Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

Memoria para optar al grado de doctor
presentada por:

Eric Flores Medrano

Fecha de lectura: 21 septiembre de 2015

Bajo la dirección del doctor:

José Carrillo Yáñez

Huelva, 2015

Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

Tesis Doctoral

Eric Flores-Medrano

Dirigida por

José Carrillo Yáñez

Huelva, 2015

Esta tesis la dedico a tres mujeres: mi madre de quien aprendí a no darme por vencido y enfrentar con entereza lo que la vida me ponga enfrente; mi esposa que ha sido mi pareja sentimental y de trabajo, mi coautora y árbitro, mi apoyo y guía... y mi hija, ese pequeño motorcito que, aun antes de nacer, aceleró la culminación de este trabajo. También la dedico a un hombre: mi padre, que me enseña el valor de la responsabilidad en el trabajo y la entrega por lo que se hace.

Este trabajo se realizó gracias al apoyo económico otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México mediante una beca de estudios en el extranjero (Conacyt ID 268749).

También se recibió apoyo financiero por parte del programa de Becas Complemento de la Secretaría de Educación Pública de México en los ciclos 2013-2014 y 2014-2015.

Otras fuentes de apoyo económico para la realización de esta investigación provinieron de mi participación en el Centro de Investigación en Didácticas Específicas e Investigación en el Aula (CIDIESIA), en el grupo de Investigación “Formación inicial y desarrollo profesional del Profesorado (DESYM)” con código HUM-168 del Plan Andaluz de Investigación y en los proyectos “Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y razonamiento” (EDU2009-09789EDUC) y “Caracterización del conocimiento especializado del profesorado de Matemáticas” (EDU2013-44047-P) apoyados por los ministerios de Ciencia e Innovación y de Economía y Competitividad de España, respectivamente.

Afortunadamente no todo en el doctorado tiene que ver con el dinero y se pueden agradecer muchas cosas más. Tengo la hipótesis de que en esta sección de la tesis todos los matemáticos educativos nos volvemos un poco poetas (alguien debería hacer un estudio).

Quiero agradecer muy sinceramente a mi asesor, el profesor José Carrillo, por su invaluable compromiso para con este trabajo de investigación. Pepe, gracias por tantas horas que dedicaste a la lectura, análisis, debate y orientación de las ideas que te presentaba. Sobre todo te agradezco el ejemplo con el que formas a tus doctorandos, por la entrega que pones a la investigación y a la educación. Serán inolvidables las largas sesiones de trabajo en las que apenas nos movíamos de un aula a otra y las cortas sesiones de trabajo en las que recorrimos tantos kilómetros en bicicleta.

También agradezco a mi esposa, Dina: gracias por acompañarme en esta aventura, gracias por motivarme a vivir esta aventura, gracias por estar conmigo lejos de nuestro país, eso hizo que me sintiera como en casa mucho más rápido de lo que esperaba. En especial, agradezco que hayamos aprendido a trabajar juntos, supongo que vienen muchas cosas por delante y este ha sido un excelente entrenamiento para afrontarlas.

Al resto de mi familia les doy las gracias por la comprensión, el acompañamiento, el apoyo moral y los ánimos que nos inyectaban cuando los visitábamos presencial y virtualmente (Janus Friis, gracias por lo que te toca en esto), son una parte importante de esta investigación y ahora les toca leérsela.

Este trabajo no habría alcanzado el grado de madurez que tiene ahora de no haber sido por las intervenciones y sugerencias de mis compañeros del grupo de trabajo del Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas con sede en la

Universidad de Huelva. Particularmente quiero agradecer a Nuria, Luis Carlos, Miguel Ángel, Cinta, Diana, Kike, Álvaro, Miguel Ribeiro, José Luis, Nielka, Emma, Pablo, Rute, Mar, Ana, Pepe, Dina (lo malo de hacer listas es que se puede quedar alguien fuera, a ellos también les agradezco y pido disculpas por olvidar ponerlos, hipótesis 2: la tesis mata neuronas, muchas), todos han aportado algo importante a este trabajo y estoy muy agradecido por ello.

También agradezco a los demás colegas del departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de la Universidad de Huelva por el recibimiento, apoyo y compañía que recibí de su parte durante estos cuatro años.

Gracias a los profesores del Programa de Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de México por apoyar mi trabajo durante la estancia académica que realicé durante el último trimestre de 2012, particularmente agradezco a Mario Sánchez por discutir de una forma tan profunda los aspectos que requería en ese momento de la investigación, dedicación que se reflejó en una publicación conjunta.

Finalmente quiero agradecer a Ricardo Cantoral y Rute Monteiro por la revisión final de mi tesis, por el tiempo y esfuerzo dedicado para ello. Gracias por ayudarme a cerrar un ciclo. También agradezco a los miembros del tribunal que, aunque a la fecha en la que estaba escribiendo estos agradecimientos todavía no intervenían como tribunal en el trabajo, estoy seguro de que sus aportaciones serán medulares en mis futuras investigaciones, gracias Luis Carlos, Salvador y Javier.

Huelva, Junio de 2015

Índice

Introducción

Esta memoria doctoral se desarrolla en la línea de investigación denominada Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor de Matemáticas. Está escrita en la modalidad de compendio de publicaciones. Forma parte de un conjunto de trabajos desarrollados en los últimos años en el grupo de investigación que participa en el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva, cuyo objetivo compartido es el entendimiento de los elementos que conforman un núcleo especializado en el conocimiento del profesor de matemáticas.

La introducción está organizada en tres secciones. En la primera describo cómo se fue direccionando mi interés investigativo hacia la línea de investigación en la que está inserta esta tesis. En la segunda explícito las diferentes etapas que se produjeron hasta alcanzar la conformación de un objetivo concreto de investigación. En la tercera explico cómo está organizada la memoria doctoral para atender a la modalidad elegida, de manera que la producción científica refleje en buena medida el desarrollo de mi formación en el doctorado así como los resultados que obtuvimos en las investigaciones parciales que supone cada publicación.

Desarrollo del interés en la línea de investigación del conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas

Entre los años 2010 y 2011 participé en el proyecto *Especialización de alto nivel para la profesionalización docente en las matemáticas de secundaria*. Se trató de un curso de formación permanente a nivel nacional en México organizado por la Secretaría de Educación Pública (Ministerio de Educación) y el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav). Hasta entonces, mi acercamiento a la Matemática Educativa había estado focalizado en la Didáctica del Cálculo y fue en este contexto en el cual se generaron mis primeras preguntas e inquietudes acerca de la formación profesional del profesor de matemáticas. Notaba, por ejemplo, que los profesores estaban muy preocupados por las situaciones socioeconómicas que aquejaban a sus comunidades y estudiantes, pero que, ante preguntas del estilo *¿cuántos ejes de simetría tiene una línea recta?*, *¿cuál es la menor cantidad de elementos con los que se puede definir un cuadrado?*, *¿cuántas formas diferentes hay para definirlo con esa cantidad mínima de propiedades?*... los profesores se sentían atraídos y decididos a trabajar con aspectos matemáticos. Parecía que el hecho de reconocer los temas, de no tratarse de ejercicios idénticos a los que comúnmente utilizan en clase y de notar que sus conocimientos les permitían acceder a contestar esos cuestionamientos, motivaba su interés hacia la búsqueda de respuestas.

Una de las inquietudes iniciales, y que ahora relaciono con mi investigación doctoral, es la búsqueda de un cuerpo de conocimiento que permitiera reconocer el *ser profesor* de matemáticas como una profesión. Una visión influenciada por la práctica tradicional de enseñanza de las matemáticas puede guiarnos a pensar que la función del profesor se restringe a dotar a los estudiantes de conocimientos que les permitan desarrollar técnicas o profesiones variadas y que el conocimiento que requiere dicho profesor es un subconjunto de las matemáticas, cada vez menos genéricas conforme avanza el nivel educativo, empleadas en esas profesiones, aunado a técnicas de manejo de grupo y a habilidades para comunicar de manera efectiva sus pensamientos, lo cual lo posicionaría como un consumidor y administrador de conocimiento de diversas profesiones, pero sin un ente disciplinar propio. Sin embargo, una visión menos tradicional nos lleva a cuestionarnos qué otras cosas necesita conocer el profesor o mejor, de qué forma necesita conocer las cosas el profesor. Ese era uno de mis intereses.

Por otro lado, me enteré de que recientemente una ex-estudiante del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav había realizado el trabajo doctoral Sosa (2011) en la línea del Conocimiento del Profesor de Matemáticas. En este trabajo se utilizó el modelo denominado *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT, Ball, Thames & Phelps, 2008) para analizar clases de Álgebra Lineal y se extrajeron descriptores de conocimiento para cada uno de sus seis subdominios. Este modelo y metodología de trabajo daba respuesta, al menos parcialmente, a algunas de mis inquietudes y me proporcionaba ideas para avanzar en la misma línea.

La convergencia de estas dos circunstancias, por un lado el proyecto de profesionalización y por otro el acceso a un modelo de conocimiento profesional, impulsaron a la determinación de explorar fenómenos relacionados con el profesor de matemáticas que pudieran darme herramientas para aportar al entendimiento y mejora de mecanismos de formación de los profesores de matemáticas.

Elección de los objetivos de investigación

Esta investigación comenzó en el contexto del uso del modelo MKT y con la inquietud de explorar nociones de desarrollo profesional del profesor de matemáticas. El MKT consta de seis subdominios, tres pertenecen al conocimiento de la matemática escolar y tres al conocimiento didáctico del contenido. Por su descripción, fueron dos subdominios los que más llamaron mi atención: el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento del horizonte matemático. El primero me daba información acerca de acciones, interpretaciones y toma de decisiones en las que el conocimiento matemático del profesor se ponía al servicio de fines educativos. El segundo, el conocimiento del horizonte matemático, parecía ser un conocimiento en alguna *frontera* de la matemática escolar o fuera de ella, lo cual me llevaba a pensar en fenomenologías de los conceptos matemáticos y las posibilidades de generar conocimiento a partir de estas.

El primer interés investigativo consistió en observar qué efectos tenía sobre los otros cuatro subdominios el hecho de desarrollar el conocimiento especializado y el del horizonte matemático, lo cual involucraba una idea de alguna especie de relación funcional entre los subdominios. Pretendía diseñar un curso de formación para profesores en ejercicio en el que se desarrollara el conocimiento especializado y el conocimiento del horizonte matemático y se midieran los efectos que ocasionaba esto en el conocimiento común, el de los estudiantes, enseñanza y curricular (todos enfocados en el contenido matemático). Entre las consideraciones para tomar en cuenta estaba lo acotado del tiempo para realizar el doctorado y que el curso de formación se tendría que llevar a cabo en un intervalo de este, lo cual, en coincidencia con Simon (2013), podía ser que no garantizara que se produjera el desarrollo y que, en consecuencia, no pudiésemos observar los efectos que deseábamos analizar. Otra consideración estaba en el propio significado del término *desarrollo*. En el trabajo de Climent (2002) se analizó cómo las concepciones, el conocimiento y la visión del profesor acerca del desarrollo, todo enfocado a la enseñanza de las matemáticas, se relacionaba con el desarrollo profesional de este. En este primer interés investigativo se trataba de un desarrollo profesional específicamente basado en desarrollo de conocimiento, lo cual invitaba a realizar reflexiones acerca de cómo desarrollar el conocimiento, qué aspectos influían al momento de adquirir o transformar conocimiento, cómo se conjugaba un nuevo conocimiento con el ya existente… Estas consideraciones temporales y conceptuales me hicieron transformar el interés de mi investigación.

El segundo interés investigativo fue una focalización del primero: quería saber sobre aquellos elementos que intervenían en el desarrollo profesional del profesor de matemáticas y cómo intervenía el desarrollo de sus conocimientos en ello. Por un lado, el trabajo de Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2007) proporciona un modelo para interpretar el desarrollo profesional del profesor de matemáticas desde una visión cognitiva, lo cual se acercaba a la noción que me interesaba estudiar. Además, el trabajo de Climent (2002) hace mención de cuatro fuentes que intervienen en el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, estas son su experiencia docente, su experiencia discente, su cosmovisión y los conocimientos académicamente adquiridos. Los efectos de estas fuentes se conjuntan en un solo cuerpo de conocimientos, experiencias y visiones que se reflejan en las acciones y toma de decisiones que, además, son mediadas por elementos externos. De este modo, el objetivo aquí planteado requería de tener acceso a información que, dada su atemporalidad con el estudio (la experiencia discente) podía quedarse en el terreno de lo anecdótico, otra que requeriría de una observación prolongada y asumir el riesgo de obtenerla solamente de manera parcial (la experiencia docente), una más que involucraba aspectos mucho más profundos relacionados (aunque no exclusivamente) con las concepciones y creencias del profesor de aspectos incluso desligados de la matemática, su enseñanza y aprendizaje (cosmovisión), y quedando únicamente como fuente con un acceso claro para obtener información lo referente a los conocimientos académicamente adquiridos. Esta dificultad en el acceso a la información para un estudio de corto plazo centró mi atención en explorar elementos de conocimiento del profesor.

Así, el tercer interés investigativo se centró específicamente en analizar algunos aspectos del conocimiento del profesor de matemáticas. Una idea que me permitía no desvincularme completamente de mis intereses iniciales fue explorar aquel conocimiento que el profesor empleaba intencionalmente en clase. Partía de la idea de que sus acciones educativas (centradas en el contenido) tenían de trasfondo una fuerte carga de conocimiento y que, tanto aquello que podíamos observar en una clase como las cosas que evitaba hacer o decir nos proporcionaban información de elementos variados de conocimiento. Por ejemplo, imaginemos una clase de matemáticas en primer año de secundaria. Un profesor está explicando a sus estudiantes la noción de raíz cuadrada y se presenta la siguiente situación:

Profesor (P):	¿Ya has terminado de calcular todos los ejercicios?
Alumno (A):	Sí, bueno, no sé si en este esté bien.
P:	¿Cuál es?
A:	Es que la raíz de -4 no me sale, bueno he puesto ± 2, pero ahí tengo que multiplicarlos cambiados, o sea en lugar de multiplicar los dos positivos o los dos negativos como en los demás ejercicios, aquí tengo que multiplicar $(+2)(-2)$, por eso no estoy seguro.
P:	Claro, porque la definición te dice que debes encontrar un número que multiplicado por sí mismo te dé como resultado el número que estás buscando, en este caso el -4, y al multiplicar $(+2)(-2)$ ya no estás multiplicando a un número por sí mismo.
A:	¿Entonces qué debo hacer?, porque si multiplico $(2)(2)$ o $(-2)(-2)$ me da 4, no -4.
P:	¿Tú dirías que la raíz de -4 no se puede calcular?
A:	Yo no logro encontrarla.
P:	Lo que quería que notaras que la raíz cuadrada de un número negativo no existe, al menos no en los números que conoces hasta ahora, puedes probar con otros casos, solo es cuestión de que le cambies el signo a los ejercicios que sí pudiste resolver y te darás cuenta de que tampoco podrás encontrar su raíz cuadrada.
A:	¿Entonces lo dejo así sin contestar?

Este extracto, aunque inventado, bien podría reflejar una dinámica *real* de clase en la que pueden detectarse acciones y omisiones intencionadas por parte del profesor que nos permiten conjeturar acerca del conocimiento que se refleja a partir de ello:

Para empezar se puede destacar el diseño de la tarea en la cual pone un ejercicio que no es posible resolver con los conocimientos de los estudiantes en ese curso, lo cual refleja consciencia por parte del profesor acerca de cuáles son los temas que sus estudiantes conocen. También podemos suponer que el profesor conoce mecanismos para desestabilizar los conocimientos de sus estudiantes y los efectos que puede producir con ello en el aprendizaje de las matemáticas. Al hacer notar que no existe en los reales raíces para los negativos nos da información acerca de su conocimiento del hecho mismo, de que sabe cuáles son los sistemas numéricos que se conocen en ese grado escolar, posiblemente nos ofrezca información acerca de la idea del profesor sobre posibles confusiones que surgirían si él explicara más a fondo que existe solución en otro sistema de numeración y que por ello omite hacer esto, además, refleja posible conocimiento sobre el alcance de generalizaciones al pedir que prueben con cualquier número negativo (aunque pierde la oportunidad de permitir que el estudiante explore por sí mismo esa propiedad).

Estos conocimientos, algunos evidentes y otros que requerirían de una triangulación de información para verificarlos, son todos extraídos de acciones u omisiones intencionadas. La situación cambiaría si la clase se hubiese desarrollado de la manera siguiente:

Profesor (P):	¿Ya has terminado de calcular todos los ejercicios? Alumno (A): Sí, bueno, no sé si en este esté bien. P: ¿Cuál es?
A:	Es que la raíz de -4 no me sale, bueno he puesto ± 2, pero ahí tengo que multiplicarlos cambiados, o sea en lugar de multiplicar los dos positivos o los dos negativos como en los demás ejercicios, aquí tengo que multiplicar $(+2)(-2)$, por eso no estoy seguro.
P:	A ver, para todos, el ejercicio del inciso d no es posible resolverlo, déjenlo así y sigan con los demás.

Para avanzar en ese objetivo de investigación era necesaria una comprensión profunda del MKT al ser el modelo que se tenía pensado utilizar para examinar conocimiento. Dicho análisis, realizado en conjunto con otros investigadores en formación y debatido con investigadores consolidados, evidenció algunas dificultades en la aplicación analítica del MKT, lo cual dio pie a la conformación de un nuevo modelo para investigar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (la discusión completa la he reservado para el marco teórico de manera que se muestre su conformación). El modelo fue denominado *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK, Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013) y los esfuerzos investigativos de esta tesis han colaborado en su propia conformación. Consideramos que la forma de construcción del modelo hace que este sea dinámico y que permita la incorporación de elementos o la modificación si las evidencias así lo indican. El trabajo de desarrollo del MTSK propició la determinación de los siguientes objetivos de esta investigación:

Objetivo general: Desarrollar en profundidad algunos de los diferentes elementos que conforman el modelo MTSK.

Objetivos específicos:

a) Desarrollar elementos del conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas.
b) Desarrollar elementos del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas.
c) Desarrollar una caracterización para el conocimiento de la práctica matemática.
d) Comprender relaciones entre el conocimiento matemático del profesor y sus concepciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Modalidad de la memoria doctoral

El reporte de esta investigación doctoral fue realizado en la modalidad de Compendio de Publicaciones que, en el reglamento vigente de la Universidad de Huelva (Universidad de Huelva, 2014), establece los siguientes puntos:

Artículo 35.- Tesis doctoral como compendio de publicaciones.

1. Una tesis doctoral se podrá presentar como compendio de publicaciones. Bajo este formato, la tesis doctoral debe estar constituida por el conjunto de trabajos publicados por el doctorando sobre una misma línea de investigación.

2. El conjunto de trabajos constará de un mínimo de tres aportaciones científicas publicadas o aceptadas para su publicación, que habrán de reunir los siguientes requisitos:

a) La aportación científica del doctorando a los trabajos ha de ser significativa y debe estar acreditada por el director de la tesis.

b) El medio de publicación ha de estar incluido en una de las siguientes bases de datos: *Science Citation Index*, *Social Science Citation Index*, *Arts & Humanities Citation Index*. En el caso de que alguna publicación no esté incluida en estas bases de datos, la Comisión Académica del programa de doctorado en cuestión deberá tener en cuenta los criterios de evaluación establecidos por la Comisión Nacional Evaluadora de la Actividad Investigadora (CNEAI), previa justificación por parte del doctorando y del director de tesis del impacto del trabajo.

c) Al menos dos de los trabajos deberán haber sido aceptados para su publicación con posterioridad a la primera matrícula en Tutela Académica por elaboración de Tesis Doctoral. El tercer artículo, si se justifica adecuadamente a la Comisión Académica, podrá haber sido aceptado anteriormente siempre que sea de la temática de la Tesis y se justifique por parte del director de la Tesis.

3. Los trabajos que formen parte de una tesis de compendio de publicaciones no podrán formar parte de otra tesis presentada bajo esta misma modalidad.

4. La memoria de tesis habrá de contener, al menos, los siguientes puntos:

   a) Introducción, en la que se justifique la unidad temática de la tesis y la bibliografía de apoyo.

   b) Objetivos y metodología

   c) Discusión de resultados

   d) Conclusiones

   e) Copia completa de los trabajos, ya sean publicados o aceptados para publicación, en la que conste el nombre y adscripción del autor y de todos los coautores, si los hubiere, así como la referencia completa de la revista o editorial en la que los trabajos hayan sido publicados o aceptados para su publicación, en cuyo caso se aportará justificante de la aceptación por parte de la revista o editorial.

   f) Informe con el factor de impacto de las publicaciones presentadas. En aquellas áreas en las que no sea aplicable este criterio se sustituirá por las bases relacionadas por la CNEAI para estos campos científicos.

Siguiendo estos lineamientos, el reporte de investigación que se presenta en este documento está organizado siguiendo dos líneas argumentales simultáneas de manera que las publicaciones en las que participé durante mi formación doctoral muestren (a) los elementos clásicos de una investigación (objetivos, marco teórico, metodología, resultados, conclusiones) y (b) el desarrollo *cronológico* del propio proyecto de investigación. La bibliografía que fue utilizada para realizar esta memoria doctoral y que también es sustento de las investigaciones que realizamos está citada dentro del cuerpo del documento en los espacios que requerían de su justificación y está referenciada al final del documento. Las investigaciones que hemos colocado íntegramente tienen su propio sistema de citas y las referencias están al final de cada artículo y no aparecen necesariamente al final de la memoria.

En la Tabla 1 se muestra la producción científica que forma parte de esta memoria (están resaltadas aquellas publicaciones que cumplen con el criterio 2 inciso b).

Año-Ubicación	Autores	Título	Fuente
2012 http://goo.gl/zwUvQN	Dinazar I. Escudero Eric Flores José Carrillo	El conocimiento especializado del profesor de matemáticas	Actas de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa
2013 Metodología	Eric Flores Dinazar I. Escudero Álvaro Aguilar	Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK	Investigación en Educación Matemática XVII
2013 M. Teórico	Eric Flores Dinazar I. Escudero José Carrillo	A theoretical review of Specialised Content Knowledge	Proceedings of the 8th CERME
2014 Resultados	José Carrillo Dinazar I. Escudero Eric Flores	El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria	Revista de Análisis Matemático-Didáctico para profesores
2014 http://goo.gl/EzRKkq	José Carrillo Luis C. Contreras Nuria Climent Dinazar Escudero-Avila Eric Flores-Medrano Miguel Montes (Eds.)	Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas	Universidad de Huelva (Colección Material para la docencia)
2014 http://goo.gl/3V19b1	Dinazar I. Escudero Eric Flores-Medrano Nuria Climent José Carrillo Luis C. Contreras Miguel A. Montes Álvaro Aguilar Nielka Rojas	Una perspectiva del conocimiento matemático para la enseñanza del profesor centrada en su especialización: el modelo MTSK	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27
2014 Resultados	Eric Flores José Carrillo	Connecting a mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge through her practice	Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 3
2014 Metodología	Eric Flores Dinazar I. Escudero Mario S. Aguilar	Online mathematics teacher education: main topics, theoretical approaches, techniques and changes in researchers' work	Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 3
2014 M. Teórico	Eric Flores-Medrano Dinazar Escudero-Avila Miguel Montes Álvaro Aguilar José Carrillo	Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK	Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas
2014 M. Teórico	Miguel Montes Eric Flores-Medrano Enrique Carmona José L. Huitrado Pablo Flores	Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones	Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas
2015 Resultados	Leticia Sosa Eric Flores-Medrano José Carrillo	Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato	Enseñanza de las Ciencias

Tabla 1. Producción científica realizada durante el doctorado.

Tal como se muestra en la Tabla 1, estas publicaciones han sido colocadas a lo largo del documento en las secciones de Marco Teórico, Metodología y Resultados con la finalidad de que den sentido y cuerpo a las discusiones que se generaron en la realización del documento. Hemos decidido no contar con una sección de anexos impresa, ya que no requerimos hacer referencia a esta, pero creímos importante considerar como parte de la producción tres publicaciones que no se discuten en el cuerpo del documento (su ubicación es un enlace para ser descargadas desde la web). Dos de ellas son comunicaciones en actas de congreso en las que se presenta el modelo teórico empleado en esta investigación, pero que, por su extensión, hemos decidido emplear un capítulo de libro que aborda esas ideas con más amplitud y que está en el Marco Teórico. La otra publicación con enlace a la web es un libro, material para la docencia en posgrado, en el que participé en la labor de edición. La decisión de mencionarlas como parte de la producción es porque destacan la labor de divulgación del modelo (que es un resultado de esta tesis).

Factor de impacto de las publicaciones seleccionadas

Los tres trabajos que hemos destacado en la Tabla 1 son los que cumplen con el criterio 2 inciso b referente a la tesis por compendio de publicaciones en el reglamento de doctorado de la Universidad de Huelva. En esta sección se justifica los criterios de calidad que se pide para dichas publicaciones.

Las investigaciones presentadas en Flores y Carrillo (2014) y en Flores, Escudero y Aguilar (2014) fueron editadas por la asociación denominada *International Group for Psychology of Mathematics Education*, la cual indexa sus actas en la colección *PME Conference Proceedings*, la cual está incluida en la colección principal de la base de datos de Web of Science. La empresa Thomson Reuters, encargada de dicha base, no calcula el Factor de Impacto para el producto denominado *Conference Proceedings*, sin embargo, las citas que se hacen en estas publicaciones a artículos de revistas indizadas en ISI Web of Knowledge, sí contribuyen en el cálculo del factor de impacto de dichas revistas. En la presentación de su colección de bases de datos[1], la empresa comenta sobre la rigurosidad en la selección de las actas de congresos que ingresan a la colección principal y de las implicaciones de este rigor en la búsqueda de calidad de las publicaciones que ahí se manejan.

Con respecto a la investigación reportada en Sosa, Flores-Medrano y Carrillo (2015a), la revista Enseñanza de las Ciencias está situada en el cuarto cuartil de la colección principal de Web of Science dentro de la categoría *Education & Educational Research*. En el Journal Citation Reports se establece que la última medición del Factor de Impacto es de 0,19.

[1] http://thomsonreuters.com/content/dam/openweb/documents/pdf/scholarly-scientific-research/fact-sheet/wos-next-gen-brochure.pdf

Marco Teórico

Los estudios en la línea del conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas han tenido diversos focos de atención. Por ejemplo, Sánchez (2011) realizó una revisión de literatura para determinar cuáles son los aspectos que se han estudiado en este tema. La revisión abarcó libros especializados, revisiones bibliográficas anteriores, actas de congresos internacionales (ICMI y CERME), artículos publicados en diversas revistas y principalmente en *Educational Studies in Mathematics* y en el *Journal of Mathematics Teacher Education*. Las categorías emergentes fueron (a) concepciones, creencias e imágenes mentales de los profesores, (b) prácticas de los profesores, (c) conocimientos y habilidades del profesor, (d) la relación entre teoría y práctica y (e) práctica reflexiva. Por otro lado, Skott, Van Zoest y Geller (2013) mencionan que las investigaciones del profesor realizadas en los últimos años se han centrado en tres aspectos que son el estudio del conocimiento, de las concepciones y de la identidad.

Con respecto al estudio del conocimiento del profesor existe una larga tradición. Los trabajos de Shulman (1986, 1987) ya hacían una llamada de atención al reconocimiento de diversas naturalezas de conocimiento que se conjugan en la práctica del profesor.

Posteriormente, diversas investigaciones indagaron acerca de cómo se componen esos conocimientos para el caso del profesor de matemáticas (e.g. Ball, Lubiensky & Mewborn, 2001; Llinares, 2008). Tener una base firme acerca de qué conocimientos podría/debería poseer el profesor de matemáticas puede tener implicaciones más allá del propio entendimiento del fenómeno. Por ejemplo, Chapman (2013) señala que, con base en algunos modelos de conocimiento como el MKT de Ball y sus colaboradores (e. g. Ball et al., 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008), ahora se realizan estudios acerca del desarrollo del conocimiento que los profesores deberían mantener o aquel que les hace falta. También señala que hay estudios que investigan la generación comunitaria de conocimiento por medio de la planificación o discusión de lecciones matemáticas en términos de su instrucción, o por medio de la discusión de vídeos de clase, entre otras técnicas, pero donde el foco está puesto en el desarrollo de conocimiento en comunidades.

Este trabajo se desarrolla dentro de un programa de investigación en el que se estudia cuáles son los elementos que conforman el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. El modelo empleado para dicha indagación es el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK). Siguiendo la terminología de Niss (2007) para las funciones de la teoría, empleamos el MTSK en este trabajo como un organizador de las observaciones e interpretaciones que realizamos sobre diferentes facetas de práctica profesional de los profesores participantes en el estudio. Al mismo tiempo, las investigaciones que componen esta memoria pretendían contribuir a la conformación de la teoría que se empleó.

El MTSK es un modelo diseñado para interpretar el núcleo especializado del profesor de matemáticas. Surge como respuesta a algunas dificultades detectadas a partir del trabajo con el MKT y sintetizadas en Carrillo et al. (2013). Estas dificultades pueden ser categorizadas en dos grupos, el primero referente a la difusa delimitación entre subdominios del MKT y el segundo referente al uso del término *conocimiento* con el cual se refieren en ocasiones a acciones que les permite realizar un cierto conocimiento, pero no se dice cuál es ese conocimiento. Por ejemplo, en Ball et al. (2008) se dice que el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK, por sus siglas en inglés) es:

> "el conocimiento y habilidades matemáticas únicas de la enseñanza […]. Un examinen cuidadoso revela que el SCK es conocimiento matemático que típicamente no se requiere para fines ajenos a la enseñanza. En la búsqueda de patrones en los errores de los estudiantes o en dimensionar qué tanto una aproximación no estándar puede funcionar en general […], los profesores hacen un tipo de trabajo matemático que otros no hacen. Este trabajo involucra un tipo misterioso de desempaquetado de las matemáticas que no es necesario- o deseable- en situaciones diferentes a la enseñanza" (p. 400).

Con respecto a la difusa delimitación entre algunos subdominios del MKT, en Flores, Escudero y Carrillo (2013) realizamos un análisis de diversos artículos en los que se ejemplificaba o encontraban evidencias sobre el Conocimiento Especializado del Contenido. Determinamos que había dos tendencias para definir a este subdominio, ambas eran por comparación. La más común es señalar que se trata de un conocimiento puramente matemático que solamente requiere el profesor de matemáticas. La otra tendencia es diciendo que *va más allá* del Conocimiento Común del Contenido, este definido como el conocimiento que posee una persona bien educada en el nivel educativo en cuestión. Tras este análisis encontramos que existe un solapamiento entre las evidencias del conocimiento común y especializado del contenido, quedando a la subjetividad del investigador los criterios para asignar un determinado conocimiento a cada subdominio. También concluimos que, más que tratarse de conocimientos matemáticos especiales para el profesor de matemáticas, lo que muchas veces se describen son situaciones específicas en las cuales el profesor utiliza su conocimiento matemático, y que además requiere del uso de otros conocimientos de naturaleza matemática y no matemática.

Por otro lado, notamos que diversos trabajos que investigan acerca de conocimiento arrojan en sus resultados acciones o situaciones antes las cuales se utiliza conocimiento. Por ejemplo, Foster, Wake y Swan (2014) definen el conocimiento del profesor de los procesos y el currículo como “conocimiento que permite a los profesores seleccionar y secuenciar tareas para facilitar un coherente desarrollo de los procesos y habilidades de los estudiantes” (p. 103). En este caso, se define el conocimiento a partir de su funcionalidad siempre que el profesor lo posea. Y aunque, a mi parecer, tanto el artículo, como los resultados que aporta son muy interesantes, el trasfondo que permite conceptualizar acerca del conocimiento que requiere o utiliza el profesor queda sin atención. Por esta razón, ya que esta investigación se encarga de aportar resultados referentes al conocimiento, en Montes, Flores-Medrano, Carmona, Huitrado y Flores (2014) vimos oportuno establecer cuáles eran las definiciones que adoptaríamos para los términos relativos al conocimiento y que emplearíamos con frecuencia en el trabajo. Este trabajo, además de ayudar a conceptualizar, también refleja el carácter interpretativo de nuestra investigación: no adoptamos un referente que nos indique ni corrección ni la ausencia de conocimiento al observar la labor del profesor; asumimos que, como investigadores, hemos construido nuestro propio referente, pero para fines investigativos decidimos entender que las acciones del profesor están filtradas por sus concepciones y que nuestra labor es identificar cómo su actuar nos permite conceptualizar cada uno de los elementos que deseamos resaltar del modelo.

A continuación se reproduce de manera íntegra las publicaciones Flores, Escudero y Carrillo (2013) y Montes et al. (2014) para dar sustento a lo antes expuesto. Posteriormente se continúa con la exposición del modelo MTSK para complementar el marco teórico de este trabajo.

A THEORETICAL REVIEW OF SPECIALISED CONTENT KNOWLEDGE

Eric Flores, Dinazar I. Escudero, & José Carrillo[1]

University of Huelva, Spain

This work is a bibliographical review of Specialised Content Knowledge from the model of Mathematical Knowledge for Teaching. It offers a discussion of the most frequent definitions for this subdomain. We work with two examples of specific tasks which, according to the authors, require specialised knowledge on the part of the teacher. We identify the essential characteristics of the mathematical knowledge involved in these tasks and contrast these with the features commonly employed to identify specialised knowledge. We conclude with a discussion of the nature of specialised knowledge, which serves as the starting point for several papers by our research group to be presented to this working group.

Keywords: Specialised Content Knowledge, Mathematical Knowledge for Teaching.

INTRODUCTION

What does a teacher need to know to teach mathematics? What mathematical knowledge does the teacher require to teach a specific topic? How and where can teachers use this knowledge in practice? Questions like these have prompted numerous research projects aimed at studying the *ideal* knowledge and skills which a mathematics teacher should possess. In particular, a research group based at the University of Michigan has spent several years working on a scheme which allows them to categorise the typology of mathematical knowledge observed in, and required by, education: Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

MKT refines the map originally put forward by Shulman (1986) into subdomains, thus: the superordinate 'Subject Matter Knowledge' domain is subdivided into 'Common Content Knowledge' (CCK), 'Specialized Content Knowledge' (SCK), and 'Horizon Content Knowledge' (HCK); 'Pedagogical Content Knowledge' is in its turn subdivided into 'Knowledge of Content and Students', (KCS), ''Knowledge of Content and Teaching' (KCT) and 'Knowledge of Content and Curriculum' (KCC). This breaking down of domains into more finely defined sub-categories owes as much to lesson

[1] This article represents part of the studies into teachers' knowledge by the SIDM group (from the Spanish 'Research Seminar into Mathematics Education') based at the University of Huelva, Spain. It comprises the following researchers: José Carrillo (coordinator), Nuria Climent, M. Cinta Muñoz-Catalán, Luis C. Contreras, Miguel A. Montes, Álvaro Aguilar, Dinazar I. Escudero, Eric Flores and Enrique Carmona (University of Huelva), Pablo Flores, Nielka Rojas and Elisabeth Ramos (University of Granada, Spain), C. Miguel Ribeiro, Rute Monteiro and C. Susana dos Santos (University of the Algarve, Portugal), Leticia Sosa and José L. Huitrado (University of Zacatecas, Mexico), and Emma Carreño (University of Piura, Peru).

observation as to reflection on what sort of knowledge teachers should have, and the demands, in terms of mathematical reasoning, intuition, understanding and skill, the profession places upon them (Ball, Thames, & Phelps, 2008).

The aim of this short research is to take a closer look at SCK, and map out the advances made in the field, its nature and the difficulties that arise when it is applied to systematising teachers' mathematical knowledge.

DEFINITION OF SCK

One of the main contributions of MKT, according to its authors, is the identification of knowledge in terms that are purely mathematical and specific to the profession, SCK. This has been largely well received by the research community in that it specifies the teacher's knowledge. However, there are also some drawbacks which make it difficult to observe and analyse.

In this section we present the results of a wide-ranging literature review on what, from the point of view of the definition, is understood by SCK, drawing on the work of various authors who have used MKT in their research, whether seeking a better understanding of this subdomain or aiming to develop it in some way. Our intention is to give an overview of a collection of studies, looking specifically at how the definition has been adapted and developed over time.

Our starting point is the work of Ball *et al* (2008) in which the definition of SCK is predicated on notions of the profession and Common Content Knowledge, a practice followed by many subsequent authors (Hill *et al*, 2008; Delaney, Ball, Hill, Schilling, & Zopf, 2008; Hill, Ball, & Schilling, 2008; Krauss, Baumert, & Blum, 2008; Knapp, Bomer, & Moore, 2008; Carreño, & Climent, 2009; Suzuka *et al*, 2009; Kazemi *et al*, 2009; Markworth, Goodwin, & Glisson, 2009; Rivas, Godino, & Konic, 2009; Godino, 2009; Van, 2009; Godino, Gonzato, & Fernández, 2010; Sosa, & Carrillo, 2010; Ribeiro, Monteiro, & Carrillo, 2010; Castro, Godino, & Rivas, 2011; Herbst, & Kosko, 2012; Rivas, Godino, & Castro, 2012). However, none of these definitions specifies the nature of the knowledge in itself, but rather they all evoke external agencies.

Definitions alluding to professional demands, tend to make reference to the mathematical knowledge and skills unique to education, and which are generally not used in other contexts. Education requires knowledge beyond the pupils' mode of thinking. This implies a particular way of unpacking mathematical knowledge which is not necessary (or even desirable) in other professions (Ball *et al*, 2008).

Great emphasis is placed on the insistence that this kind of knowledge pertains exclusively to the ambit of mathematics teaching, and is not required in other professions. Nevertheless, one might justly ask how it is that we know that a certain kind of knowledge is not required in other professions. Is it necessary perhaps to check what kind of mathematical knowledge is used in each profession?

Fortunately, an indication of how this task might be undertaken is offered by such definitions themselves. The use of the term 'skills' indicates what, until this point, has been lacking in determining the nature of the knowledge involved in SCK. In other words, the definitions of SCK tend to be phrased in terms of what having this knowledge enables one to do: "responding to students' 'why' questions, […] choosing and developing useable definitions, modifying tasks to be either easier or harder" (Ball *et al*, 2008, p. 400), to mention just a few.

Drawing on the work of Rivas *et al* (2012), amongst the skills which can be attributed to this kind of knowledge are selecting and designing class activities, and making representations and giving explanations of curricular items. Suzuka *et al* (2009) emphasise that one skill demanded by SCK is that of interpreting mathematical productions, both those generated by students and those to be found in materials.

From the above, then, it follows that SCK is defined as unique to teachers in that the tasks it allocates to them are indeed specific to mathematics teachers. Nevertheless, it seems to us that there remains the question of whether the mathematical knowledge which allows these tasks to be successfully performed is shared by other professions.

The other tendency which is frequently deployed when defining SCK is comparison with CCK. CCK is defined as the knowledge required in order to solve such tasks as are given to pupils. Other definitions describe it as the knowledge held by a well-educated adult at the educational level in question. Markworth *et al* (2009) symbolically define SCK as "content knowledge needed for the teaching of mathematics, *beyond* the common content knowledge needed by others" (pp. 69). Hence it is knowledge that the pupil may not necessarily learn. Are we to understand 'beyond' in this context as a deeper or amplified kind of CCK? And what if the educational intention was to extend and amplify the knowledge of a topic, with the result that these defining features now formed part of CCK? Is this form of knowing content separate from the way mathematicians usually know mathematics or is some kind of intention required, and hence knowledge of teaching/learning to be so? What benefits are there to separating out mathematical knowledge in this way?

Defining SCK in this way raises the difficulty of clearly demarking what can be considered common knowledge from specialised knowledge. The point at which one shades into the other depends on various factors ranging from general considerations (educational level, the school system) to more specific ones (the teacher's particular intentions).

EXAMPLES OF SCK

By way of illustrating what SCK refers to, in what contexts it is used, and how it is applied, we collated various examples from the literature. These include classroom sequences, or episodes, in particular those in which the teacher has to deal with difficult or unexpected circumstances, which show how the teacher interacts with mathematics.

In this section we offer a full analysis of two of the most representative examples that have been employed to illustrate SCK. The examples are reported in the literature as specific educational tasks. So as to identify as explicitly as possible the purely mathematical features required to solve these tasks, we will go through each task step by step, unpacking the information.

In the first example (Figure 1), a subtraction problem is given along with a typical algorithm for solving it and two potential errors that pupils might make. The mathematical knowledge involved in the analysis of procedures leading to the detection of these errors (one of a teacher's specific task) is identified as SCK.

Subtraction by regrouping

The subtraction is presented:

$$\begin{array}{r} 307 \\ -\,168 \\ \hline \end{array}$$

Most readers will know an algorithm to produce the answer 139, such as the following:

$$\begin{array}{r} 307 \\ -\,168 \\ \hline 139 \end{array}$$

Many third graders struggle with the subtraction algorithm, often making errors. One common error is the following:

$$\begin{array}{r} 307 \\ -\,168 \\ \hline 261 \end{array}$$

Consider another error that teachers may confront when teaching this subtraction problem:

$$\begin{array}{r} 307 \\ -\,168 \\ \hline 169 \end{array}$$

Figure 1: Subtraction by regrouping. (Ball et al., 2008, pp. 396-397)

The authors offer the following commentary:

> …in the subtraction example […], recognizing a wrong answer is common content knowledge (CCK), whereas sizing up the nature of an error, especially an unfamiliar error, typically requires nimbleness in thinking about numbers, attention to patterns, and flexible thinking about meaning in ways that are distinctive of specialized content knowledge (SCK). In contrast, familiarity with common errors

> and deciding which of several errors students are most likely to make are examples of knowledge of content and students (KCS). (pp. 401)

This example offers a description of SCK which leads us to wonder about the terms employed: What does 'sizing up the nature of an error' refer to? What is meant by an 'unfamiliar error'? What does it mean to have 'nimbleness in thinking about numbers' or 'flexible thinking about meaning'? What can we say about going beyond the answer to the subtraction? Indeed, we could ask ourselves what can be identified as purely mathematical here?

To answer this last question, let us go through the mathematical arguments leading to the identification and characterisation of the origin of each of the errors set out in the example.

Regarding the first, the algorithm is misapplied such that the smaller number is subtracted from the larger one in each of the three columns, resulting in error as the pupil fails to grasp the importance of the relationship between the top and bottom rows in the subtraction, as Ball *et al* (ibid) make clear. The way of thinking which leads to this error is the understanding of subtraction as the 'distance' between two numbers: the fact that '1' appears at the foot of the column with '7' and '8', '6' at the foot of the column with '0' and '6', and '2' at the foot of the column with '3' and '1' strongly suggests that this was the operation applied to these numbers.

In the second example, the source that Ball *et al* (ibid) suggest for the error is a failure to recognise the positional values of the numbers at the moment of regrouping. To this we can add the consideration that according to the algorithm, zero is associated with an absence of value, so that it cannot *lend*, forcing it to borrow from the '3'. The knowledge which leads to this interpretation is the *statements* about 0 and the use of the subtraction algorithm.

In both examples, ample understanding is required about the mechanics of subtraction by regrouping works, and particularly the expanded notation of numbers.

According to the reasoning of the authors, we can say that the kind of knowledge identified above (the use and justification of the subtraction algorithm, numerical notation, subtraction as the 'distance' between two numbers, the statement about zero) would fall within SCK, given that it refers to knowledge put to use by the teacher in providing or evaluating mathematical explanations of how such errors occur, in addition to recognising and analysing them. However, we consider that the mathematical elements brought to light in the detailed analysis of the task do not provide sufficient evidence to guarantee that such knowledge is exclusive to mathematics teachers. What is more, all the knowledge involved could be categorised as Common Content Knowledge, depending on the researcher's beliefs regarding how the pupil should understand the topic in question.

This example allows us to see one of the most repeated difficulties in the literature, the lack of a clear distinction between CCK and SCK.

Another example which is a particular challenge for mathematics teachers consists in coming up with a story which represents the division of fractions, such as $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$. We will focus on the second part of the activity suggested by Suzuka *et al* (2009), in which the teacher has to analyse a story which apparently contains errors in the set up, but which has the correct answer (Figure 2).

Story Problem

I have two pizzas. My friend eats one quarter of one of the pizzas and then I split what's left evenly between two of my other friends, Dan and Heather, and each person gets three and a half pieces of pizza.

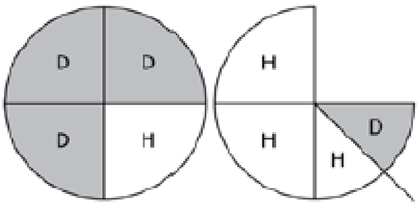


Figure 2: Incorrect story problem to represent $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$. (Suzuka et al., 2009, p. 11)

As mentioned above, one of the skills considered representative of SCK is that of interpreting mathematical productions – whether by pupils, other teachers or written material – something that this example embodies.

Let us repeat the exercise of going over the task making use of purely mathematical arguments to identify and describe the specific knowledge required to solve it. For this example we set ourselves the task of identifying the knowledge which enables one to know, on the one hand, that the result is correct, and on the other, that the setup of the story is incorrect.

Understanding why the result is correct requires being able to see the relation between the operation that the task intends to represent $\left(1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}\right)$ and the operation actually represented by the story problem ($7 \div 2$). In the first of these, given that the divisor is a fraction, it is not possible to devise a natural context based on the partitive sense of division. The metamorphosis into the second operation attempts to express precisely this sense of division, but in this formulation it is not $1\frac{3}{4}$ pizzas that are divided but 7 slices of pizza (the size of each of which is $\frac{1}{4}$). This number of slices is the numerator of the improper fraction deriving from the mixed number: $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ The dividend in the second operation is the numerator of the corresponding fraction, once this has been transformed into an equivalent so that the denominators of both are the same: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ That is:

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \div \frac{2}{4} = \frac{7 \times 4}{2 \times 4} = \frac{7}{2}$$

It should be noted that we are not suggesting that this was the mental process by which the story problem was devised, rather we are setting out the mathematical arguments which allow one to analyse and account for the equivalence between the operations and for the answer being the same in both cases.

Hence, the knowledge involved in this first part is: knowing that the quotient of two fractions is equal to the quotient of any two equivalent fractions; knowing an algorithm for dividing fractions; knowing the multiplicative inverse property of numbers.

In order to understand why the problem posed in the story is incorrect, the required mathematical knowledge concerns the use of the meanings of division $a \div b$ as quantifier (How many times does b go into a?) and as sharing out (How many does each b get if we share out a?). The meaning inherent in the story problem cannot be extrapolated to the operation to be represented.

As with the example of subtraction, there is no purely mathematical knowledge here that can be seen as exclusive to mathematics teachers, or to which the pupil cannot have access.

CONCLUSION

In this paper we have aimed to scrutinise elements of knowledge pertaining to SCK. We began with an analysis of definitions and looked closely at examples which, according to the authors, involved specialised knowledge. We kept in mind throughout the notion of SCK as purely mathematical knowledge, whether viewed as an accumulation of special knowledge or as a special way of regarding content.

The definitions review we carried out leads us to conclude that these always employ elements which are extrinsic to specialised knowledge, such as making reference to other professions or the notion of going beyond CCK. In the analysis of the examples, we found that the specific tasks called for knowledge of meanings, properties and definitions of the mathematical topics involved. Nevertheless, it is natural to ask whether this knowledge can be considered specialised with respect to mathematics teachers. We would maintain that the answer is 'no'. We cannot see any way of viewing the topic concerned that is particularly special, nor can we perceive any specialist mathematical knowledge which is habitually inaccessible to pupils or other professionals. What is evident is a specific use of this knowledge.

We are not trying to say that mathematics teachers' specialised knowledge does not exist; however, the data suggest that it might not be exclusive to the mathematical domain. We believe that it is impossible to think about this kind of knowledge without bringing to mind knowledge about mathematics teaching, such as ways of constructing the subject, the development of complexity within topics, and the features of learning mathematical content, amongst others. Specialised knowledge takes into account more aspects than meanings, properties and definitions.

The above conclusions form part of a series of considerations and reflections which together have led the research group SIDM in the Department of Mathematics Teaching at the University of Huelva (Spain) to work towards the development of a model which focuses on the study of what is specialised in terms of the results of an interaction between types of knowledge of and about mathematics, the structure, the teaching, the characteristics and standards of mathematics education, as well as connections to beliefs about mathematics (and its teaching/learning), mathematical knowledge always occupying the central focus. This work is the first of a series of papers (Carreño, Rojas, Montes, & Flores, 2012; Carrillo, Climent, Contreras, & Muñóz-Catalán, 2012; Montes, Aguilar, Carrillo, & Muñóz-Catalán, 2012) to be presented in this volume with the aim of offering a full picture of our advances as a research group (Carrillo *et al*, 2012, in this volume).

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors are members of the research project "Mathematical knowledge for teaching in respect of problem solving and reasoning" (EDU2009-09789EDUC), funded by the Ministry of Science and Innovation in Spain.

REFERENCES

Ball, D.L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching : What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), pp. 389-407.

Carreño, E., & Climent, N. (2009). Polígonos: conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor de matemáticas. In M.J. González, M.T. González. & J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII*. 187-196. Santander: SEIEM.

Carreño, E., Rojas, N., Montes, M.A., & Flores, P. (2012). *Mathematics teacher's specialized knowledge. Reflections base on specific descriptors of knowledge*. Manuscript submitted for publication.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2012).*Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching*. Manuscript submitted for publication.

Castro, W., Godino, J.D., & Rivas, M. (2011).Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *25*, 73-88.

Delaney, S., Ball, D.L., Hill, H., Schilling, S., & Zopf, D. (2008).Mathematical knowledge for teaching: adapting U.S. measures for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*, 171-197.

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J.D., Gonzato, M., & Fernández, T. (2010). ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. In M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T.A. Sierra(Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*, 341-352. Lleida: SEIEM.

Herbst, P., & Kosko, K. (2012). Mathematics Knowledge for Teaching High School Geometry. *Proceedings of the 34th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Kalamazoo. MI.

Hill, H., Ball, D.L., & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research of Mathematics Education*, *39*(4). 372-400.

Hill, H., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L., & Ball, D.L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, *26*, 430-511.

Kazemi, E., Elliott, R., Lesseig, K., Mumme, J., Caroll, C., & Kelley-Petersen, M. (2009). Doing Mathematics in Professional Development to Build Specialized Content Knowledge for Teaching. In D. S. Mewborn&H. S. Lee (Eds.).*AMTE Monograph, 6. Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers*. (pp. 171-186). San Diego, California: Association of Mathematics Teacher Educators.

Knapp, A, Bomer, M., & Moore, C., (2008).Lesson Study as a learning environment for mathematics coaches. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, and the XX North American Chapter (Vol. 3, pp. 257-263). Morelia, Michoacán, México: PME.

Krauss, S., Baumert, J., & Blum, W. (2008).Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 873–892.

Markworth, K., Goodwin, T.,& Glisson, K. (2009). The Development of Mathematical Knowledge for Teaching in the Student Teaching Practicum. In D. S. Mewborn&H. S. Lee (Eds.).*AMTE Monograph, 6. Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers*. 67–83. San Diego, California: Association of Mathematics Teacher Educators.

Montes, M.A., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M.C. (2012). *MTSK: from common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures*. Manuscript submitted for publication.

Ribeiro, M., Monteiro, R., & Carrillo, J. (2010). ¿Es el conocimiento del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. *Educación Matemática*, *22*(2), 123-138.

Rivas, M., Godino, J. D.,& Konic P. (2009). Análisis epistémico y cognitivo de tareas en la formación de profesores de matemáticas. In M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, 453-462. Santander: SEIEM.

Rivas, M., Godino, J.D., & Castro, W. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema, Río Claro*, *26*(42B), 559-588.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Sosa, L., & Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. In M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*,569-580. Lleida: SEIEM.

Suzuka, K., Sleep, L., Ball, D.L., Bass, H., Lewis, J.M., & Thames, M.H. (2009). Designing and Using Tasks to Teach Mathematical Knowledge for Teaching. In D. S. Mewborn&H. S. Lee(Eds.),*AMTE Monograph Series, 6. Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers*,7-24. San Diego, California: Association of Mathematics Teacher Educators.

Van, E. (2009). Pedagogical Content Knowledge in sight? A comment on Kansanen. *Orbis Scholae*, *3*(2), 19-26.

REFLEXIONES SOBRE LA NATURALEZA DEL CONOCIMIENTO, LAS CREENCIAS Y LAS CONCEPCIONES

Miguel Montes, Eric Flores-Medrano, Enrique Carmona, José Luis Huitrado y Pablo Flores

1.1 SOBRE EL CONOCIMIENTO

Este apartado responde a la necesidad de clarificar el significado que asignamos al término conocimiento los investigadores del grupo SIDM de la Universidad de Huelva. La revisión bibliográfica nos lleva a dar una definición integradora útil que distinga conocimiento de otros elementos.

Un término muy relacionado con conocimiento es comprensión. Richard Skemp (1978) define comprensión como la asimilación de diferentes elementos dentro de esquemas, que constituyen el conocimiento. Para este autor, la comprensión relacional está constituida por saber aquello que se debe hacer y porqué, y la comprensión instrumental por saber las reglas sin las razones. Posteriormente consideró la comprensión lógica, equivalente a la conciencia de la estructura de lo que se hace, como pueda suceder en la prueba formal, y comprensión simbólica, conexión entre el simbolismo y la notación con ideas asociadas. Esta definición de comprensión ha sido reelaborada posteriormente por diferentes autores (consultados especialmente referentes de educación matemática), caracterizando cómo se pone en juego y desarrolla:

- Superar obstáculos cognitivos. (Cornu, 1991; Sierpinska, 1990).
- Generar imágenes y definiciones del concepto (Vinner, 1991; Tall y Vinner, 1981).
- Operar con múltiples representaciones (Kaput, 1989).
- Construir concepciones operacionales y estructurales (Sfard, 1991).

En literatura relativa al conocimiento profesional (e. g. Schön, 1983; Ponte, 1994; Climent 2005), encontramos la siguiente afirmación:

> "En la medida que las tareas [del profesional] cambian, lo harán también las demandas de un conocimiento utilizable, y los modelos de tarea y *conocimiento serán intrínsecamente inestables*" (Schön, 1983, p.26).

Esta reflexión nos lleva a otra: ¿hasta qué punto es útil tener una definición y modelo de conocimiento inmutable? Entendemos que, aceptando las palabras de Schön, el modelo que elaboremos, y la definición que adoptemos de conocimiento tendrá que estar sujeta a permanente revisión, siendo por tanto un constructo que satisfaga al grupo en el momento científico, social, cultural, profesional y en el que se encuentre, de forma que si alguno de estos contextos varía, podría ser revisado.

En la literatura relativa a los modelos de conocimiento del profesor (Shulman 1986, 1987; Llinares y Sánchez, 1990; Pajares, 1992; Bromme 1994; Bromme y Tillema, 1995; Even, Tirosh y Markovits, 1996; Llinares 1998; Tirosh, 2000; Ball, Thames y Phelps, 2008; Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009; Schoenfeld, 2010; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-

Catalán, 2013),se hace poco énfasis en los posicionamientos epistemológicos acerca del término conocimiento, más allá de ciertas reflexiones sobre la naturaleza a la que ha de aspirarse en el conocimiento de los profesores, *"Conocer algo sin comprender el por qué, en el contexto de su conocimiento como profesor, no tiene más sentido para éste que en el contexto puramente matemático"* (Tirosh, 2000, p.20), que usan los términos comprensión y conocimiento con significados que parecen muy próximos, con la salvedad de que el conocimiento parece cercano a algo que podríamos llamar "entendimiento declarativo", o "no entendimiento". Aceptamos esto como una llamada de atención sobre la necesidad de abordar el conocimiento de forma íntimamente ligada al entendimiento. Por tanto nos planteamos la utilidad de distinguir entre ambos, ya que podemos entender que existen grados de profundidad en la reflexión establecida sobre el conocimiento. Llinares (1998) adopta la siguiente caracterización de conocimiento:

> "*Este conocimiento incluye no sólo la información específica sobre datos y métodos de comprobación de resolución de problemas, sino también la información necesaria para definir y comprender los problemas con los que debe enfrentarse el profesional*" (p. 55).

Por otro lado, Pajares (1992), utiliza el conocimiento para referirse a la amplia red de conceptos, imágenes, y habilidades inteligentes que poseen los seres humanos.

Una vez más encontramos caracterizaciones sobre elementos que están englobados en el conocimiento, de forma que estos intentos de definición caracterizarían algunos de los elementos que pertenecen al conocimiento, pero aportan características que permiten discutir sobre elementos que pudieran pertenecer al mismo. En el caso de Pajares, se incluyen las habilidades como parte del conocimiento, hecho a remarcar, teniendo en cuenta las discusiones establecidas sobre qué es conocimiento, y qué no, que han tenido lugar en el seminario.

Finalmente, los aportes de Schoenfeld (2010) dan mayor precisión, con una definición del conocimiento que resulta bastante operativa para utilizarla en las investigaciones, que es compatible con la propuesta por Pajares:

> "Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo a esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!" (Schoenfeld, 2010, p.25).

Además de los términos propios de su modelo de conocimiento, como el referido a las metas, esta definición introduce dos elementos importantes:

- *Información disponible*: Bajo esta nomenclatura caben acciones, comprensión de diferentes tipos, ya sea relacional, instrumental, lógica o simbólica según Skemp, y es adaptable a las diferentes situaciones en las que se ponen en juego comentadas anteriormente.
- *Para usar*: Este es el elemento discriminador de la definición. Aquella información que no tenga sentido usar en la actividad que se desempeñe (en la tarea concreta de la enseñanza de la matemática en este caso), no tendrá cabida en esta definición de conocimiento. Así, si encontráramos un profesor de primaria que poseyera con amplias nociones de Análisis Funcional, no nos permitiría afirmar que dichas nociones fueran

constituyentes de su conocimiento *especializado*, como profesor de matemáticas del ciclo en que enseña.

- *No necesariamente correcto*: Esta aclaración es una llamada de atención sobre la posición del investigador que busca comprender el conocimiento del profesor, siendo la diferencia entre conocimiento correcto o incorrecto irrelevante en algunos casos, especialmente si la intención del investigador es *saber qué conoce el profesor*, ya que, coincida con el referente de corrección o no, el profesor posee dicha información, aunque puede resultar interesante, dependiendo del tipo de investigación en curso, para comprender el conocimiento del profesor o su actuación. Además, creemos necesario hacer una llamada de atención sobre la consideración negativa del término *incorrecto*, definiéndolo no cómo algo negativo, sino como no coincidente con el referente de *verdad*.

Tras la revisión realizada de la literatura, y después de hacer una honda reflexión sobre las posibles implicaciones de la definición aportada por Schoenfeld, proponemos adoptarla para su uso como punto de acuerdo en lo referente a lo que entendemos por conocimiento, para definir el modelo de conocimiento del profesor de matemáticas denominado MTSK. Cabe destacar que pese a que Schoenfeld (2010) busca una definición para el conocimiento profesional, sus aportes constituyen un posicionamiento general sobre el conocimiento, compatible y complementaria con la noción de Pajares (1992) tradicionalmente usada en investigaciones anteriores (Carrillo, 1998; Contreras 1999).

1.2 SOBRE CREENCIAS, CONCEPCIONES Y CONOCIMIENTO

Usaremos la base teórica que diferentes miembros de este grupo han desarrollado y usado a lo largo de su historia, partiendo de la tesis de Carrillo (1998), en la que se comenta la diferenciación establecida por Ponte (1994) siguiendo a Pajares (1992), entre creencia, concepción y conocimiento:

> "*Utilizo conocimiento para referirme a la amplia red de conceptos, imágenes, y habilidades inteligentes que poseen los seres humanos. Las creencias son las 'verdades' personales incontrovertibles que tiene cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía, que tienen una fuerte componente afectiva y evaluativa (Pajares, 1992). Las concepciones son los esquemas subyacentes de organización de los conceptos, que tienen esencialmente naturaleza cognitiva. Creencias y concepciones son parte del conocimiento*" (Ponte 1994, p.199).

Esta definición, sin embargo, ha sido abordada por diferentes autores con posterioridad. Especial relevancia tiene la publicación de Furinghetti y Pehkonen (2002), en la que recogen la revisión que 22 expertos en Educación Matemática, conocedores de la temática, hacen de nueve definiciones de creencia/concepción dadas por diferentes autores.

Estos autores preguntaron a los expertos si consideraban adecuada cada definición, indicando los motivos, y dando una caracterización propia. La definición de Ponte (1994) fue duramente criticada por tres de sus elementos centrales: El carácter incontrovertible, la relación directa entre creencia y conocimiento, y el término concepción. Las definiciones que fueron aceptadas por la mayoría de revisores fueron las de Schoenfeld (1992) y la de Thompson (1992). La experiencia del grupo empleando la definición de Ponte nos lleva a tenerla muy en cuenta, pero no podemos ignorar la revisión de Furinghetti y Pehkonen, y manifestar que no nos sentimos plenamente satisfechos con el carácter incontrovertible de las creencias, aunque sí con considerarlas parte del conocimiento, y de igual modo, entendemos que las creencias pueden ser personales, por lo que proponemos un tratamiento integrado, incluyendo estas características, y evitando la diferenciación explícita entre creencia y concepción, ya que entendemos que resulta de escasa utilidad, al ser nuestro foco el conocimiento, al que dichas creencias y concepciones permean.

Así, las creencias pueden ser entendidas, en la línea de los propuesto por Ponte (1994), como verdades personales, sostenidas individual y/o colectivamente, derivadas de la experiencia o el propio pensamiento, con cierta componente afectiva y evaluativa, sobre la que se pueden tener diferentes grados de convencimiento, así como pudiendo ser justificadas en base a argumentos que no sigan criterios que puedan responder a cánones de evidencia, es decir, no son falsables (en el sentido de Poper)[3]. Muy cercana a esta definición se encuentra la propuesta por Thompson (1992) para las concepciones, entendidas como las estructuras mentales generales, que abarcan significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, etc., (Thompson 1992). La diferenciación, por tanto, entre creencia y concepción, puede entenderse, a priori, en base a la implicación de la componente afectiva y emocional en las creencias, frente a la racionalización que suponen las concepciones. Sin embargo, esta relación entre creencias y concepciones, así como su integración en el conocimiento, es una faceta que aún no se ha explorado en la profundidad necesaria como para llegar a puntos de consenso.

En cuanto al conocimiento, adoptaremos la definición propuesta por Pajares (1992) Red amplia de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes poseídas por el ser humano Entendemos que esta red abarca concepciones y creencias, y está construida también mediante éstas. Esta definición es totalmente compatible con la propuesta de Schoenfeld (2010), citada en el punto anterior, recogiendo el énfasis que ponen tanto Schoenfeld en la utilidad del conocimiento, como Pajares en la posesión, siendo 'posesión útil' equiparable al término *"información disponible"*.

Entendemos, por supuesto, que ninguna de estas definiciones es inmutable, sino que todas están sujetas a cambio, a través de la reflexión y experimentación. En la tradición investigadora del grupo, encontramos diferentes aproximaciones a estos elementos.

En cuanto a las creencias y las concepciones, basados en los trabajos de Ernest (1989, 1991), entre otros, establecemos tres concepciones sobre la matemática articuladas en un sistema de categorías que incluye el tipo de conocimiento (¿qué lo compone y cómo es?), la finalidad y el modo de evolución [proceso de construcción y tipo de razonamiento] (Carrillo y Contreras, 1994). En la concepción Instrumentalista, el núcleo de la matemática está compuesto de resultados cuya veracidad y existencia no están sujetas a discusión; su finalidad es el desarrollo de otras ciencias y su modo de evolución está basado en la creación y uso de algoritmos generados como relaciones causa-efecto. En la concepción Platónica, el núcleo está en los conceptos y valores

[3] Por tanto, el paso de la subjetividad a la objetividad (intersubjetividad) está ligado a la posibilidad de formulación en términos falsables, lo que requiere una disposición a romper con el sustento afectivo que conlleva la creencia.

racionales, en el marco de un cuerpo de conocimientos preexistente; su finalidad es el desarrollo de la propia ciencia matemática y emerge como explicación a problemas de la propia matemática o de otras ciencias. En la concepción de la matemática como Resolución de Problemas (Ernest, 1989; Carrillo y Contreras, 1995), la esencia está en las estructuras conceptuales, que conforman un conocimiento sometido a revisión constante; su finalidad es el desarrollo de capacidades intelectuales del ser humano y su evolución es dinámica, basada en la resolución de problemas. Es en esta última concepción en la que nos posicionamos para desarrollar nuestros trabajos.

En cuanto al conocimiento, se han desarrollado diversas investigaciones, en torno, por ejemplo al conocimiento que permite al profesor explicar matrices (Sosa, 2010), o justificar diferentes aspectos relacionados con la enseñanza de las fracciones (Moriel-Junior, Wielewski y Montes, 2013), así como gestionar el diseño de actividades de geometría en el aula (Carmona y Climent, 2012). También se ha profundizado en el desarrollo del conocimiento (Climent, 2005; Muñoz-Catalán).

Asimismo, creemos interesante la investigación de la relación entre conocimiento y concepciones, como futura (y presente) línea de investigación (Flores y Carrillo, 2014), utilizando ambas dimensiones como complementarias a la hora de analizar el conocimiento del profesor, siguiendo la línea propuesta por Skott, van Zoest y Gellert (2013). La exploración de esta línea de investigación supone la aceptación de la integración de conocimiento y concepciones como parte de la *red amplia de conceptos, imágenes y habilidades* que el profesor tiene disponibles para desarrollar su actividad docente.

1.3 POSICIONAMIENTO EPISTEMOLÓGICO

Dependiendo del objeto de estudio, y por tanto de la naturaleza del conocimiento a la que nos refiramos, podemos distinguir distintos niveles de concreción epistemológica:

- Epistemología de las ciencias4
- Epistemología de las matemáticas
- Epistemología de la didáctica de las matemáticas
- Epistemología de las matemáticas escolares

En la presente reflexión nos centraremos en el primer nivel de concreción, y por tanto, en el modo en que las ciencias se han desarrollado y se desarrollan. Entendemos que la reflexión epistemológica es, en sí misma, una oportunidad para ejercitar la honestidad científica y el gusto por la verdad, que nos conduce a comprender mejor esa compleja obra que son las ciencias; y un medio para tomar conciencia de los límites y ambigüedades inherentes a la propia ciencia. Nos permite cuestionarnos acerca de lo que somos, de lo que hacemos, del sentido que tiene lo que hacemos y nos obliga a revisar las ideas recibidas, profundizando en el porqué de las cosas.

[4] Hablamos de epistemología de las ciencias en plural con la intención de remarcar la existencia de una gran variedad de disciplinas científicas, donde cada una de las distintas aproximaciones comporta una manera de abordar el mundo y de construir sus objetos (Fourez, 1997).

1.3.1. Nuestro Posicionamiento epistemológico

Nos vamos a aproximar a la noción de ciencia desde una perspectiva epistemológica socio-constructivista con raíces en el socioconstructivismo pedagógico y en el socioconstructivismo socio-histórico. Partimos de la creencia de que al igual que toda actividad intelectual[5], la ciencia implica elegir con qué ojos ver el mundo, y que por tanto, conocer implica ineludiblemente tomar decisiones (Fourez, 2008, 2010). Entendemos que todas las prácticas científicas, y por consiguiente sus producciones, están impregnadas de dimensiones éticas, políticas, sociales, psicológicas, y en definitiva humanas.

En consonancia con las afirmaciones de Fourez (1997, 2008, 2010) y Bronowski (1968, 1978), entendemos que la ciencia es una producción histórica construida por humanos y para humanos, y por tanto no es algo existente por sí mismo, con valores intrínsecos propios; como afirma Maslow (1991) "*sus orígenes están en las motivaciones del hombre; sus objetivos son humanos, y es creada, renovada y mantenida por seres humanos*" (p.277). Sus teorías, sus modelos, su organización, sus articulaciones, no descansan sólo en la naturaleza de la realidad, sino que también lo hacen en la propia esencia de la naturaleza humana que la construye. "*Creer que la ciencia es una empresa neutra, desinteresada, autónoma y autorregulada, con reglas propias y fijas es falso, poco realista, e incluso antiempírico*" (p.277).

El socioconstructivismo es, en principio, una visión constructivista, por el hecho de que reconocemos el rol que juega el sujeto en la construcción del conocimiento (Glasersfeld, 1996). El constructivismo es una manera de situar al sujeto en el centro de la visión, poniendo el acento en que cada sujeto se construye sus representaciones del mundo, y que además lo hace a través de lo que da sentido al propio sujeto: sus creencias, sus presupuestos, sus proyectos, su medio social, su salud psicológica, etc.

El constructivismo fija su atención en la construcción de los saberes vinculados a las personas consideradas como individuos, por ello entendemos que dicha aproximación epistemológica por sí sola no cubre nuestras necesidades, como afirman Fourez, Englerbert-Lecompte y Mathy (1997)"*para comprender la construcción de los saberes, de las disciplinas científicas, y de las representaciones, no es suficiente pensar en una producción vinculada únicamente a intereses individuales, sino que es necesario la toma en cuenta de los intereses sociales*" (p. 31).

Que nuestra perspectiva epistemológica tenga raíces en el socioconstructivismo pedagógico implica que concedemos importancia a las interacciones sociales que condicionan cómo se construyen los conocimientos individuales sobre el mundo, y por tanto, reconocemos que la ciencia es un producto social fruto de una aventura humana (Fourez *et al*. 1997; Fourez, 2008, 2010).

En este sentido las teorías, los modelos, las nociones, y todo lo que constituye y articula una disciplina científica son representaciones puestas a punto por los humanos y para los humanos, con la intención de comprender su mundo.

Que nuestra perspectiva epistemológica tenga raíces en el socioconstructivismo socio-histórico implica que consideramos que la construcción del conocimiento estandarizado (física, biología, matemáticas, medicina, etc.) es una aventura humana que se desarrolla y evoluciona en la

[5] Conocer, comprender, observar, representar, modelar, describir, etc.

historia, marcada por un lugar, unas preguntas y unas situaciones (presión de factores sociales, económicos, políticos y culturales) (Fourez, 1997, 2008, 2010).

1.3.2. ¿Qué significa observar?

En consonancia con los trabajos de Fourez (1997) y Maslow (1979, 1991) descartamos la existencia de información "pura[6]", ya que toda información está previamente organizada por nuestros conocimientos y por tanto, desestimamos la existencia de la observación pasiva, neutra y desinteresada, ya que todo sujeto al observar interactúa con el mundo desde su realidad biológica, psicológica y cultural, y por tanto toda observación se hace siempre previamente desde una modelización que implica el contexto del propio sujeto, los proyectos que sustentan su observación e incluso sus destinatarios. Así, "u*na observación es la construcción de una representación o de un modelo de una situación"* (Fourez *et al*., 1997, p.64).

Así, por ejemplo, en la observación del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas, hay más que un "sujeto individual" en juego, hay una situación donde hay seres humanos inmersos en un contexto social, con características psicológicas y culturales, interesados en un proyecto (identificar, describir y comprender el conocimiento profesional de un profesor con la mirada puesta en la mejora de la educación matemática) y que desean poder discutirlo entre ellos.

Esta conciencia de la dimensión interpretativa de toda observación, implica que la observación científica parte de una selección hecha en nombre de una perspectiva particular (Fourez, 1997, 2008).

1.3.3. Revisión de la noción de objetividad

La percepción que tenemos del mundo es plenamente subjetiva, está marcada por las interpretaciones y representaciones que elabora nuestro cerebro a través de los estímulos que reciben nuestros órganos sensoriales, y modelada por la organización del mundo que heredamos de nuestra cultura. En este sentido toda representación depende siempre de los sujetos que la construyen, de los criterios que emplean a este efecto, y de sus intenciones (Fourez, 1997, 2008).

Las nociones de objetividad y subjetividad están siempre vinculadas, sin embargo, desde nuestra perspectiva la objetividad no puede significar ausencia de subjetividad y debe ser interpretada desde una dimensión social. El establecimiento de criterios comunes y convenciones en el marco de una institución social (comunidad científica) es lo que permite realizar una descripción objetiva.

A pesar de que las representaciones de los sujetos presentan diferencias, y por tanto son necesariamente subjetivas, consideramos que las "cosas" pueden ser descritas objetivamente si la descripción se hace con referencia a los indicadores sobre los cuales el observador se ha puesto de acuerdo con una comunidad científica, es decir, si se realizan en base a un consenso social, siguiendo a Fourez "*ser objetivo es respetar las reglas de una subjetividad compartida*" (Fourez, *et al*., 1997, p.174).

Así, por ejemplo, observar una secuencia de aula de un profesor de matemáticas, es observar

[6] Siguiendo a Fourez (2008), el objeto que se observa no es un dato sino una construcción del sujeto que organiza su mundo para poner en evidencia el objeto.

con los criterios definidos por la comunidad de los investigadores en didáctica de las matemáticas. Pero los criterios de los investigadores en didáctica de las matemáticas corresponden a una visión particular propia de esta comunidad y son por lo tanto subjetivos.

1.3.4. Representaciones y modelos

Comprender, comunicar o actuar sobre una situación implica comenzar por construir una representación o modelo[7], más o menos elaborado, que simplifique la complejidad del mundo; sin olvidar que ineludiblemente siempre nos aproximamos a dicha situación insertos en un contexto determinado y desde un proyecto preciso. Coincidimos de nuevo con Fourez al entender que "*el mundo no es perceptible más que por representaciones, que toman el lugar de lo que es siempre más complejo que ellas*" (Fourez *et al*., 1997, p.155).

Ninguna situación obliga a formular una modelización determinada, y por ello, existen una infinidad de maneras de modelizar una situación. De igual manera, ante una misma situación, según el contexto y el proyecto, se puede recurrir a modelizaciones diferentes.

Especialmente interesantes resultan los modelos científicos, se trata de modelos históricamente estandarizados o normalizados (Kuhn, 1972, creo que está referenciado con 2006, pero no estoy seguro) por comunidades científicas que están socialmente disponibles "*para todos aquellos que los quieran aceptar*" (Fourez *et al*., 1997, p.22).

Los modelos estandarizados que constituyen el conocimiento científico son modelos, fruto del trabajo colectivo de reflexión y refinamiento, que han resultado exitosos, debido a que se han revelado más eficaces para interpretar las situaciones en un contexto y proyecto preciso. La estandarización de la ciencia, no es un proceso desarraigado y puramente racional, se realiza "*según lógicas sociales e involucra referencias sociales, políticas económicas, estratégicas y culturales, es decir, también ideológicas*" (Fourez *et al*., 1997, p.23).

Sin embargo, aunque las modelizaciones estandarizadas no son necesariamente mejores que otras, poseen un valor especial, el de facilitar la comunicación entre personas o grupos que utilizan los mismos estándares (Fourez, 1997, 2008).

Creemos necesario hacer énfasis en el valor de los modelos y teorías en educación matemática, así como en su naturaleza. Para la investigación reflejada en este documento, tomamos como base los criterios propuestos por Schoenfeld (2000), para la consideración de un modelo como tal, *"poder descriptivo, poder explicativo, alcance, poder predictivo, rigor y especificidad, falseabilidad, replicabilidad y triangulación"* (p.646). En base a estos criterios, y nuestro propio posicionamiento epistemológico, se comenzó la reflexión teórica expuesta en el capítulo 4.

[7] Así, por ejemplo, inferir que en tal acción, discurso o declaración de un profesor se pone en evidencia una característica de su conocimiento profesional es modelizar, mientras que la noción de conocimiento profesional es un modelo.

1.3.5. Criterios de verdad y justificación

Como grupo de investigación, entendemos necesario explicitar nuestro criterio de justificación. Así, como criterio de verdad y justificación partimos de la lógica del descubrimiento matemático propuesta por Lakatos (1978) basada en la prueba y refutación, es decir, una visión de la construcción de la ciencia basada en la negociación y aceptación.

Al igual que Latour (1989), creemos que la actividad científica es un proceso social, y por tanto, toda producción científica (teorías, modelos y representaciones del mundo) es presidida por una negociación donde se toman decisiones en un marco de riesgo, relaciones de fuerza, tensiones y diversos grados de certidumbre[8].

La negociación de una representación o modelo se realiza siempre en función del proyecto que lo sustenta, en relación con los contextos donde se insertan, teniendo en cuenta las exigencias ligadas a la naturaleza del objeto de estudio y a los destinatarios de la comunicación; y para ello se seleccionan qué aspectos de la situación se van a tener en cuenta y cuáles se van a obviar. Como remarca Latour (1989), estas negociaciones son triangulares, se hacen entre humanos, pero también entre los humanos y las "cosas" representadas por científicos.

Es importante señalar, que reconocer la existencia de una diversidad de puntos de vista, es decir, creer en la relatividad de las representaciones teórica, no implica caer en el relativismo ni en el anarquismo epistemológico, puesto que reconocer su existencia no conlleva nivelarlas, ni suponer que todas las maneras de ver el mundo sean equivalentes.

Creer en la relatividad de las representaciones teóricas[9] implica "*sostener que la fecundidad de un modelo depende del contexto y del proyecto para los cuales ha sido concebido*" (Fourez, 2008, p.32). Por ello, al igual que Quine (2001), entendemos que las distintas representaciones de una situación deben evaluarse no solo en función de los "objetos" de estudio, sino también en función de los proyectos para los que han sido construidas y en función de los contextos donde se insertan; es precisamente a la luz de dichos proyectos y contextos donde se pone de relieve su campo de validez, ya que ciertas representaciones de una situación son más interesantes o adecuadas que otras Fourez (2008, 2010).De manera que el valor de un modelo subyace, por tanto, vinculado a las situaciones particulares donde su uso resulta interesante.

Todo modelo es limitado y su campo de aplicación lo es igualmente, por ello desde esta perspectiva diremos que el valor de un modelo es relativo al uso que se quiera hacer de él, como concluyen Fourez *et al*. (1997) "*las modelizaciones serán más o menos adecuadas según lo que se quiera extraer de ellas*" (p.61).

[8] Coincidimos con Feynman (1990, p.286) cuando manifiesta que los diversos grados de certidumbre que conforman el conocimiento científico "*algunos son sumamente inseguros, algunos casi seguros, pero ninguno es absolutamente cierto*".

[9] Así, creer en la relatividad de las representaciones teóricas conducirá a decir, por ejemplo, que la distinción entre el conocimiento matemático especializado para la enseñanza y conocimiento común es interesante, pero solamente en función de ciertos contextos y proyectos.

1.4. NATURALEZA DEL CONOCIMIENTO Y LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

La necesidad de posicionarnos acerca de la naturaleza del conocimiento y la actividad matemática, supera el deseo de contar con un elemento de referencia en el sustento teórico y supone situarnos firmemente en un paradigma que dé congruencia al trabajo que realizamos.

Las interpretaciones sobre conocimiento matemático se reflejan en las publicaciones sobre educación matemática, que consideran diversas perspectivas sobre su naturaleza: absolutismo o relativismo, prescriptiva (o normativa) y descriptiva (o naturalista); los enfoques: logicista, formalista o intuicionista, o las tendencias surgidas en la segunda mitad del siglo XX: el empirismo, el cuasi-empirismo, el convencionalismo y el naturalismo. En el reconocimiento del contexto de la presente reflexión, la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y considerando los diversos enfoques y su relación con las posturas fundamentales, argumentamos nuestra adhesión a una postura contextualizada sobre la naturaleza del conocimiento y de la actividad matemática en la práctica educativa. En pocas palabras, se pretende tender un nexo claro y congruente, desde una posición filosófica hasta una postura de enseñanza, que si bien no encorseta las propuestas que pudieran trabajarse en el grupo a una metodología de enseñanza específica, contribuya al acuerdo sobre las bases para un marco teórico compartido.

En épocas recientes, principalmente a partir del desarrollo de las didácticas específicas como bases de las metodologías de enseñanza, se ha puesto el acento en reconocer que la tipología de los contenidos que se pretende que sean aprendidos, sugiere una diferenciación metodológica de su enseñanza. Para el caso del conocimiento matemático se reconocen, en general, dos formas extremas de concebir la matemática, por un lado una concepción filosófica de la matemática denominada *formalista* y, por otro lado, la *epistemología constructivista.*

El formalismo, concepción filosófica dominante en gran parte del siglo XX, ha favorecido un desarrollo significativo de la estructura de la matemática actual. Este reconocimiento del papel de la concepción formalista para atender y afrontar las inconsistencias formales de la estructura de la matemática, ha dado realce a una forma de presentar los conocimientos, de manera no afortunada para la propuesta educativa (Moreno y Waldegg, 1992; Eingenheer, 1995).

El formalismo, "grosso modo", nos presenta a la matemática como un cuerpo estructurado de conocimiento conformado por los objetos matemáticos, las relaciones entre ellos y los criterios para validar resultados, dentro de un marco axiomático-deductivo. Así:

"El formalismo exige extirpar el significado de los objetos a fin de trabajar exclusivamente con las formas y con las relaciones entre dichos objetos que se derivan de la base axiomática de las teorías" (Moreno y Waldegg, 1992, p.52).

Esta caracterización, productiva para la actividad matemática, como se ha mencionado, favoreció el surgimiento de notables y variados resultados durante el siglo XX; por otro lado, su influencia en lo educativo, producto de una vulgarización poco reflexiva, difundió la concepción de que la matemática consiste simplemente en la manipulación formal de símbolos no interpretados o en un raciocinio formal deductivo a partir de cualquier presupuesto (Eingenheer, 1995).

La influencia del formalismo en la tarea educativa se ve acentuada por la influencia de la era industrial, que aplica modelos mecanicistas a la enseñanza, generando una fragmentación de los contenidos, producto de los principios de reduccionismo, mecanicismo y análisis que caracterizan a esta etapa.

Como ejemplo de tal influencia en las actividades educativas, podemos mencionar que:

a) Las actividades de enseñanza no revelan el origen de ese conocimiento, no dicen cuál fue la necesidad, la motivación o la intuición inicial.
b) Se trata de modelos que toman como punto de partida definiciones que son, en realidad, el punto de llegada de un largo proceso de conocimiento.
c) Se promueve: la reducción a las partes, el mecanicismo de las reglas (haga así y obtendrá el producto) y la pérdida de la visión del conjunto.

Una visión que contrasta con la expuesta es la que toma como base la postura epistemológica del constructivismo, para la cual, la historia de la creación del conocimiento matemático nos da cuenta de las múltiples motivaciones, necesidades y métodos que sustentaron esa creación que, en realidad, fue rica y diversificada, tanto en términos de contenido como de forma (Eingenheer, 1995).

La epistemología genética pone el acento en el proceso y no sólo en los conceptos conseguidos. Así, el conocimiento matemático "*es resultado de esta reflexión sobre acciones interiorizadas (abstracción reflexiva). La matemática no es un cuerpo codificado de conocimientos (así como la lengua no es el texto de su enseñanza) sino, esencialmente, una actividad*" (Moreno y Waldegg, 1992, p.31).

Dicha actividad estimula que el alumno construya su conocimiento en un proceso que podría describirse como el paso de un estado a otro de mayor conocimiento, a través de situaciones que les provoquen desequilibrios que favorecen la restructuración de sus conocimientos (Sierpinska, 1990). Así, se puede examinar la construcción del conocimiento matemático a lo largo de la historia para apreciar ciertos paralalelismos con el proceso de construcción de los conocimientos por parte de los alumnos, considerando esta perspectiva histórica equivalente a un laboratorio epistemológico (Moreno y Waldegg, 1992).

A diferencia de la concepción formalista del conocimiento matemático, en la postura constructivista:

a) El conocimiento es siempre contextual y nunca separado del sujeto.
b) Conocer consiste en construir significados asociados a su propia experiencia.
c) A lo largo del proceso constructivo —que es permanente— el estudiante encuentra situaciones que cuestionan el "estado" actual de su conocimiento y le obligan a un proceso de reorganización; con frecuencia el estudiante se ve obligado a rechazar, por inviable, mucho de lo que ya había construido (Moreno y Waldegg, 1992).

Aunque reconocemos que el conocimiento matemático presenta, en su estado final de construcción, un alto nivel de abstracción y generalidad; una naturaleza esencialmente deductiva que se valida mediante un proceso interno de demostración y que este carácter deductivo le permite una estructura altamente integrada y jerarquizada; que se apoya en un lenguaje formal específico, que busca la precisión, el rigor, la abreviación y la universalidad; reconocemos que "*las matemáticas tienen también una dimensión menos abstracta y descontextualizada, más funcional y relacionada con la resolución de problemas prácticos en situaciones concretas, más pragmática y situada*" (Barberá y Gómez, 1996; citado por Serrano, Parra y Padilla, 2011).

REFERENCIAS

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes its special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bronowski, J. (1968). Ciencia y valores humanos.Barcelona: Lumen.

Bronowski, J. (1978). El sentido común de la ciencia. Barcelona: Península.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' profesional knowledge. En R. Biehler, R. Sholz, R. Sträer, & B. Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher

Bromme, R., & Tillema, H. (1995).Fusing experience and theory: The structure of professional knowledge. *Learning and Instruction, 5,* 261-269.

Carmona, E., &Climent, N. (2012). Comprensión del conocimiento matemático para la enseñanza que sustenta el diseño de una actividad sobre las ecuaciones de la recta en 1° de Bachillerato. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García, & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 165-175), Jaén, España: SEIEM.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013).Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994), Antalya, Turquía: Middle East Technical University, Ankara.

Carrillo, J., & Contreras, L.C. (1994). The relationship between the conceptions of mathematics and of mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis. *Actas del 18° Congreso del PME*, Vol 2. 152-159.

Carrillo, J., & Contreras, L.C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la Matemática y su Enseñanza. *Educación Matemática*, *7*(3), 79-92.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Michigan: Proquest Michigan University.

Contreras, L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Cornu, B. (1991). Limits. En D.O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166), Kluwer, Dordrecht: Springer

Eigenheer, N. (1995) Un nuevo enfoque sobre el conocimiento matemático del profesor. *Conocimiento Matemático en la Educación de Jóvenes y Adultos*. *Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en la educación.* Río de Janeiro, Brasil: UNESCO

Ernest, P. (1989), The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics'. En P. Ernest, (Ed.) *Mathematics Teaching*: *The State of the Art* (pp. 249-254), London: Falmer Press

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*, London: Falmer Press.

Even, R., Tirosh, D., y Markovits, Z. (1996). Teacher subject matter knowledge and pedagogical content knowledge: Research and development. En L. Puig, A. Gutiérrez (Eds.). *Actas del 20° Congreso del PME, Vol 1* (119-134), Valencia, España.

Feynman, R. (1990). ¿Qué te importa lo que piensen los demás? Madrid: Alianza.

Flores, E., & Carrillo, J. (2014). Connecting a mathematics teacher's conceptions and specialized knowledge through her practice.*Actas del 38° congreso del PME Vol 3* (81-88), Vancouver, Canadá.

Fourez, G. (1997). *Alfabetización científica y tecnológica*. Buenos Aires: Colihue.

Fourez, G. (2008). *¿Cómo se elabora el conocimiento?* Madrid: Narcea.

Fourez, G. (2010). *La construcción del conocimiento científico* (4ª edición). Madrid: Narcea.
Fourez, G., Englebert-Lecompte, V., & Mathy, P. (1997). *Saber sobre nuestros saberes*. Buenos Aires: Colihue.
Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations on Beliefs. En Leder, G.C., Pehkonen, E., Törner, G. (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* 40-57, Holanda, Kluwer Academic Publishers
Glasersfeld, E. von (1996). Aspectos del constructivismo radical. En M. Pakman (Ed.), *Construcciones de la experiencia humana*. Barcelona: Gedisa
Kaput, J. (1989).Linking representations in the symbol systems of algebra.En C. Kieran, & S. Wagner (Eds.). *A research agenda for the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston: NCTM.
Kuhn, T. (1972). La estructura de las revoluciones científicas. México: Fondo de cultura económica
Lakatos, I. (1978). Pruebas y refutaciones. Madrid: Alianza.
Latour, B. (1989). La science en action. París: La Découverte.
Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. Revista UNO, 17, 51-63
Llinares, S., &Sánchez, M.V. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las Matemáticas. En S. Llinares, & M.V. Sánchez (Eds.).Lecturas sobre la relación Teoría-Práctica en Educación Matemática. Sevilla: Alfar.
Maslow, A.H. (1979). La psicología de la ciencia. México: Edamex.
Maslow, A.H. (1991). Motivación y personalidad. Madrid: Ediciones Díaz de Santos, S.A.
Moreno, L., & Waldegg, G. (1992) Constructivismo y Educación Matemática. Educación Matemática, 4(2), México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Moriel-Junior, J., Wielewski, G.D., Montes, M. (2013). Conhecimientos mobiliçados durante uma formaçao docente sobre porqués matemáticos: o caso da divisão de frações. Actas del VI CIEM (en prensa). Canoas, Rio Grande do Sul: Brasil.
Muñoz-Catalán, M.C. (2009). El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel. Tesis doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.
Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research. 62* (39), 307-332.
Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge.En J.P. Ponte, &J.F. Matos (Eds.). Actas del PME 18, Vol 1(pp. 195-210), Lisboa.
Quine, W.O. (2001). Palabra y objeto. Barcelona: Hercler
Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. and Huckstep, P. (2009). Developing Primary Mathematics Teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet. London: Sage.
Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics. En Grouws, D. (Ed) *Handbook for Research on mathematics Teaching and Learning* (pp. 103-107). Nueva York: Macmillan.
Schoenfeld, A.H. (2010). *H*ow we think. Nueva York: Routledge.
Schön, D. (1983). The reflective practitioner: How professionals think in action.Basic Books: Nueva York
Serrano, J.M, Parra, R.M., & Padilla, M.E. (2011) El desarrollo del conocimiento matemático, Psicogente, 14(26) ,269-293.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: reflection on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematic, 22, 1-36
Shulman, L.S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the New Reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. For the Learning of Mathematics, 10(3), 24-41.

Skemp, R. (1978). The psychology of learning mathematics. Penguin books. Middlesex: England

Skott, J., van Zoest, L., & Gellert, U. (2013).Theoretical frameworks in research on and with mathematics teachers.ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 45(4), 501-505.

Sosa, L. (2010). Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos. Tesis doctoral: Universidad de Huelva.

Tall, D.O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Thompson, A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. En D. Grouws (Ed.).Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 127-146). New York: McMillan.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 125-147.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. O. Tall (Ed.).Advan*ced Mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Descripción del modelo MTSK

La parte central de nuestro marco teórico es el modelo de conocimiento MTSK. No solamente surge de reflexiones acerca de los elementos que componen al MKT y de sus dificultades, sino que conserva de este, al igual que de los trabajos de Shulman, el interés por indagar sobre el conocimiento que es propio del profesor de matemáticas. Al respecto, en la Tabla 2 se muestran tres trabajos para detallar nuestra noción sobre especializado y diferenciarla de otras y posteriormente complementar con la descripción del modelo realizada en Flores-Medrano, Escudero-Avila, Montes, Aguilar y Carrillo (2014).

Modelo	Definición de *especializado*
MKT (e.g. Ball et al., 2008)	Es un subdominio de conocimiento puramente matemático que solo tiene sentido para el profesor de matemáticas (exclusividad). Es uno de los tres subdominios del conocimiento de la matemática escolar, los otros dos son el conocimiento común (que en ocasiones se define por contraposición al especializado) y el del horizonte (o en el horizonte) matemático.
TEDS-M[1] (e.g. Tatto, et al., 2008)	Es un conjunto de conocimientos que se convierte en subconjunto de uno más general cuando este segundo entra en contacto con la matemática. En el conocimiento del contenido matemático se consideran dominios de aplicación, razonamiento y conocimiento y la profundidad en estos viene dada por la capacidad de proyectar esos dominios solamente al grado en que se enseña, uno o dos grados más allá o, en el más avanzado, cuando se proyecta a tres o más años. En el conocimiento didáctico del contenido matemático se considera el conocimiento del currículo matemático, el de planificación para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (fase pre-activa) y el de Implementando matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje (fase interactiva).
MTSK (e.g. Carrillo et al., 2013)	Es la integración de conocimientos matemáticos y didácticos del contenido que, en su conjunto, solo tienen sentido para el profesor de matemáticas. Se compone de seis subdominios, tres pertenecen al conocimiento matemático y tres al conocimiento didáctico del contenido (ver Figura 1).

Tabla 2. Descripción de la noción de *conocimiento especializado* en tres modelos teóricos

En el MKT el carácter de especializado está definido por la forma de conocer matemáticas propia del profesor de matemáticas. Aunque no se menciona en ninguna de las publicaciones del grupo que trabaja con el modelo, quizá podríamos plantearnos una forma especializada de conocer las matemáticas por cada profesión (conocimiento especializado de matemáticas del arquitecto, conocimiento especializado de matemáticas del auxiliar contable, etcétera). *A priori*, esto no parecer carecer de sentido, ya que cada profesión da diferentes usos al contenido matemático. Sin embargo, el detalle está en preguntarse qué es lo que da ese diferente uso, qué es lo que transforma entre una profesión y otra el carácter especializado del contenido matemático. Si regresamos con esta pregunta al caso del profesor de matemáticas, nos daremos cuenta de que es la enseñanza y el aprendizaje lo que transforma la manera en la que se usan los conocimientos matemáticos. Pero si desproveemos de conocimiento sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el conocimiento

[1] El modelo también se llama *Mathematical Knowledge for Teaching*, pero uso las siglas del estudio para diferenciarlo del MKT, que es más asociable con esa etiqueta.

puramente matemático que queda es de carácter similar al conocimiento común del contenido, haciéndolos difícilmente diferenciables entre sí, tal como lo mostramos en la discusión anterior.

En el estudio TEDS-M se construye un modelo cuya intención es evaluar los conocimientos del profesor. Se ocupa específicamente de aspectos donde el contenido matemático juega un rol. Su visión de construcción se relaciona, en la parte matemática, con capacidades intelectuales que podrían desarrollarse con un contenido (o para un contenido) y en la parte didáctica del contenido se elabora unos grupos de conocimiento con base en una secuenciación de trabajo para la enseñanza (consultar el currículo, planificar una lección, implementar la lección). Aunque no mencionan la palabra *especializado* en ninguna categoría específica ni general, es de notar la intención de centrar sus esfuerzos específicamente para el caso del profesor de matemáticas.

En el MTSK, la noción de especialización tiene rasgos de ambos modelos. Se busca la determinación de un cuerpo de conocimientos que solo tenga sentido para el profesor de matemáticas (como en el MKT), pero se hace de manera global, considerando todos aquellos elementos que tengan la implicación directa del contenido matemático (como en el TEDS-M). La lógica de construcción para este modelo es hacer, para el conocimiento matemático, una estructuración interna a la disciplina, diferenciando el conocimiento del objeto, de cómo se relaciona con otros objetos y de cómo se produce y procede en matemáticas. Para el conocimiento didáctico del contenido se considera una separación más tradicional con la enseñanza, el aprendizaje y lo que se espera que se aprenda en un determinado momento escolar.

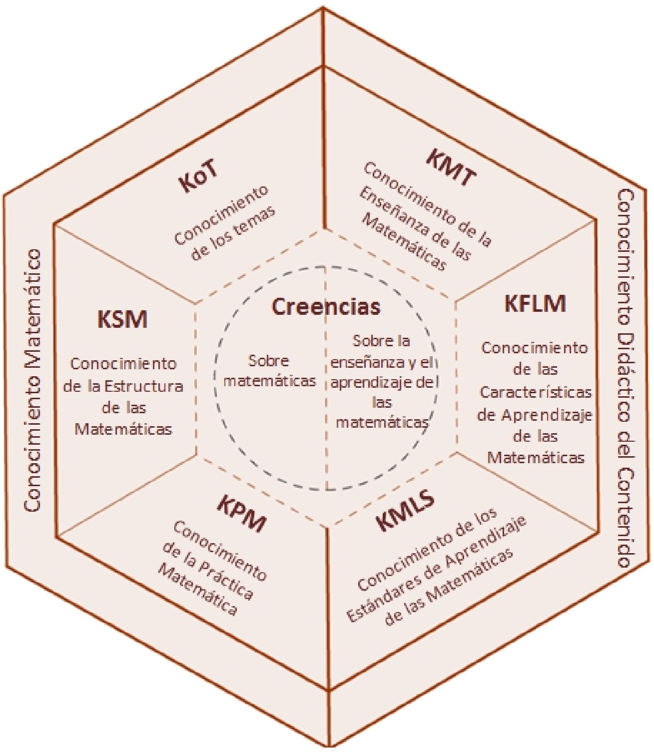


Figura 1. Subdominios del MTSK.

El MTSK se compone de seis subdominios de conocimiento, tres conforman el dominio matemático y tres el didáctico del contenido. La forma en la que se subdivide el dominio de conocimiento matemático es una de las principales aportaciones del MTSK El aporte es en términos analíticos, ya que la división intrínseca a la matemática permite un análisis más focalizado. Se considera el conocimiento (profundo) de un tema, el conocimiento de las relaciones entre temas y el conocimiento sintáctico de la forma en la que se procede en matemáticas. El conocimiento del conocimiento didáctico del contenido tiene una subdivisión más tradicional (conocimiento de aprendizaje, enseñanza y logros esperados). Su principal aporte es la consideración explicita de elementos de la Educación Matemática (como disciplina científica) como fuente que alimenta al conocimiento de los profesores. Finalmente, otro elemento relevante en el modelo es la consideración de las concepciones del profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Dichas concepciones sirven como elementos que permean los conocimientos de los profesores y que nos permiten, en primera instancia, hacer análisis sin un referente fijo de conocimiento, sino entendiendo que estos están influenciados por el sistema de concepciones del profesor.

A continuación mostramos la publicación Flores-Medrano et al. (2014) en la cual presentamos una visión completa del MTSK y de los aspectos que lo conforman. En la página 45 de esta memoria aparece un error de impresión debido al formato de la ecuación. La expresión que debería haber aparecido es:

$$\frac{-\sqrt{(x^2+1)^3}+\frac{(x-1)-3\left(x^2+1\right)^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}}{(x^2+1)^3}$$

NUESTRA MODELACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS, EL MTSK

Eric Flores-Medrano, Dinazar Escudero-Ávila, Miguel Montes, Álvaro Aguilar, José Carrillo

4.1 NATURALEZA

El *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK) tiene una dualidad en tanto es una propuesta teórica que modela el *conocimiento núcleo* del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y es, a su vez, una herramienta metodológica que permite analizar distintas prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Flores, Escudero y Aguilar, 2013).

El grupo de investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva, España, ha desarrollado trabajos de investigación en diversas temáticas que tratan sobre el profesor de matemáticas (para más detalles ver Carrillo, Flores, Climent, Contreras, Aguilar, Escudero y Montes, 2013). En particular, con respecto al estudio del conocimiento del profesor de matemáticas algunos trabajos (Sosa, 2011) se interesan por el establecimiento de categorías y descriptores de conocimiento para los subdominios del *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball, Thames y Phelps (2008). La experiencia de este tipo de investigaciones y el análisis profundo de las asignaciones de evidencias a subdominios ayudó a nuestro grupo en la detección de dificultades con respecto a la delimitación entre distintos subdominios y otras provenientes de la caracterización de los subdominios mediante acciones en lugar de caracterizarlos por medio de los conocimientos que permiten su realización (Escudero, Flores y Carrillo, 2012; Flores, Escudero y Carrillo, 2013).

El MTSK surge como respuesta a las dificultades detectadas en el MKT y toma como base las potencialidades de éste y de otros modelos que caracterizan el conocimiento del profesor de matemáticas (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Este modelo considera el carácter especializado del conocimiento del profesor de manera integral en todas sus subdimensiones y evita hacer alusión a referentes externos (conocimientos de otras profesiones). Mantiene la separación que hace Shulman (1986) en dos dominios de conocimiento (conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido matemático) y dota de contenido a cada uno de estos dominios con tres subdominios y categorías internas a éstos.

En las siguientes secciones detallaremos la caracterización del MTSK como modelo analítico para interpretar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

4.2 SUBDOMINIOS

El MTSK considera, al igual que Shulman (1986), dos grandes grupos de conocimiento cuya naturaleza y medios de validación difieren entre sí. Por un lado, consideramos el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas como disciplina científica en un contexto escolar. En el modelo, llamamos a este dominio el *Mathematical Knowledge*[19]. El otro dominio es el co-

[19] Nos separamos de la idea del *Subject Matter Knowledge* que propone Shulman (1986) y que utilizan, entre otros,

nocimiento de aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje. Llamamos a este dominio el *Pedagogical Content Knowledge*[20](Carrillo, Climent, et al., 2013), siguiendo la nomenclatura establecida por Shulman (1986, 1987). A continuación se describirán los subdominios correspondientes a cada dominio de conocimiento definiéndolos y presentando una serie de categorías con algunos ejemplos que las ilustran. El sistema de categorías que se presenta en cada subdominio surge de la elucubración teórica y de los datos empíricos con los que hemos trabajado hasta el momento. No se trata de una categorización exhaustiva, pero sí recoge de manera integral los datos con los que hasta el momento contamos.

4.2.1 Conocimiento matemático

Un elemento fundamental en el conocimiento del profesor es el conocimiento de la propia disciplina que enseña. Por lo cual, resulta necesario plantearnos como objeto de investigación saber qué y cómo conoce/debe conocer matemáticas un profesor de matemáticas.

Existen diversos modelos que proponen mecanismos de explicación e investigación sobre el conocimiento matemático (McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase y Senk, 2012), que, como característica común, señalan la diferencia entre la forma de conocer matemáticas por parte de los profesores y la de otros usuarios de esta disciplina.

Dentro de la caracterización sobre el conocimiento matemático del profesor de matemáticas existen modelos que diferencian la naturaleza del propio conocimiento. Por ejemplo, Usiskin (2001) propone tres tipos de conocimiento matemático que requiere el profesor. El primero consiste en la extensión y generalización del contenido de las matemáticas escolares; el segundo es el análisis de conceptos y distingue a éste del análisis de problemas, que es el tercer tipo de conocimiento matemático. Ball *et al*. (2008) distinguen el conocimiento común del especializado y añaden a estos el del horizonte matemático.

En el MTSK consideramos tres subdominios que componen y dan sentido al conocimiento matemático: el conocimiento (profundo) del contenido matemático en sí (*conocimiento de los temas matemáticos*), de su estructura (*conocimiento de la estructura matemática*) y de cómo se procede y produce en matemáticas (*conocimiento de la práctica matemática*).

4.2.1.1 Conocimiento de los temas matemáticos (KoT)

El profesor debe conocer los contenidos que enseña a sus estudiantes. Diversos autores se han cuestionado sobre qué y cómo requiere conocerlos. Por ejemplo, en el MKT esta idea se asocia, en un extremo, con el *Common Content Knowledge* (CCK):"[los profesores] deben ser capaces de hacer el trabajo que asignan a sus estudiantes" (Ball *et a*l., 2008, p. 399, la traducción es nuestra). En el otro extremo consideran que el *Specialised Content Knowledge* (SCK) es "conocimiento del contenido requerido para la enseñanza, más allá del conocimiento común del contenido" (Markworth, Goodwin y Glisson, 2009, p.69, la traducción es nuestra). Esta dicotomía que plantean en el MKT reconoce que hay, por lo menos, dos formas en las que el docente conoce las matemáticas que enseñará a sus estudiantes [el *Horizon Content Knowledge* es la tercera forma que

Ball, et al. (2008). Dicha separación responde a la consideración de características de la matemática cual disciplina científica, sin que esto signifique que no reconozcamos la distinción entre la *Matemática* y la *Matemática Escolar*.

[20] Asumimos este dominio como un conocimiento didáctico que se deriva de la matemática como fuente principal, más que entenderlo como la intersección entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico.

proponen para conocer matemáticas, a veces llamado conocimiento ampliado (Godino, 2009), otras veces conocimiento periférico de las matemáticas (Foster, 2011) y también conocimiento avanzado (Zazkis y Mamolo, 2011), pero no es claro el grado de asociación con el conocimiento que enseñan a sus estudiantes].

En Flores, Escudero, *et al*. (2013) señalamos algunas problemáticas de definir subdominios mediante complementariedad. Para fines analíticos, dichos tipos de definiciones nos obliga a establecer criterios de diferenciación cuyo grado de subjetividad ocasiona la consideración de aspectos no equivalentes en diferentes países, sistemas escolares u otros.

Para describir qué y cómo el profesor de matemáticas conoce los temas que va a enseñar, en el MTSK consideramos el KoT, que supone conocer los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada. Integra el contenido que queremos que aprenda el alumno y permite la consideración de un conocimiento con un nivel de profundización mayor al esperado para los alumnos. Por ejemplo, la comprensión del profesor de Educación Primaria sobre la suma puede incluir significados de combinación, comparación y de cambio con situaciones correspondientes (el total de objetos que tienen entre dos personas, el total de objetos que tendrá una persona al añadir una nueva cantidad), así como conocer su fundamentación (comprender la suma como una operación binaria sobre conjuntos numéricos, con sus propiedades correspondientes).

Entendemos por tema los contenidos provenientes de los bloques de conocimiento tradicionalmente considerados en matemáticas. Consideramos como referente las áreas propuestas por el NCTM (2000) en los estándares matemáticos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad, los cuales están relacionados entre sí. Los temas son los componentes de estas grandes ramas y pueden variar de acuerdo al currículo de cada país.

Se proponen cinco categorías para caracterizar el contenido del KoT y que pueden emplearse indistintamente del tema que el profesor esté abordando. A continuación se describe y ejemplifica cada una de estas.

La categoría *Fenomenología* tiene un carácter bivalente. Por un lado, consideramos el conocimiento que el profesor tiene acerca de modelos atribuibles a un tema, vistos estos como fenómenos que pueden servir para generar conocimiento matemático, entre ellos, los que aparecen en la génesis del propio concepto. Por ejemplo, el conocimiento que tiene un profesor sobre el tipo de problemática *ad hoc* a cada algoritmo para resolver una división de fracciones (Flores, 2008) estaría en esta acepción de la categoría. Por otro lado, se considera el conocimiento que tiene acerca de usos y aplicaciones de un tema. Por ejemplo, que el profesor conozca que una aplicación para el teorema de Thales es la medición de distancias inaccesibles.

Otra categoría es el conocimiento de las *Propiedades y sus Fundamentos* atribuibles a un tema o procedimiento en particular. Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor de que el producto de matrices no cumple algunas propiedades de estructura algebraica (como la conmutatividad), forma parte de esta categoría.

Consideramos, además, el conocimiento que el profesor tiene acerca de las distintas formas en que puede representar el tema trabajado (numérica, gráfica, verbal, analítica, etcétera), así como el conocimiento de la notación y vocabulario adecuado asociado a dichas representaciones. A esta categoría la hemos denominado *Registros de Representación*[21].

[21] Con base en la nomenclatura de los trabajos de Raymond Duval (Duval, 1999; Duval, 2006).

En la matemática escolar es común definir los objetos matemáticos utilizando una serie de propiedades que cumplen éstos (se define número par como aquel que es múltiplo de dos; se define triángulo acutángulo como aquel que tiene tres ángulos agudos).Proponemos la categoría *Definiciones* para considerar el conocimiento del conjunto de propiedades que hacen definible a un objeto determinado además de formas alternativas que utilice el profesor para definir (aunque no incluimos aquí el conocimiento de las características que ha de tener una definición).

En la categoría *Procedimientos* consideramos, por ejemplo, el conocimiento de algoritmos convencionales y alternativos (¿cómo se hace/utiliza?); las condiciones suficientes para proceder (¿cuándo se puede hacer/utilizar?); los fundamentos de los algoritmos (¿por qué se hace/utiliza así?) y las características que tendría el objeto resultante asociadas al tema en cuestión. Por ejemplo, para la división de fracciones, conocer el algoritmo de los productos cruzados, el de invertir el divisor y utilizar el algoritmo para multiplicar, o bien el de dividir sólo los numeradores una vez convertidas ambas a fracciones con denominador común forma parte de esta categoría.

Construir ejemplos para un tema matemático determinado es una actividad que requiere de distintos conocimientos considerados en las categorías, sobre todo, en la de propiedades y sus fundamentos. Distintos niveles de profundidad en esos conocimientos darán como resultado distintos niveles de sustento, transparencia y validación de dichos ejemplos (Watson y Mason, 2005). De igual forma, construir demostraciones, o conocerlas *per se*, involucra conocimientos identificables en las distintas categorías, además de, por supuesto, conocimiento sobre las cualidades de la demostración (que lo consideramos en el KPM, descrito más adelante en este mismo capítulo).

4.2.1.2 Conocimiento de la estructura matemática (KSM)

Este subdominio tiene sus bases en el Horizon Content Knowledge descrito como "*an awareness of how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum*" (Ball *et al*., 2008, p.403). El HCK contempla el conocimiento que le permite a un profesor enseñar los temas de un curso como fundamentación para cursos posteriores. Consideramos, además, el trabajo de Ball y Bass (2009), en el cual proponen una serie de subdivisiones del HCK: con respecto a los temas [HCK(T)], en el que están las conexiones tanto entre temas de matemáticas como con temas de otras disciplinas; con respecto a las prácticas [HCK(P)], en el que se contempla cómo es construida la matemática, y con respecto a los valores [HCK(V)],que contiene los principales valores cuando se trabaja o se hacen matemáticas. De esta distinción consideramos como conocimiento de la estructura matemática únicamente las conexiones contempladas en el HCK(T) y, de estas, específicamente las intramatemáticas ya que las relaciones extramatemáticas las consideramos en la fenomenología y aplicaciones, que son parte del KoT. El HCK(P) forma parte de nuestro subdominio de la Práctica Matemática (descrito más adelante) y el HCK(V) lo consideramos como parte de las concepciones del profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.

En los trabajos de Figueiras, Ribeiro, Carrillo, Fernández y Deulofeu (2011) y Martínez, Giné, Fernández, Figueiras y Deulofeu (2011), se incorporan la diferenciación de tres tipos de conexiones al estudio del HCK. Las conexiones *intraconceptuales* (tienen lugar en la proximidad de un único concepto), las conexiones *interconceptuales* ["los conectores son ideas matemáticas que permiten vincular diferentes representaciones del mismo concepto o diferentes conceptos que los estudiantes afrontan en el mismo momento" (Martínez *et al*., p.431)] y las conexiones *temporales* (se dan entre conocimientos previos y futuros).

El KSM es el conocimiento de las relaciones que el profesor hace entre distintos contenidos (Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013), ya sea del curso que está impartiendo o con contenidos de otros cursos o niveles educativos. Se trata específicamente de conexiones entre temas matemáticos.

Reconocemos dos aspectos no excluyentes entre sí que generan conexiones de interés para el KSM:

- La temporalidad, no como visión curricular, sino como visión secuenciadora que genera conexiones de complejización y simplificación.
- La delimitación de objetos matemáticos que genera conexiones intraconceptuales e interconceptuales. Estas primeras ya son contempladas en el KoT, ya que se trata de cualidades de un tema matemático (el conocimiento acerca de ángulos que muestra el profesor al clasificar triángulos sería, según nuestra óptica, un conocimiento de triángulos, no lo consideramos como una relación a estudiar en el KSM, sino como un conocimiento de características al interior de un tema matemático central).En el KSM sólo consideramos las conexiones interconceptuales.

Proponemos cuatro categorías de conexiones matemáticas. En el MTSK estudiamos el conocimiento que corresponde al profesor de matemáticas sobre estas conexiones.

La primera categoría son las *Conexiones de Complejización*, en la cual se relacionan los contenidos enseñados con contenidos posteriores. Una visión de la matemática elemental desde un punto de vista avanzado (en el sentido de Klein, 1933) se refleja en la proyección de los contenidos enseñados como potenciadores para futuros. Por ejemplo, el conocimiento que tiene un profesor del trabajo con escalas como una complejización de la actividad de ordenar por tamaños de educación infantil, es parte de esta categoría.

La siguiente categoría son las *Conexiones de Simplificación*, en la cual se relacionan los contenidos enseñados con contenidos anteriores. Una visión de la matemática avanzada desde un punto de vista elemental se refleja en la retrospección de los contenidos enseñados potenciados por los previos. En Montes, Contreras y Carrillo (2013), se presenta la discusión entre un profesor y una estudiante acerca de cómo tratar una expresión algebraica que resulta de obtener la derivada segunda de la función (Figura 1) y en la que debe explorar los puntos de inflexión. El profesor sugiere que el trabajo de simplificación de la expresión es equivalente a manipular . En este ejemplo, el profesor simplifica el tratamiento de expresiones algebraicas al tratamiento con números racionales.

$$-x2+13+x-1-3x2+12x2+13x2+13$$

Figura 1. Expresión algebraica obtenida al calcular la derivada segunda.

La tercera categoría comprende las *Conexiones de Contenidos Transversales*. No son conexiones de contenidos más simples o más complejos entre sí, sino que hay una cualidad común en estos que les relaciona, y los modos de pensamiento asociados a dichos temas contemplan esta característica común. Por ejemplo, los patrones de igualdad y similitud relacionan los tres temas siguientes: propiedades de relaciones de equivalencia (por ejemplo, la propiedad conmutativa,), resultados de aplicar operadores a conjuntos numéricos (la función aplicada al conjunto de los números reales), y la congruencia y semejanza entre figuras (). En el límite, la derivada, la continuidad puntual y global, la integral, subyacen procesos infinitos que les hacen relacionarse (en este ejemplo existe, además del infinito, otras posibilidades para relacionar esos temas, pero se quiere resaltar aquí la conexión provocada por el infinito como idea transversal en matemáticas).

La última categoría considera las *Conexiones Auxiliares*. Por ejemplo, el uso de ecuaciones como auxiliar para determinar las raíces (o determinar la no existencia de estas) de una función es una conexión interconceptual entre ecuaciones y funciones. No se trata de una conexión intraconceptual, ya que la ecuación no es una cualidad de la función (la existencia de la ecuación depende de la continuidad de la función en el punto evaluado) y tampoco es una complejización o simplificación entre ecuaciones y funciones. Aquí, la necesidad de encontrar raíces puede hacer de la *ecuación* un elemento auxiliar para la *función*.

4.2.1.3 Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

Este subdominio destaca la importancia de que el profesor no sólo conozca resultados matemáticos establecidos (conocimiento considerado en el KoT), sino también las formas de proceder para llegar a ellos y las características del trabajo matemático. Se trata de saber cómo se explora y se genera conocimiento en matemáticas, cómo se establecen relaciones, correspondencias y equivalencias, cómo se argumenta, se razona y se generaliza, qué papel tiene el convenio, y qué características tienen algunos de los elementos con los que se hacen matemáticas (como una definición o una demostración).

Esta idea, que nace de la consideración del HCK(P) de Ball y Bass (2009) y de los trabajos de Schwab (1978); Ball y McDiarmid (1990); Ball (2003), y Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep (2009), acerca del conocimiento sintáctico, supone considerar que un profesor ha de saber razonar matemáticamente y, más aún, conocer distintos tipos de razonamientos y saber en qué contextos matemáticos unos son más adecuados que otros.

Consideramos el conocimiento que tiene el profesor acerca de la lógica proposicional, de los modos de proceder (el conocimiento de heurísticos en la resolución de problemas, por ejemplo) y de la sintaxis propia de las matemáticas.

Para este subdominio hemos construido dos categorías al diferenciar el conocimiento ligado a la matemática en general y el ligado a la idea de temática[22] en matemáticas.

La categoría *Prácticas ligadas a la Matemática en General* considera un tipo de conocimiento sobre cómo se desarrollan las matemáticas independientemente del concepto abordado, como pudiera ser, por ejemplo, saber el significado de una condición necesaria y una condición suficiente o saber que las cualidades de una definición (por ejemplo, que posee límites). Este conocimiento, usado para trabajar genéricamente en matemáticas, es necesario en el profesor ya que provee de estructuras lógicas de pensamiento que ayudan a entender el funcionamiento de diversos aspectos matemáticos.

Un ejemplo de la categoría *Prácticas ligadas a una Temática en Matemáticas* aparece cuando, por ejemplo, un profesor, al trabajar con conjuntos numerables infinitos, recurre a la inducción

[22] Lo consideramos como un conjunto de temas conectables por una posible forma de proceder en ellos.

para probar cierta propiedad. Es posible que la use porque sepa que esa propiedad en concreto requiere una demostración que ha memorizado, caso en el que no podríamos hablar de un conocimiento de gran profundidad, pero también es posible que ese profesor use la inducción en dicha propiedad al saber que, como el conjunto es infinito y numerable, una aproximación al razonamiento sobre dichos conjuntos mediante un pensamiento inductivo suele usarse para la búsqueda de generalización.

Así, entendemos que este subdominio es fundamental para que el profesor no solo sea capaz de conocer los diferentes temas que pudiera impartir, así como su integración en la estructura matemática que considere el propio profesor, sino que también ha de tener conciencia de cómo se razona y produce en matemáticas, para dar solidez a su propio conocimiento, así como para saber gestionar los razonamientos matemáticos puestos en juego por sus alumnos, a la hora de aceptarlos, refutarlos, o refinarlos, en caso de ser necesario.

4.2.2 Conocimiento didáctico del contenido

A partir de que Shulman (1986) propusiera como un dominio de conocimiento el *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) se generó entre los investigadores un especial interés por indagar en éste (Carpenter, Fennema, Peterson y Carey, 1988; Even y Tirosh, 1995; Llinares, 2000; Park y Oliver, 2008). Entre los aspectos que lo hacen especialmente interesante está su caracterización como un conocimiento particular del profesor, propio de la labor de enseñanza. Estas características le atribuyen un papel importante dentro de la conformación del conocimiento profesional. Las investigaciones realizadas sobre PCK han buscado obtener una mejor conceptualización de este constructo en términos de sus características.

La inclusión de aspectos correspondientes al PCK en el MTSK responde al reconocimiento de la importancia de que el profesor conozca el contenido matemático desde el punto de vista de un contenido a enseñar (*conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*), desde el punto de vista de un contenido a aprender (*conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas*) y desde una visión general de los estándares de aprendizaje que se pueden/pretenden alcanzar (*conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas*).

En los subdominios que consideramos en el PCK, no incluimos conocimientos pedagógicos en contextos de actividades matemáticas, sino tan solo aquellos donde el contenido matemático condiciona la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Es en este dominio en el cual las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas cobran mayor relevancia como posibles fuentes de conocimiento para el profesor.

4.2.2.1 Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM)

Este subdominio engloba los conocimientos sobre las características de aprendizaje inherentes al contenido matemático. Evita mirar al estudiante como el foco principal del proceso cambiándola mirada hacia el contenido matemático como objeto de aprendizaje. Esto no implica que quitemos importancia al papel del estudiante en el proceso, sino que nos interesa el conocimiento relacionado con las características de aprendizaje derivadas de su interacción con el contenido matemático y no las características del estudiante en sí mismo.

Consideramos la categoría *Formas de Aprendizaje*, con la que se reconoce el conocimiento que tiene el profesor acerca de los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático. Incluye el conocimiento de estructuras o teorías personales o institucionalizadas sobre el desarrollo cognitivo del estudiante tanto para la matemática en general como para contenidos particulares. Por ejemplo, un profesor puede conocer, de manera formal o informal, la *secuencia* de Acciones, Procesos, Objetos y Estructuras (Arnon, et al., 2014) como explicación del desarrollo cognitivo del estudiante cuando éste se enfrenta a la tarea de aprender en matemáticas.

La categoría *Fortalezas y Dificultades asociadas al Aprendizaje* engloba conocimientos sobre los errores, obstáculos y dificultades asociados a la matemática en general y a temas concretos. Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor sobre las posibles confusiones entre el área y el perímetro en estudiantes de primaria. También se considera aquí el conocimiento de las ventajas o potencialidades que podrían aprovecharse para el aprendizaje, asociados a la naturaleza de la matemática en sí misma o de un contenido particular, por ejemplo reconocer la potencialidad y dificultades implicadas en el aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado como consecuencia de su tratamiento gráfico. Estos pueden estar asociados al contexto específico en el cual se aprende el contenido matemático, de manera que puedan reconocerse distintos matices en las características de aprendizaje de un grupo particular de individuos (Pinto y González, 2006).

La categoría de conocimiento sobre las *Formas de Interacción de los Alumnos con el Contenido Matemático*, se refiere al conocimiento que tiene el profesor acerca de los procesos y estrategias de los estudiantes, tanto los típicos como los no habituales, y a los conocimientos sobre el posible lenguaje o vocabulario usado comúnmente al abordar un determinado contenido (Sosa, Aguayo y Huitrado, 2013). Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor sobre los algoritmos típicamente usados para resolver un sistema de ecuaciones lineales, de acuerdo a la forma en la que se presenta la ecuación (general, punto pendiente, ordenada al origen).

Finalmente, la categoría del conocimiento de *Concepciones de los Estudiantes sobre Matemáticas*, considera el conocimiento que tiene el profesor sobre las expectativas e intereses que tienen los estudiantes con respecto a las matemáticas. Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor sobre las preconcepciones de facilidad o dificultad que los estudiantes asocian a las distintas áreas de la matemática.

4.2.2.2 Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)

Incluimos en este subdominio el conocimiento de recursos, materiales, modos de presentar el contenido y el potencial que puede tener para la instrucción, así como el conocimiento de ejemplos adecuados para cada contenido, intención o contexto determinado.

Al igual que el KFLM, en este subdominio hablamos de conocimientos intrínsecamente dependientes de los contenidos matemáticos en sí. No se trata de conocimiento de matemáticas por un lado y de la enseñanza por otro, sino que se incluyen tan solo aquellos conocimientos en donde el contenido matemático condiciona la enseñanza (excluimos, por ejemplo, estrategias de enseñanza que pueden resultar potentes desde la visión de la pedagogía en general, como el trabajo en equipo).

Como en el resto de subdominios del PCK, puede ser un conocimiento fundamentado en resultados de la investigación en Educación Matemática o en la observación y reflexión de la actividad matemática en el aula, por ejemplo, enseñar a través de la resolución de problemas. Para este subdominio se han considerado tres categorías:

La primera categoría es el conocimiento de *Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza*. De manera general el profesor puede tener conocimiento de teorías de enseñanza específicas de la Educación Matemática. Por ejemplo, el conocimiento de la estructura general propuesta en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986) [Acción, Formulación, Validación e Institucionalización] bajo las cuales pueden diseñarse actividades para el aula y ambientes de trabajo matemático *ad hoc* a dichas actividades. En esta categoría consideramos los conocimientos sobre la potencialidad que pueden tener ciertas actividades, estrategias o técnicas didácticas asociadas a un contenido matemático, así como los alcances que éstas tienen. Nos referimos, además, al conocimiento de las analogías, ejemplos típicos, metáforas, explicaciones, etcétera, que los profesores consideren potentes en el abordaje de un contenido matemático y un momento particular de enseñanza, las cuales pueden definirse como posibles representaciones del contenido para la instrucción.

En otra categoría consideramos el conocimiento de *Recursos Materiales y Virtuales* asociados al contenido a enseñar. Se refiere a los conocimientos del profesor sobre los recursos materiales y virtuales como elementos para la enseñanza de las matemáticas (libros de texto, regletas, pizarras normales y electrónicas, Tangrams, software como Cabri o Geogebra, etcétera) y los beneficios o dificultades asociadas al uso de éstos como apoyo para la enseñanza de un determinado contenido matemático, es decir, no consideramos incluido en este subdominio, por ejemplo, el reconocimiento de un recurso como herramienta pedagógica motivadora de actitudes positivas de trabajo en los estudiantes. Un ejemplo es el conocimiento que tiene el profesor acerca de las limitantes a las que se enfrentará si utiliza el Geoplano en una actividad en la que pretende clasificar triángulos, puesto que con esta herramienta no es posible generar triángulos equiláteros.

Finalmente, consideramos la categoría *Actividades, Tareas, Ejemplos, Ayudas*. Aunque estas ideas pueden ser relacionadas con recursos para la enseñanza y pertenecer a la categoría anterior, vimos la dificultad analítica de asociarlos a recursos por la amplitud que conformaría dicho constructo. Es por eso que, a diferencia de la categoría anterior en la que se contempla el conocimiento del profesor del objeto material o virtual en sí, en esta categoría consideramos aquellos elementos que denotan la intencionalidad de enseñanza del profesor en un tema determinado. Saber, por ejemplo, en qué momento y qué tipo de ayuda brindar a los estudiantes, cuáles ejemplos son más potentes de acuerdo al momento e intencionalidad de la clase o conocer alguna tarea específica para propiciar el aprendizaje de un contenido matemático (conocer la Situación Didáctica del rompecabezas[23] para el tema de proporciones) forman parte de esta categoría.

4.2.2.3 Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)

La relevancia de considerar el conocimiento que un profesor tiene acerca de lo que está estipulado que aprenda un estudiante y el nivel conceptual con el que se espera que lo aprenda en un determinado momento escolar ha sido reflejada por diversos autores. Por ejemplo, Shulman (1987) utiliza como categoría al *Conocimiento Curricular* y señala que es:

[23] Una variante de la situación didáctica original diseñada por el grupo de Guy Brousseau, se encuentra en la página: http://www.proyectosmatedu.cinvestav.mx/situaciones/images/rompecabezas1.html

> "represented by the full range of programs designed for the teaching of particular subjects and topics at a given level, the variety of instructional materials available in relation to those programs, and the set of characteristics that serve as both the indications and contraindications for the use of particular curriculum or program materials in particular circumstances" (p.10).

Por otro lado, Ball et al. (2008) **consideran el conocimiento curricular como parte del Pedagogical Content Knowledge**, sin embargo, hacen dicha consideración con reservas: "*we are not yet sure whether this may be a part of our category of knowledge of content and teaching or whether it may run across the several categories or be a category in its own right*" (p.400). En ambos casos, se ha considerado, sobre todo, el conocimiento de materiales y programas que sirvan como herramientas de trabajo para los profesores.

De manera genérica, coincidimos con el documento del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte [España] (2014) para entender al currículo como una "*regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas y etapas educativas*" (p.19351). Sin bien creemos que resulta conveniente que un profesor conozca en profundidad y pueda integrar a su labor cada uno de los aspectos que contempla el currículo, para fines analíticos nos preguntamos por los aspectos que tienen sentido solamente para el profesor de matemáticas. Es de esta forma que nos preocupamos por el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas.

Entendemos como estándar de aprendizaje aquello que indica el nivel de capacidad- atribuible a los estudiantes en un determinado momento escolar- para entender, construir y saber matemáticas. Estas nociones de nivel de capacidad pueden ser construidas por el profesor a partir del estudio o contacto con diversas fuentes. La principal, y que habitualmente rige en su labor, es el currículo institucional. Otros currículos que no pertenezcan a su institución (de otros países o sistemas escolares, por ejemplo) también pueden ser fuente de información al respecto. Consideramos que otra fuente es la literatura de investigación que aborda temas referentes al estudio de estadios de conocimiento matemático (NCTM, 2000).

Para este subdominio consideramos tres categorías de conocimiento. La primera se refiere al conocimiento que el profesor tiene acerca de qué *Contenidos Matemáticos se requieren Enseñar* en el grado escolar en el que esté impartiendo clases. Este conocimiento puede ser adquirido por el profesor, ya sea mediante la consulta de un documento rector que indique cuáles son esos contenidos, o como abstracción de las capacidades matemáticas específicas que requiere desarrollar en sus estudiantes en ese momento escolar. Por ejemplo, en los estándares de la NCTM (2000) señalan que se espera que los estudiantes adquieran, entre los grados 3 y 5, la capacidad de explorar semejanza y congruencia. El conocimiento que el profesor usa para determinar qué temas *sirven* para lograr este fin es un ejemplo del contenido de esta categoría.

En la segunda categoría consideramos el *Conocimiento del Nivel de Desarrollo Conceptual y Procedimental esperado*[24] para un tópico en un determinado momento escolar. Saber, por ejemplo, qué tipos de clasificaciones de figuras se espera que haga un alumno de tercer grado, forma parte de esta categoría.

[24] De manera genérica nos referimos a niveles de abstracción, de complejización, etcétera.

La tercera categoría se refiere a la *Secuenciación de diversos Temas*, ya sea dentro del mismo curso o pensando en cursos anteriores (conocimientos y capacidades previas que tiene un estudiante para enfrentar tareas) o cursos posteriores (conocer las potencialidades que debe desarrollar para un determinado tópico). Por ejemplo, según el Ministerio de la Presidencia [España] (2006), en el primer ciclo (grados 1 y 2), la multiplicación es trabajada como *el número de veces* y en el segundo ciclo (grados 3 y 4) es vista como suma abreviada, en disposiciones rectangulares y problemas combinatorios. El conocimiento de esta secuenciación tanto conceptual como procedimental para la multiplicación proveniente de las pretensiones de cada ciclo, forma parte de esta categoría.

Así, en este subdominio consideramos el conocimiento que posee el profesor de matemáticas acerca de aquello que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado (o lo que ha alcanzado en uno anterior, o lo que alcanzará en uno posterior). Es aquello que el profesor sabe sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueven en determinados momentos educativos.

4.2.3 Síntesis

En el MTSK hemos enfocado la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas pensando en el conocimiento que sólo tiene sentido para él como una integración de distintos dominios de conocimiento, en las diferentes formas en que el profesor interactúa con el conocimiento matemático de cara a su enseñanza. La especialización del MTSK permite diferenciarlo del PPK (conocimiento de pedagogía y psicología general), del XTSK (conocimiento especializado del profesor de otra materia) y del MYSK (conocimiento especializado de otro profesional de la matemática).

La caracterización en subdominios y categorías internas a estos es la estructura fundamental en el modelo. A ésta se añaden descriptores que permiten una caracterización cada vez más fina. Este trabajo de interiorización y refinamiento en los subdominios pretende conformar una herramienta que permita focalizar en los elementos de conocimiento que le son útiles al profesor de matemáticas para desarrollar su labor. Nos basamos en la elucubración teórica y en estudios empíricos. Estos segundos son realizados en distintas prácticas del profesor (dentro y fuera del aula, incluyendo los procesos de formación inicial y permanente). Reconocemos que el actuar del profesor no está exclusivamente basado en aquello que conoce y que el buen desempeño de éste no guarda una relación directa con el *buen conocer*, pero también reconocemos que es necesario delimitar aquellos conocimientos fundamentales que dan entidad a la profesión.

4.3 ALGUNAS RELACIONES ENTRE LOS SUBDOMINIOS

El hecho de que el MTSK represente secciones de conocimiento a través de la consideración de los seis subdominios tiene fines específicamente analíticos. No pretende reflejar una visión del conocimiento del profesor como una estructura particionada. Consideramos que el conocimiento del profesor tiene todos los subdominios de forma integral y que el MTSK permite una visión holística de dicho conocimiento, pudiendo, en un mismo episodio, encontrar varios subdominios del conocimiento del profesor. En esta sección señalaremos algunas relaciones que permiten el *regreso a la integración* de los elementos que pueden ser estudiados de manera diferenciada.

Relaciones KSM-KMLS: De las categorías del KMLS, la referente a la secuenciación de temas tiene aspectos similares con las ideas de conexiones de complejización y simplificación del KSM. Determinar cuáles son conocimientos previos (o posteriores) para un tema T trae consigo dos líneas de argumentación. Por un lado, se pueden señalar y justificar las relaciones matemáticas de complejización (o simplificación) del tema previo (posterior) en T, lo cual consideramos en KSM. Por otro lado se puede hacer referencia al nivel de abstracción esperada para un determinado curso en comparación con el nivel esperado para el tema T, lo cual es información acerca del KMLS. En cualquier caso, las relaciones entre temas posteriores y anteriores promueven reflexiones conjuntas entre estos dos subdominios, siendo las justificaciones matemáticas parte del KSM y las justificaciones didácticas del contenido serían parte del KMLS.

Relaciones KoT-KMLS: Al igual que en las relaciones anteriores, éstas surgen cuando es considerada la categoría de secuenciación del KMLS. La relación con el KoT se presenta cuando dicha secuenciación responde, desde el punto de vista matemático, a conexiones intraconceptuales (el mínimo común múltiplo como tema anterior a la suma de fracciones, por ejemplo).

Relaciones KFLM-KMLS: Reconocemos que existen diversas formas de desarrollar propuestas curriculares y que estas estarán en función de objetivos e ideologías más amplias al aprendizaje de temas o desarrollo de capacidades. Sin embargo, la interpretación e incluso la elaboración de algunas propuestas sí puede guardar relación directa con la búsqueda de un *desarrollo cognitivo adecuado* por parte del que aprende. Es en esta noción donde estos dos subdominios encuentran sus puntos en común.

Relaciones KFLM-KMT: Explorar, a partir de las intenciones del profesor, el conocimiento que sustenta una determinada decisión de éste, puede generar explicaciones de enseñanza-aprendizaje que tengan entidad en sí misma y que los argumentos para asignarlas a uno u otro subdominio requieran tener una carga subjetiva demasiado elevada. Para fines analíticos, en el KFLM consideramos el conocimiento que sustenta las explicaciones acerca del propio proceso de apropiación de un objeto matemático, mientras que en el KMT consideramos las herramientas (técnicas y de recursos) que emplea el profesor para lograr esos fines.

Relaciones KoT-KPM: Las prácticas consideradas en el KPM, en diversas ocasiones dan sustento a la generación de conocimiento que es contemplado en el KoT. Por ejemplo, mientras en el KPM se considera el conocimiento que el profesor tiene acerca de qué y cómo es una demostración, en el KoT consideramos el conocimiento que tiene de, por ejemplo, la demostración de que es irracional. Lo mismo sucede para el caso de definir, ejemplificar, conocer condiciones de suficiencia y necesidad, entre otros.

Relaciones MK-KMT/KFLM: Los subdominios KFLM y KMT no contienen conocimiento matemático, pero sí requieren de éste para su funcionamiento. Así, un diseño de actividades para el aula, puede involucrar conocimiento de características de aprendizaje, de recursos y ejemplos potentes para el contenido que se pretenda enseñar y todo esto estará normado por el conocimiento matemático de dicho contenido. Ese conocimiento que norma a los de las otras dos naturalezas es puramente matemático y puede dar sustento desde esa óptica disciplinar a las determinaciones de carácter didáctico del contenido que tome el profesor.

4.4 PAPEL DE LAS CREENCIAS

En diversas investigaciones sobre el conocimiento utilizado por profesores en diferentes prácticas se señalan carencias de ciertos conocimientos (Linchevsky y Vinner, 1989; Even, 1990; Llinares y Sánchez, 1991). Este fenómeno comprende, entre otras cosas, la incorporación de aquello que el investigador (o el marco teórico con el que se investiga) considere como conocimiento deseable para el profesor de matemáticas. Al hablar de lo deseable, podemos plantearnos varios cuestionamientos acerca de la libertad metodológica que esto permite. Por ejemplo, lo relacionado al perfil de profesor a investigar y el paradigma que más se adecua a fijar un estado deseable.

Somos conscientes de que las concepciones del investigador sobre matemáticas, su enseñanza y aprendizaje influyen constantemente en la toma de determinaciones y en el análisis e interpretación de las producciones que conforman su investigación. Al igual que somos conscientes de que la práctica del profesor tiene detrás una filosofía de las matemáticas que la respalda (Thom, 1973, citado en Ponte, 2012). Entendemos que esta filosofía contiene un conjunto de concepciones y creencias del profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.

Precisamente, las concepciones antes mencionadas son colocadas en el MTSK al centro del esquema y con líneas punteadas. Esta representación indica que consideramos que las concepciones que tiene el profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, permea al conocimiento que tiene en cada uno de los subdominios. La misma representación tiene además un significado metodológico: buscamos construir imágenes cada vez más precisas que permitan interpretar la práctica del profesor a la luz de aspectos que influyen en ella basándonos en los conocimientos que sustentan dicha práctica. Para este fin, nos posicionamos en lo que Leatham (2006) llama Sistema Sensible, con el cual, más que focalizar las inconsistencias entre las concepciones declaradas, las exhibidas en una clase o las que surgen en reflexiones concretas del profesor, se focalice en cómo todas éstas pueden conformar un sistema que sea explicado en sí mismo. Coincidimos también en que las concepciones representan una predisposición a través de las acciones y que no pueden ser directamente observadas o medidas, solamente inferidas.

Al igual que el resto de elementos en el modelo, las concepciones son consideradas con fines analíticos. Así, nos hemos planteado entenderlas bajo categorías como las que proponen Carrillo y Contreras (1995).

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). The Teaching of Mathematics Using APOS Theory. *APOS theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education* (pp. 57-91). Nueva York: Springer.

Ball, D.L. (2003). Mathematical proficiency for all students: towards a strategic research and development program in mathematics education. *Rand Mathematics study panel for office of educational research and improvement*, Santa Monica, CA.

Ball, D.L., & Bass, H. (2009). With an Eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures. *Paper prepared based on keynote address at the 43rd JahrestagungfürDidaktik der Mathematik in Oldenburg, Germany,* Recuperado el 2 de abril de 2014 del sitio http://cor.to/HCK

Ball, D.L., & McDiarmird, G. (1990). The subject matter preparation of teachers. En W.R. Houston (Ed.). *Handbook of Research on Teacher Education* (pp. 437-449). New York: Macmillan.

Ball, D., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008).Content Knowledge for Teaching. What makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Brouseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Peterson, P.L., & Carey, D.A. (1988). Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Students' Problem Solving in Elementary Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(5), 385-401.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.). *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.

Carrillo, J., & Contreras, L.C. (1995).Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la Matemática y su Enseñanza. *Educación Matemática*, *7*(3), 79-92.

Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L.C., Aguilar, A., Escudero, D.I., & Montes, M. (2013). Investigación sobre el profesor de matemáticas en la Universidad de Huelva (España). En C. Dolores, M.S. García, J.A. Hernández & L. Sosa (Eds.). *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 97-116). México, D. F.: Díaz de Santos.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. En M.L. Callejo (Ed.). *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Escudero, D.I., Flores, E., & Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Actas del XV EIME*, 35-42. México, D. F.: Cinvestav.

España. Ministerio de la Presidencia (2006). *Boletín Oficial del Estado, número 293*, España

España. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014*, España

Even, R. (1990).The two faces of the inverse function: Prospective teachers' use of undoing. En G. Booker, P. Cobb & T. Mendicuti (Eds.). *Actas del PME 14*, *1*, 37-44.

Even, R., & Tirosh, D. (1995). Subject-Matter Knowledge and Knowledge about Students as Sources of Teacher Presentations of the Subject-MatterAuthor of the Subject-Matter. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 1-20.

Figueiras, L., Ribeiro, M., Carrillo, J., Fernández, S., & Deulofeu, J. (2011) Teachers' advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: a response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics*, *31*(3), 26-28.

Flores, P. (2008). El algoritmo de la división de fracciones. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, *70*, 27-40.

Flores, E., Escudero, D.I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Flores, E., Escudero, D.I., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.). *Actas del CERME 8* (pp. 2055-3064). Middle East Technical Universitiy, Ankara, Turquía: ERME.

Foster, C. (2011). Peripheral mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *31*(3), 24-26.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Klein, F. (1933). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkteaus* [Elementary mathematics from a higher standpoint]. Berlin: Springer.

Leatham, K.R. (2006). Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 91-102.

Linchevsky, L., & Vinner, S. (1989). Canonical representations of fractions as cognitive obstacles in elementary teachers.En G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Actas del 13 PME*, *2*, 242-249.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la páractica del profesor profesor de matemáticas. En J. Ponte & L. Serrazina (Eds.), *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia. Actas da Escola de Verao-1999* (pp. 109-132). Sociedade de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educaçao.

Llinares, S., & Sánchez, M.V. (1991). The knowledge about unity in fractions tasks of prospective elementary teachers. En F. Furinghetti (Ed.), *Actas del PME 15*, *2*, 334-341.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M.D., & Senk, S.L. (2012). Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(5), 584-615.

Markworth, K., Goodwin, T., & Glisson, K. (2009).The Development of Mathematical Knowledge for Teaching in the Student Teaching Practicum. *AMTE Monograph 6 Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers* (pp. 67-83).

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco & M. Palarea (Eds.).*Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429-438). Ciudad Real: SEIEM.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). MTSK: from Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti, *Actas del CERME 8*(pp. 3185-3194), Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.

Montes, M., Contreras, L.C., & Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA:

Park, S., & Oliver, J.S. (2008). Revisiting the conceptualisation of Pedagogical Content Knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education, 28*(3), 261-284.

Pinto, J., & González, M. (2006). Sobre la naturaleza conceptual y metodológica del conocimiento del contenido pedagógico en Matemáticas. Una aproximación para su estudio. En M. Bolea, M. Moreno & M. González (Eds.).*Investigación en Educación Matemática X* (pp. 237-255). Huesca: SEIEM.

Ponte, J.P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.).*Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-96). Barcelona, España: Graó, de IRIF, S.L.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009) *Developing Primary Mathematics Teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. London: Sage.

Schwab, J.J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury& N.J. Wilkof (Eds.). *Science, curriculum and liberal education* (pp. 229-272), Chicago: University of Chicago Press

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Tesis doctoral publicada en http://cor.to/tesis_sosa. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Sosa, L., Aguayo, L.M., &Huitrado, J.L. (2013). KFLM: Un entorno de Aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M.S. García, J.A. Hernández, & L. Sosa (Eds.).*Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). México, D.F.: Díaz de Santos.

Usiskin, Z. (2001). Teachers' Mathematics: A Collection of Content Deserving to be a field. *The Mathematics Educator*, *6*(1), pp. 86-98.

Watson, A., & Mason, J. (2005).*Mathematics as a constructive activity: the role of learner generated examples*. Mahwah, USA: Earlbaum.

Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning Mathematics,*

Metodología

Esta memoria está compuesta por diversas investigaciones parciales, algunas ya han sido presentadas para describir cabalmente el marco teórico, otras serán usadas en esta sección pues fueron producto de reflexiones encaminadas a profundizar en aspectos relacionados con el marco metodológico. Las investigaciones principales son aquellas que permiten directamente la consecución de los objetivos planteados para esta investigación. Cada una de ellas tuvo aspectos particulares de obtención de información (diseño de instrumentos y planificación de acercamientos) y requirió de unas técnicas para dicha obtención *ad hoc*. Sin embargo, hay aspectos comunes que se pueden resaltar y que son los que se describen en esta sección. Estos elementos son el *paradigma interpretativo*, los *estudios de caso* y el *análisis documental*. Por otro lado, se mostrará una investigación encaminada a explorar cómo se modifica la labor del investigador en escenarios online, ya que fue este el medio que sirvió para la recolección de algunos de los datos. Finalmente, abordaré una discusión acerca de la organización de evidencias de conocimiento describiendo las nociones de oportunidad de investigación e indicio de conocimiento.

Elementos metodológicos comunes empleados en nuestras investigaciones

Son dos los elementos que aparecen en común en las investigaciones que aportan resultados a esta tesis, estos son el *paradigma interpretativo* y el *estudio de caso*. A continuación haremos una descripción que sustente teóricamente la forma en la que los hemos empleado y la coherencia que guarda dicho uso con el marco teórico elegido para estos estudios.

Siguiendo a Miguel (1988), consideramos que un **paradigma** define la forma en cómo interpretamos y analizamos los procesos que investigamos, y que la elección del paradigma en nuestra investigación nos dota de un lenguaje, normas, clases de objetivos y maneras de enfrentarlos.

La elección del paradigma responde de manera directa a los objetivos planteados y a la forma en la que planificamos alcanzarlos. Nos planteamos cuatro objetivos, tres de ellos están enfocados en profundizar en el conocimiento de un subdominio respectivamente y el cuarto se enuncia con el propósito de estudiar algunas conexiones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El hecho de que nuestro foco estuviera basado en la comprensión de un fenómeno (cuál es el conocimiento especializado que tiene/usa/requiere el profesor de matemáticas) hacía que el paradigma crítico descrito por Ernest (1998) fuera descartado, ya que el propósito de este no es la comprensión de los fenómenos sino la indagación sobre la transformación de la realidad. También descartamos el paradigma positivista ya que este resulta más cercano a los métodos en Ciencias Naturales y al seguimiento de las fases del método científico para la comprobación de hipótesis (Bassey, 1999). Nosotros no partimos de algunas hipótesis establecidas, sino de una sensibilidad teórica con la que pretendemos aprender más acerca del conocimiento del profesor de matemáticas a partir de la observación de este en diferentes escenarios.

Desde luego este proceso de eliminación de paradigmas hasta llegar al interpretativo es solamente ilustrativo en este escrito. La elección del paradigma interpretativo fue atendiendo a sus características e impulsado por la tradición investigativa del grupo de investigación al que pertenezco. Las características con las que los objetivos y el marco teórico elegido encuentran una mayor afinidad son el hecho de que tiene la finalidad de comprender, por medio de la interpretación, los fenómenos que son investigados, además de que la naturaleza de la realidad es múltiple, holística, divergente, construida y dinámica (Muñoz-Catalán, 2010).

Otra característica que respalda la elección de nuestro paradigma es el hecho de que trabajamos con métodos cualitativos en nuestras investigaciones. Merriam (1988) asocia las investigaciones de corte cualitativo con los objetivos de comprender, descubrir e interpretar la realidad. Aunque consideramos que en cualquiera de los tres paradigmas es posible realizar estudios cualitativos, también creemos que el paradigma interpretativo se asocia de manera más natural a este tipo de estudios, así como es más sencillo asociar la prueba de hipótesis del paradigma positivista con estudios cuantitativos.

Por otro lado, en cuanto al **estudio de caso**, su elección también está en concordancia con el corte cualitativo de la investigación y el paradigma interpretativo. Más allá del simple hecho de etiquetar con un nombre al tipo de método para estudiar los datos de esta investigación, buscamos que dicho método diera sentido a nuestras intenciones y recursos para investigar. Compartimos la preocupación de Alves-Mazzotti (2006) en tanto que en ocasiones pareciera que un estudio de caso se caracteriza por estudiar una unidad o pocos individuos, sin que esto sea una característica definitoria de este tipo de estudio. Para Stake (2000) un caso es una unidad o sistema integrado delimitado del que pueden ser estudiadas sus cualidades a partir de acercamientos cuantitativos o cualitativos. También distingue tres tipos de estudios de caso a partir de sus objetivos: intrínseco, instrumental y colectivo.

El estudio de caso intrínseco se caracteriza por buscar la comprensión de un caso peculiar, por ejemplo, una escuela que obtiene los niveles más altos en todas las pruebas nacionales e internacionales de matemáticas. Se busca comprender cómo se comporta un fenómeno en algún extremo peculiar. Otra variante de este tipo de estudio es cuando el caso es un representante de otros casos (Stake, 2000).

Por otra parte, el estudio de caso instrumental se caracteriza por tratar de abordar aspectos más amplios de un fenómeno, el caso se convierte en un instrumento para comprender precisamente el fenómeno. No se busca una comprensión profunda del caso, sino la abstracción de elementos que resulten útiles al entendimiento de lo que investigamos. Cabe señalar que no se trata de realizar una distinción entre *casos interesantes* para el intrínseco y *casos comunes* para el instrumental. La distinción está puesta en el elemento que se focaliza y, en ambos casos, se obtendrá información más rica en tanto el informante tenga cualidades interesantes para explorar.

Finalmente, Stake (2000) describe el estudio de caso colectivo como una colección de estudios de caso intrínsecos.

De esta variedad propuesta, el que realizamos se identifica plenamente con el estudio de caso instrumental. Para los objetivos de profundización en el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas y de la enseñanza de las matemáticas se estudiaron dos casos, mientras que para los objetivos relativos a la práctica matemática y a las relaciones entre concepciones y conocimiento se utilizó un caso en cada uno. En todos los casos buscamos a informantes comprometidos con la investigación y cuyas aportaciones pudieran enriquecer el conocimiento que nosotros tuviéramos sobre los fenómenos estudiados. Ninguno de los casos se estudió por alguna peculiaridad ni en pos de obtener conclusiones de un tipo determinado de profesores, más bien fue la búsqueda de construcción en la teoría lo que nos guio en el momento de los análisis.

Entornos online en la investigación sobre el profesor de matemáticas

Como ya mencioné en la introducción, uno de los motivos para investigar en la línea del conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas surge al participar en un proyecto de formación permanente de profesores de secundaria en

México. En este proyecto había aproximadamente 900 docentes de todos los estados del país. La riqueza en cuanto al número de informantes entre los cuales *elegir*, mezclada con mi interés natural de aprovechar mi investigación para entender algunos aspectos (con el objetivo de aportar) del sistema educativo de mi país, me indicaba que era ideal hacer mi investigación con algunos de dichos profesores. Dos de mis objetivos, cada uno de los cuales conduce a una investigación, son abordados precisamente con profesores mexicanos que habían participado en el proyecto. Dada la diferencia en mi ubicación geográfica con respecto a la de los profesores (y que estos, a su vez, no coincidían geográficamente entre sí), una forma de obtener información era a través del uso de entornos virtuales online.

Realicé la primera experiencia de recogida de información con cuatro profesores, a los cuales se invitó a participar mediante el uso de la plataforma Moodle. También se utilizaba el correo electrónico como medio para dar avisos, recordar fechas de entrega de materiales… Esta dinámica de trabajo en una plataforma ajena a sus actividades cotidianas, en un horario ajeno a su tiempo de trabajo, aunque el trabajo no fuera ajeno a lo que ellos desarrollaban cotidianamente, hizo que los participantes fueran desistiendo de participar en la investigación y que finalmente no lográramos obtener la información que requeríamos. El fruto que se obtuvo de esta primera experiencia se resume en la siguiente problemática: ¿cómo aprovechar el entorno online para hacer investigación con profesores de matemáticas y cómo lograr que estos (quienes no reciben ninguna recompensa económica o académica que les traiga beneficios laborales) persistan hasta el final de la toma de datos? Desde luego no era una cuestión de falta de compromiso por parte de los profesores, siempre se mostraron interesados en contribuir, pero algunas cuestiones en su entorno se lo impedían. Tampoco se trataba de un desconocimiento por mí parte de los medios tecnológicos que empleaba, ya que trabajé con Moodle durante algún tiempo en el proyecto antes mencionado y mi experiencia no solo era con privilegios de tutor, sino también de administrador, y conocía el funcionamiento de la herramienta incluso, por ejemplo, para obtener estadísticas del tiempo de trabajo (es decir, más allá de una comprensión para interactuar en los foros y salas de chat). Más aún, tres de los cuatro participantes habían trabajado previamente conmigo en la plataforma.

Fueron dos líneas de trabajo las que me guiaron hacia una forma de trabajo diferente, la cual buscaba dar respuesta a la problemática planteada. Por un lado, el trabajo de Sánchez (2010) muestra características de las interacciones online sincrónicas y asincrónicas y cómo pueden aprovecharse dichas características para promover discusiones ricas en entornos virtuales. Por otro lado, los constructos de *instrumentación* e *instrumentalización* trabajados, entre otros, por Luc Trouche (e.g. Trouche & Pepin, 2014), que tienen por base el entendimiento de los fenómenos que permiten y potencian la tecnologización de la actividad matemática en el aula, sirvieron como ilustración para extrapolar algunos de sus principios a mi trabajo de investigación. Ya que mi intención no era que los profesores aprendieran a utilizar una herramienta tecnológica, opté por emplear los medios virtuales que ellos ya dominaran y que pudieran transformar hacia una adaptación para llevar a cabo su papel de informantes sin que esto les generara un cambio brusco en su relación con el medio. También tenía que ser un medio que yo mismo pudiera adaptar para lograr una orquestación adecuada conforme a mis intereses para obtener información. La elección fue los grupos de Facebook. Invité a cuatro profesores, de los cuales una había participado en la experiencia con Moodle, pero nuevamente algunas circunstancias impidieron que llegara al término de la recogida de información. Otra profesora no vio viable realizar la adaptación de la herramienta, ya que la consideraba exclusivamente de entretenimiento. Los dos profesores restantes llegaron hasta la fase final de entrega de información y fueron estos con los que realicé las investigaciones correspondientes.

Entretanto, una cuestión que debía considerar para mi toma de datos era cómo cambiaba la labor investigativa al utilizar entornos online. Eso dio pie a la elaboración de la investigación realizada por Flores, Escudero y Aguilar (2014) en la cual hicimos una revisión de la literatura acerca de investigaciones realizadas con profesores de matemáticas en entornos online. Esta revisión comprendió los cinco años anteriores al sometimiento del artículo (desde 2009) y expone los principales objetos de estudio, las herramientas teóricas y metodológicas más utilizadas y, por supuesto, cómo se reflejaba el cambio en la labor del investigador en estos entornos. A continuación reproduzco la publicación.

ONLINE MATHEMATICS TEACHER EDUCATION: MAIN TOPICS, THEORETICAL APPROACHES, TECHINIQUES AND CHANGES IN RESEARCHERS' WORK

Eric Flores[1], Dinazar I. Escudero[1], Mario Sánchez Aguilar[2]

[1]University of Huelva, Spain; [2]National Polytechnic Institute, Mexico

We present a literature review of the emerging research area online mathematics teacher education (OMTE). The review focuses on identifying (1) the main issues investigated in the area, (2) the main theoretical approaches employed, (3) the kind of empirical evidence that the researchers produce and present in order to support their findings and the way they analyze the data. Finally we use the concept of humans-with-media (Borba & Villarreal, 2005) to reflect on the possible transformations that online environments produce in the production of research knowledge within this research area. Our study provides an updated overview of the OMTE research area.

INTRODUCTION

In his book chapter Schoenfeld (1999) states that the research methods used in educational research are constantly evolving and they may even become obsolete:

> To put it starkly, yesterday's tools, techniques, and perspectives are valuable, but they are inadequate to cope with today's challenges, just as today's tools, techniques, and methods will be inadequate in just a few years. (p. 171)

If we look at the evolution of the field mathematics education research, we can see that, indeed, the research methods used in the field have changed (Hart, Smith, Swars, & Smith, 2009) and some of these changes are related to the emergence of new technological tools. For instance, today is possible to use software to develop detailed and comprehensive analysis of qualitative data such as gestures, speech and rhythm (Radford, Bardini & Sabena, 2007), or to study students' conceptions of mathematics through analyses of the photographs taken by mathematics students (Harkness & Stallworth, 2013).

The initial motivation of this work was to explore how technological tools are transforming the work of contemporary researchers in mathematics education. We studied this transformation within an area of research in mathematics education that, by its very nature, takes place in technologized environments. We refer to the research area of online mathematics teacher education [OMTE] (Borba & Llinares, 2012). To explore the possible changes that technological tools produce in researchers' work we use the concept of humans-with-media. This theoretical concept helps to explain how technological tools—and also non-technological media—influence and reorganize the way humans know and produce knowledge (Borba & Villarreal, 2005). Thus, in this paper we analyze, through the concept of humans-with-media, the activity of

2014. In Oesterle, S., Liljedahl, P., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.) Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,Vol. 3, pp. 89-96. Vancouver, Canada: PME.

researchers working in the area of OMTE; more particularly, we pay attention to the possible transformations that online environments produce in the production of research knowledge.

The meta-study reported in this manuscript is not limited to analyzing possible changes in the work of researchers brought by technological tools; our study also provides a characterization of the emerging research area OMTE. Thus, the purpose of this paper is twofold: (i) to provide a characterization of OMTE research area that focuses on the main topics studied and the theoretical and methodological tools used, (ii) to analyze the research knowledge produced by researchers studying OMTE, paying special attention to the role that technology plays in the production of such knowledge. Our study provides an updated overview of the OMTE research area that can function as a benchmark for future comparisons that could allow us to assess how this research area has evolved.

RESEARCH QUESTIONS AND METHOD

For practical reasons, to analyze the researchers' work we didn't make direct observations of their activity. We opted instead to analyze empirical studies on OMTE, recently published in international research journals. Our analysis of such empirical studies focused on identifying the main topics studied, the theoretical and methodological tools used, and the type of empirical evidence produced and presented in the manuscripts to support the findings. In particular, the research questions that we addressed in this study are:

- RQ1. What are the main issues investigated in the area of online mathematics teacher education?
- RQ2. What are the main theoretical approaches employed in this area?
- RQ3. What kind of empirical evidence do the researchers produce and present in order to support their findings and claims and how do they analyze the data?
- RQ4. Is the work of the researcher transformed by the characteristics of the online environments? If yes, how?

Empirical studies reviewed

The literature consulted to develop this study was divided into primary and secondary sources. Next we describe each of these categories.

Primary source

The area of OMTE has been characterized as an emerging research area, on which little has been published (Borba & Llinares, 2012). Borba and Llinares (2012) state that a literature search related to e-learning in mathematics education and OMTE in some of the major international journals during the period 2005-2012, produce just a few results. Aware of the scarcity of specialized literature, we decided to start our search in the special issue of the journal *ZDM—The International Journal of Mathematics*

Education devoted to the topic of OMTE (volume 44, issue 6) and which brings together researchers from different regions of the world which use different theoretical and methodological approaches in their studies.

Secondary sources

The secondary sources consulted for this study have different origins. On the one hand, we searched on the bibliographic references used in the articles obtained from the primary source. In addition, we consulted three international journals whose aims and scope are directly related to two constitutive elements of the OMTE: mathematics teacher education, and the use of the computers, Internet or other technological resources. The three journals consulted were the *Journal of Mathematics Teacher Education*; *Technology, Knowledge and Learning* (formerly known as *International Journal of Computers for Mathematical Learning*); and *The International Journal for Technology in Mathematics Education*.

It is important to note that all the manuscripts that were selected from the primary and secondary sources for further analysis met the selection criteria described in the next section.

Selection criteria for manuscripts

The manuscripts that were selected for further analysis had to meet the following conditions. First, the manuscripts should report an empirical study in the area of OMTE, these sorts of manuscripts would provide us with relevant information to answer the research questions, particularly RQ3. Second, the articles should have been published recently, more particularly, should have been published during the period 2009-2013. This last requirement allowed us to locate manuscripts that provided us with an updated overview of the state of development of the OMTE.

The above-mentioned selection criteria were applied to the primary and secondary sources for selecting the manuscripts; for example, we selected eight manuscripts out of ten from the primary source. A book review and a research report that doesn't relate to teacher education were excluded. Appendix 1 includes a table showing an overview of the number of articles selected from the primary and secondary bibliographical sources; it also contains the bibliographic details of each of the selected articles. The appendix 1 is available at http://cor.to/pme_OMTE

Analysis of the manuscripts

Once the eighteen manuscripts listed in appendix 1 were selected, we proceeded to analyze them. To carry out the analysis, some guiding questions were defined. These questions were useful to keep the analysis focused on the aspects of the manuscripts that would allow us to answer the research questions.

To try to homogenize the way the guiding questions were interpreted and applied in the analysis of the manuscripts, there was an initial phase in which all the members of the research team independently applied the guiding questions to 3 of the 18 manuscripts contained in appendix 1. After analyzing the articles independently, the members of the research team met to compare their results. This stage helped to homogenize the interpretation of the guiding questions and the analysis of the manuscripts. After this stage, the researchers continued examining the manuscripts independently, but meeting regularly to share and discuss their results. The guiding questions used to analyze each of the manuscripts were: (1) what is (are) the research question(s) addressed in the study? (2) what technological tools are used to generate empirical data and what kind of data is generated? (3) what methods are used to analyze the empirical data? (4) what theoretical constructs are used in the study? (5) do you notice any transformation in the work of the researcher(s) conducting the study?

The guiding question (1) was designed to obtain information to answer the research question RQ1. The guiding questions (2), (3) and (4) were used to identify information that could allow us to answer the research question RQ2. Particularly, the guiding question (2) was aimed at investigating the kind of empirical data presented in the reviewed studies, and the role of technological resources in the generation of such data; this information allowed us to answer the research question RQ3. The guiding question number (5) was not focused on identifying a particular type of information contained in the manuscripts, it was used as a question that required us to reflect on the possible changes in the work of researchers as addressed in the research question RQ4.

The answers to the guiding questions connected to each of the analyzed papers were written into tables and categorized. In the next section of the manuscript we present the categorizations constructed, which in turn provide answers to our research questions.

RESULTS

The presentation of our results revolves around four aspects: first, we provide an overview of the main topics that have been investigated in this area; second, we mention the main tools used for the collection of empirical information as well as the theoretical constructs that have been used in these investigations; third, we refer to the type of empirical data used in the studies, as well as the techniques employed to analyze them. Finally, we reflect on an issue that relates to the above three aspects: the possible transformations that online environments may produce on the researchers' work and the type of knowledge they produce.

Main issues investigated in the area of OMTE (answer to RQ1)

The research reports included in this review have a common core feature: all of them focus on aspects of mathematics teachers' knowledge through the use of online environments. The online environment has played different roles in the research reviewed. In most of the studies it has been used as a means to conduct research, but it is also intended as an element that could be incorporated into mathematics teachers' work. Also, some research has focused on phenomena that occur as a result of working with mathematics teachers in online environments.

According to the research interests reflected in the reviewed studies, we have constructed a categorization consisting of two groups that aren't necessarily mutually exclusive: (a) studies focused on analyzing interactions among teachers in online settings, and (b) studies focused on teachers' professional development.

(a) *Studies focused on analyzing interactions among teachers in online settings*

This kind of studies is conducted with groups of pre-service teachers, in-service teachers, and teacher educators. In these studies online-based interactions among teachers are promoted, and then researchers focus on investigating the specific ways in which teachers communicate and interact in such online collaborative environments. For instance, Silverman (2012) explores the relationship between teacher participation in online discussions and the development of their mathematical content knowledge for teaching. For this, social network analysis methods are employed for coding, comparing and categorizing teachers' participation in online discussions. Schemes such as "Cheerleading/Affirming", "Doing Mathematics" and "Questioning/Challenging" are used for the coding teachers' participation. Subsequently, graphical representations of the interactions among teachers are developed with the help of social network analysis software.

(b) *Studies focused on teachers' professional development*

Mathematics teachers' professional development is a recurrent theme in the literature reviewed. Although there are different interpretations of the concept of professional development in the literature, it is generally understood as changes in the teachers that favor improvements in their professional practice. Some research focuses on investigating how the work and involvement of mathematics teachers in online environments promotes their professional development; for instance, Fernández, Llinares & Valls (2012) study how prospective teachers' participation in on-line discussions when solving specific tasks, supports the development of their capacity of noticing of students' mathematical thinking. Clay, Silverman & Fisher (2012) studied how teachers, after participating in online collaborative work, begin to transform their language incorporating elements of a theoretical approach called Learning Algebra with Meaning; the transformation of teachers' language and its use in analyzing students' mathematical activity, are considered indicators of professional development.

Main theoretical approaches employed in the area of OMTE (answer to RQ2)

We found that some of the theoretical approaches used are extrapolations into online environments of theoretical tools originally designed for face-to-face settings; examples of this are the concepts of *community of practice* (used in the study of Kynigos & Kalogeria, 2012) and *mathematical knowledge for teaching* (Clay et al, 2012). However, theoretical approaches originally designed for online or technologized environments are also employed, for instance the concept of *humans-with-media* (see Borba, 2012); there are also methodological tools specifically designed for application to online scenarios such as the model of instruction called *online asynchronous collaboration* and developed by Ellen Clay and Jason Silverman (Clay et al, 2012).

Type of empirical data, how are obtained and analyzed (answer to RQ3)

By empirical data we refer to all kind of data that the researchers have considered as the unit of analysis in their research. Because the research is developed in online settings, the type of data generated is of digital nature; more particularly, the empirical data can be classified as:

Written productions: includes interactions in discussion forums, interviews via e-mail, and discussions in chat rooms. For example, in Fernández, Llinares, & Valls (2012) asynchronous forums are analyzed; in such forums teachers discuss the contents of videos of their students solving problems and also students' writing assignments.

Teaching materials: in some studies the focus is on the teaching resources designed by mathematics teachers for teaching a particular topic. For example Goos and Geiger (2012) report an study in which prospective teachers are asked to create video presentations along with a set of questions that would engage primary school students in mathematically rich learning. The video material's potential to encourage a critical perspective on mathematics teaching and learning is studied.

Mathematical productions: in this category we consider studies that focus on studying teacher-mathematical content relationships. For instance, in Borba and Zulato (2010) the geometric constructions performed by teachers when using a geometry software are analyzed.

The ways in which the data are analyzed are diverse; however, in the review we mainly found qualitative studies. Some of these qualitative studies include quantitative analysis, for example Silverman (2012) made a qualitative categorization of online interactions between teachers, but he also uses social network analysis to quantify such interactions. Another example is the study of Meletiou-Mavrotheris (2012) that includes quantitative data such as the number of messages that emits a participating teacher in an online course. The analysis of teachers' mathematical productions is less common. An example of this is the work of Borba and Zulato (2010) where is analyzed how teachers incorporate a software with graphic capabilities into the process of producing mathematical knowledge.

The main tools used by researchers to generate their empirical data can are graphing software; platform resources such as forums, chat rooms and questionnaires; and digital recording artifacts such as iPods, camcorders, and smartphones.

Is the work of the researcher transformed by the characteristics of the online environments? If yes, how? (answer to RQ4)

The answer to the first question is: yes, through our review we have noticed changes in the work of researchers, which are directly related to the technological tools available in the online environments. To clarify the nature of these changes, we used the concept of *humans-with-media* as a metaphor that "can lead to insights regarding how the production of knowledge itself takes" (Borba & Villarreal, 2005, p. 23); this is, we focused our attention on the unit *researchers-with-online environments* to identify steps in the production of research knowledge which are transformed by the characteristics of the online environments. In particular we have identified three instances of transformation:

Access to data. Online environments allow researchers to access remote data and in a less intrusive manner. With access to remote data we refer to overcoming geographical barriers when retrieving data, for instance, there are studies where online interactions of teachers coming from different geographical regions are analyzed, such is the case of the study of Meletiou-Mavrotheris (2012) involving teachers of statistics from three European countries. We speak of a less intrusive access to data because online environments allow researchers to observe interactions, dialogues, and teachers' mathematical productions without being physically present. This feature provides the researcher with observations that are less intrusive than observations of interactions in a face-to-face setting.

Data collection and processing. Online environments may also facilitate and accelerate the collection and processing of data. An example of this is the work of Meletiou-Mavrotheris (2012) where they apply online questionnaires to mathematics teachers and the answers can be quickly captured and processed. In this same study quantitative data on teacher participation in online discussions are used (number of teachers participating in a discussion forum or successfully completing group assignments, number of postings by each participant, etc.), however, these data are automatically generated by the online platform where the discussions take place. This type of data provides researchers with access to features of the interactions and collaboration among teachers that would be difficult to access in face-to-face settings; with these data for instance it is possible to develop detailed studies of interaction patterns within different online discussion groups.

Adaptation and creation of theoretical tools. Finally, this review has made us notice that online environments create the need to adapt and create theoretical and methodological constructs adequate to study the didactic phenomena related to OMTE. For instance, Hoyos (2012) refers to the use of the documentational approach to structure teachers' interactions in online asynchronous forums, in order to promote teachers' reflection, however this theoretical approach was initially designed to be applied on face-to-face settings.

References

Borba, M. (2012). Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 44*(6), 801-814.

Borba, M. C., & Llinares, S. (2012). Online mathematics teacher education: overview of an emergent field of research. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 44*(6), 697-704.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation*. New York: Springer.

Borba, M. C., & Zulatto, R. B. A. (2010). Dialogical education and learning mathematics online from teachers. In R. Leikin & R. Zazkis (Eds.), *Learning through teaching mathematics* (Vol. 5, pp. 111-125). New York: Springer.

Clay, E., Silverman, J., & Fisher, D. (2012). Unpacking online asynchronous collaboration in mathematics teacher education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *44*(6), 761-763.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *44*(6), 747-759.

Goss, M., & Geiger, V. (2012). Connecting social perspectives on mathematics teacher education in online environments. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *44*(6), 705-715.

Harkness, S. S., & Stallworth, J. (2013). Photovoice: Understanding high school females' conceptions of mathematics and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(3), 329-347.

Hart, L. C., Smith, S. Z., Swars, S. L., & Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, *3*(1), 26-41.

Hoyos, V. (2012). Online education for in-service secondary teachers and the incorporation of mathematics technology in the classroom. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *44*(6), 775-786.

Kynigos, C., & Kalogeria, E. (2012). Boundary crossing through in-service online mathematics teacher education: The case of scenarios and half-baked microworlds. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *44*(6), 733-745.

Meletiou-Mavrotheris, M. (2012). Online communities of practice as vehicles for teacher professional development. In A. A. Juan, M. A. Huertas, S. Trenholm, & C. Steegmann (Eds.), *Teaching mathematics online: Emergent technologies and methodologies* (pp. 142-166). USA: IGI Global.

Schoenfeld, A. H. (1999). The core, the canon, and the development of research skills: Issues in the preparation of education researchers. In E. Lageman & L. Shulman (Eds.), *Issues in education research: Problems and possibilities* (pp. 166-202). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Silverman, J. (2012). Exploring the relationship between teachers' prominence in online collaboration and the development of mathematical content knowledge for teaching. *Journal of Technology and Teacher Education*, *20*(1), 47-69.

Diferentes naturalezas en los elementos de conocimiento: evidencias, indicios y oportunidades

Una de las críticas que realizamos al modelo MKT es que con frecuencia se utilizan acciones para ejemplificar el contenido de los subdominios (Carrillo et al., 2013). Por ejemplo, en Ball et al. (2008) se define el Conocimiento del contenido y de los estudiantes señalando que "los profesores deben anticipar qué estarán pensando probablemente los estudiantes y qué encontraran confuso estos. Cuando eligen un ejemplo, los profesores necesitan predecir qué encontrarán interesante y motivante los estudiantes" (p. 401). *Anticiparse* al pensamiento de los estudiantes y *predecir* las reacciones de estos frente a una actividad, problema o ejemplo son acciones que tienen detrás distintos conocimientos que las sustentan, algunos de estos serán parte del dominio matemático y otras del didáctico del contenido. Estas reflexiones nos guiaron a establecer qué entendíamos por *conocimiento*, lo cual ya fue descrito en el capítulo de Marco Teórico de esta memoria. Una acción la podemos ver o inferir casi de manera directa. Sin embargo, explorar el conocimiento que hay detrás de la acción requiere, entre otras cosas, de preguntarse cuándo podemos garantizar que el profesor realmente sabe eso que nosotros atribuimos como parte de su conocimiento. En Flores, Escudero y Aguilar (2013) nos planteamos por objetivo mostrar la posibilidad de explorar el conocimiento de los profesores en distintos escenarios mediante el uso del MTSK. Los datos que se analizaron eran parte de las tesis doctorales de los autores y, debido a que estas se encontraban en una etapa temprana, decidimos que no podíamos mostrar evidencias de conocimiento así que decidimos establecer que lo que ahí mostrábamos eran oportunidades para acceder al conocimiento. A continuación reproduzco la publicación completa y, posteriormente, mostraré cómo ha evolucionado la idea de *oportunidad* y se ha añadido la de *indicio*, lo cual está siendo utilizado en algunas investigaciones, en particular en la que presento para profundizar en la caracterización del Conocimiento de la Práctica Matemática y que aparece en la sección de Resultados de esta memoria.

OPORTUNIDADES QUE BRINDAN ALGUNOS ESCENARIOS PARA MOSTRAR EVIDENCIAS DEL MTSK[xxi]

Opportunities offered by some scenarios for showing MTSK' evidences

Eric Flores, Dinazar I. Escudero y Álvaro Aguilar

Universidad de Huelva

Resumen

Este trabajo plantea por objetivo señalar algunas oportunidades que brindan distintos escenarios para indagar acerca del conocimiento que utiliza el profesor de matemáticas en dichos contextos. Utilizamos como marco de referencia el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, modelo teórico desarrollado recientemente con fines de exploración analítica del conocimiento del profesor. Los episodios analizados son obtenidos con diferentes acercamientos metodológicos, toda vez que nuestra intención es proporcionar escenarios en los cuales es factible observar y sistematizar evidencias de conocimiento. En las conclusiones presentamos una discusión acerca de cómo este estudio ayuda en la identificación de acercamientos metodológicos pertinentes para la exploración del conocimiento del profesor.

Palabras clave: *conocimiento especializado, profesor de matemáticas, escenarios de análisis.*

Abstract

The aim of this paper is to show some opportunities offered by different scenarios to inquire about the knowledge that mathematics teacher uses in this context. We use the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge as a reference framework, this is a new theoretical model developed for teachers' knowledge analytical exploration. Analysed episodes were obtained with different methodological approaches, because our intention is to provide scenarios in which we can observe and systematize evidence of knowledge. In the conclusions we introduce a discussion about how this research helps to identify pertinent methodological approaches to inquire about teachers' knowledge.

Keywords: *specilalised knowledge, mathematics teachers, analysis scenarios*

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones que indagan sobre el conocimiento del profesor de matemáticas han dado como resultado el surgimiento de diferentes modelos que proporcionan una explicación acerca del contenido y naturaleza de dicho conocimiento. Así, tenemos los tres modelos discutidos en el *Research Fora* del PME en 2009 titulado *Teacher knowledge and teaching: considering a complex relationship through three different perspectives* (Ball, Charalambous, Thames, & Lewis, 2009). Dichas perspectivas son el *Mathematics for Teaching* de Davis, & Smith (2006), el *Knowledge Quartet* de Rowland, Huckstep, & Thwaites (2005) y el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball, Thames, & Phelps (2008).

A partir de estos, han surgido nuevos modelos, ya sea como reflexión sobre algunos aspectos particulares (e. g., el *Knowledge for Algebra Teaching* de McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase, & Senk, [2012] como una particularización, dada por la enseñanza de álgebra, de diversos modelos para estudiar el conocimiento del profesor) o como reacción a situaciones que presentan dificultades en la investigación (e. g., el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* [MTSK] de

Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán [en prensa] como respuesta a una necesidad de corte analítico y de delimitación). Nosotros trabajamos con este último, con el MTSK.

Cuando surge un modelo, surgen también muchas preguntas: ¿para qué y por qué se crea?, ¿qué aporta respecto de los modelos existentes?, etcétera. Nosotros nos centramos en avanzar en la línea de identificar la potencialidad que ofrecen distintos escenarios al momento de indagar sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Nos basamos en parte de los datos empíricos recabados en las tesis doctorales de los autores de esta comunicación, las cuales comparten marco de referencia. Los profesores informantes son distintos, así como el método de recogida de información, lo cual no representa una limitación, ya que nuestra intención es aportar evidencias de la potencialidad de cada uno de estos escenarios.

MARCO DE REFERENCIA

El MTSK es un modelo teórico para estudiar, de forma analítica, el conocimiento del profesor de matemáticas. Surge como respuesta a problemas de delimitación entre los subdominios del MKT y a dificultades en su utilización para investigar elementos particulares de conocimiento (e. g., Flores, Escudero, & Carrillo, en prensa; Sosa, & Carrillo, 2010). Considera los avances y propuestas provenientes de distintos modelos de conocimiento profesional del profesor (e. g., Shulman, 1986; Ball *et al*, 2008, Rowland *et al*, 2005), en particular, la distinción en dos dominios de conocimiento, el Conocimiento Matemático (MK, de aquí en adelante, todas las siglas se corresponden con la traducción al inglés) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Estos dominios son a su vez divididos en subdominios de conocimiento (Carrillo *et al*, en prensa) de la siguiente forma:

Dentro del MK se consideran los siguientes subdominios:

Conocimiento de los Temas (KoT): el contenido de este subdominio incluye aspectos fenomenológicos, significados, definiciones, ejemplos…, que caractericen aspectos del tema abordado, además de referirse al contenido disciplinar de las matemáticas que figura en manuales y textos matemáticos.

Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM): entendemos que el conocimiento matemático del profesor debe incluir un sistema integrado de conexiones que le permita comprender y desarrollar conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y conceptos elementales mediante el tratamiento a través de una visión avanzada.

Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM): incluye el conocimiento de las formas de conocer, crear o producir en matemáticas (conocimiento sintáctico según Schwab, 1978), conocimiento de aspectos de la comunicación matemática, del razonamiento y la prueba. Saber, por ejemplo, qué es definir y cómo usar definiciones.

En el PCK ubicamos los subdominios:

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT): incluye conocer distintas estrategias que permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales. Conocer la potencialidad de recursos, ejemplos o modos de representación (Shulman, 1986) para hacer comprensible un contenido determinado.

Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM): se refiere al conocimiento de las características del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, del lenguaje asociado a cada concepto, así como de errores, dificultades u obstáculos posibles.

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS): es el conocimiento que posee el profesor acerca de lo que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado. Es aquello que el profesor sabe sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueve en determinados momentos educativos. Consideramos, además de lo prescrito en el currículo institucional, lo que proviene de las investigaciones y de las opiniones de profesores expertos acerca de logros de aprendizaje.

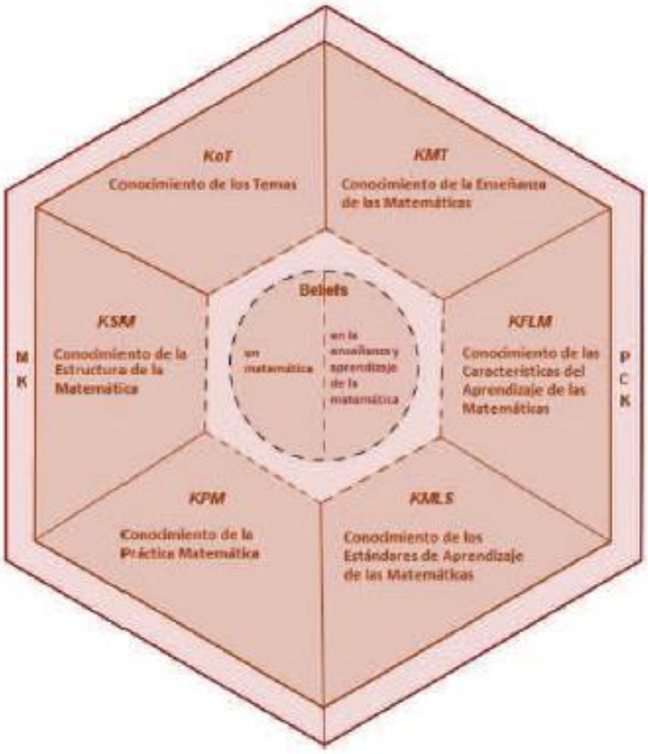


Figura 3. Subdominios del MTSK (Carrillo *et al*, en prensa).

En el MTSK, las concepciones que el profesor tiene acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje están consideradas como elementos que permean sus conocimientos y, por lo tanto, dan sentido a las diferentes acciones que éste realiza. No ahondaremos más en este punto por no tratarse de un elemento central en este trabajo.

OBTENCIÓN DE LOS DATOS EMPÍRICOS

Los datos que presentamos son los análisis de episodios que forman parte de tres trabajos doctorales. No expondremos la intención particular de cada una de esas tesis, ya que el análisis aquí realizado resalta las oportunidades de exploración del MTSK que brindan los diferentes escenarios en los que se investiga el conocimiento del profesor.

Los escenarios fueron elegidos buscando cubrir distintos aspectos de la labor del profesor. Así, la profesora A fue analizada en un escenario de formación continua, la profesora B en la acción con sus alumnos y el escenario del profesor C fue la planificación de actividades para clase.

Profesora A

La profesora A es mejicana, imparte el curso de *pre-cálculo* en el primer semestre de la licenciatura en matemáticas. El siguiente episodio (Figura 2) es un fragmento de las participaciones que realizó en foros de discusión (en Moodle) que corresponden a actividades de la maestría (máster) en Matemática Educativa que cursaba.

Este episodio forma parte de la primera actividad del curso de Teoría de Situaciones Didácticas, en la cual se pide a los profesores que resuelvan *el problema de las cuerdas* (se colocan *n* puntos sobre una circunferencia. ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?) y que posteriormente diseñen una guía pedagógica para implementarlo en el aula. Para finalizar la actividad los profesores discuten en un foro sobre las diferentes técnicas visualizadas para resolver el problema.

Re: Pregunta 2
de PA - viernes, 25 de enero de 2013, 11:47

Buen día!
Propuse dos técnicas un tanto similares entre sí:
1) Probar para distintos n e intentar encontrar una fórmula que exprese el número de cuerdas. Por ejemplo, contar el número de cuerdas que resultan para n=1,2,3,4,5; proponer una fórmula y verificar si ésta funciona para otros valores de n.
2) El estudiante puede notar que el número de cuerdas será el resultado de sumar todos los números naturales menores al número de puntos sobre la circunferencia. Por ejemplo, para n=5, determinar que el resultado será 4+3+2+1=10. Aun cuando no proponga una fórmula para todo n, será capaz de responder para un n dado realizando una suma de este tipo.

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Re: Pregunta 2
de P2 - lunes, 28 de enero de 2013, 08:00

Muy interesante su propuesta PA ; no la había pensado por esa parte. Me parece que también se puede aplicar para aquellos estudiantes que tienen conocimientos de cálculo en sucesiones; porque a partir de la sucesión de la suma de números enteros sucesivos que corresponde a n*(n+1)/2, podemos obtener el algoritmo que sería n*(n+1)/2 - n = n*(n-1)/2

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Re: Pregunta 2
de PA - lunes, 28 de enero de 2013, 14:00

Hola P2 , justamente esa sería la finalidad de la primera técnica, que logren expresar una fórmula como la que propone sin importar si llegan a simplificarla o no 😊
Saludos

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Figura 2. Fragmento del foro en el que interactúan la profesora (PA) y un compañero de maestría (P2), los nombres reales se ocultaron.

Profesora B

La profesora B es española, imparte clase de matemáticas en quinto de primaria. Los datos obtenidos son extraídos de la transcripción textual de videograbaciones de la puesta en práctica de una unidad didáctica sobre geometría cuya duración fue de dos semanas.

B ha discutido con sus alumnos la definición de polígonos y las características de éstos (ángulos, vértices y lados). Utiliza una trama de puntos para que sus alumnos puedan dibujar las figuras. En un momento de la clase, pregunta sobre el número mínimo de lados que debería tener una figura plana para que fuese un polígono. Sus estudiantes responden que serían tres lados. B dibuja un triángulo como el que se muestra en la Figura 3.

Figura 3. Triángulo dibujado por B

El siguiente episodio es la transcripción textual de las intervenciones de B ante los cuestionamientos de un estudiante (E1) provocados por el dibujo que aparece en la Figura 3:

E1: *¿Pero hay que dibujar triángulos normales o...?*

B: *No hay triángulos normales, E1.*
E1: *No, digo ése* [señala el de la pizarra].
B: *Éste es normal, ¿por qué no va a ser normal? ¿Qué le pasa para que sea anormal?* […]
E1: *Porque tiene la base...*
E2: *Está de lado, ¿no?,*
E1: *La superficie...*
B: *¿Qué le pasa a la superficie?*
E1: *Que está como así, como torcida* [por los gestos se deduce que E1 se refiere a que la base no coincide con la horizontal].
B: *No está torcida, yo no la veo torcida,* [...] *no lo veo raro, E1. ¿Le veis vosotros algo raro?* [Refiriéndose a toda la clase]

Casi todos dicen que no, uno de ellos le indica a B que gire la hoja hasta que coincida un lado con la horizontal.

B: *¿Así te gusta más?* [Siguiendo la indicación dada por el niño].
E1: *Sí.*
B: *Así te gusta más, ¿no? ¿Y ya así es normal? ¿Y así no es normal?* [Volviendo a poner el triángulo en la posición original].

Profesor C

El profesor C es mejicano. Da clase de matemáticas a un grupo de primero de secundaria (séptimo grado).

El escenario del que se extrae el episodio es la *Planificación de Actividades*. Dicha planificación corresponde al Bloque III de ese curso y plantea que el aprendizaje esperado será que el estudiante sea capaz de resolver problemas que impliquen los distintos tipos de ecuaciones de la forma $ax+b=0$, cuando a y b son números reales positivos. La planificación consta de una secuencia pensada para cinco sesiones de 50 minutos cada una, cuyo argumento central es calcular costes de compra y transporte de banderas olímpicas.

En la primera parte de la actividad, C proporciona los costes unitarios de las banderas que son diferentes en relación con sus dimensiones, y el coste de transportarlas, que es fijo sin importar la cantidad de banderas compradas, ni las dimensiones de estas. Está pensada para que los estudiantes propongan una expresión *general* para calcular el coste de comprar y transportar una bandera sin importar el tamaño que ésta tenga.

La segunda parte, que será nuestro objeto de análisis, consta de una serie de rectas colocadas en un plano cartesiano, todas cruzan por el origen y tienen diferentes pendientes. Representan, según el profesor C, "algunas compras de banderas con distinto precio" sin considerar el valor de transportarlas, menciona además que "son resultado de distintas ecuaciones". Pide a los estudiantes que, con base en la información de precio unitario que se puede extraer de la gráfica, se determine el coste de más de una bandera. Algunos casos pueden ser resueltos a través de las gráficas y otros requieren ser calculados.

En la tercera parte afirma:

> "una ECUACIÓN es una de las formas en que podemos representar una FUNCIÓN, la gráfica en el plano cartesiano es otra y una forma muy común de representar funciones es de manera explícita, mediante todas la palabras que explican la relación existente entre los miembros de la igualdad".

ANÁLISIS DE LOS DATOS EMPÍRICOS

El análisis se focalizó en dos aspectos: señalar oportunidades para mostrar evidencias de conocimiento para un determinado subdominio y resaltar cómo el escenario propició esa oportunidad. No pretendemos generar una propuesta *causa-efecto*, sino aportar evidencias de oportunidades que un determinado contexto provee para estudiar aspectos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Profesora A, subdominios KFLM, KPM, KoT y KMT

El fragmento de discusión que se generó en el foro nos permitió identificar oportunidades para profundizar en aspectos relacionados con cuatro subdominios, mediante la reflexión sobre declaraciones de A:

Declaración 1: Las dos técnicas que A propone en el foro hacen énfasis en formas de pensamiento y acción que podría tener un estudiante al momento de responder el problema. La asociación que hace A de las técnicas con los modos de proceder de sus estudiantes y con los conocimientos que pudieran poner en práctica, nos permite identificar un intento de anticipación, la cual nos brinda la oportunidad de explorar sobre el KFLM en el que se apoya para realizar esa anticipación.

Declaración 2: En otro momento, la profesora A pide que los estudiantes propongan una fórmula y verifiquen si ésta funciona para otros valores de n, lo cual nos invita a cuestionarnos acerca de las similitudes y diferencias que encuentra A entre la *verificación* a la que se refiere y la demostración de la generalidad en las fórmulas que propondrían los estudiantes. Esto nos ofrece una oportunidad para indagar acerca de los aspectos de conocimiento que la profesora involucra alrededor de la práctica de demostrar en matemáticas, que lo ubicamos en KPM.

Declaración 3: En su aportación, P2 señala un tema concreto que le permitiría al estudiante plantearse la posibilidad de llegar a una generalidad e incluso conocer la expresión en la que se basa dicha generalidad. La profesora A asocia ese razonamiento a su *primera* propuesta. Parece que ella no se diera cuenta de que el profesor hace referencia a una forma de avanzar en la *segunda* propuesta. De esta interacción podemos identificar un momento oportuno para indagar acerca de lo que la profesora entiende del razonamiento que propone P2, en términos de hacer explícito el KoT que utiliza la profesora con relación, tanto a la fórmula que propone P2, como a los otros posibles procedimientos que pueda concebir ella para resolver el problema.

Declaración 4: Identificamos también un último momento con potencial para discutir acerca de la gestión que A haría del recurso, cuando habla de que sus estudiantes *pueden notar* que el número de cuerdas será el resultado de sumar todos los números naturales menores al número de puntos sobre la circunferencia, lo cual nos da oportunidad de preguntar a la profesora sobre su papel como guía de la actividad, haciendo referencia a lo que podría hacer ella para ayudar al estudiante a establecer esa relación, lo que posibilita obtener información del KMT.

De los foros valoramos las aportaciones provenientes de la discusión entre pares sobre aspectos puntuales, ya que, al tener la opción de discutir cada aportación (los mensajes individuales), se focaliza de mejor manera las oportunidades de explorar elementos de conocimiento sobre dicho aspecto puntual, ayudando al análisis que realizamos en nuestros estudios con el MTSK.

Profesora B, subdominios KMT y KoT

La maestra utiliza un triángulo en posición no estándar. La reacción de un estudiante pone de manifiesto la oportunidad de profundizar en las opciones metodológicas que sigue la profesora en su curso, viendo, por ejemplo, qué valoración hace de enfrentar a los estudiantes con situaciones poco habituales. Además, la profesora aborda la dificultad que asalta al estudiante, cuestionando las suposiciones de éste, pidiendo explicaciones, y consensua lo entendido con el grupo, lo cual nos proporciona la oportunidad de preguntarnos si ese modo de actuar es habitual y además explorar el conocimiento que pone en juego cuando decide cómo afrontar dificultades expresadas por los estudiantes y cómo aprovecha las participaciones de éstos, sobre todo las erradas, lo que consideramos en el KMT.

Por otro lado, ante la clasificación de *normal* y *anormal* que propone E1, encontramos una oportunidad para explorar el conocimiento que posee B de la clasificación de triángulos y otras figuras planas y de la caracterización de sus elementos, y así profundizar en su KoT.

Vemos las transcripciones textuales de videograbaciones como soporte del escenario de la actuación del profesor, permitiéndonos así el registro de todas las interacciones ocurridas entre éste y los alumnos, y las que se generan entre los alumnos. Nos presenta la oportunidad de conectar elementos aislados de la clase para determinar conjuntos de conocimientos y de analizar cómo estos se adaptan a una intencionalidad perceptible. Además de brindarnos la posibilidad de tener una primera imagen de los conocimientos que pueden ser sistematizados, también nos da la oportunidad de encontrar coherencia entre aspectos que parecieran estar desasociados entre sí en una o varias clases.

Profesor C, subdominio KSM

En el análisis de la planificación del profesor C, decidimos, para esta comunicación, señalar aspectos puntuales que nos brindan oportunidades de adentrarnos en el estudio del KSM, particularmente, en los conocimientos que sustentan las conexiones interconceptuales (Martínez, Giné, Fernández, Figueiras, Deulofeu, 2011) que realiza entre tres temas *diferentes*.

La noción *función matemática* tiene un papel central en el episodio descrito. El profesor relaciona la *ecuación* con una particularidad de la *función*, lo cual invita a profundizar en cómo y por qué las relaciona, más aún, se detecta que en la tercera parte de la actividad asocia el término ecuación con la representación analítica de la función, lo que nos inspira la generación de mecanismos para explorar más a fondo esa conexión, y así considerar, por ejemplo, preguntarle sobre el papel de la igualdad en una ecuación y en una función.

Por otro lado, el hecho de que las rectas graficadas en realidad no representan el fenómeno trabajado, permite la oportunidad de explorar relaciones entre las ecuaciones y un tipo particular de función, que es la que tiene dominio discreto, es decir, se presenta otra oportunidad de explorar las relaciones que el profesor puede establecer entre las sucesiones (vistas como funciones de **N** en **R**) y las ecuaciones.

Con lo anterior no queremos decir que el KSM se reduzca a analizar cómo el profesor conecta temas porque estos hayan aparecido en su planificación. Hemos elegido estos (ecuación, función y sucesión) porque el fenómeno que elige C para desarrollar su actividad da sentido a dichas conexiones.

Consideramos que analizar la planificación nos permite tener una panorámica de posibles aspectos de conocimiento para investigar en alguna otra práctica del profesor, en particular, para esta comunicación identificamos oportunidades para investigar en los aspectos de conocimiento matemático poniendo atención a dos: los conceptos matemáticos que el profesor deseaba comunicar a los estudiantes y los conceptos que él tomaba como base para plantear los anteriores.

CONCLUSIONES

Los resultados de esta comunicación han sido ampliamente presentados en la sección anterior. Son en torno a la potencialidad de ciertos escenarios al momento de investigar sobre el conocimiento del profesor.

Se da una relación simbiótica entre los episodios y el MTSK, donde el modelo nos proporciona una mirada *focalizada* para explorar oportunidades para profundizar en elementos de conocimiento de diferentes naturalezas y cuya exploración alimentará el contenido de cada subdominio. Los escenarios con los que realizamos esta investigación fueron elegidos buscando variedad: lo que pasa en una clase, lo que planifica un profesor y la discusión entre pares. En todos ellos encontramos oportunidades para profundizar provenientes de la propia configuración del escenario.

Entendemos que dicha profundización requiere de una adecuada triangulación con otros instrumentos y acercamientos metodológicos, cuyos resultados serán de una naturaleza distinta a los aquí reportados.

Referencias

Ball D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407.

Ball, D.L., Charalambous C.Y., Thames M., & Lewis J.M. (2009). RF1: Teacher knowledge and teaching: viewing a complex relationship from three perspectives. En M., Tzekaki, M., Kaldrimidou, & H., Sakonidis (Eds.).*Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, p.121-150.Thessaloniki, Greece: PME.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (en prensa). Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education*. Antalya, Turquía: CERME.

Davis B., & Simmt E. (2006). Mathematics for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 293-319.

Flores, E., Escudero, D., & Carrillo, J. (en prensa). A theoretical review of Specialised Content Knowledge. *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education*. Antalya, Turquía: CERME.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M., Marín, G., Fernández, L.J., Blanco, & M., Palarea (Eds) *Investigación en Educación Matemática XV*, 429-438. Ciudad Real: SEIEM.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M., & Senk, S. (2012). Knowledge of algebra for teaching: Framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(5), 584-615.

Rowland, T., Huckstep P., & Thwaites A. (2005). Elementary teachers´ mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*, 255-281.

Schwab, J.J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury, & N.J. Wilkof (Eds). *Science, curriculum and liberal education*, 229-272, University of Chicago Press: Chicago.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14.

Sosa L. y Carrillo J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds), *Investigación en Educación Matemática XIV*, 569-580. Lleida: SEIEM.

[xxi] Los autores son miembros del proyecto de investigación “Conocimiento Matemático para la enseñanza respecto de la resolución de problemas y el razonamiento” (EDU2009-09789EDUC), financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación en España.

Avances en el uso de las nociones de evidencia, indicio y oportunidad para la investigación

Como ya había mencionado antes, la noción de oportunidad surge para destacar las características de un escenario que permiten explorar en este el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. No obstante, la característica que hemos aprovechado más con respecto a esta noción es la de señalar circunstancias sobre las que pueden explorarse elementos de conocimiento del profesor con respecto a un subdominio determinado. Moriel-Junior y Carrillo (2014) utilizan la noción de *indicio*, con la cual se completa una triada (evidencia, oportunidad e indicio) para referirnos a la interpretación que damos a los elementos de conocimiento que extraemos en nuestros análisis. A continuación describiré cada una de estas nociones.

Nos referimos a *evidencias de conocimiento* para referirnos a aquellos elementos que nos permiten afirmar que un profesor posee un determinado conocimiento, ya sea profundo o superficial. Habitualmente provienen de una triangulación para garantizar la existencia de dicho conocimiento. Por ejemplo, en la viñeta siguiente el profesor muestra una evidencia de conocimiento sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas:

> Profesor (P): Son muchos los cursos en los que se trabaja con fracciones. Especialmente en este debemos lograr que nuestros estudiantes comprendan el significado del producto y división de fracciones, aunque muchas veces no vienen con los conocimientos suficientes para comprender algunas cosas.

La evidencia es que el profesor conoce qué aspectos de las fracciones deben ser propiciadas en su curso (significados de producto y división de fracciones).

Los *indicios de conocimiento* se pueden traducir como sospechas (propiciadas por alguna declaración o acción del profesor) de la existencia o inexistencia de un determinado conocimiento, son también una aceptación de que se requiere más información para convertirse en evidencias. La siguiente viñeta muestra un indicio de conocimiento relativo al subdominio de las características de aprendizaje de las matemáticas:

> Profesor (P): Voy a explicaros el procedimiento para multiplicar dos matrices, quiero que pongáis mucha atención ya que es muy común que luego se cometan errores porque trabajar con matrices es muy diferente a todo lo que habíais hecho hasta ahora.

En esta viñeta, el profesor advierte que se pueden cometer errores y que algunos de estos son típicos. Da la impresión de que el profesor tiene un conocimiento sobre los errores comunes propios del tratamiento del contenido en cuestión, pero requiere de una indagación más profunda para saber si en verdad lo sabe.

Finalmente, las *oportunidades de investigación* son momentos o situaciones provistas o suscitadas por el profesor o por la dinámica de clase, que sirven para explorar conocimiento de algún subdominio, aunque este no se relacione con el subdominio con el que identifiquemos la declaración que la propicia. Por ejemplo, la siguiente viñeta muestra una oportunidad para investigar sobre el conocimiento de la práctica matemática y el conocimiento de los temas:

Profesor (P):	¿Recordáis el experimento que estaba en el museo de ciencia con un triángulo y unos cuadrados en cada lado, que al momento de girarlo el agua pasaba de un lado al otro?, ¿alguien me puede decir con qué tema de los que hemos visto lo puede relacionar?
Alumno (A):	Nos explicaron que era para demostrar el teorema de Pitágoras, que el agua de la hipotenusa es la misma que la que queda en los otros lados.
Profesor (P):	Exactamente, el agua con la que se llena el cuadrado que se forma con la hipotenusa llena exactamente los dos cuadrados que se forman con cada uno de los catetos, por eso en el teorema de Pitágoras se suman los cuadrados de los catetos y da como resultado el cuadrado de la hipotenusa.

En esta viñeta, el profesor centra su discurso en señalar las relaciones entre el experimento y el teorema de Pitágoras (consideramos que en un contexto real en el que el profesor quisiera aprovechar una situación como la que se describe, este ahondaría más en los detalles; aquí, por tratarse de una viñeta, la intención es simplemente la de ilustrar). Sin embargo, llama la atención que un estudiante haya mencionado la palabra "demostrar". Una posibilidad sería señalar en nuestro análisis que el profesor desaprovechó una oportunidad de aprendizaje (dependiendo del grado escolar esto puede ser más o menos evidente). La noción de *oportunidad para investigar* posiciona esa palabra en contexto de algún o algunos subdominios de conocimiento. Por ejemplo, podría ser una oportunidad para explorar, a partir de la opinión del profesor sobre si es o no una forma de demostrar ese experimento, el conocimiento que tiene acerca de las características de una demostración matemática, lo cual forma parte del KPM. También podemos generar una oportunidad para investigar su conocimiento acerca de demostraciones del teorema de Pitágoras, que es parte del KoT.

Por último, con la finalidad de enfatizar la diferencia entre evidencia, indicio y oportunidad de investigación, la siguiente viñeta contiene a cada una de estas.

Profesor (P):	¿Ya os habéis dado cuenta de que la gráfica del seno y del coseno son casi iguales? [Señala la forma de las gráficas que tiene dibujadas, cada una en un plano, en la pizarra; el intervalo del trazo es $[-\pi, 2\pi]$ para ambas funciones]
Alumno (A):	Sí, nada más que la del coseno empieza antes.
P:	Es verdad, aunque también podríamos decir que empieza después, ¿no es así?
A:	Sí, pero yo decía que empezaba antes porque en el cero, el coseno ya vale uno y el seno vale cero.
P:	La observación que hizo su compañero es muy importante. De hecho, existe una identidad trigonométrica que dice [escribe en la pizarra $sen(\theta) = cos\left(\theta - \pi/_2\right)$ y lo lee para sus estudiantes].

El profesor conoce una identidad trigonométrica que relaciona el seno con el coseno e incluso es capaz de identificar por qué funciona dicha identidad, a esto es a lo que llamamos evidencia, en este caso ambas forman parte del KoT. No queda claro si el profesor es consciente de que el dominio de las funciones seno y coseno es, en ambos casos, $(-\infty, \infty)$, ya que tanto el hecho de que dibujara la gráfica en un intervalo finito, como la aceptación y refuerzo de un argumento de que la gráfica comienza en un lugar determinado hace que nos planteemos si el profesor conoce cuál es el dominio de esas funciones; tampoco podemos garantizar que no lo sepa, puede ser que haya obviado este hecho y no encontrara importancia de aclarar ese punto en ese momento, a esto es a lo que le llamamos indicio, a una sospecha de la cual queremos obtendremos información sobre el conocimiento que tiene el profesor en ese tema particular. El indicio que aquí se presenta también es parte del KoT. A propósito de la situación antes descrita relativa al dominio de la función, surge la oportunidad para indagar acerca del conocimiento que tiene el profesor sobre los posibles efectos de un tratamiento como el que planteó en el proceso de aprendizaje de los estudiantes con respecto a los límites cuando la variable independiente tiende a infinito $[\lim_{x \to \infty} f(x)]$, qué concepciones erróneas es común que se generen en esas circunstancias. Esta oportunidad es pensada en principio como parte del KFLM; la respuesta del profesor puede darnos información sobre evidencias o indicios de conocimiento en ese u otros subdominios, incluso puede generar nuevas oportunidades de investigación.

En resumen, lo que se presenta en este capítulo son los elementos metodológicos que tienen en común las investigaciones que presentamos en los resultados (paradigma de investigación y método de estudio de caso), las reflexiones con respecto al entorno online como medio de interacción para investigar el conocimiento del profesor de matemáticas y las diferentes consideraciones sobre elementos de conocimiento (evidencias, indicios y oportunidades). Las técnicas empleadas para obtener información se describen, con el peso que requirió en cada artículo, en las respectivas publicaciones. En la Tabla 5 señalamos cuáles fueron esas técnicas, organizándolos con respecto al subdominio cuya profundización fue objetivo de cada investigación (las siglas corresponden a las que aparecen en la Figura 1 para cada subdominio y CEAM significa Concepciones sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas):

Subdominio	Instrumento/Técnica	Cómo se utilizó
KFLM KMT	Observación no participante	Se utilizó esta técnica en 30 clases de álgebra lineal (15 de cada profesora que participó en el estudio). El investigador solamente videograbó las sesiones, no intervino ni en la planificación ni en el desarrollo de las clases
KPM	Observación no participante	El profesor que participó en este estudio videograbó dos de sus sesiones correspondientes al tema de J*ustificación de fórmulas para calcular el área de polígonos regulares*. El investigador no participó en el diseño e implementación de las actividades, solamente observó dichos vídeos y seleccionó extractos en los que se detectaron oportunidades para investigar.
	Entrevista semiestructurada	Los extractos de vídeo seleccionados por el investigador fueron mostrados al profesor y se le pidió que, en un primer

		momento, respondiera de manera escrita, en un foro de Facebook, a tres preguntas de justificación de su toma de decisiones en la clase. Posteriormente se utilizaron las oportunidades de investigación detectadas en los vídeos para diseñar la entrevista por medio de una videoconferencia.
Relaciones CEAM-MK/PCK	Análisis de diseño de actividades	La profesora que participó en esta investigación envió su planificación del tema “Eventos equiprobables”, el cual fue analizado dese el punto de vista matemático (corrección, intenciones, relaciones, posibles alcances), desde el punto de vista de la didáctica del contenido (objetivos, uso de materiales, dificultades para los estudiantes) y desde el punto de vista de la tendencia didáctica reflejada en el diseño (papel que se le otorga al estudiante, al profesor y al currículo; rasgos relativos a la enseñanza, rasgos relativos al aprendizaje).
	Entrevista semiestructurada	Fue realizada por medio de una videoconferencia y se abordaron los aspectos relativos al conocimiento matemático y al conocimiento didáctico del contenido que se habían detectado en el diseño. Además, se propusieron algunas situaciones hipotéticas en las que la profesora tenía que predecir el modo de proceder matemático de los estudiantes, los efectos de este en su aprendizaje y los mecanismos con los que ella, como profesora, se enfrentaría a estas situaciones

Tabla 5. Técnicas empleadas para la obtención de información en cada investigación de los resultados

Resultados

Por la naturaleza de esta memoria doctoral, los resultados presentados forman parte de diversas investigaciones. Los rasgos comunes han sido descritos en los apartados anteriores. Los estudios que presentamos en esta sección colaboraron directamente en la profundización para la comprensión de algunos elementos que constituyen el MTSK.

Las investigaciones son organizadas en dos categorías, las primeras son trabajos publicados que ofrecen resultados *finales* acerca del Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas y de las relaciones entre el Conocimiento Especializado del profesor y sus Concepciones acerca de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas. La otra categoría la componen estudios en estado completo o parcial, que presentan algunos resultados, pero cuyo proceso de publicación no está todavía terminado. En estos se profundiza en el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas y en el Conocimiento de la Práctica Matemática.

Se agrega una publicación cuyo resultado no forma parte de los objetivos de este trabajo, pero que cobra relevancia ya que es un primer intento de vincular el modelo MTSK con la formación inicial de maestros de primaria.

Resultados publicados: El KFLM y las relaciones entre conocimiento matemático y concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje

Las primeras caracterizaciones de los subdominios presentados, por ejemplo, en Carrillo et al. (2013), sirvieron para definir la naturaleza de aquello que considerábamos que contenía cada uno de los elementos del modelo. Estas definiciones fueron armadas a partir de ejemplos extraídos de la literatura y otros provenientes de datos experimentales de quienes realizábamos nuestras tesis en ese momento. La fase de construir categorías internas a los subdominios (ver Flores-Medrano et al., 2014) trajo consigo una llamada de atención acerca de la necesidad de generar contenidos especializados a cada subdominio que pudieran fortalecer al modelo como herramienta para el análisis.

En Sosa, Flores-Medrano y Carrillo (2015a) respondemos a este requerimiento y realizamos un estudio para profundizar en aspectos relativos al subdominio del conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM). Analizamos extractos de clase de Álgebra Lineal de dos profesoras de bachillerato. Estas clases habían sido analizadas por Sosa (2011) utilizando el MKT. Pese a que nuestra intención no era hacer un estudio comparativo, el uso de estos datos nos permitió destacar que el conocimiento que tiene el profesor acerca de teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas, tanto las personales como las institucionalizadas, es un rasgo que marca una diferencia al considerar al proceso de aprendizaje en el centro de este subdominio y no al estudiante en sí. En el artículo obtenemos tres categorías con algunos indicadores. Dichos indicadores nos guiaron a agrupar elementos del subdominio cuya aportación, al tenerlos separados, no era relevante e incluso generaba problemas analíticos. Las categorías son: lenguaje y procesos con los que los estudiantes interactúan con el contenido, errores y dificultades asociadas al aprendizaje, y teorías personales sobre formas de aprendizaje. Como parte del proceso de investigación, el artículo también contiene la construcción de una revisión bibliográfica (sin afanes de exhaustividad, sino de funcionalidad como medio que nos dota de sensibilidad teórica) relativa a modelos de conocimiento del profesor de matemáticas en los que se considera lo que este sabe sobre el estudiante o sobe su proceso de aprendizaje de las matemáticas.

A continuación se reproduce la versión publicada el artículo.

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 33.2 (2015): 173-189
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1522
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato

Teacher Knowledge about the features of learning algebra in high school

Leticia Sosa
Universidad Autónoma de Zacatecas
lsosa@mate.reduaz.mx

Eric Flores-Medrano, José Carrillo
Centro de Investigación en didácticas específicas e investigación en el aula (CIDIESIA), Universidad de Huelva
ericfm_0@hotmail.com, carrillo@uhu.es

RESUMEN • El objetivo de este estudio es avanzar en la caracterización de uno de los subdominios del conocimiento didáctico del contenido, en concreto del conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas. Con un enfoque interpretativo, se desarrolla un estudio de caso con dos profesoras de segundo de bachillerato en el cual el contexto matemático está centrado en álgebra lineal. Se aporta un sistema de categorías construido a partir de indicadores basados en literatura especializada y en datos empíricos propios de esta investigación.

PALABRAS CLAVE: conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas; conocimiento didáctico del contenido; conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

ABSTRACT • The aim of this study is to improve the characterization of one of the subdomains of pedagogical content knowledge, namely knowledge of the features of learning mathematics. With an interpretive approach, we developed a case study with two high school teachers, the content being focused on Linear Algebra. Categories and indicators to deepen this characterization, derived from research literature and from empirical data from this study, are reported.

KEYWORDS: knowledge of features of learning mathematics; pedagogical content knowledge; mathematics teacher's specialised knowledge.

Fecha de recepción: julio 2014 • Aceptado: enero 2015

Sosa, L., Flores-Medrano, E., Carrillo, J. (2015) Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.2, pp. 173-189

INTRODUCCIÓN

Desde hace treinta años, y cada vez más, se ha venido discutiendo y profundizando en el estudio del conocimiento profesional de los profesores (Varas, Lacourly, López y Giaconi, 2013). El trabajo de Shulman (1986) se reconoce como pionero en llamar la atención sobre el carácter específico del conocimiento necesario para enseñar y su propuesta ha jugado un papel importante en el desarrollo de investigaciones e implementaciones curriculares para la formación de profesores.

Un elemento que habitualmente es considerado en diversos modelos de conocimiento del profesor de matemáticas es el referente al sujeto cognoscente y al propio proceso de aprendizaje. En particular, en este artículo nos posicionaremos en el modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) para estudiar en profundidad el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas. El estudio de este conocimiento cobra relevancia ya que permite entender, entre otras cosas, qué elementos requiere el profesor para anticiparse a los modos de pensamiento del estudiante, cómo interpreta sus producciones y lenguaje matemático, así como la manera en la que identifica, aprovecha y devuelve las oportunidades de aprendizaje que surgen a partir de la actividad matemática de los estudiantes. Pretendemos identificar, conocer y comprender indicadores sobre el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas surgidos de la literatura de investigación y de la práctica de enseñanza (más que evaluar si el conocimiento del profesor es *correcto* o no). Esto proporciona, además de un acercamiento a la comprensión de la complejidad del conocimiento didáctico del contenido (Pinto y González, 2006), una aportación pues atiende la limitación de que los modelos teóricos del conocimiento matemático para la enseñanza suelen incluir categorías muy generales (Godino, 2009).

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Shulman (1986) considera que los tres componentes fundamentales que sostienen la especificidad de cada materia a enseñar son: *conocimiento del contenido*, *conocimiento didáctico del contenido* (PCK) y *conocimiento curricular*. El PCK incorpora aspectos relacionados a la enseñanza y al aprendizaje del contenido y da entidad a un cuerpo específico de conocimiento para el profesor. Señala que el PCK incluye «la comprensión de lo que hace el aprendizaje de temas específicos fácil o difícil: las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y procedencias traen para el aprendizaje de los temas y lecciones frecuentemente más enseñadas» (p. 9). Cabe mencionar que, como expresan Ponte y Chapman (2006), Shulman hizo hincapié en el PCK como un aspecto clave para abordar en el estudio de la enseñanza, y es precisamente éste el dominio que ha sido el foco de atención en muchas investigaciones acerca del conocimiento profesional del profesor (Even y Markovits, 1991; Hill, Ball y Schilling, 2008).

Un modelo que en su estructura considera elementos relacionados con el PCK es el MTSK (figura 1). Parte de la reflexión sobre cuál es el conocimiento que solo tiene sentido para el profesor de matemáticas y hace una llamada de atención sobre la importancia de lo *especializado* del conocimiento del profesor de matemáticas, entendiendo esta especialización como un conjunto de seis subdominios de naturaleza diferenciable (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán 2013).

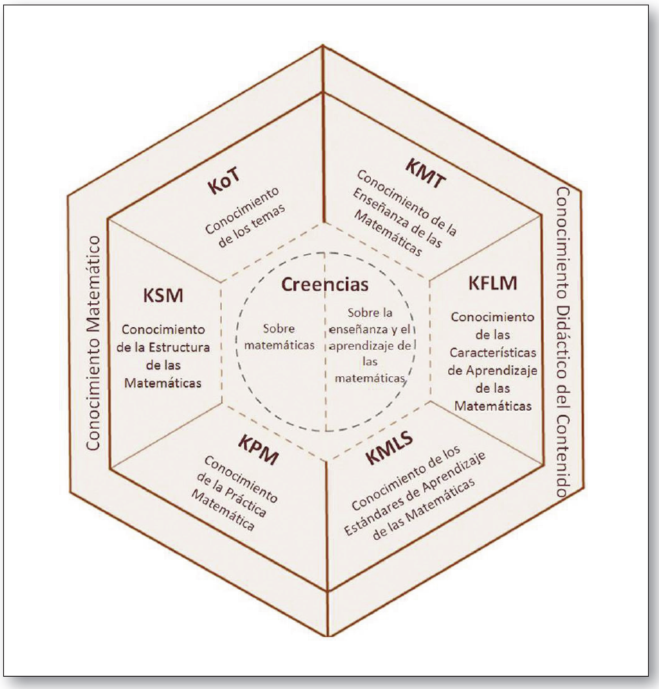


Fig. 1. Subdominios del MTSK.[1]

De manera sucinta presentamos a continuación los subdominios del MTSK. Interesa especialmente, como foco de este artículo, el conocimiento de las características del aprendizaje en matemáticas, que es parte del PCK.

En el dominio del conocimiento matemático encontramos el conocimiento de los temas (conocimiento de conceptos, aspectos fenomenológicos, significados, definiciones, etc., que caractericen aspectos del tema abordado), el conocimiento de la estructura matemática (conocimiento de cómo se dan las conexiones entre temas, de la matemática elemental desde un punto de vista avanzado y de la matemática avanzada desde un punto de vista elemental) y el conocimiento de la práctica matemática (conocimiento de las formas de proceder, conocer y crear en matemáticas).

En el dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK) se contempla el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (conocimiento acerca de lo que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado, sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueve en determinados momentos educativos), el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (conocimiento de recursos materiales y virtuales, modos de presentar el contenido y el potencial que puede tener para la instrucción, así como el conocimiento de ejemplos adecuados para cada contenido) y el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (conocimiento que tiene el profesor acerca del contenido matemático como objeto de aprendizaje, en lugar de poner en el centro el conocimiento sobre el estudiante se pone el proceso de aprendizaje normado por el contenido matemático). El estudio de este último se verá fortalecido por la revisión de literatura presentada en la siguiente sección y por el análisis de los datos empíricos que reportamos en este artículo.

1. Se emplean las siglas de los nombres de la versión en lengua inglesa del modelo.

Además, en el modelo se consideran las concepciones que tiene el profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Estas concepciones se encuentran en el centro del modelo y están delimitadas con líneas punteadas para reflejar que las consideramos como agentes que permean a cada uno de los elementos de conocimiento involucrados en el modelo y que es pertinente el estudio de las relaciones entre dichas concepciones y conocimientos por formar parte, respectivamente, de la estructura afectiva y cognitiva del profesor.

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: ESTUDIOS PREVIOS

El conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas es derivado de la necesidad de que el profesor conozca y entienda lo que pueden pensar matemáticamente los estudiantes ante las actividades que se le asignan. Considera específicamente los conocimientos que están normados por el contenido matemático, centrando así su atención en el conocimiento que tiene el profesor acerca de los procesos de aprehensión de los objetos matemáticos y de los fenómenos derivados de esto (errores comunes, obstáculos epistemológicos, estructuras mentales asociadas a contenidos particulares, etc.).

Los estudios que tratan sobre el conocimiento del profesor de matemáticas habitualmente consideran lo relacionado con el estudiante como sujeto cognoscente o el conocimiento que le permite identificar que una actividad matemática es realmente producida por el estudiante (Kuzniak, 2011), esto último relacionado con el proceso de aprendizaje. Es notoria la influencia que dejan los trabajos de Shulman, en particular la introducción del *Pedagogical Content Knowledge*, en diversos modelos que conceptualizan este tipo de conocimiento. También apoyados en el PCK, desde una visión transformativa en términos de Gess-Newsome (1999), Silverman y Thompson (2008) adoptan un modelo de desarrollo de conocimiento para la enseñanza de las matemáticas con características que, de acuerdo con su perspectiva, dan cuenta del desarrollo que le permite a un profesor sustentar una enseñanza conceptual de un contenido determinado. De estas características, las que se relacionan con el estudiante o con su aprendizaje de las matemáticas consideran que el profesor debe poseer un conocimiento que le permita anticiparse a los modos de pensamiento de los estudiantes en un tema determinado y de las formas en que se puede guiar dicho pensamiento a uno idóneo y cómo este le ayudará a integrar o enfrentarse a nuevos contenidos matemáticos.

En el marco del *Teacher Education and Develompment Study in Mathematics*, Tatto *et al.* (2008) conforman un marco conceptual en el que, para el PCK, consideran tres categorías: el *Mathematical curricular knowledge*, el *Knowledge of planning for mathematics teaching and learning* y el *Enacting mathematics for teaching and learning*. Los aspectos relacionados con el estudiante o su aprendizaje de matemáticas son predecir respuestas típicas de estudiantes, incluyendo concepciones erróneas; analizar o evaluar soluciones y argumentos matemáticos de los estudiantes; analizar el contenido de las preguntas de los estudiantes, y diagnosticar respuestas típicas de los estudiantes, incluyendo las concepciones erróneas.

Por otro lado, Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) presentan un modelo sobre aquello que consideran que da muestras del aprendizaje de los estudiantes sobre diversos contenidos. Proponen el término *Proficiency* que se entiende como el conjunto de habilidades, conocimientos y actitudes necesarias para aprender matemáticas. En este modelo consideran cinco hebras que son retomadas en Flores-Medrano, Escudero-Avila, Montes y Carrillo (2014) para el desarrollo de una categorización del conocimiento que tiene el profesor sobre el aprendizaje de las matemáticas. Esta considera el conocimiento de la comprensión conceptual de contenidos, de la fluidez procedimental de los estudiantes, de las estrategias de abordar problemas matemáticos, de las formas de razonar y de las actitudes de los estudiantes frente a las matemáticas.

Con base en un modelo epistemológico de corte antropológico, Godino (2009) propone un modelo de facetas y niveles del conocimiento del profesor que incluye categorías y componentes tanto del conocimiento de contenido matemático como del didáctico. Los aspectos de conocimiento del profesor relacionados directamente con los estudiantes o su aprendizaje de las matemáticas están en las facetas cognitiva [«conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes» (p. 21)], afectiva [«estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido» (p. 21)] y la interaccional [«patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados» (p. 21)]. Estas facetas interactúan con el resto (epistémica, mediacional y ecológica), pero su separación responde a una necesidad de identificación de cada faceta en los diferentes estudios.

Como parte del desarrollo del modelo MKT, Hill, Ball y Schilling (2008) realizan un estudio para conceptualizar y medir el conocimiento de los profesores en cuanto a los estudiantes y contenidos específicos en el cual exponen cuatro categorías: errores comunes de los estudiantes (identificar y proporcionar explicaciones sobre errores y conocer qué errores se presentan con qué contenido), comprensión de lo que hacen los estudiantes (interpretar qué producciones de los estudiantes son suficientes y mejores para mostrar comprensión), las secuencias del desarrollo de los estudiantes (identificar los tipos de problemas, temas o actividades matemáticas que son más fáciles o más difíciles a determinada edad, sabiendo lo que los estudiantes aprenden típicamente primero) y estrategias comunes de cálculo de los estudiantes (familiarización con los números y las operaciones). En el trabajo de Rowland *et al.* (2005) también podemos encontrar información respecto a lo que esperan que un profesor conozca sobre el aprendizaje de los estudiantes, cuando presentan las cuatro categorías del *Knowledge Quartet* (fundamentos, transformaciones, conexiones y contingencias), por ejemplo el código de identificación de errores en la categoría de fundamentos y el de enfrentar y resolver concepciones erróneas comunes en la de transformaciones, además consideran las dificultades de los alumnos al explicar de manera más detallada la lección de una profesora. Finalmente, Ma (2010), en el desarrollo del modelo de comprensión profunda de la matemática, aborda aspectos de profesores sobre el manejo del error de los alumnos (identificar y explicar cómo ayudarían a los alumnos a corregir el error) ante el contenido de la multiplicación de números con varios dígitos, considerando también en ello lo relacionado con las confusiones de los alumnos.

En síntesis, de esta revisión podemos extraer que se espera que los profesores de matemáticas tengan conocimiento sobre las concepciones y conocimientos previos de los estudiantes (en algunos casos se incluye el conocimiento de cómo estos conocimientos potencian el aprendizaje de nuevos contenidos); de las dificultades al enfrentarse a diversos contenidos o a la matemática en sí (puede incluir también lo que resulta fácil de aprender); de la variedad de formas o procesos con los que el estudiante puede comprender el contenido (se considera el conocimiento que le permite al profesor discernir aquellas formas suficientes y también las más efectivas); de las concepciones de este frente a las matemáticas; de preguntas y respuestas típicas de los estudiantes (está incluido aquí el conocimiento sobre las concepciones erróneas y los errores más comunes), y de las formas en las que estos resuelven y se enfrentan a problemas matemáticos.

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación es de corte interpretativo (Latorre, Rincón y Arnal, 1996) y se emplean métodos cualitativos (Merriam, 1988), ya que nuestro propósito es comprender e interpretar el Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), evidenciado por dos profesoras al impartir álgebra en bachillerato. También tomamos esa decisión por la riqueza holística de los estudios cualitativos en cuanto a mirar el contexto en su forma natural a partir de sus distintos ángulos y perspectivas (Bisquerra, 2004).

LOS CASOS

El diseño de la investigación es un estudio de dos casos (Emi y Aly) de tipo instrumental (Stake, 1994). Esta clase de estudio permite profundizar en la comprensión de un tema determinado o afinar una teoría. En este estudio pretendemos tener una mejor comprensión del KFLM en bachillerato, siendo el álgebra lineal el contexto matemático en el cual se desarrollan los dos casos. Emi y Aly son licenciadas en Matemáticas e imparten álgebra en segundo año de bachillerato. En el momento de realizar la investigación, Emi cuenta con veintiún años de experiencia y enseña a estudiantes del bachillerato de Ciencias Sociales; mientras que Aly lo hace a estudiantes del bachillerato Científico Tecnológico y tiene trece años de experiencia.

COLECCIÓN DE DATOS Y ANÁLISIS

Esta investigación es parte de un estudio más amplio en el que, en concordancia con Yin (1984), intentamos sacar todo el provecho posible desde múltiples fuentes de evidencia, combinamos varios instrumentos para la recogida de la información: observaciones de aula, notas de campo, cuestionarios y entrevista semiestructurada.

Las observaciones de aula son la fuente de información principal para este estudio. Corresponden a las clases impartidas por las dos profesoras al comienzo del curso utilizando el *método de observación no participante* (Cohen y Manion, 2002). Se filmaron 15 clases de cada profesora, con una duración aproximada de 50 minutos cada una. Recogimos notas de campo en el transcurso de las clases impartidas, porque con estas se obtienen impresiones que complementan la observación, pues, de acuerdo con Evertson y Green (1989), son registros que incluyen aspectos teóricos, puntos de vista y reflexiones personales que subyacen en la observación de clases; las tomamos in situ y a posteriori, como sugieren Lofland y Lofland (1984).

Después de la observación de clases se realizaron seis cuestionarios y una entrevista semiestructurada a cada una de las profesoras para comprender lo evidenciado en las observaciones de aula.

El análisis de los datos tuvo por objetivo obtener indicadores del KFLM para Emi y Aly. Partimos de la extracción de episodios de las diferentes clases observadas. Dicha elección se valió de la sensibilidad teórica que nos brindó la revisión de la literatura. Cabe señalar que no comenzamos con categorías establecidas, sino que la revisión de literatura nos ayudó a afinar lo que entendemos en cuanto a la naturaleza del Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas y algunos fenómenos en los cuales se refleja dicho conocimiento. Una vez elegidos los episodios realizamos un proceso de abstracción de indicadores de conocimiento. Estos indicadores fueron agrupados por similitud entre ellos para someterlos a un segundo proceso de abstracción, lo cual dio como resultado la generación de categorías para el KFLM.

RESULTADOS

En esta sección presentamos episodios (seleccionados a partir de la sensibilidad teórica) y cómo una abstracción sobre estos nos permitió generar indicadores de conocimiento para el subdominio KFLM. La presentación de los indicadores no responde al orden cronológico de las clases de las dos profesoras sino a la agrupación por similitud de estos que, en un segundo proceso de abstracción, nos genera las categorías que son resultado de este artículo.

La clase 15 de Aly es sobre resolución de ejercicios acerca de sistemas homogéneos. Uno de ellos consiste en un sistema ($x + y + 5z = 0$, $3x - y - 2t = 0$, $x - y + z - t = 0$) en el que hay que averiguar a través del rango si es compatible o no, y en caso de serlo decir de qué tipo.

Aly: Fijaos que ahí tenemos un sistema homogéneo, ¿de cuántas ecuaciones y de cuántas incógnitas estamos hablando ahora? [...]
E1: Tres ecuaciones y cuatro incógnitas [...] Una pregunta, ¿eso no es incompatible?
Aly: No, no es incompatible, hay que hacerlo.
E1: No, pero el rango va a ser menor que el número de incógnitas.
Aly: Pero aunque sea rango uno o rango dos, incompatible no va a serlo nunca.
E1: Ah, vale, vale.
Aly: Si es un sistema homogéneo, como ese, nunca te va a salir incompatible, siempre va a ser compatible, lo que tienes que ver es si es compatible determinado o indeterminado. Aquí lo que tú estás intentando decir es que va a salir compatible indeterminado, seguro.
E1: Sí.
Aly: Claro, pero compatible, ¿vale?

En este episodio se evidencia que Aly utiliza su conocimiento matemático sobre sistemas homogéneos para interpretar una respuesta dada por uno de sus estudiantes (ella sabe qué significa sistema (in)compatible y las condiciones para que se dé, por eso no admite como válida la respuesta que da el estudiante). Interpreta que lo que intenta decir E1 es que el sistema homogéneo va a salir compatible indeterminado porque sabe también que para un estudiante que tiene un primer acercamiento a este tópico matemático en su lenguaje usa como indistintas las palabras incompatible o indeterminado, en parte porque apenas está construyendo el significado matemático de estas palabras en los sistemas homogéneos. Por otro lado, en la primera clase grabada de Emi, cuando ella les pregunta a sus estudiantes qué recuerdan de la clase pasada en la que se introdujo el tema de matriz, un estudiante contesta que «había que poner los datos en una especie como de tabla», para referirse a la introducción de los coeficientes de los sistemas de ecuaciones en una matriz. En la segunda clase, antes de introducir distintos tipos de matrices, Emi vuelve a preguntar el significado de matriz y obtiene por respuesta: «como una tabla con números, es un conjunto ordenado de datos de un problema», a lo que ella comenta: «podemos definir matriz como un conjunto de elementos ordenados dispuestos en filas y en columnas». Estamos hablando de respuestas en las que el estudiante pone en juego su lenguaje común mientras adquiere el lenguaje matemático adecuado, y en las que el estudiante responde mezclando lenguaje común con lenguaje matemático. De esta forma queremos destacar esa mezcla de lenguaje que usa el estudiante al estar construyendo y tratando de hacer suyo un contenido matemático que para él es nuevo. El estudiante la usa porque está aprendiendo, incluso, a familiarizarse con el lenguaje matemático de ese contenido. En este sentido, pretendemos hacer notar el conocimiento del profesor que le permite saber interpretar el conocimiento/pensamiento matemático que expresan los estudiantes a través de su lenguaje. Así, extraemos el indicador:

KFLM1. Saber interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo contenido matemático –mezcla del lenguaje común con el matemático).

En la clase grabada 15 de Aly, al hacer un ejercicio que trata del sistema homogéneo $x - y - z = 0$, $x + y + 3z = 0$, $x - 5y - 9z = 0$, les explica que el rango es, como mínimo, 1 (porque hay un menor de orden 1 dado que el primer elemento, de la primera fila y primera columna es distinto de 0) y luego que al menos es 2 (si se amplía con la segunda columna y la segunda fila y se toma la submatriz de orden 2). Para ver si el rango es 3, les indica que hay que calcular el determinante $3x3$ de la matriz de coeficientes, que da cero y que por tanto el rango de la matriz es 2, con lo cual se trata de un sistema compatible indeterminado. Añade:

> Entonces la tercera ecuación sobra porque habrá una dependencia lineal entre dos filas, que sea fácil de ver o no, no me preocupa, el caso es que tiene que existir dado que el determinante me ha dado 0, ¿vale?

Aly sabe que puede haber estudiantes a los que les pueda interesar averiguar la dependencia lineal y no llegar a resolver el problema (ni a encontrar la dependencia lineal); ante eso realiza hace el siguiente comentario: «que sea fácil de ver o no, no me preocupa». A ella le interesa que los estudiantes no se desvíen y terminen de resolver el problema. Normalmente, cuando el profesor propone un ejercicio o problema que resolver lo hace con una intencionalidad. Al resolver el problema previamente puede conocer las estrategias de solución que pueden seguir los estudiantes (Kilpatrick *et al.*, 2001) y los detalles en los que pueden desviarse matemáticamente y perder el sentido del problema, es decir, aspectos que puedan desorientar la intencionalidad de ese problema o ejercicio y que por ello no logren llegar a la solución. Podemos decir que esto está relacionado con el conocimiento del profesor referente a las producciones suficientes (y más adecuadas) para comprender un contenido matemático (Hill *et al.*, 2008). De esto abstraemos el indicador:

KFLM2. Conocer los detalles de la resolución de un problema susceptibles de desviar la atención de los estudiantes para llegar a la solución del mismo.

Destacando así el conocimiento del profesor referente a los atascos, despistes o desvíos cognitivos que pueden presentar los estudiantes para poder dar solución a un problema matemático.

Ahora presentamos el caso de Aly (en la clase grabada 14), en relación con un problema de matrices donde existe la necesidad de despejar X de $AX = C$. Aly sabe que los estudiantes pudieran equivocarse al multiplicar por A^{-1} (cuando exista la matriz inversa de A) sin detenerse a pensar si debe ser por la derecha o por la izquierda de C, o sea, Aly sabe cuándo los estudiantes pueden ejecutar procedimientos sin saber por qué o para qué.

> Aly: Es decir, el sistema generalmente lo escribimos así $AX = C$, ¿verdad? Entonces ayudándonos ahora de la matriz inversa, ¿cómo despejaríamos la X (que verdaderamente son las incógnitas)?
>
> E1: Pues multiplicando por la inversa del lado donde no está la X.
>
> Aly: Si multiplicamos por la inversa, tenéis que tener cuidado, o multiplico por la izquierda o multiplico por la derecha, no puedo multiplicar de cualquier manera puesto que el producto no es conmutativo; en este caso, para que la A a la menos uno se quede al lado de la A y nos quede la matriz identidad, ¿por qué parte tengo que multiplicar, por la derecha o por la izquierda?
>
> E1: Por la izquierda.
>
> Aly: Por la izquierda, es decir, multiplicaríamos por A^{-1} [escribe $A^{-1}AX = A^{-1}C$]. Fijaos en la segunda parte de la igualdad, aquí es lo importante, pues si multiplicamos por la izquierda por A^{-1} de un lado de la igualdad, también lo tenemos que hacer por la izquierda en la segunda parte de la igualdad, pues no es lo mismo A^{-1} por C que C por A^{-1}, son dos operaciones distintas.

También podemos hablar de la clase grabada 8 de Emi, donde se muestra que un estudiante piensa que al obtener el valor de x, y, z está obteniendo tres soluciones al sistema, sin tomar conciencia de que el valor de esas tres variables constituye una solución.

> Emi: ¿Cuántas soluciones nos han salido en el problema?
>
> E10: Tres.
>
> Emi: Cuando ponemos $x =$, $y =$, $z =$, ¿cuántas soluciones estamos dando?
>
> E10: Tres.
>
> Emi: Por ejemplo $x = 10$, $y = 50$ y $z = 30$, ¿cuántas soluciones?
>
> E3: Una.
>
> Emi: Es una solución, es decir, son tres incógnitas, pero es una solución. Porque el sistema está formado por varias ecuaciones y en este caso tenemos nosotros tres incógnitas, hallar la solución es hallar el valor para cada una de las incógnitas, si tenemos un valor para cada una de las incógnitas, pues tenemos sólo una solución, ¿de acuerdo?

En el transcurso de la clase, el estudiante realiza varios cálculos matemáticos mecánicamente, por ello es relevante que el profesor conozca eso, a fin de ayudarlo a tomar conciencia de lo que está haciendo matemáticamente (por qué y para qué), con el propósito de provocar la reflexión del estudiante e intervenir en la orientación de su aprendizaje matemático.

Cabe mencionar que existen varios autores que consideran importante el conocimiento del profesor en cuanto a la variedad de formas o procesos con los que el estudiante puede comprender un contenido (Silverman y Thompson, 2008). En este caso, las evidencias nos permiten ver un aspecto más concreto relacionado con lo que los estudiantes pueden hacer mecánicamente, por ello proponemos el indicador:

KFLM3. Conocer los cálculos matemáticos que podrían hacer mecánicamente los estudiantes sin saber realmente lo que están haciendo matemáticamente.

Estamos hablando de un conocimiento del profesor que podría permitirle emplear medidas preventivas y discernir si el estudiante ha comprendido el contenido matemático que pretende enseñarle o solo ejecuta procedimientos o cálculos matemáticos sin saber por qué o para qué.

Con estos tres indicadores intentamos dar cuenta de aspectos del conocimiento del profesor en cuanto a las características de aprendizaje asociadas más concretamente con el lenguaje que usan los estudiantes al aprender un contenido y con procesos que los estudiantes desarrollan al relacionarse con un contenido matemático; por eso hemos etiquetado la primera categoría como: *lenguaje y procesos con los que los estudiantes interactúan con el contenido*.

En el siguiente episodio (clase grabada 11), Emi va a impartir el tema de programación lineal y prevé que a E2, por su deficiencia visual, le costará mucho trabajo comprender los problemas, debido a que habrá dibujos y gráficas. Emi sabe que E2 tiene buena capacidad de aprendizaje pero reconoce que ella, como profesora, requiere proveerla de apoyos para impulsar su aprendizaje.

> En este libro de texto, debido a la representación gráfica, E2, que hoy no está en clase, precisamente hasta ahora yo le había dado las matemáticas como a vosotros, ¿no?, con un tamaño de letra adecuado para que ella más o menos captase las cosas, luego ya con la memoria que tiene y con su capacidad pues es capaz de reproducirlo y de resolverlo, pero todos estos dibujos, todas estas gráficas que hay que realizar, necesito el apoyo del papel para que ella entienda lo que estoy explicando porque todo lo que se pone en la pizarra ella no lo ve, entonces, como ella tiene el libro de texto de la ONCE,[2] si utilizo el libro de texto ella puede seguir lo que yo voy escribiendo en la pizarra y estos dibujos hacérselos en papel como lo hacéis vosotros.

En este ejemplo, la dificultad para el aprendizaje del concepto matemático determinado con la estudiante con deficiencia visual deviene en un conocimiento de necesidades específicas debidas a las características de aprendizaje del caso particular. En este sentido, la necesidad procede de una dificultad. Sin embargo, no todo el conocimiento de necesidades estará relacionado con dificultades de aprendizaje. Por ejemplo, el conocimiento que tenga el profesor sobre qué contenidos requiere saber el estudiante para enfrentarse a un tema nuevo puede venir de las fortalezas que esa red de conexiones matemáticas promueven en el aprendizaje de los estudiantes (Silverman y Thompson, 2008). Aunque inicialmente el siguiente indicador surge a partir de una estudiante con deficiencia visual severa,[3] a través de varios estudios (Ruiz y Sosa, 2011; Martínez y Sosa, 2012) hemos podido notar la relevancia de este indicador incluso con estudiantes de capacidades medias, haciendo énfasis en la importancia de que el profesor sepa los conocimientos matemáticos previos que necesita el estudiante para poder lograr el aprendizaje de un contenido matemático específico. De lo anterior resulta el indicador:

2. La ONCE es una asociación de discapacitados, incluyendo a las personas que tienen deficiencia visual, que ofrece a los estudiantes el libro de texto que llevan en el instituto pero en código Braille.
3. Lo cual marca un reto más para el profesor en cuanto al material que debe utilizar, así como la búsqueda de un adecuado contexto comunicacional que se adapte a las necesidades de dichos estudiantes (Camargo y Nardi, 2013).

KFLM4. Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.

En los siguientes dos episodios queremos hacer notar varios aspectos concretos de los conocimientos del profesor en cuanto a confusiones matemáticas que pudieran tener los estudiantes.

En la octava clase grabada, Aly evidencia que sabe que los estudiantes se pueden equivocar cuando haya un número real multiplicando al determinante al confundirse con el producto de un escalar por una matriz. Antes dejó de deberes calcular determinantes de orden mayor que tres. Al empezar la clase Aly empieza a resolverlos en la pizarra. Uno de los incisos consiste en calcular $\begin{pmatrix} 5x & 5y & 5 \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sabiendo que $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$

Hasta el momento, usando una propiedad de los determinantes, han sacado el 5 de la primera fila del determinante, obteniendo $5\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, luego Aly comenta:

> Bueno, de la misma manera que la propiedad dice que un número se puede sacar fuera de un determinante, la misma propiedad me dice que un número que está fuera multiplicando el determinante ¿cómo lo puedo expresar? [Aly señala la primera fila $5x$, $5y$, $5z$], multiplicando a la fila que a mí me dé la gana, a una fila [Aly pronuncia más fuerte la palabra una] o a una columna, ¿de acuerdo?

Para el siguiente paso, Aly remarca que al introducir el 5 al determinante tiene que ser multiplicado solo por una fila o una columna. Esto considerando que antes vieron la multiplicación de un escalar por una matriz y, como Aly confirma en la entrevista, sabe que los estudiantes pueden confundir el producto de un escalar por un determinante con el producto de un escalar por una matriz. En este sentido queremos poner de relieve el conocimiento del profesor referente a las confusiones matemáticas que pudiera tener el estudiante, provocadas por la relación equivocada de un contenido actual con un contenido relativamente anterior.

En álgebra, hay varios temas que aparecen en el currículum para ser enseñados que toman la forma de reglas o algoritmos. Estos temas, en términos de aprendizaje, pueden contribuir, *per se*, a la mecanización y confusión más que al significado del concepto. En el aula, esto suele tener fuertes implicaciones cuando aquellos temas que deben ser enseñados en la misma unidad o bloque son especialmente susceptibles de causar confusiones por similitud. En este sentido proponemos el indicador:

KFLM5. Conocer las confusiones matemáticas que pudiera tener el estudiante, provocadas por la relación equivocada de un contenido actual con un contenido relativamente anterior.

En el siguiente episodio Emi está explicando cómo utilizar el método de reducción de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales; después de diagonalizar la matriz ampliada (matriz de coeficientes con adhesión de la matriz de términos independientes) y escribir el sistema equivalente, les remarca:

> Fijaos que he escrito el sistema equivalente poniendo siempre las incógnitas por columnas, las equis debajo de las equis [*x's*], las *y's* debajo de las *y's* y las *z's* debajo de las *z's* [...] ¿Cuál es la solución entonces? La solución es x vale 1600, y vale 1000 y z vale 3000. Es así como se escribe la solución a un sistema [Emi se refiere a la notación «solución (x=1600, y = 1000, z = 3000)»]. Si yo lo escribo en otro orden, no es que esté incorrecto, pero siempre se ordenan las incógnitas en el orden en que aparecen dadas.

Queremos destacar el conocimiento que pone en acción Emi respecto a saber que los estudiantes pueden cometer un error referente al adecuado acomodo de los elementos en una matriz con base en su posición y al momento de escribir la solución del sistema sin seguir la convención matemática de anotar el valor de las incógnitas en el orden en que aparecen dadas, en este caso (x, y, z). Por eso, proponemos el indicador:

KFLM6. Conocer las confusiones y los errores matemáticos de los estudiantes, producidos por no proceder ordenadamente, o no respetar las convenciones matemáticas.

Hay investigaciones que reportan elementos considerados por algunos profesores referentes al manejo del error y las confusiones de los alumnos (Ma, 2010). En este caso las evidencias nos permiten dar cuenta de aspectos más específicos del conocimiento del profesor en cuanto a confusiones y errores matemáticos, por ello la propuesta de estos dos últimos indicadores.

En la clase grabada 7 de Aly, tras ver que cuando por debajo de la diagonal principal todos los elementos son cero el determinante de esa matriz dará como resultado el producto de los elementos de la diagonal principal, Aly les pregunta cuánto daría el determinante de la matriz en la cual debajo de la diagonal secundaria todos fueran cero; un estudiante contesta «menos», y ella les comenta que en efecto dará como resultado el producto de esa diagonal secundaria precedida por el signo menos, y luego les aclara lo siguiente:

> Cuando digo que sale negativo [Aly señala el menos que precede al resultado del determinante], quiere decir que cambia de signo, pues puede ser que si el producto me sale negativo, con el menos por delante, saldría al final el resultado positivo.

Queremos destacar que Aly sabe que, al haber dicho «negativo», los estudiantes se pueden quedar con la imagen inadecuada de que en ese tipo de matrices siempre va a quedar en el resultado un número negativo. En este sentido, queremos destacar el conocimiento del profesor en cuanto a las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que los estudiantes pueden poseer o adquirir de un contenido matemático, obtenidas a partir de imágenes e ideas ya hechas previamente en la mente del estudiante, o bien aquellas que puedan ser producidas por el propio discurso matemático que utiliza el profesor al impartir un contenido. Es importante que el profesor conozca cómo podrían llegar a pensar los estudiantes el concepto matemático y cómo están facultados para aprender otras ideas matemáticas relacionadas (Silverman y Thompson, 2008). Por tanto proponemos el indicador:

KFLM7. Conocerlas imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que los estudiantes pueden poseer o adquirir de un contenido.

En la tercera clase grabada de Emi, una estudiante le comenta que a ella no le coincide el número que Emi escribió en la tercera fila primera columna del resultado del producto de dos matrices. Emi señala en la pizarra el elemento correspondiente a esa indicación y les menciona que ese elemento viene de multiplicar la tercera fila por la primera columna, además de explicitar cada uno de los productos involucrados. Luego les comenta:

> Aquí las equivocaciones pueden producirse por dos motivos, uno que multipliquemos mal o sumemos mal [...] entonces aquí hay que estar atentos a las cuentas con los números y también hay que estar atentos a la geometría del producto, esto tiene una geometría y tenemos que ir en un orden determinado.

Sobre esto, queremos poner de relieve el conocimiento de la profesora de los errores que los estudiantes pueden cometer al realizar el producto de dos matrices al hacer mal algún cálculo provocado por un despiste, sobre todo al llevar a cabo una cadena de operaciones aritméticas mentalmente, o al ejecutar esas operaciones sin dominar aún el nuevo contenido que se está abordando. El conocimiento del profesor referente a identificar y proporcionar explicaciones sobre errores y conocer qué errores se presentan con qué contenido, así como conocer las estrategias comunes de cálculo de los estudiantes (familiarización con los números y las operaciones), son dos de las cuatro categorías abordadas por Hill *et al.* (2008). Basándonos en las evidencias presentamos un indicador enfocado en elementos concretos del conocimiento del profesor referente a aspectos en los que los estudiantes son más proclives a cometer errores en determinados cálculos aritméticos.

KFLM8. Conocer los errores que los estudiantes pueden cometer al hacer determinados cálculos aritméticos provocados por un despiste al hacer operaciones o transformaciones, o por no dominar el nuevo contenido que se está abordando.

En el siguiente episodio queremos destacar que Emi, prevé que los estudiantes no se percaten de que un problema es análogo a otro que han visto anteriormente. En clases pasadas, Emi hizo un ejemplo de un problema de programación lineal similar al ejercicio que están haciendo en la clase 13; al ver que los estudiantes no hacen el ejercicio, les comenta:

> ¿No les recuerda este problema a uno que ya habíamos planteado? El de la fábrica de refrescos y los supermercados, ¿cuántas fábricas de refrescos teníamos? Dos fábricas, y supermercados a donde se distribuían, tres, ¿no? y ¿qué nos daban?

Emi sabe que los estudiantes tienen dificultades para resolver un problema y sabe que si ven que dicho problema es parecido a un ejemplo realizado antes, entonces podrán hacer una analogía y lograr resolverlo. De esta manera, proponemos el indicador:

KFLM9. Conocer que los estudiantes tienen dificultades en reconocer y aplicar analogías y equivalencias en la resolución de problemas.

Existen investigaciones que dan cabida al conocimiento del profesor en cuanto a errores y dificultades de los estudiantes (Rowland *et al.*, 2005), e incluso explicitan el manejo del error por parte del profesor (Ma, 2010). En los indicadores desde el KFLM4 hasta el KFLM9 hemos destacado aspectos que detallan y matizan el conocimiento del profesor en torno a necesidades, dificultades, confusiones, imágenes e ideas inadecuadas y errores. Estos aspectos se pueden integrar en una categoría que hemos denominado *errores y dificultades asociadas al aprendizaje*.

En la clase grabada número 4 de Emi, ella sabe que habrá algún estudiante que no sepa en qué consiste la propiedad conmutativa del producto de números reales. A Emi le interesa repasar esa propiedad para hacer notar que en el producto de matrices no se cumple.

> Emi Hay una propiedad de los números que no se cumple en las matrices, ¿cuál es? Sabéis cuál es la propiedad conmutativa en el producto, igual que para la suma, pero ahora para el producto, el orden en que se efectúe un producto con los números reales no importa, lo mismo es multiplicar a por b que b por a. ¿Va a cumplirse esto con las matrices?
>
> E4: No.
>
> Emi: Pues no, es decir, A por B va a ser distinto de B por A. En este caso la propiedad conmutativa no se cumple, en general A por B va a ser distinto de B por A.

Podemos interpretar que Emi sabe que en el aprendizaje de ese contenido matemático puede ser de ayuda aprovechar lo que el estudiante ya conoce y que, por tanto, es importante afianzar ese contenido matemático previo y aprovecharlo para presentarles el nuevo contenido. De esa manera proponemos el indicador:

KFLM10. Conocer los contenidos matemáticos previos de los que se puede valer para fomentar el aprendizaje de un tema nuevo entre sus estudiantes.

En este episodio llama la atención en primer término el conocimiento que tiene la profesora acerca de que el producto de matrices no es conmutativo, lo cual forma parte de su conocimiento matemático. También podemos ver que ella sabe que los estudiantes suelen extrapolar propiedades de los números reales a las matrices. Pero sobre todo esto queremos destacar el uso que hace de los conocimientos previos, que en forma parecen equivalentes a los que está enseñando. Este uso involucra conocimiento de la profesora acerca del error en matemáticas (uso con el que podemos o no coincidir), de la anticipación a los modos de pensamiento de los estudiantes y de cómo negociar significados (Godino, 2009) con los estudiantes (de nuevo podemos o no coincidir con la forma de negociación), que en su conjunto nos ofrece información acerca de elementos de una teoría personal sobre el aprendizaje de las matemáticas.

Es por eso que este indicador nos inspira a conformar la categoría *teorías personales sobre formas de aprendizaje*. Deseamos poner de relieve que el hecho de que el profesor abstraiga de qué manera es conveniente aprovechar el conocimiento matemático que posee el estudiante para explicar el nuevo contenido es un indicio de una conceptualización personal acerca de cómo se puede aprender matemáticas. La reiteración de la profesora al aludir a la propiedad conmutativa de los números reales para señalar la importancia de no extrapolar directamente las propiedades conocidas hacia las operaciones con matrices nos habla de la forma en que ella concibe que aprenderán esas nuevas propiedades. Más aún, eso lo usa con doble intención en el aprendizaje y la enseñanza, pues además de aprovechar el conocimiento matemático que poseen algunos estudiantes (inclusive hacerles algunas rectificaciones) socializa este en el grupo, pensando en aquellos estudiantes que no conozcan ese contenido matemático previo.

Tabla 1.
Categorías e indicadores obtenidos para el KFLM

Categoría	Indicador
a) Lenguaje y procesos con los que los estudiantes interactúan con el contenido	*KFLM1*. Saber interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo contenido matemático –mezcla del lenguaje común con el matemático–).
	KFLM2. Conocer los detalles de la resolución de un problema susceptibles de desviar la atención de los estudiantes para llegar a su solución.
	KFLM3. Conocer los cálculos matemáticos que podrían realizar de forma mecánica los estudiantes sin saber en realidad lo que están haciendo matemáticamente.
b) Errores y dificultades asociadas al aprendizaje	*KFLM4*. Conocer las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.
	KFLM5. Conocer las confusiones matemáticas que pudiera tener el estudiante, provocadas por la relación equivocada de un contenido actual con un contenido relativamente anterior (por ejemplo con un tema pasado de la misma unidad o bloque temático).
	KFLM6. Conocer las confusiones y los errores matemáticos de los estudiantes, producidos por no proceder ordenadamente o no respetar las convenciones matemáticas.
	KFLM7. Conocer las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que los estudiantes pueden poseer o adquirir de un contenido.
	KFLM8. Conocer los errores que los estudiantes pueden cometer al hacer determinados cálculos aritméticos provocados por un despiste al hacer operaciones o transformaciones, o por no dominar el nuevo contenido que se está abordando.
	KFLM9. Conocer que los estudiantes tienen dificultades en reconocer y aplicar analogías y equivalencias en la resolución de problemas.
c) Teorías personales sobre formas de aprendizaje	*KFLM10*. Conocer los contenidos matemáticos previos de los que se puede valer para fomentar el aprendizaje de un tema nuevo entre sus estudiantes.

CONCLUSIONES

Es importante que el profesor conozca cómo aprenden sus estudiantes cada contenido que desea impartir (Sosa, 2012). Consideramos que el KFLM puede ayudar al profesor a impartir una enseñanza más efectiva fomentando el aprendizaje matemático del estudiante. Si realmente queremos entender y comprender el conocimiento del profesor en cuanto a saber cómo pueden pensar o aprender las matemáticas los estudiantes, no basta con establecer y definir un subdominio, es conveniente indagar en la profundización de este, saber de manera más precisa cuáles son las características de aprendizaje, cómo y de dónde surgen, y cuál es la interacción de los estudiantes con ese contenido matemático durante el aprendizaje de este. Indiscutiblemente establecer categorías tanto desde la literatura como desde las evidencias empíricas nos permite acercarnos más a describir indicadores que den cuenta de esas categorías o aspectos relevantes que se van deduciendo. Resulta interesante remarcar la importancia no solo de considerar las categorías que pudiéramos deducir de la literatura sino contrastarlas con las evidencias suscitadas directamente en la práctica del profesor. Para poder llevar a cabo esa profundización son sumamente importantes tanto las categorías como los indicadores. Ambos tienen un papel y una riqueza por sí mismos. Por un lado, los indicadores nos permiten tener mayor especificidad del conocimiento del profesor en cuanto a aspectos o rasgos de los procesos por los que el estudiante transita para aprehender objetos matemáticos concretos así como de los fenómenos derivados de esto. Por otra parte, las categorías nos permiten agrupar aquellos aspectos o elementos que pudieran ser comunes entre indicadores o que tengan una naturaleza similar entre ellos e identificar campos amplios de intervención para la formación del profesorado a este respecto.

En este artículo solo mostramos un caso particular del KFLM, pero seguimos trabajando en la profundización no solo de estas categorías y de este subdominio sino también de los otros subdominios del MTSK en diferentes contenidos matemáticos y niveles educativos. Entendemos que analizar en profundidad los subdominios del MTSK a través de distintos matices (por ejemplo, categorías e indicadores) puede contribuir a la identificación, comprensión y análisis del conocimiento didáctico del contenido de otros profesores y del conocimiento disciplinar, los cuales pueden ser tomados en cuenta en la formación inicial y continua del profesor así como para o por formadores de profesores (Sosa y Ribeiro, 2014).

Finalmente queremos destacar que estudios como el nuestro pueden contribuir a la vinculación investigación-práctica e incluso resultar relevantes de una forma directa en la enseñanza y en la conceptualización de la práctica del profesor. Las categorías e indicadores pueden servir como una fuente para el trabajo de enseñanza. Sin embargo, aún faltan estudios sobre cómo la investigación sobre el conocimiento del profesor puede afectar a la práctica, además de otras investigaciones que den cuenta de la relación que guardan estas y otras categorías y sus respectivos indicadores, en términos de la planificación, implementación y reflexión de la enseñanza; así como el impacto de ese conocimiento del profesor en el aprendizaje de los estudiantes y cómo el conocimiento propicia interacciones en el aula.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación es apoyada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y la Secretaría de Educación Pública de México, y por el Ministerio de Economía y Competitividad de España mediante el proyecto de investigación «Caracterización del conocimiento especializado del profesorado de Matemáticas» (EDU2013-44047-P).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid, España: La Muralla.

Camargo, E. P. y Nardi, R. (2013). Contextos comunicacionales adecuados e inadecuados para la inclusión de alumnos con discapacidad visual en clases de física moderna. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(3), pp. 155-175.

Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (eds.). *Proceedings of the CERME 8*. Middle East Technical Universitiy, Ankara, Turquía: ERME, pp. 2985-2994.

Cohen L. y Manion L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Even, R. y Markovits, Z. (1991). Teachers' pedagogical knowledge: The case of functions. En F. Furinghetti (ed.). *Proceedings of the 15th PME International Conference*, 2, pp. 40-47.

Evertson, C. M. y Green, J. L. (1989). La observación como indagación y método. En C. M. Wittrock (ed.). *La investigación de la enseñanza, II: Métodos cualitativos y de observación*. Barcelona: Paidós/MEC, pp. 303-406.

Flores-Medrano, E.; Escudero-Avila, D.; Montes, M. y Carrillo, J. (2014). *¿Cómo se relaciona el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las matemáticas con su entendimiento sobre los espacios de trabajo matemático?* Manuscrito sometido a evaluación.

Gess-Newsome, J. (1999). Introduction and orientation to examining pedagogical content knowledge. En J. Gess-Newsome y N. G. Lederman (eds.). *Examining pedagogical content knowledge*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 3-20.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, pp. 13-31.

Hill, H.; Ball, D. y Schilling, G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), pp. 372-400.

Kilpatrick, J.; Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding it up*. Washington: National Academy Press.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et sesgenèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, pp. 9-24.

Latorre, A.; Rincón, D. del. y Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Barcelona: Hurtado ediciones.

Lofland, J. y Lofland, L. H. (1984). *Analyzing social settings*. Belmont, CA: Wadsworth Publishing Company, Inc.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales*. Chile: Academia Chilena de Ciencias.

Martínez, C. V. y Sosa, L. (2012). Conocimiento del profesor acerca de las dificultades que enfrentan sus estudiantes al cursar el tema sistema de ecuaciones lineales en bachillerato. Un estudio de caso. En L. Sosa, E. Aparicio y F. M. Rodríguez (eds.). *Memorias de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. México, D. F., pp. 21-25.

Merriam, S. B. (1988). *Case Study Research in Education: A qualitative approach.* San Francisco, CA: Jossey-Bass Publishers.

Pinto, J. y González, M. T. (2006). Sobre la naturaleza conceptual y metodológica del conocimiento del contenido pedagógico en matemáticas. Una aproximación para su estudio. En M. P. Bolea, M. Moreno y M. J. González (eds.). *Investigación en Educación Matemática X.* Huesca: SEIEM, pp. 237-255.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. En A. Gutierrez y P. Boero (eds.). *Handbook of Research of the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Rotterdam: Sense Publishing, pp. 461-494.

Rowland, T.; Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), pp. 255-281.
http://dx.doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Ruiz, G. y Sosa, L. (2011). Conocimiento del profesor en cuanto a conocimiento del contenido y estudiantes en el tema de operaciones fundamentales con expresiones algebraicas en bachillerato. En L. Sosa, R. Rodríguez y E. Aparicio (eds.). *Memorias de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. México, D. F., pp. 9-15.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), pp. 4-14.
http://dx.doi.org/10.3102/0013189X015002004

Silverman, J. y Thompson, P. W. (2008).Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(6), pp. 499-511.
http://dx.doi.org/10.1007/s10857-008-9089-5

Sosa, L. (2012).Conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas. Contribución teórica al conocimiento del contenido y estudiantes. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 25, pp. 1151-1159.

Sosa, L. y Ribeiro, C. M. (2014). La formación del profesorado de matemáticas de nivel medio superior en México: una necesidad para la profesionalización docente. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, 1, pp. 1-15.

Stake, R. E. (1994). Case Studies. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (eds.). *Handbook of Qualitative Research*. Thousands Oaks, CA: Sage Publications, pp. 236-247.

Tatto, M. T.; Schwille, J.; Senk, S. L.; Ingvarson, L.; Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher education and development study in mathematics (TEDS-M): Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Varas, L.; Lacourly, N.; López, A. y Giaconi, V. (2013). Evaluación del conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(1), pp. 171-187.

Yin, R. (1984). *Case study research. Design and methods.* Newbury Park, CA: Sage.

Teacher Knowledge about the features of learning algebra in high school

Leticia Sosa
Universidad Autónoma de Zacatecas
lsosa@mate.reduaz.mx

Eric Flores-Medrano, José Carrillo
Centro de Investigación en didácticas específicas e investigación en el aula (CIDIESIA), Universidad de Huelva
ericfm_0@hotmail.com, carrillo@uhu.es

This is a study in the field of research into Mathematics Teachers' Knowledge and Professional Development. The theoretical background to the study makes use of the model of teachers' knowledge known as Mathematics Teacher's Specialised Knowledge. This model recognises three sub-domains of mathematical knowledge (Knowledge of Topics, Knowledge of the Structure of Mathematics, and Knowledge of Practices in Mathematics) and three with respect to Pedagogical Content Knowledge (Knowledge of Mathematics Teaching, Knowledge of the Features of Learning Mathematics, and Knowledge of Mathematics Learning Standards). This study delves deeper into the understanding of the elements contributing to Knowledge of the Features of Learning Mathematics (KFLM).

Two teachers were selected, both teaching Linear Algebra for the Spanish Baccalaureate (ages 16-18), one in the Science and Technology branch, the other in the Social Science branch. The research design involved observing each teacher over the course of fifteen 50-minute lessons, adhering to a strict non-interventionist policy. The lessons were video-recorded and field notes were taken so as to provide support for the transcribed material. This work was followed up with semi-structured interviews examining specific points of interest.

Various episodes were selected and analysed for aspects of the teachers' knowledge of their students' learning process using knowledge indicators (which emerged from literature revision) from the relevant sub-domain of the theoretical construct employed for the purpose (described in section on theoretical background).

The category *Language and processes by which students interact with content* arose from consideration of three indicators (which emerged from the analysis): (a) *demonstrating understanding of students' forms of expressing mathematical knowledge or thinking*; (b) *demonstrating awareness of those elements of working through a problem likely to distract students from arriving at a solution*; and (c) *demonstrating awareness of mathematical calculations which students can do mechanically without understanding the underlying mathematics.*

In like fashion, the category *Errors and difficulties associated with learning* derived from the following six indicators: (a) *demonstrating knowledge of students' needs and difficulties in relation to mathematical content,* (b) *demonstrating understanding of potential student misunderstandings arising from the confusion of current content with previous content,* (c) *demonstrating understanding of student misunderstandings and errors arising from the failure to apply procedures in an orderly fashion or to observe mathematical conventions,* (d) *demonstrating understanding of inadequate mathematical images or ideas which students might have or acquire about a content,* (e) *demonstrating understanding of potential student errors in arithmetic calculations arising from distractions when doing operations or transformations, or from not being able to manage the new content in question*, and (f) *demonstrating awareness of student difficulties in recognising and applying analogies and equivalences in problem solving.*

Finally, the category *Personal theories of learning* was established on the evidence of a strategy aimed at generating a mathematically edifying task among the students.

We hope that the study contributes to the link between research and practice in terms of developing our understanding of teachers' knowledge of the process of learning mathematics.

La otra investigación, Flores y Carrillo (2014), finalizada y publicada, que presento en esta memoria trata sobre las relaciones entre el conocimiento especializado que requieren/usan los profesores y sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. También se esperaba encontrar las relaciones en el otro sentido: qué concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se generan a partir de unos conocimientos matemáticos que se poseen. Sin embargo, no obtuvimos evidencia en este sentido de la relación. El estudio fue realizado empleando los grupos de *Facebook* como medio de recogida de información. La profesora participante imparte matemáticas en una escuela secundaria del estado de Durango en México.

Debido a que las concepciones que se consideran en el MTSK no han sido abordadas con la finalidad de construir un sistema interno de categorías, en esta investigación decidimos usar las categorías propuestas por Carrillo (1998), las cuales dieron muy buenos resultados para identificar, mediante un cuestionario, la tendencia didáctica tecnológica como aquella con la que más se identificaba la informante. Para el conocimiento especializado partimos de las definiciones de los subdominios al objeto de identificar descriptores de conocimiento.

A continuación se reproduce la publicación correspondiente.

CONNECTING A MATHEMATICS TEACHER'S CONCEPTIONS AND SPECIALISED KNOWLEDGE THROUGH HER PRACTICE

Eric Flores, José Carrillo

University of Huelva, Spain

The aim of this paper is to show connections between a teacher's conceptions about the teaching and learning mathematics reflected in the planning designed by a secondary level mathematics teacher, and the specialised knowledge deployed both at the design stage and in the teacher's reflections after the lesson. The research method followed was an instrumental case study via content analysis. The study contributes to the development of an analytical model for studying mathematics teachers' specialised knowledge.

INTRODUCTION

In Skott, Van-Zoest and Gellert (2013), there is a call for research into the connections between mathematics teachers' knowledge, conceptions, and identity. In this work, we focus on the two-way connections between a mathematics teacher's conceptions and her specialised knowledge in the context of several typical practices.

By considering the design of, and reflection on, various class activities, we study the knowledge brought into play by a mathematics teacher at the planning stage, and the connections between this knowledge and the teacher's conceptions about teaching and learning the subject.

Viewed from a cognitivist perspective (Ponte, Quaresma & Branco, 2012), we consider the design of learner tasks, their management and the teacher's subsequent reflection upon them, as something which embraces multiple professional practices. In this instance, we consider the teacher's intentions, management and reflections regarding the interaction of the activities with her pupils and with hypothetical situations arising from aspects of the plan.

In response to the teacher's plan, which takes an experimental approach with equally likely outcomes, we delve deeper into the Conceptions about Mathematics Teaching and Learning (CMTL) reflected in the design itself, and seek to locate the specialised knowledge brought into play via descriptors drawn from the corresponding subdomains of the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge model [MTSK] (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, in press).

THEORETICAL FRAMEWORK

In this section, we situate the study within the ambit of professional practice, focusing discussion on the practices of anticipating and interpreting the pupils' modes of thinking, and on the teacher's classroom management and *post hoc* reflections. As

2014. In Oesterle, S., Liljedahl, P., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.) Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,Vol. 3, pp. 81-88. Vancouver, Canada: PME.

regards specialised knowledge, we draw on the subdomains of MTSK and its corresponding theoretical underpinnings. Finally, we consider the notion of conception, and the position we take in this respect *vis-à-vis* the interpretation of the data extracted from the design of the activities.

Mathematics teachers' professional practices

We consider professional practice as anything which forms part of the teacher's workload which is closely related to the promotion of their pupils' learning (e.g. Branco & Ponte, 2012). Viewed thus, professional practices go beyond the teacher's role *at the front of the class* and include activities which are undertaken outside the classroom. Such scenarios of professional practice offer plentiful opportunities to deepen our understanding of specialised knowledge (Flores, Escudero, & Aguilar, 2013). Below we cite examples of professional practices noted by various researchers (including unintentional ones), and indicate those we analyse in this study.

Stein, Engle, Smith and Hughes (2008) propose a series of professional (interdependent) practices for orchestrating productive discussions about mathematics, which they sequence thus:

> (1) anticipating likely student responses to cognitively demanding mathematical tasks, (2) monitoring students' responses to the tasks during the explore phase, (3) selecting particular students to present their mathematical responses during the discuss-and-summarize phase, (4) purposefully sequencing the student responses that will be displayed, and (5) helping the class make mathematical connections between different students' responses and between students' responses and the key ideas. (p. 312)

Most of these practices directly involve the teacher's interaction with their pupils. Nevertheless, behind each, especially that of anticipating, is the need for a practice undertaken outside the classroom in the form of planning and reflecting on the outcomes of the lesson.

Ponte *et al.* (2012) describe and discuss two common practices, the presentation of tasks to students and group discussions. They propose a framework for studying these practices, which is intended to be serviceable irrespective of whether such studies take a cognitivist or sociocultural approach. The framework considers:

> (1) the teacher's aims, the way in which these give rise to achievable objectives, and how they are given shape through various professional actions, […] (2) the social context and the educational context, […] (3) the classroom context, […] (4) the teacher's professional knowledge, […] (5) the teacher's know-how, [… and] (6) the teacher's capacity for reflection. (p. 84)

In our study we focus specifically on the facets numbered 1, 4 and 6 above.

In their model of Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), Ball, Thames and Phelps (2008) include within the knowledge subdomain they dub Specialized Content Knowledge (defined as the mathematical knowledge and skill unique to teaching) elements such as:

> Teaching [….] requires understanding different interpretations of the operations in ways that students need not explicitly distinguish […, teachers] must be able to talk explicitly about how mathematical language is used […]; how to choose, make, and use mathematical representations effectively […]; and how to explain and justify one's mathematical ideas. (p. 400)

In Flores, Escudero and Carrillo (in press), the authors conclude that, more than identifying mathematics teachers' specialist knowledge, the examples describe tasks forming part of teachers' work, and that different kinds of knowledge (mathematical, syntactic, learning styles and others) are required for teachers to carry these out. In other words, although the authors talk about SCK in terms of knowledge, what is actually exemplified seems to relate closer to the idea of mathematics teachers' professional practice.

The professional activity on which we focus in this paper is the design of classroom tasks, and we explore aspects of conceptions and knowledge, looking at three professional practices: the prediction and the interpretation of the pupils' way of thinking, and the *post hoc* reflection by the teacher involved in the study.

Mathematics Teacher's Specialised Knowledge

Various models relating to mathematics teachers' professional knowledge are available (e.g. Usiskin, 2002; Bretscher, 2012). In particular, MTSK focuses on the study of the kind of knowledge which is relevant only to mathematics teachers (Escudero, Flores, & Carrillo, 2012). This model is based on consideration of two of the knowledge domains proposed by Shulman (1986), Mathematical Knowledge (MK) and Pedagogical Content Knowledge (PCK), and offers a refinement (e.g. Montes, Aguilar, Carrillo, & Muñoz-Catalán, in press) to the knowledge subdomains proposed in MKT by Ball et al (2008). It seeks to address, principally, two issues detected in MKT – the difficulty in demarking some subdomains from others, and the tendency of some descriptors not to be phrased purely in terms of elements of knowledge (Carrillo *et al.*, in press).

In MTSK, there are three subdomains in respect of MK: Knowledge of Topics, KoT (including phenomenological aspects, meanings, definitions, and examples characterising aspects of the topic of study), Knowledge of the Structure of Mathematics, KSM (including an integrated system of connections which enables advanced concepts to be understood and developed from an elementary perspective, and elementary concepts from an advanced one), and Knowledge of the Practice of Mathematics, KPM (knowledge of the forms of knowing, creating and producing in mathematics, knowledge of aspects of mathematical communication, reasoning and proof). Three other subdomains are considered in PCK: Knowledge of Mathematics Teaching, KMT (knowledge of different strategies enabling the teacher to develop procedural and conceptual mathematical abilities, knowledge of the potential of resources, examples and other means of representation for making a specific content more comprehensible, and knowledge of educational theory relating to mathematics), Knowledge of Features of Learning Mathematics, KFLM (knowledge of the characteristics of the pupils' learning process for different contents, the language associated with each concept, and potential errors, difficulties and obstacles, theoretical knowledge about learning mathematics) and Knowledge of Mathematics Learning Standards, KMLS (knowledge of what the pupils should/can achieve by the end of a particular school year, knowledge of the procedural and conceptual abilities and mathematical reasoning promoted in specific educational stages).

MTSK offers this study useful categories for exploring knowledge. We start with general questions arising from the nature of the two knowledge domains and analyse these with specific categories drawn from each subdomain.

Conceptions of teaching and learning mathematics

We understand a conception as the "conscious or unconscious [set of] beliefs, concepts, meanings, rules, mental images and preferences concerning mathematics" (Thompson, 1992, p. 132).

Leatham (2006) takes a position regarding the study of conceptions, with which we concur. Introducing the term Sensible System Framework, the paper suggests that rather than focusing on inconsistencies between declared conceptions, those inferred from classroom performance and those drawn from teacher reflections, all such aspects could be observed as a sensible system which accounts for itself. We also agree that conceptions represent a predisposition towards action and that they cannot be directly observed or measured, only inferred.

For data analysis, we used the categories and indicators put forward by Carrillo (1998), which, in terms of CMTL, distinguishes four kinds of conceptions (referred to as teaching tendencies in order to foreground the difficulty of ascribing an individual teacher to any single conception): the traditional, the technological, the spontaneous, and the investigative. Again, it should be stressed that these categories are not designed for placing teachers in particular boxes according to their conceptions, but it is the case that teachers tend to show predilections towards the indicators of one tendency or another.

METHOD

The research design follows that of an instrumental case study (Stake, 1994), and was carried out by means of content analysis (Bardin, 2002). The study itself is part of a wider study seeking to establish connections between varying elements of MTSK.

The work uses the indicators described by Carrillo (1998) to identify the CMTL reflected in the design of activities by a secondary level mathematics teacher (Carol), and we allowed the rationale underpinning this design to guide our analysis.

The identification of the specialised knowledge Carol brought into play was achieved through an open-ended interview in which she was presented with hypothetical situations. The interview was structured according to the tasks that Carol had used in class, and focused on the following aspects of MTSK:

With respect to knowledge of content: (a) the knowledge she expected her students to learn; (b) the knowledge she used, or could have used, in the design and execution of the tasks and in reflecting on the results; and (c) the knowledge which, as researchers, we anticipated could be appropriate to planning the tasks, carrying them out and reflecting on the results.

With respect to pedagogical content knowledge: (d) knowledge of the students' habitual ways of working; (e) knowledge of the ways in which the students' thinking develops; and (f) knowledge of teaching strategies which promote specific behaviour in the students.

RESULTS

This section is divided into three parts. The first talks about our findings regarding the CMTL reflected in Carol's design. The second part concerns the items of specialised knowledge we identify with the help of the design itself and Carol's responses in the open-ended interview and the hypothetical situations. Finally, we suggest connections between the CMTL and the items of knowledge identified.

The rationale of the design: inferred conceptions

Carol's design consisted in choosing which result would appear most frequently when an object is thrown, first a coin, and second a dice. The complete rationale of the design (with each object) is thus: (a) predicting which event will occur the most number of times on throwing an object n times; (b) experimenting, recording the results and comparing these with the prediction; (c) predicting which event will occur the most number of times on throwing an object m times ($m>n$); (d) experimenting, recording the results and comparing these with the prediction; (e) predicting which event will occur the most number of times on throwing an object s times ($s>m$); and (f) dividing the number of times the pre-selected result occurred in the experiment by the total number of throws. In each stage, the students compare their results with those of classmates.

The repetition of predicting and experimenting was intended to guide the students towards recognising a pattern of equal probabilities, and this, taken together with the increased number of throws and the calculation of the quotient, indicates a conception of the acquisition of mathematical knowledge as a reproduction of the logical processes of the construction of content. For Carol, the significance of including experimentation in the class was both as a source of motivation encouraging student participation, and as a means of informally assessing student knowledge of the sample space of the event.

Although it is not our intention to categorise Carol as pertaining to a particular teaching tendency, the association she establishes between her design and the students' learning, based on the construction of meaning through the application of logical procedures, is a characteristic feature of the technological tendency (Carrillo, 1998).

Knowledge based on MTSK

With respect to her knowledge of the theme of *equally probable events*, Carol demonstrates her understanding of the connections with this topic and that of fractions, percentages and sample spaces. Likewise, she distinguishes between those events which have equal probability and those in which certain outcomes are more likely to occur:

Carol: There are fewer combinations to add up [the faces of two dices] to appear *one* and *one* [...] the ones with a greater probability are the ones in the middle [… there are events in which you can consider] previous results [so as to] predict, but it's by no means certain.

The knowledge represented here can be considered as pertaining to KoT (knowledge of connections between elements of a concept, definitions and properties). Nevertheless, although Carol recognises the importance of determining the sample space of the events, neither in her design, nor her subsequent reflections, does she include as part of the space the event of, at least, two outcomes occurring exactly the same number of times, although she does recognise that her students do not typically consider this event as part of the space.

Carol: My students never say it will turn out a draw [that heads and tails will occur an equal number of times], they choose either more heads or more tails, but not an equal number… well, perhaps a few say so, but most of them don't.

One area which is considered part of KFLM is that of predicting how students will think and act, and in this respect the teacher mentions strategies her students employ in predicting results based on previous outcomes, such as looking for patterns:

Carol: [My students] would have thought to themselves: "there's a pattern here, first I called heads and it came out tails, then I called tails and it came out heads, now I'll see if it comes out tails again [...] which gives them the same result" [out of 10 throws].

Carol regards experimentation as a learning strategy which, besides motivating the students, allows them to explore possible outcomes. Knowledge of such teaching strategies which directly bear on mathematical content is considered part of KMT.

As for mathematical knowledge recognised by the researchers as being necessary to Carol's design, this consists of fully determining the sample space (that is, the consideration that at least two outcomes might occur an equal number of times), and knowledge of Bernoulli's experiment for deliberately choosing the number of experimental repetitions.

Potential connections between items of MTSK and CMTL

The analysis has brought to the fore the appearance of features of the technological teaching tendency. Although all teachers need knowledge of the logical processes of constructing the mathematical knowledge to be learnt by the students, the use of this knowledge is especially relevant in relation to the aforementioned features. According to evidence drawn from Carol's lesson episodes, this has meant the incorporation of elements of distinct natures. On the one hand, the knowledge of definitions, connections within the concept and properties such as the law of large numbers, shows a deep knowledge of the topic which allows its reconstruction. On the other hand, with respect to knowledge of connections with more advanced topics, Carol considers it unnecessary for this lesson, although she admits to using more advanced knowledge than that actually deployed in class at other times in the planning phase. Carol's attested pedagogical content knowledge centres on the objectives of her plan and the impact this might have on her students, as a result of which there is an emphasis on being aware of the options facing the students when they come to do the activities, and the strategies they might employ, whether correct or incorrect, in carrying them out. Carol's knowledge in this respect bears features of a technological conception regarding the teacher's role, specifically, the transmission of knowledge through technological procedures and a presentation style in which she adopts the role of technician organising content and design.

CONCLUSIONS

Through the case study of Carol's teaching we aimed to understand the two-way connections between conceptions and mathematics teachers' specialised knowledge. The study focused on various practices typical of mathematics teachers, and explored the utility of an emergent model designed to study the knowledge involved, MTSK. The connections are consistent in that the knowledge deployed by Carol (and likewise that which the researchers detect as potentially necessary) emerges from her intentions for the lesson. Further studies are clearly necessary to explore the connections between the multiple elements of teachers' knowledge, and the ways these impact on their teaching and their students' learning.

Acknowledgements

This work has been supported by a grant from the Secretariat of Public Education and the Mexican Government.

The authors are members of the research project "Mathematical knowledge for teaching in respect of problem solving and reasoning" (EDU2009-09789EDUC), funded by the Ministry of Science and Innovation in Spain.

References

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bardin, L. (2002). *Análisis de contenido* (3ra edición). Madrid: Ediciones Akal.

Branco, N., & Ponte, J. P. (2012). Developing algebraic and didactical knowledge in pre-service primary teacher education. In T.-Y. Tso (Ed.), *Proc. 30th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 75-82). Taipei, Taiwan: PME.

Bretscher, N. (2012). Mathematical knowledge for teaching using technology: A case study. In T.-Y. Tso (Ed.), *Proc. 36th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 83-90). Taipei, Taiwan: PME.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th CERME* (pp. 2985-2994). Antalya, Turkey: CERME.

Escudero, D. I., Flores, E., & Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. In L. S. Moguel, E. A. Landa, & F. M. Rodríguez Vásquez (Eds.), *Proceedings of the XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (Vol. 1, pp. 35-42). México, D. F.: Cinvestav.

Flores, E., Escudero, D. I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. In A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Flores, E., Escudero, D. I., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialized content knowledge. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th CERME* (pp. 3055-3064). Antalya, Turkey: CERME.

Leatham, K. R. (2006). Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 91-102.

Montes, M. A., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). MSTK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th CERME* (pp. 3185-3194). Antalya, Turkey: CERME.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas professionais dos profesores do Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 65-86.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Skott, J., Van-Zoest, L., & Gellert, U. (2013). Theoretical frameworks in research on and with mathematics teachers. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *45*(4), 501-505.

Stake, R. E. (1994). Case studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). Thousands Oaks, CA: Sage Publications.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: McMillan.

Primera parte: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas

A la par que hacíamos el estudio sobre el KFLM, en Sosa, Flores-Medrano y Carrillo (2015b), realizamos una investigación para explorar aspectos de conocimiento relacionados con el KMT. Se analizaron las 30 clases de Emi y Aly (15 de cada profesora). En este caso los extractos analizados fueron elegidos por mostrar situaciones en las que la profesora ejemplificaba o brindaba ayudas a los estudiantes.

Realizamos una revisión bibliográfica sobre lo que se ha investigado acerca del uso de ejemplos en la clase de matemáticas y lo referente a *andamiajes* (uso hispano del constructo *scaffolding* acuñado por Bruner). En esta, destacamos algunos usos didácticos del ejemplo:

La clasificación que presentan Figueiredo, Blanco y Contreras (2007) es realizada con base en el objetivo del ejemplo: 1) Definición (los ejemplos acompañan a la definición de un objeto matemático; dependiendo de la dinámica de clase, estos pueden ser presentados antes o después de la definición), 2) Representación (son los primeros ejercicios de aplicación del concepto, suelen promover el surgimiento de las primeras dudas y dan mayor autonomía al alumno), 3) Características (surgen cuando el alumno emprende la tarea de profundizar en el concepto, en sus diversas representaciones y descubrir sus peculiaridades, se dan como explicación a las dudas de los alumnos o como una forma de resolver las situaciones de confusión), 4) Aplicaciones internas (pueden incluir contenidos o conceptos enseñados anteriormente o relacionarse con otros posteriores dentro de la disciplina) y 5) Aplicaciones externas (de aplicación a la vida real y a otras ciencias). Otra clasificación es la que proponen Bills et al. (2006) con base en la naturaleza del ejemplo: 1) ejemplos resueltos, 2) ejercicios (para ser resueltos por los alumnos), 3) ejemplos genéricos, 4) contraejemplos y 5) no ejemplos (que sirven para definir los límites de un concepto, de un caso en el que un procedimiento no se aplique o falle en la obtención de un resultado deseado, o para demostrar que las condiciones de un teorema son acotadas).

Con respecto a los andamiajes, identificamos en la literatura una serie de técnicas que nos sirvieron posteriormente para identificar conocimientos que sustentan las ayudas dadas. Estas técnicas son un compilado realizado por Zurek, Torquati y Acar (2014), a las que se suman algunas otras propuestas en los trabajos de Verenikina (e.g. Verenikina, 2004; Verenikina & Chinnappan, 2006). Algunos ejemplos de técnicas son proponer situaciones para hacer predicciones, focalizar la atención en características relevantes de un problema, dar pistas que ayuden a llegar a una conclusión, proveer de herramientas que permitan desarrollar la actividad, ofrecer una realimentación con efectos de validar o corregir y llevar el lenguaje impreciso de los estudiantes hacia uno institucionalizado.

La investigación se hizo mediante cinco acercamientos, el primero fue la revisión de la literatura, que nos dotó de sensibilidad teórica al momento de elegir los episodios, el segundo acercamiento fue la selección de extractos en los que se identificaba el uso de ejemplos y ayudas, el tercer acercamiento fue la identificación de elementos de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas en los extractos seleccionados, el cuarto acercamiento es la abstracción y codificación de descriptores para el KMT y el quinto acercamiento fue la revisión de entrevistas realizadas a las profesoras y notas de campo tomadas durante la observación de la clase para complementar la información obtenida en los otros cuatro acercamientos.

A continuación reproduzco nuestro análisis. Presento los extractos seleccionados, cuyo título refleja el elemento por el cual se le identificó. Estos irán acompañados de una discusión sobre la relación que guarda la revisión de la literatura con el actuar de las profesoras y de cómo inspiran a la constitución de un descriptor de conocimiento relativo al KMT.

<u>Extracto 1</u>: La profesora emplea algunos ejemplos contextualizados en los que puede ser útil el trabajo con matrices.

En este indicador nos referimos a Emi, quien sabe que usar ejemplos (situación-problema) de criptografía y de estudios sociológicos, le es útil para ir creando un contexto de significación antes de introducir la definición formal de matriz.

Tras una primera sesión en la que Emi presenta las matrices (primera aproximación informal), en la segunda sesión, la profesora comienza proponiendo un ejemplo de criptografía (consistente en el cifrado y descifrado de mensajes), en el cual menciona la utilidad del producto de matrices y de la matriz inversa:

Emi.	Las matrices no sólo nos sirven para guardar datos, para almacenar información, sino que con las matrices podemos realizar operaciones en las cuales, como en este caso, nos ayudan a proteger el descifrado de un texto, de un mensaje cifrado y luego también con la ayuda de la operación inversa, de la matriz inversa, volver de nuevo al mensaje original.

Enseguida Emi les propone otro ejemplo, en esta ocasión sobre estudios sociológicos. Ella les pregunta a los estudiantes: “¿quién creéis que es una persona idónea para ser el delegado de la clase?” Y en la pizarra va completando la matriz, en ella acomoda en orden alfabético letras que representan a cada estudiante de la A a la P en forma de fila, y en forma de columna en ese orden, escribiendo 1 si cree que sería buen delegado o 0 si no lo cree (se puede votar por uno mismo); todo ello para hacerles notar que a través de una matriz se vería *claramente* que el que tuviera más unos sería la persona que, según el grupo, sería idónea para ser el delegado de la clase. A continuación les señala que estas matrices se utilizan en estudios sociológicos para ver la opinión que el grupo posee de cada uno de sus miembros. De este modo, se promueve la noción de matriz como arreglo ordenado de datos.

Después de usar esos ejemplos contextualizados, Emi concluye de la siguiente manera:

Emi.	Bueno, visto esto, decidme, ¿qué es una matriz?, ya tenéis que tener una idea.
S1.	Un conjunto de datos que se disponen en columnas.
Emi.	¿Si en lugar de datos decimos elementos?
S1.	También

Emi.	Sería prácticamente lo mismo y más genérico, entonces es un conjunto ordenado de elementos dispuestos en filas y columnas, es lo que nosotros llamamos matriz.

Tras esta formalización de la definición de matriz, Emi define algunos tipos de matriz (cuadrada, fila, columna, nula, triangular superior e inferior, escalar, diagonal, unidad, traspuesta y opuesta).

Con estos extractos queremos hacer notar cómo la profesora emplea los ejemplos contextualizados con dos fines. En primer lugar, los usa para mostrar la funcionalidad del tema en relación con otras ciencias: Criptografía y Sociología (tipo de ejemplo 5 para Figueiredo et al., 2007). El segundo aspecto es la relación que establece entre los ejemplos y la necesidad e importancia del orden de los elementos de las matrices como característica definitoria (tipo de ejemplo 1 para Figueiredo et al. 2007).

Estos aspectos nos llevan a la determinación del indicador "*saber de la potencialidad del ejemplo contextual para crear un entorno de significación antes de introducir la definición formal de un concepto*". Sin lugar a dudas, en este conocimiento influyen tanto que Emi esté impartiendo el tema de matrices a estudiantes de bachillerato de la especialidad de Ciencias Sociales, como su trayectoria profesional, lo cual puede trascender su conocimiento del contenido matemático.

Extracto 2: La profesora elige intencionalmente un ejemplo en el que se cumple una propiedad singular.

Aly da muestras de conocer la potencialidad del ejemplo como instrumento para hacer notar singularidades de un tema. En este caso se trata de una propiedad de los determinantes de la cual quiere hacer notar su potencialidad. Utiliza el ejemplo para remarcar que en ocasiones interesa separar un determinante en la suma de dos determinantes porque puede simplificar los cálculos. El ejemplo consiste en calcular $\begin{vmatrix} 7+3 & 3 \\ 4+2 & 2 \end{vmatrix}$ y lo separa así:

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Aly.	¿Ven por qué me interesa separar?
S2.	Porque el segundo se anula.
Aly.	Claro, porque hay veces que al separar, resulta que hay uno que se anula, ¿vale? Entonces es mejor primero hacer esto y aplicar la propiedad y no hacer todo el cálculo, sino separar en dos, porque, claro, en nuestro ejemplo el segundo determinante tiene dos columnas iguales, entonces su determinante es 0, ¿de acuerdo?.

En este caso, la elección que hace la profesora del ejemplo (de aplicación de un procedimiento –Bills et al., 2006) es intencionada para que se denote la potencialidad de una propiedad que, aunque a primera instancia parecería que aumenta la cantidad de cálculos (calcular dos determinantes en lugar de uno), en realidad simplifica los resultados con los que se tiene que operar, lo cual toma importancia de cara a ejercicios más complicados que el que les presenta.

Lo anterior nos permite delimitar otro indicador con respecto al conocimiento de las bondades que conoce la profesora para el ejemplo en la enseñanza. Lo concretamos como "*saber de la potencialidad del ejemplo como medio para destacar o recalcar los aspectos singulares del contenido matemático que pretende enseñarse*". Aquí se verá reflejada de manera implícita o explícita la capacidad que cada profesor tenga para elegir los ejemplos con tal fin, ya que se pone en juego el conocimiento que les permite saber qué ejemplo podría ser realmente potente para recalcar, ilustrar, aclarar, comprobar o mostrar aquellos aspectos más sobresalientes del contenido matemático a enseñar.

<u>Extracto 3</u>: La profesora emplea ejemplos contextualizados y en el lenguaje de los estudiantes para que entiendan mejor el significado del producto de matrices.

La profesora considera que los estudiantes podrían entender mejor el contenido si ven en el ejemplo una aplicación familiar para ellos, con datos cercanos a su entorno. En la clase 3, Emi construye un ejemplo en el que involucra a los estudiantes y usa palabras familiares a ellos.

Emi.	Quiero que me escribáis la matriz A, que va a ser una matriz fila que me indique el número de vuelos de Sevilla a cada una de estas ciudades intermedias y vamos a llamar B a la matriz columna, el número de vuelos desde los puntos intermedios a Nueva York, […] tenéis que calcular A por B y después de calcular A por B, ver si se pueden multiplicar, y luego quiero que me digan qué significado tiene el producto.

Queremos destacar que, si bien es cierto que la profesora indica el proceso para resolver el problema y que esto priva a los estudiantes de proponer soluciones genuinas, también es cierto que muestra un conocimiento sobre ejemplos contextuales en los que el producto de matrices tiene un significado concreto que puede ser asequible al bagaje cultural de los estudiantes. Consideramos que el tipo de ejemplo que usa Emi puede ser muy cercano al ejemplo de aplicación a la vida real (tipo 5) de la categorización de Figueiredo et al. (2007).

Esto da pie a la conformación de otro indicador acerca del conocimiento de la potencialidad del ejemplo, esto es "*saber crear, proponer y explorar situaciones problema en forma de ejemplo o ejercicio, para que los estudiantes puedan producir sentido y significado al contenido matemático*".

Por otro lado, las ayudas matemáticas son elementos habituales y esenciales de la acción del profesor para propiciar el aprendizaje de sus estudiantes. En las ayudas se interrelaciona el conocimiento matemático del profesor y su conocimiento acerca de las representaciones, recursos y estrategias didácticas que pueden hacer más asequible el contenido al estudiante:

<u>Extracto 4</u>: La profesora gestiona una serie de ayudas diferenciadas entre sus estudiantes para que multipliquen dos matrices.

En el siguiente extracto mostramos a una profesora que aplica la técnica de andamiaje denominada cambio en la cantidad de ayuda (Verenikina & Chinnappan, 2006), diferenciando la necesidad de cada una de las estudiantes involucradas. Se trata de un tema procedimental en el cual la profesora intenta que se aprenda la mecanización del proceso. En el subtema matrices, Emi indica a los estudiantes, paso a paso, el procedimiento matemático que deben realizar para hacer el ejercicio que les propone sobre producto de matrices. Apoya a los estudiantes que le piden ayuda para poder empezar a hacer el ejercicio, además les indica algunas pautas a seguir o incluso ayuda a terminar el ejercicio a S3 en su cuaderno, tras su segunda equivocación.

En esa clase, Emi pide a sus estudiantes que realicen el siguiente producto de matrices: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Destacan dos casos, por un lado la estudiante S4, que solo requiere ayuda para empezar el ejercicio y por otro lado S3 que tiene más dificultades durante el proceso.

Emi.	¿Alguien necesita ayuda? [S4 levanta la mano y Emi se acerca a ella]. Tienes que multiplicar la primera fila por la primera columna [Emi marca, en el cuaderno de S4 en el primer ejercicio, la primera fila de la primera matriz y la primera columna de la segunda matriz] y luego tienes que ir multiplicando cada una de las filas por cada una de las otras columnas.

Emi sabe que con esa ayuda es suficiente para que S4 logre obtener el producto de las dos matrices.

Posteriormente, S3 levanta la mano para solicitar ayuda a Emi. La profesora se acerca a S3 y le indica paso a paso el procedimiento matemático y juntas logran obtener los valores de la primera fila de la matriz producto. Emi pretende que S3 aprenda el procedimiento para multiplicar dos matrices y considera que un método adecuado para ello es indicarle elemento a elemento (fila-columna) qué debe multiplicar y luego sumar. Posteriormente Emi ayuda a S3 para que obtenga los valores de la segunda fila.

S3.	Ésta con ésta [S3 señala la segunda fila y la primera columna].
Emi.	Eso es.
S3.	Yo creía que multiplicaba sólo el primer elemento de la fila por toda la columna [en términos generales a_11 por b_11, luego por b_21, y finalmente por b_31], pero entonces ahora es 0 por 4, 1 por 5, y 3 por 3 [son los productos correspondientes a la segunda fila por la primera columna].
Emi.	Sí, muy bien

Así, S3 expresa a Emi su idea errónea en cuanto al procedimiento de la multiplicación fila-columna. Emi sabe que en sus ayudas a S3 tendrá que subsanar esa idea errónea, por ello le va preguntando qué fila por qué columna va multiplicando.

Emi sabe que S3 presenta más dificultades que S4 para ejecutar el procedimiento, por eso decide dar un paso más allá del marcado de fila y columna que empleó para representar el procedimiento en el caso de S4, pasando a desglosar la expresión concretándola en los números específicos que forman esas fila y columna.

En los siguientes pasos S3 vuelve a su idea errónea de multiplicar sólo un número de la tercera fila por cada uno de los elementos de la segunda columna. Emi detiene a S3, indicándole que no es así y es Emi quien le indica los productos concretos que tiene que realizar, S3 sólo anota los resultados. Es así como logran obtener los valores de la tercera fila de la matriz producto.

En esos segmentos de transcripciones, de los cuales solo se muestra aquí una parte, se evidencia la variación de las ayudas que Emi va dando a sus estudiantes, pues a S4 sólo le indicó los pasos a seguir y con S3 fueron diferentes las ayudas, conforme surgían reacciones de la estudiante hasta terminar ese ejercicio.

Lo anterior nos lleva a la obtención del indicador "*saber qué tipo de ayudas matemáticas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, con la intención de que puedan dar solución a una tarea*", que engloba el conocimiento de ayudas diferenciadas dependiendo del tipo de problemática matemática a la que se enfrente el estudiante. Cabe destacar que en este caso la tarea es de tipo procedimental y que esto no dota a los estudiantes de los porqués de cada paso en ese proceso.

<u>Extracto 5</u>: La profesora da ayudas para que sus estudiantes mantengan en mente cuál es el propósito del problema que están resolviendo.

Emi encomienda a los estudiantes hacer un problema de programación lineal propuesto en el libro de texto. El problema consiste en determinar cómo debe organizarse el transporte para que su gasto sea mínimo.

Emi les hace notar con qué datos cuentan y qué tienen que determinar en el problema; en particular, les hace notar que sólo necesitan dos variables para resolver el problema y que da igual que escojan una ciudad u otra dado que las otras ciudades quedarían en relación con esas. En términos de Zurek et al. (2014), Emi utiliza una técnica de andamiaje para focalizar la atención en aspectos relevantes del problema.

Emi.	Tenemos el coste de transporte desde cada ciudad europea a cada una de las africanas, luego los lotes de que disponen y los lotes que necesitan cada una de las poblaciones, entonces ¿qué es lo que hay que determinar? Cuántos lotes de cada tipo desde cada una de las ciudades europeas a cada una de las africanas y tenemos que saber cuántos lotes de mantenimiento y de choque salen de la ciudad A, de la ciudad B y de la ciudad C y lo mismo para Munich.

Hay que señalar que, en la clase anterior, Emi ya les había propuesto la de al menos el plantear el problema, por eso, en la clase les pide a los alumnos que alguno pase a la pizarra, pero, al ver que nadie lo hizo, decide empezar a dar pautas y hacer preguntas para que los estudiantes participen y de esa manera ayudarles a comprender de qué trata el problema y luego hagan el planteamiento. Emi sabe que si no promueve al menos la comprensión del problema, será difícil que los estudiantes hagan un intento para resolverlo.

Respecto a esto, hay que mencionar también que en varias ocasiones Emi se enfrenta a que los estudiantes eluden abordar un ejercicio o problema, es decir, los estudiantes no hacen nada para solucionarlo, simplemente porque no entienden de qué trata el ejercicio o problema, o no entienden qué quiere el profesor que ellos hagan. Por ello, el profesor, tratando de solucionar esa dificultad, decide hacerles saber explícitamente lo que requiere el problema y enfatizarles en concreto cómo quiere que lo hagan y para qué (de hecho, se sirve de ejemplos para recalcar esos aspectos).Con esta evidencia y análisis surge el indicador "*saber que una estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en señalar lo que la actividad les demanda*".

<u>Extracto 6</u>: La profesora brinda ayuda para que los estudiantes se percaten de detalles implícitos en un problema que resolverán.

Emi les hace notar a los estudiantes que se puede leer entre líneas en los datos del problema, es decir, que aunque no se dé en el problema la distancia entre las fábricas de refresco y los supermercados, se puede saber qué supermercado está más cerca de cada fábrica si se fijan en el coste de transporte.

Emi.	¿Por qué estás diferencias de precios?
S3.	Depende de qué tan lejos estén.
Emi.	Muy bien, dependerá de la distancia los costes de transporte pues las cajas se introducen en camiones y los camiones tienen que recorrer una distancia, entonces dependiendo de la distancia que cada uno recorra será el coste, por ejemplo podemos ver que aunque no nos lo digan, el supermercado más cercano desde la fábrica A es el supermercado 2 [pues es el menor coste que aparece en la tabla para la fábrica A] y para la fábrica B el supermercado más cercano es el 1 [pues es el menor coste que aparece en la tabla para la fábrica B], mientras que el supermercado 3 sería el más alejado para las dos de ellas.

Emi sabe que habrá problemas en los que los estudiantes tendrán que deducir datos que no están explícitos en el problema pero que pueden obtenerlos y así tener acceso a la solución del problema. Expresa en la entrevista que para ella una manera de animar a los estudiantes a hacer el ejercicio es señalarles datos o aspectos que ellos deben considerar, combinando técnicas de andamiaje de focalización y ofrecimiento de pistas.

Esto nos lleva a plantear el indicador "*saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que se usará para darle solución*".

En la Tabla 3 se agrupan los descriptores que se obtuvieron en el estudio. Para ello nos valemos de dos jerarquías al interior de los subdominios: las categorías y subcategorías.

Categoría	Subcategoría	Indicador
Actividades, tareas, ejemplos y ayudas	Conocimiento de las características de las tareas ejemplos y actividades	**KMT1.** Saber de la potencialidad del ejemplo contextual para crear un entorno de significación antes de introducir la definición formal de un concepto.
		KMT2. Saber de la potencialidad del ejemplo como medio para destacar o recalcar los aspectos singulares del contenido matemático que pretende enseñarse.
		KMT3. Saber crear, proponer y explorar situaciones problema en forma de ejemplo o ejercicio, para que los estudiantes puedan producir sentido y significado al contenido matemático.
	Conocimiento de diversas maneras de encauzar, canalizar y dar pautas ante problemáticas suscitadas en el aprendizaje matemático	**KMT4.** Saber qué tipo de ayudas matemáticas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, con la intención de que puedan dar solución a una tarea.
		KMT5. Saber que una estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en señalar lo que la actividad les demanda.
		KMT6. Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que se usará para darle solución.

Tabla 3. Indicadores de conocimiento provenientes del análisis de los usos de ejemplos y las ayudas que las profesoras dan a sus estudiantes.

En este trabajo pudimos abstraer lo que presentamos como indicadores de conocimiento para la categoría Actividades, ejemplos, tareas y ayudas, perteneciente al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas.

Independientemente de las valoraciones que pudieran hacerse del aprovechamiento y generación de oportunidades de aprendizaje por parte de las profesoras implicadas en este estudio, el uso del modelo teórico MTSK como herramienta analítica y la sensibilidad teórica de la que nos dotó el estado del arte que construimos han posibilitado la obtención de los indicadores mencionados y por ende la profundización del propio modelo MTSK.

Pudimos detectar el uso por parte de las dos profesoras de varios tipos de ejemplos de acuerdo a la literatura revisada. Además, observamos la importancia de que el profesor conozca la potencialidad del ejemplo como recurso didáctico, así como el conocimiento subyacente a la selección, aplicación o uso de éstos, lo cual incluye plantearse si el ejemplo que se propone es realmente un ejemplo, si debe usar datos concretos o genéricos, si debe usar ejemplos para contextualizar un contenido, etcétera. Es evidente que estas elecciones por parte del profesor no sólo se sustentan en el KMT, reflejan parte de este tipo de conocimiento, pero también requieren estar respaldadas por conocimiento del propio tema, de cómo se proyectará este tema a futuro, tanto dentro de la disciplina como en otras ciencias, de los elementos sintácticos que permiten saber los efectos matemáticos del uso del ejemplo, de las consideraciones que suponen estos para los diferentes procesos de aprendizaje y de aquellos aspectos estipulados oficialmente de hasta dónde o cuánto del contenido debe abordar con los ejemplos. Todo ello a fin de construir un riguroso cuerpo de conocimiento acerca de los conceptos que presente (Muir, 2007) y obtener el máximo provecho como oportunidad de aprendizaje (Carrillo, Contreras-González & Zakaryan, 2014).

Por otro lado, en cuanto a las ayudas, la organización de la clase en una comunicación privilegiadamente unidireccional o con rasgos de discusión programada permitió únicamente ver algunas de las técnicas que en la literatura se han encontrado oportunas para propiciar el aprendizaje mediante andamiajes. De hecho consideramos que algunas de las técnicas que pudieran ser más productivas e interesantes, pero que requerirían de un trabajo más protagónico por parte de los estudiantes, ni siquiera fueron intentadas por las profesoras. En parte puede deberse a que el tema es tratado desde un punto de vista de dominar la técnica y no de comprender los porqués de los procedimientos enseñados. En ese sentido, también en el uso de los ejemplos es notorio que, aunque las profesoras hayan evidenciado diversos conocimientos del KMT, parecen no haber motivado la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes sino más bien parecían invitados únicamente a reproducir procedimientos.

Segunda Parte: Conocimiento de la Práctica Matemática

Al momento de terminar la escritura de la memoria doctoral, esta investigación se encontraba en una fase avanzada, pero no había una versión final en formato de artículo. Se trata de un estudio en el que se graba una sesión de un profesor de secundaria que está trabajando con el tema de *Justificación de fórmulas para el área de polígonos regulares*. Posteriormente, se extraen tres episodios en los que se puede identificar algunos rasgos de prácticas matemáticas. Notamos que el subdominio era de difícil acceso específicamente con la observación de clases, así que empleamos la noción de Oportunidades para la investigación (descrita en la sección de metodología de esta tesis) y, por medio de una entrevista semiestructurada, tratamos de convertir dichas oportunidades en evidencias de conocimiento.

Realizamos una caracterización de la práctica matemática. Los avances que se tienen hasta el momento permiten establecer dos categorías de la siguiente manera:

a) Conocimientos de las características de la práctica matemática
b) Conocimiento de la lógica argumental que está detrás del uso de cada práctica matemática.

Las prácticas matemáticas a las que nos referimos (basados en la búsqueda de literatura especializada) son la demostrar (consideramos aquí las ideas de argumentación, justificación y validación, por su similitud en cuanto al carácter de convencimiento, aunque reconocemos su diferencia en el uso de los criterios de verdad), definir, ejemplificar y usar heurísticos. Merece especial atención el uso que se hace del contraejemplo ya que tiene rasgos peculiares de criterios de verdad (útil en el proceso de demostración), acotan a las definiciones y pueden usarse para clarificar a los propios ejemplos.

Esta caracterización se convirtió en el protocolo de análisis de la clase observada para detectar evidencias y oportunidades de investigación. Las oportunidades detectadas, que se sintetizan en la Tabla 4, se convierten en un segundo protocolo de análisis por medio de una entrevista semiestructurada.

Oportunidades de investigación	**Guía para la entrevista semiestructurada**
Formas de definir	¿Por qué iniciar la definición con *figura geométrica*? ¿Se podría haber comenzado de otra forma? ¿Cuál sería la dinámica de construcción?
Necesidad y suficiencia como características de una definición	Proposición de otro objeto matemático con su definición, incremento en las propiedades de éste, ¿de cuántas formas distintas podría quedar *bien definido* dicho objeto?, ¿cuántas propiedades se requieren y de qué tipo son?
Negación de una definición	¿Qué características son antagónicas en la definición de dos objetos matemáticos *opuestos*?
Condiciones para que emerjan prácticas argumentativas	¿Qué características requiere una respuesta (correcta o incorrecta) para que sea puesta a discusión? ¿Qué elementos constituyen un argumento matemáticamente plausible?
Uso matemático del ejemplo y contraejemplo	¿Qué papel tienen el ejemplo y el contraejemplo en una discusión argumentativa?
Diferencias entre demostrar, justificar y deducir	¿Cuál es la lógica detrás del diseño de la clase? ¿Cuál es la lógica con la que se esperaba que se desarrollara la clase? ¿Cómo se enfrentaría el problema planteado en clase si el objetivo fuera demostrar? ¿Cómo se enfrentaría el problema planteado en clase si el objetivo fuera justificar? ¿Cómo se enfrentaría el problema planteado en clase si el objetivo fuera argumentar?
Formas de demostrar o refutar una conjetura	Para una conjetura de *no existencia*, ¿cuál es una posible lógica para demostrar y cuál para refutar?

Tabla 4. Diseño de la entrevista semiestructurada basada en las oportunidades de investigación detectadas en el primer acercamiento a los datos.

A continuación presento el análisis en su primer acercamiento (observación de clase y detección de oportunidades).

Cada uno de los extractos de vídeo fue elegido con base en la abstracción del trabajo con una práctica matemática. En el primer vídeo el profesor construye con sus estudiantes una definición de polígono. En el segundo destacamos la confrontación de dos respuestas de las cuales sólo una es correcta y el profesor trabaja para que en su clase se distinga la corrección de dichas respuestas. Finalmente, en el tercer extracto el profesor trabaja con sus estudiantes una actividad para justificar las fórmulas de área para rombo y romboide. Destacamos en éste la posibilidad de explorar la lógica de construcción de argumentos que utiliza el profesor en su actividad.

En cuanto a la construcción de una definición (primer extracto), en el KPM nos interesan aquellos aspectos que conoce el profesor acerca de las cualidades de una definición. Su conocimiento sobre la definición de un objeto matemático en particular está considerado en el KoT dentro del MTSK. Aquí nos enfocaremos en los aspectos de la lógica matemática que subyacen a dicha construcción. En el extracto distinguimos cuatro oportunidades de investigación que son detalladas a continuación.

<u>Oportunidad 1</u>: para explorar el conocimiento sobre formas de definir: El profesor comienza su clase pidiendo a los estudiantes que definan polígono. Uno de sus estudiantes menciona que son figuras geométricas. En la entrevista, el profesor declara que toma esta característica como punto de partida esperando que la definición pueda ser complementada:

D.	Leo menciona que un polígono es una figura geométrica y yo solicito que [el resto del grupo] complemente la idea que nos proporciona Leo.

Esa complementariedad que menciona el profesor nos habla de una forma de definir mediante propiedades, comenzando con aquellas que son más generales y añadiendo a esta algunas más que vayan acotando al objeto. Este hecho nos brinda la oportunidad de profundizar en el conocimiento que tiene el profesor sobre esta forma de definir y la exploración de otras formas de definir en caso de que el profesor pueda plantear alguna partiendo de una característica menos general.

<u>Oportunidad 2</u>: de explorar el conocimiento acerca de la necesidad y suficiencia de características en una definición: Cuando el profesor pide que añadan características a la de figura geométrica, algunos estudiantes mencionan aspectos relacionados con las medidas de sus lados. El profesor aprovecha las intervenciones para hablar sobre la clasificación en polígonos regulares e irregulares y posteriormente regresa a preguntar sobre la definición de polígono.

D.	Figuras geométricas, pero qué le complementamos al concepto de figura geométrica para que realmente sea un polígono.
A1.	De varios lados, ¿iguales?
D.	¿Lados iguales?
A2.	Hay unos que no tienen sus lados iguales.
D.	Exactamente, hay unos que no tienen lados iguales. Entonces, si son polígonos, tendríamos dos tipos de polígonos, ¿no?
As.	Polígonos regulares y polígonos irregulares
D.	Regulares e irregulares. Okey, entonces, ¿qué es un polígono?

Si bien la comparación de las medidas de los lados de una figura no es una característica necesaria ni suficiente para definir polígono, aprovechamos este episodio en el que las características que mencionan los estudiantes son internas al concepto, pero escapan de la definición, para abordar el tema de necesidad y suficiencia en las definiciones, así como del estatus de las características de un objeto matemático. Es una oportunidad para analizar el conocimiento que el profesor expresa sobre la tipología de las características de un objeto matemático.

Oportunidad 3: de explorar el conocimiento acerca de la negación de una definición: a raíz de que los estudiantes proponen la medida de los lados como característica para definir los polígonos, el profesor señala la clasificación de los polígonos en regulares e irregulares y, al final del extracto, solicita una definición informal que los diferencie:

D.	De acuerdo. Ahora sí, si fuera regular, ¿qué le complementamos?
As.	Que todos sus lados miden lo mismo
D.	Que todos sus lados midan lo mismo, ¿y si es irregular?
As.	Que no, que no miden lo mismo
D.	No deben de medir lo mismo, sus lados.

Es sabido que basta con que la medida de un lado del polígono difiera de la del resto de lados para que éste sea considerado irregular. Las definiciones de polígono regular e irregular se contraponen y, en el lenguaje empleado por el profesor esa contraposición se refleja en "no deben de medir lo mismo". En este extracto encontramos la posibilidad de explorar la noción lógica de la negación de una definición y aprovechar para explorar el conocimiento que tiene el profesor sobre los elementos que conforman la negación de distintos cuantificadores y con cuál de estos podría encontrar relación la definición. Cabe señalar que aquí también se presenta una oportunidad interesante que está fuera del KPM, ya que el profesor utiliza una definición muy común en las clases de matemáticas, pero que puede llevar a concepciones erróneas para el caso de los polígonos regulares. El definir utilizando la equivalencia en la medida de los lados sin advertir nada de los ángulos permite que en esa clasificación haya polígonos cóncavos (considerados irregulares). Este hecho resulta interesante ya que permitiría explorar el Conocimiento del Tema (¿sabe el profesor esto?) y el Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (¿es posible reconocer efectos en los patrones de pensamiento de los estudiantes en los que una definición incompleta les sea dada?).

Por otro lado, en el extracto relativo a la confrontación de respuestas en la clase, encontramos dos oportunidades de investigación que se refieren al conocimiento sobre la función del ejemplo y el contraejemplo en matemáticas y una evidencia de conocimiento referente al tipo de práctica argumentativa.

Oportunidad 4: para profundizar en el conocimiento acerca de las prácticas argumentativas que se espera que surjan al provocar discusiones: El profesor pide que los estudiantes digan cuál es la fórmula para obtener el área de un cuadrado, ante ello obtiene tres respuestas.

D.	¿Cómo calculas el área del cuadrado? [El alumno escribe algo en la pizarra que no es visible en el vídeo] ¿Alguien tiene una idea más?, él

	escribió *ele-a* por *ele-a*, [dirigiéndose a otro estudiante] ¿cómo quedaría?, [después de que el alumno termina de escribir, pregunta] ¿qué escribiste?
A6.	a por seis, por cuatro que diga [corrige lo que había escrito antes]
D.	Bien, ¿estamos de acuerdo con esta fórmula?, [pregunta mientras encierra en un círculo $4\ X\ a$]?

La primera respuesta es correcta, pero no aparece la notación que esperaba el profesor. La segunda respuesta es eliminada por el propio estudiante que la propone e inmediatamente postula otra fórmula, la cual también es incorrecta. Es en esta última en la que el profesor centra la discusión. Mediante cuestionamientos sobre la elección de solo esa fórmula para la discusión, de las características que debería tener una respuesta para ser puesta a debate y del tipo de argumentos que podrían ponerse en juego, exploramos el conocimiento que tiene el profesor acerca de distintas prácticas argumentativas en matemáticas y el uso que da en una situación específica.

<u>Oportunidad 5</u>: para explorar conocimiento acerca del uso matemático del ejemplo y el contraejemplo: Cuando la discusión acerca de la corrección de la fórmula propuesta por A6 para calcular el área del cuadrado estaba estancada en argumentos, uno de los estudiantes dice que no está de acuerdo con la fórmula porque “ese sería el perímetro”. Aprovechando que esa afirmación no sirve para cualquier medida del lado del cuadrado, realizamos una discusión con el profesor acerca del uso argumentativo del ejemplo y contraejemplo como medios de justificación y sus relaciones con la generalización de resultados, esto último muy relacionado con la idea de justificar fórmulas.

<u>Evidencia 1</u>: conocimiento referente a un tipo de práctica argumentativa: En diferentes momentos el profesor se refiere a elementos de autoridad para garantizar la fiabilidad de un argumento:

D.	Pero es un cuadrado y, por definición, ¿cómo es un cuadrado? […] Pero el cuadrado, por definición, ya nos da una idea, ¿cuál es esa idea? […] Exacto, esto sería el perímetro.

Este tipo de respaldos nos da evidencia del conocimiento que tiene el profesor sobre un tipo específico de práctica argumentativa, lo que Flores (2007) considera la convicción externa autoritaria.

En el tercer extracto se identifican dos oportunidades de investigación relacionadas con la lógica subyacente al uso de un argumento de conservación de superficie para la justificación de fórmulas para calcular el área de un rombo y un romboide.

<u>Oportunidad 6</u>: para explorar el conocimiento sobre las diferencias entre demostrar, justificar y deducir: El objetivo declarado para la clase analizada era justificar las fórmulas para calcular el área de polígonos regulares. El tipo de actividad que plantea como introducción es, mediante recortes, transformar un rombo y un romboide en un rectángulo, del cual los estudiantes conocen la fórmula para calcular el área y podrían hacer una relación entre las magnitudes del rectángulo formado y la figura inicial. Aprovechamos ese proceder para cuestionar acerca de qué similitudes y

diferencias encuentra entre justificar (por su objetivo), deducir (por su forma de proceder) y demostrar (por ser la práctica matemática más estudiada en la literatura de investigación).

Oportunidad 7: para explorar el conocimiento acerca de formas de demostrar o refutar una conjetura: En un momento de la clase en el que el profesor explicaba cómo esperaba que los estudiantes transformaran el romboide en rectángulo uno de los estudiantes le planteó la posibilidad de que esa tarea no pudiera realizarse:

D. Sí, un romboide, a partir de él quiero un rectángulo.
A7. ¿Y si no sale?
D. Me vas a demostrar que no salió.

El profesor sabe que es posible realizar la transformación. Sin embargo, no niega al estudiante la posibilidad de que su suposición sea cierta. Este fragmento se utiliza para explorar el conocimiento que tiene el profesor acerca de qué recursos lógicos podría utilizar si tuviera que demostrar la conjetura planteada por el estudiante y cuáles si quisiera refutarla. Si bien, el papel del contraejemplo se antoja que surja de manera natural en la refutación, hemos decidido separar esta oportunidad de una anterior dedicada específicamente al ejemplo y contraejemplo para dar posibilidad a la aparición de otras formas que el profesor conozca para hacer dicha refutación, pero sobre todo para destacar la entidad del conocimiento de la lógica subyacente a una demostración y una refutación particular en la que la existencia (pensando en la demostración) y unicidad (pensando en la refutación) juegan un papel importante.

Hasta esta fase se encuentra esta investigación. Se realizó la entrevista semiestructurada y ahora se analizará cómo las respuestas que el profesor ofrece en esta pueden ser utilizadas como evidencias de conocimiento o si generan más oportunidades (las cuales ya no podrán ser exploradas, pero que servirán para caracterizar algunos aspectos del KPM).

Un ejemplo del uso del MTSK para analizar el conocimiento que se podría potenciar con una actividad diseñada para maestros de primaria en formación

Una preocupación que surge en el grupo de investigación cuando comenzamos a estructurar y profundizar en el MTSK fue la transferencia del modelo a la formación inicial y permanente de profesores. La idea de desarrollo profesional sin abandonar la de conocimiento profesional tiene muchos matices. Sin embargo, una cuestión a la que se puede acceder de manera más o menos inmediata es saber qué conocimientos se busca potenciar con una actividad o curso de formación. Esto no implica de ningún modo una metodología de desarrollo profesional ni tampoco sirve para calificar si una actividad o curso son efectivos para el desarrollo, eso requiere de otras herramientas teóricas y metodológicas.

En Carrillo, Escudero y Flores (2014) avanzamos en la línea de analizar actividades diseñadas para la formación inicial de maestros de matemáticas para destacar los aspectos de conocimiento matemático que se podrían potenciar o que se pueden necesitar al resolver la actividad.

Utilizamos el MTSK como un “marco que nos permite justificar y explicar la estructura de una actividad diseñada para trabajar el tema de polígonos con profesores de primaria en formación inicial” (p. 19). La actividad es una adaptación de la que plantean Muñoz-Catalán et al. (2013) cuyo objetivo es trabajar las características de los polígonos. En nuestro artículo analizamos tanto el diseño general de la actividad como los aspectos de conocimiento que se pueden potenciar con ella.

A continuación reproduzco el artículo completo.

El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria

José Carrillo, Dinazar I. Escudero & Eric Flores[2]

Inspirados en algunas de las propuestas de modelos de conocimiento profesional del profesor de matemáticas, por ejemplo el *Knowledge Quartet* (Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009), el *Mathematical Proficiency for Teaching* (Kilpatrick, Blume y Allen, 2006), y, en especial, el *Mathematical Knowledge for Teaching*, (Ball, Thames y Phelps, 2008), Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (en prensa) presentan un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas al cual nombran *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK).

El MTSK fue desarrollado a partir del análisis de las potencialidades y dificultades detectadas en diversos modelos de conocimiento del profesor de matemáticas y con base en la elucubración teórica e investigaciones empíricas sobre conocimiento y desarrollo profesional.

El MTSK es un modelo analítico de tipo descriptivo, adecuado para elaborar una interpretación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas desde un punto de vista integral, que toma en cuenta las distintas naturalezas, tanto del dominio matemático, como del dominio de la didáctica del contenido matemático. Se ha diseñado pensando en la implementación para la investigación sobre el conocimiento que tiene el profesor acerca de la matemática en general, de conocimientos matemáticos particulares y de su enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, lo consideramos también útil para analizar y diseñar propuestas de actividades dirigidas a la formación inicial y continua de profesores de matemáticas.

Este modelo propone, con fines analíticos, la separación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en dos grandes dominios, el matemático y el didáctico del contenido, que a su vez se dividen en tres subdominios cada uno. Además, se considera las concepciones sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje como elemento central que permea la práctica del profesor y que están ligadas también a su conocimiento. La Figura 1 es la representación gráfica del modelo.

[2] Universidad de Huelva, España

La nomenclatura que se utiliza para cada subdominio es la correspondiente a su nombre en inglés, ya que el modelo ha sido presentado en diferentes foros internacionales y se pretende una homogenización en el uso de los términos.

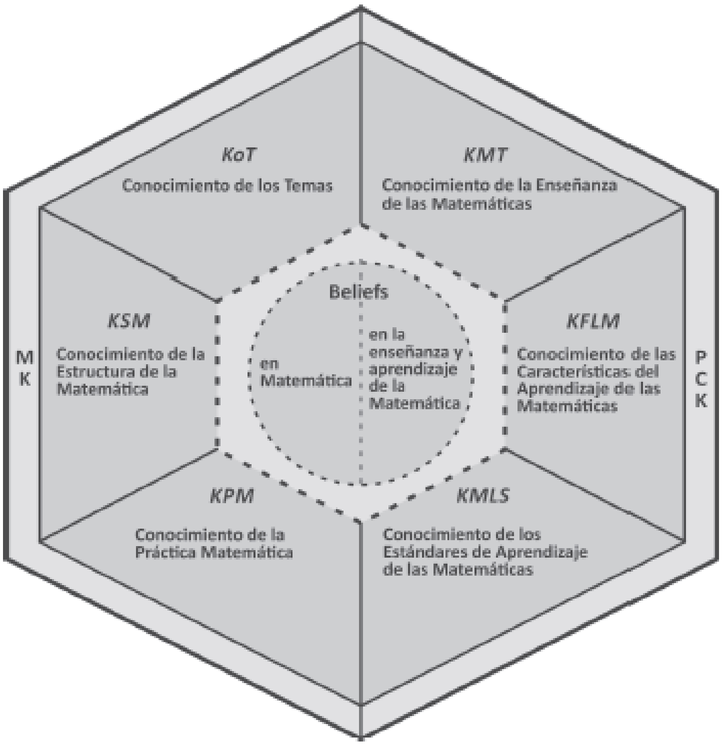


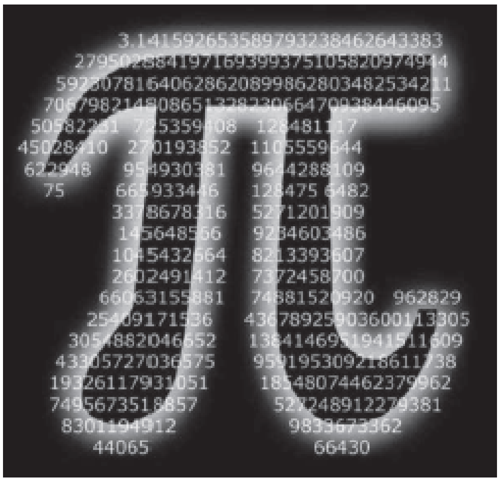
Figura 1.Diagrama del *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*-MTSK (Carrillo, Contreras & Flores, 2013)

Con respecto al dominio matemático, el MTSK contempla tres subdominios de conocimiento (*e.g.* Carrillo *et al*, 2013; Montes, Carrillo & Contreras, 2013), que definimos brevemente a continuación:

El conocimiento de los temas (KoT) se refiere al conocimiento de la matemática como disciplina y de la matemática escolar en particular, así como su fundamentación teórica. Estos conocimientos responden a una mirada enfocada en lo que tiene sentido para el profesor, en tanto que consideramos importante para él tener un conocimiento disciplinar profundo. Así, este subdominio ofrece cabida al conocimiento de algoritmos estándares y alternativos, ligados al contenido, al conocimiento de la fenomenología de los conceptos, que aporta un bagaje de aspectos epistemológicos que le permite al profesor comprender diferentes significados atribuidos a un mismo contenido, además de poder hacer asociaciones con los conocimientos de propiedades, definiciones y distintos registros asociados a un determinado tema.

Otro subdominio del conocimiento matemático es el conocimiento de la estructura matemática (KSM), el cual responde a la necesidad de conocer el objeto de enseñanza de manera integral y relacionada. Se engloban aquí los conocimientos de las relaciones existentes entre contenidos avanzados y elementales, desde un punto de vista de complejización o simplificación de un concepto. Además incorporamos aquí las grandes ideas matemáticas (Kuntze, Murphy, Lerman, Kurz-Milcke, Siller & Windbourne, 2011) como elementos estructuradores de la matemática.

El último de estos subdominios es el referente al conocimiento de la práctica matemática (KPM), que se centra en las formas de hacer y proceder en matemáticas, como son las distintas formas de demostrar o definir, conocer el significado de axioma o teorema, así como el conocimiento de otros elementos constituyentes de las matemáticas o de la sintaxis matemática, las cuales son una herramienta fundamental para el profesor.



El MTSK es un modelo analítico de tipo descriptivo, adecuado para elaborar una interpretación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas desde un punto de vista integral.

El conocimiento didáctico del contenido del MTSK se encuentra basado en la propuesta de Shulman (1986) como creador del término y es matizado con propuestas posteriores de caracterización de este conocimiento (*e.g.* Llinares, Sánchez & García, 1994; Pinto & González, 2006) basadas en resultados de investigación. Es importante enfatizar que los criterios de validez del conocimiento en este dominio son sustancialmente distintos de los del dominio del conocimiento matemático del modelo. Además, los procesos de construcción de conocimiento asociados a estos dominios poseen diferencias, así como su expresión o manifestación, lo que implica diferentes aproximaciones de los investigadores para acceder a éstos.

Dentro de los subdominios identificados en este dominio no se tiene en cuenta los conocimientos pedagógicos en contextos de actividades matemáticas, sino solo aquellos donde el contenido matemático condiciona la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. A continuación describimos los tres subdominios correspondientes (*e.g.* Flores, Escudero & Aguilar, 2013; Sosa, Aguayo & Huitrado, 2013):

El conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM) se refiere a los conocimientos relacionados con las características para aprender inherentes a un contenido matemático en particular o a la matemática en general. Este subdominio centra el interés en aquellas características derivadas de la interacción de los estudiantes con el contenido matemático y en las características subyacentes de la consideración del contenido matemático como objeto de aprendizaje en sí mismo. Está compuesto por los conocimientos de las características del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, del lenguaje asociado a cada concepto, de errores, dificultades u obstáculos posibles al abordar un determinado contenido matemático y del conocimiento, formal o informal, de teorías del aprendizaje de las matemáticas.

Dentro del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) se incluye el conocimiento de la variedad de representaciones para la instrucción que conoce el profesor y las posibles estrategias didácticas que puedan usarse para la enseñanza de un contenido. También se considera el conocimiento, formal o informal, de teorías de enseñanza y el conocimiento sobre las características y potencialidades matemáticas que tienen distintos recursos o materiales usados para la enseñanza del contenido matemático.

Se propone también un subdominio referente al conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático (KMLS) que, a diferencia del conocimiento curricular propuesto en el MKT (Ball *et al*, 2008) o en Shulman (1986), no se limita a conocer el currículum como documento oficial, sino que se trata de un conocimiento que permite adoptar una postura crítica y reflexiva al momento de pensar en lo que el estudiante debe/puede aprender en un determinado nivel escolar, por lo que se incluyen también lo que asociaciones profesionales o la literatura de investigación proponen al respecto.

El modelo está siendo utilizado en diversas investigaciones en proceso. Se ha observado la clase de profesores de educación básica enseñando fracciones así como profesores de educación avanzada a los que se les invita a reflexionar sobre el papel que tiene el infinito en los temas que imparten, o profesores que abordan la enseñanza del producto de matrices a nivel universitario. También se está utilizando para hacer investigación con profesores por medio del entorno online, tanto en sus clases habituales, como en escenarios de formación permanente.

Ejemplo del uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria

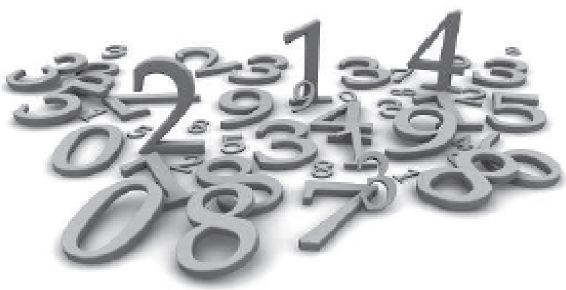
A continuación, se ejemplificará el uso del MTSK como un marco que nos permite justificar y explicar la estructura de una actividad diseñada para trabajar el tema de polígonos con profesores de primaria en formación inicial adaptada de Muñoz-Catalán, Montes, Carrillo, Climent, Contreras y Aguilar (2013). Pondremos especial énfasis en la explicitación de elementos de los diferentes subdominios del MTSK en el diseño, aunque, como ya hemos precisado antes, entendemos el conocimiento del profesor como un conjunto integrado de saberes de distintas naturalezas y mostrarlo seccionado tiene fines únicamente analíticos.

El diseño de la actividad contempla el tema de polígonos en Educación Primaria. En éste, se busca que el futuro profesor reflexione sobre las relaciones internas al propio concepto vía su clasificación, que desarrolle capacidades para clasificar y describir detalladamente grupos de polígonos, que conozca características de aprendizaje asociadas a los conceptos involucrados y recursos que pueden ser utilizados para la enseñanza de estos temas. Asimismo, se promueve la consideración del nivel escolar como un indicador de aquello que se espera que el estudiante de primaria aprenda de un determinado tema.

Al abordarse este contenido al comienzo de la asignatura, se comienza la actividad cuestionando al profesor en formación sobre qué les sugiere la palabra *Geometría*. Enseguida, se muestra un esquema de los diversos aspectos de la geometría que debería conocer un profesor de matemáticas: seis conocimientos disciplinares[3] de diferente naturaleza que ellos, como futuros profesores, requerirán para enseñar geometría. En la Tabla 1 relacionamos esos conocimientos con los subdominios del MTSK.

Esquema que se muestra en la actividad	Subdominio en el que ubicamos cada conocimiento
Conocimiento de los elementos internos de los diferentes temas de geometría	Conocimiento de los temas matemáticos
Conocimiento de las relaciones de cada tema de geometría con otros temas, ya sean de geometría u otras áreas de la matemática y de cursos posteriores o anteriores	Conocimiento de la estructura matemática
Conocimiento de prácticas matemáticas asociadas al trabajo con temas de geometría	Conocimiento de la práctica matemática
Conocimiento de las características con las que se aprende geometría	Conocimiento de las características de aprendizaje en matemáticas
Conocimiento de la enseñanza de la geometría	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas
Conocimiento de estándares de aprendizaje para la geometría	Conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas.

Tabla 1. Asociación de tipos de conocimiento de geometría que debe tener un profesor de matemáticas con los subdominios del MTSK.



3 Cabe señalar que estos conocimientos son lo que determinan la especialización del profesor de matemáticas. Pero que, además de éstos, también requerirán conocimientos de didáctica general, de psicopedagogía, entre otros, para realizar una labor integral.

Con la finalidad de ubicar a los estudiantes en los contenidos de la asignatura, y concretar algunos de los elementos internos, relaciones con cursos posteriores y anteriores, prácticas matemáticas, características, estándares o prácticas de enseñanza de los que se habla en estos puntos, se explicitan algunos aspectos que se estudiarán durante el curso de geometría (tabla 2):

Aspectos que el futuro profesor estudiará en el diseño propuesto	Conocimientos que el profesor de matemáticas involucra para cada aspecto	Subdominio asociado
¿Cómo introducir el concepto y cálculo de área en Educación Primaria?	Conocimiento del concepto *área* y técnicas para calcularla.	KoT
	Conocimiento acerca de qué se espera que un estudiante de primaria aprenda acerca de geometría en cada ciclo.	KMLS
	Conocimiento de las características que tiene un estudiante de primaria y cómo estas le permiten aprender el tema en cuestión.	KFLM
¿Qué recursos son adecuados para trabajar con los polígonos?	Conocimiento sobre aspectos de la enseñanza de polígonos referente al potencial que tienen de acuerdo a cada objetivo.	KMT
¿Por qué sólo hay cinco poliedros regulares?	Conocimiento de relaciones internas al concepto de polígono con la idea de ángulo, la fórmula de Euler y algunas de sus aplicaciones.	KoT
	Conocimiento de relaciones externas con conceptos anteriores como el de ángulos suplementarios y con conceptos posteriores como el de teselación del plano.	KSM

¿A qué punto de la banda tengo que orientar el golpe de la bola blanca en el billar?	Conocimiento de aspectos fenomenológicos asociados al tema de ángulos y conformación de polígonos. Conocimiento de las simetrías.	KoT
¿Qué dificultades tienen los niños a la hora de clasificar los triángulos?	Conocimiento sobre las características de aprendizaje asociadas a las dificultades con el tema de triángulos en estudiantes de primaria	KFLM
¿Cuántas diagonales tiene un polígono?¿Cómo se calcula el área y volumen de cuerpos geométricos compuestos?	Conocimiento profundo del tema que permita dar respuesta a problemáticas concretas dentro de la misma matemática.	KoT

Tabla 2. Relaciones de los subdominios del MTSK con los aspectos que se espera que un profesor de matemáticas conozca sobre geometría para primaria.

Se muestran, además, los aspectos que no se estudiarán en el curso:

- *¿En qué puntos se cortan la recta* $x + y = 4$ *y la circunferencia* $x^2 + y^2 = 25$ *?*

- *¿Cuáles son las singularidades de la superficie* $xy + xz + +yz - xyz = 0$ *?*

Estos aspectos tienen el objetivo de mostrar conocimientos que rebasan el límite superior de relaciones entre los temas que se verán en el curso (geometría plana, movimientos en el plano y geometría espacial) con contenidos avanzados (los que aquí se muestran son temas posteriores al estudio de la geometría analítica, que es vista habitualmente en bachillerato) que no se espera que dominen los profesores de primaria.

Enseguida, se presenta un conjunto de polígonos (Figura 2) y se pide a los futuros profesores que identifiquen similitudes y diferencias entre ellos y que dibujen una figura que no se parezca a estos.

El conocimiento que esta parte de la actividad pretende desarrollar es la profundización en las características clasificables de las figuras, lo cual se considera en el KoT (ángulos, cantidad o medida de lados, etcétera). Además, se pretende mostrar diferentes niveles de abstracción de acuerdo a las características cada vez más finas que se extraigan de las figuras y de la búsqueda de similitudes y diferencias. Por ejemplo, un nivel de abstracción menor relacionaría todos los polígonos por ser figuras planas cerradas. Una mayor abstracción relacionaría aquellas que tienen algún ángulo recto en un grupo y en otro aquellas que tienen todos sus ángulos oblicuos. Estos elementos de conocimiento (relativos a cómo proceder al clasificar) se consideran en el KPM.

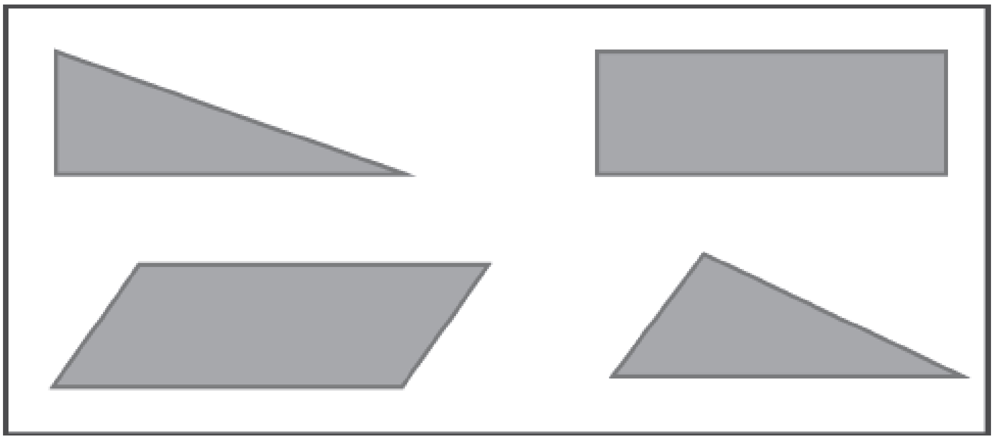


Figura 2. Conjunto de polígonos para identificar similitudes y diferencias.

Como tareas propuestas que buscan desarrollar, de manera integrada, aspectos de conocimiento especializado para la enseñanza de la clasificación de polígonos, se proponen las siguientes:

- *Revisar el currículo de primaria sobre geometría.*
- *Elaborar una actividad para primer ciclo, reformularla para segundo ciclo y luego para tercer ciclo.*
- *Expresar no solo el contenido matemático que contiene cada ejercicio, sino las relaciones que hay entre cada actividad, y la evolución que ha de haber realizado el alumno, en cuanto a su conocimiento, para poder abordarla.*

Los conocimientos en los que se pone énfasis en estas tareas son referentes al conocimiento didáctico del contenido. Por un lado está el conocimiento sobre aquello que se espera que se aprenda sobre geometría en educación primaria así como las adecuaciones correspondientes a cada ciclo (KMLS). Esas mismas adecuaciones requieren de un conocimiento de las características y condiciones de aprendizaje que tienen los alumnos de primaria (KFLM). Finalmente, la estructuración de actividades de acuerdo a sus objetivos, por ejemplo, forman parte del KMT. No obstante, el futuro profesor también requiere, para realizar esta tarea, de conocimiento matemático de relaciones entre contenidos, considerado en el KSM, y de propiedades, definiciones, aplicaciones, fenomenología… asociadas a los conceptos que decidan trabajar, que se asocia al KoT.

Finalmente, se propone la siguiente actividad con el objetivo de introducir, con la ayuda del formador, la noción de polígonos cóncavos y de *probar* las propiedades que se han construido hasta el momento para polígonos convexos:

- *Un estudiante piensa en un polígono y enuncia solo una propiedad del mismo.*
- *Continúa otro estudiante añadiendo otra propiedad compatible con la anterior.*
- *Se sigue el proceso hasta que alguien piense que el polígono ya está unívocamente determinado, pasando a dibujarlo a la pizarra.*

Con este ejercicio se da por finalizada la actividad con los futuros profesores.

De manera general, además de los conocimientos que se han señalado antes, la actividad tiene el objetivo transversal de desarrollar nociones de conocimiento sintáctico de las matemáticas: aspectos como *qué significa demostrar*, la *abstracción y la generalidad* y *fórmula vs concepto*. Todos estos elementos son considerados por el MTSK en el subdominio del conocimiento de la práctica matemática. En concreto, la actividad, que en su introducción señala seis naturalezas de conocimiento que conforman el conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la enseñanza de geometría, trata de integrar cada uno de estos, pero dejando patente la delimitación entre cada una de estas naturalezas con la finalidad de que la formación de los futuros profesores sea, por un lado integral, y por otro lado, que se puedan notar los elementos que van conformando su conocimiento con la finalidad de que los desarrollen constantemente.

Conclusiones

En este artículo hemos hecho una labor de meta-reflexión sobre un diseño de formadores de profesores de educación básica, con la finalidad de ilustrar el uso y la integración de los elementos que conforman el núcleo de conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

Uno de los retos que el propio grupo de investigación se ha propuesto a futuro es el desarrollo de un programa integral de formación, tanto inicial, como permanente, que contemple, entre otras cosas, los conocimientos detectados con ayuda del MTSK, que permita una formación sólida en cada una de las seis naturalezas de conocimiento que conforman los subdominios, pero sin perder de vista la extensa variedad de problemáticas provenientes de las prácticas del profesor y de las necesidades particulares de acuerdo al contexto escolar.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (en prensa). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. *Procedings of Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8)*. Antalya, Turkey. Preliminary version in http://cor.to/MTSK_CERME2

Carrillo, J., Contreras, L.C., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática* (pp. 193-200). Granada, España: Comares.

Flores, E., Escudero, D.I., & Aguilar, A. (2013) Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*. (pp. 275-282), Bilbao, España.

Kilpatrick, J., Blume, G., & Allen, B. (2006, May). Theoretical framework for secondary mathematical knowledge for teaching. Unpublished manuscript, University of Georgia and Pennsylvania State University. Available http://66-188-76-44.dhcp.athn.ga.charter.com/Situations/%20ProposalDocs/ProposDocs.html

Montes M.A., Contreras, L.C., & Carrillo, J. (2013) Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII*. (pp. 403-410), Bilbao, España.

Muñoz-Catalán, M.C., Montes, M.A., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. & Aguilar, A. (2013). *La clasificación de figuras planas en primaria: una visión de progresión entre etapas y ciclos*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Pinto, J., & González, M. (2006). Sobre la naturaleza conceptual y metodológica del conocimiento del contenido pedagógico en Matemáticas. Una aproximación para su estudio. En M. Bolea, M. Moreno, & M. González (Eds.), *Investigación en educación matemática : actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 237-255). Huesca, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009). Developing Primary Mathematics Teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet. London: Sage.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14.

Sosa, L., Aguayo, L.M.& Huitrado, J.L. (2013). KFLM: Un entorno de Aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M.S. García, J.A. Hernández, & L. Sosa (Eds.), *Matemática educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). México, D.F.: Díaz de Santos.

Conclusiones

El trabajo que se presenta en esta memoria doctoral, en formato de compendio de publicaciones, tuvo por objetivo la conformación del modelo de conocimiento del profesor de matemáticas MTSK y la profundización en el estudio de algunos de sus elementos. Este objetivo no es exclusivo de esta tesis, sino que también es abordado en diversas investigaciones que realiza el grupo de investigación que colabora en el Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva y que pueden consultarse en http://goo.gl/XSDMBK.

El modelo denominado *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) ha resultado ser un referente *obligado* cuando se habla sobre el conocimiento del profesor. En algunos casos suele citarse el nombre del modelo como un medio para utilizar un lenguaje compartido (e.g. Silverman, 2012), aunque luego sus subdominios no se utilicen como herramientas en el análisis de los datos obtenidos y, en consecuencia, sus resultados no suelen valerse del modelo ni tampoco aportan teóricamente al mismo. Esto es sobre todo notorio cuando la línea en la que se desarrolla la investigación no se centra en la comprensión del conocimiento del profesor, sino que este es solo un contexto para comprender otros fenómenos. Nuestros primeros trabajos, presentados en el CERME 8, fueron producto de un esfuerzo de profundización conceptual en el MKT y mostraban una serie de inconsistencias en términos analíticos sobre la delimitación de sus subdominios. Al mismo tiempo, una de esas publicaciones (Carrillo et al., 2013) presentaba la primera idea completa del MTSK. Así, el MTSK toma como experiencia los conflictos de tipo analítico a los que nos enfrentamos con el MKT y surge como una propuesta que evita dichas dificultades en el estudio del conocimiento del profesor. Además, si bien es cierto que la visión de *especializado* en el MTSK comparte rasgos fundamentales con algunos otros modelos, en particular con el MKT, también es cierto que su consideración como un conjunto de elementos que solo tienen sentido para el profesor de matemáticas (en lugar de ver la exclusividad elemento a elemento) aportan diferencias y matices que luego se reflejan en los análisis que se realizan. Presenté esta visión en el Marco Teórico mediante una comparación entre el MKT, el marco del TEDS-M y el MTSK.

El *paso* del MKT al MTSK se realizó mediante tres procesos: (a) r*econceptualización* de la noción de especializado, pasando de considerarlo como un conocimiento puramente matemático a considerarlo como el conjunto de elementos que conforman el modelo; (b) *reestructuración* en el dominio de conocimiento matemático, cambiando una clasificación basada en elementos externos (común-compartido, especializado-exclusivo, horizonte) por una clasificación intrínseca a la matemática (tema, conexiones, prácticas-sintaxis), y (c) *reinterpretación* en el dominio de conocimiento didáctico del contenido considerando exclusivamente los elementos de esta naturaleza en los que la matemática tenga una implicación, dando cabida, de manera explícita, a las investigaciones en didáctica de la matemática como fuente de conocimiento para el profesor.

Esta centralidad exclusiva de los elementos de conocimiento en los que la matemática tiene influencia encuentra una correspondencia, quizá sin estar planificado así, con la manera en que está organizada la formación inicial de maestros en las universidades españolas, en las cuales el grupo de investigación en didáctica de las matemáticas tiene influencia directa en las materias que conciernen solamente a la matemática y su didáctica, siendo otros especialistas los que se encargan de la formación en psicopedagogía, didáctica general, etcétera.

Estas reflexiones fueron parte y a la vez sustento de esta tesis. Fueron parte porque su desarrollo es un resultado de este trabajo. Fueron sustento porque las investigaciones centrales que se presentan en los resultados utilizaron estas nociones cuando ya estaban bien cimentadas, pero siempre teniendo en mente que esas investigaciones podían modificar aspectos del MTSK, ya que lo hemos concebido como un modelo dinámico.

Tomando las reflexiones anteriores como fundamento, los objetivos específicos que nos planteamos en este trabajo fueron los siguientes:

a) Desarrollar elementos del conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas.
b) Desarrollar elementos del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas.
c) Desarrollar una caracterización para el conocimiento de la práctica matemática.

d) Comprender relaciones entre el conocimiento matemático del profesor y sus concepciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Cada uno de los objetivos se abordó mediante una investigación independiente y no es mi intención repetir las conclusiones de cada una de estas en la presente sección. Más bien intentaré plasmar aquellos aspectos que considero que aportan un nuevo conocimiento o sustento de este respecto a lo que teníamos antes de abordar cada investigación.

Con respecto al primer objetivo enunciado, en el subdominio del conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas avanzamos en la construcción de una revisión de literatura con modelos de diferentes tradiciones investigativas. La Tabla 6 muestra los elementos que fueron considerados por cada uno de los trabajos que seleccionamos luego de una amplia revisión.

Artículo	**Conocimientos que se consideran para el profesor respecto a sus estudiantes o sus procesos de aprendizaje**				
Kilpatrick, Swafford y Findell (2001)	Comprensión conceptual	Fluidez procedimental	Estrategias para abordar problemas matemáticos	Formas de razonar	Actitudes frente a las matemáticas
Hill et al. (2008)	Errores comunes de los estudiantes	Comprensión de lo que hacen los estudiantes	Secuencias de desarrollo de los estudiantes	Estrategias comunes de cálculo	
Silverman y Thompson (2008)	Anticipación a los modos de pensamiento de los estudiantes	Formas de guiar un pensamiento a uno idóneo	Potencialidad de un pensamiento idóneo en la integración de los aprendizajes		
Godino (2009)	Conocimiento personal de los estudiantes y progresión de los aprendizajes	Estados afectivos en relación con cada objeto matemático	Secuenciación orientada a la fijación y negociación de contenidos.		
Rowland, Huckstep y Thwaites (2005)	Identificación de errores	Identificar y enfrentar concepciones erróneas			
Ma (2010)	Manejo del error				

Tabla 5. Conocimientos acerca de los estudiantes o de sus procesos de aprendizaje que diferentes autores consideran que los profesores deberían tener (las columnas no son utilizadas para categorizar información).

Además de esta revisión de estudios previos, también aportamos resultados empíricos, los cuales mostramos en la Tabla 6.

Categoría	Indicador
a) Lenguaje y procesos con los que los estudiantes interactúan con el contenido	**KFLM1**. Saber interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo contenido matemático–mezcla del lenguaje común con el matemático).
	KFLM2. Conocer los detalles de la resolución de un problema susceptibles de desviar la atención de los estudiantes para llegar a la solución del mismo.
	KFLM3. Conocer los cálculos matemáticos que podrían hacer mecánicamente los estudiantes sin saber realmente lo que están haciendo matemáticamente.
b) Errores y dificultades asociadas al aprendizaje	**KFLM4.** Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.
	KFLM5. Conocer las confusiones matemáticas que pudiera tener el estudiante, provocadas por la relación equivocada de un contenido actual con un contenido relativamente anterior (por ejemplo con un tema pasado de la misma unidad o bloque temático).
	KFLM6. Conocer las confusiones y errores matemáticos de los estudiantes, producidos por no proceder ordenadamente, o no respetar las convenciones matemáticas.
	KFLM7. Conocer las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que los estudiantes pueden poseer o adquirir de un contenido.
	KFLM8. Conocer los errores que los estudiantes pueden cometer al hacer determinados cálculos aritméticos provocados por un despiste al hacer operaciones o transformaciones, o por no dominar el nuevo contenido que se está abordando.
	KFLM9. Conocer que los estudiantes tienen dificultades en reconocer y aplicar analogías y equivalencias en la resolución de problemas.
c) Teorías personales sobre formas de aprendizaje	**KFLM10**. Conocer los contenidos matemáticos previos de los que se puede valer para fomentar el aprendizaje de un tema nuevo entre sus estudiantes.

Tabla 6. Resultados empíricos de la investigación realizada por Sosa et al. (2015a).

Con respecto a nuestra caracterización del subdominio construida en Flores-Medrano et al. (2014), la cual se constituye a partir de cuatro categorías (formas de aprendizaje, fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, formas de interacción de los estudiantes con el contenido y concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas), nuestra investigación aporta un respaldo teórico y empírico para las categorías que ahí se exponen. No obtuvimos evidencia para la emergencia de una categoría nueva, pero sí ejemplos concretos para el caso de Álgebra Lineal para algunas de las que ya planteábamos.

En el segundo objetivo nos planteamos profundizar en el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. El acercamiento que hicimos en este caso fue en dos aspectos particulares en los que intuíamos que encontraríamos información. Nos fijamos en los conocimientos que utilizaban las profesoras al momento de ejemplificar (construir y utilizar ejemplos) y de dar ayudas, ya sean individualizadas o grupales, en su clase de matemáticas. La revisión de literatura no aporta sustento teórico al subdominio, ya que las investigaciones que consultamos no hablan sobre del conocimiento del profesor en contextos de enseñanza. Lo que nos aportó fue sensibilidad teórica para seleccionar y analizar los extractos. Nuestros resultados del análisis son una serie de descriptores, que aparecen en la Tabla 3 (sección de Resultados de esta memoria), los cuales sí dan sustento empírico a la categoría que nombramos “Actividades, tareas, ejemplos y ayudas”, que se relaciona particularmente con la categoría “Tareas para la enseñanza” que forma parte de las que presentamos para el KMT en Flores-Medrano et al. (2014) [las categorías que presentamos fueron: teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático, recursos materiales o virtuales de enseñanza asociadas a un contenido matemático y estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático].

El tercer objetivo enunciado también corresponde a la profundización en el estudio de un subdominio, en este caso en el Conocimiento de la Práctica Matemática. Este interés responde, entre otras cosas, a la necesidad de dar claridad a uno de los subdominios que pueden generar mayor confusión: en la experiencia en congresos, suele haber confusión entre la idea de práctica matemática y procedimientos o procesos matemáticos o con la de idea de práctica de enseñanza. De hecho, esta confusión puede acentuarse por la similitud con términos utilizados en la literatura de investigación [se usa habitualmente el término *práctica del profesor* para referirse a su quehacer de enseñanza, sobre todo a la parte interactiva de esta, pero también aparecen otros términos como el de *práctica social*, empleado en la Socioepistemología (Cantoral & Farfán, 2003)]. Estas posibles confusiones debidas a la nomenclatura bien pueden ser aclaradas a partir de la caracterización del subdominio presentada en Flores-Medrano et al. (2014). Sin embargo, consideramos que una descripción más profunda nos permitirá detectar cuándo algo es una práctica matemática y qué características sobre esta forman parte de este subdominio.

Partimos de una definición amplia para el subdominio, donde el KPM es el conocimiento de las formas de proceder y producir en matemáticas y que también considera el conocimiento de la sintaxis en matemáticas. Se le asocia con el conocimiento de la lógica del quehacer matemático. Con estas premisas partimos para la identificación de prácticas matemáticas en la literatura (la primera que tuvimos en mente y que ayudó a la conformación de esa definición amplia fue la demostración). Las prácticas que consideramos fueron la de demostrar (englobamos también las ideas de argumentación, justificación y validación), definir, ejemplificar y usar heurísticos. Y dimos especial atención al uso que se hace del contraejemplo ya que tiene rasgos peculiares de criterios de verdad (útil en el proceso de demostración), acotan las definiciones y pueden usarse para clarificar los propios ejemplos.

Con estas prácticas desarrollamos dos categorías: conocimiento de las características de la práctica matemática y conocimiento de la lógica argumental que está detrás de los usos de cada práctica. Estas sintetizan una mayor cantidad de información y formalizan las categorías tentativas que planteamos en Flores-Medrano et al. (2014), donde considerábamos el conocimiento sobre la jerarquización y planificación en la resolución de problemas, el conocimiento sobre formas de validación o demostración y el conocimiento del papel de los símbolos y el lenguaje formal en matemáticas. Hasta este momento todavía no tenemos descriptores específicos para este subdominio, pero el trabajo con oportunidades de investigación nos ha permitido avanzar en el estudio y en un futuro cercano podremos ofrecer resultados más concretos con los que esperamos aportar al entendimiento de este tipo de conocimiento matemático que pocas veces es explorado en su totalidad en el profesor.

Finalmente, en el objetivo de establecer relaciones entre el conocimiento especializado del profesor y sus concepciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, concluimos que las categorías propuestas por Carrillo (1998) fueron útiles para distinguir la tendencia que tenía la profesora participante en el estudio. También pudimos resaltar diferencias analíticas entre el conocimiento y las concepciones. Al no intentar diferenciar las concepciones de la creencias, han quedado caracterizadas estas de una manera amplia que incluye aspectos actitudinales (actitud frente a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas). Otro aporte fue el trabajar específicamente con el análisis de diseños de lecciones para la enseñanza, lo cual nos permite destacar la versatilidad en el uso del MTSK para analizar el conocimiento del profesor de matemáticas en diferentes escenarios. Cuando nos planteamos este objetivo pensamos en relaciones bidireccionales entre conocimientos y concepciones, sin embargo, los datos con los que contábamos solamente nos permitieron analizar los usos de conocimiento que se adecuaban a una determinada tendencia didáctica. Por ejemplo, la profesora analizada presentaba indicios de apegarse a una tendencia tecnológica en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; el aspecto que destacamos como principal fue la búsqueda de un aprendizaje guiado hacia la reconstrucción de los procesos lógicos de construcción de objetos matemáticos. Esto lo relacionamos con el énfasis mostrado en el conocimiento de definiciones, propiedades y conexiones internas al concepto y el uso que hacía de estos elementos para propiciar que sus estudiantes participaran de la reconstrucción de los contenidos trabajados (eventos equiprobables). Con respecto al conocimiento didáctico del contenido, la profesora mostró una focalización en los detalles del diseño que guiaran dicha reconstrucción. El conocimiento empleado fue, principalmente, el de las formas en que los estudiantes suelen relacionarse con los contenidos. Esto lo empleó para predecir el tipo de respuestas que darían los estudiantes a cada parte de la actividad, lo cual aprovechó en el diseño para encauzar esas respuestas hacia otras actividades que al final llevaran a la construcción de la noción de equiprobabilidad. Su papel como profesora fue el de gestionar y verificar que los estudiantes eran capaces de adaptarse al diseño con las características fundamentales que ella deseaba destacar. En resumen, encontramos que el estudio de las relaciones entre el conocimiento especializado y las concepciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requiere de identificar la intención con la que el profesor utiliza su conocimiento, lo cual brinda la posibilidad de que dos profesores con tendencias didácticas distintas posean los mismos conocimientos, pero que los utilicen de distintas formas. Este tipo de estudios nos darán información sobre la influencia de las concepciones en el conocimiento. Para ver las relaciones en el otro sentido hará falta plantearse cómo el conocimiento especializado que posea el profesor de matemáticas condiciona los rasgos de la o las tendencias didácticas que muestre en las diferentes facetas de su práctica.

Este estudio de relaciones entre concepciones y conocimiento forma parte de un programa más amplio que plantea establecer relaciones entre diferentes elementos del modelo. En Flores-Medrano et al. (2014) se plantearon algunas relaciones entre subdominios (KoT-KMLS, KSM-KMLS, KFLM-KMLS, KFLM-KMT, KoT-KPM y MK-KMT/KFLM) y también se describieron los rasgos que distinguen a dos subdominios que pueden resultar similares en algunos puntos (KMT-KFLM y KSM-KMLS). Aunque no es objeto de este trabajo entrar a detalle en estas relaciones, las mencionamos porque consideramos que son un aporte interesante ya que nos permiten destacar el carácter holístico del modelo. Una investigación que explota este hecho y lo plasma como esquema es la elaborada por Escudero-Avila, et al. (en prensa).

De manera general, una vez que ya he repasado los avances que supone este trabajo con respecto a los objetivos que nos planteamos para el doctorado, a continuación propondré una serie de conclusiones que provienen de mi experiencia al trabajar con el (modelo) MTSK.

1) El MTSK no es una teoría, sino un modelo con sustento teórico y empírico. Siguiendo a Ander-Egg (1995), los modelos son utilizados en Ciencias Sociales para representar o construir de manera simplificada una serie de fenómenos y están destinados a explicar la realidad o actuar sobre ella. Se trata de una abstracción de la realidad. En este caso, la realidad es el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y el MTSK la subdivide para comprenderla mediante un acercamiento analítico.
2) El MTSK tiene una naturaleza dual en tanto es un modelo teórico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas y también es una herramienta metodológica para explorar el conocimiento especializado del profesor en situaciones diversas de su labor y formación. Con esta segunda característica quiero resaltar el trabajo de construcción de categorías internas a cada subdominio con las cuales se puede tener una mirada más focalizada en los fenómenos observados. La dualidad a la que me refiero en este punto nos ha permitido utilizar el MTSK para investigaciones con el doble acercamiento denominado por Grbich (2007) como *top-down* (de la teoría a los datos) y *bottom-up* (de los datos a la teoría).
3) El MTSK no modela el conocimiento ideal que esperamos para el profesor de matemáticas. Sin duda, quienes participamos en la elaboración de algunos elementos del modelo habremos puesto en esta algo de nuestras concepciones. Sin embargo, el modelo trata de ser aséptico: no intentamos decir que el *profesor ideal* será aquél que tenga conocimiento en cada una de las categorías de cada uno de los subdominios, eso solamente sería una posible consecuencia. Uno de los aspectos que sustenta el hecho de que no se trata de un modelo de

conocimiento ideal es la consideración de las concepciones del profesor en el centro, permeando a todo el conocimiento (esto significa que consideramos que tanto el profesor tradicional como el investigativo, tanto el instrumentalista como el resolutor de problemas, tienen conocimiento especializado y es posible que observemos evidencias de cada subdominio. En mis objetivos y futuras investigaciones considero que se debe entender qué conocimientos son privilegiados por el profesor de acuerdo a sus concepciones). Otro aspecto para sustentar que el MTSK no habla de conocimiento ideal es la propia definición de conocimiento que adoptamos como grupo de investigación, en la cual hay cabida para *conocimientos incorrectos*, o mejor dicho, no adoptamos un referente ni para el conocimiento matemático ni para el conocimiento didáctico del contenido con el cual podamos comparar si el profesor tiene carencias o incorrecciones en su conocimiento, más bien estamos atentos (ayudados con las categorías y subdominios) a cuando el profesor manifiesta de algún modo *su* conocimiento.

4) El MTSK puede ser utilizado en distintos escenarios (Flores, Escudero & Aguilar, 2013). Hasta el momento, hemos utilizado el MTSK para analizar diseños de clase (e.g., Flores & Carrillo, 2014), foros online de formación (e.g., Escudero-Avila et al., en prensa), aulas de clase (e.g., Sosa et al., en prensa), material para la formación inicial (e.g., Carrillo, Flores-Medrano et al. 2014) y entrevistas sobre temas transversales en matemáticas (Montes, 2014).
5) Las investigaciones en las que se pretende profundizar en el estudio de aspectos concretos del MTSK requieren de una sensibilidad teórica que ayude en el robustecimiento teórico de las categorías y, a su vez, en la selección y análisis de episodios.
6) El MTSK no estudia el desarrollo profesional del profesor de matemáticas. A lo más podríamos utilizar el modelo para observar qué cambios tuvo el profesor en cuanto a su conocimiento, pero eso no implicaría necesariamente un desarrollo profesional (por ejemplo, en el caso de un profesor que aprenda más matemáticas pero que no tengan ningún tipo de relación con su enseñanza).
7) La enseñanza y el aprendizaje, sobre todo en las tendencias escolares actuales, son dos actividades que no se pueden ver desligadas. Sin embargo, en términos analíticos encontramos que es posible distinguir conocimientos independientes que responden a enseñanza y aprendizaje por separado. Pero, al igual que en otros subdominios, en estos hay relaciones y también considero conveniente destacarlas en futuros estudios (un primer avance está en Flores-Medrano et al., 2014).

Estas reflexiones finales son fruto de la experiencia de mi trabajo con el MTSK, pero también es una guía acerca de la prospectiva de investigación que me planteo, en la cual, a corto plazo me interesa explorar el papel que puede jugar el modelo en la formación inicial y permanente de profesores de matemáticas, indagar en otros aspectos que intervienen en dicha formación y, sobre todo, en cómo entrelazar los tres aspectos que Skott et al. (2013) señalan como los que se han priorizado en la investigación sobre el profesor y que también sugieren que deberían estudiarse en conjunto: conocimientos, concepciones e identidad.

Referencias

Alves-Mazzotti, A.J. (2006). Usos e abusos dos estudos do caso. *Cadernos de Pesquisa*, *36*(129), 637-651.

Ander-Egg, E. (1995). *Técnicas de investigación social*. Buenos Aires, Argentina: Colección política, servicios y trabajo social.

Ball, D.L., Lubienski, S.T., & Mewborn, D.S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University Press.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education. In J. Novotna, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: PME.

Cantoral, R., & Farfán, R.M. (2003). Mathematics Education: a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 255-270.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(1), 33-44.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical Universitiy, Ankara, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M.A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Contreras-González, L.C., & Zakaryan, D. (2014). Oportunidades de aprendizaje y competencias matemáticas: un estudio de dos casos. *Bolema- Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 89-109.

Carrillo, J., Escudero, D.I., & Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. *Revista de Análisis Matemático-Didáctico para profesores*, *1*, 16-26.

Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(4), 237-243.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Tesis de doctorado publicada en http://goo.gl/KJA4Yb. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Ernest, P. (1998). The Epistemological Basis of Qualitative Research in Mathematics Education: A Postmodern Perspective. En A.R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education* (22-39). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Escudero-Ávila, D., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L.C., & Montes, M. (en prensa) El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*.

Figueiredo, C.A., Blanco, L.J., & Contreras, L.C. (2007). La ejemplificación del concepto de función en estudiantes para profesores de Matemáticas de Secundaria. *Investigación en la escuela*, *61*, 53-68.

Flores, A.H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63-98.

Flores, E., & Carrillo, J. (2014). Connecting a mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge through her practice. En Oesterle, S., Liljedahl, P., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*,Vol. 3, pp. 81-88. Vancouver, Canada: PME.

Flores, E., Escudero, D.I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Flores, E., Escudero, D.I., & Aguilar, M.S. (2014). Online mathematics teacher education: main topics, theoretical approaches, techniques and changes in researchers' work. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, & D. Allan (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*,Vol. 3, pp. 89-96. Vancouver, Canada: PME.

Flores, E., Escudero, D.I., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of Specialised Content Knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of 8th CERME*, 3055-3064, Antalya, Turkey: ERME.

Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Montes, M., Aguilar, A., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Avila, E. Flores-Medrano, & M. Montes (Eds.). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Foster, C., Wake, G., & Swan, M. (2014). Mathematical knowledge for teaching problem solving: lessons from lesson study. En S. Oesterle, P. Liljedahl, D. Nicol, & D. Allan (Eds.). *Proceedings of the joint meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vol. 3, pp. 97-104, Vancouver, Canadá: PME.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Grbich, C. (2007). *Qualitative data analysis: An introduction*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Hill, H., Ball, D.L., & Schilling, S. (2008). Unpacking “pedagogical content knowledge”: Conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up*. Washington: National Academy Press.

Llinares, S. (2008). Construir el conocimiento necesario para enseñar. *Evaluación e Investigación*, *1*(3), 9-30.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales*. Chile: Academia Chilena de Ciencias.

Merriam, S.B. (1988). *Case Study Research in Education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass Publishers.

Miguel, F.M. de (1988). Paradigmas de la investigación educativa española. En I. Dendaluce (Ed.). *Aspectos metodológicos de la investigación educativa / [congreso de educación, celebrado en el Campus universitario de Leioa (Bizkaia) entre los días 13 y 17 de octubre de 1987, en el marco del] II Congreso Mundial Vasco* (pp. 60-81), España: Gobierno Vasco, Servicio central de publicaciones.

Montes, M.A. (2014). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso*. Tesis doctoral publicada en http://goo.gl/nIxbKq. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Montes, M., Flores-Medrano, E., Carmona, E., Huitrado, J.L., & Flores, P. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Avila, E. Flores-Medrano, & M. Montes (Eds.). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 9-22). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Moriel-Junior, J.G., & Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.

Muir, T. (2007). Setting a good example: Teachers' choice of examples and their contribution to effective teaching of numeracy. En J. Watson, & K. Beswick (Eds.). *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematical Education Research Group of Australasia*, *2*, 513-522.

Muñoz-Catalán, M.C. (2010). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Tesis doctoral publicada en http://goo.gl/OA4ydJ. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Muñoz-Catalán, M.C., Montes, M.A., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Aguilar, A. (2013). *La clasificación de figuras planas en primaria: una visión de progresión entre etapas y ciclos*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Niss, M.A. (2007). The Concept and Role of Theory in Mathematics Education. *Proceedings of NORMA 05*, *Fourth Nordic Conference on Mathematics Education* (pp. 97-110). Trondheim: Tapir Academic Press.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281.

Sánchez, M. (2010). *How to simulate rich interactions and reflections in online mathematics teacher education?* Tesis de doctorado no publicada. Dinamarca: Roskilde University.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, *5*(4), 129-145.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Silverman, J. (2012). Exploring the relationship between teachers' prominence in online collaboration and the development of mathematical content knowledge for teaching. *Journal of Technology and Teacher Education*, *20*(1), 47-69.

Silverman, J., & Thompson, P.W. (2008).Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(6), 499-511.

Simon, M.A. (2013). Promoting fundamental change in mathematics teaching: a theoretical, methodological, and empirical approach to the problem. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, *45*(4), 573-582.

Skott, J., Van Zoest, L., & Gellert, U. (2013). Theoretical frameworks in research on and with mathematics teachers. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, *45*(4), 501-505.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Tesis doctoral publicada en http://goo.gl/FZPmof. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2015a). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 173-189.

Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2015b). *¿Qué conocimiento de la enseñanza de las matemáticas manifiesta el profesor al usar ejemplos y dar ayudas en la clase de Álgebra Lineal?* Manuscrito sometido a evaluación.

Stake, R.E. (2000). Case studies. En N.K. Denzin, & Y.S. Lincoln (Eds.) *Handbook of qualitative research* (pp. 435-454). London: Sage.

Tatto, M.T., Schwille, J., Senk, S.L., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher education and development study in mathematics (TEDS-M): Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Thames, M., & Van Zoest, L. (2013). Building coherence in research on mathematics teacher characteristics by developing practice-based approaches. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, *45*(4), 583-594.

Trouche, L., & Pepin, B. (2014). From instrumental to documentational approach: towards a holistic perspective of teachers' resource systems in higher education. *Research in Mathematics Education*, *16*(2), 156-160.

Universidad de Huelva. (2014). *Reglamento de los estudios de doctorado de la Universidad de Huelva*. Huelva: Autor.

Verenikina, I. (2004). From theory to practice: What does the metaphor of scaffolding mean to educators today? *Outlines: critical social studies*, *6*(2), 5-16.

Verenikina, I., & Chinnappan, M. (2006). Scaffoldings Numeracy: Pre-service Teachers' Perspective. En P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, Cultures and Learning Spaces. Proceedings of the 29th Conference of MERGA* (pp. 519-528). Adelaide, SA: MERGA.

Zurek, A., Torquati, J., & Acar, I. (2014). Scaffolding as a Tool for Environmental Education in Early Childhood. *International Journal of Early Childhood Environmental Education*, *2*(1), 27-57.