conciencia de las limitaciones que los alumnos pueden tener sobre los conceptos que están trabajando. Un claro ejemplo de ello, es el problema de la horizontalidad, o los ejemplos prototípicos de figuras planas. Estas dificultades, son esperadas por la maestra, y su resolución abarca desde usar materiales como apoyo a su enseñanza, hasta utilizar elementos para una geometría más dinámica (superposición de ángulos), o la clasificación de los triángulos permitiendo la movilidad para clasificarlos. Su conocimiento del aprendizaje no es solo cuestión de definiciones e imágenes que los alumnos tienen que aprender. Plantea situaciones de enseñanza en las que la construcción geométrica es un pilar fundamental.

Los otros subdominios de conocimiento, aunque no existan tantas manifestaciones como a los descritos anteriormente, son fundamentales. Un ejemplo de ello es cómo su conocimiento de la práctica matemática influye en toda la unidad didáctica, puesto que la importancia y cómo organiza el proceso de la construcción de la definición de polígono, es un reflejo de su práctica matemática.

Podemos afirmar que existen diferentes relaciones entre los subdominios como hemos explicado en el apartado anterior. Al igual que en Flores-Medrano et al. (2014) se plantearon algunas relaciones entre subdominios (KFLM-KMT, KoT-KPM, KoT-

KFLM o KoT-KMT). Estas relaciones nos han servido como pilar fundamental para comprender la especialización del conocimiento de la maestra. En nuestro caso, nos hemos ayudado del siguiente objetivo específico para poder encontrar dichas relaciones.

Consiste en: *Detectar las concepciones sobre Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas y su relación con los subdominios del conocimiento especializado para la enseñanza de la matemática de la maestra.* La idea de que las concepciones guíen el análisis en el sentido de que se presente una concepción determinada y se conecte luego con elementos de conocimiento de los subdominios, de modo que esas conexiones o relaciones nos ayuden a entender cómo se pone en la acción esos conocimientos, nos ha permitido comprender el conocimiento de una manera más completa, esto nos ha dado un elemento de reflexión sobre la naturaleza de ellas.

Por último, el objetivo *Obtener una visión integrada del MTSK de la maestra (comprensión de los subdominios inspirada por el conocimiento (del investigador) de las concepciones de aquella),* Ha sido un referente en esta investigación, puesto que siempre hemos pretendido no perder la visión integrada del conocimiento que la maestra ha manifestado en el aula. Aun habiendo tenido que utilizar instrumentos que parcelan el conocimiento profesional y las concepciones de la maestra de manera analítica, hemos encontrado que la riqueza de dichas manifestaciones nos capacitaban para comprender los subdominios de conocimiento.

Estos objetivos específicos dan respuesta al objetivo principal de investigación: *Identificar y comprender el conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas de una maestra de primaria respecto de la enseñanza de polígonos,* siendo de especial relevancia el estudio de ambos aspectos al unísono.

Una vez concluida la justificación de los diferentes objetivos alcanzados, queremos hacer un inciso sobre la diferencia de este estudio con la investigación de Climent (2005). Como hemos mencionado en el apartado II.4.1 los resultados obtenidos de la investigación llevada a cabo por Climent, nos invitaron a profundizar en este caso, en dicho apartado se especificaban los cambios que había tenido la maestra Inés durante el periodo estudiado, realizando un informe sobre su desarrollo profesional. En este estudio inicial de Climent, el conocimiento era estudiado como una componente más, dividiéndolo en conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido. Nuestra investigación ha sido como tomar “una fotografía” dentro de dicho desarrollo,

queriendo destacar principalmente el conocimiento profesional y las concepciones de la maestra de manera profunda y detallada. Podemos afirmar que hemos obtenido una mejor comprensión de dichas componentes, llegando a niveles de detalle que no se alcanzaron en el estudio inicial, siendo de especial relevancia para los investigadores, puesto que se han obtenido resultados acerca del conocimiento profesional dentro de este tema matemático de manera minuciosa. Este aspecto nos sirve también para destacar el valor del modelo teórico MTSK, y el instrumento CEAM y la relación entre ambos.

### **IV.3 Limitaciones del estudio y futuras líneas de investigación**

En este apartado se presentan diversas limitaciones que hemos tenido a lo largo del desarrollo de la investigación, así como las futuras líneas de investigación.

Las limitaciones que hemos tenido han sido las siguientes:

- Estudiar el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas es la línea de trabajo que motiva esta investigación, esto nos llevó a centrarnos únicamente en la observación directa del aula. Esto conllevó que nuestro interés estuviese en comprender este conocimiento puesto en acción, sin embargo, han existido diversas dudas cuando pretendíamos identificar las componentes del conocimiento especializado. Para nosotros poder completar si la maestra era consciente de su conocimiento, o conocer si sus conocimientos coinciden con los inferidos en nuestro análisis, hubiera sido un aspecto complementario a la investigación para la comprensión del conocimiento. Este proceso no fue posible concretarlo, porque la maestra ya no ejerce activamente.
- El contexto teórico en el que se ha desarrollado esta investigación ha sido el modelo MTSK. Como partícipe del desarrollo teórico de este modelo, ha sido posible que nuestra visión acerca del conocimiento profesional haya estado sesgada por la construcción del mismo. Una de las limitaciones que hemos encontrado, con el uso del modelo en Educación Primaria, ha sido que los subdominios de conocimiento matemático han sido difíciles de evidenciar en el aula. No sabemos si por la naturaleza de éstos o por el caso de la investigación.

Dentro del abanico de diferentes aspectos que se pueden analizar del conocimiento profesional del profesor, el estudio de la gestión del aula de la maestra como aspecto complementario a esta investigación hubiera sido un aspecto interesante, puesto que la maestra desde su conocimiento, gestiona los alumnos y es una organizadora de lo que ocurre en clase.

Como finalización de este estudio planteo diferentes aspectos a considerar para posibles futuras investigaciones.

Nuestro interés por el estudio de los maestros ha sido un elemento clave en la realización de esta investigación. Esto puede ser debido a mi formación inicial, por lo que me planteo, como investigador, ¿cómo podríamos estudiar el conocimiento especializado de los maestros durante su formación inicial?

Otro de los diferentes aspectos que me he planteado ha sido la siguiente: ¿Puede un concepto darse desde la educación infantil hasta la universidad, según su grado de dificultad?

Pensamos que valorar el papel del profesor debe conllevar a estudiar el conocimiento que necesita para su actividad diaria, haciéndose fundamental comprender, caracterizar y conocer la naturaleza del conocimiento del profesor.

Estas preguntas, quedan abiertas para siguientes investigaciones que tengan como interés el seguir caracterizando el conocimiento del profesor de matemáticas.

## Referencias

- Abelson, R. (1979). Differences between belief systems and knowledge systems  
*Cognitive Science*, 3, 355-366.
- Aguilar, A. (2011). Conocimiento Matemático para la Enseñanza, la actividad pedagógica y social, y la comunicación promovida. Estudio de caso de dos maestras. En Carrillo, J. (coord.), *Trabajos Final de Máster IEAC 2007-2010*. Huelva. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Azcárate, P. (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Suma*, 25, 23-30.
- Azcárate, P., y Cardeñoso, J. M. (1994). La naturaleza de la matemática y su influencia, problema fundamental de la Didáctica de la Matemática. *Investigación en la Escuela*, 24, 79-88.
- Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education*. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, East Lansing.
- Ball, D. L. (1990a). The mathematics understanding that prospective teachers bring to teachers education. *The Elementary School Journal*, 90, 449-466.
- Ball, D. L. (1990b). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division, *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 132-144.
- Ball, D. L. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. En J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching* (Vol. 2, pp.1-48). Greenwich, CT: JAI Press.
- Ball, D. L., Charambous, C., Thames, M., y Lewis, J. M. (2009). RF1: Teacher knowledge and teaching: viewing a complex relationship from three perspectives. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, H. Sakonis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1) (pp. 121-125). Thessaloniki (Grecia): PME.

## Referencias

- Ball, D. L., Hill, H. C., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *Journal of American Educator*, 14-46.
- Ball, D. L., Lubienske, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed.) (pp.433-456). New York: Macmillan.
- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.
- Ball, D. L., y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.). *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex.
- Ball, D. L., y Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, y D. Schifter (Eds.). *A research companion to principals and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ball, D.L., y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. Oldenburg, Alemania.
- Barrantes, M., y Blanco, L. J. (2006). A study of prospective primary teachers' conceptions of teaching and learning school geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 411-436.
- Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open university press.
- Baxter, J., y Lederman, N.G. (1999). Assessment and measurement of pedagogical content knowledge. En J. Gess-Newsome, y N.G. Lederman (Eds.). *Examining Pedagogical Content Knowledge: The Construct and its Implications for science education* (pp. 147-161). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic.

- Blanco, L., Mellado, V., y Ruiz, C. (1995). Conocimiento Didáctico del Contenido de Ciencias y Matemáticas y Formación de Profesores. *Revista de Educación*, 307, 427-446.
- Blumer, H. (1969). *Symbolic Interactionism. Perspective and Method*. Englewood Cliffs: N. J. Prentice Hall.
- Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C., Underhill, R. G., Jones, D., y Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 194-222.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Brown, C.A., y Borko, H. (1992). Becoming a Mathematics Teacher. En D.A. Grouws (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 209-239). New York: Macmillan.
- Cantoral, R., y Farfán, R.M. (2003). Mathematics Education: a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, 53(3), 255-270.
- Carreño, E., y Climent, N. (2010). Conocimiento del contenido sobre polígonos de estudiantes para profesor de matemáticas. *PNA*, 5(1), 11-23.
- Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva.
- Carrillo, J. (2010). Building mathematical knowledge in teaching by means of theorised tolos. En K.Ruthven y T. Rowland (eds.) *Mathematical knowledgein teaching*. New York: Springer.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.). *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.

## Referencias

- Carrillo, J., Contreras, L. C., y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, y I. Segovia (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada, España: Comares.
- Chinnappan, M., y Lawson, M.J. (2005). A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 197-221.
- Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*, Doctoral dissertation. Michigan: Proquest Michigan University. [www.proquest.co.uk](http://www.proquest.co.uk).
- Climent, N., y Carrillo, J. (2002). Ejemplificación de una propuesta formativa: el uso de situaciones de primaria en la formación inicial. En L.J Blanco, y L.C. Contreras (Eds.), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente* (pp. 119-180). Extremadura, España: Universidad de Extremadura.
- Cohen L., y Manion L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla. (Traducción de Francisco Agudo López de la obra original de Cohen L. y Manion L. (1989). *Research Methods in Education*, 3rd. Ed., Routledge).
- Contreras, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje*. Tesis doctoral: Universidad de Valencia. España.
- Cooney, T.J., y Shealy, B.E. (1994). Conceptualizing teacher education as field of inquiry: theoretical and practical implications. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.) *Proceedings of the eighteenth International Conference for PME, Vol II*, pp. 225-232. Lisboa.
- Crespo Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa (Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática)*, 7(23), 23-29.

- D'Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas e el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica, 11*, 150-164.
- Davis, B., y Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 293-319.
- Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*, Madrid: Centro de publicaciones del MEC y Ed. Labor.
- Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.
- Ernest, P. (1988). The Epistemological Basis of Qualitative Research in mathematics education: A Postmodern Perspective. En A.R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education*, (pp. 22-39). Reston, Va: National Council of teachers of Mathematics.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: The Falmer Press.
- Escudero, D., y Carrillo, J. (2014). Knowledge of features of learning mathematics as part of MTSK. En S. Oesterle, C. Nicol, P. Liljedahl, y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME38 and PME-NA36* (pp. 306). Vancouver, Canada: PME.
- Escudero-Ávila, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de Secundaria*. Tesis de doctorado inédita. Huelva, España: Universidad de Huelva.
- Estepa, J. (2000). El conocimiento profesional de los profesores de Ciencias Sociales. En Pagés, J.; Estepa, J. y Travé, G. (Eds.) *Modelos, contenidos y experiencias en la formación profesional del profesorado de Ciencias Sociales*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Referencias

- Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 521-544.
- Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. En: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 24, pp. 94-116.
- Even, R., y Tirosh, D. (2008). Teacher knowledge and understanding of students' mathematical learning and thinking. En L. D. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman, y D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 202-222). New York: Routledge.
- Fennema, E., y Franke, M.L. (1992). Teachers' knowledge and Its Impact. En D.A. Grouws (Eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 147-164). Reston, Virginia: NCTM.
- Figueiras, L., Ribeiro, M., Carrillo, J., Fernández, S., y Deulofeu, J. (2011). Teachers' advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: a response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics*, 31(3), 26-28.
- Flores, E., Escudero, D., y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of Specialised Content Knowledge. *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education*. Antalya, Turquía: ERME.
- Flores, E., Escudero, D.I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.
- Flores, P. (2008). El algoritmo de la división de fracciones. *Épsilon*, 70, 27-40.
- Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)*. Tesis de doctorado inédita. Huelva, España: Universidad de Huelva.
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de

- matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, y M.A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Montes, M., y Carrillo, J. (en prensa). ¿Cómo se relaciona el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las matemáticas con su entendimiento sobre los Espacios de Trabajo Matemático? *Actas del IV Simposio de Espacios de Trabajo Matemático*.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Gellert, U. (2000). Mathematics instruction in safe space: Prospective elementary teachers' views of mathematics education *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(3), 251-270.
- Gess-Newsome, J. (1999). Secondary teachers' knowledge and beliefs about subject matter and their impact on instruction. En J. Gess-Newsom y N. G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp.51-94). The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Gess-Newsome, J., y Lederman, N. G. (1999). *Examining pedagogical content knowledge*. The Netherlands: Kluwer Academic publishers.
- Grant, T.J., Hiebert, J., y Wearne, D. (1998). Observing and teaching reform-minded lessons: What do teachers see? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(2), 217-236.
- Grossman, P. (1989). A study of contrast: Sources of pedagogical content knowledge for secondary English. *Journal of Teacher Education*, 40, 24-32.
- Hill, H., Rowan, B., y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, 42 (2), 371-406.
- Hill, H., Sleep, L., Lewis, M., y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. What Knowledge matters and what evidence counts? En F. J. Lester

## Referencias

- (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Charlotte: Information Age Publishing.
- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de Fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.) *Práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar. (pp. 295-384).
- Jonnasen, D.H., Ambruso, D.R., y Olesen, J. (1992). Designing a hypertext on transfusión medicine using cognitive flexibility theory. *Journal of Educational Hypermedia and Multimedia*, 1 (3), 309-322.
- Jonnassen, D. H., Ambruso, D. R., y Olesen, J. (1991). Designing a hypertext on transfusion medicine using cognitive flexibility theory. *Journal of Educational Multimedia and Hypermedia*, 1 (2).
- Kilpatrick, J., Swafford, J., y Findell, B. (2001). (Eds.). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, D.C: National Research Council. National Academy Press.
- Kinach, B. M. (2002). A cognitive strategy for developing pedagogical content knowledge in the secondary mathematics method course: Toward a model of effective practice. *Teaching and Teacher Education*, 18, 51-71.
- Kinchin, I.M., Hay, D.B., y Adams, A. (2000). How a qualitative approach to concept map analysis can be used to aid learning by illustrating patterns of conceptual development. *Educational Research*, 42(1): 43-57.
- Klein, F. (1933). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* [Elementary mathematics from a higher viewpoint]. Berlin: Springer.
- Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Thousand Oaks: Sage.
- Leinhardt, G., y Smith, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology*, 99, 247-271.
- Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav, México.

- Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproductibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado, Cinvestav, México.
- Lincoln , Y.S., y Guba, E.G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Beverly Hills, Ca: Sage.
- Llinares, S., y Sánchez, V. (1998). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional. En L. Rico, y M. Sierra (Ed.), *Primer simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 13-24). Zamora: SEIEM.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marks, R. (1990). *Pedagogical content knowledge in elementary mathematics*. Unpublished doctoral dissertation, Stanford University, Palo Alto, CA.
- Merriam, S.B. (1988). *Case Study Research in Education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass Publishers.
- Monteiro, R. (2006). *La Enseñanza de las Ciencias Naturales desde el Análisis Cognitivo de la Acción*. (The teaching of natural science from cognitive analysis of the action). Ph.D. Thesis. University of Huelva, Spain. ISBN: 978-84-92679-83-6 D.L.; H 15-2009.
- Monteiro, R., Carrillo, J., y Aguaded, S. (2008). Emergent theorizations in Modelling the Teaching of Two Science Teachers. *Research in Science Education*, 38 (3), pp.301-319.
- Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M. (2013). MTSK: from Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser, y M. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3185-3194). Antalya, Turquía: ERME.
- Montes, M., Contreras, L.C., y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

## Referencias

- Montes, M., Flores-Medrano, E., Carmona, E., Huitrado, J.L., y Flores, P. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Avila, E. Flores-Medrano, y M. Montes (Eds.). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 9-22). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Montes, M.A. (2014). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso*. Tesis doctoral publicada en <http://goo.gl/nIxbKq>. Huelva, España: Universidad de Huelva.
- Moriel-Junior, J.G. (2014). *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações*. Tesis de doctorado inédita. Mato Grosso, Brasil: Universidade Federal de Mato Grosso.
- Muñoz-Catalán, M.C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Tesis doctoral publicada en <http://goo.gl/OA4ydJ>. Huelva, España: Universidad de Huelva.
- Muñoz-Catalán, M.C., Montes, M.A., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Aguilar, A. (2013). *La clasificación de las figuras planas en Primaria: una visión de progresión entre etapas y ciclos*. Huelva. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(39), 307-332.
- Peterson, P. L., Fennema, E., y Carpenter, T. P. (1991). Teachers' knowledge of students' mathematics problem-solving knowledge En J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching* (Vol. 2, pp.49-86). Greenwich, CT: JAI.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). United States: Information Age Publishing.
- Pinto, J., y González, M. (2006). Sobre la naturaleza conceptual y metodológica del conocimiento del contenido pedagógico en Matemáticas. Una aproximación para

- su estudio. En M. Bolea, M. Moreno, y M. González (Eds.). *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 237-255). Huesca, España: SEIEM.
- Ponte, J.P. (1992). *Concepções dos professores de matemática e processos de formação. Educação Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J.P. Ponte y F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII PME (vol. 1)* (pp. 195-210). Lisboa: Portugal.
- Porlán, R., y Rivero, A. (1998). La naturaleza y organización del conocimiento profesional "deseable" del profesorado. *Dpto. Didáctica de las Ciencias. Universidad de Sevilla*.
- Punch, K. (1998). *Introduction to Social Research: Quantitative and Qualitative Approaches*, London: Sage.
- Restrepo Becerra, J. (2010). Concepciones sobre didáctica de las matemáticas en profesores de educación básica y media. *Horizontes Pedagógicos*.
- Ribeiro, C.M. (2010). *El desarrollo profesional de dos maestras inmersas en un grupo de trabajo colaborativo, a partir de la modelización de sus clases de Matemáticas*. Tesis de doctorado inédita. Huelva, España: Universidad de Huelva.
- Ribeiro, C.M., Monteiro, R., y Carrillo, J. (2009). ¿De qué nos informan los objetivos del profesor sobre su práctica? Análisis e influencia en la práctica de una maestra. En M. J. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 415- 423). Santander: SEIEM
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona/HORSORI.

## Referencias

- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos*. Tesis de doctorado no publicada. Granada, España: Universidad de Granada.
- Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 255-281.
- Santos, L. (2002). A investigação e os seus implícitos: contributos para uma discussão. *Actas del VI Simposio de la SEIEM: Logroño*, pp. 157-170.
- Schoenfeld, A. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (3), 243-261.
- Schoenfeld, A. H. (1998a). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, 4(1), 1-94.
- Schoenfeld, A. H. (1998b). On modelling teaching. *Issues in Education*, 4(1), 149-162.
- Schoenfeld, A., y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En T. Wood, y D. Tirosh (Eds.). *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Sense Publishers.
- Schwab, J.J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury, y N.J. Wilkof (Eds.). *Science, curriculum and liberal education*, 229-272, University of Chicago Press: Chicago.
- Serrano, J. M., y Pons, R. M. (2008). La concepción constructivista de la instrucción: Hacia un replanteamiento del triángulo interactivo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 38, 681-712.
- Serrazina, L. (1998). *Teacher's professional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal*. Tesis doctoral. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in Teaching. *American Educational Research Association*, 15 (2), 4-14.

- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.
- Shulman, L.S., y Grossman, P.L. (1988). *Knowledge growth in teaching: A final report to the Spencer Foundation*. Standford, CA: Standford University.
- Silverman, D. (2008). *Doing qualitative research (2nd edition)*. Thousand Oaks: Sage Publication.
- Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Tesis doctoral publicada en <http://goo.gl/FZPmof>. Huelva, España: Universidad de Huelva.
- Sosa, L., Aguayo, L., y Huitrado, J. (2013). KFLM: Un entorno de Aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). México D. F: Díaz de Santos.
- Sowder, J. T., Philipp, R. A., Flores, A., y Schappelle, B. P. (1999). Instructional effects of knowledge of and about knowledge: A case study. En J. Gess-Newsom y N. G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp.253- 274). The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Stake, R. E. (2000). Case Studies. En Denzin, N.K. y Lincoln, Y. (Eds.), *Handbook of qualitative research* (435-454). Thousand Oaks: Sage Publications.
- Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research. Third edition* (443-166). Thousand Oaks: Sage Publications.
- Strauss, A., y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology: An overview. En N.K. Denzin, y Y. Lincoln, (Eds) *Handbook of qualitative research* (pp. 273- 285). Thousand Oaks, C.A: Sage.
- Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.

## Referencias

- Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York, NY: Macmillan.
- Wilkins, J. L. M., y Brand, B. R. (2004). Change in preservice teachers' beliefs: An evaluation of a mathematics methods course. *School Science and Mathematics*, 104(5), 226-232.
- Williams, C. G. (1998). Using concept maps to assess conceptual knowledge of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 414-421.
- Wilson, S. M., Shulman, L. S., y Richert, A. E. (1987). "150 different ways" of knowing: Representations of knowledge in teaching. En J. Calderhead (Ed.), *Exploring teachers' thinking* (pp. 104-124). London: Cassell.
- Wittrock, M. (1986). *Handbook of research on teaching* (3rd ed.). New York: Macmillan.