Anais do VI SIPEM

15 a 19 de novembro de 2015
Pirenópolis - Goiás - Brasil

SITUACIONES DE INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA Y EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR

Jeannette Galleguillos
Universidad de Valparaíso – Chile
jeannette.galleguillos@uv.cl

Miguel Montes
Universidad de Huelva – España
miguelmontesnavarro@gmail.com

C. Miguel Ribeiro
Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações – Portugal;
Norwegian University of Science and Technology – Noruega
miguel.ribeiro@math.ntnu.no

RESUMO

En este trabajo presentamos parte de los resultados de un estudio en que profesores de matemática que cursaban un programa de doctorado se enfrentaron a la resolución un problema abierto. Los profesores diseñaron diversos modelos de solución y basados en esas soluciones analizamos y discutimos características del conocimiento especializado del profesor para resolver ese tipo de problemas. Asimismo, incidiremos en cómo la discusión grupal, y la evolución de los diferentes modelos de resolución genera oportunidades de que el profesor active, movilice y refuerce diferentes aspectos de su conocimiento especializado.

PALAVRAS-CHAVE: Situaciones de Investigación, Conocimiento Especializado del Profesor, Modelos, Geometría.

ABSTRACT

In this paper we address some aspects of a research project focusing on teachers knowledge and here the participants were a group of PhD students in mathematics education (teachers in different school levels) when they had to solve an open ended problem. From the participants' productions and associated reasoning for solving the problem we discuss and reflect upon teachers' specialised knowledge for solving such problems. We will also reflect about how the group discussion and the evolution of the different models to approach the problems generate opportunities for the teacher to activate, mobilize, and strengthen different elements of his specialized knowledge.

KEYWORDS: Research Situations, Teacher Specialized Knowledge, Models, Geometry.

INTRODUCCIÓN

En los currículos de matemática de diversos países, y en los objetivos y estructura de los estudios internacionales, se torna evidente el rol central atribuido a la resolución de problemas (e.g., Brasil (MEC, 1998); España (MECD, 2014)). Como resultado, por un lado, y consecuencia, por otro, varias son las investigaciones que se han enfocado en cómo los alumnos resuelven problemas, discutiendo, por ejemplo, qué estrategias utilizan, cómo razonan, las distintas formas de argumentación que utilizan, incluyendo las representaciones que hacen (e.g., MAGIERA; VAN DEN KIEBOOM; MOYER, 2011).

Aun siendo fundamental conocer de modo más amplio y profundo las formas en que los alumnos enfrentan la resolución de problemas y cómo los resuelven (¿qué aspectos de su conocimiento matemático movilizan, y porqué?), un foco sólo en los alumnos – asumiendo que éstos son el punto de llegada – permite solamente tener una visión parcial de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje. En ese sentido, asumimos que el conocimiento del profesor se configura como uno de los factores esenciales en y para el aprendizaje de los alumnos (LLINARES; KRAINER, 2006). Así, una más amplia comprensión de cómo los profesores resuelven problemas – en el sentido de conocer qué aspectos de su conocimiento movilizan en esa resolución y en qué enfocan primordialmente su atención – nos permitirá identificar también, por un lado, las situaciones matemáticamente más críticas en que enfocar la formación (RIBEIRO; CARRILLO, 2011) y, por otro, posibles situaciones de "buenas prácticas" (con potencialidad para generar un amplio espectro de discusión) que sean potentes también para la elaboración de tareas para la formación de profesores, teniendo en consideración la especificidad del conocimiento de estos.

Asumiendo estos presupuestos de la importancia de un conocimiento asociado a la resolución de problemas matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y el hecho de que para tornar en realidad una práctica que potencie en los *resolutores* una visión simultáneamente amplia y profunda de la matemática (con las multiplicidades de representaciones y sus conexiones) se torna esencial posibilitar que los propios profesores sean confrontados con un conjunto de situaciones de la misma naturaleza que se espera puedan facultar a sus alumnos (e.g., MAGIERA; VAN DEN KIEBOOM; MOYER, 2011). En ese sentido, tanto los problemas propuestos en la formación de profesores (tipo, naturaleza, objetivo), como el foco de las discusiones asociadas y las conexiones matemáticas que se potencien (o limiten) son de importancia fundamental en el desarrollo de un conocimiento especializado ideal del profesor para la práctica. Así, la formación de profesores ha de tener en consideración la especificidad de dicho conocimiento para la actuación docente, asumiendo el conocimiento matemático especializado del formador de profesores una importancia esencial (e.g., MELLONE; JAKOBSEN; RIBEIRO, 2015). El uso de la expresión "especializado" se usa aquí en el contexto del *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* – MTSK y en ese sentido consideramos el conocimiento del profesor como aquel conocimiento especializado que requiere un profesor de matemática para la gestión del proceso de enseñanza que se sustenta en el desarrollo en los alumnos de una comprensión de lo que hacen y porqué lo hacen teniendo como objetivo, entre otros, proponer y resolver problemas que permitan a que sus alumnos entiendan los por qué de las cosas y desarrollen una red de conceptos que les permita navegar de forma fructífera entre una multiplicidad de representaciones bien cómo hacer conexiones de distinta naturaleza entre tópicos y en un mismo tópico.

La búsqueda de formas que permitan obtener una más amplia comprensión y entendimiento del rol y contenido de dicho conocimiento especializado del profesor nos ha llevado a centrar nuestra atención en situaciones en que profesores se encuentran frente a problemas abiertos. En este documento nos centramos particularmente en el conocimiento especializado que un grupo de profesores (que frecuentaban una asignatura de un programa de doctorado) pone en juego al resolver un problema abierto. Dicho problema corresponde a una adaptación de un problema común en libros de texto de sexto de primaria (en Portugal, Brasil y España), pero su exploración tenía el objetivo de discutir (y permitir ampliar) el conocimiento especializado del profesor (y investigador) asociado al desarrollo de oportunidades de aprendizaje que no se limitaran a conceptos elementales, enfocando también posibles aprendizajes futuros, considerando inclusivamente el hecho de que algunos de los participantes eran formadores de profesores (CARRILLO *et al.*, 2015).

MARCO TEÓRICO

En los últimos 30 años, en el área de investigación en Educación Matemática, han surgido diversos modelos que pretenden caracterizar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, atendiendo a la naturaleza del propio conocimiento. Desde el trabajo seminal de Shulman (1986), que consideraba el conocimiento del profesor formado por el conocimiento de la materia de referencia (SMK), y el conocimiento didáctico del contenido (PCK), se han hecho múltiples esfuerzos, siendo especialmente relevante la conceptualización del conocimiento del profesor propuesta por Ball, Thames y Phelps (2008) – *Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT – y su llamada de atención sobre la especificidad del conocimiento matemático exclusivo a la labor del profesor.

Teniendo como génesis algunos de los resultados de trabajos que se basaban en el análisis de la práctica docente recurriendo al MKT, y el deseo de contribuir de forma más concreta a la comprensión y caracterización del conocimiento del profesor, se está desarrollando, por el grupo de investigación de la Universidad de Huelva (España), el modelo denominado *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* – MTSK (CARRILLO *et al.*, 2015).

En el MTSK se proponen seis subdominios en los que se pueden incluir los distintos aspectos del conocimiento del profesor. Se consideran tres subdominios en el conocimiento de la materia de referencia, en este caso, el conocimiento matemático (MK) y otros tres en el conocimiento didáctico del contenido (PCK). Considerando el contexto especifico de este trabajo (véase epígrafe siguiente) nos enfocaremos esencialmente en los subdominios del MK. Así, en el MK se consideran el *Knowledge of Topics* (KoT), un conocimiento profundo de la matemática objeto de enseñanza y aprendizaje, donde se incluye, entre otros, el conocimiento de propiedades, fundamentos, fenomenología u ejemplos; *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM), que abarcan conocimiento interconectado y cohesionado de las diferentes ideas matemáticas, incluyendo conexiones de tipo interconceptual, de complejización o de simplificación (CARRILLO *et al.*, 2015), que permiten ver la matemática elemental desde una perspectiva avanzada y viceversa; y *Knowledge of the Practice of Mathematics* (KPM), es decir, el conocimiento de aquellas actividades intrínsecamente matemáticas, como pueda ser la modelación, la demostración, o la resolución de problemas.

Asociado al conocimiento matemático especializado ideal del profesor, acá nuestro foco es en la resolución de problemas, en particular problemas abiertos, y en el conocimiento asociado a su resolución. Los profesores necesitan experiencias el mismo tipo de situaciones que deseamos puedan facultar a sus alumnos (e.g., MAGIERA; VAN DEN KIEBOOM; MOYER, 2011). En particular, la necesidad de profundizar en el conocimiento del profesor asociado al generar modelos (e.g., POLYA, 1965) en problemas de geometría asociados a la medición (BILLSTEIN; LIBESKIND; LOTT, 2004) se asume cómo de especial importancia, siendo la Geometría uno de los temas en que alumnos y profesores demuestran dificultades.

Los problemas abiertos, por lo que se les asocia, en términos de procesos y razonamiento, pueden ser también llamados de investigaciones matemáticas, considerando Ponte, Brocardo y Oliveira (2003) que desarrollar esas investigaciones es una poderosa herramienta para la construcción de conocimiento. Cuando referimos investigar no consideramos necesariamente trabajar en un problema de muy difícil resolución, más bien a una situación para la cual el resolutor no tiene una respuesta preparada de antemano y que podrá necesitar de un conjunto diversificado de abordajes. Para la resolución de este tipo de problemas, muchas veces (se basan esencialmente en eso) se requiere un proceso de modelización que permita transitar del lenguaje de la realidad para un lenguaje matemático y finalmente retornar al lenguaje de origen.

El hecho de que no sea fácil para los profesores trabajar con este tipo de problemas, se relaciona con la frecuente imposición de soluciones por parte de los profesores a sus alumnos (aquellas con que se sienten más cómodos – e.g., Borromeo Ferri y Blum (2009)), ya que, por veces, su propio conjunto solución para ese problema tiene uno solo elemento, lo que torna difícil interpretar posibles distintas resoluciones que puedan surgir durante el proceso (e.g., JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014). En ese sentido se torna esencial una discusión de múltiples soluciones/recorridos hechos al largo del proceso, y no solo un foco en la solución final, ya que el alentar la generación de *múltiples soluciones* permite también, entre otros, atender a las preferencias individuales de los estudiantes y discutir, comparando, diferentes soluciones (e.g., BLUM, 2012).

CONTEXTO E MÉTODO

Este trabajo es parte de un proyecto más amplio enfocado en el conocimiento especializado del profesor, su contenido y conceptualización de tareas que permitan activar y desarrollar dicho conocimiento. Acá nos enfocamos en parte de un estudio desarrollado en una asignatura de posgrado (máster y doctorado) de una universidad brasileña. Nuestro estudio de caso se compone de siete profesores de matemática de distintos niveles educativos (incluyendo formadores de profesores), y donde el último autor ha sido el responsable de la asignatura.

Los datos han sido recogidos por grabaciones de audio y video, incluyendo también las producciones de los profesores al resolver y discutir el problema. Los participantes trabajaron inicialmente en dos grupos y posteriormente la discusión de las resoluciones (resultados, procesos y conocimiento envuelto) ocurrió en la clase conjunta. En la puesta en común los resolutores presentaron y defendieron sus procesos y caminos de razonamiento, discutiendo el conocimiento especializado del profesor que consideraban que estaba asociado – entendido también cómo el conocimiento especializado del investigador al enfocar la análisis de los procesos de resolución. El problema inicialmente propuesto fue:

> *Considere que usted quiere hacer un corral para sus animales, y usted tiene una malla de alambre de 80 metros de largo. Si usted quiere que sus animales tengan el mayor espacio posible para andar, ¿cuál es la forma que debe poseer el corral cercado con la malla y por qué? (Registren todos los pasos de razonamiento que efectuaren y justifiquen la respuesta que presentan.)*

En la primera parte del trabajo uno de los grupos se enfoca en la maximización del área de un rectángulo con herramientas del cálculo diferencial (cuadrado) y solo después se dan cuenta de que la pregunta es “abierta” y consideran un modelo de corral circular. El otro grupo trabaja con las figuras geométricas básicas, conjeturando que las figuras geométricas regulares de corral tienen mayor área que las figuras no regulares, y luego llegando al modelo de corral circular (GALLEGUILLOS; RIBEIRO; MONTES, 2015).

Después de las discusiones subyacentes a la resolución de este problema inicial, se propuso la siguiente variante, en la cual nos centramos aquí: *¿Cuál es el mayor espacio si consideramos diferentes condiciones del terreno?*

Esta variante se planteó con la intención de contribuir al desarrollo del conocimiento y la capacidad de los profesores de discutir situaciones “poco habituales o raras”, como ellos mismo las denominaron. La idea esencial fue la de posibilitar que los *resolutores* consideraran posibles variaciones de la forma de terreno que pudiera permitir aprovechar mejor el espacio o las condiciones que condujeran a una imposibilidad de calcular el área máxima (lo que no ocurrió) – posibilitando así también hacer conexiones con el estudio de funciones y problemas de maximización y/o minimización. El análisis se centró en las soluciones y resoluciones desarrolladas, presentadas y discutidas en la puesta en común, lo que permitió identificar distintos modelos de resolución y cómo estos generan oportunidades para la reflexión de los profesores acerca de diferentes contenidos.

DISCUSIONES EMERGENTES DURANTE LA RESOLUCIÓN: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

En este apartado mostraremos los diferentes modelos en orden cronológico, para así mostrar de forma clara la secuencia seguida por los profesores de forma natural, y poder así discutir el conocimiento movilizado (la discusión tiene origen en las producciones de un de los grupos pero ocurre, y se expande, en gran grupo).

Caso 1 – Modelo con un muro: La pregunta siendo discutida cuando una de las profesoras (profesora de enseñanza básica), recuerda que para dividir un terreno rural en parcelas es necesario tomar en cuenta ciertas consideraciones, por ejemplo, si el terreno tuviese un rio, todas las parcelas en la división deberían tener acceso al río. A partir de esta observación nació la idea de incorporar un río al terreno, advirtiendo el grupo que el lado del río no necesita ser cercado por la malla. Posteriormente, la idea del río pasa a ser considerada de manera más general como un muro (Figura 1), con lo que, en la puesta en común, todos los profesores consideraron la hipotética presencia de 'muros' limitantes del terreno.

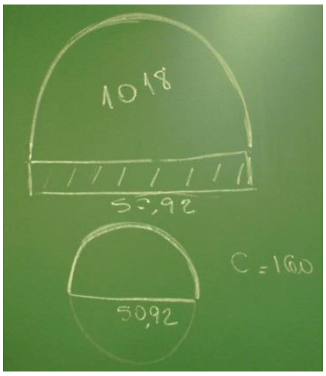

Figura 1: Modelo semicircular de corral con un muro

A partir de la premisa inicial (obtener el área máxima de un corral sin considerar ninguna condición), el grupo construye un modelo semicircular en que la malla es una semicircunferencia de 80 metros y el muro corresponde al diámetro de ella –activación (al menos intuitiva) de conocimientos base acerca del proceso de optimización (KoT).

A continuación de la discusión, se expande la cuestión para otros posibles casos de modelos de corral (*¿Cuál(es) podría(n) ser otro(s) caso(s)*?).

Caso 2 – Modelo con dos muros que se juntan en una esquina: El segundo caso modelado por parte del mismo grupo fue considerar dos muros de 36 metros que se juntan en una esquina (se asumió que los muros forman 90 grados). El grupo consideró utilizar una malla de forma semicircular alcanzando los muros, como se muestra en la Figura 2, denominando este modelo como el modelo del "helado". Este modelo surgió a partir del modelo construido previamente (caso 1), observándose una evolución de un modelo a otro más complejo. En esa evolución observamos el uso del conocimiento de la práctica matemática, al generar soluciones con base en soluciones anteriores.

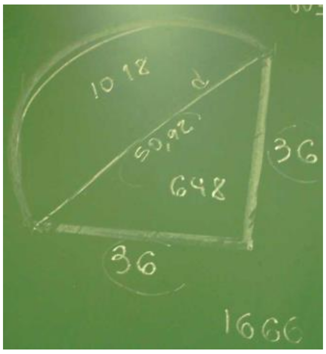

Figura 2: Modelo semicircular con dos muros

Figure 3: Modelo triangular con dos muros

Al ser dibujado en la pizarra, la discusión en el gran grupo se enfocó en la existencia, o no, de otros modelos con un área mayor para el caso de un terreno con dos muros. Esa discusión se basa en las preguntas: ¿qué ocurre si los muros miden más de 36 metros?; ¿por qué estos tienen que medir 36 metros? Después de algunas consideraciones los resolutores encontraron que aun considerando que los muros fueran más largos, el modelo semicircular de corral seguiría manteniendo ese área, pues el largo de 80 metros de malla determina el tamaño del corral. Es necesario remarcar que las discusiones no se centraron en el ángulo entre los muros (90 grados), considerando así los profesores que eso no sería uno de los elementos críticos en el cambio de área.

Por otro lado, al considerar muros mayores de 36 metros, se presentó la idea de un modelo triangular de una hipotenusa de 80 metros de malla. En conjunto calculan los catetos que resultaron ser de 57,15 metros (Figura 3). Uno de participantes intervino dibujando sobre el modelo triangular, un modelo de corral cuadrado de 40 metros de lado. Apareció por tanto la observación de que ambos modelos, el triangular y el cuadrado, tienen la misma área de 1600 metros cuadrados, y observan con sorpresa que estos modelos no superan el área del modelo del "helado", el cual tiene la mayor área. Un comentario fue: "*yo iba a jurar que el cuadrado iba a tener más área que el del helado*".

Observamos como existe una discusión sobre las posibles formas de la figura, basada en el cálculo de áreas de diferentes posibilidades. Esta aproximación al problema activa el conocimiento del profesor sobre el cálculo de áreas de diferentes figuras, permitiéndoles movilizar su conocimiento de los temas (KoT), y la relación de diferentes propiedades de las figuras con la modificación de sus áreas, siendo esto una conexión de tipo intraconceptual (KoT), con posibilidades de extenderse a una de tipo interconceptual (KSM), en caso de incluir aspectos ligados a la optimización, si se deseara hacer sistemático el procedimiento. En todos los casos, existe un conocimiento que parece ser subyacente, de la práctica matemática (KPM) de modelización de la situación del terreno a un contexto geométrico.

Caso 3 – Modelo de tres muros: Posteriormente, los profesores consideraron un modelo cuadrado de tres muros (Figura 4) y, de forma natural, lo mezclaron (ampliado) con el caso del modelo semicircular, construyendo un nuevo modelo (Figura 5) en que el diámetro de la semicircunferencia es el mismo que en los modelos anteriores.

Se observa así, una herencia del modelo que había sido diseñado con anterioridad: se trata del modelo semicircular, que es utilizado para el caso de uno, dos y tres muros. También es necesario hacer constar que los profesores evitaron la representación de otros posibles modelos, siendo necesaria la intervención del profesor para su consideración. En el caso de corral con un muro, los resolutores no consideraron modelos rectangulares, pero pensaron en diseñar un modelo semicircular inmediatamente. Así, los estudiantes usaron el conocimiento de los primeros casos de modelo circular con mayor área y acomodaron esta estructura bajo las nuevas condiciones. Al considerar un modelo con dos muros, se observa la misma evolución de un modelo a otro, en el encaje del modelo semicircular sobre la estructura de los dos muros, dando origen al modelo del “helado”. Frente a las preguntas del profesor, fueron analizadas otras alternativas que habían sido ignoradas para el caso de dos muros, como el modelo triangular y rectangular cuadrado. Antes de la verificación algebraica del área de los casos triangular y cuadrado, los resolutores aún presentaban cierta confianza que estos modelos podrían tener un área mayor que la del “helado”.

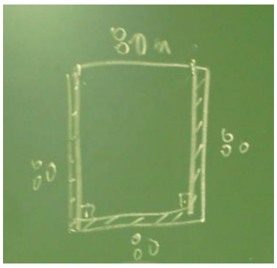

Figura 4 Modelo cuadrado de tres muros

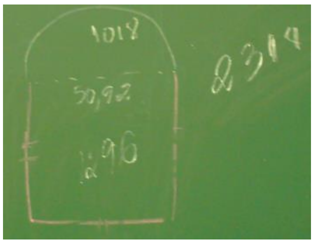

Figura 5: Modelo mixto rectangular-semicircular

Consideramos importante la construcción de diferentes modelos (BLUM, 2012) en el proceso de generación de desarrollo; diferentes modelos sirven como una forma de fundamentar y verificar sus resultados. De esta forma, los modelos previos no son considerados como erróneos, sino como diferentes aproximaciones parciales a la solución, construcciones que permitieron evolucionar de un modelo a un mejor modelo (en el sentido de poseer un área mayor). Con base en las producciones, discusiones y en el conocimiento involucrado, se evidencia el hecho de que el conocimiento especializado del profesor en procesos de resolución de problemas y modelación es rico en complejidad y detalle, y se va desarrollando al largo de las discusiones y reflexiones asociadas. El recorrido de un modelo a otro por parte de los profesores, además de sustentarse en el KoT, ilustra su conocimiento de la práctica matemática (KPM), en este caso el hecho (normal en la resolución de problemas) de usar resultados parciales anteriores para inspirar y generar nuevas aproximaciones a la resolución final.

Las modelaciones desarrolladas, y las aproximaciones a la solución, revelan cómo los resolutores movilizan su conocimiento de los temas relativos a la geometría y aritmética, así como los fundamentos intuitivos de lo que en sucesivos niveles de complejización será la optimización de áreas – lo que se relaciona con su conocimiento de la estructura matemática (KSM). Asimismo, observamos una oportunidad de explorar, profundizar en la necesidad de seguir un proceso con cierto nivel de sistematicidad, para considerar todas las posibilidades, con las consiguientes reflexiones sobre el término "todas" (MONTES, 2015), ligada a la sintaxis matemática (KPM). Del mismo modo, el hecho de trabajar la resolución de problemas abiertos en la formación se traduce en la oportunidad de generar en los resolutores conocimiento, implícito o explícito, de diferentes modelos heurísticos de razonamiento, así como de desarrollar sus capacidades de modelación y de navegar entre distintas representaciones, ampliando la riqueza de su conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM). Finalmente, mostrar la riqueza de la resolución de problemas como forma de tratar las matemáticas en el aula permite inducir en los docentes una actitud abierta hacia los mismos, propia de sus creencias sobre la naturaleza de la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje que se espera poder potenciar un abordaje con sus alumnos de formas similares de desarrollar su conocimiento matemático y argumentativo.

COMENTARIOS FINALES

En este trabajo enfocamos nuestro esfuerzo en el conocimiento matemático específico de profesores frente a un problema abierto. Las producciones de los participantes nos permitieron observar, por un lado, una "herencia" de modelos previamente construidos y, por otro, discutir aspectos de su conocimiento especializado como profesores de matemáticas (y cómo formadores de profesores).

Los diferentes casos de solución del problema permitieron observar una evolución de los modelos, y la utilización de soluciones anteriores en nuevos casos que implicaban diferentes condiciones, así como, aunque no siempre de forma explícita, la complejización del conocimiento involucrado en esa evolución. Algunos elementos que apuntamos con base en este estudio, se refieren a la necesidad de considerar diferentes soluciones a partir de resultados parciales para inspirar y generar nuevas aproximaciones de solución, que fomenten la discusión y fundamentación de los resultados, bien cómo la representación geométrica de los casos cómo forma de auxiliar la visualización asociada a la medida. Esa exploración conjunta de problemas de geometría asociados a la medida (BILLSTEIN et al., 2004), y de la representación correspondiente, permite a los profesores una experiencia que se espera les facilitará la implementación de este tipo de tareas con sus estudiantes (en el sentido de Magiera et al (2011)). Así, y en el marco de la construcción mirada como un proceso de aprendizaje, se reitera que no existe un modelo erróneo, sino formas diferentes de mirarlo, y en particular, una solución que se construye en evolución en base a la herencia de modelos previamente construidos.

En ese sentido, es esencial que como parte integrante del conocimiento del profesor, esté incluido un conocer explícito de la importancia que puede asumir, en las contribuciones al aprendizaje de los alumnos, el hecho de que el profesor asuma un papel participativo en la conducción de la actividad haciendo preguntas e intervenciones para enriquecer el trabajo de los participantes. La finalidad última será el desarrollo del conocimiento matemático especializado del profesor que permita la construcción creativa de nuevos modelos y caminos de resolución por parte de los resolutores. En ese sentido el establecer situaciones problema “no cerrados”, que permitan amplias posibilidades de construcción y modelación se asume cómo un aspecto central. Pero, para poder contribuir a una mejora de la práctica del profesor, se requiere aún que esa centralidad se asuma explícitamente efectiva en la formación de profesores–inicial y continuada.

REFERENCIAS

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, p. 389–407, 2008.

BILLSTEIN, R.; LIBESKIND, S.; LOTT, J. W. *Mathematics for Elementary School Teachers*. Boston: Pearson, 2004.

BLUM, W. Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In: CHO, S. J. (Org.). . *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. ICMI. Seoul, Korea: Springer, 2012. p. 73–98.

BORROMEO FERRI, R.; BLUM, W. Insight into Teachers' Unconcious Behaviour in Modeling Contexts. In: LESH, R. *et al.* (Org.). . *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. ICTMA. New York: Springer, 2009. p. 423–432.

CARRILLO, J. *et al. Un marco teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones, 2015.

GALLEGUILLOS, J.; RIBEIRO, M.; MONTES, M. El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática frente a problemas abiertos. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, México. *Anais*... México: [s.n.], 2015.

JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, v. 19, n. 3-4, p. 135–150, 2014.

LLINARES, S.; KRAINER, K. Mathematics (student) teachers and teacher educator as learners. In: GUTIERREZ, A.; BOERO, P. *Handbook of Research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. [S.l.]: Sense Publishers, 2006. p. 429–459.

MAGIERA, M.; VAN DEN KIEBOOM, L.; MOYER, J. Relationship among features of pre-service teachers' algebraic thinking. In: 35TH INTERNATIONAL GROUP OF THE PSYCHOLOGY OF THE MATHEMATICS EDUCATION, 2011, Ankara, Turkey. *Anais*... Ankara, Turkey: PME, 2011. p. 169–176.

MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos de Ensino Fundamental - Matemática. Brasil*. . [S.l: s.n.]. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>, 1998

MECD-MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE. *Real Decreto 126/2014, por el que se establece la estructura de la Educación Primaria y se fijan sus enseñanzas mínimas*. . [S.l.]: Madrid: España. , 2014

MELLONE, M.; JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, C. M. Mathematics educator transformation(s) by reflecting on students' non-standard reasoning. In: CERME 9, 2015, Prague. *Anais*... Prague: ERME, 2015.

MONTES, M. *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso*. 2015. Doctorado – Universidad de Huelva, Huelva, España, 2015.

POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Ed. Trillas, 1965. (Serie Matemáticas).

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

RIBEIRO, C. M.; CARRILLO, J. Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. In: PME, 2011, Ankara, Turkey. *Anais*... Ankara, Turkey: [s.n.], 2011. p. 41–48.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986.