

Universidad de Huelva

Departamento de Didácticas Integradas



Conocimiento especializado de futuros maestros de Primaria a través de una tarea formativa sobre polígonos: un experimento de enseñanza

**Memoria para optar al grado de doctor
presentada por:**

Víctor Javier Barrera Castarnado

Fecha de lectura: 8 de mayo de 2026

Bajo la dirección de los doctores:

Luis Carlos Contreras González

María Cinta Muñoz Catalán

Huelva, 2026



Universidad de Huelva
Escuela de Doctorado
Programa de doctorado en Investigación en la Enseñanza
y Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales,
Matemáticas y de la Actividad Física y Deportiva

Departamento de Didácticas Integradas



**Conocimiento especializado de futuros
maestros de Primaria a través de una tarea
formativa sobre polígonos: un experimento
de enseñanza**

Tesis Doctoral
Víctor Javier Barrera Castarnado

Dirigida por

Dr. D. Luis Carlos Contreras González

Dra. Dña. María Cinta Muñoz-Catalán

Año 2026

El germen [...] es la preocupación profesional central, casi obsesiva, de José Carrillo por desvelar las claves del proceso de construcción del conocimiento del profesor de matemáticas, de su formación inicial y continua, en el convencimiento de que existe una forma de conseguir que profesores y estudiantes hagan matemáticas de una forma gratificante, de que es posible ser matemáticamente competente sin dejar de ser feliz, es más, siendo feliz por ello, y de que todo esto pasa por formar profesores bien formados, desde el punto de vista matemático y didáctico.

Contreras (2022, p.13)

AGRADECIMIENTOS

La realización de esta tesis doctoral ha sido posible gracias al apoyo de numerosas personas que, de distintas maneras, me han acompañado a lo largo de este proceso. A todas ellas deseo expresar mi más sincero y profundo agradecimiento.

En primer lugar, a mis referentes de vida. A mi padre, Francisco Barrera, cuyo ejemplo y forma de vivir continúan acompañándome y guiando mi trayectoria personal y académica. Y a mi madre, María Dolores Castarnado, pilar fundamental de nuestra familia. Gracias por tu dedicación, esfuerzo, sacrificio y apoyo incondicional. Gracias por creer siempre en mí.

A mis hermanos, Pili y Francis, por vuestro acompañamiento constante a lo largo de todas las etapas de mi vida. Siempre habéis estado ahí, tanto en los momentos sencillos como en los más complejos. A mis sobrinas, María y Lucía (*las niñas de mis ojos*), por vuestro amor infinito; aportáis sentido y alegría a mi vida. Y a la más pequeña de la familia, Lucía, cuya simpatía y vitalidad nos enriquece a quienes tenemos la fortuna de compartir tiempo contigo.

A Cristóbal, Christian e Idaira, por vuestro cariño sincero y apoyo constante que me brindáis. Gracias por hacer que todo resulte más fácil, por vuestra comprensión y ayuda. Doy gracias a la vida por haberme hecho este regalo.

A todos vosotros, gracias por alegraros con mis logros y por acompañarme también en los momentos de angustia.

A los directores de este trabajo, el Dr. Luis Carlos Contreras y la Dra. María Cinta Muñoz-Catalán, por vuestra dedicación, vuestras orientaciones y vuestra paciencia. Vuestro acompañamiento ha sido imprescindible para que este proceso haya podido culminar con éxito.

Un agradecimiento muy especial a Mar Liñán, más que compañera y amiga, familia. Has sido una pieza clave en la elaboración de este trabajo por múltiples motivos. Los tiempos compartidos de reflexión académica e investigadora han sido determinantes. Del mismo modo, tu apoyo personal, tu capacidad para estar ahí y aportar luz en momentos de penumbra, han sido esenciales. Gracias, además, por tu generosidad al implementar las tareas formativas diseñadas para este trabajo, sacando el máximo partido de ellas.

A la familia Gómez Matas, por la acogida, la cercanía y el ambiente de hogar ofrecido en todo momento. Y a todos esos amigos que han aportado su presencia, su apoyo desinteresado y su capacidad de acompañar incluso sin ser requeridos.

Al profesorado del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, donde se inició mi trayectoria como investigador. La formación recibida durante los cursos de doctorado y las aportaciones derivadas de los seminarios de investigación han constituido la base de mi formación como investigador. De manera especial, a la Dra. Encarnación Castro y a la Dra. María Consuelo Cañadas, codirectoras de un primer trabajo de investigación, gracias por transmitirme vuestra pasión por la investigación en el área.

A los compañeros del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Sevilla. Valoro profundamente el trabajo compartido a nivel académico e investigador con todos vosotros. Agradezco de manera especial el apoyo constante y la confianza recibidos,

A los miembros del SIDM, por los encuentros académicos y los espacios de reflexión compartidos, que han contribuido de manera significativa a la mejora de este trabajo. En particular, al Dr. José Carrillo, por su valiosa aportación al área y, en particular, a este trabajo en sus inicios. A los compañeros del grupo SiMiS, con quienes el trabajo conjunto ha sido siempre enriquecedor.

A los compañeros y al equipo directivo del CEU Cardenal Spínola, así como al equipo rectoral y a todas las personas que forman parte de la Universidad CEU Fernando III. En particular, al equipo decanal de la Facultad de Humanidades, Educación y Deporte, por todo el apoyo y la comprensión mostrados.

Un agradecimiento especial a los grupos de estudiantes de magisterio que trabajaron con entusiasmo las tareas formativas diseñadas para esta investigación. Sin su colaboración, este trabajo no habría sido posible.

Finalmente, mi agradecimiento a todas aquellas personas que, de una u otra forma, han contribuido a que esta tesis haya podido realizarse.

Gracias a todos, de corazón.

El apoyo otorgado por la Fundación San Pablo CEU Andalucía a través de la beca de investigación concedida a este investigador ha sido indispensable para la realización de esta tesis, desarrollada al amparo del proyecto PID2021-122180OB-100 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Gobierno de España, del Centro de Investigación COIDESO y de la Red MTSK (AUIP).

ÍNDICE DE CONTENIDOS

RESUMEN	1
1. Introducción	5
1.1. Justificación.....	7
1.2. Planteamiento del problema	15
1.3. Pregunta de investigación y objetivos	16
1.4. Estructura del trabajo	17
2. Marco Teórico	20
2.1. Conocimiento del Profesor de Matemáticas.....	23
2.1.1. Conocimiento profesional respecto de la enseñanza de las matemáticas	23
2.1.2. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)	25
2.1.2.1. Conocimiento matemático común (MK)	27
2.1.2.2. Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	34
2.2. Tareas formativas	40
2.2.1. Clasificación de tareas formativas	41
2.2.2. Dimensiones de la tarea formativa: Función, foco y forma	42
2.3. MTSK como marco organizativo de la tarea formativa.....	44
2.4. Conocimiento geométrico de los EPM en relación con la definición y la clasificación en geometría	45
3. Metodología.....	50
3.1. Problema y objetivos de investigación.....	52
3.2. Diseño de la investigación	54
3.2.1. El experimento de enseñanza desarrollado en este trabajo	56
3.3. Métodos usados en la recogida de información.....	60
3.3.1. La tarea formativa como instrumento para la recogida de información.....	61
3.3.1.1. Proceso de elaboración de la tarea	61
3.3.1.2. Tarea formativa sobre definición y clasificación de polígonos	64
3.3.2. La observación de aula.....	79

3.3.3. Producciones escritas de los EPM	83
3.4. Métodos seguidos para el análisis de la información	83
3.4.1. Las transcripciones de las videgrabaciones	84
3.4.2. Análisis de los microciclos.....	85
3.4.3. Análisis del macrociclo	90
4. Análisis y resultados.....	92
4.1. Análisis del primer microciclo.....	95
4.1.1. Primer fragmento: Distribución de figuras generada por escolares.....	95
4.1.1.1. Actividad 1.1. Análisis de la distribución de las figuras representadas en la pizarra por parte de los escolares.....	95
4.1.1.2. Actividad 1.2. Argumentos esgrimidos por los escolares.....	107
4.1.1.3. Actividad 1.3. Definición de polígono.....	110
4.1.2. Segundo fragmento. Resolución, por parte de los escolares, de la actividad planteada por la maestra.....	121
4.1.2.1. Actividades 2.1. y 2.2. Análisis del fragmento en el que los escolares resuelven la actividad propuesta por la maestra.....	122
4.1.2.2. Actividad 2.3. Conceptos, procesos y procedimientos implicados en la actividad.	126
4.1.2.3. Actividad 2.4. ¿Qué aprenden los estudiantes de primaria con esta actividad?.....	135
4.1.2.4. Actividad 2.5. Papel de los ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática	139
4.1.2.5. Actividad 2.6. Dificultades de los estudiantes en la resolución de la situación planteada.....	143
4.1.2.6. Actividad 2.7. Nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes	146
4.1.3. Tercer fragmento: Clasificación de polígonos.....	153
4.1.3.1. Actividad 3.1. Criterios para agrupar polígonos	154
4.1.3.2. Actividad 3.2. Aprendizaje con esta actividad	171
4.1.3.3. Actividad 3.3. Recursos para la enseñanza	173
4.1.3.4. Actividad 3.4. Adecuación de la actividad para quinto de primaria	180
4.1.4. Cuarto fragmento: Clasificación de cuadriláteros	183
4.2. Aspectos a mejorar en la tarea tras el primer microciclo	183
4.2.1. En relación con el caso y su presentación	184
4.2.2. En relación con las actividades.....	186

4.3. Análisis del segundo microciclo	188
4.3.1. Primer fragmento: Descripción de la actividad propuesta por la maestra. Distribución de figuras generada por escolares.	189
4.3.1.1. Actividades 1 y 2. Análisis de la distribución de las figuras representadas en la pizarra por parte de los escolares. Argumentos para hacer esta distribución.	190
4.3.1.2. Actividad 3. Definición de polígono.	206
4.3.2. Segundo fragmento. Resolución de la actividad propuesta por la maestra	213
4.3.2.1. Actividad 4. Figuras posicionadas de forma incorrecta.	213
4.3.2.2. Actividad 5. Atributos de una definición matemática.	222
4.3.2.3. Actividad 6. Definición de los estudiantes.	235
4.3.2.4. Actividad 7. ¿Qué aprenden los estudiantes?	246
4.3.2.5. Actividad 8. Papel de ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática.	251
4.3.2.6. Actividad 9. Dificultades de los estudiantes.	256
4.3.2.7. Actividad 10. Nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes.	260
4.3.3. Tercer fragmento: Clasificación.	263
4.3.3.1. Actividad 11. Criterios para clasificar polígonos.	264
4.3.3.2. Actividad 12. Aprendizaje con esta actividad	273
4.3.3.3. Actividad 13. Recursos para la enseñanza	276
4.3.3.4. Actividad 14. Adecuación de la actividad para quinto de primaria	280
4.4. Aspectos a mejorar en la tarea tras el segundo ciclo	285
4.5. Conocimiento pretendido vs conocimiento movilizado	287
5. Discusión de resultados y conclusiones.	296
5.1. Conocimiento movilizado por los EPM desde MTSK	298
5.1.1. KoT movilizado por los EPM.	299
5.1.2. KSM movilizado por los EPM.	312
5.1.3. KPM movilizado por los EPM	315
5.1.4. KFLM movilizado por los EPM.	321
5.1.5. KMT movilizado por los EPM	327
5.1.6. KMLS movilizado por los EPM	332
5.2. Conclusiones	335

5.2.1. Producto de la investigación: Tarea formativa.....	342
5.2.2. Implicaciones para la formación inicial del profesorado de primaria ..	362
5.2.3. Limitaciones del estudio	365
5.2.4. Líneas futuras de investigación	366
6. Referencias	368

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Relación entre la formación inicial, la práctica profesional y la investigación.....	8
Figura 2.1 Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Traducción extraída de Liñán-García, 2021, basada en Carrillo et al., 2018).....	40
Figura 3.1 Estructura general del macrociclo (basada en Molina, 2021)	56
Figura 3.2 Esquema de un microciclo del experimento de enseñanza (elaboración propia).....	57
Figura 3.3 Esquema del proceso seguido en el diseño de una tarea formativa.....	64
Figura 3.4 Polígonos vs no polígonos.....	69
Figura 3.5 Figuras para clasificar	72
Figura 3.6 Actividad del libro sobre clasificación de cuadriláteros	74
Figura 4.1 Figuras consideradas no polígonos.....	101
Figura 4.2 Figuras consideradas polígonos	101
Figura 4.3 Polígono vs línea poligonal. Círculo vs circunferencia.....	105
Figura 4.4 Ejes de simetría de las figuras representadas.....	109
Figura 4.5 Triángulo isósceles en distintas posiciones	114
Figura 4.6 Triángulo equilátero vs triángulo esférico equilátero	144
Figura 4.7 Conjunto de polígonos facilitado por la maestra	154
Figura 4.8 Clasificación en clases de equivalencia vs jerárquica de polígonos por número de lados.....	156
Figura 4.9 Clasificación de polígonos atendiendo a la amplitud de sus ángulos....	156
Figura 4.10 Distintas posiciones de un cuadrado en el plano	157
Figura 4.11 Representación de un ángulo con los dedos de la mano.....	161
Figura 4.12 Ángulos generados por dos lados consecutivos de un polígono	162
Figura 4.13 Tipos de cuadriláteros según el número de ángulos rectos.....	163
Figura 4.14 Triángulo equilátero representado en la cuadrícula	166
Figura 4.15 Distintas posiciones del triángulo en la cuadrícula.....	166

Figura 4.16 Clasificación en clases de equivalencia vs jerárquica de triángulos atendiendo a las longitudes de sus lados.....	169
Figura 4.17 Triángulos isósceles en distintas posiciones en el plano	175
Figura 4.18 Representación errónea vs correcta de una de las alturas de un triángulo obtusángulo.....	178
Figura 4.19 Figuras no simétricas entre los considerados polígonos	193
Figura 4.20 Figuras nombradas por los EPM.....	194
Figura 4.21 Figuras con lados curvos en la zona de polígonos	196
Figura 4.22 Representación gráfica de una función par	199
Figura 4.23 Representación gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5x + 2$	199
Figura 4.24 Resultado de "doblar" el papel dos veces respecto de los ejes de coordenadas.....	200
Figura 4.25 No polígonos simétricos.....	200
Figura 4.26 Haz de segmentos vs segmentos concatenados.....	208
Figura 4.27 Representación de diagonales en un polígono cóncavo y en uno convexo	209
Figura 4.28 Formas que verifican la definición de Alba	210
Figura 4.29 Rectángulo vs figura 8.....	217
Figura 4.30 Distintas posiciones de un mismo polígono	218
Figura 4.31 Figuras representadas por el alumnado en la parte de polígonos	220
Figura 4.32 Figuras representadas por el alumnado en la parte de no polígonos	221
Figura 4.33 Clasificación jerárquica de cuadriláteros (Liñán-García, 2017)	243
Figura 4.34 Conjunto de polígonos facilitados por la maestra.....	264
Figura 5.1 Figuras geométricas que verifican la definición de Tina y no son polígonos	303
Figura 5.2 Figuras geométricas que cumplen la definición de Belén sin ser polígonos	304
Figura 5.3 Ejemplos de polígonos y de no polígonos.....	305
Figura 5.4 Distintas posiciones del cuadrado en el plano.....	306
Figura 5.5 Figura formada por segmentos que se unen en un vértice, cerrada	311

Figura 5.6 Cuadriláteros con sus ejes de simetría	320
Figura 5.7 Figuras con forma de letra.....	321
Figura 5.8 Triángulos isósceles en posiciones diferentes	324
Figura 5.9 Polígono vs línea poligonal. Círculo vs circunferencia.....	329
Figura 5.10 Polígonos vs no polígonos.....	351
Figura 5.11 Polígonos para clasificar	356
Figura 5.12 Ejemplos y no ejemplos de polígonos.....	364

ÍNDICE DE IMÁGENES

Imagen 4.1 Respuesta de Belén a la actividad 3.4.....	181
Imagen 4.2 Respuesta de Paola a la actividad 3.4	182
Imagen 4.3 Respuesta de Elsa a la actividad 3.4.....	183
Imagen 4.4 Respuesta de Cati a la actividad 14	282
Imagen 4.5 Respuesta de Sonia a la pregunta 14	282
Imagen 4.6 Respuesta de Mila a la actividad 14	283
Imagen 4.7 Respuesta de Julia a la actividad 14	283
Imagen 4.8 Respuesta de Rocío a la actividad 14.....	284
Imagen 4.9 Respuesta de Mara a la actividad 14.....	285

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Subdominios del conocimiento matemático	27
Tabla 2.2 Categorías asociadas al subdominio de Conocimiento de los tópicos (KoT)	30
Tabla 2.3 Categorías asociadas al subdominio de Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)	31
Tabla 2.4 Categorías asociadas al subdominio de Conocimiento de la práctica matemática (KPM).....	33
Tabla 2.5 Subdominios del conocimiento didáctico del contenido	34
Tabla 2.6 Categorías asociadas al subdominio de Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	36
Tabla 2.7 Categorías asociadas al subdominio de Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	38
Tabla 2.8 Categorías asociadas al subdominio de Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMT).....	39
Tabla 3.1 Características del experimento de enseñanza	55
Tabla 3.2 Conocimiento Matemático asociado a la tarea Definición y clasificación de polígonos.....	76
Tabla 3.3 Conocimiento Didáctico del Contenido asociado a la tarea Definición y clasificación de polígonos.....	77
Tabla 3.4 Temporización: acciones a realizar en la implementación de la Tarea Formativa.....	78
Tabla 3.5 Observaciones del primer microciclo	80
Tabla 3.6 Observaciones del segundo microciclo	81
Tabla 3.7 Episodios de la implementación de la TFor 1.1.A. Actividad 1.1	86
Tabla 3.8 Categorías e indicadores asociados a los subdominios de MTSK.....	87
Tabla 3.9 Ejemplo del registro del conocimiento especializado movilizado en la implementación de una actividad	89
Tabla 4.1 Episodios de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 1.1	96
Tabla 4.2 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A Actividad 1.1	105

Tabla 4.3 Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 1.2	107
Tabla 4.4 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 1.2	110
Tabla 4.5 Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 1.3	111
Tabla 4.6 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 1.3	120
Tabla 4.7 Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividades 2.1 y 2.2 ...	122
Tabla 4.8 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividades 2.1 y 2.2	125
Tabla 4.9 Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 2.3	126
Tabla 4.10 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 2.3	134
Tabla 4.11 Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 2.4	136
Tabla 4.12 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 2.4	139
Tabla 4.13 Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 2.5	140
Tabla 4.14 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 2.5	142
Tabla 4.15 Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 2.6	143
Tabla 4.16 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 2.6	145
Tabla 4.17 Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 2.7	147
Tabla 4.18 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 2.7	152
Tabla 4.19 Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 3.1	154
Tabla 4.20 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 3.1	169
Tabla 4.21 Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 3.2	172
Tabla 4.22 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 3.2	173
Tabla 4.23 Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 3.3	173

Tabla 4.24 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 3.3.....	179
Tabla 4.25 Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 3.4	180
Tabla 4.26 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 3.4.....	183
Tabla 4.27 Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividades 1 y 2	191
Tabla 4.28 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividades 1 y 2	205
Tabla 4.29 Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 3	207
Tabla 4.30 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 3.....	212
Tabla 4.31 Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 4	214
Tabla 4.32 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 4.....	221
Tabla 4.33 Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 5	223
Tabla 4.34 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 5.....	234
Tabla 4.35 Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 6	235
Tabla 4.36 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 6.....	244
Tabla 4.37 Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 7	246
Tabla 4.38 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 7.....	250
Tabla 4.39 Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 8	252
Tabla 4.40 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 8.....	255
Tabla 4.41 Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 9	256
Tabla 4.42 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 9.....	259
Tabla 4.43 Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 10	260
Tabla 4.44 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 10.....	263

Tabla 4.45 Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 11	265
Tabla 4.46 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 11	272
Tabla 4.47 Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 12	274
Tabla 4.48 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 12	276
Tabla 4.49 Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 13	277
Tabla 4.50 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 13	280
Tabla 4.51 Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 14	281
Tabla 4.52 Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 14	285
Tabla 4.53 Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en las actividades 1 y 2	288
Tabla 4.54 Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 3	289
Tabla 4.55 Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en las actividades 4 y 5	290
Tabla 4.56 Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 6	291
Tabla 4.57 Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 7	291
Tabla 4.58 Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 8	292
Tabla 4.59 Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 9	292
Tabla 4.60 Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 10	293
Tabla 4.61 Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 11	293
Tabla 4.62 Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 12	294
Tabla 4.63 Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 13	294

Tabla 4.64 Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 14	295
Tabla 5.1 KoT (Procedimientos) movilizado por los EPM en el primer microciclo	300
Tabla 5.2 KoT (Definiciones, propiedades y sus fundamentos) movilizado por los EPM en el primer microciclo	301
Tabla 5.3 KoT (Registros de representación) movilizado por los EPM en el primer microciclo.....	302
Tabla 5.4 KoT (Procedimientos y Definiciones, propiedades y sus fundamentos) movilizado por los EPM en el segundo microciclo.....	308
Tabla 5.5 KoT (Definiciones, propiedades y sus fundamentos) movilizado por los EPM en el segundo ciclo	309
Tabla 5.6 KoT (registros de representación y fenomenología) movilizado por los EPM en el segundo ciclo	310
Tabla 5.7 KSM movilizado por los EPM en el segundo ciclo	314
Tabla 5.8 KPM movilizado por los EPM en el primer ciclo	316
Tabla 5.9 KPM movilizado por los EPM en el segundo ciclo	319
Tabla 5.10 KFLM movilizado por los EPM en el primer ciclo	323
Tabla 5.11 KFLM movilizado por los EPM en el segundo ciclo	326
Tabla 5.12 KMT movilizado por los EPM en el primer ciclo	328
Tabla 5.13 KMT movilizado por los EPM en el segundo ciclo	331
Tabla 5.14 KMLS movilizado por los EPM en el primer ciclo	333
Tabla 5.15 KMLS movilizado por los EPM en el segundo ciclo	333
Tabla 5.16 Conocimiento Matemático asociado a la tarea Definición y clasificación de polígonos.....	359
Tabla 5.17 Conocimiento Didáctico del Contenido asociado a la tarea Definición y clasificación de polígonos.....	360
Tabla 5.18 Propuesta de temporización para la implementación de la tarea formativa.....	361

RESUMEN

La tesis aborda el diseño, implementación y validación de una tarea formativa basada en el modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*), con el propósito de promover el desarrollo del conocimiento especializado del profesorado en formación inicial en torno a contenidos geométricos, particularmente sobre la definición y clasificación de polígonos.

El estudio parte de la necesidad de vincular la formación inicial de maestros con la práctica profesional real, mediante tareas que reproduzcan situaciones auténticas de aula. Estas tareas, cuidadosamente diseñadas, permiten que los futuros docentes reflexionen sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, desarrollando competencias profesionales vinculadas con el análisis, la interpretación y la toma de decisiones didácticas fundamentadas.

La introducción justifica la investigación destacando la importancia de fortalecer la formación docente a través de experiencias que integren teoría y práctica. Se revisan antecedentes que evidencian la eficacia del uso de vídeos y transcripciones de clases reales para el desarrollo del *professional noticing*, así como estudios sobre el impacto de las tareas basadas en la práctica docente. El problema de investigación se centra en comprender qué conocimiento especializado movilizan los estudiantes para maestro (EPM) al resolver una tarea formativa sobre la definición y clasificación de polígonos, diseñada desde situaciones reales observadas en un aula de primaria.

El marco teórico se estructura en torno a dos ejes. Por una parte, el modelo MTSK que caracteriza el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en dos dominios principales: el conocimiento matemático (MK) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK), además de las creencias que influyen en la práctica docente. Nos apoyamos en dicho modelo tanto en el diseño de la tarea como en el análisis del conocimiento movilizado en el aula por los EPM. Por otra, el papel de las tareas formativas como herramienta de desarrollo profesional, entendidas como configuraciones didáctico-matemáticas que promueven la reflexión y la conexión entre teoría y práctica. Tendremos en cuenta, además, resultados sobre el conocimiento geométrico de los EPM.

La metodología se basa en un experimento de enseñanza con un macrociclo que integra dos microciclos¹ de diseño, implementación y análisis. La tarea formativa fue construida a partir de episodios “potentes” identificados en la tesis de Liñán-García (2017), donde

1

una maestra enseña geometría a alumnos de quinto de Educación Primaria. Elaboramos un *caso* que basándonos en una transcripción literal de una situación real de aula a la que le incluimos situaciones simuladas destinadas a enriquecerlo en términos del conocimiento que los EPM podrían analizar y sobre el cual reflexionar. A partir de este caso, diseñamos actividades alineadas con los subdominios del modelo MTSK. La recogida y análisis de datos siguieron una perspectiva cualitativa e interpretativa, centrada en las discusiones y razonamientos de los EPM.

En el análisis y resultados, se describen los conocimientos movilizados por los participantes en los distintos subdominios del MTSK. Los EPM mostraron avances en la comprensión de definiciones y propiedades de los polígonos, en el reconocimiento de errores conceptuales comunes, en la articulación de conexiones matemáticas y en la valoración de estrategias didácticas. Además, evidenciaron progresos en la práctica de definir, en la identificación de fenómenos geométricos y en el análisis de las dificultades de aprendizaje del alumnado. Estos resultados validan el potencial de las tareas formativas para fomentar una comprensión profunda y reflexiva de la enseñanza de la geometría.

En la discusión y conclusiones, se destaca que el uso del MTSK como marco de diseño y análisis resulta altamente eficaz para articular el conocimiento matemático y didáctico del contenido, favoreciendo la formación de maestros más competentes y reflexivos. Las tareas diseñadas permiten aproximar al profesorado en formación a la complejidad de la práctica docente y constituyen un puente entre la investigación y la formación inicial. Se subraya la importancia de seguir desarrollando tareas validadas empíricamente y de continuar explorando el impacto del MTSK en distintos contextos y contenidos matemáticos.

Entre las limitaciones, se reconocen el tamaño reducido de la muestra y la focalización en un solo contenido geométrico. Como líneas futuras, se propone ampliar el estudio a otros dominios del conocimiento especializado y a diferentes niveles educativos, así como fortalecer la formación de formadores en el uso del MTSK.

En síntesis, la tesis aporta una propuesta innovadora que integra teoría, práctica y reflexión, consolidando el MTSK como un marco sólido para el diseño de tareas formativas en la formación inicial del profesorado de matemáticas, y reafirma la importancia de la geometría como contexto para el desarrollo del conocimiento profesional docente.

Considero que un buen investigador en Educación Matemática debe poseer una buena formación en metodología que le permita ser consciente de cada una de las fases del proceso de investigación y de las repercusiones que sus decisiones y lenguaje poseen en la coherencia de los elementos de la misma y, en definitiva, en la calidad de la investigación.

Muñoz-Catalán (2021, p. 66)

1. Introducción

El presente capítulo delimita el marco de referencia de la investigación organizado en varios apartados. En primer lugar, se expone la justificación del tema de estudio, resaltando la relevancia de abordar el diseño y análisis de las tareas formativas orientadas a la formación inicial a partir de la práctica real. Además, en este epígrafe se incluyen los antecedentes que sitúan el trabajo en relación con estudios previos y con el estado actual del campo. A continuación, se plantea el problema de investigación, del cual derivan la pregunta de investigación y los objetivos generales y específicos que guían el estudio. Finalmente, se presenta una aproximación a la propuesta metodológica, orientada a dar respuestas a la pregunta de investigación y a los objetivos planteados.

1.1. Justificación

Esta investigación ²surge de planteamientos genéricos acerca de la naturaleza del conocimiento que necesita el profesorado, tanto en formación como en ejercicio, para desempeñar su (futura) labor docente, sobre cómo desarrollar ese conocimiento, sobre cómo se construye y sobre los contextos y tipos de tareas formativas que favorecen su construcción.

La investigación en educación matemática ha asumido que la formación del profesorado ha de vincularse con la práctica profesional (Downton et al. 2018; Goos, 2014; Joglar-Prieto et al., 2022; Potari, 2020), potenciando que el profesorado en formación desarrolle el conocimiento especializado (Carrillo et al., 2018; Matitaputty et al., 2024; Scheiner et al, 2019) y adquiera las competencias profesionales (Hammer y Ufer, 2023; Li et al., 2025; Montes et al., 2019) que, va a necesitar para enseñar matemáticas.

En este contexto, surge la idea de articular la formación inicial del profesorado con su práctica profesional a través del diseño de tareas formativas a partir de situaciones reales de aula, validadas desde la investigación (Ball y Forzani, 2009; Carrillo et al., 2020; Climent et al., 2024; Jaworski, 2001) (Figura 1.1) al considerar fundamental que las prácticas profesionales propias de la labor docente y su conocimiento profesional,

² En este trabajo se empleará, como es norma lingüística en el idioma español (Real Academia Española y Asociación de Academias de la Lengua Española, 2009), el género masculino de la palabra como género no marcado, sin que ello tenga componente discriminatorio alguno. Así, por ejemplo, emplearemos los términos los alumnos o los estudiantes, los maestros o los profesores para hacer referencia a la totalidad de los miembros del grupo correspondiente.

componentes de la competencia profesional del profesor, se integren de manera explícita en los currículos de formación (Llinares et al., 2022). Que esta conexión entre la práctica profesional y la formación inicial se realice a través de la investigación constituye un factor clave para fortalecer el desarrollo profesional de los futuros profesores y favorecer una enseñanza de calidad en el futuro (Depaepe et al., 2020).



Figura 1.1 Relación entre la formación inicial, la práctica profesional y la investigación

Diversas investigaciones han mostrado que los programas de formación que involucran al futuro profesorado en la reflexión y el análisis de clases reales son más efectivos (Climent et al., 2016; Major y Watson, 2018; Star y Strickland, 2008). En la misma línea, Hill et al. (2020) indican que los programas de formación que desarrollan conocimientos que el futuro profesorado necesita movilizar cuando enseña, son más eficaces. Parece relevante, por ello, que los programas de formación integren experiencias reales que reflejen las situaciones propias de la práctica docente.

Para ello, la investigación en educación matemática está considerando el diseño y experimentación de tareas formativas basadas en tareas profesionales, entendidas estas últimas como el sistema organizado de actuaciones que el profesor desarrolla cuando enseña matemáticas, y que estructuran su práctica en el aula (Joglar-Prieto et al., 2022; Muñoz-Catalán et al., 2017).

En este marco, Carrillo et al. (2020) proponen estructurar la formación inicial del profesorado tomando como referencia los contextos de desarrollo profesional, de modo que vinculen la formación académica con los escenarios reales de aula. Asimismo, Climent et al. (2024) destacan la importancia del diseño de tareas inspiradas en situaciones reales de clases de primaria como medio para articular la teoría con la práctica, favoreciendo el desarrollo del conocimiento profesional docente.

Existen diversas aportaciones de autores de la Red MTSK ³ que profundizan en esta perspectiva (Advíncula et al., 2024; Barrera-Castarnado et al., 2024; Cayo et al., 2024; Cristini et al., 2022; Gibim et al., 2025; Joglar-Prieto et al., 2022; Montes et al., 2019; Muñoz-Catalán et al., 2022; Pascual-Martín et al., 2023; Planas et al., 2025; Ribeiro et al., 2022). En conjunto, estos trabajos analizan distintos aspectos de la formación inicial y continua de docentes de matemáticas, poniendo el foco en la integración entre teoría y práctica, el papel del diseño de tareas y la reflexión sobre la práctica profesional. Asimismo, abordan el desarrollo del conocimiento especializado del profesorado, la movilización de saberes en contextos auténticos y la construcción de comunidades de aprendizaje e indagación que favorecen el crecimiento profesional docente, utilizando el MTSK como modelo de análisis y/o de diseño.

Por otra parte, Liñán-García (2017) plantea, como prospectiva de su trabajo, la necesidad de reflexionar sobre las implicaciones que los conocimientos especializados detectados en la observación de episodios reales de aula pueden tener en la formación inicial de maestros. La reflexión sobre la cuestión planteada (fruto de la dualidad formador-investigador) y las propuestas de los trabajos mencionados nos llevan a considerar el diseño de tareas formativas asociadas a las prácticas de los profesores de Primaria en activo, tomando las transcripciones de episodios identificados por Liñán-García (2017) como punto de partida para generar un caso sobre el cual diseñar una tarea formativa. De esta forma, buscamos integrar el conocimiento del contenido matemático con el conocimiento didáctico de dicho contenido (Carrillo et al., 2018).

A partir de este enfoque, proponemos el diseño de tareas formativas dirigidas a la formación inicial de maestros, basadas en los resultados de Liñán-García (2017), que permitan aproximar a los futuros docentes a la complejidad de la práctica profesional.

Los términos *maestro*⁴ y *profesor de educación primaria* se utilizan de manera equivalente para referirse al docente generalista responsable de la enseñanza de las distintas áreas del currículo, incluida matemáticas, en este nivel educativo. En este trabajo

³ La Red MTSK (Mathematics Teachers' Specialised Knowledge) constituye, en el ámbito internacional, un espacio de colaboración y difusión de investigaciones centradas en el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas.

⁴ En el contexto educativo español, con el término *maestro* se hace referencia al profesor de educación primaria con formación generalista, en contraste con los profesores especialistas de etapas posteriores, cuya docencia se centra en áreas específicas.

optamos por el uso predominante del término “maestro”, por considerarse más representativo del perfil docente al que se dirige esta investigación; no obstante, con el fin de dotar de variedad y naturalidad al texto, ambos términos se utilizarán de manera alternada sin diferencia conceptual.

Concebimos tarea formativa (Plazas et al., 2025) como una configuración didáctico-matemática cuidadosamente diseñada que involucra a los futuros docentes en actividades orientadas a focalizar su atención en un objeto o proceso didáctico-matemático específico. En consonancia con Watson et al. (2013), este tipo de tareas trasciende la mera resolución de ejercicios al constituirse en situaciones intencionales que favorecen la exploración, el análisis y la reflexión crítica en torno a la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

De esta forma, las tareas profesionales se constituyen en el eje vertebrador de la formación inicial del profesorado de Educación Primaria en matemáticas (Ball y Forzani, 2007; Climent et al., 2024; Carrillo et al., 2020; Jaworski, 2001), pues permiten integrar el conocimiento matemático y el conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Shulman, 1986), componentes fundamentales del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2018). De esta forma, los estudiantes para maestro (en adelante, EPM), además de desarrollar conocimiento sobre los contenidos curriculares, construyen un conocimiento especializado que les permite interpretar lo que ocurre en el aula, identificar las potencialidades y dificultades de las tareas matemáticas y tomar decisiones pedagógicas fundamentadas (Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018).

Diversas investigaciones han mostrado que involucrar al profesorado en formación en la reflexión y el análisis de episodios de clases de matemáticas grabadas en vídeo resulta altamente eficaz para el desarrollo profesional. Estas tareas les permiten observar y examinar con mayor detalle los elementos clave de la práctica docente, fortaleciendo su mirada profesional sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje (Major y Watson, 2018; van Es et al., 2014). Asimismo, se ha evidenciado que el análisis colaborativo de vídeos promueve la construcción del conocimiento profesional, al generar espacios de diálogo en los que pueden contrastar interpretaciones, argumentar decisiones y vincular la teoría con la práctica (Karsenty y Arcavi, 2019; Sherin y van Es, 2008; Santagata et al., 2021). Este tipo de análisis favorece la construcción colectiva del conocimiento profesional, ya

que permite a los participantes contrastar interpretaciones, argumentar decisiones didácticas y vincular la teoría con la práctica (Martínez et al., 2018; O’Keeffe y White, 2022).

Por otra parte, revisiones recientes indican que los programas formativos basados en el uso de vídeo contribuyen significativamente a que el profesorado en formación desarrolle la capacidad de darse cuenta (competencia *noticing*) de aspectos relevantes del aprendizaje y la enseñanza de la matemática, consolidando competencias profesionales transferibles a su futura práctica docente (Gaudin y Chaliès, 2015; Jacobs et al., 2021; Sherin y van Es, 2008). Entre ellos, da Ponte (2011) muestra cómo el análisis de episodios de vídeo de clases reales de Primaria ayuda a los EPM a reflexionar sobre el papel del maestro en discusiones matemáticas, comparando sus expectativas con lo observado y promoviendo una visión más crítica de cómo intervenir para favorecer el aprendizaje.

Santagata y Guarino (2011) muestran cómo el uso de vídeos de clases de matemáticas en la formación inicial ayuda a los futuros profesores a analizar la enseñanza, identificar evidencias de aprendizaje y proponer mejoras. Concluyen que el vídeo favorece el desarrollo del *professional noticing* (Fernández, Sánchez-Matamoros et al., 2018, Jacobs et al., 2010) y del razonamiento basado en evidencias, siempre que el análisis esté bien guiado para evitar juicios superficiales.

Este acento en la observación profesional guarda sintonía con el estudio de Climent, et al. (2024), en el que analizan cómo los futuros maestros de primaria desarrollan conocimiento matemático especializado al trabajar una secuencia de tareas centradas en la práctica de definir, en particular sobre el concepto de polígono. Como resultados muestran que los participantes fortalecieron tanto su comprensión del concepto de polígono como de la práctica de definir. Además, las tareas promovieron reflexiones sobre la gestión de la actividad de definir en el aula.

En la misma línea, Climent et al. (2016) examinan el conocimiento que tres EPM movilizan al estudiar un fragmento de vídeo en el que una maestra enseña geometría. Mediante discusiones guiadas, los EPM activan conocimientos previos, analizan las estrategias y errores de los alumnos que aparecen en el video e interpretan las dificultades, fortalezas e interacciones posibles de los estudiantes respecto de contenidos geométricos.

El trabajo de Pascual-Martín et al. (2023) se enmarca en la formación inicial de maestros de primaria y analiza el papel de las tareas en la construcción de conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas. Los autores diseñan e implementan una tarea que combina la resolución de un problema matemático con el análisis de un video de una clase real de primaria, con el objetivo de que los futuros docentes puedan movilizar tanto conocimiento matemático como didáctico.

Asimismo, van Es y Sherin (2002) estudian cómo seis EPM interpretan interacciones de aula en ciencias y matemáticas a partir de fragmentos de vídeos de clases de Primaria. Los resultados indican que los EPM identifican eventos relevantes de la sesión de clase, fundamentan sus observaciones y los interpretan considerando aspectos curriculares.

En el trabajo de Plazas et al. (2025) muestran el diseño de una tarea para futuros maestros de primaria sobre la reconstrucción de la definición de polígono, utilizando fragmentos de video de clases reales como punto de partida. La tarea permitió a los participantes profundizar en las propiedades de los polígonos y en el conocimiento didáctico necesario para su enseñanza.

Otros autores han investigado sobre el diseño de tareas sin uso de vídeos. Así, por ejemplo, Penalva et al. (2009) presenta un experimento de enseñanza en el que tratan el diseño de tareas de aprendizaje para el aula de formación de maestros de Infantil centradas en geometría. Ponen el foco en el diseño y en la observación de las producciones de los EPM. El formato estructurado de la tarea no solo facilitó que los EPM organizaran y clarificaran su pensamiento, sino que también favoreció la explicitación de su razonamiento y la reflexión sobre las decisiones adoptadas durante la resolución.

Llinares y colaboradores también han desarrollado trabajos en esta línea. En Llinares (2011), por ejemplo, el autor propone el diseño de tareas que conecten conocimiento matemático, didáctico y profesional del maestro, de modo que los futuros maestros puedan analizar tareas de libros de texto, anticipar sus implicaciones y tomar decisiones de enseñanza.

Sin embargo, observamos que eran menos frecuentes los estudios que analizan el impacto de tareas formativas basadas en la práctica real de aula sin recurrir al uso de material audiovisual. Un ejemplo de ellos es el trabajo de Ribeiro et al. (2022) en el que los autores

examinan el conocimiento interpretativo de profesores de educación infantil y primaria en torno a la sustracción a través de tareas y entrevistas, mostrando concepciones parciales que evidencian la necesidad de fortalecer su comprensión de este contenido en la formación inicial.

Como hemos señalado, consideramos fundamental vincular la formación de maestros con situaciones reales de aula. Nos planteamos la forma de hacerlo sin usar videgrabaciones de manera explícita. La propuesta es utilizar transcripciones de videgrabaciones de clases de Educación Primaria que identifiquemos como potentes, en cuanto al conocimiento especializado movilizado por el maestro o maestra. Estas transcripciones permiten añadir información que enriquezca el caso focalizando la reflexión de los EPM sobre elementos del conocimiento especializado del maestro que puedan interesar.

En la Universidad de Huelva hemos desarrollado dos proyectos de investigación relacionados con esta temática: “*Conocimiento especializado del profesorado de matemáticas y formación del profesorado*” (MTSK⁵-TE, RTI2018-096547-B-I00) y “*Conocimiento especializado en la formación del profesorado de matemáticas: Tareas y conocimiento del formador*” (MTSK-T&MTEK, EDU PID2021-122180OB-I00). Estos proyectos han contribuido a profundizar en la comprensión del papel de las tareas y del conocimiento del formador en la formación inicial de maestros. En ambos se considera como referencia el modelo MTSK que permite caracterizar y comprender el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Son varios los trabajos que proponen una primera aproximación a tal conocimiento (Carrillo et al., 2018) desde la investigación (Llinares et al, 2022).

En el marco de estos proyectos se han desarrollado diversas investigaciones orientadas a analizar tanto el papel de las tareas formativas como la incidencia del conocimiento del formador en los procesos de formación de maestros (Advíncula et al, 2024; Barrera-Castarnado et al., 2024; Cayo et al. 2024; Gibim et al., 2025; Liñán-García et al., 2021; Montes et al., 2019; Montes et al., 2024; Muñoz-Catalán et al., 2022; Sánchez, Vázquez et al., 2025; Sánchez, Contreras, et al., 2025). Por ejemplo, Cristini et al. (2022) analizan el uso de una tarea matemática como recurso didáctico en el tema de proporcionalidad

⁵ MTSK (de su nombre en inglés *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge*). Modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Se describe en el capítulo 2 de este trabajo

para último ciclo de Educación Primaria. Para el diseño tienen en cuenta el modelo de conocimiento especializado MTSK y consideran 5 dimensiones: objetivo de aprendizaje, recursos y metodología, relación con competencias definidas en el currículo, posibles dificultades y comentarios para orientadores, que permiten un análisis más sistemático de la tarea y favorecen que ésta esté mejor preparada para la práctica en el aula.

Joglar-Prieto et al. (2022) muestran cómo el diseño de tareas formativas basadas en MTSK permite que los EPM movilicen y conecten conocimiento matemático y didáctico y reflexionen sobre la práctica y desarrollen competencias profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas.

Otro trabajo relacionado con el diseño de tareas lo presentan Pascual et al. (2023). Proponen el diseño e implementación de una tarea formativa sobre la definición de polígonos a través del análisis de una clase real en vídeo. Destacan la importancia de diseñar tareas formativas apoyadas en marcos teóricos sólidos para promover el desarrollo profesional del maestro.

En Barrera-Castarnado et al. (2024), derivado de la investigación realizada para esta tesis, se analiza cómo las tareas formativas diseñadas a partir de situaciones reales de aula favorecen la reflexión de los EPM sobre aspectos relativos a la enseñanza y aprendizaje de conceptos geométricos, en este caso, relacionados con la diagonal de un polígono. De esta forma se favorece el desarrollo de conocimiento especializado de EPM con relación a este concepto.

En este mismo sentido, en Climent et al. (2024) exploran cómo un grupo de EPM desarrollan conocimiento sobre la práctica de definir en geometría mediante una secuencia de tareas de formación utilizando vídeos de clases. Utilizan el modelo MTSK en el diseño de las tareas. Los resultados muestran que este enfoque favorece la articulación entre conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido, y contribuye al desarrollo de conocimiento especializado del profesor.

Uno de los trabajos más recientes es el de Gibim et al. (2025). Los autores analizan el *conocimiento interpretativo* (Jakobsen et al., 2014; Mellone et al., 2020) de 6 participantes (EPM, maestros y profesores de secundaria) de un taller en línea frente a una tarea de división de fracciones. Concluyen que el conocimiento especializado sobre

fracciones es limitado y que para fortalecerlo es clave aprovechar el potencial de las tareas.

1.2. Planteamiento del problema

Como puede verse, hay un interés creciente sobre el diseño de tareas formativas para la formación del profesorado; las aportaciones de nuestro grupo han estado centradas en el uso de MTSK para su diseño, poniendo de relieve la necesidad de analizar su potencial desde los aprendizajes del profesorado al que se dirigen. De ahí que nuestra investigación aborde una vía de validación del diseño de tareas desde la perspectiva del modelo. Ofrecer tareas diseñadas y validadas desde la investigación se muestra como una necesidad creciente.

El trabajo precursor de esta investigación es la tesis doctoral de Liñán (2017), en la que se analiza el conocimiento que una maestra (Jimena) de quinto de Educación Primaria moviliza al enseñar contenidos geométricos, identificando así el *conocimiento especializado que las oportunidades observadas en el aula evocan en el investigador (conocimiento evocado)*. La autora define como oportunidades a aquellas situaciones de aula que surgen como resultado de la gestión del profesorado y para las que el investigador considera que una gestión alternativa de dichas situaciones se sustentaría en un conocimiento especializado relevante para la enseñanza del contenido dado. Considerar la posible gestión alternativa de situaciones específicas en el aula hace surgir este conocimiento especializado, que, junto con el que utiliza el profesor, genera un conocimiento especializado útil para orientar el contenido de la formación del profesorado de Educación Primaria. En dicho trabajo se identificaron episodios potentes en cuanto al conocimiento movilizado por la maestra y al conocimiento evocado en la investigadora. En ellos se basa el diseño de la tarea formativa utilizada en esta investigación.

Desde esta perspectiva, el análisis del conocimiento que se moviliza en un aula de primaria tiene el potencial de aportar oportunidades para construir tareas de formación que contribuyan a desarrollar el conocimiento del EPM (De Gamboa et al., 2015).

En resumen, la motivación de la investigación es doble: por un lado, contribuir a la mejora de los programas de formación inicial de maestros mediante el diseño de herramientas y

tareas que promuevan un aprendizaje profesional auténtico; por otro, generar evidencia empírica sobre cómo los EPM construyen conocimiento especializado a través de estas experiencias. Esta tesis, por tanto, se inscribe en una línea de trabajo que busca tender puentes entre la teoría y la práctica, ofreciendo propuestas concretas a los formadores de maestros para que los futuros docentes desarrollen una mirada profesional crítica y una base de conocimiento que les permita transformar sus aulas en espacios de aprendizaje efectivos.

1.3. Pregunta de investigación y objetivos

La pregunta principal que orienta este trabajo de investigación es la siguiente: ¿Qué conocimiento especializado moviliza un grupo de EPM de Educación Primaria al resolver una tarea formativa sobre la definición y clasificación de polígonos, diseñada *ad hoc* a partir de la práctica real de un aula de primaria? En correspondencia con esta cuestión, planteamos como objetivos generales: a) diseñar, implementar y evaluar una tarea formativa que, partiendo de la observación de la práctica real, promueva la construcción de conocimiento especializado en torno a la definición y clasificación de polígonos; b) comprender el conocimiento especializado que moviliza un grupo de EPM en un aula de formación inicial al resolver una tarea formativa sobre definición y clasificación de polígonos, basada en la práctica real de aula y diseñada específicamente para tal fin.

De estos objetivos generales se derivan los siguientes objetivos específicos: a) identificar el conocimiento especializado que movilizan los EPM del Grado en Educación Primaria al resolver una tarea formativa sobre definición y clasificación de polígonos, fundamentada en la práctica real de aula; b) diseñar y validar, desde la investigación, una tarea formativa para la formación inicial de maestros de Primaria que movilice su conocimiento especializado en relación con el contenido particular de los polígonos.

Como se verá en el capítulo 3, para dar respuesta a la pregunta de investigación planteada, teniendo en cuenta los objetivos, optamos por un diseño metodológico basado en el enfoque de experimento de enseñanza (Molina, Castro y Ambrose, 2011; Molina et al.,

2011), con un macrociclo, estructurado en dos microciclos⁶ sucesivos de diseño, implementación y análisis (Collins et al., 2004).

1.4. Estructura del trabajo

El presente trabajo está estructurado en cinco capítulos de contenido, a los que se añaden las correspondientes referencias bibliográficas.

El primer capítulo, *Introducción*: en este capítulo se expone la motivación personal y profesional que da origen a esta investigación, el planteamiento del problema, los objetivos y preguntas de investigación, así como la relevancia teórica y práctica del estudio.

El segundo capítulo, *Marco teórico*, justifica la elección de los fundamentos teóricos tenidos en cuenta en el trabajo. Se describe el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, Carrillo et al., 2018), que lo utilizamos, por una parte, como referente para el diseño de la tarea formativa, y por otra, como modelo analítico para caracterizar el conocimiento movilizado por los EPM durante la resolución de esta. Por otra parte, realizamos una revisión bibliográfica sobre el diseño de tareas formativas para la formación inicial de maestros, que sirve de contexto para el diseño de la investigación.

En el tercer capítulo, *Metodología*, describimos cómo hemos procedido con esta investigación, indicando el paradigma desde el que hemos trabajado, y caracterizamos el diseño de la investigación adoptado, que corresponde a un experimento de enseñanza (Molina et al., 2011) en el marco de la investigación basada en el diseño. En particular, se describe el contexto de la investigación, la tarea formativa y el proceso de diseño, otros instrumentos de recogida de datos, el proceso de recogida seguido y el procedimiento de análisis. También se da cuenta de las decisiones adoptadas para garantizar la calidad de la investigación y en relación con las cuestiones éticas.

⁶ En este trabajo se emplean los términos *ciclo* y *microciclo* de manera indistinta para referirse a los microciclos de diseño, implementación y análisis que conforman el macrociclo.

El cuarto capítulo, *Análisis y resultados*, se presentan de manera detallada los hallazgos obtenidos en cada uno de los dos ciclos del experimento de enseñanza, identificando el conocimiento especializado que los EPM movilizan en cada actividad. Se incide en comprobar si se consigue que los EPM pongan en juego el conocimiento pretendido en cada una de ellas. Como resultado de cada análisis, se señalan las propuestas de modificación de la tarea que deberán considerarse en su rediseño.

Por último, en el quinto capítulo, *Discusión y conclusiones*, interpretamos los resultados presentados en el capítulo anterior, detallando las relaciones que se establecen entre ellos. Con ello respondemos a los objetivos planteados en el trabajo. Además, se identifican las limitaciones del trabajo y se ofrece una mirada prospectiva, orientada a proponer líneas de trabajo que den continuidad a los resultados alcanzados.

MTSK considers only the specialised components of mathematics teachers' knowledge, that is, their knowledge of mathematics as the object of teaching and learning. Consequently, MTSK has no interest in other types of knowledge shared with teachers of other subjects (such as general pedagogical knowledge), nor in knowing whether some elements of knowledge are shared with other professionals who use mathematics.

Carrillo et al. (2018, p. 249)

2. Marco Teórico

El presente capítulo expone los fundamentos teóricos que sustentan esta investigación, los cuales se articulan en torno a tres referentes principales. En primer lugar, se aborda el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*Mathematics Teachers' Specialised Knowledge*, MTSK), presentado en Carrillo et al. (2018), que constituye tanto el marco estructurador del diseño de la tarea como el modelo analítico empleado para identificar y analizar el conocimiento que los EPM movilizan al resolver las actividades propuestas. Este modelo ofrece una visión detallada y dinámica del conocimiento profesional docente, entendiendo que la enseñanza de las matemáticas requiere un tipo de conocimiento especializado, diferenciado del conocimiento matemático común, y que se expresa en la práctica a través de las decisiones, interpretaciones y razonamientos del futuro profesor.

En segundo lugar, se aborda el uso del modelo MTSK como marco para el diseño de tareas formativas. Este modelo orienta la articulación entre el conocimiento matemático, didáctico y del pensamiento del estudiante, guiando la creación de experiencias que favorecen la reflexión y el desarrollo del conocimiento profesional docente.

Finalmente, el capítulo profundiza en el uso de tareas formativas basadas en la práctica real de aula como herramienta para el desarrollo de dicho conocimiento especializado durante la formación inicial (Joglar-Prieto, et al., 2022). Estas tareas, situadas en contextos auténticos de enseñanza, permiten conectar la teoría con la práctica y promueven procesos reflexivos en los EPM, favoreciendo la construcción de un conocimiento profesional significativo. La literatura reciente en Didáctica de la Matemática ha mostrado que el diseño de tareas inspiradas en la práctica docente constituye un medio eficaz para potenciar el conocimiento didáctico y matemático de los futuros maestros, al mismo tiempo que fomentan la comprensión profunda del contenido y la toma de decisiones fundamentadas.

En conjunto, estos dos referentes teóricos (el modelo MTSK como marco de referencia y las tareas formativas basadas en la práctica como medio de desarrollo profesional configuran el armazón conceptual que orienta el análisis y la interpretación de los resultados de esta investigación.

2.1. Conocimiento del Profesor de Matemáticas

En este apartado se presentan las bases conceptuales que sustentan la presente investigación en relación con el conocimiento del profesor de matemáticas. En primer lugar, se abordará la noción de conocimiento profesional del profesorado en relación con el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, tomando como referencia el planteamiento de Climent (2005). Para ello, previamente, clarificamos lo que entendemos por conocimiento, siguiendo la perspectiva propuesta por Schoenfeld (2010). Posteriormente, se presentará el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2018). El modelo MTSK se emplea en este trabajo, por un lado, como fundamento teórico para el diseño de las tareas formativas, y por otro, como modelo analítico para el estudio del conocimiento especializado que los EPM movilizan durante su resolución.

2.1.1. Conocimiento profesional respecto de la enseñanza de las matemáticas

Antes de abordar la noción de conocimiento profesional, conviene precisar qué entendemos por *conocimiento* en el marco de esta investigación. De acuerdo con Montes et al. (2014), adoptamos la definición operativa de conocimiento propuesta por Schoenfeld (2010, p.25), quien lo caracteriza como: “*la información que tiene disponible para usar al resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea*”. En este sentido, entendemos, que el conocimiento de una persona no se limita a la acumulación de información, sino que está intrínsecamente vinculado a su uso en la acción.

A partir de esta concepción general, resulta pertinente abordar el conocimiento profesional del profesorado, entendido como la forma particular que adquiere este saber cuando se desarrolla en el contexto educativo y orienta la práctica docente. Climent (2005) lo particulariza para el profesor de matemáticas, y concibe este conocimiento como la conjunción de saberes, experiencias y reflexiones que permiten al profesor desenvolverse en su práctica y evolucionar a lo largo de su desarrollo profesional.

A partir de esta concepción, la autora caracteriza el conocimiento profesional del profesor de matemáticas otorgándole las siguientes propiedades. Es un conocimiento *situado* y *contextualizado*, pues se desarrolla en comunidades de práctica y se adapta a las

particularidades del contexto educativo; *social* e *individual*, al construirse colectivamente, pero expresarse a través de las decisiones personales de cada profesor; y *personal*, porque incorpora la historia, creencias y experiencias vitales que configuran la identidad profesional.

Asimismo, es un conocimiento *dinámico*, en constante evolución a lo largo del desarrollo profesional y de la reflexión sobre la práctica. Su naturaleza *integrada* y *compleja* refleja la interacción entre saberes conceptuales, pedagógicos y experienciales, sin que ello implique una fragmentación del saber docente. Además, es *parcialmente tácito* (Schön, 1983), ya que los profesores competentes suelen saber más de lo que pueden expresar. Este conocimiento implícito, adquirido y manifestado en la práctica, guía sus decisiones y acciones en el aula, aun cuando no sean plenamente conscientes de él. Finalmente, es un conocimiento *práctico* y *crítico* (Schoenfeld, 2010), en tanto se activa en la resolución de situaciones de enseñanza y se renueva mediante la reflexión y la autocrítica orientadas a la mejora profesional. En síntesis, el conocimiento profesional del profesor de matemáticas puede entenderse como un entramado de saberes, experiencias y reflexiones que se construyen social e individualmente, se transforman con la práctica y se expresan en la acción.

En las últimas décadas, un foco importante de interés en investigación en Didáctica de la Matemática es el conocimiento profesional del profesorado de matemáticas, promoviendo el desarrollo de modelos teóricos orientados a su descripción y comprensión (Skott et al., 2013). Este interés refleja la necesidad de profundizar en la naturaleza del saber docente y de contar con marcos conceptuales que favorezcan analizarlo desde una perspectiva integral. Las aportaciones contribuyen a comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas y a mejorar la práctica profesional mediante la reflexión y el desarrollo del conocimiento del profesor (Quiroga y Gamboa, 2017).

En este contexto, surgen diferentes propuestas teóricas que buscan caracterizar el conocimiento del profesorado de matemáticas. En el apartado siguiente abordamos los referentes en los que se apoya el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*Mathematics Teachers' Specialised Knowledge*, MTSK) (Carrillo et al., 2018), desarrollado por el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemáticas (SIDM) de la Universidad de Huelva, que constituye el marco de referencia adoptado en este trabajo. Antes de abordar su descripción, se presentará de manera sucinta los

principales modelos teóricos que lo preceden, con el fin de situar conceptualmente el origen y la evolución de MTSK.

2.1.2. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

En la década de 1980, el trabajo de Shulman (1986) marcó un punto de inflexión en la investigación sobre el conocimiento del profesorado al diferenciar entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK), subrayando que la enseñanza requiere un saber específico distinto al de otros profesionales. Su propuesta impulsó una nueva línea de estudio centrada en comprender cómo los docentes deciden qué y cómo enseñar, así como en analizar la naturaleza de su conocimiento en acción.

Posteriormente, Ball et al. (2008) ampliaron este marco al desarrollar el modelo de *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), que refuerza el enfoque de Shulman y lo centra en el conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Este modelo refina la clasificación original e introduce subdominios como el *conocimiento especializado del contenido* y el *conocimiento del horizonte matemático*.

El grupo SIDM, interesado en profundizar en la comprensión del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, llevó a cabo un análisis crítico del modelo MKT, en el que detectó ambigüedades en la delimitación de algunos de sus dominios. Se observó, por ejemplo, que el conocimiento especializado del contenido puede incluir elementos propios del conocimiento del contenido y los estudiantes, así como del conocimiento común del contenido (Flores-Medrano et al., 2013). Además, se señalaron dificultades en torno al conocimiento del horizonte matemático, especialmente respecto a la definición de su alcance (Montes, 2015). Con el propósito de superar las limitaciones implícitas del MKT, el grupo consideró oportuno redefinir y reestructurar aquellos elementos que no representaban de manera adecuada el conocimiento específico del profesor de matemáticas, dando lugar al modelo MTSK (Carrillo et al., 2018). En publicaciones posteriores el grupo ha mostrado el avance de la investigación con MTSK (Carrillo et al., 2022; Climent y Montes, 2022).

Desde su origen, este modelo se ha afianzado y enriquecido a través de numerosas investigaciones (Aguilar, 2015; Carrillo et al., 2014; Carrillo et al., 2017; Escudero-Ávila, 2015; Flores-Medrano, 2015; Flores-Medrano et al., 2014; Montes, 2015; Moriel-Junior,

2014; Rojas, 2014; Vasco, 2015), las cuales han contribuido significativamente a su desarrollo y consolidación teórica (Carrillo et al, 2018).

El modelo MTSK se distingue de sus predecesores, entre otros aspectos, por la reconceptualización del carácter especializado del conocimiento docente y por la perspectiva interpretativa que adopta sobre dicho conocimiento (Climent et al., 2024). En primer lugar, redefine la noción de especialización desde una perspectiva intrínseca (Scheiner et al., 2019), entendiendo que lo que hace especializado el conocimiento del profesor de matemáticas no es el contexto externo en el que enseña, sino la naturaleza misma del conocimiento que moviliza en su labor como profesor de matemáticas. Esta especialización impregna todos los subdominios que lo conforman. En segundo lugar, el modelo asume una perspectiva interpretativa (Carrillo et al., 2018), que busca comprender el conocimiento que el profesorado utiliza o desarrolla en la práctica, en lugar de medirlo en términos de cantidad o corrección. Esta concepción permite analizar el conocimiento del profesor como un saber dinámico, situado y dependiente del contexto de enseñanza, poniendo de relieve su carácter profesional y disciplinar.

Desde una perspectiva analítica, el modelo MTSK mantiene la distinción entre dos dominios principales del conocimiento profesional del profesor de matemáticas: el conocimiento del contenido matemático (MK, *Mathematical Knowledge*) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK, *Pedagogical Content Knowledge*). Cada uno de ellos se subdivide en subdominios, y estos a su vez en categorías que permiten describir las distintas facetas del conocimiento especializado que el docente moviliza en su práctica profesional.

A diferencia de modelos previos, el MTSK amplía esta estructura al incorporar un tercer dominio que integra las creencias⁷ (*Beliefs*) del profesorado acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, reconociendo la influencia que dichas creencias ejercen sobre la forma en que el docente interpreta, selecciona y aplica su conocimiento en la práctica pues influye en todos los subdominios del conocimiento (Aguilar et al., 2022; Carrillo et al., 2018), y en las decisiones docentes (Carrillo, 1998; Contreras, 1999; Wilson y Cooney, 2002). Estas se clasifican en concepciones sobre las matemáticas y

⁷ En la línea del grupo SIDM, no consideramos diferencia alguna entre creencias y concepciones (Escudero-Ávila, 2015)

sobre su enseñanza y aprendizaje (Carrillo y Contreras, 1995) y se representan en el centro del modelo MTSK, por su carácter transversal (Liñán-García, 2017; Muñoz-Catalán et al., 2015). En nuestro análisis no estarán presentes explícitamente las creencias o concepciones de los EPM.

2.1.2.1. Conocimiento matemático común (MK)

El dominio de *conocimiento matemático* (*Mathematical Knowledge, MK*) hace referencia al saber que posee (o debe poseer) un profesor que enseña matemáticas en tanto que disciplina científica situada en un contexto educativo. Este dominio amplía la noción de “*Conocimiento de la Materia*” propuesta por Shulman (1986), al reconocer no solo las características propias de las matemáticas como ciencia, sino también la diferenciación existente entre las matemáticas como disciplina académica y las matemáticas escolares. En este sentido, el MK integra los conocimientos relativos a la propia naturaleza de la matemática que se enseña, en nuestro caso, la Geometría, y se organiza en tres subdominios interrelacionados: el conocimiento de los temas, referido a la comprensión profunda del contenido matemático; el conocimiento de la estructura de las matemáticas, relativo a las relaciones inter conceptuales entre estos conocimientos; y el conocimiento de la práctica matemática, vinculado a los modos de producción, argumentación y validación del conocimiento matemático.

Tabla 2.1

Subdominios del conocimiento matemático

Conocimiento matemático (<i>Mathematical Knowledge, MK</i>)	
Conocimiento de los Tópicos	<i>Knowledge of Topics, KoT</i>
Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas	<i>Knowledge of the Structure of Mathematics, KSM</i>
Conocimiento de las Prácticas Matemáticas	<i>Knowledge of Practices in Mathematics, KPM</i>

a. Conocimiento de los tópicos

El *conocimiento de los tópicos* o temas matemáticos (KoT) se centra en la comprensión que el profesor tiene de los contenidos, procesos y procedimientos matemáticos, entendidos como parte esencial de la disciplina (Vasco y Moriel Junior, 2022). Implica un *conocimiento profundo de la matemática fundamental* (Ma, 1999), en tanto implica la

comprensión del sentido de los conceptos, de las ideas que los sustentan y de las conexiones que pueden establecerse entre ellos. Toman como referencia las áreas de contenido propuestas por el National Council of Teachers of Mathematics⁸ (NCTM, 2000) en sus estándares de matemáticas. Comprender un tema matemático implica reconocer sus relaciones, propiedades, representaciones y procedimientos (no solo saber cómo realizarlos, sino también cuándo y por qué), así como situarlos en contextos que den sentido a su enseñanza y aprendizaje (Lesh, 1997).

El KoT se articula en torno a cuatro categorías. Una de ellas es *definiciones, propiedades y sus fundamentos*, que alude al conocimiento que el profesor tiene sobre los elementos que caracterizan y dan significado a un tema matemático. Comprende la identificación de las propiedades que definen un concepto, las formas alternativas de definirlo y la comprensión de las relaciones lógicas y jerárquicas entre definiciones y propiedades, así como de los fundamentos teóricos que las sustentan. Incluye además las conexiones intra conceptuales, es decir, las relaciones entre conceptos, procedimientos o representaciones de un mismo tema.

Por ejemplo, al abordar la definición y clasificación de los polígonos⁹, el profesor pone en juego su conocimiento sobre las propiedades que definen este tipo de figuras y su comprensión de qué hace que una figura pueda o no considerarse un polígono. Además, debe reconocer que existen distintas formas de definir este concepto y entender las implicaciones didácticas de elegir una u otra definición.

Asimismo, este conocimiento incluye la comprensión de las relaciones jerárquicas y lógicas entre las categorías de polígonos, como la inclusión de los cuadriláteros dentro de los polígonos o la distinción entre polígonos regulares e irregulares, fundamentadas en propiedades como la igualdad de lados o de ángulos. Estas relaciones constituyen ejemplos de conexiones intra conceptuales, pues se refieren a vínculos entre diferentes conceptos y propiedades dentro del mismo tema matemático.

⁸ NCTM, en castellano, Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas. Organización profesional fundada en 1920 en Estados Unidos, dedicada a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos. Publica estándares, principios y materiales de referencia ampliamente utilizados en la educación matemática a nivel internacional.

⁹ Tema sobre el que versa la tarea formativa considerada en esta investigación.

La categoría de *procedimientos* dentro del KoT se refiere al saber hacer matemático, es decir, al conocimiento práctico que el profesor posee sobre los procesos y algoritmos implicados en un tema. Este conocimiento abarca no solo cómo realizar un procedimiento, sino también cuándo aplicarlo, por qué puede hacerse y cuáles son las características del resultado obtenido, constituyendo todos ellos indicadores de esta categoría. Incluye tanto los algoritmos convencionales como las estrategias o procedimientos alternativos que pueden emplearse en distintos contenidos matemáticos.

En el caso de la definición y clasificación de los polígonos, el subdominio de procedimientos se manifiesta en el conocimiento sobre los procesos que permiten identificar, construir y clasificar este tipo de figuras. Por ejemplo, determinar si una figura es o no un polígono a partir de sus características o clasificar polígonos según el número de lados o la regularidad de sus ángulos son procedimientos que requieren aplicar criterios y pasos definidos.

La *fenomenología* se refiere al conocimiento sobre los fenómenos, contextos y situaciones asociados a un tema matemático, los cuales pueden servir para generar conocimiento y dotar de significado a los conceptos (Gómez y Cañadas, 2016). Este conocimiento abarca tanto la identificación de los modelos o fenómenos que pueden atribuirse a un tema como la comprensión de sus usos y aplicaciones en distintos contextos.

En el tema que nos ocupa, un ejemplo es reconocer situaciones cotidianas en las que intervienen distintos tipos de polígonos, como las que surgen en problemas de diseño, construcción o medición. También puede manifestarse en el uso de mosaicos, pavimentos u otras configuraciones geométricas del entorno, que permiten explorar y clasificar las formas poligonales a partir de contextos reales y significativos.

La categoría de *registros de representación* se refiere al conocimiento que el profesor posee sobre las distintas formas en que puede representarse un contenido matemático, como los registros figural-icónico, numérico, tabular, algebraico, geométrico, gráfico o en lenguaje natural (Duval, 1995; Macías, 2016). Este conocimiento incluye la capacidad de establecer conversiones entre diferentes registros, favoreciendo la comprensión del contenido desde múltiples perspectivas. Además, como señala Duval (1995), el uso preciso del vocabulario y la notación matemática forma parte también de este subdominio,

al constituir un elemento esencial del KoT y de la comunicación del conocimiento matemático.

Como ejemplo de conocimiento de esta categoría está el representar diversos polígonos a través de un registro gráfico y hacer la conversión al lenguaje natural para describir sus características.

Las cuatro categorías del KoT aparecen reflejadas en la tabla 2.2 (Carrillo et al., 2018).

Tabla 2.2
Categorías asociadas al subdominio de Conocimiento de los tópicos (KoT)

Subdominios		Categorías asociadas al subdominio	
		<i>Conocimiento sobre:</i>	
Conocimiento matemático	Conocimiento de los tópicos KoT	Procedimientos	<i>¿Cómo se hace?</i>
			<i>¿Cuándo puede hacerse?</i>
			<i>¿Por qué se hace así?</i>
			<i>Características del resultado</i>
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	
		Registros de representación	
		Fenomenología y aplicaciones	

Nota: Tomada de Carrillo et al. (2018).

b. Conocimiento de la estructura de la matemática

Este subdominio aborda las conexiones interconceptuales que vinculan los conceptos, procedimientos y propiedades de las matemáticas (Flores-Medrano, 2022). Como ya hemos visto, las intraconceptuales corresponden a KoT. De igual forma, se excluyen también las relaciones que se establecen con otras disciplinas, que se consideran parte de la fenomenología (KoT).

En este subdominio se distinguen cuatro tipos de conexiones que reflejan distintas formas de articulación conceptual. Las *conexiones de complejización*, que relacionan los contenidos actuales con otros que se abordarán en etapas posteriores, contribuyendo a construir una base conceptual para aprendizajes futuros. Las *conexiones de simplificación*, que vinculan los contenidos presentes con conocimientos ya adquiridos, permitiendo reinterpretar ideas previas desde un nivel más avanzado y otorgarles nuevos significados. Las *conexiones transversales*, que surgen entre contenidos diferentes que comparten propiedades o estructuras comunes, favoreciendo la comprensión de la

coherencia interna del sistema matemático. Por último, las *conexiones auxiliares*, que se establecen cuando un concepto o procedimiento sirve de apoyo para la comprensión o resolución de otros, actuando como herramienta intermedia dentro de procesos más amplios.

Por ejemplo, una *conexión de complejización* puede observarse al interpretar la circunferencia como el límite de un polígono de n lados cuando n tiende a infinito, o al reflexionar sobre la definición y clasificación de polígonos en el marco de geometrías no euclidianas, como la geometría proyectiva, afín o topológica, donde las propiedades y relaciones varían según el sistema de referencia (Montes et al., 2019). Un ejemplo de *conexión de simplificación* es la relación que se puede establecer entre la definición de sector circular y la interpretación de una fracción como la parte de un círculo que queda limitada por dos radios (Liñán-García et al., 2021).

Una *conexión transversal* puede observarse cuando el profesor relaciona la simetría geométrica de figuras en el plano con la simetría de funciones en el eje Y o respecto al origen, reconociendo que ambas expresan la invariancia de una forma o relación ante una transformación. Por último, un ejemplo de *conexión auxiliar* es la que puede establecerse al utilizar la división de una circunferencia en arcos de igual longitud para construir un polígono regular, o al emplear dos segmentos paralelos como recurso para generar todos los cuadriláteros que poseen al menos dos lados paralelos (Liñán-García, 2017). En ambos casos, ciertos conocimientos geométricos (la división de la circunferencia o la noción de paralelismo) funcionan como soporte o medio para alcanzar otro objetivo matemático más amplio, evidenciando la relación funcional entre distintos contenidos dentro de la geometría.

Las categorías asociadas a este subdominio están en la Tabla 2.3 (Carrillo et al., 2018).

Tabla 2.3

Categorías asociadas al subdominio de Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)

Subdominios		Categorías asociadas al subdominio
		<i>Conocimiento sobre:</i>
Conocimiento matemático	Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM	Conexiones de complejización
		Conexiones de simplificación
		Conexiones transversales
		Conexiones auxiliares

Nota: Tomada de Carrillo et al. (2018).

c. Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

El *conocimiento de la práctica matemática* (KPM) se refiere al saber del profesor sobre las acciones, procesos y modos de razonamiento propios de la actividad matemática, es decir, sobre cómo se produce, justifica y se valida el conocimiento en matemáticas. Pone el foco en su funcionamiento interno.

Incluye el conocimiento de las prácticas que conforman la actividad matemática, tales como definir, demostrar, justificar, formular conjeturas, realizar deducciones e inducciones, emplear ejemplos y contraejemplos, modelizar, simbolizar o resolver problemas. Implica también comprender la lógica y los fundamentos que sustentan estas prácticas. Está estrechamente vinculado a la noción de metaconocimiento matemático, entendida como el conocimiento sobre los métodos, estructuras y organización del saber matemático (Robert y Robinet, 1996, citados en Carrillo et al., 2018). En este sentido, forman parte de este subdominio los conocimientos relacionados con la construcción, la validación y la comunicación del conocimiento matemático en un contexto educativo (Delgado et al., 2022).

El KPM puede entenderse en dos niveles: uno general, referido al conocimiento sobre cómo se desarrollan las matemáticas con independencia de un contenido particular (por ejemplo, razonamientos de tipo deductivo, inductivo o abductivo, o las formas de validación y demostración), y otro específico, vinculado a las formas de proceder características de un tema concreto. Entre sus principales indicadores están la planificación en la resolución de problemas (Polya, 1945), las formas de validación y demostración (Soler, 2012), el uso del lenguaje y los símbolos formales, los procesos heurísticos y las prácticas propias del quehacer matemático, como la modelización o la algoritmización (Muñoz-Catalán et al., 2017).

Por ejemplo, en el trabajo con profesores en formación relativo a la definición de polígono, el KPM se moviliza cuando los futuros docentes formulan y analizan definiciones, discutiendo las condiciones necesarias y suficientes que las sustentan, y contrastando ejemplos y contraejemplos.

Este subdominio se encuentra en desarrollo. Desde el origen se ha operativizado en función de indicadores, a diferencia de los otros subdominios del modelo MTSK que se

presentan asociados a categorías de conocimiento. Los indicadores considerados se resumen en la tabla 2.4 (Carrillo et al., 2018).

Tabla 2.4

Categorías asociadas al subdominio de Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

Subdominios		Indicadores asociados al subdominio
Conocimiento matemático	Conocimiento de la práctica matemática KPM	Conocimiento sobre:
		Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos
		Formas de validación y demostración
		Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal
		Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas
		Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)
		Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones

Nota: Tomada de Carrillo et al. (2018).

Desde la RED MTSK se sigue trabajando en la delimitación y desarrollo conceptual del KPM. Así, Campos-Cano y Flores-Medrano (2019) plantean considerar a cada práctica matemática como una categoría del KPM, proponiendo subcategorías e indicadores asociados con las prácticas de demostrar y definir. De manera complementaria, Alfaro et al. (2020) analizan los aspectos involucrados en la demostración, a partir de los cuales formulan indicadores que describen el conocimiento de esta práctica como parte del KPM, en este caso desde su trabajo con futuros profesores de matemáticas de secundaria.

Por su parte, Delgado-Rebolledo (2020), en una investigación con profesores universitarios, amplía el marco del KPM proponiendo cuatro categorías: demostrar, definir, resolver problemas y el papel del lenguaje matemático, constatando que la mayoría de los indicadores reportados en estudios previos se relacionan con estas dimensiones. En Delgado-Rebolledo et al. (2022) los autores profundizan en las prácticas de demostrar, definir y resolver problemas, así como en el conocimiento del papel del lenguaje matemático como componentes del KPM, reconociendo el carácter no exhaustivo de su propuesta.

En este trabajo mantenemos el uso de la propuesta inicial presentada en Carrillo et al. (2018) por ser la que hemos utilizado desde el inicio de la investigación, garantizando así la consistencia interna en la recogida, codificación y comparación de datos.

2.1.2.2. Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

El segundo dominio del modelo MTSK corresponde al *conocimiento didáctico del contenido* (*Pedagogical Content Knowledge, PCK*), entendido como el conocimiento propio de la enseñanza que constituye un componente esencial del saber profesional docente y un complemento necesario del *conocimiento matemático* (MK) (Escudero-Ávila, 2015). La noción de PCK fue introducida por Shulman (1986, 1987) como una de las dimensiones del conocimiento del contenido para su enseñanza, y desde entonces ha sido objeto de diversas investigaciones (Hill et al., 2008; Llinares, 2000; Pino-Fan et al., 2015; Pinto y González-Astudillo, 2008; Vásquez y Alsina, 2015). El PCK aborda el ámbito didáctico, centrado en la gestión del contenido matemático, dejando fuera los aspectos pedagógicos relacionados con la dinámica del aula y factores psicosociales, por no ser específicos de la matemática.

Este subdominio constituye, por tanto, el conocimiento que permite al profesor transformar el contenido matemático en objeto de enseñanza y aprendizaje, guiando las decisiones didácticas que surgen en la práctica profesional. Su relevancia se manifiesta desde tres perspectivas complementarias: (a) el contenido a enseñar, (b) el contenido a aprender, y (c) la visión de los estándares de aprendizaje, que integran tanto el currículo vigente como los aportes de la investigación en educación matemática. Este dominio se estructura en tres subdominios relacionados entre sí (Tabla 2.5).

Tabla 2.5
Subdominios del conocimiento didáctico del contenido

Conocimiento didáctico del contenido (<i>Pedagogical Content Knowledge, PCK</i>)	
Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas	<i>Knowledge of Features of learning Mathematics, KFLM</i>
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas	<i>Knowledge of Mathematics Teaching, KMT</i>
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas	<i>Knowledge of Mathematics Learning Standards, KMLS</i>

a. Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas

El *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* (KFLM) comprende el conocimiento del profesor sobre cómo el contenido matemático condiciona el aprendizaje: dificultades, errores, estrategias e itinerarios de aprendizaje. este

subdominio se estructura en cuatro categorías y se alimenta de dos fuentes principales: la experiencia profesional acumulada en la enseñanza y la investigación en Didáctica de la Matemática, que aportan evidencias y patrones para fundamentar decisiones didácticas (Carrillo et al., 2018; Escudero-Ávila, 2022). Este subdominio se estructura en cuatro categorías.

La primera, incluye el conocimiento de *teorías sobre aprendizaje* asociadas al contenido, considerando tanto marcos formales como teorías personales, y la comprensión del desarrollo cognitivo en matemáticas. Por ejemplo, el conocimiento sobre la Teoría de van Hiele le va a permitir al profesor identificar el nivel de razonamiento geométrico de cada uno de sus alumnos atendiendo a cómo ejecutan ciertos procesos.

En segundo lugar, reconoce *fortalezas y dificultades*. En esta categoría se engloba el conocimiento sobre errores u obstáculos de origen epistemológico (propios de la naturaleza del contenido, como tomar imágenes prototípicas como definición de un polígono o no entender la inclusión de clases), didáctico (derivados de enseñanzas previas) y ontogenético (ligados al desarrollo cognitivo y experiencial del estudiante). También incluye las fortalezas derivadas de las potencialidades del grupo de alumnos, que podrían aprovecharse a nivel didáctico, por ejemplo, tener en cuenta la facilidad de los estudiantes para trabajar con determinados registros de representación (Liñán-García, 2017).

Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor sobre la dificultad de algunos estudiantes para aceptar definiciones equivalentes, detectar definiciones incompletas o articular las relaciones lógicas entre atributos críticos (Haj-Yahya et al., 2023).

Asimismo, el KFLM incluye el conocimiento de las *formas de interacción del alumnado con el contenido*, haciendo referencia al conocimiento que tiene el profesor sobre los procedimientos y estrategias que suelen activar los estudiantes durante el aprendizaje, el lenguaje que emplean y las representaciones preferentes.

Como ejemplo de conocimiento de esta categoría está el que el profesor sabe que la mayoría de los estudiantes se enfrentan al cálculo de áreas a través de expresiones algebraicas (Liñán-García, 2017), desde un enfoque multidimensional.

Finalmente, abarca los *aspectos emocionales*, referidos a intereses, expectativas, percepciones de utilidad y dificultad o autoeficacia, que median en el progreso del estudiante con ese contenido. Por ejemplo, que el profesor reconozca que el uso de materiales manipulativos o de recursos digitales para la enseñanza de la geometría puede favorecer una mayor disposición e interés de los estudiantes hacia las tareas matemáticas (Escudero-Ávila, 2022).

La Tabla 2.6 recoge las categorías que conforman este subdominio (Carrillo et al., 2018).

Tabla 2.6
Categorías asociadas al subdominio de Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

Subdominios		Categorías asociadas al subdominio
Conocimiento didáctico del contenido	Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	Conocimiento sobre:
		Teorías sobre aprendizaje
		Fortalezas y dificultades
		Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático
		Aspectos emocionales

Nota: Tomada de Carrillo et al. (2018).

b. Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas

El subdominio *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT) subdominio comprende el conocimiento específico que el profesor necesita para enseñar matemáticas de manera efectiva. Este conocimiento está intrínsecamente ligado al contenido matemático y a su enseñanza, excluyendo los aspectos del conocimiento pedagógico general. Abarca tanto la práctica profesional en el aula como otros contextos propios del desarrollo docente, integrando teorías derivadas de la investigación en Didáctica de la matemática y el saber construido a partir de la experiencia y la reflexión sobre la práctica (Carrillo et al., 2018; Escudero-Ávila, 2015; Sosa y Reyes, 2022). En conjunto, constituye un conocimiento teórico (personal e institucional) específico de la enseñanza de las matemáticas, estructurado en tres categorías principales.

Las *teorías de enseñanza* asociadas a un contenido matemático ya sean personales o formales, constituyen un conocimiento que puede originarse tanto en la experiencia y la reflexión del profesor sobre su práctica, como en investigaciones publicadas en el ámbito de la educación matemática. Según Schoenfeld y Kilpatrick (2008), este conocimiento

influye directamente en la actuación docente en el aula, determinando tanto la forma en que el profesor interactúa con los estudiantes como la manera en que moviliza su conocimiento matemático durante la enseñanza. Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor de las diferentes fases de enseñanza propuestas por van Hiele (1986) para guiar el paso de un nivel de razonamiento al siguiente. Así, el profesor puede reconocer que sus estudiantes se encuentran en el nivel de análisis de van Hiele y, por tanto, propone actividades de clasificación y comparación de figuras que les ayude a establecer relaciones entre propiedades y figuras (nivel de ordenación o nivel de deducción informal).

La categoría de los *recursos materiales y digitales* para la enseñanza de un contenido matemático abarca el conocimiento de las características matemáticas, el potencial didáctico y las limitaciones de estos recursos. Entre los materiales se pueden considerar, como ejemplo, libros de texto, manipulativos, herramientas tecnológicas o pizarras interactivas. Este conocimiento va más allá de su simple conocimiento o uso, implica una evaluación crítica de cómo estos recursos pueden favorecer la enseñanza y el aprendizaje de un tema específico y de las restricciones que pueden presentar en la práctica docente. Por ejemplo, el conocimiento del profesor sobre las consecuencias que puede tener el uso de una ficha con figuras dibujadas en un formato fijo (ficha, libro, pizarra tradicional) para su clasificación. Al representar a figuras en una manera determinada puede hacer que el estudiante añada a su imagen del concepto características propias de la posición (por ejemplo, tener un lado en horizontal) que no son atributos relevantes de las figuras.

La categoría de *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* constituyen un ámbito de conocimiento que integra la comprensión del potencial didáctico de las actividades para favorecer el aprendizaje matemático, así como la identificación de sus posibles limitaciones y obstáculos en contextos específicos. Implica la capacidad del profesor para seleccionar, adaptar y secuenciar tareas y ejemplos adecuados a las características de sus estudiantes. Incluye también la toma de decisiones didácticas en situaciones concretas, como determinar el tipo de ayuda o intervención más pertinente; por ejemplo, cuando un profesor pide a sus estudiantes representar gráficamente un problema porque sabe que esta estrategia facilitará su comprensión. Otro ejemplo puede ser el conocimiento del profesor sobre el potencial del uso de figuras recortadas por sus estudiantes para

determinar criterios de clasificación de polígonos. Sabe que el poder compararlas de manera física les va a ayudar a establecer relaciones.

Las categorías de este subdominio se identifican en la Tabla 2.7 (Carrillo et al., 2018).

Tabla 2.7

Categorías asociadas al subdominio de Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

Subdominios		Categorías asociadas al subdominio <i>Conocimiento sobre:</i>
Conocimiento didáctico del contenido	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	Teorías de enseñanza
		Recursos materiales y digitales
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos

Nota: Tomada de Carrillo et al. (2018).

c. Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas

El *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS) comprende el conocimiento del profesor sobre el currículo oficial vigente y de otros estándares definidos por asociaciones profesionales o grupos de investigación en Educación matemática, como el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000). Un estándar de aprendizaje es una descripción concreta de lo que un estudiante debe saber, comprender y ser capaz de hacer al finalizar un proceso de enseñanza determinado (una unidad, curso o etapa educativa) (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014; Tiana, A. 2013). Estos estándares pueden basarse en especificaciones curriculares oficiales, en documentos no oficiales (como el NCTM, 2000) o en la literatura de investigación (Santos y Cai, 2016). Un ejemplo de ello son los objetivos de aprendizaje para quinto curso de primaria relacionados con la clasificación de polígonos. Se distingue del KSM (conexiones de complejización y simplificación, vistas en el apartado 2.2.2.1.b), ya que su temporalización se fundamenta en el currículo, no en las conexiones inter conceptuales del conocimiento matemático (Flores-Medrano et al., 2014).

Se identifican tres categorías (Carrillo et al., 2018; Codes y Contreras, 2022). Los *resultados de aprendizaje esperados* que implican la comprensión de qué contenidos deben enseñarse en cada curso o etapa escolar. El *nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado* que se refiere al grado de comprensión o dominio que el

alumnado debe alcanzar sobre un contenido en una etapa escolar concreta. Por ejemplo, en relación con la clasificación de polígonos, en los primeros cursos de primaria, se espera que los estudiantes reconozcan y nombren polígonos simples (triángulos, cuadrados, rectángulos) a partir de sus características visuales básicas, como el número de lados o la forma general. En niveles posteriores, el desarrollo esperado avanza hacia la identificación de propiedades geométricas más precisas, como la medida de ángulos, la igualdad de lados o la presencia de ejes de simetría. Finalmente, en etapas superiores, se espera que los estudiantes clasifiquen y construyan polígonos aplicando propiedades formales (por ejemplo, usar la suma de los ángulos interiores o el cálculo del perímetro y el área), demostrando una comprensión más abstracta y procedimental del concepto

Por último, la *secuenciación de los temas* constituye un aspecto esencial de este subdominio, ya que implica situar los contenidos en relación con los aprendizajes previos y posteriores. El profesor debe considerar las exigencias cognitivas y procedimentales que cada tarea demanda, organizando los temas de manera retrospectiva, según los conocimientos ya adquiridos por los estudiantes, y prospectiva, en función de los que serán necesarios para abordar nuevos contenidos.

La Tabla 2.8. recoge las categorías en las que se estructura este subdominio.

Tabla 2.8

Categorías asociadas al subdominio de Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMT)

Subdominios		Categorías asociadas al subdominio <i>Conocimiento sobre:</i>
Conocimiento didáctico del contenido	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	Resultados de aprendizaje esperados
		Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado
		Secuenciación de temas

Nota: Tomada de Carrillo et al. (2018).

En la Figura 2.1 se representa gráficamente el modelo MTSK, donde se aprecia la división entre dominios y subdominios. Las creencias se sitúan en el centro del esquema, ya que permean e influyen en todos los dominios de conocimiento. La representación del modelo corresponde a la traducción de la versión que hizo Liñán-García et al. (2021) basándose en Carrillo et al. (2018), añadiéndole color diferente a los dominios de conocimiento matemático y de conocimiento didáctico del contenido.

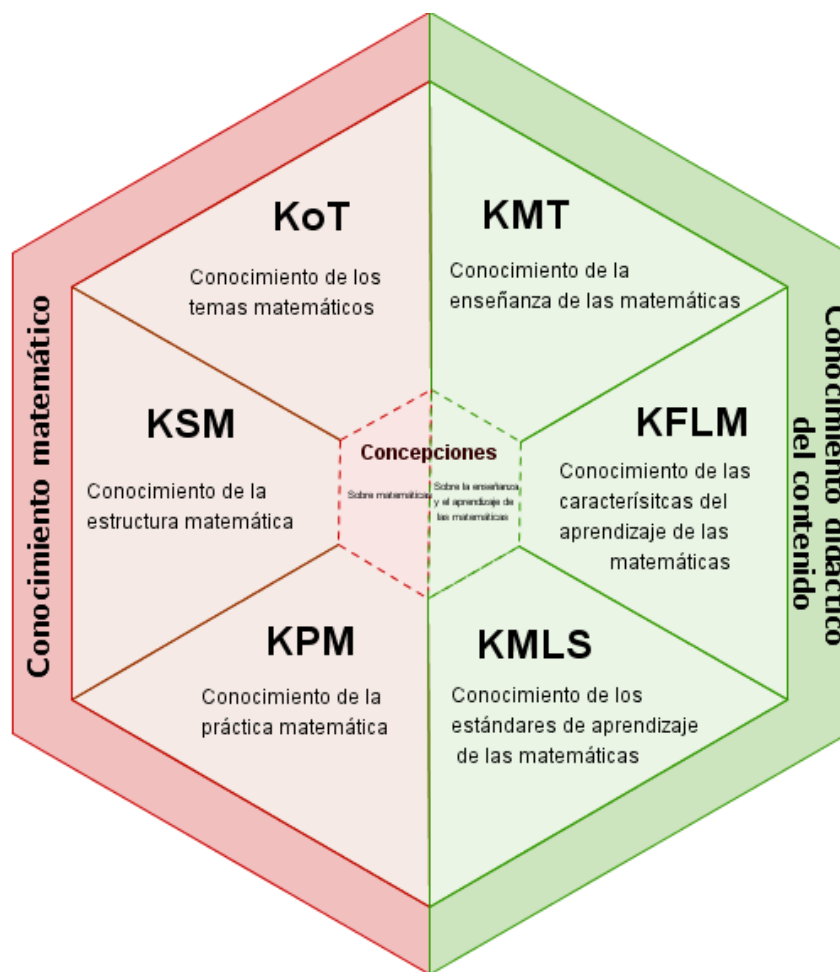


Figura 2.1 Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Traducción extraída de Liñán-García, 2021, basada en Carrillo et al., 2018)

2.2. Tareas formativas

Tratar la formación inicial de maestros desde una perspectiva práctica favorece el desarrollo de conocimiento especializado en los EPM (Boyd et al., 2009). Este enfoque incluye el análisis de situaciones reales de aula como medio para aproximar la formación inicial a la práctica del profesor, es decir, a las *tareas profesionales* definidas previamente como el sistema de actividades del profesor que conforman su práctica cuando enseña matemáticas en su aula (Da Ponte et al., 2012; Muñoz-Catalán et al., 2017; Sánchez y García, 2009). Dicho análisis se centra en aspectos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje, el diseño de sesiones de clase o la propuesta de una gestión alternativa de una sesión analizada (Joglar-Prieto et al., 2022).

Las tareas formativas que ejemplifican la práctica educativa contribuyen a que los EPM construyan su conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas (Climent

et al., 2024; Joglar-Prieto et al., Markovits y Smith, 2008; 2022; Montes et al., 2019). Estas tareas permiten integrar el conocimiento especializado del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza y el aprendizaje de dicho contenido (Carrillo et al., 2018). Las tareas formativas diseñadas a partir de la práctica real de aula son un asistente contextualizado que favorece el desarrollo de competencias profesionales en los EPM, al permitirles analizar situaciones de clase de matemáticas (Climent et al., 2016), al implicarles en la interpretación de las interacciones entre estudiantes y profesor.

De este modo, dichas tareas desarrollan la capacidad de reflexión de los EPM sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, favoreciendo la identificación de los elementos esenciales de la práctica y la formulación de propuestas alternativas de enseñanza (Joglar-Prieto et al., 2022).

2.2.1. Clasificación de tareas formativas

Las tareas formativas diseñadas para promover el desarrollo profesional de los futuros maestros de matemáticas pueden clasificarse atendiendo a diversos criterios, tal como lo evidencian distintas propuestas en la literatura especializada (Climent y Carrillo, 2003; Climent, Montes et al., 2013; Llinares, 2012). Estos criterios pueden basarse en distintos aspectos, como el tipo de conocimiento que se pretende movilizar (matemático, didáctico del contenido o del pensamiento del estudiante) (Rowland et al., 2005); la forma en la que se aproxima a la práctica real de clase, que puede incluir la observación, la simulación o la intervención directa) (Santagata y Yeh, 2014); el nivel de autonomía y reflexión que exige la tarea (Potari y Jaworski, 2002); y el contexto de aplicación, ya sea disciplinar o interdisciplinar.

En el trabajo de Joglar et al. (2022) se recogen tres de las principales propuestas de clasificación de tareas formativas en el ámbito de la didáctica de la matemática. En una de ellas, Sánchez y García (2009) diferencian tres grandes tipos de tareas: aquellas orientadas a la organización del contenido matemático para la enseñanza; las destinadas a comprender la gestión del contenido y el discurso en el aula; y las centradas en el análisis e interpretación del pensamiento y conocimiento matemático de los estudiantes.

Por su parte, Carrillo y Climent (2009) proponen una clasificación que distingue entre las tareas que confrontan al estudiante con su propio conocimiento matemático, las que se basan en la observación y el análisis crítico de situaciones de aula, y las que implican el

diseño y simulación de clases, incluyendo actividades de dramatización o teatralización que reproducen condiciones reales de la práctica docente (Lampert et al., 2013; Wæge y Fauskanger, 2020).

Por otro lado, en el marco del proyecto *Task Type and Mathematics Learning* (TTML), Sullivan et al. (2010) plantean una tipología de tareas profesionales que puede vincularse con las formativas, al distinguir entre tareas de aprendizaje del estudiante, tareas de enseñanza y tareas de aprendizaje del profesor. Dentro de estas, se incluyen tareas de contextualización y resolución de problemas, incluidos los abiertos o de investigación, así como tareas que promueven la conexión de las matemáticas con otros ámbitos del conocimiento, lo que amplía el enfoque hacia experiencias de aprendizaje más integradas y reflexivas.

En conjunto, las propuestas revisadas evidencian que las tareas formativas pueden clasificarse atendiendo a diversos criterios. Pese a los distintos enfoques, todas coinciden en concebirlas como instrumentos de aprendizaje profesional, orientados a articular la teoría y la práctica y a promover el desarrollo del conocimiento especializado necesario para enseñar matemáticas de manera fundamentada y reflexiva.

En las tres clasificaciones descritas, los autores contemplan tareas vinculadas al análisis de situaciones de aula en diversos formatos, concebidas para acercar la realidad de la escuela primaria a la formación inicial de maestros. En esta línea, la tarea formativa que proponemos en este trabajo persigue ese mismo propósito, incorporando diferentes actividades que guían la reflexión sobre el caso.

2.2.2. Dimensiones de la tarea formativa: Función, foco y forma

Además de las distintas clasificaciones propuestas en la literatura, resulta relevante considerar las dimensiones que definen el diseño y propósito de las tareas formativas, tal como plantean Clarke et al. (2009, como se cita en Plazas et al., 2024). Estos autores distinguen tres componentes esenciales que permiten comprender la complejidad de las tareas en los procesos de formación docente: función, forma y foco (Grevholm et al., 2009).

La *función* alude al propósito formativo que persigue la tarea, es decir, a aquello que se espera que los futuros maestros desarrollen o aprendan a través de su realización, como

la reflexión pedagógica o la movilización de conocimiento especializado. En el caso de la tarea diseñada para este trabajo, su función es que los EPM reflexionen sobre las decisiones didácticas de la maestra (qué hace, por qué, cómo podría modificarlo), de modo que desarrollen su *professional noticing*¹⁰ (Fernández, Llinares et al., 2018; Jacobs et al., 2010), y promueva el aprendizaje de conocimiento especializado como maestro que enseña matemáticas.

La *forma* se refiere al modo en que la tarea se presenta o estructura, incluyendo su formato (análisis de casos, observación de videos, simulación de clases, etc.) y las interacciones que propicia. Nuestra tarea se diseña considerando un caso basado en una clase de 5º de primaria en la que una maestra enseña geometría. El caso se construye a partir de la transcripción de una clase real, la cual se complementa con diálogos simulados, procedentes de nuestra sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994), teniendo en cuenta, además, el conocimiento evocado al investigador por las oportunidades (Liñán-García et al., 2021). Esta información añadida está especialmente pensada para movilizar elementos de conocimiento que la propia clase no conseguiría movilizar. A partir de este caso se diseña la tarea formativa, tomando como marco de referencia el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2018). Para ello se incluyen actividades que orientan la reflexión sobre distintas categorías de subdominios de conocimiento especializado del profesor, con el propósito de enriquecer la reflexión sobre el caso.

Finalmente, el *foco* señala el aspecto específico del conocimiento que la tarea pretende promover o analizar, como el razonamiento, las decisiones didácticas o la comprensión del contenido matemático. En la tarea diseñada para la investigación, cada actividad de la tarea está vinculada con la reflexión sobre algún o algunos elemento/s de MTSK.

Considerar estas tres dimensiones contribuye a diseñar tareas coherentes con sus objetivos formativos y a analizar su potencial para favorecer el desarrollo del conocimiento especializado de los futuros maestros de matemáticas.

¹⁰ Capacidad de los profesores de percibir, interpretar y responder de manera profesional a los acontecimientos que ocurren en el aula, especialmente a las producciones, razonamientos y dificultades de los estudiantes.

2.3. MTSK como marco organizativo de la tarea formativa

Disponer de un marco analítico sólido resulta esencial para orientar la reflexión sobre la práctica docente, mantener el foco en los aspectos relevantes de la lección observada y evitar juicios de valor no fundamentados (Karsenty y Arcavi, 2017). En este contexto, el modelo MTSK se consolida como una conceptualización teórica que orienta el tipo de conocimiento que los formadores de profesores deben promover en los futuros docentes (Kilpatrick y Spangler, 2016), al tiempo que ofrece una estructura organizada para analizar dicho conocimiento en situaciones de enseñanza.

Desde la perspectiva aquí adoptada, el análisis del conocimiento que se moviliza en el aula de primaria proporciona oportunidades para diseñar tareas de formación que contribuyan al desarrollo del conocimiento especializado del EPM (De Gamboa et al., 2015). Estas tareas, basadas en contextos reales de enseñanza y aprendizaje, actúan como detonantes para la construcción de conocimiento profesional, articulado en torno al modelo MTSK.

El modelo MTSK desempeña un papel central en esta investigación al actuar simultáneamente como marco estructurador del diseño de la tarea formativa y como modelo analítico para el estudio del conocimiento especializado que los EPM movilizan durante su resolución. Desde una perspectiva formativa, el MTSK orienta la selección y organización de los contenidos geométricos, así como la intencionalidad didáctica de cada actividad, garantizando la coherencia entre los objetivos de aprendizaje y el *conocimiento pretendido*. En el plano analítico, proporciona una estructura teórica precisa para identificar, describir e interpretar los distintos componentes del conocimiento puestos en juego por los EPM en contextos de aula de formación inicial. Esta doble función convierte al MTSK en un instrumento integrador que vincula la concepción, implementación y análisis de la tarea formativa, favoreciendo una comprensión profunda del proceso de construcción del conocimiento profesional docente.

Los resultados de diversas investigaciones (Barrera-Castarnado et al., 2023; Barrera-Castarnado y Liñán-García, 2021; Climent et al., 2024; Joglar-Prieto et al., 2022; Montes et al., 2019), que han empleado el modelo MTSK tanto en el diseño de tareas formativas para la formación de profesores como en el análisis del conocimiento que dichas tareas permiten movilizar en los EPM, evidencian la utilidad del modelo en este ámbito. En conjunto, los estudios muestran que las tareas elaboradas a partir del MTSK constituyen

una herramienta eficaz para integrar la reflexión sobre la práctica docente con el desarrollo de un conocimiento especializado, en el que se articulan de manera coherente el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido.

La estructura del modelo MTSK, en cuanto a sus dominios, subdominios y categorías, permite a los formadores de profesores anticipar los elementos de conocimiento especializado que los EPM pueden movilizar en las distintas fases de las tareas formativas (Climent et al., 2024).

2.4. Conocimiento geométrico de los EPM en relación con la definición y la clasificación en geometría

El aprendizaje de los conceptos geométricos implica establecer vínculos entre la imagen del concepto y su definición formal (Gutiérrez y Jaime, 2012). Según Tall y Vinner (1981, p.152), la imagen del concepto constituye “la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, e incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados”. La definición, por su parte, se centra en los atributos relevantes que lo determinan. La comprensión de un concepto matemático se apoya tanto en la imagen que el individuo construye del mismo como en su definición formal (Vinner y Hershkowitz, 1980). En la práctica, la definición que los EPM elaboran o utilizan se ve influida por su imagen del concepto, y no siempre coincide con la definición formal (Carreño y Climent, 2019; Fujita y Jones, 2007) lo que puede generar interpretaciones imprecisas del concepto (Vinner, 1991).

El desarrollo del conocimiento geométrico se apoya en diversos registros de representación (Duval, 2006), a través de los cuales los sujetos construyen y transforman su imagen del concepto (Ortega y Pecharromán, 2015). Comprender y analizar los atributos de las figuras, distinguiendo entre los relevantes y los irrelevantes, requiere la coordinación entre la imagen y la definición del concepto (Fujita y Jones, 2007). Esta interacción permite construir una comprensión estructural de la geometría, esencial para la enseñanza. Haj-Yahya (2025) considera que la capacidad del profesor para analizar con precisión los elementos críticos de una definición geométrica es clave para interpretar adecuadamente situaciones matemáticas.

Las definiciones pueden ser descriptivas (basadas en propiedades identificadas previamente), o constructivas (resultado de modificar definiciones existentes) (De Villiers, 2004). Además, un concepto puede tener diversas definiciones equivalentes entre

sí (Zaslavsky y Shir, 2005). De todas ellas, la mínima es la que contiene los atributos necesarios y suficientes, a partir de los cuales se pueden deducir los demás (Van Dormolen y Zaslavsky, 2003). Según Haj-Yahya (2025), comprender la estructura y función de las distintas clases de definiciones es esencial para el desarrollo del razonamiento y la justificación matemática.

En este contexto, se ha observado que los EPM suelen construir definiciones descriptivas o particionales, sin analizar los atributos esenciales del concepto (Carreño y Climent, 2019). Estas definiciones se apoyan frecuentemente en imágenes incompletas o erróneas, derivadas de ejemplos prototípicos (Clements y Battista, 1992; Turégano, 2006), como polígonos convexos o figuras situadas espacialmente con al menos un lado horizontal. Este predominio de prototipos restringe la comprensión general del concepto geométrico y dificulta el reconocimiento de ejemplos no prototípicos (Fujita, 2012).

Los EPM tienden a mostrar dificultades tanto en la identificación y análisis de propiedades geométricas como en el uso adecuado de definiciones (Barrera-Castarnado et al., 2013; González-Regaña et al., 2021; Liñán-García y Contreras, 2013). Estas dificultades se relacionan tanto con carencias conceptuales previas como con la influencia de materiales didácticos, especialmente los libros de texto (López et al., 2015), que ofrecen ejemplos poco variados y con distractores visuales (Barrantes y Zapata, 2008). Así, los EPM construyen imágenes conceptuales parciales o distorsionadas, o confunden propiedades particulares con propiedades generales, como considerar que una diagonal no puede estar “fuera” del polígono al que pertenece porque habitualmente las ha considerado en polígonos convexos.

Diversos estudios (Climent et al., 2016; Montes Navarro et al., 2022; Moreno Martínez y Climent, 2021) amplían esta comprensión al analizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en aulas de formación inicial de maestros. Estos trabajos muestran que los EPM tienden a confundir la definición de los conceptos con su clasificación, concibiendo las tareas de aula como actividades de identificación o agrupamiento de figuras, y no como procesos de definición del concepto. Además, movilizan escaso conocimiento formal sobre los atributos relevantes de los conceptos geométricos, aunque sí demuestran una capacidad para reconocer las dificultades de aprendizaje de los alumnos.

El trabajo de Winicki-Landman (2019) muestra que los EPM rara vez reflexionan sobre la naturaleza y los roles de las definiciones matemáticas, pese a que estas constituyen,

junto con axiomas y teoremas, los elementos estructurales de las teorías matemáticas. La autora destaca la importancia de distinguir entre “enseñar definiciones” y “enseñar a definir”, promoviendo actividades donde los estudiantes construyan, comparen y evalúen definiciones, identifiquen atributos relevantes e irrelevantes, y comprendan la arbitrariedad, jerarquía y minimalidad que intervienen en la formulación de una definición matemática.

En la misma línea, Climent et al. (2024) destacan que el desarrollo del conocimiento especializado del profesor exige diseñar tareas que promuevan prácticas matemáticas fundamentales, como es la de definir, y que permitan a los EPM analizar cómo se vinculan las propiedades críticas de los conceptos con los criterios de clasificación. Este enfoque refuerza la necesidad de incorporar en la formación inicial actividades que articulen la relación entre imagen y definición, y que favorezcan un uso más consciente y fundamentado de las definiciones en geometría.

En cuanto a la clasificación de figuras geométricas, se reconoce que constituye un proceso fundamental en el desarrollo del pensamiento geométrico y en la construcción de relaciones jerárquicas entre conceptos (Fujita y Jones, 2006). Clasificar implica identificar y comparar atributos, distinguir los relevantes de los no críticos y establecer relaciones de inclusión o exclusión entre figuras. No obstante, los EPM suelen basar sus clasificaciones en rasgos perceptuales o prototípicos, como la orientación o la simetría, más que en propiedades matemáticas esenciales (Clements y Battista, 1992; Gutiérrez, 1992). Por ejemplo, identifican sin dificultad un cuadrado cuando se representa con dos lados en posición horizontal, pero pueden dudar si aparece girado 45° respecto a la horizontal. Es decir, tienden a emplear criterios inconsistentes, alternando entre aspectos visuales y formales sin una jerarquización clara (Hernández-García et al., 2018; Sáenz-Ludlow y Walgamuth, 1998).

Esta situación evidencia una comprensión particional de las categorías geométricas (basadas en diferencias exclusivas) en lugar de una jerárquica (basada en relaciones de inclusión) (Fujita y Jones, 2007). Por ejemplo, muchos EPM consideran que un cuadrado no es un rectángulo, debido a la fuerza de su imagen prototípica (Fujita, 2012). Además, el lenguaje cotidiano refuerza estas dificultades: los nombres de las figuras se interpretan como etiquetas exclusivas y no como categorías inclusivas (Gómez-Torres y Rico, 2016).

En síntesis, el conocimiento geométrico de los EPM respecto a la definición y clasificación se caracteriza por un predominio del pensamiento visual sobre el conceptual,

una débil comprensión de las propiedades críticas de las figuras y una tendencia a la fragmentación de los conceptos geométricos. Superar estas dificultades requiere propuestas formativas que promuevan la reflexión sobre las propias concepciones, el uso de ejemplos y no ejemplos, y la exploración de múltiples representaciones (Jones, 2020; Nogueira et al., 2022). En este sentido, promover el paso de una clasificación perceptiva y particional hacia una comprensión basada en los atributos y relaciones de las figuras se considera clave en la formación inicial del profesorado que enseña matemáticas.

En el área de Educación Matemática las investigaciones de diseño más frecuentes son los experimentos de enseñanza (Molina et al, 2011). Estos son estudios a nivel de aula que consisten en una secuencia de episodios de enseñanza en los que participan un investigador-docente, alumnos y un investigador-observador.

Molina (2021, p.91)

3. Metodología

El capítulo 3 lo organizamos en torno a la descripción del enfoque metodológico adoptado y los procedimientos desarrollados a lo largo del estudio. En primer lugar, retomamos y enunciamos de manera formal el problema y los objetivos de investigación que orientan el trabajo. A continuación, explicitamos el paradigma interpretativo desde el que se aborda la investigación y justificamos el experimento de enseñanza como diseño de investigación. Finalmente, se incluye la tarea formativa diseñada para su implementación en el primer ciclo, junto con los anexos que se facilitaron a los EPM y un documento de orientaciones destinado al formador. Dadas las características del estudio, a partir de este momento hablaremos de EPM en lugar de profesorado de matemáticas, en general, como hemos venido haciendo hasta ahora.

3.1. Problema y objetivos de investigación

En las aulas de formación inicial de maestros, en ocasiones, los estudiantes se preguntan por qué necesitan estudiar un determinado contenido matemático para su futuro profesional. Los EPM se forman como maestros generalistas que enseñarán asignaturas de distintas áreas del currículo, entre ellas, matemáticas. Estos estudiantes, que han pasado por las aulas de Primaria en el rol de alumnos, deben ir asumiendo el papel de profesor haciéndose conscientes del conocimiento especializado que necesitan para ejercer con éxito su labor profesional. Nuestro interés se centra específicamente en este proceso cuando se trata de la enseñanza de las matemáticas. Es decir, nuestra función como formadores de didáctica de la matemática en Primaria es procurar que nuestros estudiantes desarrollen dicho conocimiento especializado.

A partir de aquí, nos cuestionamos cómo podemos diseñar tareas formativas que favorezcan la movilización de conocimiento especializado en el aula de formación inicial, y de qué manera la información derivada de la observación de clases reales puede transformarse en un caso que funcione como recurso para dicho diseño.

Conviene recordar ahora la pregunta de investigación, que orienta el desarrollo de este trabajo: ¿Qué conocimiento especializado moviliza un grupo de EPM de Educación Primaria al resolver una tarea formativa sobre la definición y clasificación de polígonos, diseñada *ad hoc* a partir de la práctica real de un aula de primaria?

Como se señaló en el apartado de antecedentes del capítulo 1, una parte importante de las investigaciones centradas en el diseño de tareas formativas a partir de situaciones reales de aula se han desarrollado mediante el visionado de grabaciones de clases de Educación Primaria. Este recurso ha demostrado ser valioso para aproximar a los futuros docentes a la complejidad de la práctica profesional.

En este trabajo, como alternativa al uso de vídeos de clases de Primaria, proponemos trasladar el aula de Primaria al contexto de la formación inicial de maestros mediante el uso de casos diseñados a partir de transcripciones de clases reales significativas. Consideramos que este formato permite incorporar información relacionada con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que, aunque vinculada con lo ocurrido en el aula, no aparezca en la observación de manera explícita. Basándonos en nuestra sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994) y el conocimiento evocado al investigador por las oportunidades (Liñán-García et al., 2021), se complementa el discurso original con algún fragmento simulado de aula. De esta forma, se enriquece la situación original, favoreciendo la movilización de elementos de conocimiento especializado que no se hacen explícitos en la clase observada.

Este enfoque posibilita la creación de contextos de aprendizaje intencionalmente diseñados, en los que los EPM reflexionan sobre casos que reproducen situaciones reales de aula (Markovits y Smith, 2008). Dichas tareas favorecen el desarrollo de la competencia *professional noticing* o mirada profesional hacia situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Fernández, Llinares et al., 2018; Jacobs et al., 2010), entendida no solo como la capacidad de interpretar un evento, sino también de proponer alternativas a la decisión del profesor, permitiendo además la integración del conocimiento matemático con el conocimiento didáctico del contenido (Santagata y Guarino, 2011).

A partir de lo anterior, nos planteamos los siguientes objetivos generales de investigación:

- Diseñar, implementar y evaluar una tarea formativa que, partiendo de la observación de la práctica real, promueva la construcción de conocimiento especializado en torno a la definición y clasificación de polígonos.

- Comprender el conocimiento especializado que moviliza un grupo de EPM en un aula de formación inicial al resolver una tarea formativa sobre definición y clasificación de polígonos, basada en la práctica real de aula y diseñada específicamente para tal fin.

De estos objetivos generales se derivan los siguientes objetivos específicos:

- Identificar el conocimiento especializado que movilizan los EPM del Grado en Educación Primaria al resolver una tarea formativa sobre definición y clasificación de polígonos, fundamentada en la práctica real de aula.
- Diseñar y validar, desde la investigación, una tarea formativa para la formación inicial de maestros de Primaria que movilice su conocimiento especializado en relación con el contenido particular de los polígonos.

3.2. Diseño de la investigación

Para dar respuesta a los objetivos de investigación, nos posicionamos en un paradigma interpretativo (Bassey, 1995), coherente con el propósito de identificar el conocimiento especializado movilizado por los EPM al resolver una tarea formativa, diseñada *ad hoc*, en contextos auténticos de formación inicial.

El diseño de esta investigación consiste en un experimento de enseñanza (Molina, 2021; Molina et al., 2011), situado en el ámbito de las investigaciones de diseño (*design research*; Cobb et al., 2003; Cobb y Gravemeijer, 2008; Steffe y Thompson, 2000). El objetivo fundamental de este tipo de diseño de investigación es comprender y mejorar la realidad educativa considerando contextos reales de enseñanza-aprendizaje en toda su complejidad, a través del desarrollo y análisis de un diseño instruccional específico (Molina et al., 2011).

La investigación se realiza en ambientes de aprendizaje previamente diseñados, y los análisis continuados, junto al análisis retrospectivo final, permiten la mejora del diseño (Cobb et al., 2003; DBRC, 2003). El foco está tanto en la creación de diseños potentes para el aprendizaje, como en comprender los fundamentos de su funcionamiento y explorar su posible adaptación a otros contextos (Cobb y Gravemeijer, 2008; Cobb et al., 2003).

Los experimentos de enseñanza, en general, son investigaciones a nivel de aula que se basan en una secuencia de episodios de enseñanza. Además de considerar dicha secuencia como un producto a validar o una herramienta para la mejora de enseñanza, como en otras investigaciones de diseño, en los experimentos de enseñanza se busca, además, explorar y comprender los procesos de construcción de conocimiento que tienen lugar durante su desarrollo, previamente planificado.

El experimento de enseñanza es un diseño de investigación especialmente adecuado para nuestro propósito, pues pretendemos comprender y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje en contextos reales, a través del diseño, implementación y validación de tareas formativas (Kelly, 2006; McKenney y Reeves, 2012). En nuestro trabajo, las tareas no solo son un producto de la investigación, sino también un medio para generar conocimiento teórico y práctico sobre el aprendizaje y la formación docente. Este diseño de investigación se ajusta al primer objetivo al posibilitar el diseño, aplicación y evaluación de tareas, y al segundo, al facilitar la comprensión del conocimiento especializado que movilizan los futuros maestros (McKenney y Reeves, 2019; Plomp y Nieveen, 2013).

Las características del experimento de enseñanza desarrollado en este estudio se sintetizan en la Tabla 3.1, elaborada a partir de los criterios propuestos por Molina (2021).

Tabla 3.1
Características del experimento de enseñanza

Característica	Descripción breve
<i>Intervencionista / Transformativo</i>	Busca comprender el conocimiento movilizado por los EPM al resolver la tarea diseñada. Se desarrolla en aulas reales.
<i>Adaptativo</i>	El análisis de cada implementación permite ajustar el diseño a necesidades de estudiantes, formador y proceso investigativo.
<i>Multivariable</i>	Considera diversas variables: grupos de EPM, tareas, tiempo disponible
<i>Multinivel</i>	Estudia e interviene en distintos niveles de la realidad educativa: los EPM movilizan conocimiento, el equipo investigador desarrolla conocimiento sobre cómo lo hacen los EPM y sobre el proceso de desarrollo profesional del EPM y del formador.
<i>Orientado por la teoría y hacia la práctica</i>	La tarea se diseña considerando un marco teórico (MTSK), la experiencia docente y resultados previos de investigación, buscando impartir práctico en la formación inicial de maestros.
<i>Generador</i>	Produce conocimiento, orientaciones de diseño, tareas replicables y nuevas preguntas de investigación

<i>Cíclico</i>	El proceso sigue ciclos iterativos de implementación, análisis y rediseño. El estudio incluye un macrociclo y dos microciclos ¹¹ .

Son muchas las investigaciones en Educación Matemática, tanto a nivel nacional (Bernabeu et al., 2019; Cañadas y Molina, 2016; Castro et al., 2017; Llinares, 2014; Montes, Moreno et al., 2021; Molina et al., 2011; Morales-Merino et al., 2018) como a nivel internacional (Amador, I. M., 2020; Hiebert et al., 2003) que optan por este diseño con el que se responde a inquietudes de profesores-investigadores en distintos niveles educativos y con distintos tópicos. Tanto en nuestro trabajo como en el de Montes, Pascual-Martín et al. (2021), se trabaja con grupos naturales de EPM. Se trata de experimentos de enseñanza centrados en el conocimiento profesional de los maestros en formación.

3.2.1. El experimento de enseñanza desarrollado en este trabajo

El experimento de enseñanza desarrollado en este trabajo comprende un macrociclo, entendido como una iteración completa del proceso de diseño, implementación y análisis de la intervención educativa, cuyos resultados permiten refinar tanto el diseño como la comprensión teórica del fenómeno que se propone (Molina et al., 2011). La Figura 3.1 representa la estructura general de un macrociclo.

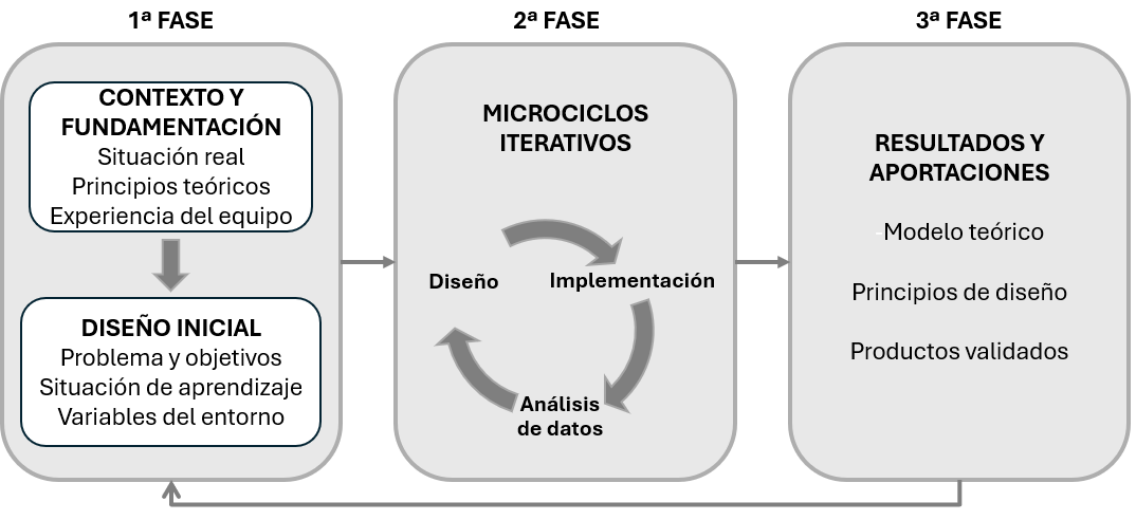


Figura 3.1 Estructura general del macrociclo (basada en Molina, 2021)

En la primera fase, partiendo de nuestra sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994), de la experiencia previa del equipo investigador y de los resultados de Liñán-García (2017),

11

definimos el problema de investigación con relación a una situación de enseñanza-aprendizaje concreta. En este trabajo, como formadores de maestros e investigadores en Educación Matemática, nos propusimos vincular la realidad del aula de Educación Primaria con la formación inicial de maestros a través de la investigación. A partir de la revisión de antecedentes y de nuestra propia experiencia profesional, definimos el problema y los objetivos que guían este trabajo, ya expuestos en este capítulo. Así, propusimos el diseño, implementación y evaluación de una tarea formativa que, partiendo de la observación real de un aula, promoviera la construcción de conocimiento especializado.

En la segunda fase se desarrollan los microciclos de actuación de diseño, implementación de la tarea y análisis de datos obtenidos (Collins et al., 2004; Molina, 2021; Swan, 2020). En nuestro trabajo llevamos a cabo dos microciclos, implementados en dos cursos académicos consecutivos. En cada uno de ellos recogimos y analizamos información sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, lo que nos permitió tomar decisiones sobre aspectos prácticos, identificando qué modificaciones realizar en la tarea, y al mismo tiempo, avanzar en la comprensión del conocimiento puesto en juego por los EPM al resolverla.

En la Figura 3.2 se esquematiza el proceso de investigación seguido en cada microciclo de investigación en tres fases: diseño y planificación de la instrucción, experimentación y análisis retrospectivo (Gravemeijer, 2004; Penalva et al. 2009; Simon, 2000). El énfasis se centra en el análisis del proceso de construcción del conocimiento de los estudiantes en ciclos sucesivos de experimentos de enseñanza. De esta forma se refina la tarea para la implementación del siguiente microciclo.

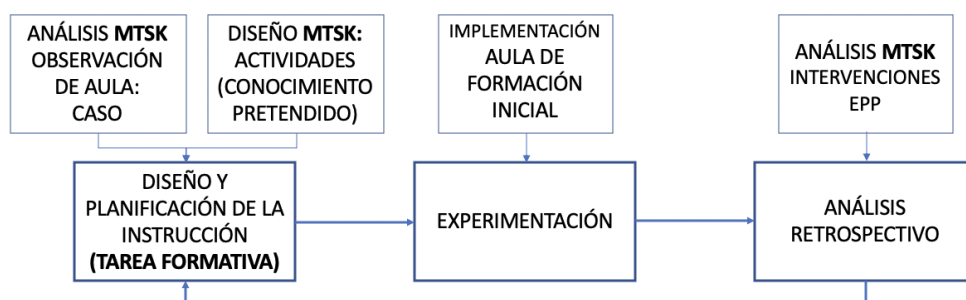


Figura 3.2 Esquema de un microciclo del experimento de enseñanza (elaboración propia)

En la tercera fase, una vez recogida toda la información, realizamos el análisis retrospectivo orientado a dar respuesta a las preguntas de investigación relativas a la caracterización y comprensión del conocimiento que movilizan los EPM en el proceso de enseñanza-aprendizaje diseñado. Este análisis también permite obtener resultados vinculados con el diseño instruccional y, como producto de la investigación, una tarea formativa, validada desde la investigación (Cobb, 2000) centrada en la definición y clasificación de polígonos.

El desarrollo del experimento de enseñanza implica la participación de, al menos, un investigador-docente, uno o más investigadores-observadores y un grupo de alumnos (Molina y Castro, 2021; Stepffe y Thompson, 2000; Ventura et al., 2021). En el trabajo que presentamos, el experimento de enseñanza se desarrolla en aulas de formación inicial de profesorado, siendo los participantes en el estudio los EPM de dichas aulas. El equipo de investigación está integrado por cuatro miembros: los dos directores del trabajo, la formadora responsable de implementar la tarea y el autor de esta tesis.

La formadora es licenciada en Matemáticas y doctora en Didáctica de las Matemáticas, con un marcado interés en el desarrollo profesional del profesorado que enseña matemáticas. Es autora de la tesis precursora de este trabajo, en la cual realizó la observación de un aula de 5.º de Educación Primaria durante la enseñanza de la geometría plana, así como el análisis de los vídeos obtenidos. Cuenta con amplia experiencia como formadora de docentes, acumulada a lo largo de varios años de trabajo en el ámbito de la educación matemática.

El diseño de la tarea formativa fue elaborado por el autor, con la colaboración del equipo de investigación. La implementación estuvo a cargo de la formadora, mientras que la observación de dicha implementación fue realizada por el autor, quien también llevó a cabo el análisis de la información, con la participación y revisión del equipo.

La implementación de la tarea se llevó a cabo con EPM del Grado en Educación Primaria, en el Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola-CEU, adscrito a la Universidad de Sevilla. La elección de este centro se produce de manera natural, ya que la investigadora que asume el papel de formadora en el experimento de enseñanza imparte docencia en él. El plan de estudios de dicho título incluye el módulo *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, integrado por dos asignaturas anuales *Matemáticas*

Específicas para Maestros y Didáctica de las Matemáticas para Maestros, ambas de 9 créditos ECTS. La primera se orienta al conocimiento matemático (MK) y la segunda al conocimiento didáctico del contenido (PCK). Según el plan de estudios, para cursar *Didáctica de las Matemáticas para Maestros* es necesario haber superado previamente *Matemáticas Específicas para Maestros*.

En este contexto, la tarea formativa sobre la definición y clasificación de polígonos se puso en práctica durante dos cursos académicos consecutivos (2017-2018 y 2018-2019), como parte de los contenidos del bloque *Sentido Geométrico como objeto de enseñanza y aprendizaje* de la asignatura *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*, impartida en segundo curso. Ambos grupos presentan características equivalentes en cuanto a su nivel académico, perfil de formación y condiciones del contexto del aula.

De acuerdo con el programa de la asignatura, la tarea se desarrolló en el segundo cuatrimestre, periodo en el que se aborda el bloque referido dedicado, según el proyecto docente, al estudio de conceptos fundamentales, procesos y procedimientos geométricos. La tarea se implementó en grupos de EPM cuya formadora es miembro del equipo de investigación. En el primer y segundo ciclo, los grupos estaban formados por 18 y 20 EPM, respectivamente.

Previo a la implementación de la tarea en el aula se informó a los EPM del cambio en la metodología habitual que se venía siguiendo. Hasta ese momento las clases habían sido teórico-prácticas con exposiciones del profesor o de alumnos y resolución de actividades concretas por parte de los estudiantes, de manera individual o en grupo. En ningún caso se habían analizado sesiones completas de clases reales de aula de primaria. Se les indicó que formaba parte de un trabajo de investigación, y se les pidió permiso para poder grabar cada una de las sesiones destinadas a la resolución de las tareas formativas, advirtiéndoles de que las grabaciones solo se utilizarían con fines científicos. Asimismo, se informó a la dirección académica del centro y se obtuvo el permiso para llevar a cabo las grabaciones necesarias.

Durante las sesiones dedicadas a la resolución de la tarea formativa, el investigador asumió el rol de observador no participante, encargándose de la grabación en vídeo de la sesión y de la toma de notas de campo. Aunque en un primer momento la presencia del observador, la cámara de vídeo y la grabadora de audio generó cierta curiosidad entre los

EPM, con el transcurso de las sesiones se adaptaron a la situación, asumiéndola como parte habitual del desarrollo de las clases.

La duración de cada microciclo es de dos sesiones de clase por grupo en cada microciclo, cada una de ellas de cien minutos.

Después de cada microciclo se realiza un análisis de los datos para refinar la tarea antes de la siguiente implementación. El análisis se basa en la transcripción de las videgrabaciones de las sesiones en las que se ha implementado la tarea. En una primera fase, examinamos los resultados de cada microciclo atendiendo al conocimiento movilizado durante la lectura del fragmento del caso o la resolución de cada actividad. Posteriormente, la información se reorganiza y se lleva a cabo un análisis integral considerando el conocimiento movilizado según las distintas categorías del MTSK.

La implementación de la tarea diseñada en aulas de formación de maestros nos permite dar respuesta a cuestiones como: ¿qué conocimiento especializado movilizan los EPM en el aula de formación inicial al resolver la tarea formativa?, ¿cómo es el conocimiento especializado en geometría movilizado por los EPM? El análisis de sesiones de clase en aulas de formación inicial, en las que se implementó la tarea formativa diseñada, nos permite acceder al conocimiento especializado movilizado en el aula.

3.3. Métodos usados en la recogida de información

En este trabajo concebimos el término *método* referido a las técnicas utilizadas en la recogida y análisis de los datos (Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011; Muñoz-Catalán, 2021; Muñoz-Catalán y Monteiro, 2016). Una vez diseñada la tarea formativa para implementar en aulas de formación inicial de maestros nos planteamos qué métodos y, en consecuencia, qué instrumentos de recogida de información usar para poder dar respuesta a nuestros objetivos de investigación.

El uso de diversas técnicas de recogida de información (como la observación, la tarea formativa y las producciones escritas) responde a la concepción de triangulación planteada por Denzin y Lincoln (2000), quienes la entienden como el uso complementario de distintos métodos para analizar un mismo fenómeno desde diversas perspectivas. De acuerdo con Muñoz-Catalán (2021), este procedimiento se corresponde con una

triangulación metodológica. Asimismo, la diversidad de participantes y las situaciones de implementación aporta una riqueza adicional al estudio, al permitir contrastar y profundizar la comprensión de los procesos analizados.

También se ha llevado a cabo una triangulación de expertos, ya que la información recogida fue revisada de manera cruzada por los miembros del equipo de investigación. Este procedimiento, que según Flick (2007) contribuye a reducir los sesgos individuales, asegura una lectura más objetiva y consensuada de los datos, fortaleciendo la credibilidad y la fiabilidad de los resultados (Lincoln y Guba, 1985).

3.3.1. La tarea formativa como instrumento para la recogida de información

La tarea formativa, además de constituir una propuesta formativa diseñada para favorecer el desarrollo de conocimiento de los EPM, se concibe también como un instrumento de recogida de información. La implementación de la tarea permite acceder a los conocimientos y estrategias que los EPM ponen en juego al abordar la resolución de la tarea propuesta, ofreciendo información sobre su aprendizaje.

En coherencia con el enfoque que orienta esta investigación, las tareas formativas proporcionan un contexto auténtico que permite analizar la relación entre los conocimientos previos y los que pretendemos movilizar. De este modo, su desarrollo no solo cumple una función pedagógica, sino también investigadora, ya que las producciones, verbalizaciones y actuaciones de los EPM durante la resolución de las tareas ofrecen datos valiosos para la interpretación de los procesos de aprendizaje implicados.

3.3.1.1. Proceso de elaboración de la tarea

Para el diseño inicial de la tarea hemos tenido en cuenta las observaciones de aula y los resultados de investigación de Liñán-García (2017), quien mostró su comprensión del conocimiento especializado de una maestra (Jimena) de 5º de Educación Primaria cuando enseñaba geometría (ver Anexo 1). La autora identifica episodios que considera especialmente potentes, ya sea por el conocimiento que la maestra moviliza en su desarrollo o por *el conocimiento evocado al investigador* (Liñán-García et al., 2021), que podrían utilizarse como recurso en la formación inicial de maestros de Primaria. A partir

de ellos se elabora un caso que ejemplifica la práctica educativa (Markovit y Smith, 2008), tomando como referencia la clase de Jimena, centrada en contenidos de Geometría. La tarea formativa queda definida al incorporar actividades que promueven la reflexión sobre dicho caso.

Para la elección del tema se han tenido en cuenta los resultados de diversas investigaciones (Barrera-Castarnado et al., 2016; Liñán-García et al., 2017, 2019) que han evidenciado debilidades en el conocimiento especializado de geometría, tanto en EPM como en profesorado en ejercicio, lo que pone de manifiesto la necesidad de fortalecer la formación docente en este ámbito. Además, el Real Decreto 157/2022 del Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022), dentro del área de Matemáticas, incorpora en el bloque *Formas geométricas, medida y orientación espacial* la identificación, descripción, clasificación y construcción de figuras planas, entre ellas los polígonos, considerados un elemento esencial para el desarrollo del pensamiento geométrico en esta etapa educativa. Por este motivo, en el presente estudio se han seleccionado los episodios en los que se trabajaban contenidos relacionados con el polígono, al tratarse de un concepto central en el currículo y de especial relevancia para el desarrollo del conocimiento geométrico de los futuros docentes.

Así, el *foco* (Grevholm et al., 2009) para el diseño de un conjunto de tareas es el polígono, por su vinculación con múltiples contenidos geométricos. La *función* es que los EPM aprendan conocimiento especializado como maestro que enseña matemáticas.

En la selección de los temas tuvimos en cuenta tanto las clases observadas por Liñán-García (2017) como nuestra experiencia como formadores de profesores de Educación Primaria. Los temas elegidos son:

- Definición y clasificación de polígonos
- Ángulo y amplitud
- Suma de los ángulos de un triángulo (Suma de los ángulos de un polígono)
- Diagonales de un polígono
- Relaciones entre área y perímetro

Aunque se diseñaron e implementaron cinco tareas en total, en este trabajo nos centraremos en la primera, referida a la *definición y clasificación de polígonos* porque es

la que introduce los conceptos fundamentales sobre los que se apoyan las tareas posteriores. Permite caracterizar los conocimientos iniciales que los EPM movilizan y reorganizan al resolver la tarea. Además, nos da información sobre la adecuación del diseño y de los procesos de comprensión que se activan desde el comienzo del experimento de enseñanza.

El diseño de la tarea comienza con la elección de fragmentos de videograbaciones de clases de quinto de Educación Primaria, junto con el análisis de dichos fragmentos realizado en el trabajo de Liñán-García (2017), que se consideraron especialmente potentes en cuanto al conocimiento especializado de la maestra identificado por la autora. La transcripción literal de estos episodios constituye la base para construir el *caso*. Sobre ella añadimos diálogos simulados, como ya hemos descrito, elaborados a partir de nuestra *sensibilidad teórica* (Strauss y Corbin, 1994) y el *conocimiento especializado evocado*¹² *al investigador por las oportunidades*¹³ que se generan en el aula (Liñán-García, 2017; Liñán-García et al., 2021; Liñán-García et al., 2019; Montes et al., 2019; Muñoz-Catalán et al., 2022). El caso resultante permitirá reflexionar, en un aula de formación inicial, sobre el conocimiento especializado que resulta útil para ejercer como maestro que enseña matemáticas.

La tarea queda definida al incorporar al caso actividades fundamentadas en distintos subdominios del modelo MTSK sobre los que se pretende reflexionar en cada fragmento (*conocimiento pretendido*). En este sentido, la *forma* de la tarea, según lo propuesto por Grevholm et al. (2009), se configura a partir de la unión del caso con las actividades diseñadas, las cuales se insertan dentro de él, dividiendo el caso en distintos fragmentos. El proceso seguido para el diseño de la tarea se esquematiza en la Figura 3.3. A cada tarea formativa así generada se le acompaña de un documento con orientaciones para el

¹² Se considera conocimiento especializado evocado al investigador por las oportunidades como aquel conocimiento especializado del profesor que el investigador, partiendo de dichas oportunidades, desde su sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994) y validado por la triangulación de expertos (Flick, 2007), considera que sustentaría una gestión alternativa de la situación.

¹³ Situaciones o momentos que se generan en el aula como resultado de las acciones de la profesora -en situación expositiva o de interacción con los alumnos-, de las acciones de los alumnos per se (teniendo en cuenta, en ambos casos, la comunicación gestual), y del uso de los artefactos disponibles en el aula, incluyendo los diferentes registros de representación (considerando aquí el icónico-figural para los materiales concretos) y su tratamiento, del libro de texto o de otras lecturas llevadas al aula.

formador y recursos para la implementación (polígonos recortados en papel, construcciones en software de geometría dinámica, etc.).

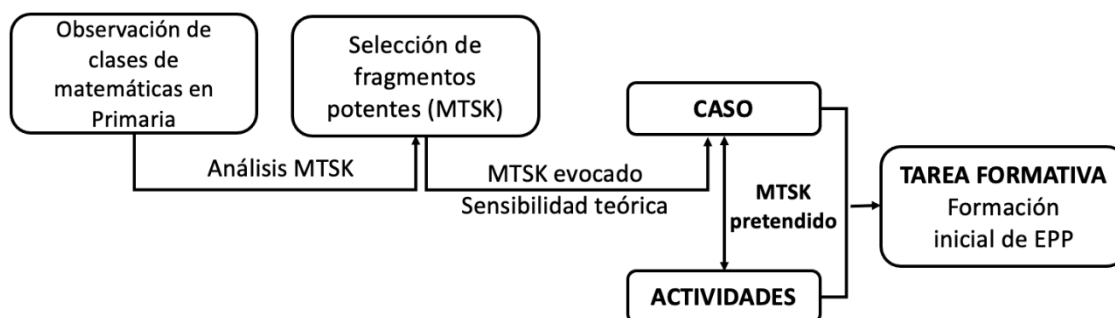


Figura 3.3 Esquema del proceso seguido en el diseño de una tarea formativa

3.3.1.2. Tarea formativa sobre definición y clasificación de polígonos

En este apartado describimos la tarea formativa sobre definición y clasificación de polígonos que diseñamos para su implementación en el primer microciclo. En los anexos incluimos, por un lado, la tarea en el formato en que fue entregada a los EPM (Anexo 2) y, por otro, el documento proporcionado a la formadora con algunas consideraciones para su puesta en práctica (Anexo 3).

El caso sobre el que se fundamenta la tarea se construye a partir de la observación de las clases en las que se trata la definición y clasificación de polígonos. Se divide en fragmentos según el objetivo de la sesión. En el primero de ellos, la profesora plantea preguntas con el propósito de identificar los conocimientos previos de sus alumnos sobre la definición de polígono y sus elementos. En los ejemplos que aporta el alumnado aparece únicamente polígonos prototípicos. Uno de ellos incluye al círculo como ejemplo de polígono. A partir de esta sesión, decidimos introducir una adaptación que permitiera ampliar la variedad de figuras consideradas y provocar la aparición de ejemplos que no fueran polígonos. Por ello, en el primer fragmento de la versión del caso utilizada en la tarea modificamos la actividad propuesta inicialmente por la maestra: además de pedir que representen ejemplos de polígonos, tal como ocurría en la situación real, se solicita también que dibujen ejemplos de no polígonos. Se incorporan así figuras abiertas o con lados curvos con el propósito de generar reflexión sobre los atributos relevantes del concepto de polígono.

El siguiente fragmento se basa en la clase dedicada a la clasificación de polígonos. En la situación original, la profesora proporciona una imagen con diferentes polígonos para que los estudiantes los agrupen según el número de lados. En nuestra adaptación, incorporamos cambios en dos direcciones. Por un lado, se deja abierta la posibilidad de utilizar otros criterios de clasificación, de modo que se amplíe el análisis más allá del número de lados. Por otro, se incorpora el uso de material manipulativo con el fin de potenciar la reflexión sobre las potencialidades y limitaciones de dicho material para apoyar la comprensión de los distintos criterios de clasificación.

Por último, se aborda la clasificación de los cuadriláteros. En este caso, únicamente se incorpora la intervención de un alumno que alude a la diferencia entre los ángulos de un rombo y de un cuadrado. La intención de esta inclusión es trabajar con los EPM la clasificación en clases de equivalencia y la clasificación jerárquica dentro del conjunto de los cuadriláteros.

La actividad está dirigida a estudiantes del Grado en Maestro de Educación Primaria y su implementación tiene una duración aproximada de 4 horas.

a. Justificación de la tarea

A los EPM se les supone adquiridos unos conocimientos matemáticos acordes con las propuestas curriculares oficiales de las etapas educativas obligatorias (Liñán-García, 2012). A pesar de que los contenidos geométricos son una parte importante de dichas propuestas, es habitual que se les suela dedicar poco tiempo y se desarrollen de manera numérica relacionada con la medida de magnitudes, trabajándose de forma procedimental, a través del uso de fórmulas, desde un enfoque estático (Muñoz-Catalán *et al.*, 2013; Climent, 2011). No es habitual la construcción, reflexión y discusión de conceptos geométricos ni la búsqueda de relaciones entre ellos (Climent y Carrillo, 2002).

Como consecuencia del paso de los EPM por estas aulas de Educación Primaria como estudiantes, suelen identificar geometría con un conjunto de nombres, a veces complejos, relacionados con representaciones prototípicas y uso de expresiones para calcular medidas de magnitudes geométricas de manera indirecta (Clements y Battista, 1992; Vecino, 2003). Por ello, es frecuente que muestren dificultades al definir, clasificar, representar gráficamente objetos geométricos o realizar alguna demostración (Carreño y Climent, 2010).

La perspectiva práctica en la formación inicial del profesorado es más eficaz y mejora sus resultados (Boyd et al., 2009), y se ven fortalecidos cuando se conecta la formación con la práctica profesional (Goos, 2014). Uniendo todas estas ideas, y teniendo en cuenta que las tareas profesionales deben ser el eje vertebrador del currículo de formación de profesorado (Ball y Forzani, 2007), nos centramos en la tarea profesional de reflexión tras una sesión de clase como medio para planificar más eficazmente la siguiente. Esta reflexión es más efectiva si se apoya en un marco organizativo (Santagata y Guarino, 2011) y desde una mirada profesional (Fernández et al., 2018); en este caso, nuestro marco organizativo será MTSK (Carrillo et al., 2018).

En esta tarea se tratan dos procesos de razonamiento geométrico fundamentales: definir y clasificar (Gutiérrez y Jaime, 1998), como parte del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas. Parece evidente, en relación con el primero de ellos, que el conocimiento de un profesor de matemáticas, además de las definiciones de conceptos matemáticos, incluye las estructuras subyacentes de las definiciones y el cómo se debe definir (Zazkis y Leikin, 2008). Con relación al segundo proceso, consideramos que se deben desarrollar tanto las clasificaciones disjuntas como las categorizaciones de clases (Liñán-García, 2017).

b. Objetivos generales de la tarea

1. Desarrollar el conocimiento especializado del profesorado en formación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la definición y la clasificación de polígonos.
2. Reflexionar sobre las prácticas matemáticas de definir y clasificar en el contexto de los polígonos.
3. Identificar ejemplos, contraejemplos y no ejemplos útiles para determinar una definición del concepto de polígono.
4. Desarrollar la mirada profesional del profesorado en formación sobre la identificación del pensamiento del alumnado, la interpretación y diseño de actividades (Fernández et al., 2018).

c. Conocimientos, habilidades y/o competencias previas necesarias

Para resolver las actividades planteadas en esta tarea el profesorado en formación debe conocer previamente el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998) identificando las principales características de la forma en la que el alumnado desarrolla los principales procesos de razonamiento. Se habrá tratado ya la

postura de Canals (1997) sobre el conocimiento geométrico y las orientaciones para trabajar este contenido desde asociaciones como NCTM (2000) y el currículo oficial.

d. Recursos físicos o virtuales

- Hojas de trabajo
- Anexos 1 y 2
- Conjunto de figuras recortadas (para actividad 3)

En el Anexo 3 se incluye un documento dirigido a quienes realizan la labor de formación, el cual ofrece orientaciones específicas para apoyar la implementación de la tarea. Este material proporciona indicaciones sobre aspectos que el formador debe considerar durante el proceso y sugiere posibles preguntas que, además de las actividades planteadas en la tarea, pueden promover la reflexión del grupo. Asimismo, en el anexo **Y** se encuentra el documento completo que se facilitó a los EPM con el enunciado íntegro de la tarea.

Para organizar la información de las transcripciones que van a analizar, se les proporciona la tabla de observación (Climent, Romero-Cortés et al., 2013, Anexo II del documento entregado a los EPM con la tarea formativa). Con ella pueden focalizar su atención en aspectos sobre los que reflexionar para contestar más fácilmente a las preguntas de cada actividad.

e. Actividades que conforman la tarea

La tarea se estructura en cuatro partes: definición de polígono, resolución de la actividad por el alumnado de Primaria, clasificación de polígonos y clasificación de cuadriláteros. Cada una de ellas incorpora un fragmento del caso acompañado de un conjunto de actividades vinculadas a dicho fragmento.

e.1. Primera parte: definición de polígono

En la primera parte de la tarea trataremos aspectos relacionados con la definición de polígono y su representación gráfica. En ocasiones se conoce una definición de un concepto y aun así se cometen errores en la identificación de un representante de este entre un grupo de objetos. Esto se apoya en la diferenciación aportada por Vinner (1991, citado en Gutiérrez y Jaime, 1999) entre la definición de un concepto y la imagen de este, entendida como la representación mental que evoca el término. La formación de la imagen de un concepto se basa en la propia experiencia y en los ejemplos que se muestran.

Parafraseando a Orton (1990), citado en Barroso (2000), los estudiantes no aprenden únicamente a través de definiciones, necesitan ejemplos y contraejemplos para entender correctamente la definición de un concepto matemático.

Con esta primera parte se pretende que los EPM reflexionen sobre el proceso de definir, viendo la importancia del uso de ejemplos variados (no solo prototípicos) y contraejemplos en el desarrollo de este proceso, favoreciendo de esa forma la creación de imágenes versátiles de los conceptos. Por otra parte, trataremos los atributos que caracterizan a una buena definición de un concepto.

El posicionamiento epistemológico que hay detrás de esta propuesta didáctica se apoya en el constructivismo social, teoría que sugiere que el conocimiento científico no constituye un corpus neutro de datos independiente de las prácticas culturales y los valores, sino que se origina en el seno de la sociedad, con lo que ello conlleva. De ahí que, a nivel metodológico, no se parta de una definición concreta de polígono, sino que el formador va gestionando la clase para consensuar una definición particular, pretendiendo discutir cuáles son las características de una definición y valorando las ventajas e inconvenientes de la definición adoptada.

Actividades parte 1: Análisis de la distribución de figuras dada por los alumnos de educación primaria.

Descripción

Para contextualizar el caso, se describe una situación en la que en un aula de 5º grado de Educación Primaria el alumnado ha representado figuras, diferenciando entre las que consideran polígonos y las que consideran que son no lo son. Se pide a los EPM que analicen la distribución de las figuras representadas por parte del alumnado (Figura 3.4).

Se cuestiona sobre las propiedades que se tienen en cuenta para establecer estos agrupamientos y sobre los argumentos que los EPM consideran que habrán sido esgrimidos por el alumnado para realizar esa distribución entre polígono y no polígonos.

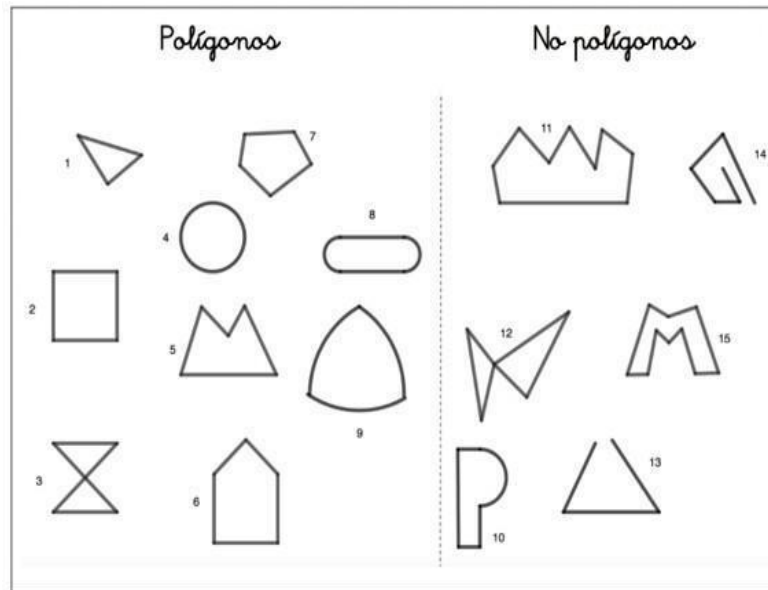


Figura 3.4 Polígonos vs no polígonos

Posteriormente se les pide que enuncien su propia definición de polígono.

En la actividad 1 se les pide que respondan a:

- 1.1. Analizad la distribución de las figuras representadas en la pizarra por parte de los escolares (Imagen 1). ¿Qué consecuencias tiene dicha distribución en relación con el concepto de polígono? Indicad las ventajas o inconvenientes de la misma.
- 1.2. ¿Cuáles consideráis que habrán sido los argumentos esgrimidos por los estudiantes para realizar esta distribución entre polígono y no polígono?
- 1.3. Enunciad una definición de polígono.

Objetivos específicos de la actividad

- Revelar la interpretación de los EPM sobre el conocimiento que tiene el alumnado que ha realizado la distribución de la figura mostrada sobre el concepto de polígono.
- Mostrar sus ideas previas sobre la definición de polígono y tomar conciencia de la imagen de polígono de los EPM.
- Reflexionar sobre la idoneidad de la definición dada por el alumnado, en cuanto a los atributos que esta debe cumplir.

e.2. Segunda parte: Resolución de la actividad por los alumnos de Primaria

En el segundo fragmento del caso se describe una secuencia en la que un grupo de estudiantes de 5º de Primaria resuelven la actividad propuesta por la maestra. Les propone al alumnado representar en la pizarra figuras que consideren polígonos, por un lado, y otras que consideren que no lo son, justificando su inclusión en uno u otro grupo. A partir de la transcripción, los EPM deben examinar cómo los alumnos ponen en juego sus ideas previas, qué argumentos utilizan, qué dificultades manifiestan y cómo la intervención de la maestra contribuye a la construcción colectiva de una definición de polígono.

Los EPM deben de identificar, interpretar y valorar los conocimientos matemáticos, de aprendizaje implicados en la situación, así como las decisiones de gestión de aula realizadas por la maestra.

Actividades parte 2: Análisis de una clase de 5º de Primaria en la que se trata la definición de polígono

En la actividad 2 nos interesa la reflexión sobre el tratamiento del concepto de polígono como objeto de enseñanza y aprendizaje.

Descripción

La actividad comienza con la lectura individual de un episodio de clase (documento para EPM), en el que se describe cómo se resuelve en el aula de primaria la actividad planteada por la maestra. El alumnado va saliendo a la pizarra para dibujar una figura identificándola como polígono o como no polígono, discutiéndose entre todo el alumnado la opción de incluirla en un grupo u otro (polígonos y no polígonos) atendiendo a las características de cada figura.

De esta manera se pone a los EPM ante una situación real de aula, intentado que asuman el papel de docente, analizando las respuestas del alumnado y la gestión que la maestra hace de la situación. Para ello se les facilitará un documento de recogida de información (Anexo II) para fijar el foco de atención en determinados aspectos de la realidad descrita, relacionados con el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas.

Partiendo de la transcripción para la actividad 2, responde a las siguientes preguntas:

- 2.1. De acuerdo con la definición que han establecido en el grupo, ¿la distribución de la Imagen 1 es correcta? ¿Esta definición coincide con la vuestra?
- 2.2. Teniendo en cuenta el Anexo 1 (Ver las hojas de trabajos correspondientes a esta actividad. Se presentan los atributos que debe verificar una definición

matemática, según Escudero et al., 2014) analizad si la definición a la que ha llegado el alumnado cumple los atributos de una definición matemática.

- 2.3. Indicad los conceptos, procesos y procedimientos implicados en la resolución de la actividad. ¿Qué argumentos utiliza el alumnado para incluir o no una figura como polígono? ¿Hay una definición única de polígono?
- 2.4. ¿Qué se espera que aprenda el alumnado de primaria con esta actividad? ¿Qué interés tiene frente a que se les hubiera dado una definición a priori?
- 2.5. ¿Qué papel juegan los ejemplos, no-ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática (resolución de la tarea)?
- 2.6. ¿Qué dificultades del alumnado identificáis en sus respuestas a la situación planteada? Posible origen de las dificultades.
- 2.7. Teniendo en cuenta las respuestas del alumnado, ¿podríamos determinar el nivel de razonamiento geométrico de cada alumna y alumno? Selecciona una intervención que te parezca especialmente significativa en este sentido
- 2.8. Considerando la gestión que realiza la maestra en la actividad ¿qué destacarías sobre su actuación?

Objetivos específicos de la actividad

- Enfrentarse a la construcción de la definición de un concepto matemático conocido, considerando las características de la definición.
- Analizar los argumentos dados por el alumnado para justificar la inclusión de una figura en el grupo de polígonos o de no polígonos.
- Reflexionar sobre las dificultades en la comprensión del concepto de polígono que podrían estar asociadas a la imagen de polígono que tiene.
- Estudiar la gestión de la clase que realiza la maestra.
- Determinar el nivel de razonamiento geométrico de cada alumna o alumno atendiendo a sus intervenciones.

e.3. Tercera parte: Clasificación de polígonos

En este tercer fragmento se presenta una situación de aula orientada al trabajo de otro de los procesos de razonamiento matemático: la clasificación en sentido amplio. La profesora propone a los estudiantes de 5.º de Primaria una actividad en la que los alumnos deberán clasificar polígonos a partir de un conjunto de figuras recortadas que les facilita.

La consigna invita a comparar las figuras, identificar características comunes y establecer criterios propios de agrupación, que posteriormente se ponen en común. La maestra guía el proceso mediante preguntas que amplían, matizan o precisan los criterios planteados por los estudiantes.

Actividades parte 3: Clasificación de polígonos

Con esta actividad seguimos poniendo a los EPM ante una situación real de aula, con la intención de que analicen las respuestas de los alumnos y la gestión que la profesora hace de la situación desde el punto de vista de un profesor.

Los alumnos de Primaria usan criterios basados en propiedades geométricas que les permitan clasificar figuras, avanzando desde criterios simples (cantidad de lados) hacia criterios más elaborados (convexidad/concavidad, regularidad, etc.). La actividad potencia el razonamiento geométrico, el lenguaje matemático y la capacidad de justificar decisiones.

Descripción

En la actividad 3, la maestra entrega a los estudiantes distintos polígonos recortados y les pide que identifiquen características comunes entre las figuras con el fin de agruparlas (Figura 3.5).

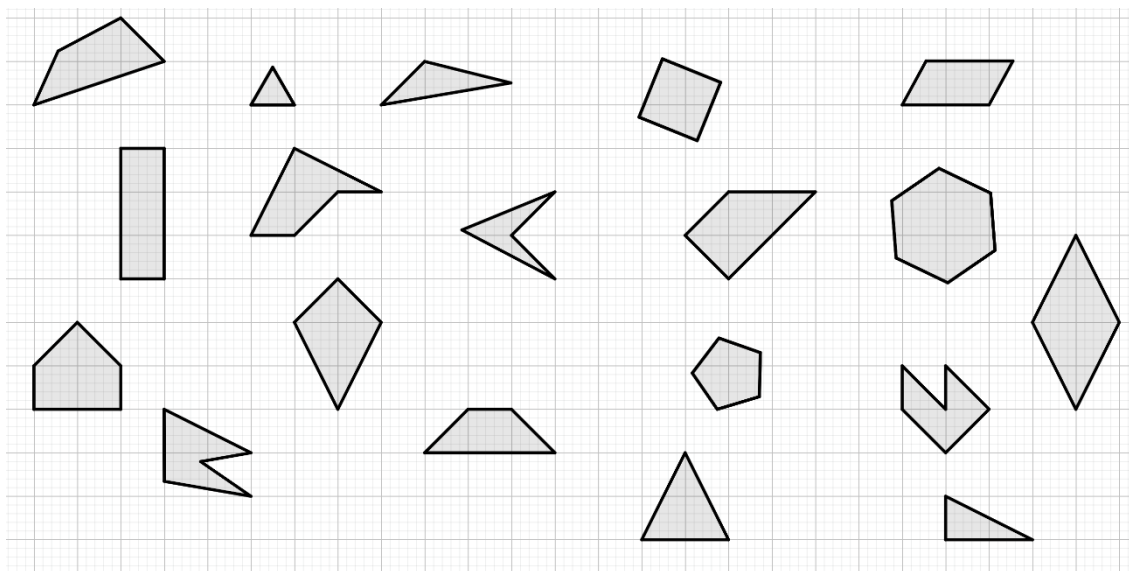


Figura 3.5 Figuras para clasificar

Aunque el alumnado de Educación Primaria se centrará en la elaboración de clasificaciones en clases de equivalencia, si la dinámica lo permite el proceso debería

avanzar, con los EPM, hacia la construcción de clasificaciones jerárquicas, entendidas como la posibilidad de incluir unas clases de objetos dentro de otras (Liñán-García, 2017).

El alumnado propone dos criterios de clasificación: el número de lados y la concavidad o convexidad del polígono. La comparación en la pizarra de las agrupaciones generadas según cada uno de estos criterios permitirá que el alumnado de Primaria comprenda que, dependiendo del criterio elegido, un mismo polígono puede pertenecer a diferentes clases.

Los enunciados correspondientes a la actividad 3 son los siguientes:

- 3.1 Pensad otros criterios que se podrían usar para agrupar los polígonos de la Ilustración 2.
- 3.2 ¿Qué aprenden los alumnos con esta actividad? ¿Qué interés tiene frente a que se les hubiera dado un agrupamiento concreto?
- 3.3. ¿Qué recursos para la enseñanza del contenido utiliza la maestra? Identifica potencialidades y limitaciones de los recursos utilizados.
- 3.4. ¿Consideras adecuada la actividad para estudiantes de quinto curso de Primaria? ¿Encaja en los estándares curriculares vigentes?

Para responder al primer enunciado, los EPM, deben pensar en otros criterios que permitan la clasificación de los polígonos que aparecen en la situación tratada. En este caso el formador intentará que surjan otros agrupamientos, por ejemplo, estableciendo la diferencia entre figuras regulares e irregulares, simétricas y no simétricas (este criterio podría generar una categorización de clases: figuras no simétricas, con al menos un eje de simetría, con al menos 2, con al menos 3, etc.) o agrupación en función de cómo sean las diagonales (perpendiculares o no).

Objetivos específicos de las actividades

- Proponer y justificar criterios distintos para clasificar polígonos, desarrollando flexibilidad y precisión en el razonamiento geométrico.
- Analizar el valor educativo de permitir que el alumnado construya sus propias clasificaciones, identificando los aprendizajes que emergen de una tarea abierta frente a una dirigida.
- Evaluar críticamente la adecuación de los recursos manipulativos y didácticos utilizados para favorecer el análisis y la clasificación de polígonos.

- Valorar la pertinencia de la actividad en relación con el nivel cognitivo de 5.º de Primaria y su alineación con los estándares curriculares correspondientes.

e.4. Cuarta parte: Clasificación de cuadriláteros

Tras trabajar con criterios generales de clasificación de polígonos, la profesora decide centrar la atención del grupo en los cuadriláteros. Su intención es profundizar en la identificación de propiedades particulares y en la utilización de criterios geométricos más precisos para organizar estas figuras. Utiliza algunas actividades del libro de texto.

Actividades parte 4: Clasificación de cuadriláteros

En el último fragmento del caso, la maestra dirige la atención de sus estudiantes hacia los cuadriláteros, con la intención de que pongan en juego los conocimientos adquiridos en el curso anterior sobre su clasificación.

Descripción

Además de trabajar las características comunes y no comunes entre los distintos cuadriláteros, con el objetivo de obtener una clasificación basada en la forma de sus lados y ángulos, la maestra propone también una actividad del libro para profundizar en estos contenidos.

21. Copia y completa esta tabla con el nombre y el dibujo del paralelogramo que corresponde en cada casilla.

	4 lados iguales	lados iguales 2 a 2
4 ángulos iguales		
ángulos iguales 2 a 2		

Figura 3.6 Actividad del libro sobre clasificación de cuadriláteros

Los EPM, en la actividad 4, deben responder a los siguientes enunciados:

- 4.1 ¿Se puede poner más de un paralelogramo en cada celda (ver actividad 21 del libro)? Justifica tu respuesta.
- 4.2 ¿Qué relación hay entre la imagen que se tiene del concepto polígono y la definición que se da?
- 4.3 ¿Qué elementos de la actividad matemática identificáis en la actividad planteada por la maestra (definir, comprobar, demostrar, etc.)?

Objetivos específicos de la actividad

- Analizar los criterios utilizados para clasificar paralelogramos y distinguir si generan una clasificación en clases de equivalencia o jerárquica, justificando las relaciones de inclusión entre ellas.
- Examinar la relación entre la definición formal de un concepto geométrico y la imagen conceptual construida por el estudiante, identificando cómo los ejemplos escolares influyen en dicha imagen.
- Reconocer e interpretar los procesos de actividad matemática presentes en la propuesta de aula (definir, comprobar, clasificar, etc.), valorando su contribución al desarrollo del razonamiento geométrico del alumnado.

f. MTSK pretendido en la propuesta de la tarea

En las dos tablas 3.2 y 3.3 presentamos el conocimiento pretendido en la propuesta de las actividades asociadas a cada una de las cuatro partes en las que se divide la tarea. La primera tabla recoge el conocimiento asociado al dominio de conocimiento matemático, mientras que la segunda se centra en el dominio de conocimiento didáctico del contenido. En ambas se muestran las categorías de distintos subdominios, los indicadores de conocimiento vinculados y su relación con el grupo de actividades en las que dicho conocimiento se pone en juego.

Tabla 3.2
Conocimiento Matemático asociado a la tarea Definición y clasificación de polígonos

		Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades			
				P.1	P.2	P.3	P.4
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KoT	Procedimientos	Clasificación de figuras según sus atributos	X		X	
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Atributos relevantes de polígono	X	X		
			Otros atributos de polígono	X		X	
	KPM	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	Distinción entre atributos relevantes y superfluos en la definición de polígono	X			
			Características de una definición matemática		X		
		Prácticas particulares del quehacer matemático	Saber seleccionar ejemplos, contraejemplos y no ejemplos de un concepto matemático		X		
			Procesos de razonamiento matemático: definir, clasificar, comprobar, demostrar.	X	X	X	X

Tabla 3.3*Conocimiento Didáctico del Contenido asociado a la tarea Definición y clasificación de polígonos*

		Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades				
				P.1	P.2	P.3	P.4	
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KFLM	Teorías de aprendizaje	Teoría de van Hiele sobre procesos de razonamiento geométrico		X			
			Imagen mental y definición conceptual de polígono		X		X	
		Fortalezas y dificultades	Obstáculos, dificultades o errores asociados a la definición de polígono.		X			
		Formas de interacción con un contenido matemático	Estrategias de definición utilizadas por el alumnado	X				
	KMT	Recursos materiales y digitales	El dibujo en papel o en pizarra de figuras planas destaca el contorno frente a la superficie, aspecto que puede repercutir en la generación de la definición		X			
			Potencialidades y debilidades del uso de ciertos recursos para la definición o clasificación de polígonos			X		
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Papel limitante que el abuso de ejemplos con ciertos valores para las propiedades irrelevantes tiene para la construcción del concepto	X	X			
			Ejemplos distractores para la construcción de la definición de polígono	X	X			
			Cuándo conviene en el aula utilizar una definición y cuándo conviene construir dicha definición		X			
			Cuándo conviene en el aula utilizar una clasificación y cuándo conviene construirla			X		
		KMLS	Resultados de aprendizaje esperados	El alumnado debe usar atributos de las figuras para definir y clasificar polígonos, explicando sus decisiones.			X	
			Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado	El alumnado de 5º de Educación Primaria debe comprender el concepto de polígono y sus elementos esenciales, y ser capaz de aplicar un procedimiento claro para identificar y clasificar polígonos según sus atributos, justificando su elección.			X	

g. Temporización

Tabla 3.4

Temporización: acciones a realizar en la implementación de la Tarea Formativa

Orden	Tiempo	Acción a realizar	Objetivo
1	5'	Presentación del caso	Contextualizar el trabajo de los EPM
2	5'	Lectura de las líneas 1-15 y visualización de la ilustración 1	Contextualizar el caso sobre definición de polígonos
3	15'	Planteamiento y resolución de la actividad 1	Hacer reflexionar a los EPM sobre aspecto del conocimiento matemático
4	15'	Puesta en común sobre la resolución de la actividad 1.	Identificar evidencias de MK. Definir. Definición-Imagen de un concepto
5	5'	Lectura de las líneas 16-113	Conocer una situación matemática de un aula de primaria sobre la que reflexionar como docentes
6	25'	Planteamiento y resolución de la actividad 2	Hacer reflexionar a los EPM sobre aspecto del conocimiento matemático y didáctico del contenido
7	20'	Puesta en común sobre la resolución de la actividad 2	Identificar evidencias de MTSK
8	5'	Lectura de las líneas 114-164	Conocer una situación matemática de un aula de primaria sobre la que reflexionar como docentes
9	15'	Planteamiento y resolución de la actividad 3	Hacer reflexionar a los EPM sobre aspecto del conocimiento matemático y didáctico del contenido
10	20'	Puesta en común sobre la resolución de la actividad 3	Identificar evidencias de MTSK
11	5'	Lectura de las líneas 167-193	Conocer una situación matemática de un aula de primaria sobre la que reflexionar como docentes
12	15	Planteamiento y resolución de la actividad 4	Hacer reflexionar a los EPM sobre aspecto del conocimiento matemático y didáctico del contenido relacionado con la clasificación de polígonos
13	20'	Puesta en común sobre la resolución de la actividad 4	Identificar evidencias de MTSK

Nota: Previsto para dos sesiones de 100 minutos (hay un margen de 30').

3.3.2. La observación de aula

La observación de aula es la técnica base en este estudio. Se grabó en vídeo de forma continua las dos sesiones de clase¹⁴ dedicadas a la resolución de la tarea en cada microciclo, desde el inicio hasta el final de cada una de ellas. Esta técnica (Bryman, 2004) permitió registrar de manera sistemática el comportamiento y la participación de los EPM, no solo durante la resolución de la tarea y los debates generados en torno a cada actividad, sino también durante la lectura de los fragmentos del caso y la resolución individual de las actividades. A lo largo de este proceso se identificó que los EPM formulaban preguntas y comentarios que favorecían la movilización de conocimiento y el fortalecimiento de la comprensión de los contenidos trabajados.

El encargado de las grabaciones es el autor de este trabajo. Para la grabación, la cámara se ubicó en una de las esquinas delanteras del aula, de manera que permitiera obtener una visión completa del grupo de EPM y del formador. Cuando en la pizarra se representaba alguna producción relevante de alguno de ellos, como observador movía la cámara para registrar dicha información y/o tomaba fotografías de la pizarra, las cuales las incorporaba posteriormente a las transcripciones.

Con el fin de garantizar que todas las intervenciones y comentarios realizados en el aula quedaran registrados con precisión, además de las videograbaciones se empleó una grabadora de audio como apoyo. Esta grabación complementaria permitió asegurar la disponibilidad de la información verbal en los casos en que la calidad del audio en el vídeo no era suficiente.

Durante la observación anotaba información referida a aquellas situaciones que consideraba especialmente significativas para su posterior revisión durante el análisis de las videograbaciones o con intención de aclarar alguna circunstancia acontecida en el aula, con el propósito de no perder información relevante para el estudio. Asimismo, registraba las reacciones no verbales de los EPM, tales como gestos, miradas o actitudes, que pudieran aportar información complementaria sobre el desarrollo de la tarea. Estas anotaciones no se han considerado como fuentes directas de información, sin embargo, su revisión permitió completar y contextualizar el registro de lo ocurrido en el grupo.

¹⁴ De 100 minutos de duración cada una de ellas.

En la Tabla 3.5 mostramos las dos observaciones realizadas en el primer microciclo, identificando las actividades desarrolladas en cada sesión y relacionándolas con los episodios correspondientes de la transcripción mediante sus códigos.

Tabla 3.5
Observaciones del primer microciclo

Observación	Actividad		Código de los episodios
Microciclo 1 Sesión 1 23-abril-2018		Presentación de caso. Lectura del primer fragmento del caso	[TF1.1A.1 U1-124]
	1.1	Análisis de la distribución de las figuras representadas en la pizarra.	[TF1.1A.2 U125-177]
		Consecuencias de la distribución en el concepto de polígono.	[TF1.1A.3 U178-209]
		Ventajas e inconvenientes de la distribución.	[TF1.1A.4 U210-260]
	1.2	Argumentos esgrimidos por los escolares.	[TF1.1A.5 U261-280]
	1.3	Definición de polígono.	[TF1.1A.6 U289-324]
		Atributos de una definición en las respuestas de los EPM.	[TF1.1A.7 U325-432]
		Definición de polígono dada por los EPM.	[TF1.1A.8 U434-501]
	2.1	Uso de la tabla en el análisis del caso y actividad 2.1	[TF1.1A.9 U501-550]
	2.2	Análisis de la definición dada por los escolares. Atributos de una definición.	[TF1.1A.10 U551-590]
Microciclo 1 Sesión 2 07-mayo-2018		Inicio de segunda sesión.	[TF1.1A.11 U591-601]
	2.3	Conceptos, procesos y procedimientos implicados en la resolución de la actividad.	[TF1.1A.12 U602-746]
		Argumentos usados por los escolares.	[TF1.1A.13 U747-772]
		Unicidad de la definición matemática.	[TF1.1A.14 U772-817]
		Consecuencias de la definición dada con relación a la clasificación/categorización de polígonos.	[TF1.1A.15 U818-907]
	2.4	¿Qué aprenden los estudiantes de primaria con esta actividad?	[TF1.1A.16 U909-920]
		¿Qué interés tiene frente a que se les hubiera dado una definición a priori?	[TF1.1A.17 U915, 921-929]
	2.5	Papel de los ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática	[TF1.1A.18 U930-951]

	2.6	Dificultades de los estudiantes con la situación planteada. Posible origen de las dificultades.	[TF1.1A.19 U952-975]
	2.7	Nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes	[TF1.1A.20 U975-1105]
	3.1	¿Qué están haciendo los estudiantes?	[TF1.1A.21 U1106-1133]
		¿Qué criterios han utilizado los estudiantes?	[TF1.1A.22 U1134-1146]
		Criterio: Amplitud I	[TF1.1A.23 U1147-1231]
		Criterio: Amplitud II	[TF1.1A.24 U1232-1298]
		Criterios: Figuras prototípicas. Posición de los lados	[TF1.1A.25 U1298-1323]
		Otros criterios	[TF1.1A.26 U1323-1376]
		Criterio: Longitud de los lados	[TF1.1A.27 U1377-1425]
	3.2	¿Qué aprenden los alumnos con esta actividad?	[TF1.1A.28 U1425-1431]
	3.3	Recursos para la enseñanza. Ventajas.	[TF1.1A.29 U1432-1461, 1472-1475]
		Recursos para la enseñanza. Inconvenientes.	[TF1.1A.30 U1462-1471, 1476-1533]
En casa	3.4	Adecuación de la actividad para 5º de Primaria	[TF1.1A.31 Producciones]

La Tabla 3.6 recoge la información equivalente para el segundo ciclo.

Tabla 3.6

Observaciones del segundo microciclo

Observación	Actividad		Código de los episodios
Microciclo 2 Sesión 1 02-abril-2019		Presentación de la propuesta	[TF1.2A.1 U1-142]
	1-2	Líneas poligonales cerradas y simetría.	[TF1.2A.2 U143-170]
		Figuras prototípicas.	[TF1.2A.3 U171-183]
		Otros atributos.	[TF1.2A.4 U184-202]
		Regularidad y simetría.	[TF1.2A.5 U203-222]
		Figuras cerradas. Figuras complejas.	[TF1.2A.6 U222-260]
		Número de lados. Aprendizajes previos.	[TF1.2A.7 U261-282]
		Simetría. Regularidad. Realidad.	[TF1.2A.8 U283-299]
	3	Definición de polígono dada por los EPM	[TF1.2A.9 U300-387]
		Representación figural-icónica de un polígono.	[TF1.2A.10 U387-414]

		Inicio de segunda parte de tarea formativa	[TF1.2A.11 U415-456]	
		Polígonos simples y complejos	[TF1.2A.12 U457-479]	
		Polígonos diferentes	[TF1.2A.13 U480-511]	
	4	Figuras mal situadas en polígonos	[TF1.2A.14 U512-541]	
		Figuras mal situadas en no polígonos	[TF1.2A.15 U542-559]	
		Minimalidad	[TF1.2A.16 U560-601]	
		Invariante bajo el cambio de representación	[TF1.2A.17 U602-625]	
	Microciclo 2 Sesión 2 04-abril-2019	5	Análisis de las definiciones de algunas EPM	[TF1.2A.18 U626-713]
			Nivel de razonamiento geométrico de algunas EPM	[TF1.2A.19 U714-745]
Atributos de la definición dada por los estudiantes			[TF1.2A.20 U746-814]	
6		Conceptos y procedimientos implicados. Definición única	[TF1.2A.21 U815-833]	
		Obstáculos de la definición dada por los estudiantes	[TF1.2A.22 U833-864]	
		Criterios para agrupar polígonos	[TF1.2A.23 U865-899]	
		Clasificación vs categorización	[TF1.2A.24 U899-986]	
7		Aprendizajes con esta actividad	[TF1.2A.25 U987-1002]	
		Diferencias con actividad tradicional	[TF1.2A.26 U1003-1011]	
8		Papel de ejemplos y contraejemplos	[TF1.2A.27 U1013-1027]	
9		Dificultades observadas	[TF1.2A.28 U1028-1045]	
10		Nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes	[TF1.2A.29 U1046-1095]	
11		Criterios dados por los estudiantes	[TF1.2A.30 U1096-1209]	
		Criterios dados por los EPM: Ángulos de 90°	[TF1.2A.31 U1212-1222]	
		Criterios dados por los EPM: Número de diagonales	[TF1.2A.32 U1223-1258]	
		Criterios dados por los EPM: Regularidad	[TF1.2A.33 U1060-1266]	
		Criterios dados por los EPM: Simetría	[TF1.2A.34 U1270-1286]	
		Criterios dados por los EPM: Lados paralelos	[TF1.2A.35 U1287-1300]	
12		Ventajas de trabajar así la clasificación de polígonos	[TF1.2A.36 U1302-1312]	
13	Dudas de EPM sobre recursos	[TF1.2A.37 U1102-1138]		
	Debate sobre la actividad 13	[TF1.2A.38 U1313-1340]		

En casa	14	Adecuación de la actividad para 5º de Primaria	[TF1.2A.39 Producciones]

3.3.3. Producciones escritas de los EPM

También hemos recogido todas las producciones escritas de los EPM durante la resolución de las tareas en cada implementación. Estas incluyen las respuestas a las actividades propuestas y la tabla de recogida de información que se les facilitó junto a la tarea formativa. En dicha tabla, los EPM debían registrar sus observaciones sobre la transcripción en relación con distintos aspectos (como los contenidos abordados, las estrategias de enseñanza o los procesos de aprendizaje), y las interpretaciones que elaboraban a partir de dichas observaciones.

Este material resultó especialmente útil para revisar determinadas aportaciones al debate que no habían quedado del todo claras en las transcripciones y para analizar las respuestas correspondientes a la última actividad de la tarea, la cual no pudo ser debatida en clase por falta de tiempo.

3.4. Métodos seguidos para el análisis de la información

El análisis de la información en un experimento de enseñanza es un proceso dinámico y recurrente, que se desarrolla a lo largo de toda la investigación (Molina, 2022). Como investigadores interpretamos los datos con el propósito de comprender el conocimiento especializado que los EPM movilizan al resolver las tareas formativas.

En este estudio llevamos a cabo dos tipos de análisis en momentos distintos. El primero después de cada microciclo (ver apartado 3.3.1), llamado análisis retrospectivo (Llinares, 2014; Molina, 2006). Este análisis tiene un carácter formativo, ya que permite ajustar decisiones y mejorar el desarrollo de las siguientes fases del estudio. El análisis de la información recabada en cada microciclo se presenta en el capítulo 4 de esta memoria. Al finalizar el macrociclo se lleva a cabo el análisis *retrospectivo o final* (Cobb et al., 2003; Molina, 2006) que implica la revisión global e integradora de todos los datos recogidos, con el propósito de interpretar globalmente los procesos de enseñanza y aprendizaje y dar respuesta a los objetivos de la investigación. Los resultados de este análisis se presentan en el capítulo 5.

Con la intención de analizar de manera sistemática las producciones de los EPM, consideramos el modelo analítico MTSK (Carrillo et al., 2018) para describir y categorizar el conocimiento especializado movilizado en el aula de formación de maestros durante la resolución de las actividades propuestas en la tarea formativa. Para ello ponemos el foco en las intervenciones de los EPM. Este análisis va a permitir comprobar si la tarea, tal y como está diseñada, permite movilizar el conocimiento especializado pretendido con cada actividad.

3.4.1. Las transcripciones de las videograbaciones

Las transcripciones de las videograbaciones constituyen un producto intermedio entre la recogida de información y el análisis de los datos. Derivan directamente de la técnica de observación y permiten registrar de manera textual lo acontecido en el aula. Su función principal es servir de base para el posterior análisis cualitativo de los datos. En este apartado se describe el proceso seguido desde la videograbación hasta la elaboración de las transcripciones. Dicho material lo organizamos por ciclo de implementación, tarea y grupo de estudiantes

Hemos observado, en cada ciclo, las clases de las cinco semanas dedicadas en la asignatura *Didáctica de Matemáticas para Maestros* a la resolución de tareas formativas diseñadas para trabajar Geometría como objeto de enseñanza y aprendizaje. Para este trabajo hemos seleccionado las dos sesiones de clase¹⁵, en cada microciclo, en las que se abordó la lectura y resolución de la tarea formativa sobre definición y clasificación de polígonos.

Estas dos sesiones fueron transcritas de manera literal, recogiendo las intervenciones de todos los participantes. Este proceso de conversión del lenguaje oral (videograbaciones) al lenguaje escrito (transcripciones) presenta particularidades derivadas de las diferencias entre ambos modos de comunicación (Muñoz-Catalán, 2009, 2012). El lenguaje oral incorpora elementos gestuales, visuales y de entonación que influyen en el significado, por lo que resulta necesario seleccionar aquellos aspectos no verbales relevantes para la comprensión del discurso. En consecuencia, las transcripciones incluyeron información no hablada, como gestos, entonaciones o reacciones, siempre que se consideró

¹⁵ De 100 minutos de duración

significativa para interpretar lo ocurrido en el aula (Muñoz-Catalán, 2009, 2012, citando a Kvale, 1996).

Las transcripciones las complementé incorporando elementos que la cámara no captaba, como reacciones no verbales, producciones escritas en la pizarra o el uso de materiales, entre otros. Este proceso de textualización (Muñoz-Catalán, 2009, 2012) resultó imprescindible para garantizar la exhaustividad de los datos y su posterior análisis (Schwandt, 2001, citando a Van Maanen, 1988). Coincidimos con Muñoz-Catalán (2009) en que las transcripciones no constituyen una reproducción exacta de la realidad, sino una construcción interpretativa elaborada por el investigador, condicionada por sus decisiones analíticas y por su propia presencia en el aula.

3.4.2. Análisis de los microciclos

En el análisis de datos de cada microciclo nos centramos en el conocimiento que los EPM movilizan durante el desarrollo de la tarea formativa, a partir de las evidencias e indicios identificados en sus intervenciones (Escudero-Ávila et al., 2016). Comprobar que los EPM movilizan el conocimiento pretendido en el diseño será el primer paso para dar respuesta a la validación de la tarea. Además, analizamos la coherencia entre el diseño, la implementación y los resultados, verificando que las consignas, los recursos y la dinámica de trabajo funcionen como mediadores del aprendizaje. Desde un enfoque interpretativo (Kvale, 1996) examinamos las evidencias e indicadores de conocimiento (Flores-Medrano, 2015) de manera hermenéutica, atendiendo a la consistencia entre las categorías analíticas y el conocimiento mostrado por los EPM.

El análisis se inicia con la revisión detallada de la transcripción de cada una de las sesiones dedicadas a la resolución de la tarea formativa, poniendo el foco en las intervenciones de los EPM. Para su identificación, numeramos cada intervención (no la línea de transcripción), dado que es unidad discursiva completa la que constituye el objeto de análisis. De este modo, establecemos unidades mínimas de información con sentido propio analizamos globalmente en todo su sentido. Las unidades de información van numeradas de manera consecutiva atendiendo al orden de aparición en la transcripción.

Para facilitar dicho análisis de las transcripciones, las estructuramos en episodios definidos por los cambios de actividad (Schoenfeld, 2000). Cada episodio corresponde a la resolución de una de las actividades propuestas o a los debates generados en torno a la

lectura de las distintas partes del caso. Si un episodio es demasiado extenso o contiene temáticas diferenciadas, lo subdividimos en subepisodios (Muñoz-Catalán, 2009).

Identificamos subepisodios dentro de cada transcripción mediante la numeración secuencial de las intervenciones de los participantes en los debates, el microciclo, la tarea y el grupo de EPM. Para este estudio hemos seleccionado la tarea formativa sobre la definición y clasificación de polígonos, centrando el análisis en su implementación con el grupo A de EPM. Presentamos en primer lugar el análisis correspondiente al primer microciclo, seguido del análisis del segundo microciclo. En ambos casos la formadora que implementa la tarea es la misma.

Así denotamos *TFn.mG.ñ Ux-y* al subepisodio *ñ*-ésimo de la transcripción de la clase en la que se ha implementado la tarea formativa *m* en el *n*-ésimo ciclo en el grupo *G*, haciendo referencia a las unidades de información comprendidas entre la *x* y la *y*. En este trabajo se analiza la puesta en práctica de la tarea 1¹⁶ en el grupo A¹⁷, considerando su desarrollo en dos cursos consecutivos. Por ejemplo, TF2.1A.3 U112-153 correspondería con el subepisodio 3 de la segunda implementación de la tarea formativa 1 con el grupo de A de EPM, formado por las unidades de información comprendidas entre la 112 y la 153.

Los episodios identificados en cada transcripción se organizaron en una tabla de registro (ver Tabla 3.7). Esta incluye, en una columna, el código asignado a cada episodio, y en otra, la descripción sintética del contenido que caracteriza su desarrollo.

Tabla 3.7
Episodios de la implementación de la TFor 1.1.A. Actividad 1.1

Código	Contenido del episodio
[TF1.1A.1 U1-124]	Introducción. Planteamiento actividad 1.
[TF1.1A.2 U125-177]	Actividad 1.1.a. Análisis de la distribución de las figuras representadas en la pizarra.
[TF1.1A.3 U178-209]	Actividad 1.1.b. Consecuencias de la distribución en el concepto de polígono.
[TF1.1A.4 U210-260]	Actividad 1.1.c. Ventajas e inconvenientes de la distribución.

En el capítulo de análisis hemos considerado únicamente la parte de cada episodio que aporta información relevante sobre el conocimiento especializado movilizado por los

¹⁶ Se han implementado cinco tareas formativas relacionadas con el polígono

¹⁷ Se ha implementado en dos grupos, A y B.

EPM. Las intervenciones de la formadora o de los propios EPM que no contribuyen a este propósito se han omitido por no resultar significativas para el objeto del estudio.

Por otra parte, hemos tenido en cuenta las producciones escritas para complementar las transcripciones en aquellos casos en que surgían dudas sobre lo que el EPM quería expresar. Además, dado que la última actividad no pudo resolverse en clase por ajuste temporal, su análisis se llevó a cabo a partir de la revisión de las respuestas escritas elaboradas por los EPM.

Para el análisis de cada episodio tomamos como referencia el modelo MTSK, con el objetivo de identificar las evidencias o indicios de conocimiento especializado movilizado por los EPM. Como instrumento de análisis consideramos el listado de categorías e indicadores del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018; 2022) que se mostramos en la Tabla 3.8.

Tabla 3.8

Categorías e indicadores asociados a los subdominios de MTSK

Subdominios		Categorías asociadas al subdominio <i>Conocimiento sobre:</i>	
Conocimiento matemático	Conocimiento de los tópicos KoT	Procedimientos	<i>¿Cómo se hace?</i>
			<i>¿Cuándo puede hacerse?</i>
			<i>¿Por qué se hace así?</i>
			<i>Características del resultado</i>
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	
		Registros de representación	
		Fenomenología y aplicaciones	
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM	Conexiones de complejización	
		Conexiones de simplificación	
		Conexiones transversales	
		Conexiones auxiliares	
	Conocimiento de la práctica matemática KPM	<i>Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos</i>	
		<i>Formas de validación y demostración</i>	
		<i>Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal</i>	
		<i>Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas</i>	

Conocimiento Didáctico del Contenido		<i>Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)</i>
		<i>Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones</i>
	Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	Teorías de aprendizaje
		Fortalezas y dificultades
		Formas de interacción con un contenido matemático
		Aspectos emocionales
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	Teorías de enseñanza
		Recursos materiales y digitales
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	Resultados de aprendizaje esperados
		Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado
		Secuenciación de temas

En cada informe de análisis adoptamos el enfoque de interpretación propuesto por Kvale (1996, citado en Muñoz-Catalán, 2012), entendiendo la interpretación como un proceso de construcción de significado basado en la relación entre los datos, el contexto y la perspectiva del investigador. Bajo este marco, en el análisis no nos limitamos a describir las intervenciones, sino que interpretamos textualizando los datos, articulando las evidencias con el modelo MTSK y con las intenciones formativas del diseño.

El informe de análisis se organiza siguiendo las cuatro partes en las que se estructura la tarea. En cada una incluimos un breve resumen de los acontecimientos relevantes. A continuación, el análisis se subdivide según las actividades propuestas a los EPM en esa parte, identificando el conocimiento pretendido y los subepisodios correspondientes, junto a sus unidades de información.

Para cada actividad elaboramos una tabla en la que mostramos los indicadores de conocimiento especializado identificados en las intervenciones de los EPM, organizados según las distintas categorías de conocimiento de los subdominios de MTSK. Cada registro señala la unidad de información en la que aparece la intervención correspondiente. La categoría o indicador de conocimiento que se pretende movilizar con la propuesta de la actividad se presenta en la tabla subrayado. De esta forma, además de comprobar si el conocimiento previsto se ha movilizado, podemos identificar otros

componentes de MTSK que emergen en la resolución de la actividad. Así, por ejemplo, en la actividad 1.3 del primer ciclo se les pide a los EPM que enuncien una definición de polígono, antes de que aparezca en el caso o se haya tratado en la clase de formación de maestros. El conocimiento pretendido con esta actividad está vinculado con la categoría de KoT, *Definiciones, propiedades y sus fundamentos*. La Tabla 3.9 ejemplifica el registro del conocimiento especializado identificado en la actividad 1.3.

Tabla 3.9

Ejemplo del registro del conocimiento especializado movilizado en la implementación de una actividad

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	<u>Definiciones, propiedades y sus fundamentos</u>	Saben que un polígono es una figura cerrada que tiene lados, ángulos y vértices (U298).
		Saben que los polígonos son figuras planas cerradas (U307, 461, 465).
		Saben que las propiedades de las figuras no cambian modificando solo la posición en el plano (U357).
		Saben que una concatenación de segmentos es una figura (U372).
		Saben que las figuras abiertas tienen lados que no se unen a otros por el extremo (U381).
		Saben que los polígonos están unidos por segmentos concatenados (U436).
		Saben que los segmentos son porciones de rectas (U439).
		Saben que los puntos de unión de dos lados consecutivos de un polígono son los vértices (U448).
		Saben que al considerar dos lados de un polígono se pueden identificar ángulos (U450).
		Saben que los polígonos no tienen lados curvos (U494).
KPM	Registros de representación	Conocen cómo puede representar gráficamente un polígono (U290-296).
	Prácticas particulares del quehacer matemático	Saben identificar polígonos con características equivalentes (reconocimiento) (U403).
	Condiciones necesarias y suficientes para generar una definición matemática	Saben reconocer polígonos entre un conjunto de figuras planas (U474-499).
KFLM	Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático	Saben que es suficiente que no se cumpla una de las propiedades críticas de la definición de un concepto para asegurar que no es un ejemplo (U494).
	Fortalezas y dificultades	Saben qué argumentos pueden dar los estudiantes a la hora de justificar si una figura es polígono o no lo es (U405-426).
		Saben los posibles obstáculos o dificultades que pueden tener los escolares para identificar una figura como polígono.

En el capítulo 4 presentamos, en primer lugar, el análisis de las transcripciones correspondientes al primer microciclo y, a continuación, el análisis del segundo microciclo. Después de cada análisis señalamos los aspectos de la tarea que proponemos modificar a partir de la revisión de lo ocurrido en clase. Finalmente examinamos si se ha

movilizado el conocimiento pretendido y qué otros tipos de conocimiento han emergido durante el desarrollo de la tarea.

3.4.3. Análisis del macrociclo

Para el análisis retrospectivo del experimento de enseñanza, reorganizamos y discutimos la información sobre el conocimiento especializado que los EPM movilizan al resolver la tarea formativa desde la estructura del modelo MTSK. Es decir, articulamos el análisis a partir de los subdominios y categorías del modelo MTSK, a diferencia del análisis de los microciclos donde los resultados se presentan siguiendo la secuencia de actividades de la tarea. Este enfoque facilita una identificación más precisa el conocimiento especializado movilizado, al considerar la consistencia entre las categorías analíticas y las manifestaciones de conocimiento expresadas por los EPM.

Para cada subdominio incluimos una tabla por ciclo que recoge los indicadores de conocimiento identificados a partir de evidencias e indicios (Escudero-Ávila, 2015), vinculándolos con las unidades de información y con la categoría correspondiente; las unidades asociadas al conocimiento pretendido se destacan en negrita para facilitar su identificación. Esta organización permite abordar el segundo objetivo del estudio, al profundizar en la comprensión del conocimiento especializado que los EPM movilizan, ofreciendo una visión estructurada y fundamentada de cómo dicho conocimiento se evidencia en su reflexión durante la resolución de la tarea formativa.

El análisis pormenorizado de los episodios de clase, centrado en el conocimiento especializado de la maestra y en el conocimiento especializado que la oportunidad evoca al investigador partiendo de las situaciones de clase, se ha constituido en un posible sustento para promover desarrollo profesional.

Liñán-García (2017, p. 251)

4. Análisis y resultados

En este capítulo mostramos el análisis de la observación de dos¹⁸ aulas de formación de maestros en las que hemos implementado la tarea formativa *Definición y clasificación de polígonos* diseñada *ad hoc*, en cursos consecutivos. Para ello consideramos las transcripciones de las videgrabaciones de las sesiones, que recogen tanto la resolución individual de las actividades por parte de los EPM como los debates que se generan en torno a distintos aspectos de la práctica docente vinculados a contextos reales de aula. También tenemos en cuenta las producciones escritas en las resoluciones individuales realizadas por los EPM.

La estructura del capítulo sigue la lógica propia de los experimentos de enseñanza. En primer lugar, presentamos el análisis correspondiente a la información obtenida en la implementación de la tarea en el primer ciclo, seguido de las propuestas de modificación derivadas de dicho análisis. Posteriormente, exponemos el análisis del segundo ciclo junto con las nuevas propuestas de mejora. Ambos análisis se desarrollan a partir de los episodios de la transcripción asociados a cada actividad. Finalmente, cerramos el capítulo con un informe sobre el conocimiento movilizado en cada actividad y en cada microciclo, lo que nos permiten comprobar que, en todos los casos y en ambos ciclos, se pone en juego el conocimiento pretendido, así como otros tipos de conocimiento pertenecientes a categorías no contempladas inicialmente.

El análisis retrospectivo del experimento de enseñanza se aborda mediante una reorganización de la información atendiendo a las distintas categorías de conocimiento definidas por el modelo MTSK. Este análisis se presenta en el capítulo siguiente.

En los siguientes subapartados analizamos las respuestas de los EPM a las actividades propuestas en la tarea formativa para provocar su reflexión sobre aspectos del conocimiento especializado del profesor.

Tras el análisis de los episodios correspondientes a cada actividad de la tarea presentamos una tabla resumen que recoge las evidencias e indicios de conocimiento especializado

¹⁸ Una correspondiente a los participantes del primer ciclo del experimento de enseñanza, y la otra a la de los participantes del segundo ciclo.

movilizados en ellos. Las categorías o indicadores de conocimiento pretendido en cada actividad aparecen subrayados.

4.1. Análisis del primer microciclo

4.1.1. Primer fragmento: Distribución de figuras generada por escolares.

Resumen

La primera sesión de clase dedicada al trabajo con tareas formativas comienza con la explicación por parte de la formadora sobre el cambio en la manera de trabajar en clase. Hasta ese momento, cada tema comenzaba con la lectura de algún documento y un desarrollo del contenido teórico correspondiente por parte de la formadora. A partir de ahí los EPM deben resolver las actividades prácticas planteadas para aplicar lo tratado. La tarea diseñada implica el análisis de la sesión de clase descrita en el caso a través de la resolución de las actividades intercaladas en el mismo. La formadora, además, anima a los EPM a utilizar la tabla que se les facilita como anexo de la tarea con el fin de que puedan recoger la información que consideren necesaria para resolver las actividades.

En el primer episodio la formadora explica el procedimiento a seguir en la resolución de la tarea formativa y resuelve las dudas que plantean los EPM sobre la nueva forma de trabajo. Cada uno de los episodios siguientes corresponde con la resolución de una de las actividades propuestas tras el primer fragmento del caso. Los EPM, antes de la resolución de estas actividades, no tienen información sobre las razones que llevan a los escolares a considerar una figura como polígono o como no polígono. Hasta ese momento, en el caso solo se describe la propuesta de trabajo que la maestra hace a los escolares y cómo quedan colocadas las figuras representadas por estos en la pizarra.

4.1.1.1. Actividad 1.1. Análisis de la distribución de las figuras representadas en la pizarra por parte de los escolares.

La primera actividad planteada a los EPM para analizar el episodio de clase descrito es la siguiente:

Actividad 1.1. Analizad la distribución de las figuras representadas en la pizarra por parte de los escolares (ilustración 1). ¿Qué consecuencias tiene dicha distribución en relación con el concepto de polígono? Indicad las ventajas o inconvenientes de la misma.

El conocimiento especializado pretendido con esta actividad está vinculado a los atributos relevantes (Bernabeu, Llinares, et al. (2021), Bernabeu, Moreno, et al. (2021)) que determinan que una figura sea polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Así mismo, los EPM deben analizar el procedimiento utilizado por los escolares a la hora de clasificar las figuras que representan (KoT, procedimientos).

Análisis

En la tabla 4.1 se explicitan los episodios considerados en la implementación de la primera actividad de la tarea formativa en el primer ciclo. En este informe, del primer episodio solo se analiza una de las intervenciones de los EPM, que se incluye en el análisis del apartado 2. El resto de las intervenciones versan sobre aspectos relacionados con la forma de proceder, no se identifican elementos de conocimiento especializado.

Tabla 4.1
Episodios de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 1.1

Código	Contenido del episodio
[TF1.1A.1 U1-124]	Introducción. Planteamiento actividad 1.
[TF1.1A.2 U125-177]	Actividad 1.1.a. Análisis de la distribución de las figuras representadas en la pizarra.
[TF1.1A.3 U178-209]	Actividad 1.1.b. Consecuencias de la distribución en el concepto de polígono.
[TF1.1A.4 U210-260]	Actividad 1.1.c. Ventajas e inconvenientes de la distribución.

[TF1.1A.2 U125-177] Actividad 1.1.a. Análisis de la distribución de las figuras representadas en la pizarra.

22. Gabi: [Señalando a la diapositiva] Pero eso está mal, ¿no? [...].
88. Rosa: De clasificación.
128. Belén: Que no tienen claro la definición en sí, ¿no?
130. Belén: Porque no los clasifican bien.
134. Daniel: Intentan diferenciar los que son más [hace el gesto de entrecomillas con los dedos]..., se parecen más sus lados, ¿no?, a los que no se parecen tanto..., a los que son más regulares de los que son más irregulares.
137. Elsa: Que cuando los cortamos por la mitad quedan dos partes iguales, ¿no? O algo así.
138. Paloma: Que es simétrico.

142. Paloma: *La simetría, ¿no?, de la figura [une las palmas de las manos emulando dos partes simétricas].*
145. Daniel: *No, bueno yo te diría..., o regular o irregular.*
153. Elsa: *Sí. Es que lo que pasa, es que yo me quiero referir... es que a lo mejor por muy poco no es regular, entonces es como más regular [hace el gesto de comillas con los dedos].*
157. Daniel: *En que sus características sean iguales.*
159. Daniel: *De los lados mismo.*
161. Daniel: *Que midan igual.*
165. Rosa: *Ser simétrica, ¿no?*
166. Formadora: *Ser simétrica. ¿La simetría tiene que ver con la regularidad?*
167. Rosa: *Sí.*
169. Rosa: *Yo creo que sí, por ejemplo, la figura 5 [pentágono cóncavo] yo la veo casi regular porque...*
171. Rosa: *Casi es simétrica.*



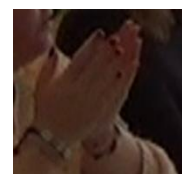
En este episodio identificamos indicios de que los EPM que intervienen al principio conocen los atributos¹⁹ que caracterizan al concepto de polígono (simple) [TF1.1A.1-2 U22, 128, 130], necesarios para poder identificar figuras mal posicionadas en la Figura 4.1 (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Estas intervenciones surgen como reacción directa a la tarea formativa, concretamente, el comentario que hace Gabi en la unidad [TF1.1A.1 U22] surge al observar la imagen que acompaña al caso. Las intervenciones de las unidades 128, 130 responden al primer apartado de la primera actividad. La formadora plantea cuestiones a los EPM buscando la justificación de sus afirmaciones, favoreciendo de esta forma su reflexión y la interacción entre los EPM. De igual modo, en la intervención [TF1.1A.2 U134], *Intentan diferenciar los que [...] se parecen más sus lados, ¿no?, a los que no se parecen tanto..., a los que son más regulares de los que son más irregulares*, Daniel hace mención a los lados de la figura como elementos significativos en los polígonos, además de mencionar los términos regular e irregular como tipos distintos de polígonos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos), aunque no explicita la definición de cada uno de estos conceptos es un indicio de que conoce que hay polígonos de cada tipo. Este EPM ha interpretado el enunciado de la actividad en un sentido diferente al sentido con el que está planteada. El foco de la actividad está puesto en el subdominio KoT, y su respuesta está encaminada a determinar los argumentos utilizados por los escolares a la hora de colocar las figuras

¹⁹ Figura geométrica cerrada y plana, limitada por segmentos de recta consecutivos

representadas en un grupo u otro (KFLM, formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático). Esta intervención hará que el debate se desvíe hacia esa interpretación favoreciendo la movilización de KFLM, conocimiento no pretendido en esta actividad. Por lo tanto, el conocimiento movilizado a partir de esta intervención [TF1.1A.2 U135-177] lo consideramos inducido por la interacción entre EPM.

La formadora aprovecha el uso de un lenguaje poco formal por parte de Daniel, al referirse a tipos de polígonos en términos de *más regulares* o *más irregulares*, para recalcar la importancia de utilizar un lenguaje adecuado en matemáticas.

Los EPM relacionan esta característica con la simetría de las figuras [TF1.1A.2 U137-144]. Sirva de ejemplo la intervención de Elsa [TF1.1A.2 U137] en la que respondiendo a la formadora indica que los polígonos “más regulares” son los *que cuando los cortamos por la mitad quedan dos partes iguales*. Identifica la simetría como propiedad de las figuras “más regulares” (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Como ayuda Paloma utiliza elementos reales (sus manos) para representar el concepto de figuras simétricas [TF1.1A.2 U142] (KoT, registros de representación). Todo este conocimiento (pretendido y no pretendido) es inducido por la intervención del EPM y por la gestión que hace el formador de la situación.



En la unidad 137 Elsa, respondiendo a la pregunta de la formadora *¿Qué significa ser más regular?* [TF1.1A.2 U135], da una respuesta en la que relaciona el ser regular con ser simétrico. Esta situación generada en el aula se aprovecha para tratar con los EPM la relación que hay entre que un polígono sea regular con que este sea simétrico (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Todos los polígonos regulares son simétricos, pero la implicación contraria no es cierta, bastaría con dar como ejemplo el rectángulo, cuadrilátero con dos ejes de simetría que no es regular por tener lados de distintas longitudes. Aunque en este momento de la clase no se trata, se retoma un poco más adelante [TF1.1A.2 U165-171] ante la insistencia de algunos EPM de relacionar el ser regular con ser simétrico.

En el fragmento [TF1.1A.2 U144-153] observamos como la formadora fomenta la reflexión sobre la adecuación de las expresiones “más regular” o “más irregular”, llegando a determinar que esas expresiones no son exhaustivas, a pesar de que intuitivamente se pueda entender qué se quiere decir con ellas (*... es que a lo mejor por muy poco no es regular, entonces es como más regular* [TF1.1A.2 U153]).

La formadora, en este caso, aprovecha que vuelven a utilizar este tipo de expresión para provocar la reflexión de los EPM preguntando *¿Qué sería que por ese poco no es regular? ¿En qué me fijo para decidir que es muy poco o es muy...?* [TF1.1A.2 U156]. En respuesta a esta cuestión Daniel propone fijarse en los lados, sin especificar qué debe observar en los lados, hasta que la formadora pregunta expresamente [TF1.1A.2 U157-161], indicando Daniel en ese caso que *(los lados) midan igual* (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Como reacción a la intervención de Daniel, la formadora plantea *(Si) tengo una figura en la que los lados miden igual, ¿esa figura es regular?* [TF1.1A.2 U162]. Con su respuesta, *no tiene porqué, pero puede ir poco a poco...* [TF1.1A.2 U163], Daniel muestra que sabe que para que una figura sea regular no es suficiente con que tenga los lados congruentes (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). La formadora vuelve a preguntar *¿qué es lo poco que le falta?*, obteniendo como respuesta por parte de Rosa *ser simétrica* [TF1.1A.2 U165]. La EPM sabe que una propiedad que tienen todos los polígonos regulares es que son simétricos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Ante la intervención de Rosa la formadora pregunta *¿la simetría tiene que ver con la regularidad?* Espera que los EPM analicen la vinculación que hay entre ambos conceptos. Rosa utiliza una de las figuras que aparecen en el caso, la identificada con el número 5, como ejemplo para justificar la equivalencia entre ser “casi simétrico” y ser “casi regular”. Considera que el pentágono cóncavo representado es *casi*  *regular por ser casi simétrico* [TF1.1A.2 U169, 171].

El conocimiento especializado movilizado en este último fragmento ha sido inducido por las interacciones que han ido surgiendo en el aula entre los EPM y la formadora, guiadas por esta. En este caso, para ajustarse al tiempo marcado, la formadora reconduce el debate a las preguntas de la actividad 1.1.

[TF1.1A.3 U178-209] Actividad 1.1.b. Consecuencias de la distribución en el concepto de polígono.

178. Formadora: *¿Qué consecuencias tiene? ¿Qué ocurre aquí [marca la zona de polígonos de la diapositiva] que no ocurre aquí [señala la zona de no polígonos] y al revés?*
179. Tina: *Que los de ahí tienen siempre simetría [zona de polígonos].*
180. Formadora: *¿Estos son siempre simétricos y los de ahí no?*
181. Elsa: *No, todos no. [varios alumnos dicen no].*
182. Rosa: *El pentágono es totalmente irregular.*

184. *Paloma: En las que han denominado como polígonos, yo creo que son figuras que conocen más, ¿no?, que son más...*
185. *Daniel: Familiares.*
190. *Formadora: Les resultan familiares, no les resultan extrañas. Sin embargo, estas... [no polígonos].*
191. *Rosa: Sí les resultan porque no son las figuras convencionales que se usan.*
196. *Isabel: A ver, yo pienso que el problema que tienen aquí los niños es que no saben diferenciar entre polígonos, polígonos regulares y polígonos irregulares, porque, por ejemplo, en los no polígonos hay polígonos irregulares, pero como no saben que son irregulares, y no saben qué es regular y qué es irregular, pues los ponen como no polígonos, pero realmente... sigue siendo polígono.*
199. *Formadora: Vale. ¿Cuál de estos [no polígonos] crees que son polígonos? [contestan a la vez algunos alumnos].*
200. *Gabi: Arriba, la M y el de la izquierda.*
201. *Formadora: Son todos menos el 14 y el 13 [reproduciendo lo que dicen los EPM].*
203. *Elsa: Son todos muy raros.*
206. *Formadora: ¿Qué otra cosa más hay que ha hecho que aquí pongan alguno...?*
207. *Elsa: Que no están unidos.*
208. *Belén: Que no están cerrados.*

Cuando la formadora reformula una de las cuestiones planteadas en el enunciado de la actividad [TF1.1A.3 U178] *¿qué consecuencias tiene...? ¿qué ocurre aquí (en zona de polígonos) que no ocurre aquí (zona de no polígonos) y al revés?*, Tina responde, *que los de ahí tienen siempre simetría (señalando la zona de polígonos)* [TF1.1A.3 U179]. Como reacción a esta intervención, varios EPM muestran su disconformidad, diciendo *no, todos no* [TF1.1A.3 U181]. Se evidencia que conocen atributos relevantes de las figuras simétricas que permiten identificar a aquellas que no lo son, en este caso la 1, la 5 y la 7 de la Figura 4.1 (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos), Rosa afirma que *el pentágono es totalmente irregular* [TF1.1A.3 U182], aunque no especifica a qué figura se refiere. En el gráfico hay tres pentágonos (dos convexos y uno cóncavo) y ninguno de ellos es regular. Aunque se mantiene presente la consideración de diferentes niveles de regularidad en una figura (“*más regular*”, “*totalmente irregular*”, ...), la EPM sabe que la figura a la que hace referencia no cumple alguno de los atributos relevantes que debe verificar un polígono para ser regular (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

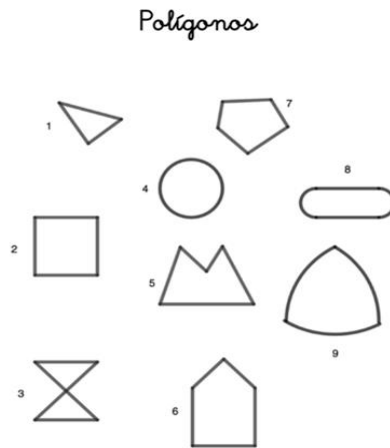


Figura 4.2 Figuras consideradas polígonos

Continuando con las respuestas a la cuestión planteada en la actividad, Paloma añade un aspecto interesante al debate al considerar que *en las que han denominado como polígonos yo creo que son figuras que conocen más, ¿no?, que son más... (familiares)* [TF1.1A.3 U184]. En esta intervención identificamos una evidencia de conocimiento acerca de la estrategia de resolución utilizada por los escolares (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

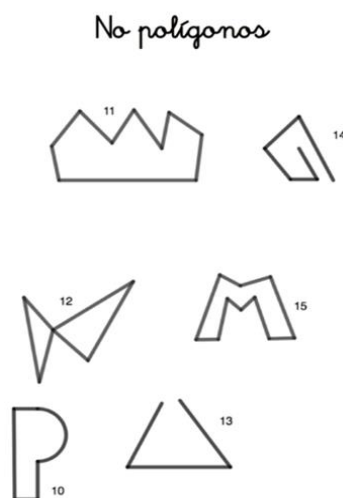


Figura 4.1 Figuras consideradas no polígonos

La formadora, a partir de esta respuesta, sigue planteando preguntas para provocar la reflexión de los EPM en ese sentido. Rosa afirma que las figuras que aparecen en la zona de no-polígonos *no son las figuras convencionales que usan* [TF1.1A.3 U191]. Se vuelve a mostrar conocimiento sobre la estrategia utilizada por los escolares para resolver la actividad propuesta por la maestra. La EPM considera que los escolares consideran como no polígonos figuras que no están acostumbrados a ver (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático)

Respondiendo a la misma actividad, Isabel hace una nueva aportación [TF1.1A.3 U196]. Según ella, la dificultad de los estudiantes está en no saber diferenciar *entre polígonos, polígonos regulares y polígonos no regulares*. Isabel identifica errores y obstáculos que presentan los escolares a la hora reconocer si una figura es o no un polígono, vinculado con la dificultad de diferenciar entre polígonos regulares y no regulares (KFLM, fortalezas y dificultades). Consideramos que Isabel conoce el significado de cada uno de los conceptos polígono, regular, irregular, utilizados en su argumentación (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Para profundizar en este argumento la formadora pregunta *¿cuál de estos [no polígonos] crees que son polígonos?* [TF1.1A.3 U199]. Gabi identifica como polígonos *la M y el de la izquierda* [TF1.1A.3 U200]. Entendemos que se refiere a las figuras 11 y 15, reconociendo aquellas figuras que verifican los atributos relevantes de un polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). En las respuestas de otros EPM observamos que consideran como polígonos a todas las figuras a excepción del 13 y el 14 [TF1.1A.3 U201]. Identifican como propiedad imprescindible para que una figura sea polígono el que ésta sea cerrada (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). El que no consideren necesarias otros atributos (que los lados sean segmentos rectos o que la línea poligonal sea simple) lo aprovecha la formadora para tratar en clase los atributos relevantes para considerar una figura como polígono (línea poligonal cerrada y simple), y otros atributos no imperativos que pueden ayudar a establecer clasificaciones dentro de un grupo de polígonos (regularidad o simetría, por ejemplo).

El conocimiento identificado en este episodio, aunque podría haber surgido por el propio enunciado de la tarea, se explicita como respuesta a preguntas de la formadora inducidas por las interacciones que se producen en el aula.

[TF1.1A.4 U210-260] Actividad 1.1.c. Ventajas e inconvenientes de la distribución.

- 210. Formadora: *¿Qué ventajas o inconvenientes tendría hacer esta clasificación?*
- 211. Daniel: *Ventajas que es una forma de ver cómo piensa el niño [...] en la idea del polígono.*
- 213. Daniel: *Puede partir de las ideas del niño.*
- 215. Daniel: *Y también le sirve de repaso.*
- 217. Daniel: *Para el alumno, para darse cuenta de qué es una cosa y qué es otra.*

220. Formadora: ¿Había alguna figura aquí, entre la parte derecha y la parte izquierda que sean parecidas?

223. Elsa: La 11 y la 5.

225. Isabel: Pero también la 12 y la 3.

228. Formadora: Hay una diferencia entre la 3 y la 12, que sería...

229. Paloma: La simetría [contestan también otros alumnos].

230. Formadora: La simetría. La tres..., es simétrica, la 12 en principio no es simétrica, ¿no?

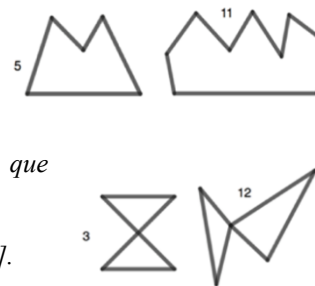
241. Rosa: También la puesta en común que hacen luego todos, porque dice que lo hacen así y luego sí ponen en no polígono y muchos piensan que es un polígono empiezan a debatir entre ellos.

242. Formadora: Efectivamente, genera debate. [...] Pero cuáles serían sus inconvenientes.

243. Isabel: Que puede llevar a error, ¿no?

252. Gabi: Pero esta actividad se podría hacer mejor habiendo recortado todas las figuras individualmente. Se hubiese puesto en la pizarra polígonos y no polígonos y se le dan individualmente a cada persona y salen cada uno y se trabaja de forma dinámica con ellos.

260. Gabi: Vamos, que en quinto de primaria deberían de saberlo.

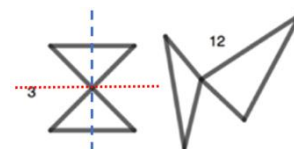


La última cuestión planteada en la actividad 1.1. es sobre las ventajas e inconvenientes que tiene la distribución para llegar a una definición consensuada de polígono, pero Daniel interpreta que debe analizar el tipo de actividad propuesta por la maestra, no se fija en la distribución que determinan los estudiantes. De ahí que su respuesta sea *una forma de ver cómo piensa el niño [...] en la idea del polígono* [TF1.1A.4 U211], *puede partir de las ideas (previas) del niño* [TF1.1A.4 U213], *y también le sirve de repaso* [TF1.1A.4 U215], identificando una potencialidad de este tipo de actividades pues da información a la maestra sobre el conocimiento que tienen sus estudiantes con relación al concepto de polígono (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Aunque se intenta reconducir el debate hacia el foco de la actividad, pensando en ventajas e inconvenientes de la distribución para el alumno, Daniel insiste en dar características de la tarea. Añade que permite a los estudiantes *darse cuenta de qué es una cosa y qué es otra* [TF1.1A.4 U217], identificando la intencionalidad de la maestra al plantear la actividad (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Los EPM, respondiendo a la petición de la formadora de que comparen las figuras de ambas partes, identifican dos parejas de figuras con características comunes y situadas, en cada caso, una en la zona de polígonos y otra en la zona de no polígonos. *La 11 y la 5* [TF1.1A.4 U223] o *la 12 y la 3* [TF1.1A.4 U226], mostrando conocimiento sobre características comunes de las figuras (KoT, definiciones, propiedades y sus

fundamentos). En el primer caso son dos polígonos cóncavos con un lado horizontal. La formadora añade que pertenecen a una misma familia de polígonos, aunque no se explicita qué tipo de polígonos son. Las figuras 12 y 3 son dos líneas poligonales complejas, cada una formada por seis segmentos de los cuales 4 confluyen en un vértice. La formadora aprovecha estas intervenciones para relacionar las respuestas con un tema que ya ha salido en clase: la simetría de las figuras [TF1.1A.4 U228]. La diferencia más evidente entre la figura 3 y la 12 es que la primera de ellas tiene dos ejes de simetría y la segunda no es simétrica. Surge una oportunidad para tratar de identificar los ejes de simetría de estas figuras. En la [TF1.1A.4 U232] la formadora dice que la figura 12 *no parece que tenga ejes de simetría, sin embargo, en la 3 se ve claramente cuáles serían sus ejes de simetría*, pero no se explicitan cuántos o cuáles serían. .



En las intervenciones siguientes algunos EPM identifican algunas potencialidades de la tarea. Consideran que *la puesta en común que hacen luego todos [...] empiezan a debatir entre ellos* [TF1.1A.4 U241] es una estrategia de enseñanza que favorece la reflexión conjunta en clase (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). También detectan algunas debilidades, por ejemplo, Isabel considera *que puede llevar a error* [TF1.1A.4 U243], si un estudiante no está atento al debate se puede quedar con la representación gráfica que se hace en la pizarra de manera inicial (KFLM, fortalezas y dificultades). El conocimiento que se moviliza en este fragmento es consecuencia de la interpretación que hacen los EPM del enunciado de la tarea y de las interacciones que surgen en el aula entre los estudiantes y la formadora.

Al finalizar este fragmento Gabi plantea que *esta actividad se podría hacer mejor habiendo recortado todas las figuras individualmente, se hubiese puesto en la pizarra polígonos y no polígonos y se le dan individualmente a cada persona y salen cada uno, y se trabaja de forma dinámica con ellos* [TF1.1A.4 U252]. Gabi, al plantear una actividad alternativa utilizando como material concreto un conjunto de figuras recortadas en cierto material, muestra conocimiento sobre actividades que se pueden usar para la enseñanza del concepto polígono (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Además, se evidencia que conoce un recurso material como elemento para la enseñanza de las matemáticas y los beneficios asociados a su uso como apoyo para la enseñanza del concepto de polígono (KMT, recursos materiales y digitales). Al poner énfasis en el *trabajo de forma dinámica* que se consigue con el uso de las figuras recortadas muestra que sabe de los beneficios que el trabajo dinámico en geometría tiene en la comprensión

de los conceptos geométricos y sus relaciones (KFLM, teorías de aprendizaje), así como de los obstáculos que puede generar el uso exclusivo de trabajo estático en el aprendizaje de geometría (KFLM, fortalezas y dificultades)

Así mismo, además, al proponer el uso de este material está planteando un cambio en la forma en la que se representan las figuras al pasar de la representación gráfica utilizada en la propuesta de la actividad que plantea la maestra a una representación manipulativa (Duval, 2006) permitiendo considerar un aspecto fundamental en la diferenciación entre línea poligonal y polígono, (ver Figura 4.3) (KoT, registros de representación).

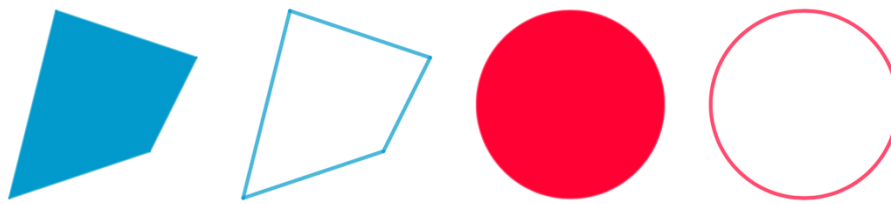


Figura 4.3 Polígono vs línea poligonal. Círculo vs circunferencia

Por último, cuando Gabi dice *en quinto de primaria deberían saberlo* [TF1.1A.4 U260], refiriéndose a la clasificación de figuras en polígonos y no polígonos, muestra conocimiento sobre el nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado (KMLS) con relación a la clasificación de figuras en polígonos y no polígonos. Esta respuesta es fruto de las interacciones generadas en clase.

Tabla 4.2

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A Actividad 1.1

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	<u>Procedimientos</u>	Saben que las características de los lados de un polígono permiten establecer criterios de clasificación (U134).
		Saben clasificar figuras atendiendo a su simetría (U181).
	<u>Definiciones, propiedades y sus fundamentos</u>	Conocen las propiedades que caracterizan al concepto de polígono al identificar figuras mal posicionadas (U 22, 128, 130).
		Conocen propiedades de los elementos de un polígono, lo que les permite reconocer que en la clasificación hay errores (U22, 130).
		Saben que los lados de un polígono son elementos significativos en los que se pueden fijar para establecer criterios de clasificación (U134).
		Saben que hay polígonos regulares e irregulares (U134).
		Saben que los polígonos regulares son simétricos y caracterizan las figuras simétricas (U137-144).

	Registros de representación	Saben que todos los lados de los polígonos regulares tienen la misma longitud (U161).
		Saben que una figura con lados congruentes no tiene por qué ser regular (U163).
		Saben que los polígonos regulares son simétricos (U170).
		Conocen la definición de polígono y saben qué tiene que verificar para ser regular (U196).
		Saben que las figuras abiertas no son polígonos, pero no identifican como características críticas el que los lados sean rectos o que la línea poligonal sea simple (U201).
		Saben identificar características comunes en figuras situadas en grupos diferentes (U223, 226).
		Usan elementos reales (las manos) para representar el concepto de figuras simétricas (U142).
KPM	Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal	Saben realizar conversiones entre el registro verbal y el concreto para expresar el significado de ser figura simétrica (U142).
		Proponen un cambio de registro gráfico a figural-icónico utilizando figuras recortadas (U252).
	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	Saben que se debe hacer uso de un lenguaje exhaustivo a la hora de definir en matemáticas (U134).
KFLM	Teorías de aprendizaje	Reflexionan sobre la adecuación de expresiones del tipo “más regular” considerándolas no exhaustivas (U144-153).
	Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático	Conocen algunas características propias del concepto polígono, pero no determinan las críticas (U165, 201).
	Fortalezas y dificultades	Saben que el tratamiento dinámico del conocimiento geométrico favorece su aprendizaje (U252).
		Entienden que los estudiantes diferencian entre polígonos y no polígonos fijándose en la regularidad de la figura (U134).
		Saben que los escolares consideran como polígonos las figuras más familiares (U184,191).
		Identifican dificultades que tienen los escolares para diferenciar entre figuras que son polígono de otras que no y entre polígonos regulares o irregulares (U196).
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Saben que los estudiantes pueden tener dificultades al trabajar con actividades del tipo presentado por la maestra por dar como válido el primer resultado sin correcciones (U243).
		Saben que el uso exclusivo de trabajo estático en geometría puede provocar obstáculos de aprendizaje (U252).
	Recursos materiales y digitales	Saben que con la tarea propuesta la maestra conoce las ideas previas del estudiante y sirve para repasar (U211,215, 217).
KMLS	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado	Saben que el debate sobre la distribución de las figuras favorece la reflexión sobre características del polígono (U241).
		Conocen que el uso de figuras recortadas es un recurso didáctico que favorece el trabajo dinámico (U252).
		Saben que la clasificación de figuras en polígonos y no polígonos es un contenido que se trabaja en curso previos a 5º de Educación Primaria (U260).

4.1.1.2. Actividad 1.2. Argumentos esgrimidos por los escolares.

Esta segunda actividad se plantea antes de leer el fragmento de la transcripción en el que los escolares debaten sobre la adecuación o no de la inclusión de cada figura en el grupo de polígonos o no polígonos. Se les pide que avancen las justificaciones que los EPM consideran que darán los estudiantes para que haya quedado la distribución tal y como aparece en la Figura 4.1.

Actividad 1.2. ¿Cuáles consideráis que habrán sido los argumentos esgrimidos por los estudiantes?

Con esta actividad pretendemos que muestren su conocimiento sobre los procesos o estrategias utilizadas con frecuencia por alumnos a la hora de trabajar con este concepto, o el lenguaje que usan de forma común (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). Asimismo, se espera que aparezca KFLM (fortalezas y dificultades) pues la intención es que reflexionen sobre conflictos o errores frecuentes asociados al concepto de polígono.

Como algunos EPM interpretaron que para resolver la actividad 1.1. debían dar las razones que habían llevado a los escolares a hacer la distribución que aparece en la tarea formativa, parte de las respuestas esperadas en esta segunda actividad ya están dadas. Lo que se hace es recopilar la información aportada en parte de las respuestas de la primera actividad.

Análisis

Tabla 4.3

Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 1.2

Código	Contenido del episodio
[TF1.1A.5 U261-280]	Actividad 1.2. Argumentos esgrimidos por los escolares.

[TF1.1A.5 U261-280] Actividad 1.2. Argumentos esgrimidos por los escolares.

261. Formadora: Bien, ¿cuáles consideráis que han sido los argumentos esgrimidos por los estudiantes, para decidir lo que es polígono o no polígono? ¿Alguna otra idea se os ocurre?

262. Paloma: Yo he puesto que... se basan también en lo de regular o no regular.

264. Paloma: Aunque haya algunos en polígonos que los han puesto y no son regulares, como el 7 que es un pentágono [la formadora señala la figura en la diapositiva]. Ese. Yo creo que lo que se basa principalmente es que si lo ve como regular o como no regular.



266. Rosa: O también la simetría.

267. Formadora: Es si es regular o no regular, pero ¿regular o no regular como hemos dicho antes?

269. Formadora: Un poco regular, muy regular...

270. Paloma: No claro, hay algunos... como es cada niño el que pone una figura, y la mayoría se han basado en eso..., si es regular es polígono, si no es regular es no polígono.

273. Formadora: Sí, tú crees que aquí, todos los que están en la lista de polígonos son regulares.

274. Paloma: No.

277. Rosa: También es la simetría, porque los polígonos no son todos simétricos, pero en los no polígonos ninguno es simétrico.

El fragmento comienza con la intervención de la formadora en la que recopila algunas de las aportaciones dadas por los EPM en la resolución de la actividad 1.1. Hace mención a la familiaridad de las figuras y a la necesidad del polígono de estar limitado por una línea poligonal cerrada.

Paloma aporta aspectos relacionados con la regularidad [TF1.1A.5 U262, 264], al decir que *se basan también en [...] si lo ve como regular o como no regular* como respuesta al enunciado de la actividad, indicando la estrategia de resolución que considera que utilizan los estudiantes en la resolución de la tarea (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). Utiliza este argumento a pesar de que 8 de las 9 figuras representadas no son regulares. El único polígono regular representado en la parte de polígonos es el cuadrado. Es más, insiste en esta idea al decir *como es cada niño el que pone una figura, y la mayoría se han basado en eso..., si es regular es polígono, si no es regular es no polígono, yo creo que es lo que ha pensado la mayoría* [TF1.1A.5 U270, 272]. Paloma identifica errores u obstáculos de los escolares a la hora de reconocer qué figuras son polígonos (KFLM, fortalezas y dificultades). Además, esta EPM reconoce que no todas las figuras representadas en la parte de polígonos son regulares, pues responde *no* [TF1.1A.5 U274] cuando la formadora le plantea si *todas las figuras que están en la lista de polígonos son regulares* [TF1.1A.5 U273], aunque no explicita qué figuras serían regulares y cuáles no (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Consideramos que es un indicio de que conoce el cómo clasificar polígonos atendiendo a la regularidad de la figura (KoT, procedimientos).

Por otra parte, Rosa añade la simetría como otra de las características de las figuras en la que se han podido basar los escolares a la hora de argumentar si una figura es polígono o no, *también la simetría, porque los polígonos no son todos simétricos, pero en los no polígonos ninguno es simétrico*

[TF1.1A.5 U277] (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). En la Figura 4.4 hemos identificado las figuras simétricas representando los correspondientes ejes de simetría (en la figura 4 solo hemos ejemplificado con algunos de los infinitos ejes de simetría, cualquier recta que pase por el centro del círculo es un eje de simetría de la figura). Como podemos observar, seis de las nueve figuras representadas como polígonos son simétricas y de las no polígonos no hay ninguna figura simétrica. En la intervención de Rosa, además, identificamos un indicio de KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos) pues sabe que todas las figuras que aparecen en la parte de no polígonos y algunas de las que aparecen como polígonos son asimétricas. Así mismo, consideramos que sabe cómo clasificar figuras atendiendo a la simetría de cada una (KoT, procedimientos).

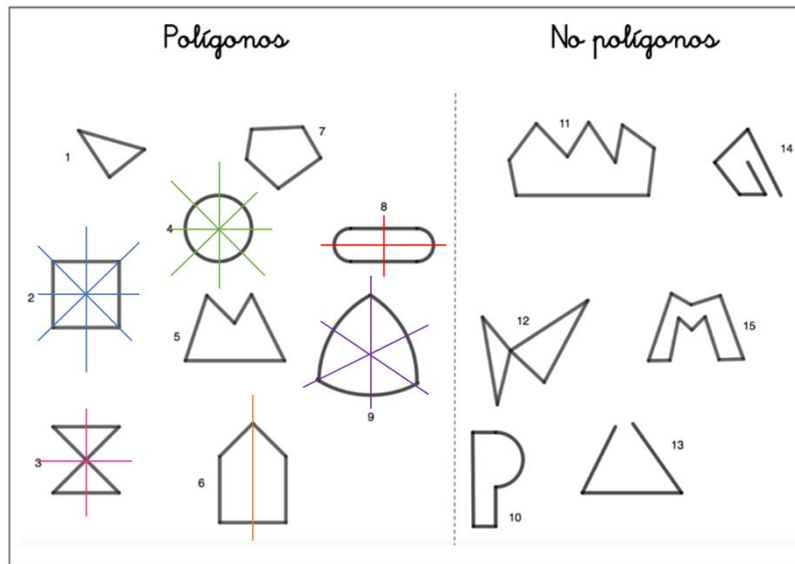
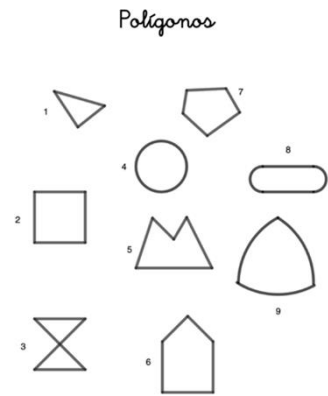


Figura 4.4 Ejes de simetría de las figuras representadas

El conocimiento especializado que se moviliza en la puesta en común de la resolución de la actividad 1.2 parte del enunciado, si bien las interacciones entre los EPM y la formadora inciden en la respuesta al enunciado planteado.

Tabla 4.4

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 1.2

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	Procedimientos	Saben cómo clasificar figuras atendiendo a la equivalencia de lados y ángulos (regularidad) (U273). Saben cómo clasificar figuras atendiendo a la simetría (U277).
	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Conocen las propiedades que caracterizan al concepto de polígono regular que le permite identificar figuras que no lo son (U274). Saben diferenciar entre figuras simétricas y otras que no lo son (U277).
KFLM	<u>Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático</u>	Saben que los estudiantes van a relacionar polígonos con figuras regulares (U262, 264, 270, 272). Saben que los estudiantes van a relacionar polígonos con figuras simétricas (U277).
	<u>Fortalezas y dificultades</u>	Identifican errores u obstáculos de los escolares a la hora de reconocer qué figuras son polígonos (U270, 272).

4.1.1.3. Actividad 1.3. Definición de polígono.

Con la actividad 1.3 pretendemos conseguir una definición de polígono desde las aportaciones de todos los EPM del grupo.

Actividad 1.3. Enunciad una definición de polígono.

La propuesta es que cada uno redacte una definición de polígono que considere óptima (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Estas definiciones se compartirán en la puesta en común en el grupo de clase y se analizarán, valorando así si en cada una de ellas se están considerando todos los atributos necesarios (figura plana limitada por una línea poligonal cerrada y simple), y solo estos, o además se han incluido atributos no imperativos, como podría ser congruencia de algunos elementos de la figura, simetría, regularidad, etc. Aunque se está trabajando explícitamente con la definición del concepto de polígono, se puede esperar que se traten de identificar qué atributos son relevantes y cuáles son superfluos (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar una definición matemática).

Si bien, el análisis de las definiciones dadas por los EPM en cuanto a los atributos que debe cumplir una definición matemática (Zalavsky y Shir (2005) no es objeto de esta actividad (se propone analizar la definición a la que llegan los escolares en una actividad próxima, dentro de la tarea formativa), la formadora consideró oportuno realizar ese análisis con las definiciones aportadas por los EPM. En este caso dividimos el fragmento

de la puesta en común de la resolución de la actividad 1.3 en tres episodios. En el primero se tratan las definiciones de polígono dadas por los EPM. En el segundo los EPM analizan si estas definiciones verifican los atributos propios de una definición matemática. Por último, en el tercer episodio, se pretende enunciar una definición de polígono con las aportaciones de los propios EPM.

Análisis

Tabla 4.5

Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 1.3

Código	Contenido del episodio
[TF1.1A.6 U289-324]	Actividad 1.3. Definición de polígono.
[TF1.1A.7 U325-432]	Atributos de una definición en las respuestas de los EPM.
[TF1.1A.8 U434-501]	Definición de polígono dada por los EPM.

[TF1.1A.6 U289-324] Actividad 1.3. Definición de polígono.

289. Formadora: *Venga, idme diciendo definiciones de polígono [para escribir en la pizarra].*
290. Tina: *Yo he puesto, figura que posee un punto de inicio y un punto final que están unidos...*
296. Tina: *Y que puede empezar también en cualquier sitio que tú eliges.*
298. Belén: *Yo tengo puesto figura cerrada que tenga lados, ángulos y vértices.*
307. Zoé: *Yo he puesto..., es una figura plana cerrada.*
314. Formadora: *[...]Daniel, definición de polígono. ¿Qué has definido tú como polígono?*
321. Daniel: *Figura cerrada con lados iguales... [...] Figura geométrica.*
324. Formadora: *Figura geométrica, no cualquier figura... Figura geométrica.*

La formadora plantea la pregunta propuesta en la tarea formativa, *venga idme diciendo definiciones de polígono* [TF1.1A.6 U289-324], con intención de escribir en la pizarra las aportaciones hechas por los EPM para poder compararlas entre sí.

En la respuesta de Tina al enunciado de la actividad, *figura que posee un punto de inicio y un punto final [...], que están unidos, [...] y que puede empezar también en cualquier sitio que tú eliges* [TF1.1A.6 U290-296], el único atributo relevante del concepto polígono que parece tener en cuenta es que la línea que lo delimita debe ser cerrada, al indicar que el inicio y el final (se entiende que de dicha línea) están unidos. Al decir que puede empezar en cualquier sitio interpretamos que su definición se basa en la representación gráfica de lo que ella considera polígono (KoT, registros de representación). Otra estudiante, Belén, muestra su conocimiento sobre la definición de

polígono al decir que es una *figura cerrada que tenga lados, ángulos y vértices* [TF1.1A.6 U298]. Además de indicar que un polígono debe estar limitado por una línea poligonal cerrada, enuncia una serie de elementos propios de un polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Zoé enuncia una tercera definición de polígono: *es una figura plana cerrada* [TF1.1A.6 U307]. Se evidencia su conocimiento sobre propiedades del polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). En este caso añade, a la propiedad de tener que ser cerrado, una característica que no se había tratado hasta ese momento en clase: el polígono es una figura que se define en un plano (Puig Adam, 1986).

Por último, y tras preguntar la formadora directamente a Daniel, el EPM comparte la definición de polígono que ha escrito en su cuaderno. Lo define como una *figura cerrada con lados iguales*, remarcando que debe ser una *figura geométrica* [TF1.1A.6 U321-323]. Sigue apareciendo la propiedad de ser cerrada como atributo relevante, pero añade uno no imperativo, como es que tenga lados de igual longitud, a la definición del concepto. Muestra, de esta forma, su conocimiento sobre el concepto polígono (KoT, propiedades y sus fundamentos).

Por cómo surge la puesta en común observamos que las intervenciones de estos EPM muestran respuestas directas al enunciado de la actividad, aunque alguna de las últimas pueden estar influidas por las interacciones producidas en el aula (cambio de tono en el discurso de la formadora, definición de otro EPM, etc.).

[TF1.1A.7 U325-432] Atributos de una definición en las respuestas de los EPM.

334. Formadora: *Volvemos a nuestras definiciones, ¿podemos decir que todas ellas cumplen [los atributos que debe cumplir una definición]...?*
335. Alumnos: *No.*
338. Formadora: *¿Qué problemas encontramos ahí?*
339. Rosa: *Que no se sabe lo que es una figura, por ejemplo.*
340. Formadora: *[...] ¿qué es una figura?*
343. Daniel: *Una forma.*
344. Elsa: *Una representación gráfica.*
356. Formadora: *Pero si represento un triángulo, y lo represento en un papel, y lo giro...*
357. Elsa: *Es lo mismo.*
366. Belén: *[Asintiendo] ¿Una línea recta no es una figura?*

367. Gabi: *Sí, ¿no?*
371. Formadora: *Una concatenación de segmentos ¿sería una figura?*
372. Alumnos: *Sí.*
373. Rosa: *Una definición de figura podría ser una representación en dos dimensiones ...*
375. Rosa: *No, si no una representación en dos dimensiones y va en la línea ...*
376. Formadora: *¿Qué significa cerrada?*
378. Daniel: *Que no es abierta.*
380. Formadora: *A ver, que no es abierta, y qué significa que es abierta.*
381. Elsa: *Que no tiene dos lados unidos.*
401. Formadora: *¿Cuáles eran las que tenían características comunes?*
403. Rosa: *La 5 y la 11, la 3 y la 12 (ver Figura 4.1).*
404. Formadora: *La 5 y la 11. Y por qué creéis que la 5 está incluida en polígonos y la 11 la ha incluido en no polígonos.*
405. Paola: *Porque la 11 es más larga y tiene más picos.*
406. Paloma: *Porque tiene un último pico, y esta...*
414. Rosa: *Es que la 5 es casi simétrica y casi regular.*
415. Formadora: *Entonces..., perdón, ¿casi simétrica y casi regular?*
416. Rosa: *Se ve como más normal en ese sentido [comillas con los dedos].*
418. Rosa: *Más familiar para los niños. [...]La otra la ve como más rara.*
421. Formadora: *Por ejemplo, la figura número 3 y la figura número 12. [...]Por qué pensáis que la 3 está y la 12 no, eso ya surgió antes.*
424. Rosa: *Porque es más familiar.*
425. Formadora: *Es una cuestión relacionada con la simetría. Esta es más común y aquella es rara, es una figura que no... Y qué ocurre con la 5 y la 15.*
426. Carmen: *Que, a lo mejor, al ser letra y verla en el abecedario pues no ...*
427. Formadora: *Efectivamente, eso le pasaría también [...] a la 10 y la 15 serían dos figuras que no incluyo como polígonos porque parecen [...] letras, son letras.*
432. Rosa: *No pueden ser polígonos.*

Una vez que se han compartido varias definiciones dadas por EPM, la formadora plantea analizarlas atendiendo a los atributos/características que debe cumplir una definición matemática siguiendo a Escudero et al. (2014): jerarquía, no circularidad, no ambigüedad, no contradicción, invariante bajo el cambio de representación, equivalencia y minimalidad. Los EPM disponen de un documento que resume la información facilitada por los autores como anexo a la tarea formativa. La formadora trata el significado de cada uno de los atributos y hace uso de ejemplos que aclaran su explicación.

A continuación, pregunta si las definiciones dadas por los EPM cumplen las características citadas, obteniendo un *no* unánime [TF1.1A.7 U335], indicio de que

reconocen que las definiciones dadas no son exhaustivas (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones, prácticas particulares del quehacer matemático, definir). Son múltiples las respuestas que dan los EPM cuando la formadora pregunta por los *problemas que se encuentran (en las definiciones dadas)* [TF1.1A.7 U338]. Por ejemplo, Rosa considera *que no se sabe lo que es una figura* [TF1.1A.7 U339], aludiendo al atributo de jerarquía. Sabe que los términos que se utilicen en una definición deben ser básicos o estar definidos previamente. (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático).

La formadora aprovecha para preguntar por el significado del término *figura* en un contexto geométrico. Los EPM utilizan términos que consideran sinónimos. Por ejemplo, Daniel dice que es una *forma* [TF1.1A.7 U343] o Elsa la define como *representación (gráfica)*, [TF1.1A.7 U344], aunque no llegan a determinar los atributos relevantes que definen el concepto de figura (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Puig Adam (1986, p.13) define figura como *todo conjunto de puntos, y añade las rectas, los semiplanos, los segmentos, los ángulos, los polígonos, etc., son figuras*.

Podemos entender que Daniel, al plantear *forma* (configuración externa de algo) (*Real Academia Española [RAE], 2024*) como sinónimo de figura, tiene una idea intuitiva, pero seguiría sin estar definido el concepto inicial. En la intervención de Elsa observamos que identifica el concepto con la imagen o idea del concepto (Turégano, 2006; Tal y Vinner 1981).

Por otra parte, al decir la formadora *si represento un triángulo en un papel, y ahora giro el papel...* [TF1.1A.7 U356], está cuestionando si afecta la posición de la figura en la

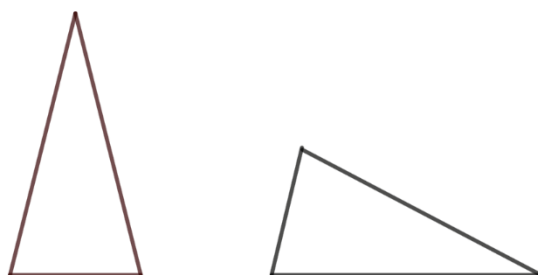


Figura 4.5 Triángulo isósceles en distintas posiciones

definición (ver Figura 4.5). En la respuesta de algunos EPM, *es lo mismo* [TF1.1A.7

U357], se evidencia que entienden que las propiedades de las figuras no cambian al modificar la posición en el plano (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

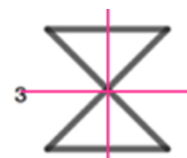
La formadora insiste en la necesidad de tener una definición de figura. Plantea cuestiones para provocar la reflexión en los EPM sobre si determinados objetos son figuras: *una recta, un segmento, una concatenación de segmentos...* [TF1.1A.7 U363-371]. Las respuestas de los EPM muestran las dudas que les plantea esta cuestión, por ejemplo, *¿una línea recta no es una figura?* [TF1.1A.7 U366]. Ante las insistentes preguntas de la formadora, los alumnos responden que una concatenación de segmentos *sí* es una figura [TF1.1A.7 U372], es decir, saben que una línea poligonal es una figura (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). En una aproximación a la misma Rosa dice que una figura es *una representación en dos dimensiones...* [TF1.1A.7 U373]. Aunque no especifica las propiedades que caracterizan al concepto, lo identifica como un ejemplo del mismo (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

La formadora sigue planteando cuestiones para la reflexión basadas en las definiciones de polígono que han propuesto los EPM. *¿Qué significa cerrada?* [TF1.1A.7 U373]. Los EPM responden negando el antónimo, *Que no es abierta* [TF1.1A.7 U378-379]. Se les recuerda a los EPM que la definición no puede ser ambigua. Elsa indica que ser abierta implica *que no tiene dos lados unidos* [TF1.1A.7 U381], dando una definición del concepto (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

La formadora continúa planteando cuestiones sobre aspectos importantes a tener en cuenta a la hora de dar una definición de polígono con la intención de provocar la reflexión entre los EPM. De esa forma consigue que los estudiantes identifiquen figuras con atributos comunes, que los escolares han identificado, en algún caso, una como polígono y otra como no polígono. Los EPM identifican características comunes entre pares de figuras, aunque no dicen explícitamente en qué se fijan para establecer esa relación. Por ejemplo, Rosa ve que *la (figura) 5 y la 11*, [TF1.1A.7 U403] están relacionadas entre sí. Ambas figuras son cóncavas y con un lado (en la parte de debajo de



la figura) horizontal. No las relaciona con la figura 15 que también es cóncava y tiene dos lados en horizontal, pero a nivel visual difiere



de las anteriores por tener ángulos cóncavos en la parte baja de la figura. Rosa también identifica propiedades comunes entre la 3 y la 12 [TF1.1A.7 U403]. Las dos figuras representan líneas poligonales complejas. Lo que las diferencia es que la primera tiene dos ejes de simetría y la segunda es asimétrica. Es decir, Rosa es capaz de identificar atributos comunes en distintas figuras (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

La formadora pregunta *¿por qué creéis que la 5 está incluida en polígonos y la 11 la han incluido en no polígonos?* [TF1.1A.7 U404]. Los EPM responden con las justificaciones que consideran que habrían dado los escolares a la hora de colocar cada figura en un grupo. Por ejemplo, Paola considera que la figura 11 está en *no polígonos* porque *es más larga y tiene más cosas...* [TF1.1A.7 U405], mientras marca con el dedo subidas y bajadas. Los EPM son capaces de identificar posibles obstáculos de los escolares a la hora de identificar una figura como polígono (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático, fortalezas y dificultades).

Rosa considera que la figura 5 la han incluido en la parte de polígonos porque *es casi simétrica y casi regular* [TF1.1A.7 U414]. Rosa muestra su conocimiento sobre tipos de polígonos. Esta figura, como ya hemos comentado en apartados anteriores, tiene dos ejes de simetría, por tanto, es simétrica, no *casi simétrica*. Además, no es un polígono regular, pues la línea poligonal que lo delimita es compleja, además tiene ángulos de distinta amplitud y lados de distinta longitud. Rosa utiliza el término *regular* porque se fija en la forma y no en las propiedades que debe verificar una figura para clasificarla como tal. Así aclara diciendo *se ve como “más normal” en ese sentido, más familiar para los niños, la otra (12) la ven como más rara* [TF1.1A.7 U416,418, 420] (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).



La formadora añade que el que la figura 3 la hayan colocado en la zona de polígonos es *una cuestión relacionada con la simetría* [TF1.1A.7 U425], la figura 12 *es más rara* [TF1.1A.7 U425], y continúa pidiendo que comparen las figuras 5 y 15, que siendo ambas polígonos cóncavos los EPM no las habían considerado como figuras con atributos

P¹⁰

comunes situadas en zonas diferentes. En este caso Carmen justifica que la figura 15 la consideren no polígono por *ser letra y verla en el abecedario* [TF1.1A.7 U426], al igual que la figura 10. Considera que al ubicarlas en otra área de

conocimiento (lengua) no la conciben como polígono (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

El conocimiento especializado que se moviliza en la primera parte de este episodio, que corresponde con las definiciones de polígonos dadas por los EPM, surge como respuesta directa al enunciado de la actividad, pero el resto del conocimiento especializado movilizado es consecuencia de las interacciones que se establecen en el aula, en su mayor parte por la gestión que hace la formadora.

[TF1.1A.8 U433-501] Definición de polígono dada por los EPM

433. *Formadora: [...] ¿Seríamos capaces de dar una definición de polígono después de todo lo que hemos pensado?*
434. *Daniel: Conjunto de líneas rectas...*
436. *Alumnos: Segmentos.*
439. *Formadora: Segmentos, que son una parte... de qué, Elsa. ¿Un segmento que es?*
440. *Rosa: Una parte de una recta.*
441. *Formadora: [...] Tenemos segmentos, y ahora, ¿qué hacemos con esos segmentos?*
442. *Alumnos: Se unen.*
443. *Formadora: Los unimos, o sea los concatenamos, ¿eso significa que los unimos por sus...?*
444. *Alumnos: Vértices.*
445. *Formadora: Extremos, todavía no tenemos vértices, ¿no?*
446. *Paloma: Y se forman los vértices.*
447. *Formadora: Venga, y entonces tenemos un montón de segmentos unidos por sus extremos...*
448. *Paola: Generamos vértices.*
451. *Formadora: ... que serán esas uniones, ¿no? Y además generamos qué...*
452. *Javier: Una figura cerrada.*
453. *Carmen: Ángulos.*
454. *Formadora: Ángulos, perfecto. Que sería esa parte del plano delimitado por las semirrectas que definen esos segmentos que se cortan en el punto que llamamos...*
455. *Daniel: Extremo. [Hay silencio]*
460. *Formadora: Vértice, ¿no? [...], y ¿qué más le tenemos que añadir?, Javier, que antes has dicho...*
461. *Javier: Tiene que ser cerrada.*
462. *Formadora: [...] ¿Tendríamos que añadirle algo más a esa descripción?*
465. *Isabel: Figura plana, ¿no?*
466. *Formadora: Figura plana, ¿por qué tiene que ser plana? Tiene que estar...*

467. *Isabel: En una superficie...*
470. *Formadora: [...] La definición que acabamos de dar, ¿quiénes la cumplen?*
471. *Alumnos: La uno.*
474. *Javier: Siete.*
476. *Belén: La dos*
478. *Gabi: La cinco, [...] Tres.*
482. *Gabi: La seis.*
484. *Javier: La once.*
486. *Javier: La cuatro.*
487. *Gabi: La doce.*
489. *Alumnos: Quince.*
491. *Gabi: Y ya está.*
492. *Paloma: Pero no, ese no es correcto. [Hay barullo].*
493. *Formadora: Y la diez no, ¿por qué?*
494. *Alumnos: Porque tiene un lado curvo.*
495. *Elsa: Ni la cuatro, ni la ocho, ni la diez.*
496. *Formadora: Vale. Y la ocho no, ¿por qué?*
497. *Paloma: No tiene ángulos.*
498. *Elsa: Tiene lados curvos.*
499. *Formadora: Y la cuatro no...*
500. *Elsa: Por lo mismo.*
501. *Formadora: Así que... hemos llegado a un consenso sobre lo que podría ser un polígono, luego vemos si hay que añadirle algún apellido más a esto que acabamos de decir.*

La formadora plantea formular una definición de polígono entre todos *¿Seríamos capaces de dar una definición de polígono después de todo lo que hemos pensado?* [TF1.1A.8 U433]. Se van dando elementos y atributos de estos que definen al concepto, pero no hay una definición dada por un estudiante que incluya todas las características imprescindibles. David comienza diciendo que un polígono es un *conjunto de líneas rectas* [TF1.1A.8 U434] (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos), fijando su atención en el contorno y no en el polígono en sí. La formadora, para corregir esta intervención repite, en tono de pregunta, *¿líneas rectas?* [TF1.1A.8 U435], a lo que varios EPM responden *segmentos* [TF1.1A.8 U436], nombrando a los elementos geométricos que forman la línea poligonal que delimita un polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Para profundizar, la formadora pregunta *¿un segmento qué es?* [TF1.1A.8 U439]. Rosa lo define como *una parte de una recta* [TF1.1A.8 U440] identificando un atributo relevante del concepto segmento (KoT, definiciones, propiedades, y sus fundamentos). Se necesita añadir que está *determinada por dos puntos*

de la recta [TF1.1A.8 U441], propiedad que añade la formadora para completar esta definición. Una semirrecta se corresponde con una parte de una recta y no es un segmento.

La formadora, plantea cuestiones que hace que los EPM reflexionen sobre el proceso de construcción de un polígono. Plantea que los segmentos se concatenan para formar la línea poligonal, y hace preguntas guiando a los EPM en el camino para llegar a la definición. Por ejemplo, cuestiona *¿los unimos por sus...?* [TF1.1A.8 U443], a lo que varios EPM responden *vértices* [TF1.1A.8 U444], relacionándolo con el papel que juegan los extremos de los segmentos como elementos de la línea poligonal o polígono que generan (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Cuando la formadora aclara que como puntos del segmento se les llama extremos, Paloma añade que al unir los segmentos de manera concatenada *generamos vértices* [TF1.1A.8 U448] mostrando su conocimiento sobre las propiedades de estos elementos del polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Así, Carmen añade *y los ángulos* [TF1.1A.8 U450], indicador de que conoce otros elementos de un polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos), que los define la formadora como *esa parte del plano delimitado por las semirrectas que definen esos segmentos que se cortan en el punto que llamamos... vértice* [TF1.1A.8 U454].

Hasta ahora los elementos y propiedades que se han explicitado en clase hacen referencia a cualquier línea poligonal. Javier añade un atributo relevante para definir un polígono, añadiendo que *tiene que ser cerrada* [TF1.1A.8 U461] (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). La formadora enuncia lo que esto implica, *el extremo de uno de los segmentos tiene que unirse con otro segmento* [TF1.1A.8 U462] y pregunta si hay que añadir alguna otra característica, a lo que Isabel añade *figura plana* [TF1.1A.8 U465]. Muestra, por tanto, conocimiento sobre otro de los atributos relevantes del concepto polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Así, han llegado a definir polígono como los puntos del plano que quedan delimitados por una línea poligonal (conjunto de segmentos concatenados) cerrada. No han incluido en la definición la necesidad de que esa línea poligonal sea simple.

Es decir, las figuras 3 y 12 verificarían la definición dada por el



grupo. Surge la oportunidad de seguir profundizando en las características necesarias para definir de manera exhaustiva este concepto.

La formadora plantea *la definición que acabamos de dar, ¿quiénes la cumplen?* [TF1.1A.8 U470]. Los EPM van diciendo números de figuras que son polígonos, aplicando el proceso de razonamiento de reconocimiento. Gabi incluye la figura *tres* [TF1.1A.8 U480] y la *doce* [TF1.1A.8 U487], cuyas líneas poligonales son complejas, si bien verifican la definición que han enunciado (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Javier, al igual que los escolares, incluye al círculo como polígono al decir que *la (figura) cuatro* [TF1.1A.8 U486] verifica la definición, a pesar de ser evidente que la línea que lo  delimita (la circunferencia) no es una línea poligonal. Este error puede estar vinculado a un aprendizaje no basado en la reflexión sobre la definición. Habitualmente, en los cursos iniciales, se suele trabajar el círculo junto a polígonos como triángulo, cuadrado o rectángulo. Eso hace que haya estudiantes que consideren que pertenecen todos a la misma clase, basando su decisión en prototipos y rasgos perceptivos y no en los atributos relevantes que definen al concepto (Clements et al., 1999; Herman, 2022; Özçakir, et al, 2019).

La formadora pregunta por qué algunas figuras no son polígonos, así plantea *y la diez no, ¿por qué?* [TF1.1A.8 U493]. Los EPM responden *porque tiene un lado curvo* [TF1.1A.8 U494], identificando que no verifica una de las características imprescindibles que debe verificar una figura para ser polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Saben que es suficiente que no se cumpla una de las propiedades críticas de un concepto para asegurar que no es ejemplo de este (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones; prácticas particulares del quehacer matemático). Así Elsa identifica figuras que no son polígonos por esta misma razón al decir *ni la cuatro, ni la ocho, ni la diez* [TF1.1A.8 U494]. A la figura diez añade el círculo y la figura ocho, sin embargo, no incluye a la 

 figura nueve, que tampoco es polígono por la misma razón. Elsa justifica que la figura ocho no es polígono porque *tiene lados curvos* [TF1.1A.8 U498], y Paloma lo hace indicando que dicha figura *no tiene ángulos* [TF1.1A.8 U497], (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Tabla 4.6
Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 1.3

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO

KoT	<u>Definiciones, propiedades y sus fundamentos</u>	Saben que un polígono es una figura cerrada que tiene lados, ángulos y vértices (U298).
		Saben que los polígonos son figuras planas cerradas (U307, 461, 465).
		Saben que las propiedades de las figuras no cambian modificando solo la posición en el plano (U357).
		Saben que una concatenación de segmentos es una figura (U372).
		Saben que las figuras abiertas tienen lados que no se unen a otros por el extremo (U381).
		Saben que los polígonos están unidos por segmentos concatenados (U436).
		Saben que los segmentos son porciones de rectas (U439).
		Saben que los puntos de unión de dos lados consecutivos de un polígono son los vértices (U448).
		Saben que al considerar dos lados de un polígono se pueden identificar ángulos (U450).
		Saben que los polígonos no tienen lados curvos (U494).
KPM	Registros de representación	Conocen cómo puede representar gráficamente un polígono (U290-296).
	Prácticas particulares del quehacer matemático	Saben identificar polígonos con características equivalentes (reconocimiento) (U403).
		Saben reconocer polígonos entre un conjunto de figuras planas (U474-499).
	<u>Condiciones necesarias y suficientes para generar una definición matemática</u>	Saben que es suficiente que no se cumpla una de las propiedades críticas de la definición de un concepto para asegurar que no es un ejemplo (U494).
KFLM	Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático	Saben qué argumentos pueden dar los estudiantes a la hora de justificar si una figura es polígono o no lo es (U405-426).
	Fortalezas y dificultades	Saben los posibles obstáculos o dificultades que pueden tener los escolares para identificar una figura como polígono.

4.1.2. Segundo fragmento. Resolución, por parte de los escolares, de la actividad planteada por la maestra.

Resumen

Para resolver la segunda actividad los EPM, tras la lectura del fragmento del caso en el que los estudiantes resuelven la primera tarea propuesta por Jimena, deben analizar esta sesión de clase dando respuesta a las siete actividades propuestas fijando el foco, en cada una de ellas, en algún elemento de conocimiento especializado.

En la lectura se explicita la forma en la que los escolares van representando, de uno en uno, figuras en la pizarra como ejemplos de polígonos y de no polígonos y la discusión que se genera al analizar si cada figura está en la zona que le corresponde.

4.1.2.1. Actividades 2.1. y 2.2. Análisis del fragmento en el que los escolares resuelven la actividad propuesta por la maestra.

Antes de analizar las interacciones generadas en el aula de Primaria al resolver la actividad propuesta por la maestra se les plantean a los EPM las siguientes actividades:

Actividad 2.1. Representa en un gráfico cómo quedaría la distribución hecha por los escolares, teniendo en cuenta la definición a la que han llegado.

Actividad 2.2. Teniendo en cuenta la tabla 1 (anexo 1) analizad si la definición a la que han llegado los estudiantes cumple los atributos de una definición matemática.

Con la primera actividad se pretende observar si los EPM reconocen, de manera fundamentada, qué figuras cumplen con la definición de polígono y cuáles no (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). En la actividad 2.2 los EPM deben determinar si la definición dada por los escolares cumple los atributos exigibles a una definición matemática. El conocimiento pretendido, por lo tanto, está vinculado a KPM (condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

Análisis

Tabla 4.7

Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividades 2.1 y 2.2

Código	Contenido del episodio
[TF1.1A.9 U501-550]	Uso de la tabla en el análisis del caso. Actividad 2.1
[TF1.1A.10 U551-590]	Actividad 2.2. Análisis de la definición dada por los escolares. Atributos de una definición.
[TF1.1A.11 U591-601]	Fin de la primera sesión de clase e inicio de la segunda. Se plantea la puesta en común de las actividades trabajadas.

El primer episodio [TF1.1.9 U501-550] correspondiente a este fragmento de la transcripción de la clase de formación inicial no lo analizamos pues los EPM no explicitan conocimiento especializado como profesores de matemáticas. En el episodio se trata el cómo seguir trabajando con la tarea formativa. La formadora insiste en el uso de la tabla de recogida de información durante la lectura del caso y explica qué deben hacer para responder a la actividad 2.1. No se debate en clase, pues ya se corrigió la Ilustración 1 en el episodio anterior [TF1.1.8 U433-501], cuando la formadora preguntó qué figuras verifican la definición dada por los escolares. El episodio [TF1.1.11 U591-601] tampoco se analiza pues corresponde con el final de la primera sesión de clase destinada al trabajo

con la tarea formativa 1 y principio de la segunda sesión, en la que la formadora resume el trabajo realizado hasta ese momento y organiza el trabajo pendiente.

El episodio [TF1.1.10 U551-590] corresponde al fragmento de la transcripción en la que los EPM responden a la actividad 2.2. En esta segunda actividad se analiza si la definición a la que llegan los escolares cumple los atributos que se le exigen a una definición matemática. Lo que tienen que hacer es algo equivalente a lo que hacen en el episodio [TF1.1.8 U324-433] cuando la formadora propone revisar el documento de Escudero et al. (2014), anexo en la tarea formativa, para ver si las definiciones dadas por los EPM cumplen dichos atributos. En este caso deben analizar la definición a la que llegan los escolares en el caso.

[TF1.1.10 U551-590] Análisis de la definición dada por los escolares. Atributos de una definición.

- 551. *Formadora: ¿Quizás sería necesario que apareciera el concepto de ángulo?*
- 552. *Alumnos: No.*
- 553. *Javier: No tiene por qué. A las que han dicho ahora mismo no hace falta.*
- 554. *Formadora: No hace falta porque estaría implícito, ¿no?, pero toda esta discusión que hemos tenido antes sobre la simetría y lo del casi regular y casi simétrico...*
- 557. *Javier: Ahí, sí. Pero aquí no hace falta.*
- 558. *Formadora: [...]. Si yo añado cuestiones sobre los ángulos...*
- 561. *Daniel: Lo haces más complicado.*
- 562. *Formadora: ¿Dejaría de ser mínima la definición?*
- 563. *Javier: Sí.*
- 564. *Daniel: Le estás dando una información que no hace falta.*
- 568. *Formadora: ¿Por qué no hace falta?*
- 569. *Elsa: Al unir dos segmentos, forman un vértice, obligatoriamente se forma un ángulo.*
- 570. *Paloma: Se va a formar un ángulo.*
- 571. *Formadora: ¿Cuántos ángulos se forman?*
- 572. *Paloma: Dos.*
- 574. *Daniel: El de dentro y el de fuera.*
- 575. *Formadora: Uno cóncavo y otro convexo.*
- 577. *Formadora: Parece que sí que nos estamos apoyando en cosas que ya conocemos. En la no circularidad...*
- 578. *Daniel: Yo creo que también.*
- 580. *Formadora: También, porque no están utilizando definiciones para definir a la misma cosa, ni están apoyándose una en otra como hemos visto antes con el punto, etcétera.*

581. Javier: *Pero sí se están ... Cuando dice vértice, y después dices vértice [¿?] estás volviéndote a apoyar en lo mismo, ¿no?*
582. Formadora: *Si cuando decimos tiene vértices, y de cada vértice salen solo dos segmentos...*
583. Javier: *Eso es circular.*
584. Formadora: *No es circular [...] cuando defino polígono no me estoy apoyando en el polígono para poder definir polígono...*
585. Javier: *Pero estás definiendo así... Vértice y para el vértice se necesita... le estás dando la vuelta otra vez.*
586. Formadora: *No. [...] Como lo estamos usando ahí, qué es el vértice..., punto donde se cortan...*
587. Javier: *Dos segmentos.*
588. Formadora: *Dos o más segmentos, ¿no? Vale, lo que está diciendo ahí es que el punto de corte, ese vértice solo puede tener...*
589. Daniel: *Dos lados.*

La formadora, tratando sobre la definición de polígono que dan los escolares, en la que se identifican elementos como los segmentos que lo delimitan (lados) y los vértices, pregunta si *sería necesario que apareciera el concepto de ángulo* [TF1.1A.10 U551], a lo que varios EPM responden que *no* [TF1.1A.10 U552]. En este caso no justifican el por qué no es necesario. Después de intervenir la formadora, Daniel dice que si se añade información sobre ángulos a la definición dada por los escolares se *hace más complicado* [TF1.1A.10 U561]. Entendemos que se refiere a que si se añadiera información sobre los ángulos se estaría dando más información de la imprescindible, dejando la definición de ser mínima que requiere tener una buena definición matemática (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

La formadora pregunta expresamente si al añadir información sobre los ángulos a la definición de polígono dada por los escolares *dejaría de ser mínima* [TF1.1A.10 U562], a lo que Elsa responde que *cundo unes dos segmentos y forman un vértice, obligatoriamente se forma un ángulo* [TF1.1A.10 U569], mostrando su conocimiento sobre el concepto de ángulo (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos) referido a los elementos de un polígono. Considera que no es necesario añadirlo porque al estar el polígono delimitado por segmentos concatenados puede deducir que cada dos segmentos unidos por un extremo se forma un ángulo. Es decir, sabe que si se incluye información sobre el ángulo la definición dejaría de ser mínima (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

Suponemos que se refiere al ángulo interno, aunque no lo especifica. La formadora pregunta *¿cuántos ángulos se forman (al unir dos segmentos por un extremo)?* [TF1.1A.10 U571], entendiendo los ángulos que generan las semirrectas que contienen a cada uno de los segmentos (Puig Adam, 1986). Paloma responde que hay *dos* [TF1.1A.10 U572] (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Daniel añade, *el de dentro y el de fuera*, refiriéndose al ángulo interno y a su conjugado con un lenguaje poco formal. La formadora aprovecha esta oportunidad para hacer uso de un lenguaje exhaustivo refiriéndose a los ángulos como *cóncavo y convexo* y justifica que el añadir información sobre ángulos en la definición de polígono dada haría que ésta no fuese *mínima*, ya que *estaría dándole datos redundantes* [TF1.1A.10 U575].

Javier, al decir *sí están...*, *cuando dice vértice, y después dices y para el vértice se necesita... le estás dando la vuelta otra vez* [TF1.1A.10 U581,585], considera ³  que la definición es *circular* por especificar que de cada vértice salen dos lados, entendiendo que cada lado es un segmento que une dos vértices (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). La formadora aclara que en la definición añade una propiedad que se le pide a los vértices de un polígono y que en otras figuras no tiene porqué cumplirse, que es que en cada vértice confluyan dos lados, y no más. Es decir, propiedad equivalente a decir que la línea poligonal que delimita a un polígono debe ser simple. Por ejemplo, la figura 3 no cumple la definición dada por los escolares ya que tiene un vértice del que salen 4 lados.

Tabla 4.8

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividades 2.1 y 2.2

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	<u>Definiciones, propiedades y sus fundamentos</u>	Saben que un vértice de un polígono es el punto de unión de dos lados consecutivos y que con los dos lados se forman ángulos (U569).
		Saben que en cada vértice se forman dos ángulos, el interior y su conjugado (U572).
KPM	<u>Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones</u>	Saben que si en la definición de polígono aparecen cómo son los lados no es necesario indicar características de los ángulos, pues está implícito (U569).
		Saben identificar si una definición es circular (U585)

4.1.2.2. Actividad 2.3. Conceptos, procesos y procedimientos implicados en la actividad.

Antes de plantear las actividades siguientes, en la tarea formativa se les pide a los EPM de manera expresa que utilicen la tabla de recogida de información que se les facilita con la entrega de la tarea formativa para responder al resto de actividades de esta parte.

Actividad 2.3. Indicad los conceptos, procesos y procedimientos implicados en la resolución de la actividad. ¿Qué argumentos utilizan para incluir o no una figura como polígono? ¿Hay una definición única de polígono? Matemáticamente hablando, la definición a la que llegan los estudiantes, ¿qué consecuencias tiene con relación a la clasificación/categorización de polígonos?

El conocimiento que se pretende que los EPM movilicen con esta actividad corresponde al dominio MK. En concreto, al preguntar de manera explícita por los conceptos y procedimientos implicados en la resolución de la actividad que plantea la maestra, se espera que muestren KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos; procedimientos). Además, se les cuestiona sobre procesos de razonamiento, concretamente sobre definición y clasificación, conocimiento vinculado con KPM (prácticas particulares del quehacer matemático).

La resolución de esta actividad se ha dividido en diferentes episodios correspondientes a la resolución de cada una de las cuestiones que se plantean en la misma.

Análisis

Tabla 4.9

Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 2.3

Código	Contenido del episodio
[TF1.1A.12 U602-746]	Actividad 2.3.a. Conceptos, procesos y procedimientos implicados en la resolución de la actividad.
[TF1.1A.13 U747-772]	Actividad 2.3.b. Argumentos usados por los escolares.
[TF1.1A.14 U772-817]	Actividad 2.3.c. Unicidad de la definición matemática.
[TF1.1A.15 U818-907]	Actividad 2.3.d. Consecuencias de la definición dada con relación a la clasificación/categorización de polígonos.

[TF1.1A.12 U602-746] Actividad 2.3.a. Conceptos, procesos y procedimientos implicados en la resolución de la actividad.

604. Rosa: *El concepto de polígono.*
609. Elsa: *Vértices, lados, ...*
610. Bela: *Ángulos.*
612. Bela: *Figuras.*
615. Paola: *¿Triángulo?*
621. Bela: *Y segmentos.*
622. Formadora: *¿Segmentos...? ¿Esto estaría...?*
623. Paola: *En lados [responden varios estudiantes].*
624. Formadora: *Por ahí has dicho cóncavo y convexo. [...] serían ¿qué?*
627. Javier: *Tipos.*
631. Formadora: *[...] ¿Y qué procesos estarían asociados a estos conceptos?*
632. Javier: *Clasificación.*
634. Javier: *Y reconocimiento.*
636. Bela: *Yo entendí por procesos..., yo puse analizar, argumentar [...].*
652. Formadora: *[...] Cada uno de los procesos que hay aquí estarían relacionados, ¿no?, porque necesito argumentar para poder...*
653. Elsa: *Clasificar.*
654. Formadora: *[...] ¿Creéis que falta alguno importante aquí?*
662. Gabi: *Definir.*
665. Formadora: *Y ¿alguien ha visto algún procedimiento?*
666. Belén: *De lo individual a lo general, ¿no?*
667. Formadora: *Ir de lo individual a lo general. ¿Y eso lo pondrías en los procedimientos?*
671. Isabel: *Razonamiento.*
674. Amanda: *Inductivo.*
680. Formadora: *[...] ¿qué es un procedimiento?*
683. Amanda: *Los pasos que haces para llegar a una conclusión.*
687. Belén: *Entonces, a través de preguntas, ¿no? Con un montón de preguntas...*
690. Formadora: *Sería un procedimiento desde el punto de vista, ¿de los alumnos?*
691. Paloma: *Del profesor.*
694. Formadora: *Sería más un método de enseñanza...*
697. Paloma: *Por descubrimiento.*
701. Rosa: *En cualquier procedimiento dices sigo un paso, dibujar, reflexionar... iría más encaminado por ahí... Dibujar, reflexionar, debatir...*
702. Formadora: *El procedimiento sería cómo concateno cada uno de los procesos, ¿no [...]*
719. Javier: *¿Puede ser aprendizaje basado en problemas?*
721. Javier: *[...] van haciendo preguntas y a partir de ahí vas descubriendo.*

Las primeras respuestas de los EPM a esta actividad [TF1.1A.12 U603-621] corresponden con términos que hacen referencia a elementos del polígono (como vértices o lados), o tipos de polígonos (como cóncavo y convexo o triángulo), como conceptos

implicados en la resolución de la actividad que plantea la maestra a sus estudiantes. Lo identificamos como indicio de KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos) ya que, a pesar de no enunciar las definiciones de cada uno de los conceptos sí identifican estos términos en la resolución de los escolares. Paola relaciona el término “segmentos” aportado por Bela con los lados del polígono [TF1.1A.12 U621-623]. Esto muestra que Paola sabe que los lados de un polígono son segmentos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). La formadora les hace conscientes de la relación que existe entre los distintos conceptos identificados.

De igual modo, identifican diferentes procesos de razonamiento geométrico necesarios para resolver la actividad propuesta a los estudiantes de Primaria, como son el reconocimiento y la clasificación, si bien no especifican qué significa cada uno de ellos. Añaden como procesos, además, otras acciones como analizar o argumentar (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático) [TF1.1A.12 U632-636, 662].

En cuanto a procedimientos, Amanda los entiende como *los pasos que haces para llegar a una conclusión* [TF1.1A.12 U683]. Belén considera como procedimiento *ir de lo individual a lo general* [TF1.1A.12 U666], como estrategia inductiva que permite llegar a la definición de un concepto a partir de la observación de las características comunes de casos particulares del mismo (KoT, procedimientos). Las reflexiones que se verbalizan en el aula de formación de maestros llevan a los EPM a interpretar los procedimientos como “concatenación de procesos” en el sentido amplio [TF1.1A.12 U701].

La intervención de Amanda [TF1.1A.12 U683] lleva a Belén a entender que el procedimiento utilizado en la sesión de clase de Primaria hace referencia a la estrategia utilizada por la maestra para conseguir que los estudiantes lleguen a la definición de polígono *a través de preguntas, ¿no? Con un montón de preguntas* [TF1.1A.12 U687] (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Paloma a este tipo de estrategia la llama *por descubrimiento* [TF1.1A.12 U697], Javier lo llama *aprendizaje basado en problemas* [TF1.1A.12 U719], entendiendo, en ambos casos, que la maestra planifica su enseñanza planteando cuestiones a los estudiantes para que ellos, siguiendo las indicaciones, consigan llegar, en este caso, a la definición de polígono (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Así lo interpreta Amanda al indicar que *la maestra está guiando la clase, al fin y al cabo* [TF1.1A.12 U742].

[TF1.1A.13 U747-772] Actividad 2.3.b. Argumentos usados por los escolares.

747. Formadora: [...] *¿Qué argumentos utilizan los alumnos para incluir o no una figura como polígono?*
748. Rosa: *Que les fueran familiares, creo que es lo primero.*
750. Rosa: *Partían de lo más básico.*
751. Formadora: *Lo que ellos deciden es, lo que a mí me suena que es familiar, es figura.*
752. Rosa: *Aunque tengan lados curvos...*
753. Tina: *Que tienen lados, vértices y ángulos..., porque saben los conceptos.*
754. Formadora: *O sea, que van dando elementos..., una lista de elementos que podrían ir perfilando las propiedades de un polígono.*
755. Bela: *Yo he puesto que utilizan características visuales cuando dicen que tienen huecos, o que tienen picos, que...*
764. Zoé: *Que también los lados sean rectos o curvos dependiendo..., si son polígonos, son rectos y si no...*
769. Tina: *Para no incluirla..., eh... que no está unido un lado y otro y lo de las líneas curvas que ya lo han dicho.*
770. Formadora: [...] *Usando lo que no es... Digo no es esto..., cuando no están unidos no es polígono. Y de ahí concluyen que la figura tiene que ser...*
771. Elsa: *Cerrada.*

Aunque en esta actividad se pregunta por los argumentos usados por los estudiantes de Primaria para incluir o no una figura como polígono, algunos EPM responden de manera análoga a como lo hicieron en la pregunta 1.2, en la que se les pedía que, sin conocer cómo actuaron los escolares, anticiparan los posibles argumentos usados por estos a la hora de justificar que una figura es o no polígono.

Por ejemplo, Rosa vuelve a expresar que los alumnos han considerado como polígonos aquellas figuras que les resultan familiares [TF1.1A.13 U750] (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). Al decir, *aunque tengan lados curvos* [TF1.1A.13 U752] muestra que sabe que para ser polígono los lados de la figura tienen que ser segmentos rectos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Tina indica que los estudiantes enuncian un listado de elementos propios del polígono como *lados, vértices y ángulos* [TF1.1A.13 U753]. Esta intervención muestra que ella también conoce dichos elementos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Según Bela los escolares *utilizan características visuales cuando dicen que tienen huecos, o que tienen picos* [TF1.1A.13 U755]. Muestra que conoce que los estudiantes de esta

etapa realizan sus argumentos basándose, fundamentalmente, en aspectos físicos de la figura (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). El comentario de Bela, además, es un indicio de conocimiento sobre los niveles de razonamiento de van Hiele (KFLM, teorías de aprendizaje), pues incide en aspectos que determinan cómo los escolares llevan a cabo el proceso de razonamiento de reconocimiento (basándose en aspectos físicos de la figura), y en el uso de un lenguaje informal para definir el concepto de polígono (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

Zoé, en su intervención, dice que los escolares tienen en cuenta que *los lados sean rectos o curvos dependiendo..., si son polígonos, son rectos y si no...* [TF1.1A.13 U764]. Tina añade que, *para no incluirla*, tienen en cuenta *que no está unido un lado y otro* [TF1.1A.13 U769], es decir, que la figura sea cerrada. Elsa también incide en que para que una figura sea polígono, ésta debe ser *cerrada* [TF1.1A.13 U772]. En estos argumentos se evidencia conocimiento de dos de los atributos relevantes del concepto polígono. Por una parte, el que los lados sean segmentos rectos, y por otra, el que la figura sea cerrada (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

[TF1.1A.14 U772-817] Actividad 2.3.c. Unicidad de la definición matemática.

772. Formadora: *¿Hay una definición única de polígono en todo el texto?*
779. Amanda: *Al final del texto, en la línea 112, llegan a una definición de polígono.*
782. Formadora: *¿Y antes?*
783. Amanda: *No, porque antes han estado elaborando la definición de polígono.*
785. Rosa: *Esa sería la conclusión final.*
786. Amanda: *Pero al final llegan a una definición común.*
787. Formadora: *Claro, que al principio cada uno tiene su propio concepto de polígono,*
793. Formadora: *Para finalmente llegar a una única conclusión. Y ahora de forma general ¿existe una única definición de polígono?*
794. Alumnos: *No.*
795. Paola: *Yo creo que no.*
797. Paola: *Aunque al final el concepto y la definición siempre va a ser el mismo, cada uno tiene su forma de decirla.*
799. Paola: *Cada uno utiliza sus propias expresiones matemáticas para definir un mismo concepto.*
800. Formadora: *Por tanto, esas definiciones serían...*
801. Paola: *Equivalentes.*

Algunos EPM, como Amanda [TF1.1A.14 U779, 786], se centran en la transcripción de la clase de Primaria que están analizando para decir que los escolares llegan a una única definición de polígono, ya que interpreta que la pregunta que se les plantea se refiere de manera concreta sobre ese caso.

En este episodio se evidencia que los EPM, de manera general, saben que un mismo concepto matemático se puede definir utilizando expresiones diferentes. Así se constata, por ejemplo, en las intervenciones de Paola [TF1.1A.14 U797, 799], sabiendo, además, que esas definiciones se dice que son *equivalentes* [TF1.1A.14 U801] (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

[TF1.1A.15 U818-907] Actividad 2.3.d. Consecuencias de la definición dada con relación a la clasificación/categorización de polígonos.

818. Formadora: *¿Qué diferencia hay entre una categorización y una clasificación?*
819. Amanda: *Que una categorización es por grupos, ¿no? y una clasificación por conjuntos.*
825. Paloma: *Por características.*
827. Rosa: *Forman conjuntos disjuntos.*
828. Formadora: *Forman conjuntos disjuntos y ¿una categorización no?*
829. Rosa: *No.*
830. Elsa: *Es una relación jerárquica.*
831. Formadora: *Una relación jerárquica, o una relación de inclusión... La clasificación...*
832. Amanda: *Figuras a parte..., que no tienen nada en común.*
833. Formadora: *Intentemos responder a qué consecuencias tendría lo que han trabajado respecto de la categorización o de la clasificación de polígonos.*
840. Carmen: *Con los argumentos que estaban dando los niños anteriormente pues las consecuencias pueden ser positivas y negativas porque pueden llegar a clasificar polígonos, pero no pueden clasificar si son cóncavos, convexos, regulares, irregulares...*
843. Formadora: *Vale, no han tenido en cuenta...*
844. Elsa: *Las características...*
849. Formadora: *Con la definición que dan, [...] ¿habría manera de inferir algo que me permitiera llegar a una clasificación o a una categorización?*
857. Bela: *Yo pienso que con la definición también puedes ir clasificando, por ejemplo, cuando ponen los lados son rectos, pues cuando vea que no tiene los lados rectos sería a no polígono.*
863. Javier: *Los tipos de vértices, también.*
864. Abril: *Pero esa clasificación es la misma, ¿no?*
865. Paloma: *La clasificación de polígono y no polígono, con la definición.*

866. Formadora: Claro, en polígonos y no polígonos.
867. Bela: Esa es la misma clasificación, no es...
868. Formadora: Pero..., Javier estabas hablando algo sobre los tipos de vértices...
869. Javier: Es que también los vértices, si los nombras también puede ser los tipos de vértices que haya, ¿no? Categorizar dependiendo de los vértices.
871. Formadora: Pero ¿los vértices son de tipos diferentes?
872. Javier: Hombre, no, pero... yo qué sé... Los ángulos.
873. Belén: Pero siempre tienen que tener dos lados ...
874. Formadora: Sí, pero forma parte de la definición. Si no tiene dos lados en cada vértice, tiene más de dos lados, entonces no es polígono.
877. Formadora: Fijémonos en otras características de esa definición.
878. Belén: Plana.
880. Formadora: Si no es plana no es polígono. Otra característica...
883. Javier: Cerrada abierta.
884. Formadora: Cerrada..., es lo mismo. Si no es cerrada no es polígono. Pero si hablamos de los lados..., los lados pueden estar...
885. Bela: Rectos.
886. Formadora: ... puedo tener un número determinado de lados, y además puedo tener los lados colocados de una determinada manera... Eso ¿qué generaría? [...]
888. Formadora: Y eso ¿qué me generaría?
889. Paloma: Una categorización.
890. Elsa: Una clasificación de las figuras. [Varios alumnos contestan una cosa u otra].
902. Formadora: ¿Qué otras cosas podrían utilizar? [Los alumnos se quedan pensativos].
904. Paloma: Lo que has dicho, ¿no? De cómo se queda uno con otro... [marca con las manos unidas por las puntas de los dedos, como un ángulo formado por dos lados].
905. Formadora: Y, ¿entonces? Dentro de los cuadriláteros podría distinguir...
906. Paloma: Ángulos rectos.

Antes de que los EPM compartan sus respuestas a la última parte de esta actividad, la formadora pregunta por la diferencia que existe entre clasificación y categorización, haciéndoles recordar contenidos trabajados en clases previas. Hay respuestas, como la de Amanda, que dice que la diferencia es que *una categorización es por grupos y una clasificación por conjuntos* [TF1.1A.15 U819], aunque no especifica qué entiende ella por grupo y por conjunto. En respuestas de otros estudiantes sí se observa conocimiento sobre características propias de una clasificación y de una categorización, estableciendo diferencias entre ambas. Por ejemplo, Rosa sabe que en una clasificación se *forman conjuntos disjuntos* [TF1.1A.15 U827]. Muestra conocimiento sobre las consecuencias de establecer una relación de equivalencia en un conjunto de figuras (KPM, prácticas

particulares del quehacer matemático). Por otra parte, Elsa sabe que *la relación* que se establece entre los conjuntos que se generan con una categorización *es jerárquica* [TF1.1A.15 U830] (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático). Ambas intervenciones muestran indicios de conocimiento sobre las consecuencias de una relación de equivalencia. También se observa conocimiento de este indicador al decir Amanda que con una clasificación se generan *figuras aparte..., que no tienen nada en común* [TF1.1A.15 U832]. Si bien se puede entender que quiere decir que se generan conjuntos disjuntos, no es exhaustiva en su expresión, pues las figuras pueden tener características en común, aunque según la propiedad que se tiene en cuenta para generar la clasificación sean diferentes.

Respondiendo a la pregunta de la actividad 2.3 sobre las consecuencias que tiene la definición dada por los estudiantes en relación con la clasificación o categorización de polígonos, Carmen considera que los estudiantes *pueden llegar a clasificar polígonos, pero no pueden clasificar si son cóncavos, convexos, regulares, irregulares...* [TF1.1A.15 U840]. Es decir, entiende que teniendo en cuenta la definición a la que llegan los escolares se pueden generar dos clases, polígonos y no polígonos, pero no tiene otros criterios de clasificación que les permita generar otras clasificaciones o categorizaciones. En esta intervención detectamos indicio de que conoce que en los polígonos se pueden observar ciertas propiedades que permiten utilizarlas como criterios de clasificación como, por ejemplo, considerar cómo son los ángulos para clasificar en polígonos cóncavos o convexos, o considerar características de los lados y los ángulos para clasificar en regulares e irregulares (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Por otra parte, interpretamos que Elsa sabe que teniendo en cuenta ciertas *características* de los polígonos [TF1.1A.15 U844] se pueden plantear otras clasificaciones y/o categorizaciones (KoT, procedimientos), entendiendo por características algunas propiedades de sus elementos.

La formadora hace uso de estos comentarios para preguntar si con *la definición dada se podría inferir algo que permita llegar a una clasificación o una categorización* [TF1.1A.15 U849]. Bela sabe que teniendo en cuenta la definición, los estudiantes pueden fijarse en las características de los elementos que se consideran en la misma para determinar si una figura es polígono o no lo es. Así dice que *cuando ponen los lados son rectos, pues cuando vea que no tiene los lados rectos sería a no polígono* [TF1.1A.15

U857, 861], generando dos clases de equivalencia (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos; KoT, procedimientos). Son varios los EPM que inciden en que teniendo en cuenta la aportación de Bela se llega a la clasificación inicial, al igual que si se consideran otras propiedades de la definición (plana, cerrada, lados rectos, dos lados por vértice...) [TF1.1A.15 U857-885]. Han analizado la definición y conocen atributos relevantes del concepto polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Javier propone tener en cuenta *los tipos de vértices* para *categorizar* los polígonos [TF1.1A.15 U869]. No explicita a qué se refiere con “tipos de vértices”. Podría ser el número de lados que confluyen en cada uno. Si es así, en un polígono todos los vértices son iguales. Es probable que quisiera referirse a tener en cuenta el tipo de ángulos interiores de la figura, pues a la pregunta de la formadora sobre si hay distintos tipos de vértices, responde que *no, pero ... los ángulos* [TF1.1A.15 U872]. Javier sabe que los polígonos se pueden clasificar atendiendo a la amplitud de sus ángulos (KoT, procedimientos; definiciones, propiedades y sus fundamentos; KPM, prácticas particulares del quehacer matemático).

La formadora les plantea algún criterio a tener en cuenta para generar clasificaciones o categorizaciones de polígonos. En primer lugar, propone tener en cuenta el número de lados. Con este criterio algunos EPM, como Paloma, consideran que se genera *una categorización* [TF1.1A.15 U889]. Otros, entre ellos Elsa, creen que genera *una clasificación de las figuras* [TF1.1A.15 U890]. En realidad, como advierte la formadora, podría ser una cosa u otra, todo dependerá de cómo se enuncie el criterio a tener en cuenta para establecer el agrupamiento de las figuras. Interpretamos que los EPM saben que utilizando una propiedad de algún elemento del polígono se generan grupos. Surge una oportunidad para profundizar en las consecuencias que tiene el cómo se enuncie el criterio que se utilice para hacer agrupamiento de figuras en la clasificación que se genere.

Paloma aporta un nuevo criterio que podría utilizarse para generar nuevas clasificaciones o categorizaciones, según se enuncie, que es la posición relativa de los lados [TF1.1A.15 U904]. Sabe que la posición de los lados permite agrupar a los polígonos en diferentes tipos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Tabla 4.10

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 2.3

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO

KoT	<u>Procedimientos</u>	Saben cómo llegar a la definición de un concepto a través de la observación de características comunes de multitud de casos particulares del mismo (U666).
		Saben cómo, utilizando una propiedad de la figura, generar una clasificación (U857, 861).
		Saben que teniendo en cuenta ciertas características de los elementos de un polígono se pueden generar clasificaciones y/o clasificaciones (U844).
	<u>Definiciones, propiedades y sus fundamentos</u>	Saben qué conceptos matemáticos se utilizan en la resolución de la actividad planteada a los escolares. (U 603-621).
		Saben que los lados de los polígonos son segmentos rectos (U621-623, 752, 764, 857, 861).
		Conocen elementos propios del polígono (U753).
		Saben que los polígonos son figuras cerradas (U769, 772, 883).
		Saben que se pueden utilizar características de los elementos del polígono para generar ciertas clasificaciones o categorizaciones (U840).
		Saben que los polígonos se generan con líneas poligonales simples (U873).
		Saben que los polígonos son figuras planas (U878).
		Saben que la amplitud de los ángulos puede utilizarse como criterio para clasificar o categorizar figuras (U872).
		Saben que la posición relativa de los lados del polígono puede usarse como criterio para clasificar o categorizar figuras (U904).
KPM	<u>Prácticas particulares del quehacer matemático</u>	Saben que en la resolución de la tarea propuesta a los escolares deben usar procesos de razonamiento geométrico como el reconocimiento, la clasificación y la definición, además de otras acciones como el análisis y la argumentación (U632-636, 662).
		Saben que un concepto se puede definir de diferentes formas generando definiciones equivalentes (U799,801).
		Saben que al hacer una clasificación se generan clases disjuntas (U827, 832).
		Saben que la relación que se establece entre los conjuntos que se generan con una categorización es jerárquica (U830).
KFLM	Teorías de aprendizaje	Conocen los niveles de razonamiento de van Hiele atendiendo a cómo definen y el lenguaje que utilizan (U755).
	Formas de interacción con un contenido matemático	Saben que los escolares consideran como polígonos las figuras que les resultan familiares (U750). Saben que los escolares basan sus argumentos en características físicas de las figuras (755).
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Saben que una estrategia para conseguir que los estudiantes lleguen a la definición de un polígono es a través del descubrimiento con una enseñanza guiada por la maestra a través de preguntas (U687, 697).

4.1.2.3. Actividad 2.4. ¿Qué aprenden los estudiantes de primaria con esta actividad?

Actividad 2.4. ¿Qué aprenden los estudiantes de primaria con esta actividad? ¿Qué interés tiene frente a que se les hubiera dado una definición a priori?

La actividad se centra en cómo aprenden los estudiantes al construir la definición de polígono desde sus ideas iniciales, prototipos y posibles concepciones erróneas. Además, para responder a la actividad se debe reflexionar sobre qué cambios conceptuales se producen frente a aprender desde el enunciado de una definición dada (KFLM, teorías de aprendizaje).

Por otra parte, se debe reflexionar sobre las fortalezas o debilidades de utilizar un tipo u otro de actividad con estudiantes de primaria para provocar un conocimiento más profundo (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Análisis

Tabla 4.11

Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 2.4

Código	Contenido del episodio
[TF1.1A.16 U909-920]	Actividad 2.4.a. ¿Qué aprenden los estudiantes de primaria con esta actividad?
[TF1.1A.17 U915, 921-929]	Actividad 2.4.b. ¿Qué interés tiene frente a que se les hubiera dado una definición a priori?

[TF1.1A.16 U909-920] Actividad 2.4.a. ¿Qué aprenden los estudiantes de primaria con esta actividad?

909. Formadora: ¿Qué aprenden los estudiantes de primaria con esta actividad?
910. Isabel: Pues la clasificación de polígonos y diferenciar entre lo que es y no un polígono.
911. Formadora: Diferenciar polígono de lo que no lo es, pero ¿de qué manera lo hacen?
913. Paola: Que al plantearle preguntas hace que ellos mismos tengan dudas sobre lo que saben y lo que no.
914. Formadora: Exacto, o sea que ellos plantean su situación y ahora la profesora les genera una situación problemática porque les hace dudar sobre lo que plantean, y así... Carmen.
915. Carmen: Los estudiantes aprenden las características de los polígonos con un aprendizaje significativo, y si les hubiera dado la definición, posiblemente recordaría las figuras a la hora de clasificar, pero no entenderían el porqué.
916. Formadora: Claro. Podrían entender el por qué, pero tampoco se plantearían situaciones problemáticas del estilo de las que le generan..., por ejemplo, un polígono no simple, un polígono en el que haya un vértice con más de dos lados....

917. *Elsa: Y, además, cuando los alumnos, al estar continuamente hablando entre ellos razonan, y se dan cuenta de los propios errores que ellos han cometido cuando salen. Entonces, el reconocimiento de los errores también creo yo que es importante.*

918. *Formadora: Por tanto, aquí hay una cosa. Hemos hablado del error, [...] usar el error como herramienta de aprendizaje.*

919. *Elsa: Herramienta de aprendizaje.*

El episodio 16 recoge las intervenciones correspondientes a la puesta en común de la resolución de la primera parte de la actividad 2.4. Se les plantea a los EPM que reflexionen sobre qué aprenden los estudiantes con esta actividad. Con sus respuestas se evidencia que saben que con la actividad que plantea la maestra los escolares aprenden *la clasificación de polígonos y diferenciar entre lo que es un polígono y lo que no lo es* [TF1.1A.16 U910], tal y como dice Isabel. En esa misma línea, Carmen añade que los estudiantes *aprenden las características de los polígonos con un aprendizaje significativo* [TF1.1A.16 U915]. La EPM muestra conocimiento sobre las ventajas de relacionar los nuevos aprendizajes con conocimientos previos frente a un aprendizaje memorístico (KFLM, teorías de aprendizaje). Consideramos, por tanto, que saben que con actividades de este tipo se genera conocimiento (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Así mismo, identifican potencialidades de trabajar en matemáticas de esta forma (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Es evidente que en algunas de estas intervenciones subyace el concepto de polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos), aunque no es un conocimiento explícito.

Otros EPM también valoran positivamente el tipo de tarea que plantea la maestra a los estudiantes de Primaria. Por ejemplo, Paola reconoce *que al plantearle preguntas hace que ellos mismos tengan dudas sobre lo que saben y lo que no* [TF1.1A.16 U913]. Elsa añade además que *cundo los alumnos, al estar continuamente hablando entre ellos, razonan y se dan cuenta de los propios errores que ellos han cometido cuando salen* [TF1.1A.16 U917]. Consideran como potencial de la tarea el que los estudiantes descubran sus debilidades para que puedan mejorarlas, favoreciendo un aprendizaje más profundo (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

[TF1.1A.17 U915, 921-929] Actividad 2.4.b. ¿Qué interés tiene frente a que se les hubiera dado una definición a priori?

921. *Formadora: Y ¿qué interés tiene esto respecto de dar una definición a priori y ya está?*

922. *Isabel: También es que ellos son los protagonistas de la actividad...*
923. *Formadora: Ellos son el centro de la enseñanza, bien Inés.*
924. *Isabel: Entonces ellos son los que tienen interés porque son los que hacen las cosas.*
926. *Belén: Si le hubiera dado la definición desde el principio no tendrían esa motivación, porque son ellos los que la han creado.*
928. *Bela: Tampoco habrían aprendido a hacer una definición.*
929. *Formadora: Efectivamente, no se habrían enfrentado con el problema de dar una definición.*

En cuanto al interés que tiene plantear una actividad como esta para llegar a la definición frente a que la maestra enuncie la definición sin más, Carmen reseña que esta forma de llegar a conocer el significado del concepto de polígono permite a los estudiantes, no solo identificar ciertas figuras como representante de cada grupo si no, además, entender el por qué cada figura pertenece a una clase diferente [TF1.1A.17 U915] (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). En esta intervención detectamos un indicio de KFLM (fortalezas y dificultades), al interpretar que la justificación de una clasificación de figuras generaría conflicto a los escolares.

Otras ventajas, que identifican los EPM, de plantear una actividad en la que vayan construyendo la definición de polígonos a partir de casos particulares, tal y como la plantea la maestra a los estudiantes de Primaria, es que los estudiantes *tienen interés porque son ellos mismos los que hacen las cosas* [TF1.1A.17 U924], tal y como reconoce Isabel. En este sentido Belén añade que *si le hubiera dado la definición desde el principio no tendrían esa motivación, porque son ellos los que la han creado* [TF1.1A.17 U926]. En ambas intervenciones destacan el potencial de este tipo de tareas, en las que el estudiante va generando su propio conocimiento, por favorecer la *motivación* y la implicación de los estudiantes en su aprendizaje. La propuesta de actividades ricas y con sentido generan implicación cognitiva y afectiva, redundando en la construcción de aprendizaje significativo y fomentando el gusto por la matemática (Carrillo, 2000). Este tipo de tareas favorecen el desarrollo de competencias matemáticas (Carrillo, Contreras y Zakaryan, 2014) (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Un aspecto importante lo plantea Bela al reseñar que si en lugar de plantear la actividad la maestra les hubiese enunciado la definición de polígono no *habrían aprendido a hacer una definición* [TF1.1A.17 U928], mostrando conocimiento sobre cómo interaccionarían

los alumnos con cada posible actuación (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

Tabla 4.12

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 2.4

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KPM	Prácticas particulares del quehacer matemático	Saben que la relación que se establece entre los conjuntos que se generan con una categorización es jerárquica (U830).
		Saben que con la definición dada por los estudiantes se generan dos clases, polígonos y no polígonos, pero necesita considerar otros criterios para hacer otras clasificaciones o categorizaciones (U840).
		Conocen que teniendo en cuenta ciertas características de los elementos de un polígono se pueden generar clasificaciones y/o categorizaciones (844, 890, 904).
KFLM	<u>Teorías de aprendizaje</u>	Saben que relacionar la nueva información con conocimientos previos genera aprendizajes significativos (U915)
	Fortalezas y dificultades	Saben que para los escolares el justificar si una figura pertenece al grupo de polígonos o no podría generarle conflicto (U915).
	Formas de interacción con un contenido matemático	Saben cómo interaccionan los alumnos con las distintas formas de llegar a la definición de polígono (U928).
KMT	<u>Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos</u>	Saben que con actividades en las que los estudiantes deban construir la definición de un concepto matemático generan un aprendizaje más significativo (U910, 915)
		Conocen que una estrategia de enseñanza útil es plantear dudas que hagan al estudiante reflexionar (U913).
		Saben que plantear la enseñanza a partir de ciertos errores genera un aprendizaje más profundo (U917).
		Saben que el que los estudiantes construyan la definición de polígono les permitirá entender el por qué una figura pertenece o no a una clase (U915).
		Saben que la propuesta de actividades ricas y con sentido generan implicación cognitiva y afectiva, redundando en la construcción de aprendizaje significativo y fomentando el gusto por la matemática (U924, 926).

4.1.2.4. Actividad 2.5. Papel de los ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática

Nos parece interesante que los EPM reflexionen sobre el proceso de definir. Para ello se les plantea la siguiente actividad:

Actividad 2.5. ¿Qué papel juegan los ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática (resolución de la tarea)?

Los EPM deben analizar en qué forma repercute el uso de ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático), consiguiendo identificar las características críticas del concepto, diferenciándolas de otras propiedades superfluas, que pueden tener algunos casos particulares pero que no caracterizan al objeto a definir. Aunque en este caso se podría particularizar en el concepto polígono, pues es el tema de la tarea, la actividad está planteada para que se reflexione de manera general para la construcción de una definición matemática.

Análisis

Tabla 4.13

Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 2.5

Código	Contenido del episodio
[TF1.1A.18 U930-951]	Actividad 2.5. Papel de los ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática

[TF1.1A.18 U930-951] Actividad 2.5. Papel de los ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática

930. Formadora: Bien, papel que juegan los ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática.

933. Rosa: Es fundamental para afianzar su aprendizaje, porque todo sea..., saca la reflexión y cada uno se va apoyando en algo de eso.

935. Amanda: Los ejemplos sirven para reafirmar su teoría de polígono, y en cambio los contraejemplos sirven para mostrar falsedad de lo que dicen sus compañeros.

937. Isabel: Yo he puesto que el ejemplo ayuda a visualizar el contenido, y los contraejemplos a que lo aprendan... Porque al ser, al tener que considerar el contraejemplo aprenden más sobre...

938. Formadora: ¡Ajá! O sea, el ejemplo serviría para visualizar, para dar una idea de lo que es una definición, y un contraejemplo afianzaría ...

939. Isabel: Afianzaría el contenido.

940. Formadora: ... el contenido, porque me permitiría darme cuenta de en qué situaciones, cuando intento generalizar no se cumpliría.

941. Belén: Y el niño concibe más conocimientos, ¿no?, con los contraejemplos, ¿no?

944. Formadora: [...] no siempre esa imagen del concepto es equivalente a la definición del concepto, ¿bien? ¿Qué se consigue con un contraejemplo? Que algo se ha dicho aquí ya, ¿qué se consigue? Pues que cuando tú llegas con una imagen..., ¿no? Anabel.

945. Ab: Que reflexione un niño con lo que tiene en su mente.

946. Formadora: [...]El ejemplo permite transmitir y el contraejemplo permite...

947. *Javier: Rebatir.*

949. *Javier: Asentar conocimientos.*

Las respuestas de los EPM a la pregunta sobre el papel que juegan los ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática son variadas y complementarias. En concreto, Amanda dice que con los ejemplos se *reafirma su teoría de polígono*, entendiendo que en ellos se pueden ratificar los atributos relevantes del concepto polígono. La utilidad del ejemplo, según Amanda, es mostrar casos particulares del concepto. Continúa diciendo que *en cambio los contraejemplos sirven para mostrar falsedad de lo que dicen sus compañeros* [TF1.1A.18 U935]. Interpretamos que, con esta intervención, Amanda quiere decir que con el contraejemplo se puede advertir a los estudiantes sobre los atributos relevantes del concepto que no cumple el caso particular que se utiliza (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático). Evidentemente, para poder dar ejemplos o contraejemplos válidos es imprescindible conocer qué atributos son críticos para definir el concepto y cuáles no (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos) pues. Este conocimiento no se evidencia en la resolución pues no se les pide a los EPM que muestren figuras que sean ejemplos. Se tendrá en cuenta para proponerlo en implementaciones posteriores.

En la misma línea responde Isabel al decir que *el ejemplo ayuda a visualizar el contenido* (el concepto), *y los contraejemplos a que lo aprendan [...] porque al considerar el contraejemplo aprenden más* [TF1.1A.18 U937]. Se interpreta que, tal y como recapitula la formadora, lo que Isabel quiere decir es que el papel de los ejemplos es mostrar casos particulares del concepto, y el de los contraejemplos es afianzar las características críticas de este. Isabel muestra conocimiento asociado al papel del contraejemplo en la demostración (KPM, formas de validación y demostración).

Por otro lado, Rosa alude a la bondad del uso de ejemplos y contraejemplos para *afianzar su aprendizaje* [TF1.1A.18 U933], (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Belén también considera, aunque no lo justifica, que el uso de contraejemplos permite que el alumno *conciba más conocimientos* [TF1.1A.18 U941], es un conocimiento más completo que si únicamente se facilita la definición del concepto (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

En este momento la formadora aprovecha para tratar la diferencia que hay entre la definición que cada uno conoce de un concepto y la imagen que tiene de este [TF1.1A.18 U944], así como la relación que hay entre ellas. En el caso sobre el que se ha diseñado la tarea formativa, los estudiantes reproducen sus imágenes conceptuales de polígono y de figuras que, según ellos, no lo son. A partir de ahí se construye la definición del concepto analizando ejemplos, no-ejemplos y contraejemplos. Esto hace que Abril añada que el uso de contraejemplos implica que el estudiante *reflexione con lo que tiene en su mente* [TF1.1A.18 U945], es decir, que compare sus imágenes asociadas al concepto de polígono con las figuras que se les muestra como no-polígonos (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático; KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). En la misma línea, Javier considera que el uso de contraejemplos permite *rebatir*, es decir, tener recursos para determinar si una figura es o no polígono (en este caso), y *asentar conocimientos* [TF1.1A.18 U947, 949] (KPM, formas de validación y demostración; KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Tabla 4.14

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 2.5

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KPM	<u>Prácticas particulares del quehacer matemático</u>	Conocen cómo usar el ejemplo, como muestra de un caso particular de un concepto, y el contraejemplo para dar un caso particular que no cumple alguna característica (U935).
	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	Saben que el uso de ejemplos y contraejemplos favorece la construcción de una definición matemática y ayuda al desarrollo de imágenes del concepto (U930-952).
	Formas de validación y demostración	Saben que el uso de un contraejemplo permite mostrar la falsedad de una conjetura (U947,949).
KFLM	Formas de interacción con un contenido matemático	Saben que los estudiantes, a la hora de trabajar con contraejemplos, los comparan con las imágenes que tienen del concepto (U945).
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Saben que con el uso de ejemplos se ratifican las propiedades del concepto y con el uso de contraejemplos se puede determinar qué propiedades imprescindibles de un concepto no se cumple en el caso particular (U935).
		Saben que los ejemplos muestran casos particulares del concepto y los contraejemplos ayudan a afianzar las propiedades críticas de este (U933,937, 949).
		Saben que el uso de contraejemplos en el proceso de construcción de una definición hace que el conocimiento que se adquiere sobre el mismo sea más completo, permitiendo rebatir si una figura es o no un caso particular del concepto (U941, 947).

4.1.2.5. Actividad 2.6. Dificultades de los estudiantes en la resolución de la situación planteada.

Con la propuesta de la siguiente actividad se pretende que los EPM reflexionen sobre los obstáculos, errores o dificultades que presentan los escolares al resolver la actividad que les propone la maestra dirigida a la construcción de la definición de polígono (KFLM, fortalezas y dificultades).

Actividad 2.6. ¿Qué dificultades identificas en las respuestas de los estudiantes a la situación planteada? Posible origen de las dificultades.

Análisis

Tabla 4.15

Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 2.6

Código	Contenido del episodio
[TF1.1A.19 U952-975]	Actividad 2.6. Dificultades de los estudiantes con la situación planteada. Posible origen de las dificultades.

[TF1.1A.19 U952-975] Actividad 2.6. Dificultades de los estudiantes con la situación planteada. Posible origen de las dificultades.

952. Formadora: ¿Qué dificultades identificas en las respuestas de los estudiantes en la situación planteada?, y posible origen de esas dificultades [...].

953. Isabel: Yo he puesto que muestran dificultades en las figuras curvas y en las que no son comunes..., vamos en las que ellos no han visto siempre, entonces eso les provoca...

954. Formadora: Y eso tendría que ver, Isabel, [...] con la imagen del concepto.

958. Carmen: El posible origen estaría en los cursos pasados, ya que los alumnos solo recuerdan que algunas figuras son polígonos, y eso ocurre porque posiblemente no se haya enseñado correctamente y se les ha enseñado a través de un aprendizaje memorístico.

960. Javier: Yo creo que donde tienen dificultades es en los contraejemplos porque les crea..., le rebaten los conceptos que tienen... Llegan con un concepto, por ejemplo, y ahora lo cambias un poco y como que no lo entienden bien y tienen dificultades ahí.

968. Elsa: No, es que yo, con lo que él está diciendo..., a ver, yo no creo que ellos mismos cuando lo están haciendo están dando contraejemplos, pero es verdad que a lo mejor a lo que están acostumbrados a ver todos los días, pues sí, evidentemente la clasificación la hacen correctamente, el problema es cuando ya amplían, o hacen ellos mismos, y a lo mejor ha sido sin querer, y a lo mejor hacen un polígono y lo ponen en no polígono porque le ha dado la gana, y realmente lo que se demuestra es que a las anteriores clasificaciones que habían hecho no habrían sido... el primero de esta metodología para que los niños razonaran, que es lo primero, y lo segundo que a lo mejor pone los tres ejemplos de siempre y él mismo viendo en la pizarra el

círculo en el lado de no polígonos, y al verlo en la pizarra lo recuerdan y ellos lo ponían..., de hecho lo ponían en polígonos.

971. Formadora: *¿Y esto tiene que ver también con las figuras prototípicas?*

972. Alumnos: *Claro [Los alumnos asienten].*

Isabel identifica en su respuesta los tipos de figuras que considera que les genera dudas a los estudiantes indicando que *muestran dificultades en las figuras curvas y en las que no son comunes* [TF1.1A.19 U953]. Esta estudiante muestra su conocimiento sobre las dificultades de los escolares al analizar figuras no prototípicas, figuras que no aparecen de manera regular en libros de texto o en sesiones de clase de tipo tradicional (KFLM, fortalezas y dificultades). Además, muestra conocimiento sobre las estrategias utilizadas por los estudiantes a la hora de reconocer figuras que no sean polígonos (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). La formadora conecta estas dudas con la relación entre la definición del concepto de polígono y la imagen que cada uno tiene de este.

Por otra parte, Javier asocia las dificultades mostradas por los estudiantes a *los contraejemplos porque le rebaten los conceptos que tienen* [TF1.1A.19 U960]. Al tener un caso particular que no verifica alguna de las propiedades críticas del concepto, pero sí cumple otras, les genera confusión (KFLM, fortalezas y dificultades). Por ejemplo, si saben que un triángulo equilátero es un polígono, y como no-ejemplo del concepto se pone un triángulo esférico equilátero, los estudiantes pueden tener dificultad en entender que una figura sí es polígono y la otra no, teniendo características comunes, como que son figuras cerradas con tres lados iguales (ver Figura 4.6).



Figura 4.6 Triángulo equilátero vs triángulo esférico equilátero

Elsa también incide en que las dificultades están asociadas con figuras poco comunes. Así dice que *a lo que están acostumbrados a ver todos los días, [...] la clasificación la hacen correctamente* [TF1.1A.19 U968]. Sabe que son capaces de poner correctamente *los tres ejemplos de siempre*, aunque puede cometer el error de poner el círculo en polígonos por ser una figura con la que han trabajado desde infantil (KFLM, fortalezas y

dificultades). Al igual que en el caso anterior, Elsa muestra conocimiento sobre las estrategias utilizadas por los estudiantes a la hora de representar figuras que no sean polígonos (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). En esta intervención, Elsa considera, además, que *las anteriores clasificaciones que habían hecho no habrían sido..., el primero de esta metodología para que los niños razonaran*. Interpretamos que valora positivamente el tipo de tarea propuesta por Jimena a sus estudiantes frente a aprendizajes memorísticos “no razonados” (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Identificamos un indicio de KPM (formas de validación y demostración) cuando Elsa dice que no cree que *ellos mismos cuando lo están haciendo (representando figuras en polígonos o no polígonos) están dando contraejemplos* [TF1.1A.19 U968]. Podemos pensar que ella sabe lo que significa dar un contraejemplo y en las intervenciones de los estudiantes que está analizando lo que estos hacen es dar ejemplos de polígonos y ejemplos de no-polígonos, lo que es equivalente a un no-ejemplo de polígono.

En cuanto a las causas que provocan estas dificultades, Carmen las relaciona con cómo los estudiantes habrán trabajado los contenidos referentes al polígono en cursos anteriores, indicando que se les habrá *enseñado a través de un aprendizaje memorístico*, especificando que, según ella, no se les habría *enseñado correctamente* [TF1.1A.19 U958]. Con este comentario Carmen evidencia su conocimiento sobre las debilidades que provocan estrategias de enseñanza basadas en facilitar una serie de definiciones a memorizar frente a las fortalezas de estrategias basadas en la construcción de las definiciones de los distintos conceptos y las relaciones que se pueden establecer entre ellas (KFLM, fortalezas y dificultades). El aprender una definición dada y ver algunos ejemplos (prototípicos) del concepto hace que *los alumnos solo recuerdan que algunas figuras son polígonos*. Es decir, la imagen del concepto polígono está vinculada a los casos particulares utilizados a la hora de ejemplificar la definición.

Tabla 4.16

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 2.6

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KPM	Formas de validación y demostración	Saben que el representar una figura como representante de polígono o de no polígono no es dar un contraejemplo (U953, 968).

KFLM	<u>Fortalezas y dificultades</u>	Saben que los estudiantes presentan dificultades en identificar o no como polígono a figuras poco comunes, por ejemplo, con lados curvos (U953).
		Saben que dar una serie de definiciones a memorizar provocan debilidades, frente a las fortalezas de estrategias basadas en la construcción de las definiciones (U958).
		Saben que el uso de contraejemplos genera dificultad en los estudiantes al rebatir su conocimiento sobre el concepto de polígono (U960).
		Saben que algunos estudiantes consideran al círculo como polígono por ser una figura que la han trabajado desde los primeros cursos de su formación junto a otros polígonos conocidos (U968).
KMT	Formas de interacción con un contenido matemático	Conocen las estrategias que utilizan los estudiantes a la hora de representar figuras que consideran como no polígonos (U953, 968).
	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Saben que el uso de actividades en las que los estudiantes deben de establecer razonamientos genera mayor conocimiento que las de aprendizaje memorístico (U958, 968).

4.1.2.6. Actividad 2.7. Nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes

Los EPM conocen el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. Lo han trabajado en clases previas a la implementación de la tarea formativa. La formadora les facilitó diferentes documentos al respecto (Jaime y Gutiérrez, 1990; Gutiérrez y Jaime, 1998) y expuso las características del modelo como marco para considerar distintos niveles de aprendizaje de contenidos geométricos. También trató las fases que en el modelo sugieren los pasos a seguir para ayudar a los estudiantes a ascender de nivel de aprendizaje. De manera práctica se les pidió a los EPM que identificaran el nivel de van Hiele de diferentes alumnos atendiendo a sus respuestas a ciertas actividades o la fase de aprendizaje para la que podría ser óptima alguna actividad en función de su propósito. El objetivo de estas sesiones es que los EPM conocieran y usaran el modelo de van Hiele para diseñar actividades adecuadas a sus estudiantes.

Los EPM disponen de un documento resumen, que utilizan en este episodio, en el que se caracteriza cada uno de los niveles de razonamiento atendiendo a cómo los estudiantes reconocen, definen o usan definiciones, clasifican o demuestran. Se les plantea la siguiente actividad:

Actividad 2.7. Teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes, ¿podríamos determinar el nivel de razonamiento geométrico de cada uno de ellos? Selecciona una intervención que te parezca especialmente significativa en este sentido.

Con esta actividad pretendemos que los EPM analicen las respuestas de los estudiantes e identifiquen su nivel de razonamiento geométrico, argumentando su respuesta basándose en intervenciones concretas (KFLM, teorías de aprendizaje). Para ello, es posible (aunque no pretendido) que los EPM tengan en cuenta el vocabulario geométrico utilizado en sus intervenciones como indicador del nivel de razonamiento de los estudiantes (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). El lenguaje que se utiliza y los sistemas de relaciones conectando los diferentes registros de representación son propios de cada nivel. Además, pueden fijarse en cómo los estudiantes ponen en juego procesos de razonamiento geométrico como el reconocimiento, la definición, la clasificación o la demostración en la resolución de las actividades propuestas por Jimena.

Análisis

Tabla 4.17

Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 2.7

Código	Contenido del episodio
[TF1.1A.20 U975-1105]	Actividad 2.7. Nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes.

[TF1.1A.20 U975-1105] Actividad 2.7. Nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes.

976. Pelayo: Yo he puesto el nivel dos.

980. Pelayo: Porque por lo que he visto en el texto ya han pasado de la fase visual, que es nivel uno, y se encuentran como mínimo en el nivel dos, que es la clasificación de..., o sea que es una clasificación “pobrecita” de polígono, que sabe que tiene lados y vértices, y creo que no está en el tres porque no se mete por ejemplo en una clasificación más..., que sería lo de cóncavo, convexo, ¿no?

981. Isabel: Yo he puesto que se encuentran entre el nivel dos y el tres, porque hacen una descripción de la figura, pero a la vez también...

984. Carmen: Yo es que lo he hecho por contestación de los alumnos, es decir...

988. Pelayo: La 59 por ejemplo.

989. Formadora: En la 59 dicen... “nosotras creemos que sí lo es porque está cerrado y tiene lados y vértices”. Y a ti eso te parece que sea de nivel dos. [Pelayo asiente].

1011. *Isabel: [...] pero también definen estructuras matemáticas complejas, es decir..., lo que yo he puesto realmente es que realizan una deducción informal, y eso lo hacen.*
1021. *Isabel: Y ese es el nivel tres.*
1024. *Formadora: Vale, pero ¿qué tipo de deducción informal? Dime línea.*
1027. *Isabel: No te lo puedo decir porque lo he hecho con todo el texto.*
1029. *Isabel: Es que realmente como llegan a la definición es a través de eso, de una deducción informal, ¿no?*
1030. *Formadora: Te parece que eso es nivel dos porque utiliza lenguaje matemático, en vez de decir esquinas, ...*
1031. *Pelayo: Sí.*
1032. *Formadora: ¿Por qué nivel tres? A parte de la deducción informal. Alguien más que opina que era nivel tres. Gabi.*
1033. *Gabi: Clasificación y categorías de clase. Al final clasifican.*
1034. *Formadora: Pero no hacen categorías de clases.*
1048. *Belén: Es que si la profesora no hubiera actuado todos estarían en el nivel uno...*
1056. *Pelayo: Es que, al principio, en la línea 34, cuando pregunta desde el principio a la clase por qué cree que es un polígono, dice porque es un triángulo, y los triángulos son polígonos...*
1061. *Elsa: Eso digo yo, uno cien por cien, eso es lo que yo iba a decir.*
1062. *Pelayo: Pero eso es una definición simple, ¿no?*
1064. *Elsa: No, te está dando un ejemplo.*
1066. *Pelayo: Y dice, tiene lados y vértices.*
1073. *Formadora: Con lo cual ahí estaríamos claramente en el nivel uno.*
1074. *Elsa: No, es que era en la línea 34 es la que, desde mi punto de vista, se ve más claro que es nivel uno, porque a medida que vas avanzando, los niños van sacando más..., pero es eso, es la profesora la que va aumentando el nivel.*
1084. *Carmen: Para decir otra línea. La 46 a 48.*
1086. *Carmen: Yo ahí he puesto que de momento podemos decir que está en el nivel 1.*
1088. *Carmen: El reconocimiento hace que vean que están abiertos y estos tienen que estar cerrados, pero no sabemos si están en el dos porque no dan...*
1090. *Pelayo: Cuando al final dan la definición ahí sí podría decir que está en el nivel dos,*
1091. *Formadora: En la definición en sí misma sí que podríamos decir que estaría en nivel dos, pero porque utiliza un cierto lenguaje, pero hasta qué punto es su lenguaje o es un lenguaje que está construido por cómo ha ido evolucionando la clase ...*
1092. *Elsa: Pero, al fin y al cabo, aunque sea un lenguaje así, si ha sido recogido por todos los compañeros, al final sí es nivel dos, ¿no?*

Los EPM no coinciden en sus respuestas, pues algunos han considerado el episodio completo para dar su respuesta. Otros se han basado en intervenciones individuales, encontrando diferentes niveles según la respuesta que analizaban. Así deberían de haber analizado el episodio todos, teniendo en cuenta que el nivel de razonamiento de un

individuo depende del desarrollo cognitivo de cada uno y de la experiencia que se haya tenido con el conocimiento a tratar. A pesar de que los estudiantes pertenecen todos al mismo nivel de Educación Primaria, el nivel de razonamiento es propio de cada individuo. Se debe tener en cuenta que, además, el nivel de razonamiento de cada persona es de carácter local (Jaime y Gutiérrez, 1990), es decir, podría mostrar indicadores de un nivel distinto para situaciones diferentes. Al mismo tiempo, se debe tener en cuenta que el paso de un nivel al siguiente se produce de manera continua, lo que implica que un estudiante puede estar, durante algún tiempo, en un periodo de transición, combinando razonamiento de dos niveles consecutivos.

Debemos de tenerlo en cuenta para posteriores implementaciones de la tarea. Es muy importante incidir en que el estudio del nivel de razonamiento de van Hiele desde la transcripción de una sesión de clase, se debe analizar las intervenciones de cada individuo de manera independiente. Para ello es necesario modificar la tarea identificando en la transcripción a cada estudiante. En la primera implementación solo se diferencia entre intervención de la maestra y de estudiante, sin especificar a qué estudiante corresponde cada una de ellas.

En la transcripción del caso aparecen intervenciones de distintos estudiantes que responden a la actividad propuesta por la maestra. Estas intervenciones van reelaborándose a medida que va avanzando la clase teniendo en cuenta las producciones de otros compañeros y de la propia Jimena. Depende de la intervención en la que se fijen los EPM, identifican un nivel u otro.

Así, Pelayo, en una primera respuesta, considera que el nivel de razonamiento del grupo es el *dos* [TF1.1A.20 U976], si bien, como ya hemos indicado, el nivel de razonamiento se asigna a cada individuo. En este sentido Carmen sí ha entendido que el nivel de razonamiento debe analizarlo por estudiante, así dice *yo es que lo he hecho por contestación de los alumnos* [TF1.1A.20 U984], indicio de su conocimiento sobre KFLM (teorías de aprendizaje).

La respuesta de Pelayo está basada en el objetivo con el que la maestra plantea la actividad que resuelven los estudiantes (clasificar un conjunto de figuras), en lugar de en cómo la resuelven y en por qué la resuelven así, que sería lo que podría dar información sobre el nivel de razonamiento de cada sujeto. En este caso, el EPM considera que los estudiantes

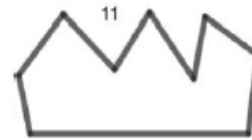
están en nivel dos porque hay autores que a este nivel lo llaman *clasificación*. Por ello interpreta que, para que los estudiantes puedan establecer una clasificación deben estar en dicho nivel, sin fijarse en cómo hacen la clasificación de figuras. En la siguiente implementación de la tarea lo tendremos en cuenta para asegurarnos que los EPM entienden en qué deben fijarse para identificar el nivel de razonamiento de van Hiele de un estudiante.

Según Pelayo, los estudiantes *han pasado de la fase* (se refiere a nivel) *visual, que es nivel uno, y se encuentra en el nivel dos, que es la clasificación “pobrecita” de polígono [...], y no está en el tres porque no se mete en una clasificación más..., que sería lo de cóncavo, convexo* [TF1.1A.20 U980]. Es decir, entiende que es de nivel 2 porque en la actividad los estudiantes tienen que clasificar figuras en polígonos y no-polígonos. Gabi utiliza el mismo argumento al responder a la formadora que él considera que los alumnos están en nivel 3 porque hay *Clasificación y categorías de clases. Al final clasifican* [TF1.1A.20 U1033]. En ambos casos identifican un determinado nivel asociándolo al tipo de actividad propuesta en vez de al razonamiento que deben establecer los estudiantes para su resolución. Gabi sabe que en el proceso de clasificación los estudiantes que son capaces de establecer categorías de clases están en un nivel superior a los que determinan clases de equivalencia (KFLM, teorías de aprendizaje).

Pelayo habla de “*clasificación pobrecita*” para referirse a un agrupamiento en clases de equivalencia, es decir, una clasificación en sentido estricto (propia del nivel dos), a diferencia de las categorizaciones o clasificaciones inclusivas, características de niveles de razonamiento superiores (KFLM, teorías de aprendizaje). Además, se refiere a la clasificación de polígonos en cóncavos y convexos como si esta fuese una categorización, cuando en realidad es la consecuencia de establecer la relación “un polígono A está relacionado con otro polígono B si ambos tienen algún ángulo con amplitud mayor a 180° o ninguno de ellos tienen ángulos de este tipo” en el conjunto de polígonos. Esta relación es de equivalencia por ser reflexiva, simétrica y transitiva, y como tal, genera dos clases disjuntas: polígonos convexos y polígonos cóncavos. Es decir, establece una clasificación (excluyente) en el conjunto de polígonos. Consideramos un indicio de que Pelayo sabe que, a la hora de agrupar elementos atendiendo a ciertos criterios, se puede hacer uniéndolos en clases de equivalencia o en categorías (KoT, procedimientos), y que el

nivel de razonamiento necesario para categorizar es mayor que el necesario para hacer clasificaciones exclusivas (KFLM, teorías de aprendizaje).

La formadora le pide que identifique *una línea significativa para decir que el alumno está en nivel 2*. Pelayo hace referencia a la intervención del estudiante de la línea 59, en la que expresa que la figura 11 es un polígono *porque está cerrado y tiene lados y vértices*. Este EPM justifica que el estudiante está en el nivel 2 de razonamiento geométrico basándose en que *utiliza un lenguaje matemático* al hablar, por ejemplo, de *vértices* en lugar de esquinas [TF1.1A.20 U1030, 1031]. Es decir, se basa en que el estudiante hace uso de un vocabulario matemático para referirse a elementos de la figura para determinar el nivel de razonamiento de este (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).



Por otra parte, para Isabel el nivel de razonamiento que muestran los estudiantes es el *tres* [TF1.1A.20 U1021] ya que *realizan una deducción informal para llegar a la definición* [TF1.1A.20 U1015, 1029]. En este caso identificamos conocimiento sobre KoT (procedimientos) al reconocer la estrategia que han seguido para llegar a una definición de polígono. Por otra parte, aunque muestra conocimiento sobre el modelo de razonamiento geométrico de van Hiele, Isabel no ha analizado cada una de las respuestas individuales de los estudiantes. Tal y como reconoce en [TF1.1A.20 U1027], ha basado su respuesta en el conjunto de intervenciones del episodio. Se debe tener en cuenta para que los EPM lo tengan claro en las próximas implementaciones de la tarea.

Elsa identifica el nivel *uno* [TF1.1A.20 U1061] en una intervención que señala Pelayo, en la que un estudiante dice que una figura es polígono porque *es un triángulo y los triángulos son polígonos* [TF1.1A.20 U1056], refiriéndose al polígono representado a la izquierda. Elsa se basa en que el estudiante *está dando un ejemplo* [TF1.1A.20 U1064] de polígono, es decir, sabe que el triángulo que aparece representado verifica las características críticas de un polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Pelayo considera que, al indicar el estudiante que es un polígono porque *tiene lados y vértices*, está dando una *definición simple* [TF1.1A.20 U1062, 1066]. Es un indicio de que sabe que son propiedades que definen a un polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Identifica la definición como *simple* porque da un listado de elementos que debe tener una figura para ser un polígono, aunque en la

intervención del estudiante no añade características a dichos elementos. Que Pelayo se base en que el estudiante da una definición de estructura simple en la que se tienen en cuenta elementos matemáticos de la figura para considerar que el nivel de razonamiento en el que está el alumno que da esa respuesta es el dos, lo consideramos como indicio de que conoce el modelo de van Hiele sobre aprendizaje de geometría (KFLM, teorías de aprendizaje).



Continuando con el análisis de este episodio, Carmen identifica una intervención de un estudiante en el *nivel uno* porque *el reconocimiento hace que vean que están abiertos y estos tienen que estar cerrados* [TF1.1A.20 U1086, 1088]. Sabe que la línea poligonal que determina al polígono debe ser cerrada (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, basa su análisis en una característica física de la figura, que podría interpretarse también como propiedad matemática de la misma. Carmen sabe que los estudiantes que están en el nivel inicial de razonamiento geométrico justifican sus afirmaciones de esta forma (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático; KFLM, teoría de aprendizaje). La formadora, además, incide en atender al uso de un lenguaje poco formal como identificador de los estudiantes de nivel uno [TF1.1A.20 U1089].

Al final del episodio Pelayo y Elsa coinciden en identificar un nivel de razonamiento dos en el enunciado final al que llegan los estudiantes (KFLM, teorías de aprendizaje) [TF1.1A.20 U1090, 1092]. Aunque no lo verbalizan, sus respuestas pueden estar basadas en que hay un listado de propiedades de los elementos que determinan la figura. Elsa aporta cierto matiz al decir, *aunque sea un lenguaje así [...] sí es nivel dos*. Interpretamos como indicio de que considera que una persona que está en un nivel dos de razonamiento utiliza un lenguaje más formal (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

Tabla 4.18

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 2.7

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	Procedimientos	Saben que la agrupación de elementos atendiendo a ciertos criterios se puede hacer uniéndolos en clases de equivalencia o en categorías (U980). Conocen la deducción informal como estrategia para llegar a la definición de un concepto (U1015, 1029).
	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Saben que un triángulo es un ejemplo de un polígono (U1064).

KPM	Condiciones necesarias y suficientes para generar una definición	Saben que el tener vértices y lados son propiedades de un polígono (U1066).
		Saben que la línea poligonal que determina a un polígono debe ser cerrada (U1088).
KFLM	<u>Teorías de aprendizaje</u>	Saben que un listado de propiedades de los elementos de la figura es una definición simple de polígono (U1062, 1066).
		Saben que el nivel de razonamiento necesario para categorizar es mayor que el necesario para hacer clasificaciones exclusivas (U980).
		Saben que el nivel de razonamiento geométrico es propio de cada individuo (U984).
		Saben que en el proceso de clasificación los estudiantes que son capaces de establecer categorías de clases están en un nivel superior a los que determinan clases de equivalencia (U1033).
		Saben que en el nivel dos del modelo de razonamiento geométrico de van Hiele las definiciones tienen una estructura simple en la que se tienen en cuenta elementos matemáticos de la figura (U1062, 1066).
		Sabe que el reconocimiento de figuras en el nivel uno de razonamiento geométrico se realiza fijándose en características físicas de las figuras (U1088)
	<u>Formas de interacción con un contenido matemático</u>	Saben que las definiciones dadas por un individuo que está en nivel dos de razonamiento geométrico son listados de propiedades matemáticas de los elementos de la figura (1090, 1092).
		Saben que el uso de un determinado vocabulario geométrico es indicador del nivel de aprendizaje de quien lo utiliza (U1031).
		Saben que un individuo que está en el nivel dos de razonamiento geométrico expresa sus definiciones utilizando un vocabulario matemático (U1092).

4.1.3. Tercer fragmento: Clasificación de polígonos.

Resumen

Las actividades analizadas hasta ahora corresponden a la parte del caso dedicada a la definición de polígono. Las que analizaremos a continuación corresponden con la segunda parte del caso, dedicada a la clasificación de polígonos, en la que la maestra presenta a sus estudiantes un conjunto de polígonos variados, como se muestra en la Figura 4.7, y les pide que los comparen entre sí para identificar características comunes entre algunos de ellos. Los estudiantes proponen como criterios de clasificación, por una parte, el número de lados, y por otra, el que la figura tenga o no algún ángulo mayor a 180° .

A los EPM se les plantean cuatro actividades para que reflexionen sobre diferentes elementos de conocimiento especializado del profesor de matemáticas a partir de las intervenciones de maestra y alumnos en la resolución de esta tarea en el aula de Primaria.

4.1.3.1. Actividad 3.1. Criterios para agrupar polígonos

Actividad 3.1. Pensad en otros criterios que se podrían usar para agrupar los polígonos de la Ilustración 2 (Figura 4.7).

Con esta actividad pretendemos que los EPM reflexionen sobre aquellas características de los polígonos que puedan tomar distintos valores según sea la figura y que, por tanto, permitan hacer clasificaciones o categorizaciones de polígonos, en función de cómo se enuncie el criterio (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos; procedimientos).

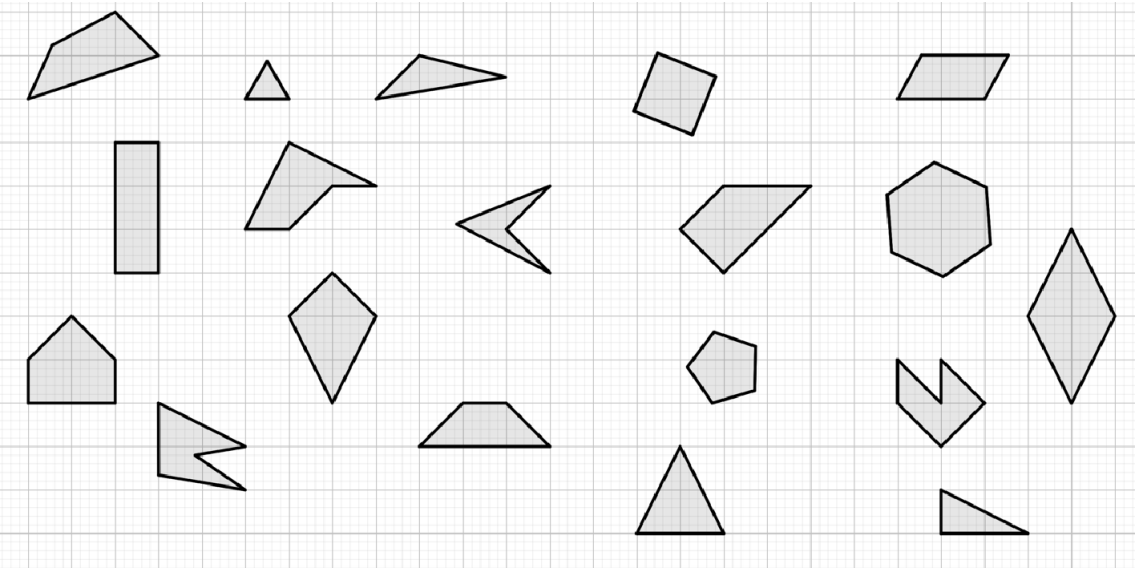


Figura 4.7 Conjunto de polígonos facilitado por la maestra

Análisis

Tabla 4.19
Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 3.1

Código	Contenido del episodio
[TF1.1A.21 U1106-1133]	¿Qué están haciendo los estudiantes?
[TF1.1A.22 U1134-1146]	¿Qué criterios han utilizado los estudiantes?
[TF1.1A.23 U1147-1231]	Criterio: Amplitud I
[TF1.1A.24 U1232-1298]	Criterio: Amplitud II
[TF1.1A.25 U1298-1323]	Criterios: Figuras prototípicas. Posición de los lados
[TF1.1A.26 U1323-1376]	Otros criterios

[TF1.1A.27 U1377-1425] Criterio: Longitud de los lados

[TF1.1A.21 U1106-1133] ¿Qué están haciendo los estudiantes?

1106. Formadora: [...] *¿Qué es lo que están haciendo en este caso?*
1107. Javier: *Clasificar.*
1108. Elsa: *Categorizar... también.*
1113. Formadora: *¿Cuál es la consigna de la profesora?*
1114. Elsa: *Que lo manipulen.*
1115. Formadora: [...] *¿para hacer qué?*
1116. Rosa: *Una clasificación.*
1117. Formadora: *¿Ella dice para que lo clasifiquéis?*
1118. Alumnos: *No.*
1119. Abril: *Que busquen cosas en común [junta las manos en señal de equivalencia].*
1120. Rosa: *Que vean en qué se parecen.*
1122. Rosa: *Pero eso es una clasificación.*
1123. Formadora: *Pero ¿ella dice clasificar?*
1125. Rosa: *Pero, si tú eso lo pones... está clasificando según las figuras que sean más parecidas.*
1126. Formadora: [...] *¿cuál es la consigna de la profesora?*
1127. Pelayo: *¿Qué características comunes tienen...?*
1128. Formadora: *Coged las figuras y mirad a ver...*
1129. Paloma: *Y compararlas...*
1133. Pelayo: *Dice... lo que tenemos que hacer es comparar unas figuras con otras para ver qué características comunes podemos encontrar.*

En este episodio se evidencia que los EPM saben que al comparar figuras y *buscar “cosas” en común* [TF1.1A.21 U1119] entre ellas se *está clasificando según las figuras que sean más parecidas* [TF1.1A.21 U1125]. Por tanto, identifican el procedimiento que lleva a los alumnos a *clasificar* [TF1.1A.21 U1107] (KoT, procedimientos). Elsa dice que también les lleva a *categorizar* [TF1.1A.21 U1108], aunque con los dos criterios que dan los estudiantes en el episodio analizado (agrupamiento por número de lados, por una parte, o tener o no algún ángulo mayor a 180°), tal y como están enunciados, no se generan categorizaciones, las figuras quedan agrupadas en clases de equivalencia.

Con el primer criterio las figuras quedan agrupadas en conjuntos disjuntos: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, etc. Para que al tener en cuenta el número de lados se generase una categorización deberían de haber enunciado el criterio diciendo que una

figura, A, está relacionada con otra, B, si el número de lados de A es menor o igual que el número de lados de B. De esa forma, por ejemplo, dentro del conjunto de los pentágonos estarían incluidos los cuadriláteros, y dentro del conjunto de los cuadriláteros estarían incluidos los triángulos (ver Figura 4.8).

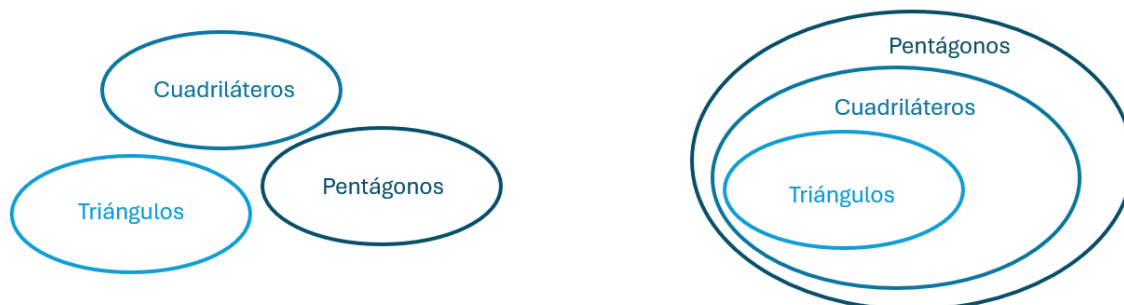


Figura 4.8 Clasificación en clases de equivalencia vs jerárquica de polígonos por número de lados

El criterio de agrupar las figuras según tengan o no algún ángulo mayor de 180° genera la clasificación de los polígonos en dos clases: polígonos convexos, si todos sus ángulos son convexos, y polígonos cóncavos, en otro caso (ver Figura 4.9).



Figura 4.9 Clasificación de polígonos atendiendo a la amplitud de sus ángulos

Por otro lado, al preguntar la formadora por la intención de la maestra al dar las figuras en cartulina a sus estudiantes, Elsa responde que lo hace para *que lo manipulen* [TF1.1A.21 U1114]. Identificamos indicio de conocimiento sobre el potencial del recurso manipulativo que facilita la maestra (KMT, recursos materiales y digitales). El tener las figuras representadas en un material sobre la mesa les permite observarlas en diferentes posiciones, evitando que generen una imagen prototípica de la figura vinculada con la posición en la que se suele representar.

Por ejemplo, es muy frecuente que los estudiantes identifiquen un cuadrado entre un conjunto de polígonos si la figura tiene dos lados en horizontal y dos lados en vertical, pero no lo hagan si los lados del cuadrado son oblicuos (Moriena y Scaglia, 2003, Fiantika et al., 2018). Es más, pueden identificarlo como rombo si los lados del cuadrilátero

forman ángulos de 45° respecto de la horizontal (ver Figura 4.10). Esto ocurre, no porque entiendan que lo que caracteriza a un rombo es que tenga 4 lados de igual longitud y que, por lo tanto, todo cuadrado es un rombo, sino porque la figura está en la posición prototípica en la que se representa normalmente el rombo en los libros de texto o en aplicaciones informáticas.



Figura 4.10 Distintas posiciones de un cuadrado en el plano

[TF1.1A.22 U1134-1146] ¿Qué criterios han utilizado los estudiantes?

1134. *Formadora: Bien. ¿Qué criterios han utilizado los alumnos?*
1135. *Paloma: El número de lados [contestan varios alumnos a la vez]*
1136. *Formadora: El número de lados es lo primero...*
1137. *Bela: Y cóncavo y convexo.*
1138. *Formadora: ... y luego cóncavo y convexo, aunque no lo hayan verbalizado, pero han dicho...*
1139. *Javier: Tipos de vértices...*
1140. *Formadora: ... hay vértices para dentro...*
1144. *Rosa: Pero la profesora sí lo verbaliza.*

Los EPM identifican los criterios que utilizan los estudiantes de primaria para clasificar los polígonos dados por la maestra y que se muestran en la Figura 17 (KoT, procedimientos). Estos criterios generan dos clasificaciones clásicas: según *el número de lados* [TF1.1A.22 U1135] y atendiendo a si el polígono es *cóncavo o convexo* [TF1.1A.22 U1137]. Estas respuestas son indicios de que conocen estas características de los polígonos que permiten establecer agrupamientos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Javier relaciona este segundo criterio con los *tipos de vértices* [TF1.1A.22 U1139]. Relaciona el “algunos tienen picos hacia dentro”, que dicen los estudiantes en el caso para referirse a los polígonos cóncavos, “eso es que el ángulo mide más de 180° ”, que es como

expresa esta propiedad la maestra. Si entendemos “picos” como los vértices de un polígono, como puntos que son, no pueden diferenciarse en distintos tipos. Sin embargo, sí podemos diferenciar distintos tipos de ángulos teniendo en cuenta la medida de su amplitud.

[TF1.1A.23 U1147-1231] Criterio: Amplitud I

1147. Formadora: *Pensad en otros criterios, con los que agrupar, distintos a los que ellos dan.*
1150. Paola: *Tipo de ángulos.*
1152. Elsa: *Si tiene ángulo recto...*
1153. Formadora: *¿Tipos de ángulos? Y en los tipos de ángulos...*
1155. Paloma: *Agudos.*
1157. Belén: *Llanos.*
1158. Paola: *Obtusos.*
1159. Rosa: *Rectos.*
1164. Javier: *Completo.*
1165. Formadora: *[...] El recto, y luego el obtuso, que es mayor que... Fijaos que estoy diciendo es más pequeño, mayor..., ¿respecto de qué?*
1168. Elsa: *De 180 [pone un brazo en horizontal].*
1169. Formadora: *De 180. Pero tendré que hacer referencia a alguna magnitud para decir que es más grande o más pequeño.*
1202. Javier: *Grados.*
1203. Paloma: *Grados, ¿no?*
1204. Formadora: *¿Grados es la magnitud?*
1209. Rosa: *Grados es lo que mide...*
1212. Paloma: *Lo de minutos y segundos.*
1213. Rosa: *Medida.*
1215. Amanda: *Abertura.*
1217. Paloma: *Es una unidad.*
1218. Formadora: *[...] Unidad de medida ¿de qué magnitud?*
1219. Gabi: *De la amplitud.*
1224. Formadora: *A la amplitud de los ángulos que me encuentro, ¿no? ¿Esa la utilizan ya los alumnos?*
1227. Elsa: *Sí, lo de cóncavo y convexo.*
1229. Elsa: *Lo que pasa es que es otra diferente a la de...*
1231. Elsa: *180.*

Al preguntar la formadora por otros criterios que pueden utilizarse para clasificar polígonos, Paola dice que se podían basar en el *tipo de ángulos* [TF1.1A.23 U1150].

Aunque uno de los criterios aportados por los estudiantes de primaria tiene en cuenta estos elementos del polígono para su clasificación, se pueden enunciar otros criterios atendiendo a la amplitud de los ángulos internos del polígono. Elsa concreta la respuesta de su compañera indicando que se puede tener en cuenta *si tiene algún ángulo recto* [TF1.1A.23 U1151], mostrando que conoce un criterio de clasificación de polígonos basado en un caso concreto de ángulos (KoT, procedimientos). Con esta aportación entendemos, además, que conocen el concepto de ángulo y, concretamente, el de ángulo recto (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Por otra parte, varios EPM dan el nombre de distintos tipos de ángulos según su amplitud [TF1.1A.23 U1155-1164]. Consideramos indicio de que saben el significado de cada uno de los términos asociados al concepto de ángulo atendiendo a su amplitud (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Elsa hace explícito que sabe que todos esos ángulos (salvo el completo) tienen una amplitud menor a 180° [TF1.1A.23 U1168] (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). A la vez que verbaliza esta propiedad, pone el brazo izquierdo estirado, representando una línea recta y, con la mano derecha marca un arco sobre la fosa del codo izquierdo con el que simboliza el ángulo llano. Está usando elementos corporales para representar ángulos (KMT, recursos materiales y digitales). De esta manera representa este tipo de ángulo utilizando un registro figural-icónico, haciendo una conversión desde el registro verbal (Duval, 1993) (KoT, registros de representación).

Ante la pregunta de la formadora sobre la magnitud que consideran para comparar las medidas de los ángulos entre sí, Javier y Paloma hacen referencia a una unidad de medida de la magnitud, los *grados* [TF1.1A.23 U1202, 1203], y no a la magnitud en sí misma. Ana alude al término *abertura* [TF1.1A.23 U1215] que, puede entenderse como una manera intuitiva de entender la amplitud de un ángulo. Es Gabi quién nombra de manera correcta a la magnitud indicando que la comparación se está teniendo en cuenta *la amplitud* [TF1.1A.23 U1219] (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Con relación a la respuesta de Javier y Paloma, Rosa dice que *grados es lo que mide* [TF1.1A.23 U1209], es *medida* [TF1.1A.23 U1213], que podemos considerar como un indicio de que sabe que es la unidad que permite asignar una medida a la amplitud de un ángulo (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Paloma relaciona los grados con *lo de minutos y segundos* [TF1.1A.23 U1212], identificando las subdivisiones de dicha unidad de medida (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Asimismo,

con ayuda de la formadora, Paloma verbaliza que los grados son una *unidad* [TF1.1A.23 U1217], sin especificar la magnitud que mide.

Elsa sabe que la clasificación que proponen los estudiantes de primaria en polígonos *cóncavos* y *convexos* [TF1.1A.23 U1227] se basa en la amplitud de los ángulos de cada figura (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, sabe que utilizando la amplitud de los ángulos se pueden generar distintas clasificaciones, según se enuncie el criterio, como se deduce de su comentario *Lo que pasa es que es otra diferente a la de...* (KoT, procedimientos) [TF1.1A.23 U1229]. Por último, Elsa indica que para clasificar polígonos en cóncavos y convexos hay que mirar si los ángulos son mayores o menores de 180° [TF1.1A.23 U1231], mostrando conocimiento sobre estos conceptos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

[TF1.1A.24 U1232-1297] Criterios: Amplitud II

1234. Formadora: [...] Porque el [polígono]cóncavo tiene al menos un ángulo...
1237. Paloma: Menor de 90, ¿no?
1238. Formadora: ¿El cóncavo tiene un ángulo menor que 90? [Paloma hace un gesto con su mano marcando un ángulo y señalando con el bolígrafo].
1239. Formadora: Lo estás pensando justamente al revés.
1242. Paloma: Cóncavo es la parte de aquí, ¿no? [Señala con una mano el espacio que hay entre su dedo pulgar y su dedo índice de la otra mano].
1255. Formadora: [...] Cuando son convexos, puedo hablar de otras categorías dentro, ¿no? Subclases dentro de una clase, que serían ¿cuáles?
1258. Gabi: Agudos.
1260. Formadora: Y ¿hay ángulos agudos...?
1261. Elsa: Obtusos.
1272. Formadora: Cuando utilizo amplitudes de ángulos y me refiero a una clasificación o categorización, diciendo ángulos obtusos o ángulos agudos, ¿a qué tipo de polígonos me estoy restringiendo?
1273. Gabi: Triángulos.
1274. Formadora: A los triángulos. ¿En el resto de los polígonos hacemos esa distinción?
1275. Paloma: No [contestan otros alumnos al unísono].
1276. Formadora: Hacemos otra distinción respecto de las amplitudes. ¿Cuál?
1278. Formadora: [...] hablamos de ángulos...
1279. Paloma: Rectos.
1283. Formadora: Que haya ángulo recto o que no haya ángulo recto, [...], por ejemplo, en el caso de los cuadriláteros... ¿qué?... O todos rectos, o...

1284. Elsa: *Dos agudos.*
 1285. Formadora: *¿Todos agudos?*
 1286. Elsa: *No.*
 1294. Formadora: *Y los ángulos interiores a un triángulo suman...*
 1295. Paloma y Elsa: *180.*
 1296. Formadora: *Y los interiores a un cuadrilátero suman...*
 1297. Paloma y Elsa: *360.*

El episodio comienza tratando la formadora que los EPM planteen un criterio de clasificación de polígonos basado en la amplitud de sus ángulos interiores diferente al que proponen los estudiantes de primaria en el caso. Paloma confunde el concepto de ángulo cóncavo con el de convexo. Ella dice que un ángulo cóncavo es *menor de 90 [grados]* [TF1.1A.24 U1237], además, representa con los dedos de su mano un ángulo y señala el espacio que queda entre ellos [TF1.1A.24 U1238, 1242]. Además, indica que la amplitud con la que se compara para determinar si el ángulo es de un tipo u otro es de 90° , en lugar de 180° . Aun así, utiliza un registro de representación figural-icónico, utilizando sus propias manos (ver Figura 4.11), para mostrar el concepto al que hace referencia (KoT, registros de representación). En este caso, las manos son un recurso material que le permite exponer una idea sobre ángulos (KMT, recursos materiales y digitales).

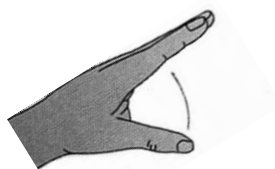


Figura 4.11 Representación de un ángulo con los dedos de la mano

La formadora aprovecha la intervención de Paloma para hacer referencia a los dos ángulos que se generan en cada vértice de un polígono, el que queda en la parte interior de éste y el que queda fuera, y de la relación que hay entre las amplitudes de ambos. Los dos ángulos que se generan son conjugados, la suma de las medidas de sus amplitudes es 360° . Además, ambos ángulos comparten los lados, la unión de los dos equivale a un ángulo completo. Se hace mención al “ángulo que queda fuera” para no confundirlo con la definición matemática de ángulo exterior como aquel que se forma por un lado de la figura y la prolongación de su lado continuo. Un ángulo interior y su correspondiente ángulo exterior son suplementarios, la suma de sus amplitudes equivale a la de un ángulo llano (ver Figura 4.12).

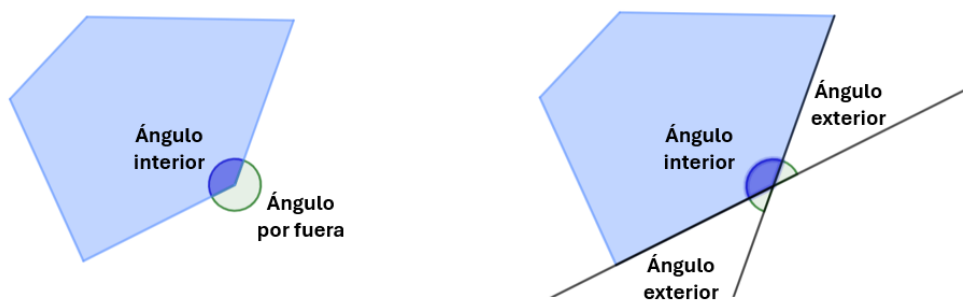


Figura 4.12 Ángulos generados por dos lados consecutivos de un polígono

La formadora reconduce la clase para que los EPM enuncien otros criterios que permitan la clasificación de polígonos considerando, ahora, solo los convexos. Pregunta por agrupamientos dentro de los polígonos convexos, pero algún EPM como Gabi o Elsa nombran algunos tipos de ángulos: *agudos*, *obtusos* [TF1.1A.24 U1258, 1261], lo que muestra su conocimiento sobre clases de ángulos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, Gabi también sabe que los *triángulos* [TF1.1A.24 U1273] pueden clasificarse teniendo en cuenta la amplitud de sus ángulos (KoT, procedimientos), identificando si hay algún ángulo obtuso, o todos son agudos, etc. (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Para la clasificación de polígonos, Paloma plantea como criterio el tener en cuenta si la figura tiene ángulos *rectos* [TF1.1A.24 U1279], (KoT, procedimientos). La relación podría enunciarse diciendo que un polígono A está relacionado con otro B si los dos tienen el mismo número de ángulos rectos, agrupando a los polígonos en clases de equivalencia: polígonos sin ángulos rectos, con un ángulo recto, con dos ángulos rectos, etc. Se debe tener en cuenta que, si esta relación se establece en un tipo concreto de polígonos, por ejemplo, en un conjunto de cuadriláteros, se generarían solo cuatro clases: sin ángulo recto, con uno, con dos o con cuatro ángulos rectos, pero no con tres (ver Figura 4.13). La suma de las amplitudes de cualquier cuadrilátero es igual a 360° . Si hubiese tres ángulos rectos ($3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$), el cuarto también tendría que ser recto.

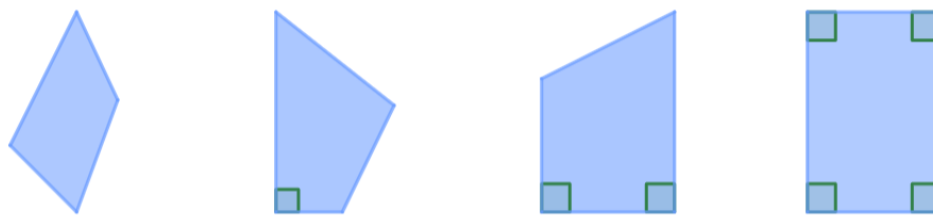


Figura 4.13 Tipos de cuadriláteros según el número de ángulos rectos

La formadora, en cierta forma, les hace reflexionar sobre esta cuestión al decirles: *en el caso de los cuadriláteros, o todos rectos o...* [TF1.1A.24 U1283]. Elsa responde *dos agudos* [TF1.1A.24 U1280]. Aunque no explica el por qué, sabe que los cuatro ángulos de un cuadrilátero *no* [TF1.1A.24 U1286] pueden ser agudos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Para justificar esta propiedad, la formadora pregunta por la medida de las amplitudes de los ángulos de un triángulo y de un cuadrilátero. Los EPM responden 180° [TF1.1A.24 U1295] y 360° [TF1.1A.24 U1297], respectivamente mostrando su conocimiento sobre estas medidas (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

[TF1.1A.25 U1298-1323] Criterios: figuras prototípicas y posición de los lados

1298. Formadora: *¿Qué otras propiedades, características, elementos, podría utilizar para hacer clasificaciones diferentes a las que han salido en el aula?*
1304. Paloma: *La posición que tienen los lados.*
1305. Rosa: *Yo he puesto según si son prototípicas o no, si son figuras familiares o son raras.*
1308. Belén: *Pero es que a lo mejor algunos son de una forma...*
1310. Formadora: *Claro, ¿cuál es el problema que tiene esa clasificación?*
1311. Javier: *Que cada uno tiene un criterio diferente.*
1312. Belén: *Cada uno tiene unas figuras.*
1313. Paloma: *No es objetivo, ¿no?*
1314. Formadora: *Es muy subjetiva. Depeden ¿de qué?*
1317. Belén: *De la posición [Responden varios alumnos].*
1318. Formadora: *¿La definición o una clasificación de polígonos podría depender de la posición?*
1319. Alumnos: *No.*
1321. Formadora: *No debería, ¿por qué no?*
1322. Belén: *Porque una posición u otra es lo mismo, ¿no?*

Los EPM continúan aportando otros criterios que se podrían utilizar para agrupar polígonos. Rosa propone utilizar si las figuras son prototípicas o no, es decir, si son de

uso común en las situaciones de enseñanza y aprendizaje o pueden resultar extrañas. Como bien le responden varios compañeros, ese criterio *no es objetivo* [TF1.1A.25 U1313], lo que para unos estudiantes puede ser figura extraña, para otros podría no serlo. *Cada uno tendría un criterio diferente* [TF1.1A.25 U1311]. Para establecer una clasificación debemos considerar un criterio que no sea subjetivo.

Paloma plantea clasificar los polígonos según *la posición que tienen los lados* [TF1.1A.25 U1304]. Aunque no se especifica, porque no se trata en este episodio, se entiende que se refiere a la posición relativa de los lados de un polígono (KoT, procedimientos). Con relación a la posición de los lados de la figura, la formadora da un criterio basado en la posición global de alguno de los lados de la figura agrupando los polígonos en dos clases. En una los polígonos con algún lado en horizontal y en otra los que no tienen lados en horizontal. Este criterio es subjetivo, solo sería útil si se aplica a un conjunto de figuras estáticas. Incluso, si se considera un conjunto de polígonos dibujados en la página de un libro, al girar el libro variaría el agrupamiento en las clases descritas.

Los EPM conocen que el criterio que se utilice para aplicar el proceso de razonamiento de clasificación debe ser objetivo, *no* [TF1.1A.25 U1319] puede depender de la posición en la que estén los objetos, sino de las características que lo determinan (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático).

[TF1.1A.26 U1324-1376] Otros criterios

1324. Gabi: *¿Se podría poner según cuántos cuadros ocupase?*
1330. Formadora: *¿Podrías decir cuántos cuadros ocupan todas las figuras?*
1332. Gabi: *Sí, el triángulo, uno. El segundo de la izquierda, uno.*
1338. Paloma: *No, pero no ocupa un cuadrado completo.*
1339. Formadora: *Pero..., ¿un cuadrado completo?*
1340. Elsa: *No.*
1342. Formadora: *¿Cuál es el problema que tiene esa clasificación?, Gabi.*
1344. Formadora: *Es parecida al problema de la posición. Tú ahí estás intentando hacer una clasificación respecto de la cantidad de magnitud. De ...*
1350. Rosa: *Superficie.*
1351. Formadora: *Superficie. Sí.*
1352. Isabel: *Por la regularidad de las figuras sí puedes clasificarlos, ¿no?*
1353. Formadora: *Vamos ahora a la regularidad, pero vamos a terminar con lo que está diciendo Gabi. [...] Si yo intento clasificar estas figuras que hay aquí por la cantidad de superficie,*

es decir, por el área que tienen, estaría de nuevo utilizando una característica que no está derivada de su definición. O sí.

1356. *Formadora: [...] ¿Cómo podría decir cuántos cuadros ocupa? Esa es la consigna.*

1357. *Gabi: No digo cuántos cuadrados enteros, sino si el triángulo ocupa uno, el otro...*

1359. *Paloma: Pero eso también depende de cómo lo coloques.*

1360. *Formadora: La cantidad..., la intersección entre la cuadrícula y la figura sería lo que tú estás diciendo, ¿no?*

1361. *Gabi: Sí.*

1362. *Formadora: Claro, pero es que ahí influye otra cosa más, que no es solamente la superficie, sino también la posición.*

1364. *Formadora: Bueno, perdona. Isabel había dicho regular y no regular.*

1368. *Formadora: Regular, que es qué, que tiene qué...*

1369. *Isabel: Lados iguales..., ángulos... dos a dos, creo que es. O no, no era eso.*

1370. *Formadora: Ángulos...*

1371. *Isabel: Rectos.*

1374. *Formadora: Ángulos iguales y lados iguales, eso es una figura regular, y una figura irregular es todo lo que no tenga esas dos cosas a la vez. Javier.*

1375. *Javier: Número de diagonales que tiene...*

1376. *Formadora: Número de diagonales, eso sería otro criterio de clasificación,*

Como nuevo criterio de clasificación de polígonos, Gabi sugiere utilizar el *número de cuadrados* que ocupe la figura [TF1.1A.26 U1324]. Este criterio no es válido para clasificar polígonos cualesquiera, para ello deberían de estar representados en una cuadrícula. Da este criterio porque tiene como referencia la plantilla de polígonos facilitada por la maestra a sus estudiantes (ver Figura 4.7).

Podríamos pensar que Gabi está pensando en considerar la cantidad de superficie de cada polígono, que es un criterio válido para establecer una clasificación de estas figuras. Para ello, necesitaríamos determinar qué unidad de esta magnitud tomamos como referencia. Pero el criterio dado por Gabi, tal y como lo concreta en una intervención posterior, no es tener en cuenta la cantidad de superficie sino el número de cuadrados de la cuadrícula en los que está representada alguna parte de la figura. Así, dice que el número de cuadrados que ocupa el *triángulo* de la Figura 4.14 es *uno*. Sin embargo, la superficie que ocupa la figura es menor que la que ocupa el cuadrado.

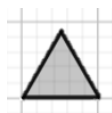


Figura 4.14 Triángulo equilátero representado en la cuadrícula

Como bien reconoce Paloma, el criterio aportado por Gabi *depende de cómo lo coloques* [TF1.1A.26 U1359], es decir, es subjetivo. Si dicho triángulo se desplazara en distintas direcciones sobre la cuadrícula podría ocupar parte de 2, de 3 o de 4 cuadrados, como se muestra en la Figura 4.15. Paloma sabe que el criterio que se utiliza para hacer una clasificación debe ser independiente de la posición en la que esté la figura (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático). Con este comentario, Paloma muestra conocimiento sobre KPM (formas de validación y demostración), al rebatir la afirmación de su compañero utilizando contraejemplos.

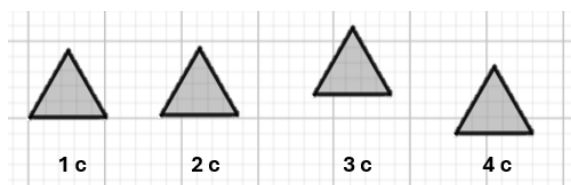


Figura 4.15 Distintas posiciones del triángulo en la cuadrícula

En este episodio Rosa identifica la magnitud *superficie* [TF1.1A.26 U1350] como la que se considera si se tuviese en cuenta la cantidad de cuadrados de la cuadrícula que ocupa cada polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Isabel propone como criterio de clasificación de polígonos *la regularidad de las figuras* [TF1.1A.26 U1352], mostrando conocimiento sobre KoT (procedimientos). Ella sabe que los polígonos se pueden clasificar en regulares e irregulares, pero no conoce la definición de esos conceptos. Así dice que un polígono es regular si tiene *lados iguales*, que sí corresponde con una característica crítica de ese tipo de polígonos, *y ángulos dos a dos* [TF1.1A.26 U1369]. La propiedad que le asigna de manera errónea a los ángulos de un polígono regular puede estar vinculada a las definiciones de algún paralelogramo. Al pedirle la formadora que reflexione sobre cómo son los ángulos, Isabel dice que en un polígono regular deben ser *rectos* [TF1.1A.26 U1371]. Es probable que su respuesta la haya dado pensando en el cuadrado, que es el único polígono regular en el que ocurre esto.

Al final de este episodio, Javier plantea utilizar el *número de diagonales que tiene el polígono* [TF1.1A.26 U1375] como otro criterio válido para clasificar polígonos (KoT, procedimientos). La formadora valida esta aportación, aunque no se profundiza en ella por falta de tiempo. La intervención de Javier es un indicio de que sabe qué es una diagonal de un polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

La clasificación de polígonos que se obtiene según el número de diagonales es equivalente a la que se obtiene atendiendo al número de lados, al número de vértices o al número de ángulos. Esto se puede justificar sabiendo que estas tres últimas cantidades coinciden en cada polígono (como consecuencia de la definición), y el número de diagonales de un polígono se puede obtener con la expresión $\frac{n(n-3)}{2}$, siendo n el número de lados (o de vértices o de ángulos) de dicho polígono.

[TF1.1A.27 U1377-1425] Criterio: Longitud de sus lados

1377. Paola: También según la longitud de sus lados, ¿no?
1378. Formadora: [...] ¿Según la medida o según la comparación de medida?
1379. Paola: La comparación de medida.
1381. Paola: [...], por ejemplo, los triángulos dependiendo de la comparación de los lados.
1388. Formadora: [...] Además, dependiendo de cómo lo enuncie, puedo generar una clasificación o puedo generar una categorización, ¿no?
1389. Alumnos: Sí.
1390. Formadora: Paola, la clasificación de los triángulos respecto de los lados, ¿cómo sería si la planteas de forma clasificación o de forma categorización? Clasifiquemos primero. Triángulos respecto de los lados, tendríamos...
1393. Alumnos: Equilátero, isósceles y escaleno [contestan varios estudiantes a la vez].
1394. Formadora: Equilátero, tendría ¿qué?
1395. Paola: Todos iguales.
1396. Formadora: Todos los lados iguales. ¿El siguiente sería?
1397. Alumnos: Isósceles [sorprende que todos coinciden en el orden].
1398. Formadora: ¿Y el isósceles tendría?
1399. Alumnos: Dos lados iguales y uno desigual.
1400. Formadora: Y uno desigual..., ¿eso genera una clasificación o una categorización?
1401. Alumnos: Clasificación.
1402. Formadora: Clasificación, ¿por qué? El isósceles tiene necesariamente dos iguales y uno que es distinto de los otros dos, por lo tanto, no puede ser... equilátero. Y el tercero sería...
1403. Alumnos: Escaleno.
1404. Formadora: Escaleno. ¿Qué le pasa al escaleno?

1405. Rosa: *Todos los lados son desiguales.*
1406. Formadora: *Todos sus lados son de distinta longitud, no pueden coincidir dos. Vale, pues ahora eso conviértelo en una categorización. Solo hay que obviar un detalle.*
1409. Isabel: *El lado distinto, ¿no?*
1410. Formadora: *El lado distinto, entonces cómo sería, Isabel. Equilátero, todos sus lados iguales, eso lo dejaríamos igual. Isósceles sería...*
1411. Isabel: *Dos lados iguales.*
1412. Belén: *Dos lados iguales, solo.*
1413. Formadora: *... dos lados iguales, y no decimos nada sobre el tercero.*
1414. Belén: *Y ninguno igual, ¿no?*
1415. Formadora: *Y el último sería...*
1416. Paola: *Todos diferentes.*
1417. Formadora: *No decimos nada sobre sus lados, con lo cual, el escaleno sería equivalente a decir...*
1419. Formadora: *Triángulo. Cualquier triángulo...*
1420. Rosa: *Es escaleno.*

Paola da un nuevo criterio para clasificar polígonos. Propone utilizar la comparación entre la medida de sus lados [TF1.1A.27 U1377, 1979] (KoT, procedimientos). Parece que tiene en mente la clasificación de los triángulos atendiendo a cómo son sus lados, ya que ejemplifica diciendo *por ejemplo los triángulos dependiendo de la comparación de los lados* [TF1.1A.27 U1381] (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Los EPM saben que dependiendo de cómo se enuncie el criterio, el resultado puede ser una clasificación o una categorización de triángulos [TF1.1A.27 U1389] (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático). La formadora insta a Paola a que lo enuncie para obtener una clasificación de triángulos según las longitudes de sus lados. Los EPM conocen la clasificación clásica en triángulos *equiláteros, isósceles y escalenos* [TF1.1A.27 U1393] (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, este orden lo mantienen cuando pasan a describir cada uno de los tipos de triángulos.

Paola sabe que los triángulos equiláteros tienen *todos los lados iguales* [TF1.1A.27 U1395] y los isósceles *dos lados iguales y uno desigual* [TF1.1A.27 U1399]. Así mismo, Raquel define a los triángulos escalenos como aquellos que tienen *todos los lados desiguales* [TF1.1A.27 U1405] (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, los EPM saben que de esta forma se genera una *clasificación* [TF1.1A.27

U1401] ya que los triángulos equiláteros y los triángulos isósceles se agrupan en clases disjuntas (KoT, procedimientos).

La formadora pide a los EPM que modifiquen las definiciones dadas de estos tres tipos de triángulos para que se genere una categorización de triángulos en lugar de una clasificación. Isabel y Belén modifican la definición de triángulo isósceles de manera que el conjunto de triángulos equiláteros está incluido en el de isósceles. En su definición un triángulo isósceles es aquel que tiene *dos lados iguales* [TF1.1A.27 U1411]. Belén, además, añade *solo* [TF1.1A.27 U1412], aseverando que no es necesario añadir nada más a la definición. Muestran, por tanto, conocimiento sobre las propiedades que definen estos conceptos y sobre cuáles de ellas son imprescindibles (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos; procedimientos).

Los EPM tienen dificultades en dar una definición de triángulos escalenos que añada una nueva categoría a la clasificación anterior. Siguen definiendo los triángulos escalenos como aquellos que tienen los tres lados de distinta longitud [TF1.1A.27 U1414, 1416]. Con esta definición el conjunto de triángulos escalenos y el conjunto de triángulos isósceles serían disjuntos. Es la formadora la que define triángulo escaleno como polígono de tres lados sin añadir ninguna condición a la medida de estos. Así, Raquel reconoce que cualquier triángulo *es escaleno* [TF1.1A.27 U1420]. Con estas definiciones se genera una categorización de triángulos atendiendo a las longitudes de sus lados (ver Figura 4.16).



Figura 4.16 Clasificación en clases de equivalencia vs jerárquica de triángulos atendiendo a las longitudes de sus lados

Tabla 4.20

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 3.1

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO

<u>Procedimientos</u> KoT	Saben que la comparación de figuras buscando características en común genera clasificaciones (U1107, 1119, 1125). Saben que los polígonos se pueden clasificar atendiendo al número de lados que tiene (U1135). Saben que la amplitud de los ángulos es un criterio para clasificar polígonos, y que pueden generar distintas clasificaciones según el aspecto en el que se focalice (U1137, 1150, 1229). Particularmente, saben que para clasificar triángulos según sus ángulos hay que ver si hay algún ángulo obtuso, recto o todos son agudos (U1273). Saben que un criterio para clasificar polígonos es tener en cuenta el número de ángulos rectos que tiene (U1279). Saben que la posición relativa de los lados de ciertos polígonos permite su clasificación (U1304). Saben que los polígonos se pueden clasificar atendiendo a la regularidad (U1352). Saben que el número de diagonales genera una clasificación de polígonos (U1375) Saben que los polígonos se pueden clasificar teniendo en cuenta la comparación de las medidas de sus lados (U1377, 1379). Saben que al definir triángulo isósceles como aquel que tiene dos lados de igual longitud y uno desigual hace que los triángulos isósceles y los equiláteros pertenezcan a dos clases disjuntas (U1401). Saben que al definir triángulo isósceles como aquel que tiene dos lados de igual longitud hace que todo triángulo equilátero pertenezca, además, al conjunto de los triángulos isósceles (U1411).
<u>Definiciones, propiedades y sus fundamentos</u>	Saben diferenciar polígonos en cóncavos y convexos (U1137), y que para ello deben comparar con el ángulo de 180° (U1231). Conocen el concepto de ángulo y, concretamente, el de ángulo recto (U1150, 1151). Conocen el significado de distintos términos asociados con tipos de ángulos atendiendo a su amplitud (U1155-1164). Saben que los ángulos agudos, rectos y obtusos tienen una amplitud menor a 180° (U1168, 1258, 1261). Saben que la magnitud que se considera a la hora de comparar ángulos es la amplitud (U1219). Saben que el grado sexagesimal es una unidad de medida de la amplitud de un ángulo, y que los minutos y segundos son subdivisiones del grado (U1209, 1212, 1213). Saben que para clasificar triángulos atendiendo a la amplitud deben fijarse en si hay algún ángulo obtuso, todos son agudos (U1273). Saben que los cuatro ángulos de un cuadrilátero no pueden ser agudos (U1286). Saben que la suma de las amplitudes de los ángulos de un triángulo es 180° y la de los ángulos de un cuadrilátero es 360° (U1295, 1297). Saben que la magnitud que mide el número de cuadrados de una cuadrícula que ocupa un polígono es la superficie (U1350).

KPM		Saben el significado de diagonal de un polígono (U1375).
		Conocen la clasificación clásica de triángulos atendiendo a la longitud de sus lados (U1393).
		Conocen la definición de triángulo equilátero, isósceles y escaleno (U.1395, 1399, 1405).
	Registros de representación	Saben que para definir triángulo isósceles es suficiente decir que tienen dos lados de igual longitud (U1412).
		Representa el ángulo llano extendiendo su brazo y marcando un arco sobre la fosa del codo (U1168).
		Representa con los dedos de su mano un ángulo y señala el espacio que queda entre ellos (U1242).
KPM	Prácticas particulares del quehacer matemático	Saben que la clasificación de polígonos no puede depender de su posición (U1319, 1359).
		Saben que dependiendo de cómo se enuncie el criterio para agrupar los triángulos según las longitudes de sus lados, el resultado puede ser una clasificación o una categorización de triángulos (U1389).
	Formas de validación y demostración	Saben cómo rebatir argumentaciones utilizando contraejemplos (U1359).
KMT	Recursos materiales y digitales	Saben que el uso de polígonos recortados favorece la comprensión de características críticas del concepto pues no solo representa el contorno y permite el tratamiento dinámico (U1114).
		Utilizan partes del cuerpo para representar distintos ángulos (U1168, 1242).

4.1.3.2. Actividad 3.2. Aprendizaje con esta actividad

Los EPM deben reflexionar sobre los beneficios y posibles obstáculos que provoca el trabajar la clasificación de figuras como lo hace Jimena (la maestra del caso), pidiéndoles a los estudiantes que comparen polígonos dados entre sí para llegar a establecer clasificaciones atendiendo a diferentes criterios, en lugar de enseñarles las clasificaciones clásicas de polígonos. En una parte previa de esta tarea, dedicada a la definición de polígono, se les planteaba una actividad análoga (2.4) en la que debían comparar el llegar al concepto, a través de un proceso inductivo, analizando características comunes de ejemplos, frente a aprenderse una definición dada para identificar qué es lo más adecuado para la enseñanza. El enunciado de la actividad que se les plantea a los EPM es:

Actividad 3.2. ¿Qué aprenden los alumnos con esta actividad? ¿Qué interés tiene frente a que se les hubiera dado un agrupamiento concreto?

El conocimiento pretendido de esta actividad está vinculado con KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), pues deben analizar las ventajas e inconvenientes de usar un tipo de tarea o de estrategia u otro.

Tabla 4.21

Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 3.2

Código	Contenido del episodio
[TF1.1A.28 U1425-1431]	¿Qué aprenden los alumnos con esta actividad?

[TF1.1A.28 U1425-1431] ¿Qué aprenden los alumnos con esta actividad?

1425. Formadora: *¿Qué creéis que aprenden los alumnos con este tipo de actividad respecto de lo que habrían aprendido si lo que se les hubiera dado? ¿Qué diferencia hay?*

1426. Rosa: *Que así ellos mismos se dan cuenta de cosas que creían que sabían que no...*

1427. Amanda: *Ellos ponen los criterios.*

1428. Formadora: *¿Sería equivalente a lo que hemos visto antes? A la respuesta que dimos en la pregunta dos del caso 1 respecto de polígonos y no polígonos.*

1429. Rosa: *Sí.*

1430. Belén: *Y también que habría más formas de clasificarlos.*

Los EPM consideran que el trabajar la clasificación de polígonos desde la comparación de figuras concretas tiene ventajas frente a aprender clasificaciones ya dadas.

Por ejemplo, Amanda cree importante que sean los estudiantes *los que proponen los criterios* [TF1.1A.28 U1427]. Esta reflexión genera un aprendizaje más profundo al necesitar establecer relaciones entre los elementos de distintas figuras (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Rosa considera que de esta forma los estudiantes *se dan cuenta de lo que saben y lo que no* [TF1.1A.28 U1426]. Lo ve como una ventaja pues tiene que conectar conocimiento sobre aspectos relacionados con el concepto de polígono (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Belén da otra ventaja de trabajar de la forma que propone la maestra, y es que así surgen *más formas de clasificarlos* [TF1.1A.28 U1430] (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Si la maestra muestra clasificaciones, muy probablemente serán las clásicas (por número de lados, por amplitud de ángulos, por regularidad o no). El tener los alumnos que buscar características comunes entre figuras por comparación, además de las clasificaciones ya mencionadas pueden surgir otras clasificaciones que aporten un conocimiento más profundo sobre los distintos tipos de polígonos.

Tabla 4.22*Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 3.2*

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KMT	<u>Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos</u>	Saben que este tipo de tareas permite a los estudiantes tener información sobre lo que sabe y lo que no (U1426).
		Saben que el que los estudiantes deban buscar criterios para clasificar los polígonos generan un aprendizaje más profundo (U1427).
		Saben que esta estrategia de enseñanza consigue llegar a múltiples clasificaciones de polígonos, además de a las clasificaciones clásicas (U1430).

4.1.3.3. Actividad 3.3. Recursos para la enseñanza

La propuesta de esta actividad tiene como foco principal el que los EPM reflexionen sobre los beneficios del uso de los ciertos recursos materiales o digitales para trabajar la clasificación de polígonos y las dificultades asociadas al uso de éstos (KMT, recursos materiales y digitales).

Actividad 3.3. ¿Qué recursos para la enseñanza del contenido utiliza la maestra? Identifica potencialidades y limitaciones de los recursos utilizados.

Como algunos de los recursos que utiliza Jimena se basa en representaciones manipulativas o gráficas de los polígonos, podrían surgir, sin ser el foco de la actividad, elementos de conocimiento vinculados a KoT (registros de representación), al analizar cómo afecta el registro de representación a la comprensión de la definición de polígono o su clasificación.

Análisis

Tabla 4.23*Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 3.3*

Código	Contenido del episodio
[TF1.1A.29 U1432-1461, 1472-1475]	Recursos para la enseñanza. Ventajas.
[TF1.1A.30 U1462-1471, 1476-1533]	Recursos para la enseñanza. Inconvenientes.

[TF1.1A.29 U1432-1461, 1472-1475] Recursos para la enseñanza. Ventajas.

1432. Formadora: En tercer lugar, recursos para la enseñanza del contenido que utiliza la maestra. ¿Qué recursos utiliza la maestra en este fragmento? ¿Utiliza el qué?

1433. Belén: *Los recortes.*
1434. Elsa: *Dibujos.*
1435. Amanda: *La cuadrícula.*
1437. Paloma: *La ficha.*
1450. Formadora: *Potencialidades y limitaciones de esos recursos.*
1451. Bela: *Las cartulinas [...] se pueden manipular.*
1459. Belén: *Es diferente que lo tengas en la mano a que lo estés viendo en la pizarra.*
1461. Paloma: *Claro, eso también, que no tiene una posición fija, si no que tú lo puedes ir moviendo y ver que, aunque lo muevas de posición, sigue siendo la misma figura.*
1472. Rosa: *Yo no veo distracción, es que yo veo que es mejor porque precisamente al poder manipularlos el niño va a estar más motivado con la clase, porque no es el lápiz, el boli y el cuaderno, o sea es... jugar, hacer las cosas...*
1473. Abril: *Eso es, por eso pensamos que a lo mejor se les podría dar para que ellos recortaran incluso para que estuvieran..., esa era la idea.*
1474. Formadora: *Y sobre la pizarra, tanto la proyección como el dibujo en la pizarra ¿cuáles son las ventajas que tiene y cuáles son las limitaciones?*
1475. Carmen: *Pues le da un apoyo visual para su aprendizaje, ¿no?*

Los EPM identifican los recursos que utiliza la maestra en la implementación de su actividad: *los recortes* de los polígonos que les propone que comparen [TF1.1A.29 U1433], los *dibujos* (o equivalentemente *la ficha*) de estos que proyecta [TF1.1A.29 U1431, 1437], y la *cuadrícula* [TF1.1A.29 U1435] en la que aparecen representados los polígonos (KMT, recursos materiales y digitales). Los dos primeros son evidentes, es material en formato físico o electrónico que se identifican con facilidad. Resulta interesante que Amanda [TF1.1A.29 U1435] le dé importancia al uso de la cuadrícula. Su uso permite, por ejemplo, utilizar la cantidad de magnitud superficie que ocupa cada polígono o la longitud de su perímetro para proponer criterios de clasificación. Este hecho nos sugiere un indicio de conocimiento de posibles clasificaciones de polígonos (KoT, procedimientos), y de conocer el significado de estas magnitudes (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

La ventaja principal que los EPM identifican en el uso de los polígonos recortados en cartulina es que *se pueden manipular* [TF1.1A.29 U1453]. Permiten trabajar con representaciones concretas de objetos matemáticos que, como tales, son abstractos. Esto supone una potencialidad del uso de material manipulativo (KMT, recursos materiales y digitales).

Paloma aporta otro potencial muy importante del uso de los polígonos recortados, y es *que no tiene una posición fija, si no que tú lo puedes ir moviendo y ver que, aunque lo muevas de posición, sigue siendo la misma figura* [TF1.1A.29 U1461] (KMT, recursos materiales y digitales). De manera implícita está dando valor al trabajo con geometría dinámica (KMT, teorías de enseñanza). Que el estudiante tenga posibilidad de modificar la posición del polígono en el plano impide la generación de imágenes prototípicas que asocian características no relevantes al concepto. Como ejemplo, incidimos en el caso del cuadrado, que ya se comentó en el episodio TF1.1A.21. Si siempre que un estudiante ve una representación de un cuadrado, dos de sus lados están en posición horizontal y dos en posición vertical, cuando la figura no está en la posición prototípica, aunque conozca la definición de cuadrado, puede no reconocerlo (Duval, 2006). Incluso, si el cuadrado tiene una diagonal horizontal y otra vertical podría identificar a un rombo (que lo es ya que todo cuadrado tiene los cuatro lados iguales, características críticas de un rombo) por estar en la posición más frecuente en la que se representa este cuadrilátero (Figura 4.10).

Otro ejemplo que muestra la necesidad de utilizar figuras que puedan cambiar de posición puede ser el reconocimiento de triángulos isósceles. Es muy frecuente que, en los libros de texto y en otras representaciones gráficas de este tipo de polígono, el lado desigual sea de menor longitud que los otros dos lados y, además, esté en posición horizontal. Eso puede hacer que, aunque el estudiante conozca la definición de triángulo isósceles, no lo identifique si está en una posición diferente o incluso, si el lado desigual es el mayor (Bernabeu, M, 2022) (ver Figura 4.17).

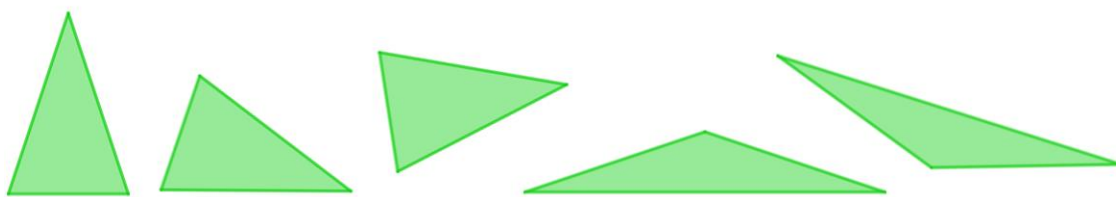


Figura 4.17 Triángulos isósceles en distintas posiciones en el plano

En la importancia que le da al uso de la geometría dinámica identificamos un indicio de que sabe de la necesidad de vincular la imagen del concepto con la definición de este mostrando múltiples ejemplos para que identifique características imprescindibles del concepto de otras que son específicas de algunos ejemplos (KFLM, teorías de aprendizaje).

Rosa alude al factor motivación [TF1.1A.29 U1461] que aporta el material. Aunque es cierto que el trabajo directo con un recurso manipulativo puede resultar más atractivo al estudiante que un estudio más teórico, no se considera conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

En cuanto a los beneficios del uso de representaciones mediante diagramas Carmen identifica el *apoyo visual* [TF1.1A.29 U1475] que aporta al aprendizaje (KMT, recursos materiales y digitales). En el trabajo con conceptos geométricos la representación gráfica de los objetos con los que se trata es fundamental para establecer relaciones entre los elementos que lo forman.

[TF1.1A.30 U1462-1471, 1476-1533] Recursos para la enseñanza. Inconvenientes.

1462. Elsa: *Si en vez de haber utilizado cartulina se les entrega los objetos a lo mejor en otro material..., es que realmente, las limitaciones son que la cartulina se puede romper fácilmente...*

1464. Elsa: *Y al ser muchos niños, relativamente pequeños, manipulándolo...*

1465. Formadora: *Vale, y eso ¿cómo lo podrías resolver?*

1467. Elsa: *Plastificándolo.*

1468. Formadora: *¿Algún otro inconveniente que veáis con ese material?*

1469. Gabi: *La distracción que pueda tener el niño con el material. Que empiece a jugar y no esté atendiendo a la clase.*

1470. Formadora: *¿Y si les dejas jugar un rato primero y luego empiezas?*

1471. Paloma: *Pues ya no se distraen.*

1476. Formadora: *[La proyección de las figuras]Es un apoyo visual, y ¿tiene algún inconveniente?*

1477. Rosa: *Que no es manipulable.*

1478. Javier: *Que lo puede confundir con la posición de la figura de los diferentes polígonos.*

1481. Paloma: *Que es estática.*

1482. Formadora: *Que puede generar una imagen del concepto...*

1488. Belén: *Pues para eso se les dan también manipulables...*

1489. Formadora: *[...] ¿Qué más? ¿Aquí [en la diapositiva] creéis que hay una variedad suficientemente grande de...*

1492. Rosa: *Sí, hay una variedad de polígonos.*

1496. Formadora: *¿Echáis de menos algún tipo de polígono aquí (Figura 17)? Por ejemplo, dentro de los cóncavos.*

1497. Gabi: *Pentágono.*

1498. Formadora: *El pentágono. ¿Un pentágono necesariamente es cóncavo?*

1499. Gabi: *No.*

1507. Formadora: *¿Qué falta en los cóncavos? Fijaos en cómo son los cóncavos que aparecen aquí, son todos de una forma particular, en todos ellos ¿qué ocurre?*

1510. Amanda: *Picos hacia adentro.*

1514. Formadora: *¿Habría algún tipo de polígono cóncavo que no se muestra aquí? O sea, ¿cuántos ángulos mayores de 180° tiene este? [Señala una figura].*

1516. Paloma y Belén: *Uno.*

1518. Formadora: *Uno. ¿Y este?*

1519. Paloma y Belén: *Uno.*

1526. Rosa: *¡Ah! Cóncavos con más de un ángulo...*

1529. Formadora: *¿Qué ocurre con la estrella?*

1530. Belén: *Que tiene más de uno.*

1531. Formadora: *Que tiene ángulos cóncavos y ángulos convexos, ¿no?*

1532. Belén: *Y más de uno.*

Los primeros inconvenientes que identifican los EPM en el uso de los polígonos recortados que facilita Jimena a sus estudiantes no se consideran conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Aluden, por ejemplo, a que la *cartulina se puede romper fácilmente* [TF1.1A.30 U1462] o que los estudiantes se pueden distraer y utilizar el material para jugar sin prestar atención a la actividad que se les plantee [TF1.1A.30 U1469]. Es bueno que un docente tenga en cuenta las características del material y tenga presente que si el estudiante no está habituado a trabajar con recursos materiales el efecto sorpresa puede condicionar los primeros minutos de la tarea en la que se utilice. Si se utiliza material con frecuencia, el efecto sorpresa desaparece dejando de condicionar la actividad.

En cuanto a los inconvenientes del recurso de proyectar los polígonos en una diapositiva (o representarlos en la pizarra) sí que identifican aspectos significativos en cuanto a la enseñanza de las matemáticas. Las intervenciones de los EPM van en una misma línea. Así el inconveniente que dice Rosa es que *no es manipulable* [TF1.1A.30 U147]. De manera equivalente, Paloma dice *que es estática* [TF1.1A.30 U1481]. Es decir, entienden como limitación de la proyección el que los polígonos están en una posición fija. Así lo expresa Javier al decir que el ver solo la proyección de la figura hace que los estudiantes *lo puedan confundir con la posición de la figura* [TF1.1A.30 U1478] (KMT, recursos materiales y digitales).

En todas las respuestas identificamos que saben que el analizar figuras en una única posición puede hacer que se le asignen características al objeto que son específicas del

ejemplo que se está utilizando en la posición en la que se está representando. Esto haría que la imagen del concepto no fuese equivalente a la definición de este al poder incluir características irrelevantes propias de un caso particular (KFLM, teorías de aprendizaje).

Por ejemplo, si siempre que se representa la altura de un triángulo se hace sobre un lado del triángulo en posición horizontal, y de manera frecuente la altura cae sobre el propio lado (no sobre su prolongación), el estudiante puede tener dificultades en identificar la altura sobre el lado menor de un triángulo obtusángulo sin ningún lado en horizontal (Barrantes y Zapata, 2008) (ver Figura 4.18).

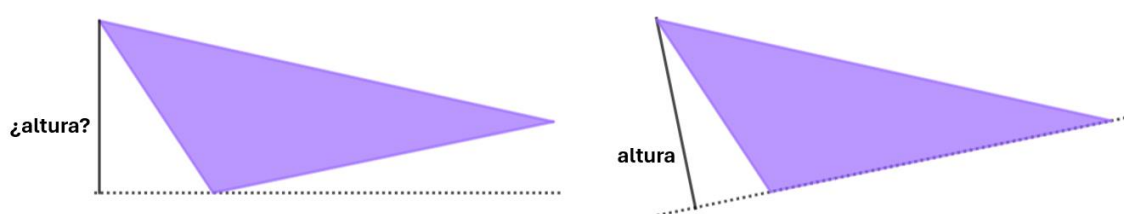


Figura 4.18 Representación errónea vs correcta de una de las alturas de un triángulo obtusángulo

Para continuar con el análisis de los recursos usados por la maestra, la formadora pregunta a los EPM si la variedad de polígonos que muestra la proyección (Figura 4.7) es suficiente. Rosa considera que *sí* lo es [TF1.1A.30 U1492]. Según el número de lados hay cuatro tipos: triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos. No hay polígonos con un número elevado de lados. De estos polígonos hay representantes cóncavos y convexos, salvo de los triángulos que, evidentemente, todos son convexos por las características propias del concepto. La suma de las amplitudes de los ángulos de un triángulo es 180° , y en un polígono cóncavo debe haber al menos un ángulo mayor a 180° .

Sorprende que Gabi eche de menos en ese conjunto de polígonos al pentágono [TF1.1A.30 U1497], cuando hay cuatro representantes, dos cóncavos y dos convexos. Sí muestra conocimiento de que hay pentágonos cóncavos y convexos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos) [TF1.1A.30 U1499].

La formadora les hace pensar sobre los tipos de polígonos cóncavos que aparecen en la proyección. En cada uno de ellos hay un único ángulo cóncavo. Lo plantea para indicar que podría ser una limitación del conjunto de polígonos seleccionado, pues podría hacer

pensar que en todos los polígonos cóncavos hay un único ángulo mayor de 180° . Le parece interesante que en el conjunto de polígonos apareciese alguna estrella.

Llama la atención que Amanda responda que los polígonos cóncavos son aquellos que *tienen picos hacia adentro* [TF1.1A.30 U1510]. Conoce la definición de polígono cóncavo (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos) pero utiliza un lenguaje propio de estudiantes que están en un nivel de razonamiento geométrico uno. A un EPM se le supone un lenguaje más formal a la hora de expresar su conocimiento geométrico.

En el debate generado en clase no ha surgido uno de los obstáculos que puede conllevar el trabajo del concepto de polígono solo a través de representaciones gráficas. Es muy frecuente que a la hora de dibujar un polígono únicamente se resalte la línea poligonal que lo delimita. Eso puede hacer que en la imagen del concepto polígono de un estudiante se limite al contorno que define, y no a todos los puntos del plano que quedan dentro de esa línea.

Tabla 4.24

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 3.3

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	Procedimientos	Saben que la medida de la superficie o del perímetro de un polígono es un criterio para clasificarlos (U.1435). Conocen las magnitudes longitud y superficie asociadas a figuras planas (U1435).
	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Saben identificar pentágonos cóncavos y convexos entre un conjunto de polígonos (U1499). Conocen la definición de polígono cóncavo (U1510).
KFLM	Teorías de aprendizaje	Saben de la importancia de la relación entre la imagen de un concepto y su definición (U1478).
KMT	Teorías de enseñanza	Saben que el trabajo dinámico en geometría es fundamental para generar imágenes completas de los conceptos (U1461).
	<u>Recursos materiales y digitales</u>	Identifican los recursos materiales utilizados en el episodio a analizar (U1431, 1433, 1435, 1437).
		Saben que un potencial del uso de figuras recortadas en cartulina es que permiten trabajar de manera concreta con objetos abstractos (U1453).
		Saben que las figuras recortadas permiten cambios de posición en el polígono, lo que repercute en la concepción de este (U1461).
		Saben que el trabajo con figuras representadas de manera gráfica, por su condición estática, pueden provocar obstáculos en el aprendizaje (U1478).

4.1.3.4. Actividad 3.4. Adecuación de la actividad para quinto de primaria

Para la resolución de esta actividad los EPM tienen disponibles varios documentos de carácter curricular. Por una parte, el currículo andaluz para la etapa de Educación Primaria (Consejería de Educación, Cultura y Deportes, 2015) y un extracto del libro Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) con la información relativa a la Educación Primaria.

Los EPM deben consultar dichos documentos para determinar la idoneidad de la actividad propuesta por Jimena para estudiantes de quinto de Educación Primaria (KMLS, resultados de aprendizaje esperados). Por otra parte, se espera que los EPM muestren conocimiento sobre el tipo de clasificaciones de polígonos que se pueden hacer en este nivel educativo (KMLS, nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado).

Por falta de tiempo, la formadora les propone que resuelvan la actividad en casa. El análisis de la reflexión de los EPM sobre estas actividades se hará teniendo en cuenta sus producciones escritas.

Análisis

Tabla 4.25

Episodio de la implementación de la TFor 1.1A Actividad 3.4

Código	Contenido del episodio
[TF1.1A.31 Producciones]	Adecuación de la actividad para 5º de Primaria

[TF1.1A.31 Producciones] Adecuación de la actividad para 5º de Primaria

La resolución de la actividad 3.4 no llegó a debatirse en el grupo clase por limitaciones de tiempo. Sin embargo, los EPM la resolvieron de manera individual y la incorporaron a sus producciones. Ejemplificamos con las respuestas más representativas.

En todas las reflexiones aportadas se considera que la actividad propuesta por Jimena es adecuada para estudiantes de 5º curso de Primaria. Aunque difieren en la forma de justificar su pertinencia.

En la mayoría de ellas hacen referencia a los documentos curriculares de los que disponen indicando de manera expresa los criterios de evaluación de tercer ciclo o de etapa con los que estaría relacionada la actividad propuesta por Jimena. Sirva de ejemplo la respuesta de Belén (Imagen 4.1). En esta aportación se muestra conocimiento sobre resultados de

aprendizaje esperados considerados en el currículo oficial (KMLS, resultados de aprendizaje esperados).

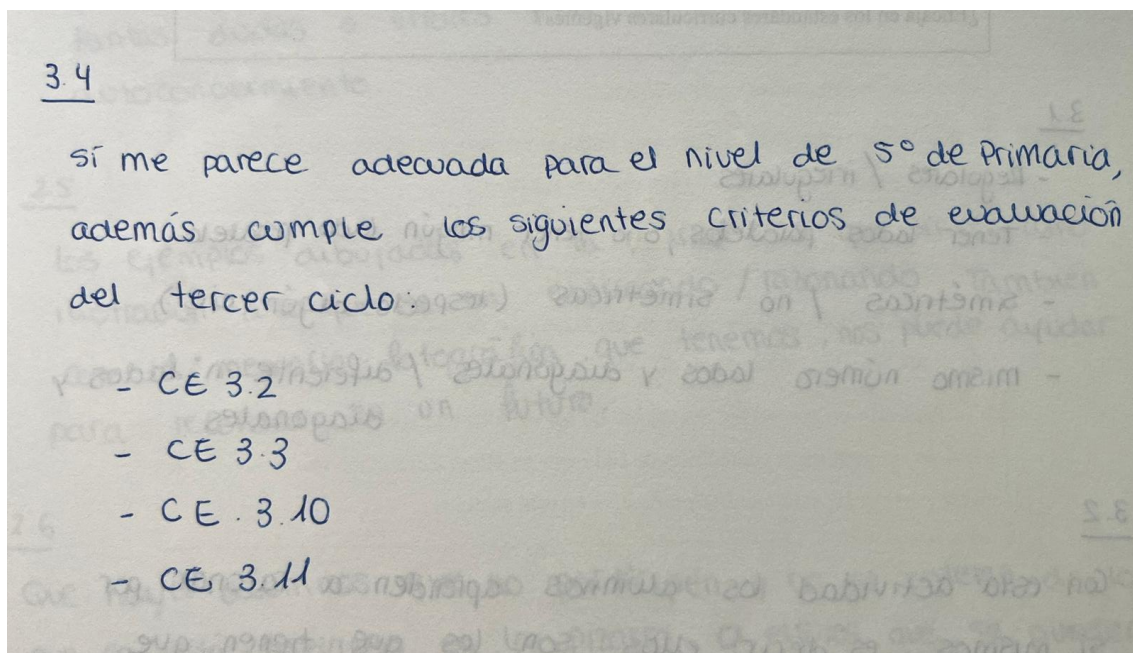


Imagen 4.1 Respuesta de Belén a la actividad 3.4

Hay EPM que, sin citar explícitamente los elementos del currículo que avalan su decisión, sí que los tienen en cuenta en su justificación. Sirva de ejemplo la respuesta de Paola (Imagen 4.2). Igual que en el caso anterior, Paola muestra conocimiento sobre los resultados de aprendizaje esperados en 5° de Primaria con relación al polígono (KMLS, resultados de aprendizaje esperados). Muestra conocimiento sobre aspectos curriculares relativos a los objetivos de aprendizaje y los contenidos secuenciados para cada curso (KMLS, nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado).

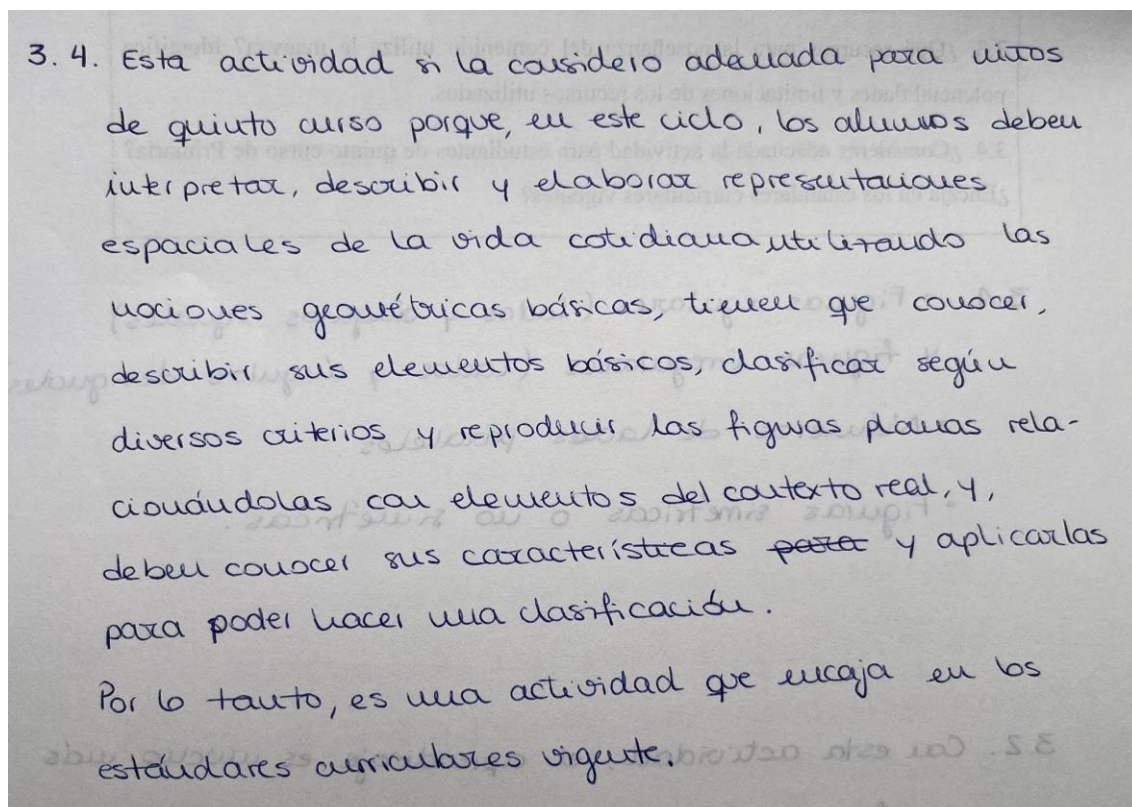


Imagen 4.2 Respuesta de Paola a la actividad 3.4

En otros casos, la justificación la basan en sus ideas intuitivas centradas en la forma en la que se plantea la actividad. La consideran útil a nivel introductorio, pues sirve para conectar los conocimientos previos de los estudiantes con el contenido a trabajar en este nivel. La respuesta de Elsa es un ejemplo de ello (Imagen 4.3). Esta EPM, además, valora de manera positiva que Jimena proponga actividades para resolverlas de manera cooperativa, a través de debates, como muestra de conocimiento pedagógico general. Además, hace referencia a ciertos resultados de aprendizaje que, según ella, no suelen desarrollarse con frecuencia, como es *la resolución de informes, la utilización de diferentes estrategias y la colaboración activa en equipo*, aspectos que se incluyen en el Mapa de Desempeño del Currículo Andaluz de Educación Primaria (Consejería de Educación, Cultura y Deporte, 2015). Con ello muestra conocimiento sobre KMLS (resultados de aprendizaje esperados).

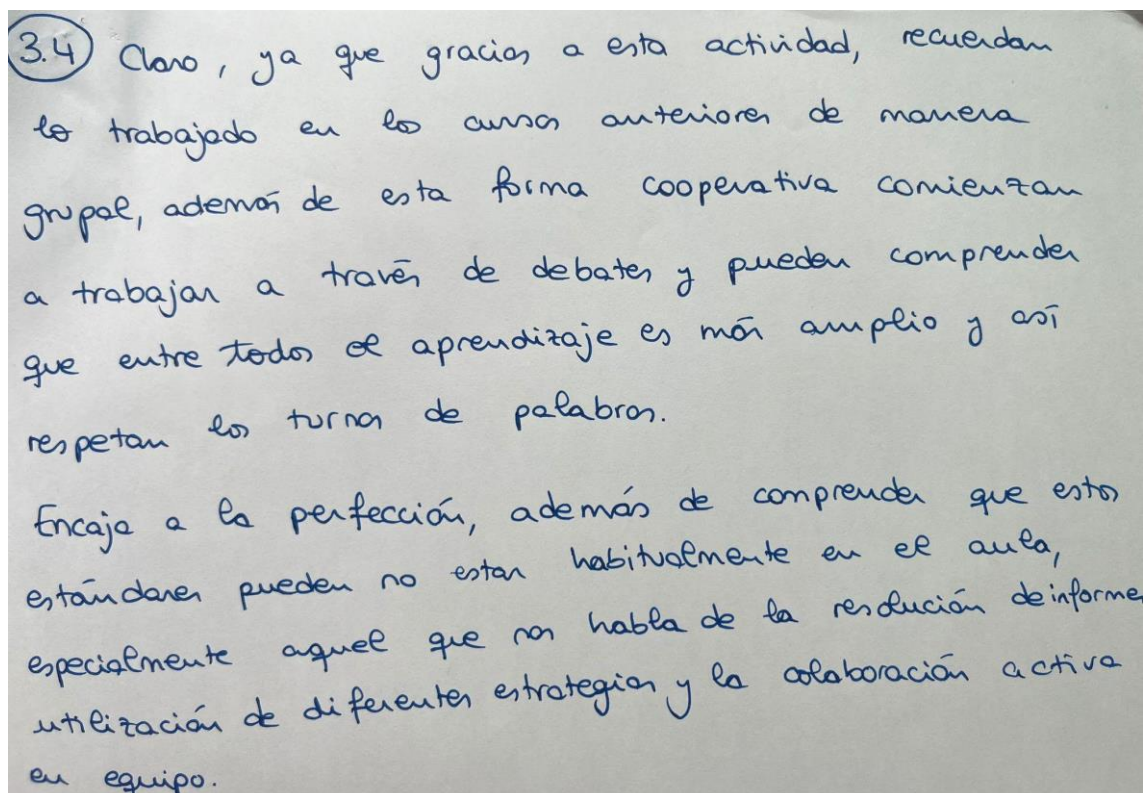


Imagen 4.3 Respuesta de Elsa a la actividad 3.4

Tabla 4.26

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.1A. Actividad 3.4

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KMLS	<u>Resultados de aprendizaje esperados</u>	Conocen de manera explícita los resultados de aprendizaje que se proponen en el currículo oficial andaluz con relación al tema tratado (Belén, Paola, Elsa).
	<u>Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado</u>	Muestra conocimiento sobre aspectos curriculares relativos a los objetivos de aprendizaje y los contenidos secuenciados para cada curso (Paola)

4.1.4. Cuarto fragmento: Clasificación de cuadriláteros

La profundidad y el dinamismo generados por los tres primeros fragmentos hicieron que el tiempo previsto para la tarea se completara antes de abordar el último fragmento, que, por tanto, no llegó a implementarse.

4.2. Aspectos a mejorar en la tarea tras el primer microciclo

El análisis retrospectivo del primer ciclo del experimento de enseñanza (Cobb et al., 2003) permite identificar potencialidades y debilidades en la tarea formativa. Con ello

fundamentamos las propuestas de rediseño de la tarea para implementarla en el segundo ciclo.

Para concretar los ajustes hechos en la tarea, además del análisis de las transcripciones de las videgrabaciones de las clases de formación, recogido en el apartado 4.3 de este capítulo, se ha considerado información recogida a través de otros instrumentos. Así, se han tenido en cuenta: las notas de campo que tomé *in situ*; las reflexiones personales que tras cada clase en la que se trabajó con la tarea dejaba por escrito la formadora; las entrevistas semiestructuradas mantenidas con la formadora, por una parte, y con una selección de cuatro estudiantes del grupo, por otro; y, por último, las producciones escritas de los estudiantes.

Como se puede comprobar en las tablas resumen que presentamos al final de los episodios correspondientes a cada actividad, el análisis de las transcripciones y producciones de los EPM permiten constatar que, en la resolución de cada actividad, se ha movilizado el conocimiento pretendido en su diseño. Además, se identifican elementos de conocimiento de otras categorías o indicadores.

Las propuestas de mejora están relacionadas con elementos de formato del caso, el enunciado de alguna de las actividades o con aspectos propios de la implementación no contemplados en el primer ciclo.

Este apartado se organiza describiendo, en primer lugar, las limitaciones detectadas; en segundo término, las propuestas de ajuste y su justificación; y, finalmente, las implicaciones para futuras iteraciones.

4.2.1. En relación con el caso y su presentación

La primera tarea formativa se denominó *Definición y clasificación/categorización de polígonos*, estableciendo una diferencia entre criterios de agrupamiento de polígonos que generan relaciones de equivalencia, determinando particiones del conjunto de polígonos en clases disjuntas (clasificación), y otros criterios que permiten establecer inclusiones de clases (categorización).

Así, en la portada de la tarea incluimos el siguiente párrafo como nota al pie para diferenciar entre ambas:

Nos referimos a clasificación cuando el agrupamiento de objetos atendiendo a cierto criterio genera clases disjuntas. Si podemos establecer relaciones jerárquicas entre clases hablaremos de categorización de clases. (P.e. en el conjunto de los cuadriláteros: los rectángulos cuadrados y los rectángulos no cuadrados (clasificación) son dos clases de equivalencia que generan el conjunto de rectángulos con el subconjunto de cuadrados (categorización).

Se decidió modificar el nombre de la tarea, por simplificar, entendiendo clasificación en un sentido amplio.

Por otra parte, en la transcripción del caso solo se diferenciaba entre las intervenciones de Jimena (la maestra), marcada con M, y las de los alumnos, marcadas con A, sin distinguir entre los propios estudiantes. El no identificar de manera unívoca las respuestas de cada estudiante provocó cierta dificultad en la resolución de alguna actividad, ya que los EPM dudaban de si dos intervenciones de alumnos en el mismo bloque las hacía el mismo alumno o estudiantes diferentes. Concretamente, generó un conflicto en la resolución de la actividad 2.7, que requería considerar las respuestas de cada estudiante para determinar su nivel geométrico. Siguiendo la teoría de van Hiele, dicho nivel se establece de manera individual, considerando la forma en la que cada uno ejecuta ciertos procesos de razonamiento geométrico²⁰ (van Hiele, 1986).

Por ello, etiquetamos las intervenciones de los estudiantes asignándoles un código de la forma A_i , donde cada subíndice corresponde con un alumno diferente. De esta forma los EPM podrán relacionar las intervenciones de un mismo alumno o comparar entre sí las de distintos estudiantes. Las aportaciones de la maestra se siguieron identificando con una M y las de los alumnos “a coro” con As.

Un tercer cambio en el caso surgió al constatar que algunos EPM, pese a haber aprobado previamente una asignatura de contenido matemático (además de toda la formación previa a la etapa universitaria), seguían considerando al círculo como un ejemplo de polígono. Este error, documentado también en estudiantes de otros niveles educativos (Horzum y Arikan, 2019), pone de relieve la persistencia de concepciones geométricas inadecuadas incluso en etapas avanzadas de formación.

²⁰ Reconocimiento, formulación y uso de definiciones, clasificación y demostración o argumentación.

Para generar la reflexión sobre esta figura en concreto se han añadido ciertas líneas con intervenciones de la maestra y de algún estudiante al respecto:

A₆. Pues yo pensaba que sí es un polígono porque siempre lo he visto con el cuadrado, con el triángulo, con el rectángulo...

M. Es una figura geométrica pero no cumple las propiedades que se necesitan para ser polígono.

Con esto destacamos de manera particular el círculo como figura especial por ser una figura común en la enseñanza desde los primeros niveles educativos que suele trabajarse de manera conjunta con ejemplos de polígonos, pero que no es polígono.

El último cambio introducido en el caso responde a la necesidad de acortar esta tarea. La resolución de las actividades en clase generó un alto interés en los EPM, al conectar directamente su formación inicial con la práctica profesional. En la primera implementación decidimos no seguir con el cronograma previsto inicialmente, que estaba demasiado ajustado, para permitir que los estudiantes compartieran sus reflexiones y se generaran debates interesantes relacionados con elementos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

La decisión fue prescindir del último fragmento del caso, descrito en el apartado 4.2 de este capítulo, que versa sobre la clasificación de cuadriláteros.

4.2.2. En relación con las actividades

El primer cambio propuesto para la parte de las actividades que complementan el caso para formar la tarea formativa es puramente de formato. En la tarea inicial decidimos numerar las actividades por bloques según la parte del caso sobre la que planteaba la reflexión. Así, después del primer fragmento del caso, aparecía un bloque de actividades, llamado Actividad 1, formada por actividades con focos diferentes numeradas como 1.1, 1.2 o 1.3.

Teniendo en cuenta que la única vinculación entre las actividades de un mismo bloque es que se refieren a una misma parte del caso, pero no comparten necesariamente objetivos ni requieren un tratamiento conjunto, y considerando además que algunas de ellas pueden resolverse a partir de distintos fragmentos del caso, se optó por numerar las actividades de manera consecutiva (1, 2, 3, ...) a lo largo de toda la tarea. Esta decisión permite

simplificar la estructura, evitar interpretaciones erróneas sobre una supuesta jerarquía entre actividades y favorecer una lectura más clara y lineal de la secuencia propuesta.

En cuanto a los enunciados de las actividades, después de revisar toda la información recogida en la fase de experimentación, valoramos la idoneidad de dichos enunciados. Optamos por modificar alguno de ellos por distintas razones.

Actividad 1.1: Analizad la distribución de las figuras representadas en la pizarra por parte de los escolares (que aparece representada en la primera parte del caso). ¿Qué consecuencias tiene dicha distribución en relación con el concepto de polígono? Indicad las ventajas o inconvenientes de la misma.

La primera parte de la actividad no generó dudas en los EPM, sin embargo, con las dos cuestiones siguientes tuvieron dificultad en comprender qué se les estaba preguntando. Tomamos la decisión de adaptar el enunciado a nuestros estudiantes cambiando la redacción de la actividad. El nuevo enunciado de la tarea queda así:

Actividad 1: Analizad la distribución de las figuras representadas en la pizarra por parte de los escolares (que aparece representada en la primera parte del caso). ¿Qué propiedades están considerando los escolares para establecer estos agrupamientos?

Por otra parte, consideramos necesario modificar la actividad 2.1 que proponía:

Representa en un gráfico cómo quedaría la distribución hecha por los escolares teniendo en cuenta la definición a la que han llegado.

En este caso la razón del cambio es la operativización. Aunque los estudiantes, de manera individual, respondieron de manera literal en su cuaderno, a la hora de poner en común sus reflexiones complicaba el tener que dibujar las figuras para cambiar de posición aquellas que no estaban en la zona adecuada (polígonos o no polígonos). Para facilitar el compartir la resolución de la tarea decidimos modificar la redacción a esta otra:

4. Identifica las figuras que están situadas incorrectamente en la distribución que aparece en la ilustración 1, considerando la definición a la que han llegado.

En la actividad 2.3 se elimina la pregunta *¿Qué argumentos utilizan para incluir o no una figura como polígono?* Pues corresponde en esencia a la actividad 1.2.

Por último, en cuanto a la parte de actividades de la tarea formativa, en la original aparecía una indicación entre las actividades 2.2 y 2.3 que decía *Orientaciones para cumplimentar la tabla*, refiriéndonos a la tabla de recogida de información que se les facilitó a los estudiantes para que la usaran a medida que iban leyendo el caso.

Las actividades que vienen a continuación de ese comentario están alineadas con diferentes filas de la tabla. Aun así, el uso de la tabla generó bastante incertidumbre entre los EPM. El hecho de proporcionarle una tabla a cada uno de ellos tenía como intención del ayudarles a sistematizar y ordenar el registro de la información en paralelo a la lectura del caso. La realidad fue que el uso de la tabla supuso a los EPM una tarea añadida. En muchos casos respondieron a las actividades y, a posteriori, rellenaron la tabla, cuando el sentido del uso de la tabla era facilitar la resolución de las actividades. Por esa razón decidimos eliminar la nota, no así el uso de la tabla.

Uno de los alumnos que participó en las entrevistas semiestructuradas mantenidas con los cuatro alumnos seleccionados se cuestionó si el caso en el que se basa la tarea estaba basado en una situación real de aula. Esto nos hizo pensar que podría ser interesante que los EPM pudieran contextualizar el caso. La propuesta de cambio es que antes de iniciar la segunda implementación, se dedique parte de una clase a presentarles a Jimena y a su grupo de alumnos de 5º curso de Educación Primaria visualizando un breve vídeo en el que traten un tema de geometría cualquiera (diferente al que se trata en la tarea formativa). De esa manera entienden que lo que aparece en el caso corresponde con una situación equivalente a la que pueden encontrarse en su futura labor profesional.

Teniendo en cuenta las dificultades presentadas por parte de los EPM en el uso de la tabla de recogida de información, planteamos utilizarla durante el visionado del vídeo para que se familiaricen con ella.

4.3. Análisis del segundo microciclo

La tarea que se implementa en este segundo microciclo es el resultado de efectuar las modificaciones sugeridas tras el análisis de la implementación de la tarea formativa *Definición y clasificación de polígonos* en el primer ciclo.

4.3.1. Primer fragmento: Descripción de la actividad propuesta por la maestra. Distribución de figuras generada por escolares.

Resumen

La formadora, en la primera sesión de clase dedicada al trabajo con tareas formativas, explica la forma en la que se plantea el trabajo de análisis de situaciones reales de aula utilizando tareas formativas diseñadas *ad hoc*. Los EPM deben analizar sesiones de clase descritas en el caso. Para dirigir la reflexión sobre la actuación de la maestra los EPM responderán a las actividades propuestas en la tarea intercaladas en el caso.

En la clase previa a la implementación de esta tarea, la formadora proyectó un fragmento del vídeo original que se ha usado para el diseño del caso. Los EPM, guiados por ella y utilizando la tabla de recogida de información que se les facilitaba como anexo a la tarea, reflexionaron sobre la actuación de la maestra en la clase visionada. El objetivo es, por un lado, situar a los estudiantes en el aula real de quinto de primaria en la que se han celebrado las clases a analizar en la tarea formativa. Por otro, introducirles en el análisis de una sesión de clase.

En el primer episodio a analizar, la formadora explica el procedimiento a seguir en la resolución de la tarea formativa y resuelve las dudas que plantean los EPM sobre la nueva forma de trabajo. Insiste en la necesidad de utilizar la tabla de recogida de información a medida que se va leyendo el caso para responder después a las actividades que se les plantean. Los EPM, a medida que van leyendo el caso y comienzan a completar la tabla y a resolver las actividades que se proponen en la tarea, plantean dudas sobre aspectos del caso o del uso de la tabla.

Los episodios siguientes corresponden con fragmentos en los que se resuelve cada una de las actividades propuestas tras la lectura de la primera parte del caso. En dicha lectura no hay información sobre los argumentos esgrimidos por los escolares para considerar una figura como polígono o como no polígono. Hasta ese momento, en el caso solo se describe la propuesta de trabajo que la maestra hace a los escolares y cómo quedan colocadas las figuras representadas por estos en la pizarra.

4.3.1.1. Actividades 1 y 2. Análisis de la distribución de las figuras representadas en la pizarra por parte de los escolares. Argumentos para hacer esta distribución.

La primera actividad planteada a los EPM para analizar el primer fragmento del caso, en el que se informa de la situación de aprendizaje que propone la maestra y se muestra la respuesta de los estudiantes, es la siguiente:

Actividad 1. Analizad la distribución de las figuras representadas en la pizarra por parte de los escolares (ilustración 1). ¿Qué propiedades están considerando los escolares para establecer estos argumentos?

Aunque el enunciado de esta actividad se ha modificado, teniendo en cuenta el análisis del primer ciclo, el objetivo que pretende sigue siendo el mismo. Para justificar si alguna de las figuras está o no colocada en el grupo que le corresponde los EPM deben hacer uso de las propiedades que definen al concepto polígono. Con esta actividad, por tanto, se pretende que movilicen KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos). Por otra parte, al tratar la clasificación de figuras en polígonos y no-polígonos se espera que surja conocimiento relacionado con el por qué una figura es o no polígono (KoT, procedimientos). Al preguntar por las propiedades que están considerando los escolares, la intención es que los EPM centren su atención en las características de los elementos que forman cada figura en las que se basan los estudiantes, sin necesidad de interpretar la razón que hace que los escolares hayan situado a cada figura en un grupo u otro. El conocimiento pretendido, por lo tanto, sigue siendo KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Al preguntar por las propiedades que consideran los escolares se espera que en las respuestas de los EPM se evidencie conocimiento sobre las estrategias que usan los estudiantes para resolver la actividad o el lenguaje que suelen usar en determinados ámbitos (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

Vinculada a la primera actividad se les propone a los EPM la siguiente:

Actividad 2. ¿Cuáles consideráis que habrán sido los argumentos esgrimidos por los estudiantes para realizar esta distribución entre polígono y no polígono? ¿En qué se fijan?

El enfoque de la segunda actividad el conocimiento pretendido esté relacionado con el subdominio KFLM. Por una parte, con la categoría formas de interacción con un contenido matemático, pues en las respuestas de los EPM se espera que muestren conocimiento sobre las estrategias o procesos llevados a cabo por los escolares. Por otra parte, fortalezas y dificultades, pues deben reflexionar sobre aspectos que puedan dificultar la elección de las figuras por parte de los estudiantes de primaria.

Aunque el conocimiento pretendido con cada una de las dos primeras actividades está vinculado a subdominios diferentes, los EPM han relacionado sus respuestas. Por esta razón, el análisis de ambas actividades lo hacemos de forma conjunta.

Análisis

La transcripción de la puesta en común de la resolución de la primera actividad por parte de los EPM se ha dividido en varios episodios, según el interés de cada bloque de intervenciones. En la tabla 4.27 se recogen los episodios que hemos considerado en la primera parte de la clase.

El primero de ellos no se analiza. Trata sobre cómo se desarrollará el trabajo utilizando la tarea formativa, no se moviliza conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Solo tendremos en cuenta la intervención de una de las EPM que se analizará junto al segundo episodio.

Tabla 4.27

Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividades 1 y 2

Código	Contenido del episodio
[TF1.2A.1 U1-142]	Introducción. Planteamiento actividad 1.
[TF1.2A.2 U143-170]	Actividades 1 y 2. Líneas poligonales cerradas y simetría.
[TF1.2A.3 U171-183]	Actividades 1 y 2. Figuras prototípicas.
[TF1.2A.4 U184-202]	Actividades 1 y 2. Otros atributos.
[TF1.2A.5 U203-222]	Actividades 1 y 2. Regularidad y simetría.
[TF1.2A.6 U222-260]	Actividades 1 y 2. Figuras cerradas. Figuras complejas.
[TF1.2A.7 U261-282]	Actividades 1 y 2. Número de lados. Aprendizajes previos.
[TF1.2A.8 U283-299]	Actividades 1 y 2. Simetría. Regularidad. Realidad.

[TF1.2A.2 U143-170] Actividades 1 y 2. Líneas poligonales cerradas y simetría

128. Sonia: Un círculo no es un polígono, ¿a qué no?

133. Sonia: Para mí no es.

157. Carolina: *Yo creo que en lo que se han fijado principalmente es en que los polígonos son líneas poligonales..., eh, completamente cerradas y que la mayoría de ellos tienen simetría ...*
158. Formadora: *Por aquí aparece..., desde luego línea poligonal cerrada, está clara.*
159. Mara: *Y simetría.*
160. Formadora: *Y aparece simetría. Para ti la simetría también está presente cuando han decidido que una cosa es un polígono o no [otros alumnos asienten].*
163. Carolina: *Que he puesto que en todas las figuras menos en la 7, la 5 y la 1.*
164. Mara: *Eso, yo también.*
165. Formadora: *Excepto la 7, la 5 y la 1, todas las demás les pasa que son qué...*
166. Alumnos: *Que son simétricas.*
167. Formadora: *Que son simétricas, ¿respecto de...?*
168. Carolina: *De su eje.*
169. Formadora: *De su eje. ¿Solo hay un eje?*
170. Alumnos: *No.*

Durante el tiempo dedicado en la clase de formación inicial a que los EPM lean el primer fragmento del caso y resuelvan de manera individual las tres primeras actividades, van surgiendo cuestiones sobre diferentes aspectos de la tarea.

Nos llama la atención la duda que plantea Sonia al preguntar *¿un círculo no es un polígono? ¿a qué no?* [TF1.2A.2 U128]. Esta pregunta provoca la reacción del grupo mostrando que la duda es compartida por una parte importante del grupo. Sonia, a continuación, dice *para mí no es* [TF1.2A.2 U133], mostrando que sabe que el círculo no verifica alguno de los atributos relevantes para ser un polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Esta misma EPM, unos minutos antes pregunta *¿propiedades a qué se refiere exactamente? Porque yo lo estoy interpretando como quiero* [TF1.2A.2 U86]. Tras la explicación de la formadora, Sonia dice: *entonces puedo poner, por ejemplo, si es regular o irregular* [TF1.2A.2 U90]. Este comentario lo consideramos como indicio de que sabe que los polígonos se pueden clasificar en regulares e irregulares (KoT, procedimientos) y que conoce qué debe cumplir un polígono para estar en un grupo u otro (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Como respuesta a las dos actividades planteadas en la tarea formativa los EPM van aportando aspectos relativos al concepto polígono que consideran se han tenido en cuenta en el agrupamiento al que han llegado los escolares.

Carolina cree que los estudiantes se han fijado en dos características que les atribuye a los polígonos representados en la Figura 4.1. Por una parte, dice que son *líneas*

poligonales completamente cerradas. Por otra, de las figuras representadas por los estudiantes en la parte de polígonos *la mayoría tienen simetría* [TF1.2A.2 U157]. Además, identifica correctamente qué figuras, de entre las que aparecen en la parte de polígonos, no son simétricas al decir *en todas menos en la 7, la 5 y la 1* [TF1.2A.2 U163] (ver Figura 4.19). Con su respuesta, Carolina muestra su conocimiento sobre la estrategia utilizada por los estudiantes al representar figuras que consideran polígono o no polígonos (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). Asimismo, sabe identificar ciertos atributos relevantes de los polígonos en las figuras representadas (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).



Figura 4.19 Figuras no simétricas entre los considerados polígonos

También sabe que si una figura es simétrica es porque se pueden identificar rectas imaginarias que dividen a la figura en dos partes idénticas, y que esas rectas se llaman ejes de simetría [TF1.2A.2 U168]. Los EPM saben que en una figura puede haber más de un eje, como evidencia la respuesta colectiva, “no” [TF1.2A.2 U170], a la pregunta de la formadora de si en una figura simétrica solo hay un eje.

Las respuestas de Carolina en este sentido y la de los EPM muestran su conocimiento sobre la simetría en figuras geométricas (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). En este caso se podría haber aprovechado para profundizar en este aspecto identificando todos los ejes de simetría de las figuras representadas en la Figura 4.1.

[TF1.2A.3 U171-183] Actividades 1 y 2. Figuras prototípicas.

172. Gabriel: [...] la 7 y la 1, yo lo que había considerado es que eran formas poligonales más cercanas y más conocidas por los niños, que es un triángulo y un pentágono.

173. Formadora: Formas poligonales habituales ...

176. Alba: Yo también he añadido que hay otro alumno que también ha considerado un pentágono...

178. Alba: La casita, que es una figura prototípica y que podemos pensar que estos alumnos no van a tener el mismo nivel, he puesto también.

180. Cati: No, yo iba a decir eso, que consideran polígonos las figuras más comunes y como no-polígonos las figuras más raras.

181. Formadora: Aja. ¿Raro en cuanto a qué? ¿Qué defines por raro?

182. Cati: Que no tienen en el libro todas las figuras puestas y como que se salen del prototípico.

En este episodio se observa como los EPM consideran que los escolares, a la hora de representar polígonos tienen en cuenta las *figuras más comunes* [TF1.2A.3 U180], *más cercanas y conocidas* [TF1.2A.3 U172]. Se refieren a las que se usan de manera más frecuente en las aulas de primaria, las que suelen aparecer en los libros de texto habitualmente, lo que Alba nombra *figura prototípica* [TF1.2A.3 U178].

En estas respuestas se muestra conocimiento sobre la estrategia usada por los escolares a la hora de resolver la tarea propuesta por la maestra (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

Se observa como los EPM reconocen tipos concretos de polígonos, por ejemplo, al decir Gabriel que la figura 1 es *un triángulo* y la 7 *un pentágono* [TF1.2A.3 U172], o Alba al indicar que la figura 6 es un *pentágono* [TF1.2A.3 U176] (ver Figura 4.20). Los EPM saben identificar polígonos atendiendo al número de lados de cada uno. Muestran, por lo tanto, conocimiento sobre KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, saben que el número de lados se puede utilizar como criterio para clasificar figuras (KoT, procedimientos).

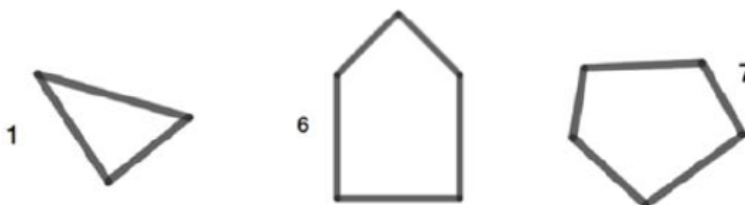


Figura 4.20 Figuras nombradas por los EPM

[TF1.2A.4 U184-202] Actividades 1 y 2. Otros atributos.

184. Mónica: Yo he puesto que, en ningún caso, ni polígonos ni no-polígonos, dibujan figuras con volumen.

186. Mónica: Claro, son figuras planas, pero que tienen en su conocimiento, yo creo..., que no te dibujan un cubo.

187. Formadora: Tienen claro que los polígonos son figuras planas.

188. Mónica: Claro, que descartan la opción de que tengan volumen, porque saben..., supongo que ya en quinto saben que no tienen volumen.

190. Jorge: Yo he puesto que en el apartado de polígonos a diferencia de los no polígonos todas las figuras son cerradas. Excepto en la 4, la 8 y la 9 todos los lados son líneas rectas.

191. Formadora: *Y ¿por qué crees que han puesto en polígonos elementos cuyas líneas no son rectas, que son el 4, el 8 y el 9? ¿Por qué?*
192. Jorge: *Porque lo han asociado al círculo que es un concepto del círculo como figura, y el 8 lo han podido ver como la deformación del círculo.*
194. Jorge: *Como siempre sale triángulo, círculo y cuadrado en el libro...*
196. Paula: *[...] como que toman en cuenta la simetría (marca con la mano como un eje vertical) o la regularidad de la figura y por eso lo han puesto ahí, no por... En realidad, no están considerando la definición de polígono que es correcta, pero...*
198. Marco: *Yo lo que tengo puesto en esas tres figuras es que tanto la 8 y la 9 piensan que al menos alguna característica de polígono tiene en común, ya después que las quiten ...*
200. Marco: *Porque por ejemplo en la 8 hay dos líneas rectas, después tiene dos curvas a los lados, y la 9 tiene vértices con lo cual dice...*
202. Marco: *Y de la 4 lo que he dicho es eso, que al menos está cerrado, yo creo que lo ven como un polígono.*

Los EPM continúan dando respuesta a las dos primeras actividades, aportando características de las figuras que han representado los estudiantes para, de alguna forma, justificar el agrupamiento de figuras en polígonos y no polígonos.

Así, Mónica indica que los estudiantes no dibujan *figuras con volumen* [TF1.2A.4 U184], tanto los polígonos como los no polígonos representados son *figuras planas* [TF1.2A.4 U186]. Mónica conoce el significado de que en una figura se pueda observar la magnitud volumen. Además, añade *no te van a dibujar un cubo* [TF1.2A.4 U186], lo que evidencia es que sabe que el cubo es una figura tridimensional (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Además, Mónica supone que *en quinto* (de Educación Primaria) *saben que* (los polígonos) *no tienen volumen* [TF1.2A.4 U188], lo que evidencia su conocimiento sobre el nivel de profundidad conceptual apropiada en cada curso (KMLS, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado).

Por otra parte, Jorge indica que todas las figuras dibujadas representando polígonos *son cerradas*, y en su mayoría con lados *rectos* [TF1.2A.4 U190]. Identifica dos atributos relevantes del concepto polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Para justificar el que los estudiantes hayan puesto figuras con lados curvos en la parte de polígonos (ver Figura 4.21) los asocia al *círculo: como siempre sale triángulo, círculo y cuadrado en el libro...* [TF1.2A.4 U190]. Identifica una dificultad de los estudiantes a la hora de reconocer polígonos (KFLM, fortalezas y dificultades), que es consecuencia de la forma en la que se les enseña. Al trabajar de manera habitual el círculo con otros

polígonos, pueden pensar que el círculo también lo es. De este modo se evidencia conocimiento sobre las estrategias que los alumnos suelen usar con relación a la comprensión de ciertos conceptos (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). Además, se evidencia conocimiento sobre las implicaciones que tienen el uso de determinadas actividades o estrategias de enseñanza en el aprendizaje de los estudiantes (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

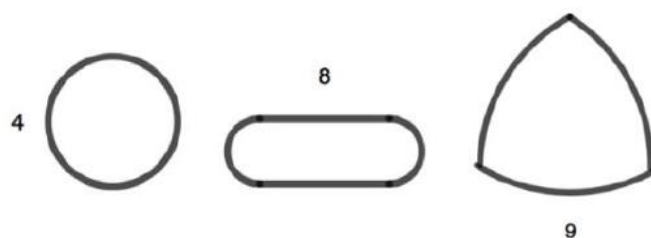
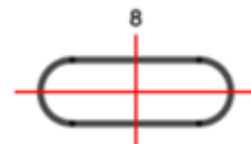


Figura 4.21 Figuras con lados curvos en la zona de polígonos

Paula, basándose en la respuesta de los estudiantes, considera que la figura 8 (ver Figura 4.21) la han representado en la zona de polígonos al tener en cuenta la *simetría* y la *regularidad* [TF1.2A.4 U196]. Es decir, especifica la estrategia que utilizan los estudiantes identificando polígono con figura simétrica y/o regular (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). En su respuesta consideramos que sabe el significado de ambos términos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Como ya vimos (Figura 4.4), esta figura tiene dos ejes de simetría. En la posición en la que está la figura sería un eje vertical y otro horizontal. Paula representa el eje vertical en el aire al señalar con su mano una línea de arriba a abajo, lo que nos lleva a identificar conocimiento sobre el registro figural-icónico para representar este objeto matemático (KoT, registros de representación). Sorprende que considere la regularidad de la figura como característica a destacar. Se tiene en cuenta para la siguiente implementación, añadiendo al documento para el formador algunas cuestiones en las que se relacione la simetría y la regularidad de un polígono.



Por otro lado, que Paula diga que los estudiantes *no están considerando la definición de polígono que es correcta* [TF1.2A.4 U196], lo vemos como indicio de que conoce la definición de polígono e identifica en la zona de polígono algunas figuras que no cumplen algún atributo relevante de dicho concepto (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Así, Marco considera que los estudiantes han puesto las figuras representadas en la Figura 4.21 como polígonos porque *tienen alguna de las características de polígono* [TF1.2A.4

U198], haciendo referencia a que en cada figura cumple al menos uno de los atributos relevantes del concepto polígono. Identifica lados que son *líneas rectas* en la figura 8, *vértices* en la 9 [TF1.2A.4 U200] o que es *cerrada* en la 4 [TF1.2A.4 U202]. Reconoce la estrategia que usan los estudiantes a la hora de representar figuras que consideran polígonos (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

Marco considera que los estudiantes pueden pensar que para ser ejemplo de un concepto basta con que cumpla alguno de los atributos necesarios, pero no es imprescindible que cumpla todos ellos. Identifica, por tanto, aspectos que a los estudiantes les puede suponer cierto problema (KFLM, fortalezas y dificultades). Esto indica que Marco reconoce características que verifican los polígonos. Por ejemplo, dice *en la 8 hay dos líneas rectas*, refiriéndose a los lados, y *la 9 tiene vértices* [TF1.2A.4 U200], o refiriéndose a la figura 4 *ve que al menos está cerrada* que al menos está cerrado (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

[TF1.2A.5 U203-222] Actividades 1 y 2. Regularidad y simetría.

204. *Sonia: A ver, creo que los niños se fijan en las figuras que parecen más regulares para ellos. Que sí, que se tienen que fijar en la simetría y eso para..., que creo que les parece más regular si ven que tienen simetría, por ejemplo, y los clasifican así, y ven que no tienen..., que son más irregulares, que no tienen simetría, los ponen en la parte de los no-polígonos.*

205. *Formadora: O sea, tú crees que la simetría y la regularidad van de la mano en sus concepciones.*

206. *Sonia: Sí [algunos alumnos asienten].*

208. *Alba: Sí, pero más que nada en los no-polígonos.*

209. *Formadora: Los no-polígonos queda muy claro el qué.*

210. *Alba: La simetría impar.*

211. *Formadora: La falta de simetría o la simetría impar, ¿qué quieres decir?*

212. *Alba: Que es irregular.*

215. *Alba: Que no coinciden de ninguna manera.*

216. *Formadora: Que no hay simetría de ninguna manera. ¿Eso quiere decir que es simetría impar?*

219. *Alba: A mí lo que me viene a la cabeza es que si tú tienes una figura y la doblas por la mitad y sus lados y vértices coinciden, entonces es simetría par, pero si lo doblas dos veces y [...] y coincide, sería impar.*

220. *Formadora: Y tú crees que en la parte de no-polígonos...*

221. *Alba: No tienen simetría ninguna.*

Los EPM siguen dando argumentos que consideran que han usado los escolares para colocar cada figura en una parte de la pizarra. Así, Sonia considera que los estudiantes entienden que serán polígonos las figuras que les *parecen más regulares*, además piensa que a los estudiantes *les parece* que la figura es *más regular si ven que tienen simetría*. Según ella, *los que son más irregulares, que no tienen simetría, los ponen en la parte de no polígonos* [TF1.2A.5 U204]. En esta intervención Sonia verbaliza cómo considera que los estudiantes razonan a la hora de representar figuras que consideran polígonos o no polígonos (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

Parece que usa el término “regular” de manera coloquial, como sinónimo de uniforme, no teniendo en cuenta los atributos relevantes de un polígono de este tipo. Por esa razón, para Sonia la regularidad de un polígono puede ser gradual. Es decir, para ella una figura puede ser “más regular” o “más irregular”, interpretándolo como figura “más uniforme” o “menos uniforme”.

Relaciona que el polígono sea regular con que éste sea simétrico, y así lo asevera cuando la formadora pregunta si cree que *la simetría y la regularidad van de la mano en sus concepciones* [TF1.2A.5 U205]. Se vuelve a identificar conocimiento sobre la estrategia utilizada por los estudiantes (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

Como ya hemos comentado, tanto la conexión entre regularidad y simetría, como considerar que la regularidad tiene diferentes grados, han aparecido en el análisis de la implementación de esta misma tarea formativa en otros grupos. Se tendrá en cuenta en las siguientes implementaciones de la tarea.

Alba enlaza con la respuesta de Sonia en cuanto a la simetría y la regularidad, y dice que en los *no polígonos* queda clara *la simetría impar* [TF1.2A.5 U210]. En este caso está relacionando la simetría como característica que se puede observar en ciertas formas geométricas, por ejemplo, en los polígonos regulares, con la simetría en el Cálculo. En este ámbito, la simetría se relaciona con la forma que tiene la gráfica de una función en el plano cartesiano.

Así, una función se dice que es par si su gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas (ver Figura 4.22). Algebraicamente implica que, para cualquier número real en su dominio, x , su opuesto, $-x$, está también en el dominio de la función, y se cumple que $f(-x) = f(x)$. Alba considera que si *doblas (una figura) por la mitad y sus lados y vértices coinciden, entonces es simetría par* [TF1.2A.5 U219].

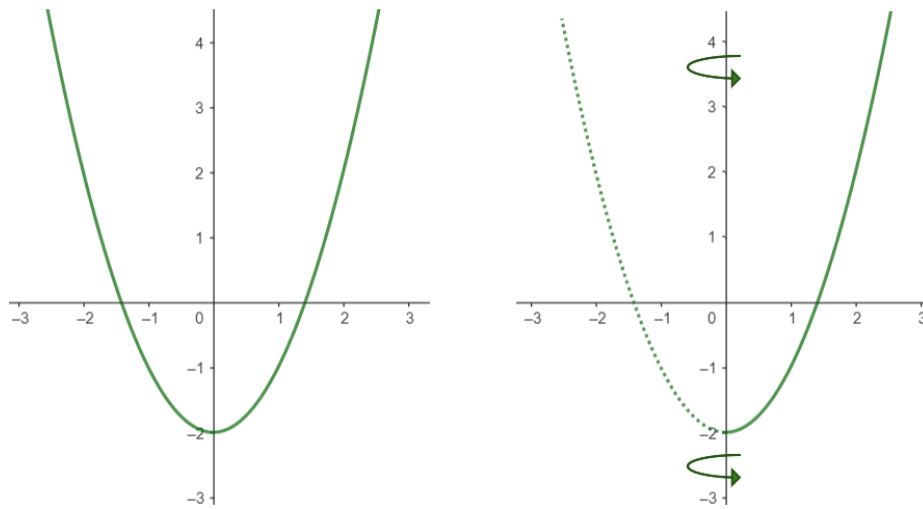
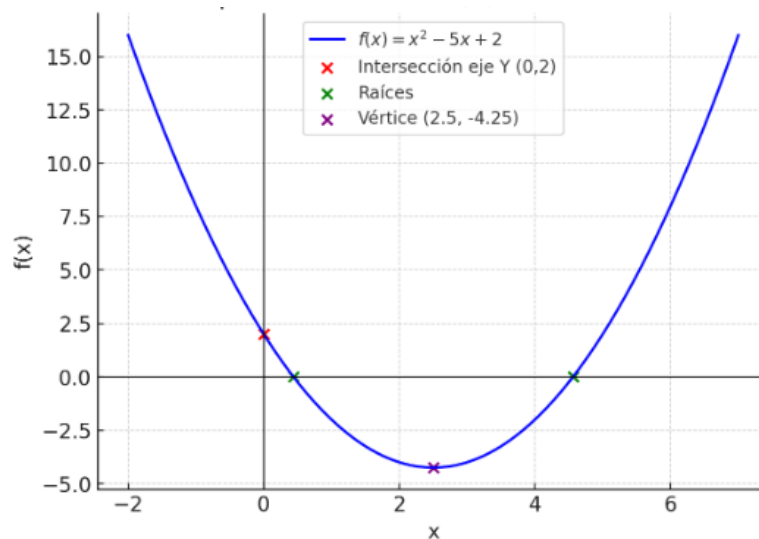


Figura 4.22 Representación gráfica de una función par

El “doblar por la mitad” implica encontrar un eje de simetría en la figura, y éste puede estar en cualquier posición. En el caso de las funciones, hay algunas que son simétricas, incluso respecto de ejes paralelos al eje de ordenadas, pero no son funciones pares, por ejemplo, $f(x) = x^2 - 5x + 2$ (ver Figura 4.23).

Figura 4.23 Representación gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5x + 2$

Alba también especifica lo que entiende por simetría impar. Dice *si doblas (la figura) dos veces y coincide, sería impar* [TF1.2A.5 U219]. En este caso, establece una relación con el significado de función impar, que es aquella en la que para cualquier número real x de su dominio, $-x$ también está en el dominio y se cumple que $f(-x) = -f(x)$. La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas, lo que implica que es invariante al aplicar una rotación de 180 grados alrededor del origen. Este movimiento es

equivalente a la composición de dos simetrías axiales, una respecto del eje de ordenadas y otra respecto del eje de abscisas. Lo relacionamos con el último comentario de Alba sobre el que coincida la figura al doblar dos veces (ver Figura 4.24).

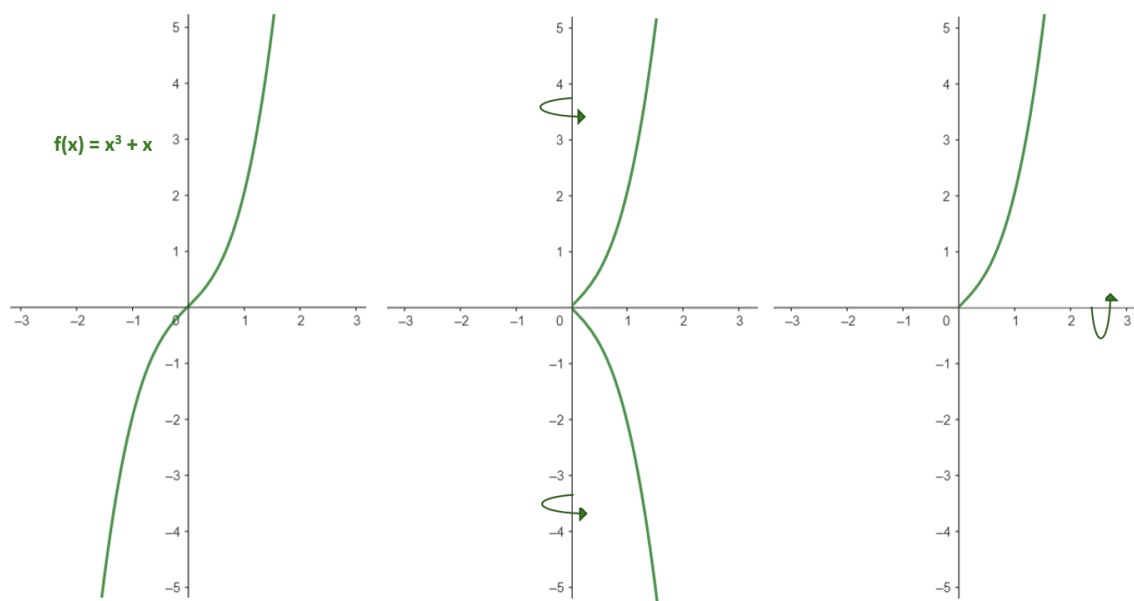


Figura 4.24 Resultado de "doblar" el papel dos veces respecto de los ejes de coordenadas

Alba establece una conexión entre la simetría de las figuras planas y la de las gráficas de ciertas funciones. Sabe que estos contenidos, siendo diferentes, tienen características en común (KSM, conexiones transversales).

Por último, Alba reconoce que las figuras que están representadas en la parte de no polígonos *no tienen simetría ninguna* [TF1.2A.5 U221]. Sabe identificar si una figura es simétrica o no (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). En ciclos posteriores se puede problematizar sobre la veracidad de esta propiedad en figuras no polígonos. Para ello, por ejemplo, se puede ilustrar con no polígonos simétricos como los mostrados en la Figura 4.25, algunos extraídos de entre las figuras representadas por los estudiantes de Primaria del caso.

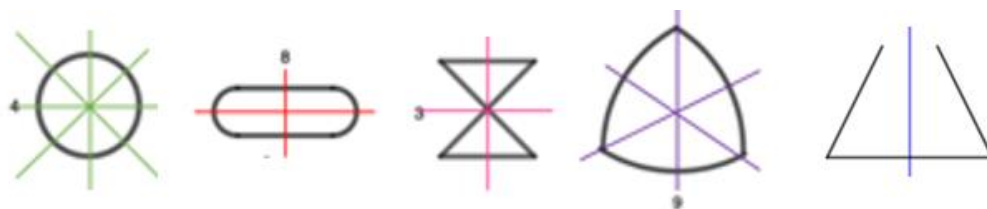


Figura 4.25 No polígonos simétricos

[TF1.2A.6 U222-260] Actividades 1 y 2. Figuras cerradas. Figuras complejas.

222. Formadora: *¿Qué más cosas veis?*
223. Paula: *Que las figuras que no son cerradas entonces han dicho que no son polígonos.*
227. Mónica: *Pero en los no-polígonos sí que hay niños que tienen claro que las no cerradas son no-polígonos pero otros no, ¿no?*
237. Formadora: *Porque si, por ejemplo, un niño [...] hubiese pintado la 5 y la 11... ¿qué ocurriría?*
239. Mónica: *Que el polígono sí lo tiene claro pero el no-polígono creo que no lo tiene claro.*
240. Formadora: *¿Por qué creeríais entonces que ha pintado la 11 como no-polígono?*
253. Mila: *Es que al verlo más complejo va a decir que ya es un no-polígono, porque...*
254. Formadora: *O sea, el hecho de tener una montañita más hace que sea más complejo.*
255. Sonia: *Es que lo ve como más irregular.*
256. Carolina: *Es que, por ejemplo, yo pienso que, si en vez de haber puesto un círculo hubiésemos puesto, así como una forma de un lago, así con más entrantes y más salientes pero que siguiera cerrado, también lo habría puesto como no-polígono por lo que ha dicho Mila. Son figuras que solemos ver, que son más complejas...*
259. Formadora: *Por ahí... ¿tú crees que esto es consecuencia, entonces, de lo que habitualmente se hace con ellos en clase?*
260. Carolina: *Sí porque ellos ven siempre las mismas figuras: triángulos, rectángulos, cuadrados y círculos. Hay otros polígonos que no tienen que ser los que te va mostrando el libro que no se trabajan.*

El debate sobre la resolución de las dos primeras actividades de la tarea formativa continua con un comentario de Paula (PT). Ella considera que los estudiantes van a tener en cuenta que las líneas poligonales abiertas no generan polígono, pues saben *que las figuras que no son cerradas no son polígonos* [TF1.2A.6 U223] (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). Lo ha podido tener en cuenta porque sabe diferenciar líneas poligonales abiertas y cerradas. Además, es indicador de que sabe que el que esta sea cerrada es un atributo relevante del concepto polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

La formadora les hace reflexionar sobre qué ocurriría si un estudiante hubiese pintado la figura 5 (como polígono) y la 11 (como no polígono), siendo ambas polígonos convexos con un lado horizontal, y cuya diferencia está en el número de lados que tienen. Para Mónica sería un indicador de la dificultad del alumno para dar ejemplos de figuras que no sean polígonos [TF1.2A.6 U239] (KFLM, fortalezas y dificultades). La razón que supone Sonia podría llevar a un estudiante a considerar la figura 11 como ejemplo de no polígono y la 5 como ejemplo de polígono está en que la 11 es *más irregular* [TF1.2A.6

U255]. Es recurrente, pues lo hemos observado en las diferentes implementaciones de esta tarea, que los EPM utilicen este tipo de expresión asociados a atributos que una figura puede verificar o no, pero no se puede verificar en distintos grados, como es la regularidad o la simetría. Se tendrá en cuenta en la revisión de la tarea para implementaciones posteriores.



Mila atribuye esta dificultad a la estrategia seguida por los estudiantes, de tal forma que, según ella, relacionan no polígonos con figuras *más complejas* [TF1.2A.6 U253] (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

Carolina apoya a su compañera, y añade que cree que esta dificultad es consecuencia de la forma en la que se puede tratar el tema. Así dice que, *si ven siempre las mismas figuras: triángulos, rectángulos, cuadrados y círculos... Hay otros polígonos, que no tienen que ser los que te va mostrando el libro, que no se trabajan* [TF1.2A.6 U260]. Observamos indicios de que sabe que, a la hora de trabajar un concepto, en este caso el polígono, el maestro debe de poner ejemplos variados y no limitarse exclusivamente a los que aparecen en un libro de texto (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), evitando que se generen imágenes prototípicas que distorsionan la idea de polígono (KFLM, teorías de aprendizaje). En ocasiones, los ejemplos que aparecen en el libro de texto o en otros recursos digitales son figuras comunes, como las que indica en [TF1.2A.6 U260]. Sabe que el uso de estos recursos puede provocar obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes (KMT, recursos materiales y digitales).

Esta EPM considera que, para los estudiantes, una figura *con forma de lago, así con más entrantes y salientes*, aunque fuese *cerrada* [TF1.2A.6 U256] no sería polígono, por ser más compleja que el círculo. Muestra cómo considera que los estudiantes comprenden el concepto de polígono (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).



[TF1.2A.7 U261-282] Actividades 1 y 2. Número de lados. Aprendizajes previos.

262. Jorge: *Se podría pensar que algún niño, entre todos los polígonos tienen menos de cinco lados, entonces al ver el polígono ese de 7 u 8 lados pues ya lo mete en no-polígonos, si se fijan por el número de lados.*

263. Formadora: *El número de lados..., que están acostumbrados a ver polígonos con un número de lados pequeño, que no supere el 5, por ejemplo.*

264. Sonia: *Sí, por la complejidad que tenga.*

267. *Formadora: ¿Por qué crees que el 11 es complejo?*
268. *Sonia: Por el número de lados y porque es irregular.*
273. *Sonia: No, yo por la pregunta que me acabas de hacer de por qué creo que los de... es más complejos. No es que sea más complejo un polígono irregular con más lados, solo que nos lo han puesto así desde siempre.*
277. *Formadora: Las concepciones que tenemos por las situaciones prototípicas, entonces.*
280. *Mila: Es que, o sea, aunque suene repetitivo, pero que yo lo que he dicho es que lo relacionan todo con polígono lo que han dado previamente. Todo lo que no hayan visto anteriormente o... Por eso pintan, a lo mejor, el 11 o el 12 que no están..., no sé, que eso no te lo pone un libro..., no están...*
282. *Mila: Pues dicen, yo eso no lo he visto pues seguro que no son polígonos.*

Los EPM continúan aportando posibles argumentos de los estudiantes para justificar la distribución de las figuras. Jorge, fijándose en las figuras representadas, piensa que los estudiantes *se fijan en el número de lados* de la figura [TF1.2A.7 U260], de tal forma que figuras con un mayor número de lados los consideran no polígonos (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). Para Sonia, aunque luego se retracta, considera que un número de lados alto hace que la figura sea más compleja [TF1.2A.7 U265]. Así, las razones que alega para considerar que la figura 11 es compleja es, por una parte, el número de lados, por otra, que es irregular. Se muestra conocimiento sobre el significado de que una figura sea irregular (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos), aunque otras figuras representadas en la zona de polígonos también lo son y no se ha tenido en cuenta.

Al final de este episodio, Mila insiste en que la respuesta de los estudiantes está condicionada por aprendizajes previos, considerando la imagen de polígono creada por los ejemplos con los que ha trabajado previamente. Así, dice que si una figura *no te la pone un libro* será un no polígono [TF1.2A.7 U280]. Sabe cómo afecta al aprendizaje el uso de ejemplos variados (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). También muestra conocimiento sobre las estrategias utilizadas por los estudiantes a la hora de resolver la tarea propuesta por la maestra (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

[TF1.2A.8 U283-299] Actividades 1 y 2. Simetría. Regularidad. Realidad.

283. *Formadora: Igualmente el 3 y el 12, ya que los has mencionado. ¿Podría haberlos pintado el mismo niño?*

287. Marco: Yo creo que sí por el hecho de la simetría..., pero no solo por la simetría, sino porque considera que uno es regular y el otro es irregular. Pues el irregular a los no-polígonos y el regular a los polígonos.

289. Formadora: Vale, pero con su concepción de regularidad. Y tú por qué crees que no los podría haber pintado el mismo.

290. Juana: Porque..., es lo mismo pero deformado, entonces, si tiene claro que eso puede entrar dentro de los polígonos, el otro también.

294. Formadora: Gabriel, tú crees que no, eso no son motivos.

295. Gabriel: Por su concepto de regularidad. Alguno le parece más regular y otro no, y las circunstancias en las que pinta el mismo niño por el hecho de..., bueno esto parece un polígono porque es regular, y el otro no parece un polígono porque es irregular.

297. Paula: A lo mejor han colocado las figuras que están a la izquierda, el 3 creo que es, porque se parece a un objeto de la realidad y entonces comparan todos con lo que ven...

298. Formadora: Con las situaciones reales.

299. Paula: Sí, y el otro como está más... con una parte más que otra, pues no lo consideran así.

Las últimas intervenciones del debate generado con la resolución de las dos primeras actividades surgen al plantear la formadora si las figuras 3 y 12, que ambas representan líneas poligonales complejas, las ha podido dibujar el mismo estudiante. Algunos EPM consideran que es posible, y vuelven a plantear que los estudiantes tienen



en cuenta la simetría y la regularidad de las figuras a la hora de considerarlas o no polígono. Así lo determina Marco [TF1.2A.8 U287], pensando que relacionan el ser polígono con ser simétrico y regular, y no polígono en otro caso (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). Como puede observarse, la figura 3 que han representado como ejemplo de polígono sí es simétrica, pero no regular. Se podría aprovechar para tratar la relación entre la simetría y la regularidad de las formas geométricas. Gabriel apoya esta misma justificación [TF1.2A.8 U295], e insiste en hablar de la posibilidad de que una figura sea “más regular” que otra, como si el atributo de ser regular en un polígono pudiese graduarse.

Juana discrepa de sus compañeros. Cree que las dos figuras tienen características comunes. En este caso identifica que son líneas poligonales complejas (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Juana considera, por esta razón, que si las hubiese dibujado el mismo estudiante las habría colocado ambas como polígonos o como no polígonos [TF1.2A.8 U290].

Como último argumento, Paula cree que los estudiantes pueden reconocer como polígonos aquellas figuras que tienen forma parecida a objetos reales [TF1.2A.8 U297]. Así se refiere a la figura 3, justificando que aparezca representado en la zona de polígonos porque el estudiante que lo ha dibujado lo identifica, quizás, con un reloj de arena (KFLM, formas de interacción con un objeto matemático).

Tabla 4.28

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividades 1 y 2

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	<u>Procedimientos</u>	Saben clasificar figuras atendiendo a su regularidad (U90).
		Saben clasificar figuras por el número de lados (U172, 176).
	<u>Definiciones, propiedades y sus fundamentos</u>	Conocen los atributos relevantes de los polígonos regulares (U90).
		Saben que los polígonos están limitados por líneas poligonales cerradas (U157)
		Saben identificar figuras simétricas y no simétricas (U163).
		Saben qué son los ejes de las figuras simétricas y que el número de ejes varía en función de la figura (U168, 170).
		Saben que los polígonos son figuras planas y el cubo es tridimensional (U186).
		Saben que los polígonos con figuras cerradas con lados rectos (U190).
		Conocen la definición de polígono e identifican figuras que no cumplen algún atributo relevante de este (U196).
		Saben identificar características de los elementos de un polígono (U200).
		Saben identificar figuras simétricas (U221).
		Saben que la línea poligonal que delimita a un polígono debe ser cerrada (U223).
KSM	Registros de representación	Saben identificar figuras irregulares entre las de un conjunto (U265).
		Saben reconocer atributos relevantes de líneas poligonales complejas (U290).
KFLM	Conexiones transversales	Usan elementos reales (las manos) para representar el concepto de eje de simetría (U196).
		Relacionan la simetría de las figuras geométricas con la simetría de la gráfica de una función (simetría par e impar) (U210).
	Teorías de aprendizaje	Saben que el uso reiterado de ciertas figuras como ejemplos de polígono generan imágenes prototípicas (U260).
		Saben que algunos estudiantes pueden considerar como polígonos las figuras simétricas (U157).
KFLM	<u>Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático</u>	Saben que los estudiantes van a considerar como polígonos las figuras más comunes (U180).
		Saben que los estudiantes pueden tener considerar al círculo como polígono porque siempre lo han trabajado junto a otros polígonos (U190)

		Saben que los estudiantes relacionan el concepto <u>polígono con figuras regulares y simétricas (U196, 287).</u>
		Saben que para algunos estudiantes un ejemplo de polígono puede ser cualquier figura que cumpla algún atributo relevante (U198).
		Saben que los estudiantes identificarán figuras abiertas como no polígonos (U223).
		Saben que los estudiantes considerarán como no polígonos las figuras más complejas (U253, 260).
		Saben que algunos estudiantes creerán que figuras con un número elevado de lados son no polígonos por no ser frecuentes (U260).
		Saben que algunos estudiantes considerarán no polígonos a figuras que no suelen aparecer en los libros de texto o en ejemplos puestos por la maestra (U280)
		Saben que los estudiantes pueden relacionar figuras que representen objetos reales como polígonos (U297).
	<u>Fortalezas y dificultades</u>	Saben que los estudiantes pueden tener consideración al círculo como polígono porque siempre lo han trabajado junto a otros polígonos (U190)
		Saben que los estudiantes tienen dificultad en representar figuras que no sean polígonos (U239).
		Conocen obstáculos provocados por la forma en la que se enseña el círculo junto a polígonos (U190).
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Saben que para tratar un concepto en clase se debe mostrar un conjunto variado de ejemplos (U260, 280).
	Recursos materiales y digitales	Saben que los libros de texto y otros recursos, a veces, utilizan el mismo tipo de ejemplos, y esto puede provocar obstáculos para aprendizajes posteriores (U260).
KMLS	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado	Saben que los estudiantes de 5º de primaria conocen que los polígonos son figuras planas (U188).

4.3.1.2. Actividad 3. Definición de polígono.

La actividad 3 está propuesta en la tarea justo antes del fragmento en el que los estudiantes de quinto de Educación Primaria justifican la posición de las distintas figuras en la zona de polígonos o de no polígonos. Hasta ese momento, en el caso no se especifica ninguno de los atributos relevantes del concepto polígono. Los EPM deben dar la definición que ellos deben conocer, pues en el curso anterior estudiaron una asignatura de conocimiento geométrico.

Actividad 3. Enunciad una definición de polígono

Como ya comentamos en la descripción de la tarea en la primera implementación, el objetivo de esta actividad es determinar si los EPM conocen los atributos relevantes de la definición de polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). En el debate puede surgir, relacionado con esta misma categoría, el identificar atributos no relevantes para este concepto en las definiciones de sus compañeros.

Al tener que dar una definición, los EPM movilizan conocimiento acerca de cómo se debe definir el concepto de polígono, considerando los criterios que deben cumplirse para que la definición sea matemáticamente válida (KPM condiciones necesarias y suficientes).

Análisis

Tabla 4.29

Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 3

Código	Contenido del episodio
[TF1.2A.9 U300-387]	Actividad 3. Definición de polígono dada por los EPM
[TF1.2A.10 U387-414]	Actividad 3. Representación figural-icónica de un polígono.

[TF1.2A.9 U300-387] Actividad 3. Definición de polígono dada por los EPM.

300. Formadora: *¿Quién quiere dar su definición de polígono?*
301. Sonia: *Venga yo. Yo he puesto que un polígono es la unión de varios segmentos unidos por un vértice, y son figuras cerradas. [La formadora escribe la definición en la pizarra].*
303. Paula: *Yo he puesto más o menos lo mismo, pero he puesto que [...], suelen tener el mismo número de lados que de vértices y que además de esto tienen diagonales que pueden encontrarse dentro o parcialmente fuera de la figura.*
308. Sonia: *Pero ella les tiene que explicar qué es una diagonal, ¿no?*
309. Paula: *Pero ya es el concepto.*
312. Cati: *Yo he puesto que además forman ángulos..., los vértices y los lados.*
320. Jorge: *Más cuyos lados no se cruzan.*
331. Alba: *Que son planos.*
332. Formadora: *Alba, dame tu definición completa, venga.*
333. Alba: *Figura geométrica plana, o sea con dos dimensiones, y cerrada, en la que sus lados se unen con un vértice.*
344. Formadora: *A ver Juana.*
345. Juana: *Figura geométrica plana cerrada formada por segmentos rectos...*
351. Juana: *... generando unos determinados ángulos.*
362. Formadora: *Fijaos que, aunque pueda parecer igual podría ser distinto, no doy pistas.*
363. Sonia: *Una pregunta... ¿Hay una definición que sea correcta..., no de ahí [señalando la pizarra en la que están las definiciones de los estudiantes], para polígono?*
366. Formadora: *Te prometo que sí. En matemáticas todo se puede definir.*
367. Sonia: *Es que veo todo bien.*
372. Alba: *¿Puedo rectificar?*
373. Formadora: *Que si puedes rectificar la tuya... ¿Qué quieres hacer? Venga...*
381. Alba: *Cada lado se une con otro por un vértice.*

Los EPM comparten la definición que han dado del concepto de polígono. Sonia es la primera en participar, y otros compañeros van aportando otros atributos a la definición dada. Así, parten de decir que *un polígono es la unión de varios segmentos unidos por un vértice, y son figuras cerradas* [TF1.2A.9 U301]. Sonia, realmente, destaca dos atributos de la línea poligonal que delimita al polígono. Parece que en su imagen del concepto prioriza el contorno, quizás porque habitualmente es la parte que se marca en la pizarra o en el papel a la hora de representarlo mediante un diagrama. Destaca dos de los atributos relevantes de la línea poligonal, es cerrada y está formada por segmentos unidos por un vértice, mencionando dos elementos del polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Aunque tal y como lo expresa, podría referirse a un haz de segmentos (Figura 4.26), en el que todos los segmentos están unidos entre sí por uno de sus extremos. Ella quiere hacer referencia a que los segmentos están concatenados.



Figura 4.26 Haz de segmentos vs segmentos concatenados

A la definición de Sonia, Cati añade que *los vértices y los lados forman ángulos* [TF1.2A.9 U312]. Esta EPM identifica elementos del polígono y conoce la relación entre ellos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Paula aporta a la definición inicial el que los polígonos *tienen el mismo número de lados que de vértices* [TF1.2A.9 U303], es decir, identifica una propiedad que es consecuencia de que los polígonos estén limitados por una línea poligonal cerrada y simple (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, dice que los polígonos *tienen diagonales que pueden encontrarse dentro o parcialmente fuera de la figura* [TF1.2A.9 U303]. Con este comentario, Paula introduce la diagonal como nuevo elemento relacionado con el polígono. Aunque no define dicho concepto, se entiende que lo conoce. Además, sabe que la posición relativa de la diagonal con respecto al polígono no es un atributo relevante de dicho concepto, pues especifica que pueden ser interiores o *estar parcialmente fuera de la figura* (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Le ha faltado advertir que las diagonales también pueden ser exteriores (ver Figura 4.27).

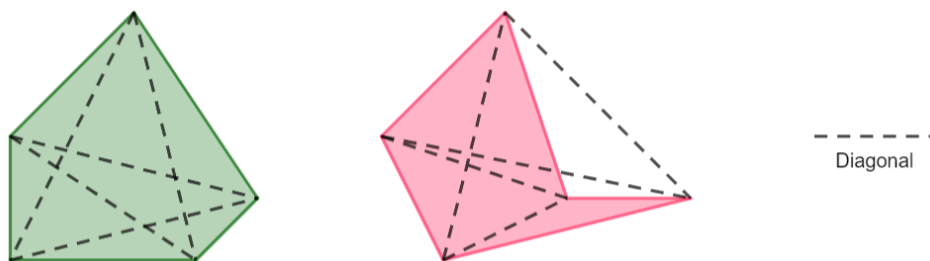


Figura 4.27 Representación de diagonales en un polígono cóncavo y en uno convexo

Como reacción al comentario de Paula, Sonia dice que *les tiene que explicar qué es una diagonal* [TF1.2A.9 U308]. Consideramos como indicio de que Sonia sabe que entre los atributos que deben verificar una definición matemática está la jerarquía (Escudero et al., 2014; Zaslavsky y Shir, 2005), que implica que los términos usados deben ser básicos o estar definidos previamente (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

Otros EPM añaden otras características que consideran atributos relevantes del concepto polígono, así Alba dice que los polígonos *son planos* [TF1.2A.9 U331], y Jorge añade que los *lados no se cruzan* [TF1.2A.9 U320], refiriéndose a que la línea poligonal que delimita al polígono es una línea poligonal simple (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Tras las aportaciones dadas por varios EPM sobre atributos del polígono, Alba da una definición a petición de la formadora. Para ella un polígono *es una figura geométrica plana, o sea con dos dimensiones, y cerrada en la que sus lados se unen con un vértice* [TF1.2A.9 U333]. Más adelante especifica que *cada lado se une con otro por un vértice* [TF1.2A.9 U381]. Tiene en cuenta algunos de los atributos relevantes del concepto polígono (figura cerrada y plana) (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Pensamos que, con la última frase Alba quiere hacer referencia a que la línea poligonal es simple, aunque tal y como está expresado no necesariamente sería así. Por ejemplo, las formas representadas en la Figura 4.28 cumplen los atributos dados en la definición de Alba de manera literal y no son polígonos. En esta definición faltaría especificar que los lados son rectos y expresar de manera irrefutable que la línea poligonal es simple.

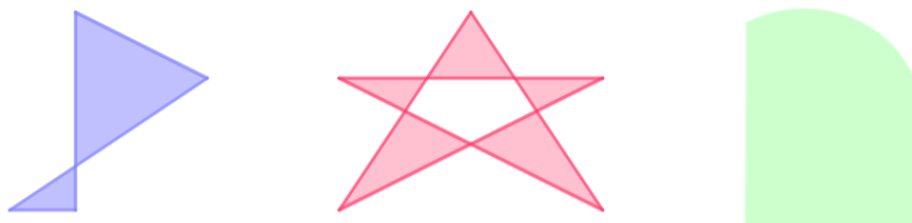


Figura 4.28 Formas que verifican la definición de Alba

Juana interviene para añadir a la definición de Alba que un polígono es una figura *formada por segmentos rectos* [TF1.2A.9 U345]. Es decir, sabe que es un atributo relevante de este concepto (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Añade, además que esos segmentos generan *unos determinados ángulos*, que es una propiedad de los polígonos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Esta aportación es cierta, aunque no es necesario añadirlo a la definición pues se deduce del resto de atributos. Si el polígono está delimitado por una línea poligonal cerrada y simple, cada dos lados consecutivos generan un ángulo interior y su conjugado. Al añadir esta frase la definición no sería mínima (Escudero et al., 2014).

Los EPM enuncian sus definiciones y argumentos de una manera clara, coherente y sin ambigüedades, utilizando términos matemáticos (KPM, uso de un lenguaje formal) [TF1.2A.9 U301, 303, 333, 345].

Sonia, revisando las definiciones que han dado varios EPM, plantea como duda si para polígono *hay una definición que sea correcta* [TF1.2A.9 U363]. En la implementación de la tarea formativa está previsto tratar la equivalencia entre distintas definiciones de un concepto como atributo de estas.

[TF1.2A.10 U387-414] Actividad 3. Representación figural-icónica de un polígono.

387. Formadora: ¿Sí? ¿Alguna otra cuestión?

388. Jorge: Que, si tú pones con un material concreto una figura, un cuadrado, por ejemplo, ya no está en dos dimensiones, ¿no?

392. Jorge: [...] Por ejemplo [coge un estuche], pues ya no estaría en dos dimensiones, como pone ahí, estaría...

394. Juana: Es un cubo, muy finito, pero es un cubo.

395. Formadora: [...] la superficie sí la podemos observar en la realidad. [...] puedo observar la superficie de la mesa y puedo tocar la superficie de la mesa,

398. *Mónica: Entonces ¿sería un error ponerle de ejemplo a tus alumnos un folio y decirles que es un rectángulo?*
399. *Formadora: No, no es un error. ¿Por qué va a ser un error?*
401. *Mónica: Por su volumen.*
402. *Formadora: Claro, pero tú lo que pretendes es poner de manifiesto que la superficie, la parte que está delimitada por los lados del folio, es un rectángulo.*
403. *Mila No que el folio es un rectángulo.*
405. *Mónica: Claro, pero yo no puedo decir “esto [cogiendo un folio entre sus manos] es un rectángulo”.*
407. *Mónica: Puedo decir que si dibujo...*
408. *Formadora: No, si dibujo no, lo que está limitado en la figura sí que puedo decir que es un rectángulo.*
410. *Paula: Estaría mezclando magnitudes si dice que esto [coge un folio] es un rectángulo.*
411. *Formadora: ¿Mezclando magnitudes? Vamos a ver, las magnitudes son propiedades de los constructos, no mezclas magnitudes. Cuando tú defines un rectángulo no estás hablando de una magnitud.*
413. *Formadora: Puedes hablar de la superficie de un rectángulo, puedes hablar de las longitudes de sus lados, de las longitudes de sus diagonales, de las amplitudes de sus ángulos, pero eso no es un rectángulo, eso son características de un rectángulo.*

El episodio comienza con una reacción de Jorge a la definición de polígono que dio Alba en el episodio anterior. Ella comenzaba diciendo que un polígono es una *figura geométrica plana*, y específica, *o sea con dos dimensiones* [TF1.2A.9 U333]. El problema le surge a Jorge con la representación con material concreto del concepto polígono, ya que dicha representación *ya no estaría en dos dimensiones* [TF1.2A.10 U388]. Para ejemplificarlo, coge un estuche con forma de paralelepípedo. Él sabe que se puede utilizar una representación figural-icónica de un polígono (KoT, registros de representación), además, conoce el significado de figuras bidimensionales y tridimensionales (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Jorge sabe identificar formas planas en situaciones cotidianas (KoT, fenomenología y aplicaciones).

Juana apoya la intervención de Jorge diciendo que *es un cubo, muy finito, pero es un cubo* [TF1.2A.10 U394]. Interpretamos que ella comparte la duda de Jorge pues a pesar de querer representar una figura plana se está representando un cuerpo geométrico. Con su comentario muestra que sabe que el cubo tiene tres dimensiones (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos), aunque desconoce que el cubo es un cuerpo en el que todas las aristas tienen la misma longitud ya que dice que sería un cubo muy finito.

Mónica pregunta si representar un rectángulo con un folio sería un error, teniendo en cuenta el volumen [TF1.2A.10 U398, 400]. Se evidencia que Mónica sabe que la forma de un folio equivale a un rectángulo, y que este, aunque la longitud de una de sus dimensiones no se observa de manera ostensible, el folio es un cuerpo geométrico (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Al igual que Jorge, Mónica también identifica formas geométricas en situaciones cotidianas (KoT, fenomenología y aplicaciones).

Como reacción a la intervención de Mónica, Paula dice que *estaría mezclando magnitudes* [TF1.2A.10 U409]. Interpretamos que lo que la EPM quiere decir es que en el folio se pueden observar diferentes magnitudes: por ejemplo, la superficie del rectángulo que se observa en el folio o las longitudes de sus lados y de la altura del paralelepípedo que estaría representado en él. Es un indicio de que conoce que se pueden establecer relaciones entre las medidas de dichas magnitudes (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Tabla 4.30

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 3

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	<u>Definiciones, propiedades y sus fundamentos</u>	Saben que el contorno de un polígono es cerrado y está formado por segmentos (rectos) unidos por un vértice (U301, 333, 345).
		Saben que un polígono tiene el mismo número de lados que de vértices (U303).
		Conocen el concepto de diagonal y saben que pueden estar en diferentes posiciones respecto del polígono (U303).
		Saben identificar elementos del polígono y conocen la relación entre ellos (U312).
		Saben que los polígonos son figuras planas y que la línea poligonal que los delimita es simple (U320, 331, 333).
		Saben que los lados del polígono generan ángulos (U345).
		Saben diferenciar entre figuras bidimensionales y tridimensionales (U388).
		Saben que el cubo es una figura tridimensional (U394).
		Saben identificar las tres dimensiones de un folio (U400).
		Saben que se pueden establecer relaciones entre distintas magnitudes de objetos geométricos (U409).
	Registros de representación	Saben representar polígonos en un registro figurativo y conocen los obstáculos que dicha representación conlleva (U388).
	Fenomenología y aplicaciones	Saben identificar formas planas en situaciones cotidianas (U388, 400).

KPM	Uso de un lenguaje formal	Utilizan un lenguaje matemático para enunciar sus definiciones y argumentos (U301, 303, 333, 345).
	<u>Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones</u>	Saben que los términos usados en una definición matemática deben ser básicos o estar definidos previamente (U308).

4.3.2. Segundo fragmento. Resolución de la actividad propuesta por la maestra

El segundo fragmento del caso, como ya indicamos en el apartado correspondiente para el primer ciclo, se describe cómo los escolares representan, distintas figuras en la pizarra, como ejemplos de polígonos y de no polígonos, y la discusión que surge al examinar si cada figura pertenece o no a la categoría correspondiente.

En la tarea se plantean diferentes actividades relacionadas con el caso para que los EPM reflexionen sobre diversos elementos de conocimiento.

4.3.2.1. Actividad 4. Figuras posicionadas de forma incorrecta.

El enunciado de esta actividad es el resultado de la modificación sugerida para la actividad 2.1 de la primera implementación. En ese caso, se pedía que se representarían las figuras dibujadas por los estudiantes de Primaria corrigiendo los errores cometidos. Ahora, el enunciado es diferente, pero el objetivo es el mismo. Se solicita que determinen qué figuras están situadas en una zona que no le corresponde. Se espera, aunque no se pregunte de manera explícita, que justifiquen los cambios de posición de las figuras.

Actividad 4. Identifica las figuras que están situadas incorrectamente en la distribución que aparece en la Ilustración 1, considerando la definición a la que han llegado.

Para poder resolver la tarea, los EPM deben dominar el concepto de polígono para poder decidir si una figura está bien clasificada. Deben conocer los atributos relevantes del concepto para poder diferenciar entre ejemplos y no ejemplos del concepto (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Aunque no es el objetivo de la actividad, se puede esperar que puedan surgir comentarios de los EPM relacionados con la práctica matemática de clasificar (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático) o con el reconocimiento de concepciones erróneas de los estudiantes (KFLM, fortalezas y dificultades).

Tabla 4.31

Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 4

Código	Contenido del episodio
[TF1.2A.11 U415-456]	Inicio de segunda parte de tarea formativa
[TF1.2A.12 U457-479]	Polígonos simples y complejos
[TF1.2A.13 U480-511]	Polígonos diferentes
[TF1.2A.14 U512-541]	Actividad 4. Figuras mal situadas en polígonos
[TF1.2A.15 U542-559]	Actividad 4. Figuras mal situadas en no polígonos

[TF1.2A.12 U457-485] Polígonos simples y complejos.

459. Formadora: Y ¿se han ido dando cuenta de qué cosas?

460. Marco: Pues que por ejemplo que la cuatro, que es un círculo, pues dice uno de ellos que está acostumbrado a verlo con el triángulo, cuadrado, rectángulo y que por eso pensaba que era un polígono. Después han visto que no, lo han cambiado de lado.



463. Formadora: ¿Es un polígono?

464. Sonia: No.

467. Marco: Pues no podía ser un polígono, pero que sí después salió otro haciendo lo mismo con la P, que le pasa lo mismo que al círculo.

473. Juana: Una pregunta. El..., cuando te enuncia lo del 3 y el 12, le dice al final a la niña que no es un polígono, porque ella le pone el apellido de que es un polígono simple. ¿Por qué no les explica directamente ya...? O eso es...

474. Formadora: ¿Por qué no les explica qué?

475. Juana: Que sí que es un polígono, que el que estaba mal era su compañero que decía que no, que eso no era un polígono.

476. Formadora: ¿Sí que es un polígono? ¿El 3 y el 12 son polígonos?

477. Cati: No.

478. Juana: No es un polígono simple.

479. Formadora: Esto lo vamos a dejar aparcado para el resto..., en la actividad 5. [...]

Una vez finalizada la puesta en común de la resolución de las tres primeras actividades de la tarea formativa, en el episodio 11, la formadora plantea continuar con la lectura de la segunda parte del caso y la resolución de las actividades siguientes. No analizamos dicho episodio pues las intervenciones de los EPM van encaminadas a cuestiones de organización de trabajo o dudas puntuales sobre alguna expresión usada en el caso.

En el episodio 12, antes de responder a la actividad 4, los EPM reflexionan sobre lo expuesto en el segundo fragmento del caso. Así, Marco comenta lo ocurrido con el círculo, que el estudiante que lo dibujó lo puso como polígono, pero tras tratarlo en clase vieron que no lo es. Sonia sabe que el círculo *no* es un polígono [TF1.2A.12 U464], lo que evidencia que sabe que no cumple alguno de los atributos relevantes del concepto (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Marco, además, fijándose en la figura 10, que tiene forma de P, comenta que a esta figura *le pasa lo mismo que al círculo* [TF1.2A.12 U467]. Interpretamos que quiere decir que no es polígono porque tiene un lado curvo. Esto muestra su conocimiento sobre atributos relevantes del concepto polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).



Juana plantea una cuestión sobre las figuras 3 y 12, que representan líneas poligonales complejas. Cree que, a diferencia de lo que hace la maestra, se les debería de haber explicado en ese momento qué se entiende por polígono simple y polígono complejo. Plantea *por qué no les explica directamente ya que ... sí es un polígono* [TF1.2A.12 U473, 475]. Considera oportuno que en el momento en que surge si una línea poligonal compleja determina un polígono se debe tratar con los estudiantes. Hace una propuesta de estrategia de enseñanza (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Para Juana, es un polígono, aunque *no es un polígono simple* [TF1.2A.12 U478]. Conoce que, según algunos autores, los polígonos se clasifican en simples y complejos (O'Rourke, Suri y Tóth, 2017), según sea la línea poligonal que los delimita (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Cati piensa que las figuras 3 y 12 *no* [TF1.2A.12 U477] son polígonos, al considerar como tales solo a los simples (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).



[TF1.2A.13 U480-511] Polígonos diferentes.

480. Mara: La profesora al principio les dice que dibujen polígonos y dibujan siempre los mismos, el triángulo, el cuadrado..., y llega un momento en el que les dice que dibujen otros más complejos y, por ejemplo, en la figura 8 el niño o la niña dice que ha dibujado ...



482. Mara: ... un rectángulo diferente, y eso es que no ha comprendido bien lo que es un polígono porque se ha guiado por un rectángulo, y no ha visto que los lados curvos no...

483. Formadora: Ha intentado hacer un rectángulo diferente...

485. Formadora: ... y en vez de cambiarlo, por ejemplo, de posición, mantener las propiedades del rectángulo y cambiar de posición, lo que ha hecho ha sido modificar las propiedades del propio rectángulo. Sí.

486. Mónica: Que sí es verdad que, cuando la profesora dice diferentes, puede crear un poco de confusión porque claro, los niños a veces..., yo me pongo en situación de los niños y pueden decir, ¿qué es diferente? Lo que no he visto en el libro o diferente a cualquiera... [...] La palabra diferente ahí yo creo que puede provocar un poco de error.

487. Formadora: Puede provocar confusión, o quizás puede provocar un reto.

496. Formadora: Claro, y el problema de cuando dice voy a hacer algo diferente [...] ¿Qué es lo que hace el niño?

497. Mila Que tiende a hacer curvas...

500. Formadora: No está teniendo en cuenta las propiedades del polígono. Para hacer algo diferente, ¿qué tiene que hacer? Pues quitarle propiedades.

501. Mónica: A lo mejor tiene en cuenta la propiedad de la posición, que eso puede ser ya diferente.

502. Formadora: ¿Qué es la propiedad de la posición?

503. Mónica: Saber que una figura puede estar en diversas posiciones y es la misma figura.

506. Formadora: O sea, ¿que la posición es un atributo...?

507. Mila Irrelevante.

509. Mila [...] Para ellos es que tienen hueco o que no tienen hueco, que no tienen el concepto de polígono abierto o polígono cerrado.

511. Mónica: Igual hay alumnos que sí tienen el concepto de vértice claro, pero otros los llaman picos. Entonces no sé si eso es porque hay diferentes niveles dentro del aula que unos reconocen que los polígonos tienen vértices y otros dicen que tienen picos para adentro, y entonces no es un polígono.

Los EPM continúan con el análisis del caso, sin responder aún a las actividades planteadas. Mara cree que los estudiantes empiezan a representar algunas figuras de manera errónea a partir del momento en el que la profesora les pide que sean más arriesgados a la hora de representar las figuras, y que dibujen figuras menos familiares. Ella se fija en la figura 8, que la han representado en la parte de polígonos, y comenta que el estudiante que la ha dibujado *se ha guiado por un rectángulo, y no ha visto que los lados curvos no...* [TF1.2A.13 U482]. Sabe que la figura no es un polígono porque no todos sus lados son rectos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, la relación que establece entre ambas figuras sirve de indicio sobre su conocimiento de los atributos del rectángulo (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Las dos figuras son cuadriláteros con lados opuestos de igual longitud y forma (ver Figura 4.29).



Figura 4.29 Rectángulo vs figura 8

Mónica, por otra parte, considera que el que la profesora pida a los estudiantes que representen figuras diferentes a las comunes *puede crear un poco de confusión, puede provocar un poco de error* [TF1.2A.13 U486]. La EPM sabe que para los estudiantes la propuesta de la maestra puede ser un obstáculo para identificar las figuras que debe representar (KFLM, fortalezas y dificultades).

Por otra parte, Mila indica que los estudiantes, para hacer figuras diferentes a las habituales *tienden a hacer curvas* [TF1.2A.13 U497]. Comprende, por tanto, cómo los estudiantes pueden responder al reto propuesto por la maestra con relación a la representación de polígonos no habituales (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). Asimismo, Mónica cree que los estudiantes pueden pensar que si se cambia la figura de posición se genera una nueva figura [TF1.2A.13 U501]. En esta intervención observamos conocimiento sobre posibles estrategias de los estudiantes a la hora de resolver la actividad (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). Aunque ella sabe que *una figura puede estar en diversas posiciones y es la misma figura* [TF1.2A.13 U503]. Es decir, Mónica comprende que las características de una figura no se ven alteradas por un cambio en su posición (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Mila sabe que la posición de una figura es un atributo *irrelevante* [TF1.2A.13 U507], entendido como aquella propiedad no necesaria para definir el concepto (Vinner, 1991). La EPM sabe que a la hora de definir un concepto hay atributos que solo lo cumplen algunos ejemplos, pero no es un atributo relevante en la definición (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones matemáticas). En la Figura 4.30 está representado un mismo polígono en distintas posiciones.

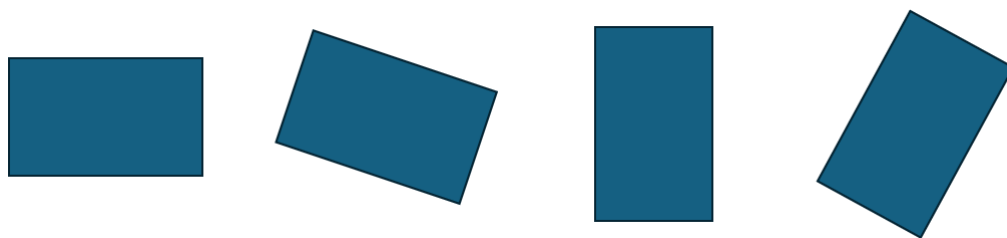


Figura 4.30 Distintas posiciones de un mismo polígono

Antes de identificar las figuras que están dibujadas en la zona incorrecta, Mila hace una apreciación sobre el lenguaje utilizado por los estudiantes. Ella dice que *para ellos es que tienen hueco o que no tienen hueco, que no tienen el concepto de polígono abierto o polígono cerrado* [TF1.2A.13 U509]. Mila conoce el lenguaje que utilizan los estudiantes de esta etapa (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

De igual forma, Mónica observa que *hay alumnos que sí tienen el concepto de vértice claro, pero otros los llaman picos* [TF1.2A.13 U511]. Identifica el vocabulario que utilizan los estudiantes para hacer referencia a uno de los elementos del polígono (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). Además, esta información le permite plantear que en clase *hay diferentes niveles* [TF1.2A.13 U511] de razonamiento geométrico, atendiendo al lenguaje que utilizan distintos estudiantes. Este comentario es una evidencia de que conoce que los estudiantes van pasando por diferentes niveles de razonamiento tal y como se trata en la teoría de van Hiele (KFLM, teorías de aprendizaje).

[TF1.2A.14 U509-542] Actividad 4. Figuras mal situadas en polígonos.

512. Formadora: *¿Cuáles serían las figuras que están dentro del conjunto de polígonos que sacaríamos?*
513. Cati: *Yo de polígonos sacaría el 4, el 9 y el 3.*
516. Alumnos: *Y el 8.*
517. Formadora: *Y el 8. ¿Por qué cada uno de ellos?*
518. Cati: *Porque no cumplen las propiedades.*
519. Formadora: *El 4.*
520. Marco: *No tiene vértices.*
528. Marco: *Y el 3.*
529. Sonia: *De un vértice salen más de dos lados.*
530. Formadora: *Tal y como está definido, tal y como lo definen ellos, Juana, dicen..., de cada vértice salen dos lados. ¿Qué le ocurre al número 3?*
531. Sonia: *Que de un vértice salen 4 lados.*

537. Sonia: *¿Y si el niño te dice que eso son dos triángulos juntos y los triángulos son polígonos? ¿Ahora qué le dices?*

538. Formadora: *Bien, entonces no es un polígono.*

Después de la reflexión sobre el segundo fragmento del caso los EPM pasan a compartir las respuestas a la actividad 4, en la que tienen que identificar las figuras que están posicionadas de manera incorrecta en las dos zonas. En este episodio analizamos las respuestas que reconocen las figuras que no son polígonos, pero algún estudiante las ha considerado polígono.

Cati interviene diciendo que *de polígonos sacaría el cuatro, el nueve y el tres* [TF1.2A.14 U513] (ver Figura 4.31). Otros EPM añaden a ese listado *el ocho* [TF1.2A.14 U516]. Reconocen todas las figuras que, por una u otra razón, no son polígonos y, por lo tanto, habría que cambiarlas de zona (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, están estableciendo una clasificación del conjunto de figuras representadas en la Figura 4.31 en dos grupos: polígonos y no polígonos (KoT, procedimientos).

Algunos de los argumentos que utilizan los EPM para justificar que la figura no es polígono son los siguientes. Marco dice que la figura 4 no es polígono porque *no tiene vértices* [TF1.2A.14 U520]. Sonia añade que la figura 3 no es polígono porque *de un vértice salen más de dos lados, salen cuatro lados* [TF1.2A.14 U529, 531]. En cada caso enuncian un atributo relevante del concepto de polígono que no verifican las figuras señaladas para justificar que cada una de ellas no es polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Los EPM saben que, si un objeto no verifica algún atributo relevante de un concepto, no sería un ejemplo de este (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

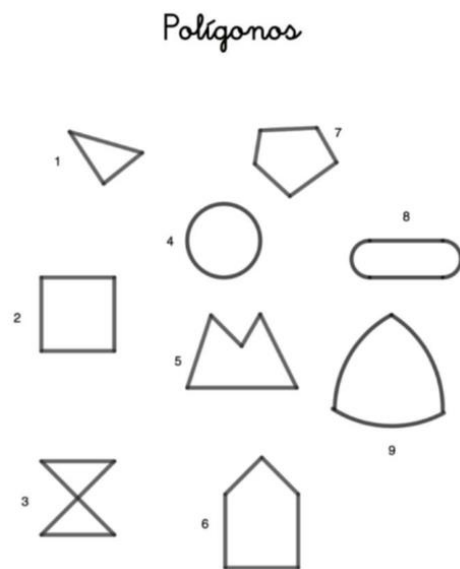


Figura 4.31 Figuras representadas por el alumnado en la parte de polígonos

Al final de este episodio Sonia plantea, refiriéndose a la figura 3 representada en la zona de polígonos, que algún estudiante podría decir que esa figura *son dos triángulos juntos y los triángulos son polígonos* [TF1.2A.14 U537]. Sonia indica la estrategia que podría utilizar un estudiante a la hora de analizar figuras como la indicada, al considerarla como la unión de diferentes polígonos (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático).

[TF1.2A.15 U542-559] Actividad 4. Figuras mal situadas en no polígonos.

542. Formadora: [...] ¿Y hay alguna pieza, alguna figura, de los no polígonos que tendríamos que pasar a los polígonos?

545. Alumnos: La 11, la 15.

548. Formadora: Y ahora se podría establecer una comparación entre la 11...

550. Formadora: ... y la 5 y llegar a una conclusión sobre por qué se ha puesto una en un lado...

557. Marco: Yo iba a decir algo de lo que ha dicho Paula, de lo del tema de las diagonales, que no conciben todavía que pueda existir una diagonal por fuera.

559. Marco: Que algunos a lo mejor sí, como el que ha pintado el 5, pero el del 11 no concibe que...

En la parte de no polígonos los EPM identifican las dos figuras que están mal posicionadas. Así, varios de ellos dicen que *la 11 y la 15* son polígonos (ver Figura 4.32) [TF1.2A.15 U545]. Saben que ambas verifican los atributos relevantes de dicho concepto (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

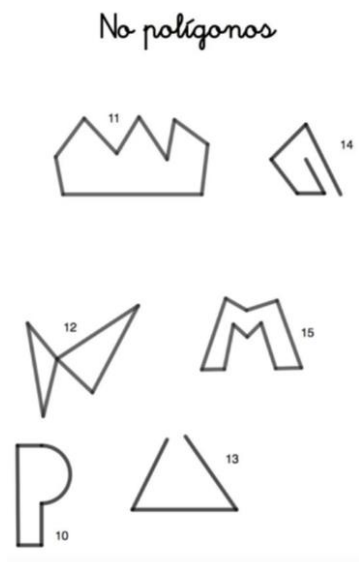


Figura 4.32 Figuras representadas por el alumnado en la parte de no polígonos

La formadora propone establecer una comparación entre las figuras 5 y 11, que son figuras con características equivalentes situadas en grupos distintos para intentar determinar por qué las han considerado de esta forma. Aunque no se trata esta cuestión al intervenir un EPM con otra cuestión.

Para finalizar con la resolución de la actividad 4, Marco incide en el tema de las diagonales, que trató Paula en uno de los primeros episodios de este segundo fragmento. Este EPM considera que los estudiantes *no conciben todavía que pueda existir una diagonal por fuera* [TF1.2A.15 U557]. Marco sabe que algunos estudiantes pueden tener dificultad en identificar diagonales que no sean interiores (KFLM, fortalezas y dificultades).

Tabla 4.32
Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 4

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	Procedimientos	Saben clasificar figuras atendiendo a si son o no polígonos (U513, 516).
		Saben que el círculo no es un polígono porque no cumple algún atributo relevante (U464).
		Saben que las figuras con lados curvos no son polígonos (U467, 482).
	<u>Definiciones, propiedades y sus fundamentos</u>	Saben que se puede distinguir entre polígonos simples y complejos (U475, 478).
		Saben que un atributo de los polígonos (simples) es que los lados no se intersecan (U477).
		Saben que los cambios en la posición de una figura no modifican los atributos que la caracterizan (U503).
		Saben identificar figuras que no son polígonos por no verificar algún atributo relevante (U513, 516).

		Saben que el tener vértices y que en cada vértice confluyan solo dos lados son atributos relevantes del concepto polígono (529, 531).
		Saben reconocer polígonos entre un conjunto de formas geométricas (U545).
KPM	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones matemáticas	Saben que la posición es un atributo irrelevante en la definición de figura geométrica (U507).
KFLM	Teorías de aprendizaje	Saben que los estudiantes pasan por diferentes niveles de razonamiento y que una forma de detectarlo es teniendo en cuenta el lenguaje utilizado (U511).
	Fortalezas y dificultades	Saben que el plantear a los estudiantes que representen polígonos <i>diferentes</i> a los habituales los puede llevar a cometer errores (U486).
		Saben que los estudiantes pueden tener dificultad en identificar diagonales no interiores (U557).
		Saben que los estudiantes a la hora de representar figuras <i>diferentes</i> a las habituales utilizarán lados curvos (U497).
	Formas de interacción con un contenido matemático	Saben que los estudiantes pueden creer que al cambiar de posición una figura se obtiene otra diferente (U501).
		Saben que los estudiantes, para hacer referencia a líneas poligonales abiertas o cerradas como figura, hablan de figuras sin o con hueco (U509).
		Saben que hay estudiantes que llaman picos a los vértices de un polígono (U511).
		Saben que los estudiantes podrían interpretar los polígonos complejos como unión de polígonos simples (U537).
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Saben que conviene aclarar los términos de polígono simple y complejo en el momento en que surgen (U473,475).

4.3.2.2. Actividad 5. Atributos de una definición matemática.

Para resolver esta actividad los EPM disponen de un documento anexo en el que se les explica, de manera resumida, en qué consisten los atributos que debe cumplir una definición matemática²¹ (Escudero et al., 2014).

Actividad 5. Teniendo en cuenta la tabla 1²² analizad si la definición a la que han llegado los estudiantes cumple los atributos de una definición matemática.

Los EPM deben entender lo que significa cada atributo y deben saber si una definición verifica o no cada uno de ellos. Es decir, el conocimiento pretendido con esta actividad está relacionado con KPM (condiciones necesarias y suficientes para enunciar una definición matemática).

²¹ Jerarquía, no circularidad, minimalidad, no ambigüedad, no contradictoria, invariante y equivalencia.

²² La tabla se les facilitaba en un anexo a la tarea formativa

Además de la definición a la que llegan los estudiantes, la formadora propone analizar las definiciones aportadas por los EPM en la actividad 3.

El análisis de la parte de la clase dedicada a la resolución y puesta en común de esta actividad se divide en cinco episodios. En alguno de ellos se trata sobre atributos específicos de una definición matemática. En otros se analizan las definiciones de los EPM o la de los estudiantes. Uno de los episodios se centra en la identificación del nivel de razonamiento de van Hiele de algunas EPM, atendiendo a las definiciones aportadas por ellas.

Análisis

Tabla 4.33

Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 5

Código	Contenido del episodio
[TF1.2A.16 U560-601]	Minimalidad
[TF1.2A.17 U602-625]	Invariante bajo el cambio de representación
[TF1.2A.18 U626-713]	Análisis de las definiciones de algunas EPM
[TF1.2A.19 U714-745]	Nivel de razonamiento geométrico de algunas EPM
[TF1.2A.20 U746-814]	Atributos de la definición dada por los estudiantes

[TF1.2A.16 U560-601] Minimalidad.

563. Formadora: ¿Hemos entendido la tabla que aparece en el anexo? ¿Qué no entiendes, Mavi?

564. Mavi: La minimalidad.

565. Formadora: ¿Paula tú puedes contestar a eso?

568. Paula: [...] Que uses los atributos relevantes, no tengan irrelevantes. Es decir, que es igual que ponga el color del polígono porque eso no te aporta ninguna propiedad geométrica nueva, no puedes deducir nada de eso.

570. Mila: Yo pienso que se empieza desde lo mínimo, y a partir de ahí ya vas sacando las características..., por ejemplo... Al decir que es una figura plana cerrada con lados rectos, pues esos lados forman vértices, y a partir de esos vértices se generan los lados.

571. Mónica: Pero lo de no redundante se refiere a que no se repite...

575. Mónica: Que no repita una cualidad dando otro nombre. O sea, que si dice que son rectos luego no vuelva a decir...

576. Mila: Que no son curvos.

585. Formadora: Van Hiele. ¿Qué ocurría en esos niveles? ¿En los niveles de van Hiele qué ocurría?

586. Paula: Que primero lo relacionaba con la realidad.

588. Formadora: [...] Y luego ¿qué pasaba?

589. Paula: *Que analizaba la figura nada más que en sí, no la relacionaba con las demás.*
590. Formadora: *Y cuando las relacionaba con las demás y tenía cierta capacidad de análisis, se caracterizaba por algo en concreto que tenía que ver con ese atributo de minimalidad.*
591. Paula: *Relaciones interfigurales, ¿no?*
593. Formadora: *Pero esas deducciones me llevaban precisamente ¿a qué?*
595. Mónica: *A ir descartando...*
598. Formadora: *Claro, y darme cuenta de que, si tengo pocas características, pero de ellas... se deducen otras..., entonces eso sería la minimalidad.*

La formadora plantea si hay alguna duda al respecto, y una EPM pide que se aclare lo que significa el atributo de *minimalidad*. Paula le explica a su compañera lo que quiere decir ese atributo. Para ello le dice que en la definición *uses los atributos relevantes, no tengan irrelevantes* [TF1.2A.16 U568]. Es decir, esta EPM sabe que en una definición matemática no se debe incluir propiedades que solo verifiquen algunos ejemplos o que se puedan deducir de otras características ya incluidas en la definición (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

Mila, añade que el que una definición sea mínima implica que *se empieza desde lo mínimo, y a partir de ahí ya vas sacando las características* [TF1.2A.16 U570]. Para puntualizar, añade un ejemplo relacionado con el concepto polígono, indicando que *al decir que es una figura plana cerrada con lados rectos, pues esos lados forman vértices* [TF1.2A.16 U570]. Con ello, interpretamos que quiere decir que en la definición solo se incluyen los atributos imprescindibles, de los cuales se pueden deducir otras propiedades del concepto (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Con el ejemplo, además, muestra conocimiento sobre atributos relevantes del polígono y elementos de este (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Como en la tabla que se les facilita a los EPM se indica que el atributo de minimalidad quiere decir que la definición debe ser *no redundante*, que *ninguna característica podrá deducirse del resto*, Mónica lo aclara diciendo que lo que significa es que *no se repita una cualidad dando otro nombre* [TF1.2A.16 U575], y lo ejemplifica diciendo que si en la definición *se dice que los lados son rectos* no hace falta decir *que no son curvos* [TF1.2A.16 U575, 576]. Esta EPM conoce lo que significa que una definición no sea redundante (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

La formadora relaciona lo que se está tratando en clase con la Teoría de van Hiele, sobre la que han trabajado en clases previas a la implementación de la tarea formativa. Quiere que recuerden cómo es el proceso de definición atendiendo a los diferentes niveles de razonamiento geométrico identificados en el modelo. Así, Paula dice que *primero lo relacionaba con la realidad* [TF1.2A.16 U586], refiriéndose a que los estudiantes que están en el primer nivel de razonamiento a la hora de definir una forma la relacionan con objetos reales. Esta misma EPM recuerda que los estudiantes de segundo nivel *analizan la figura nada más que en sí, no la relacionan con las demás* [TF1.2A.16 U589]. Con esto quiere decir que el análisis que hacen es fijándose en los elementos de la propia figura. Ya en el tercer nivel, sabe que los estudiantes son capaces de establecer *relaciones interfigurales* [TF1.2A.16 U591]. Paula muestra conocimiento sobre el modelo de van Hiele (KFLM, teorías de aprendizaje).

[TF1.2A.17 U602-625] Invariante bajo el cambio de representación.

- 602. Formadora: *¿Alguna otra cosa que os resulte ambigua?*
- 603. Sonia: *Invariante...*
- 606. Formadora: *¿Cuáles eran las representaciones que usábamos?*
- 607. Sonia: *Las del modelo de Lesh.*
- 608. Formadora: *¿Qué había?*
- 609. Sonia: *Símbolo escrito, lenguaje hablado, material concreto, diagrama... y [...]*
- 611. Sonia: *Situaciones reales.*
- 612. Formadora: *Vale, pues lo que quiere decir ahí, ahora teniendo en cuenta esas representaciones, ¿qué pensáis que puede ser?*
- 613. Sonia: *Ah, vale. El que, si lo pones, por ejemplo, si yo un polígono lo dibujo ahí [en la pizarra] y después lo ve en una figura es lo mismo.*
- 614. Formadora: *O si yo hago un dibujo de un polígono, una representación gráfica de un rectángulo...*
- 617. Sonia: *Y después le enseñas un folio [lo coge en su mano], es la misma figura.*
- 618. Formadora: *Por ejemplo, aunque ahí habría que discutir si eso son definiciones o no, pero...*

En este episodio Sonia plantea una duda sobre lo que significa que una definición matemática sea invariante bajo el cambio de representación. La formadora pregunta por las distintas formas en las que se pueden representar los objetos matemáticos. Sonia conoce el *modelo de Lesh* (Lesh et al., 1987) [TF1.2A.17 U591], y los distintos registros de representación que este autor considera: *registro escrito, lenguaje hablado, material*

concreto, diagrama y situaciones reales [TF1.2A.17 U609] (KoT, registros de representación). Intuimos que conoce la implicación que tiene el uso de los distintos registros de representación y las traslaciones que se pueden establecer entre ellos para construir significado (KFLM, teorías de aprendizaje).

Sonia reelabora la información que tiene y es capaz de darle significado a lo que quiere decir el atributo de invariante, así expone que, *si un polígono lo dibujo en la pizarra y después lo ve en una figura, es lo mismo* [TF1.2A.17 U609]. Utiliza el ejemplo de un polígono representado a través de un diagrama y en una situación real, se está haciendo referencia al mismo objeto matemático. Conoce esos dos registros de representación para el polígono, además, podemos considerar un indicio de que sabe establecer traslaciones entre distintos registros de representación de dicho concepto (KoT, registros de representación). Por último, Sonia concreta con el rectángulo, indicando que si se hace una representación gráfica *de un rectángulo y después le enseñas un folio es la misma figura* [TF1.2A.17 U615, 617]. En esa intervención se observa una evidencia de que conoce dos registros de representación de un rectángulo (KoT, registros de representación). Además, identifica figuras planas en situaciones cotidianas (KoT, fenomenología y aplicaciones).

[TF1.2A.18 U626-713] Análisis de las definiciones de algunas EPM.

626. Formadora: [...] Elegimos alguna de las definiciones que hemos dado. Vemos si todas cumplen la minimalidad, por ejemplo.

627. Alba: No, la mía no.

628. Formadora: Alba, la primera que tú diste..., figura geométrica plana, es decir, dos dimensiones... Ahí estamos...

629. Juana: Redundando.

630. Formadora: Redundando. Cerrada, ahí seguimos añadiendo atributos que no redundan, pero sus lados se unen con un vértice..., pretendías que fuese explicativo de cerrada...

631. Gabriel: Redundante, por lo tanto.

632. Formadora: Claro, entonces, le faltarían cosas... ¿cumpliría la minimalidad si le quitáramos el paréntesis y quitáramos el “es decir”? ¿qué no cumpliría?

635. Gabriel: La jerarquización.

638. Formadora: La jerarquización, ¿por qué no? ¿Qué es la jerarquización?

639. Gabriel: Que los términos en los que se base la definición deben estar definidos, por ejemplo, si dimensión no lo hemos definido previamente...

642. Formadora: ¿Qué otra podría tener un ejemplo de que la jerarquía a lo mejor...?

643. *Marco: ¿La de Paula, por ejemplo?*
644. *Sonia: Por las diagonales, por ejemplo.*
646. *Formadora: ¿Dónde está definida una diagonal?*
649. *Paula: En polígonos.*
650. *Sonia: Entonces no cumple el de no circularidad.*
676. *Formadora: Las diagonales aparecen y es un dato que todavía no habríamos definido porque para definir diagonal...*
677. *Mónica: Hay que definir polígono.*
680. *Formadora: Por otro lado, la minimalidad.*
681. *Sonia: Que no sea redundante y esa yo creo que no la cumple.*
682. *Formadora: Que no sea redundante, y no es tanto redundante como dar...*
683. *Sonia: Cosas de más.*
687. *Formadora: Por ejemplo, en este caso, cuando dice que las diagonales pueden estar dentro o fuera del polígono...*
688. *Sonia: Eso es obvio, si sabes lo que es una diagonal.*
694. *Sonia: La diagonal puede estar fuera o dentro del polígono.*
695. *Formadora: ¿Por qué? Porque la diagonal se define cómo...*
696. *Sonia: La unión de dos vértices no contiguos.*
697. *Formadora: [...] y no se distingue entre si el polígono es...*
701. *Paula: Cóncavo.*
702. *Formadora: Cóncavo o convexo, ¿no? [Contestan algunos alumnos]. Que es el caso en el que podrían estar..., en el caso de ser...con...*
703. *Gabriel: Cóncavo.*
704. *Formadora: Cóncavo, es el caso en el que las diagonales...*
705. *Sonia: Están fuera.*
706. *Formadora: Podrían estar fuera o...*
707. *Sonia: Dentro.*
708. *Formadora: O parcialmente... fuera.*
710. *Formadora: Porque Cati, por ejemplo, decía que era lo que decía Sonia más lo que decía Paula más... que tienen ángulos.*
713. *Cati: Es redundante, pero son características de más...*

Como paso previo a la resolución de la actividad 5, en la que se plantea si la definición que dan los estudiantes cumple los atributos que deben verificar una definición matemática, la formadora propone analizar las definiciones dadas por los propios EPM.

Alba, que definió polígono como *figura geométrica plana, es decir, dos dimensiones, cerrada que sus lados se unen con un vértice* [TF1.2A.9 U333], indica que su definición no cumple el atributo de minimalidad [TF1.2A.18 U627]. Juana observa que al aclarar

que el ser plana quiere decir que es una figura de dos dimensiones se está *redundando* [TF1.2A.18 U629]. Por otra parte, Gabriel también observa redundancia al decir, por una parte, que es cerrada, y añadir que los lados se unen con un vértice [TF1.2A.18 U631]. Estos EPM saben que la definición al dar ciertas características que podrían deducirse de otras dadas tiene información redundante, y por tanto no cumple el atributo de minimalidad (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Además, saben que las figuras planas tienen dos dimensiones, y que en las figuras cerradas los lados se unen por los vértices (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

La formadora plantea qué ocurriría si a la definición aportada por Alba se le quitaran las propiedades que se deducen de otras de las dadas. Gabriel considera que en ese caso no cumpliría el atributo de *jerarquización* [TF1.2A.18 U635], *si dimensión no se ha definido previamente* [TF1.2A.18 U639]. Basa su respuesta en que sabe que la definición cumple el atributo de jerarquía si *los términos en los que se base la definición están definidos* [TF1.2A.18 U639]. Es decir, Gabriel sabe que los términos que se usan en una definición matemática deben ser básicos o estar definidos previamente (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar una definición).

Sonia considera que la definición de polígono que dio Paula no cumple el atributo de jerarquía. Ella dijo que los polígonos *suelen tener el mismo número de lados que de vértices y que además de esto tienen diagonales que pueden encontrarse dentro o parcialmente fuera de la figura* [TF1.2A.9 U303]. Saben que la diagonal es un elemento que se define en los *polígonos* [TF1.2A.18 U649] (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Para que la definición de polígono dada por Paula pudiese considerarse que cumple el atributo de jerarquización, deberían de haber definido el concepto de diagonal. Pero para definir el concepto de diagonal *hay que definir polígono* [TF1.2A.18 U677]. En ese sentido, Sonia asegura que la definición de Paula *no cumple* tampoco el *atributo de no circularidad* [TF1.2A.18 U650]. Es decir, sabe qué condiciones se le deben exigir a una definición matemática para considerar que no es circular (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar una definición).

Sonia añade que la definición aportada por Paula es *redundante*, en el sentido de que *da cosas de más* [TF1.2A.18 U681, 683]. Quiere decir que en la definición de su compañera da propiedades que pueden deducirse de otras dadas. Es un indicio de que sabe la relación

que existe entre algunas de las propiedades de los elementos del polígono que aparecen en la definición de Paula (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

La formadora toma como ejemplo el que Paula incluya en su definición de polígono que *las diagonales pueden estar dentro o fuera del polígono* [TF1.2A.18 U687]. Sonia afirma que *eso es obvio si sabes lo que es una diagonal* [TF1.2A.18 U688], y define diagonal como *la unión de dos vértices no contiguos* [TF1.2A.18 U696], por lo que deduce el que pueda *estar fuera o dentro del polígono* [TF1.2A.18 U694]. Sonia, con esta intervención, muestra conocimiento sobre el concepto de diagonal de un polígono y sus propiedades (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, saben que en los polígonos en los que las diagonales podrían estar *dentro, fuera* [TF1.2A.18 U705, 707] o parcialmente fuera son cóncavos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

El episodio finaliza con el análisis de la definición dada por Cati, que a lo que ya había dicho Sonia y Paula añade *que además forman ángulos..., los vértices y los lados* [TF1.2A.9 U312]. Es la propia Cati la que afirma que esta definición no cumple el atributo de minimalidad porque *es redundante* [TF1.2A.18 U713] por dar características que se pueden deducir de otras ya dadas (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

[TF1.2A.19 U714-745] Nivel de razonamiento geométrico de algunas EPM.

714. Formadora: *¿En qué nivel de van Hiele estarían estas definiciones? [...]*
715. Gabriel: *En el dos.*
717. Paula: *En el tres, ¿no?*
718. Formadora: *¿En el tres? Yo quiero que me digáis por qué.*
719. Sonia: *¿Podemos recordarlo?*
721. Paula: *En el uno hace mención a lo que ve, por ejemplo, una mesa o un cuaderno, etc.*
723. Paula: *En el dos es la relación que hace intrafigurales, o sea nada más tiene en cuenta una figura. En el tres, ya tiene relación interfigural.*
724. Formadora: *Bueno, en el tres empiezan a hacerse formalizaciones más matemáticas, pero sobre todo se pone de manifiesto la relación interfigural. En este caso, entonces, claramente, todas estas estarían... ¿en qué nivel?*
725. Jorge: *En el tres.*
726. Formadora: *¿En el tres? ¿Por qué en el tres, Jorge?*
727. Jorge: *Pues porque estamos hablando de propiedades, ¿no?*
728. Formadora: *Estás hablando de propiedades, pero cuando habla de propiedades lo hace de una manera determinada.*

729. *Mónica: Yo creo que obvia las que ya están..., es capaz de distinguir lo que no y lo que sí le sirve, ¿no?*

730. *Formadora: ¿Sí? O sea, cuando en una definición decimos que un polígono es la unión de varios segmentos por un vértice y son figuras cerradas y además tienen el mismo número de vértices que de lados, y tienen diagonales que pueden estar fuera o dentro y además tienen ángulos...*

731. *Mónica: No..., digo, porque él dice en el nivel tres.*

733. *Mónica: En el nivel tres es capaz de hacer eso. Yo creo que están en el nivel dos porque todavía no es capaz de distinguirlo.*

La formadora aprovecha el análisis que se está haciendo de las definiciones dadas por los EPM para determinar el nivel de razonamiento geométrico según la teoría de van Hiele. No hay consenso, algunos EPM, como Gabriel, consideran que las definiciones son propias del *nivel dos* [TF1.2A.19 U715], sin embargo, otros EPM, como Paula, piensan que están *en el tres* [TF1.2A.19 U717]. En ningún caso justifican el por qué consideran que es un nivel u otro. La formadora pide que argumenten su respuesta.

Para ello, Paula recuerda qué caracteriza a las definiciones dadas por estudiantes de los tres primeros niveles de razonamiento. Así dice que *en el (nivel) uno hace mención a lo que ve, por ejemplo, una mesa o un cuaderno* [TF1.2A.19 U721], se entiende que para describir a un rectángulo. *En el dos la relación que hace es intrafigural, o sea, nada más tiene en cuenta una figura. En el tres ya tiene relación interfigural* [TF1.2A.19 U723]. Aunque se podría detallar, Paula muestra conocimiento sobre la forma en la que una persona da una definición de un objeto matemático en función del nivel de razonamiento geométrico en el que está (KFLM, teorías de aprendizaje).

A pesar de este apunte, Jorge sigue pensando que están *en el tres* [TF1.2A.19 U725] *porque están hablando de propiedades* [TF1.2A.19 U727]. No tiene en cuenta en qué forma se enuncian esas propiedades. Es decir, si da un listado exhaustivo de propiedades que verifica el concepto o se limita a dar los atributos relevantes.

Mónica considera que las definiciones de sus compañeras *están en el nivel dos porque todavía no se es capaz de distinguir* [TF1.2A.19 U733] que hay propiedades que pueden deducirse de otras dadas. Especifica que *en el nivel tres es capaz de hacer eso* (saber qué propiedades se deducen de qué otras), *de distinguir lo que sí le sirve* [TF1.2A.19 U729]. Mónica identifica el nivel de razonamiento geométrico de unas compañeras atendiendo a

cómo definen (KFLM, teorías de aprendizaje). Sabe que en las definiciones dadas hay información redundante, que puede deducirse de propiedades expuestas en la definición (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

[TF1.2A.20 U746-814] Atributos de la definición dada por los estudiantes.

746. Formadora: La definición que dieron los alumnos..., la tenéis ahí delante. Juana...
747. Juana: Figura plana cerrada con lados rectos y vértices, cada uno con dos lados.
753. Formadora: ¿Es jerárquica?
754. Alumnos: Sí.
756. Juana: Porque empieza a hablarte de lo general de la figura, que está en dos dimensiones, por eso es plana. Es cerrada porque todos los lados son continuos.
757. Formadora: O sea, en realidad es jerárquica porque los conceptos que utiliza...
758. Alba: Los conceptos son básicos.
763. Formadora: [...] ¿Es mínima?
765. Sonia: Yo he puesto que sí.
766. Mavi: Yo creo que no.
768. Mavi: Porque de un vértice siempre salen dos lados, ¿no?
769. Juana: No tiene por qué, lo vimos el otro día con lo de los polígonos complejos.
772. Formadora: Mirad, si vemos la lista de objetos... ¿aquí hay alguno del que salgan 4?
773. Alumnos: Sí el 3 y el 12.
775. Juana: Lo aclaramos el otro día que se referían en este caso a polígonos simples, que en este caso serían complejos.
776. Formadora: Claro [...]. El hecho de que sea simple por definición es que de cada vértice solo salen dos lados.
778. Formadora: Ahora, ¿la no ambigüedad?
779. Sonia: Yo he puesto que la cumple porque no permite que se interprete de otra manera.
780. Formadora: Vale, yo aquí es donde tengo un comentario que haceros, dice... es una figura plana, cerrada, con lados que son rectos y vértices cada uno con dos lados. ¿Tal y como está escrito implica que ningún lado puede ser curvo?
781. Alumnos: Sí.
782. Sonia: Lados rectos.
783. Juana: Con lados que son rectos.
784. Formadora: Con lados que son rectos. Con todos los lados rectos.



786. Formadora: *Entonces si yo me fijo, por ejemplo, en la P. ¿Recordáis cómo era la P?*

787. Alumnos: *Sí.*

789. Formadora: *Pues la P tiene lados rectos y otros que son curvos. [...]*

793. Formadora: *¿No contradictoria? Es no contradictoria, ¿no? Y podríamos establecer otras que fueran equivalentes, o sea, cualquier otra podría ser equivalente a esta, quitando ese detalle que hemos dicho sobre el todo, ¿no?*



797. Sonia: *Puede haber otra definición equivalente. Más completa.*

801. Sonia: *Por ejemplo, por lo de todos los lados.*

802. Formadora: *Por la ambigüedad podríamos decir que no es completa. ¿Podríamos establecer una equivalente a esta? ¿Creéis que alguna de las que disteis vosotros sería equivalente a esta? O las que disteis vosotros le faltaba algún detalle.*

803. Matilde: *La que..., creo que..., en el sentido de..., por simpleza..., hablo de la de Julio que fue la que fue un poco más...*

804. Julio: *Decía que es una figura plana cerrada con líneas rectas.*

807. Formadora: *Figura plana cerrada con líneas rectas, qué le falta, como mínimo.*

809. Formadora: *Que de cada vértice...*

810. Sonia: *Salgan dos lados.*

811. Marco: *Es lo único que le faltaría, por eso digo que sería más cercana...*

Respondiendo a la actividad cuatro, los EPM junto a la formadora analizan la definición dada por los estudiantes. Para ello repasan los distintos atributos que debe verificar una definición matemática. Los estudiantes definen polígono como figura plana cerrada con lados rectos y vértices, cada uno con dos lados.

Los EPM consideran que la definición cumple el atributo de jerarquía [TF1.2A.20 U754]. Juana lo justifica diciendo que *empieza a hablar de lo general de la figura, que es plana, cerrada* [TF1.2A.20 U756], es decir, como explica Alba, se basa en *conceptos básicos* [TF1.2A.20 U758]. Las EPM conocen que el atributo de jerarquía de una definición matemática implica que los términos que se usan deben ser básicos o estar definidos previamente (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Además, conocen las propiedades que se utilizan para definir el concepto de polígono. Así, Juana dice *está en dos dimensiones, por eso es plana o es cerrada porque todos los lados son continuos* [TF1.2A.20 U756] (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

En cuanto al atributo de minimalidad, que implica que la definición no sea redundante, es decir, ninguna característica pueda deducirse de otras, no hay consenso. Mavi, por ejemplo, justifica que la definición dada por los estudiantes no cumple este atributo

porque *de un vértice siempre salen dos lados* [TF1.2A.20 U768]. Considera que dar esta característica es redundante al estar pensando en polígonos simples, quizás relacionándolo con su imagen del concepto polígono. Es Juana la que explica que es necesario explicitar esta propiedad de los polígonos para diferenciarlos de los *polígonos complejos* [TF1.2A.20 U769, 775]. Juana muestra conocimiento sobre polígonos simples y complejos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Sobre el atributo de no ambigüedad surge controversia. Los EPM consideran que sí lo verifica. Por ejemplo, Sonia lo justifica diciendo que *no permite que se interprete de otra manera* [TF1.2A.20 U779]. Ellos consideran que al decir en la definición *con lados que son rectos* implica que todos los lados de la figura son rectos. La formadora plantea que podría interpretarse como que algunos de los lados son rectos, poniendo como ejemplo de figura que podría verificar la definición dada por los estudiantes la figura 10, que tiene forma de P. Es una figura con cuatro lados rectos y uno curvo. Considera que, tal y como está expresado, al tener varios lados rectos cumple la definición dada por los estudiantes, pues es una figura con lados rectos, aunque además tenga un lado curvo.

En cuanto a la equivalencia entre distintas definiciones de polígono, Sonia cree que *puede haber otra definición equivalente* a la dada por los estudiantes *más completa* [TF1.2A.20 U797], en la que se deje explícito, sin lugar a duda, que *todos los lados* [TF1.2A.20 U779] son rectos. Muestra conocimiento sobre atributos relevantes del polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, sabe que se pueden enunciar definiciones distintas de un mismo objeto matemático, siendo éstas equivalentes entre sí (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

La formadora pide a los EPM que den una definición equivalente a la dada por los estudiantes. Matilde cree que la definición dada por Julio, que decía que un polígono *es una figura plana cerrada con líneas rectas* [TF1.2A.20 U804] sería equivalente. Mónica y Sonia indican que faltaría incluir el atributo de que la línea poligonal que lo delimita debe ser simple. Así dicen que, para que sean la definición de los estudiantes y la de Julio sean equivalentes faltaría añadir que *de cada vértice salgan dos lados* [TF1.2A.20 U808, 810]. Estas EPM muestran conocimiento sobre los atributos relevantes del concepto polígono y son capaces de establecer equivalencias entre distintas definiciones de un concepto (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos; KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

Tabla 4.34

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 5

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Saben que los polígonos tienen vértices que se obtienen al coincidir los extremos de los segmentos que forman sus lados (U570).
		Saben que las figuras planas tienen dos dimensiones (U629).
		Saben que en las figuras cerradas los lados se unen por los vértices (U631).
		Saben que las diagonales son elementos que pueden observarse en los polígonos (U649).
		Conocen relaciones entre elementos de un polígono, lo que permite deducir unas de otras (U683, 729).
		Saben la definición de diagonal de un polígono y las propiedades de dicho objeto geométrico (U694, 696).
		Saben que en un polígono cóncavo las diagonales pueden estar dentro, fuera o parcialmente fuera (U705, 707).
		Conocen el significado de atributos relevantes del concepto polígono (figura plana, cerrada) (U756).
		Saben la diferencia entre polígono simple y complejo (U769, 775).
		Saben que todos los lados de un polígono deben ser rectos (U801).
KPM	Registros de representación	Saben que el que la línea poligonal que delimita un polígono es simple es un atributo relevante del concepto (U808, 810).
		Conocen el modelo de Lesh y los distintos registros de representación que este autor considera (U607, 609).
	Registros de representación	Conocen el registro de representación con diagramas y en situaciones reales para el polígono, particularmente para el rectángulo (U613, 617).
		Conocen el registro de representación con diagramas y en situaciones reales para el polígono, particularmente para el rectángulo (U613, 617).
	Fenomenología y aplicaciones	Saben identificar figuras planas en situaciones cotidianas (U615, 617).
		Saben identificar figuras planas en situaciones cotidianas (U615, 617).
	<u>Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones</u>	Saben que en una definición matemática solo se deben incluir los atributos relevantes (U568, 570).
		Saben que a partir de los atributos relevantes se pueden deducir otras propiedades del concepto (U570).
		Saben que en una definición matemática no incluye características que puedan deducirse de otras dadas (U575).
		Saben que la definición que contiene propiedades que pueden deducirse de otras dadas no es mínima (U624, 629, 631, 713).
		Saben que los términos que aparecen en una definición deben ser básicos o estar definidos previamente (U639).
		Saben que, si en la definición de un concepto se hace uso de otro, la del segundo no puede basarse en la del primero (U650).
		Saben que los términos que se utilizan en una definición matemática deben ser básicos o estar definidos (jerarquía) (U756).
		Saben que se pueden enunciar distintas definiciones de un mismo objeto matemático, siendo equivalentes entre sí (U797).

KFLM	Teorías de aprendizaje	Saben que se pueden enunciar diferentes definiciones de un mismo concepto equivalentes entre sí (U803).
		Saben cómo son las definiciones de objetos geométricos atendiendo a los distintos niveles de razonamiento (modelo de van Hiele) (U586, 589, 591).
		Conocen el modelo de Lesh sobre registros de representación y las traslaciones que se pueden establecer entre ellos para construir significado (U591, 609).
		Saben la forma en la que una persona da una definición de un objeto matemático en función del nivel de razonamiento geométrico en el que está (U721, 723, 733).

4.3.2.3. Actividad 6. Definición de los estudiantes.

Esta actividad corresponde con la 2.3 del primer ciclo. Para resolver esta actividad, como ya se indicó al describir esa actividad, los EPM deben identificar los conceptos geométricos implicados en la resolución de la actividad propuesta por la maestra (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). También se pregunta de manera explícita por los procedimientos implicados en la resolución de la actividad (KoT, procedimientos).

Las otras dos cuestiones pretenden movilizar conocimiento sobre el proceso de razonamiento de definición y el de clasificación (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático).

Actividad 6. Indicad los conceptos y procedimientos implicados en la resolución de la actividad por parte de los estudiantes. ¿Crees que en matemáticas hay una única forma de definir polígono? La definición a la que llegan los escolares, ¿qué consecuencias tiene con relación a la clasificación/categorización de polígonos?

El fragmento de la transcripción en el que se trata la resolución de esta actividad se divide en cuatro episodios.

Análisis

Tabla 4.35

Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 6

Código	Contenido del episodio
[TF1.2A.21 U815-833]	Conceptos y procedimientos implicados. Definición única
[TF1.2A.22 U833-864]	Obstáculos de la definición dada por los estudiantes
[TF1.2A.23 U865-899]	Criterios para agrupar polígonos
[TF1.2A.24 U899-986]	Clasificación vs categorización

[TF1.2A.21 U815-833] Conceptos y procedimientos implicados. Definición única.

815. Formadora: *Bien, pues la actividad número 6.*
816. Rocío: *Hablan de conceptos como el vértice o figura cerrada.*
817. Paula: *Hasta llegar a la definición han ido sacando propiedades. Han hablado de conceptos como figura plana, cerrada, segmentos rectos, vértices, lados...*
818. Cati: *Pero a veces no usan un lenguaje matemático y dicen hueco para figuras abiertas o picos para adentro para polígonos cóncavos.*
819. Formadora: *Utilizan determinados conceptos relacionados con polígonos. ¿Y en cuanto a procedimientos?*
820. Cati: *Yo creo que han partido de una primera figura y han ido viendo características comunes a todos los polígonos.*
821. Efrén: *Eso es un procedimiento inductivo, ¿no? Va de casos particulares a la definición de polígono.*
823. Mavi: *Yo creo que como procedimiento está el agrupar a las figuras en dos clases, la de polígonos y la de no polígonos.*
825. Formadora: *¿Crees que en matemáticas hay una única forma de definir polígono?*
827. Mónica: *Es que hay distintas formas si hablamos de terminología, pero al final, el concepto es el mismo.*
830. Sonia: *Sí, el concepto es el mismo, pero se puede expresar de formas distintas equivalentes entre sí.*
831. Formadora: *Utilizo distintas expresiones para definir una misma cosa, pero tienen que ser equivalentes.*
832. Carolina: *Me recuerda a la propiedad transitiva.*

La actividad seis tiene distintos focos. En el primero de ellos se pregunta por los conceptos y procedimientos implicados en la resolución de la actividad que propone la maestra. Son varios EPM los que identifican los conceptos que han aparecido en la resolución de la tarea. Así, Rocío identifica *el vértice o figura cerrada* [TF1.2A.21 U816] o Paula hace referencia a *conceptos como figura plana, cerrada, segmentos rectos, vértices, lados...* [TF1.2A.21 U817]. En estas intervenciones observamos conocimiento de conceptos relacionados con el polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Cati ha reconocido conceptos como figura abierta o polígonos cóncavos, pero ha destacado que los estudiantes usan un lenguaje informal refiriéndose a figuras con *hueco* o figuras con *picos para adentro* para hacer referencia a ellos, respectivamente

[TF1.2A.21 U818]. Identifica el lenguaje utilizado por los escolares como forma de interacción con un contenido matemático (KFLM).

En cuanto a los procedimientos identificados por los EPM, Cati indica que *han partido de una primera figura y han ido viendo características comunes a todos los polígonos* [TF1.2A.21 U820]. Aunque no ha sido de una única figura, sí que han comparado figuras entre sí para analizar características comunes. Efrén lo llama *procedimiento inductivo* [TF1.2A.21 U821] porque parte de casos concretos para llegar a una definición general. Estos EPM interpretan el término procedimiento como la forma en la que se realizan las acciones que se proponen en la actividad (KoT, procedimientos).

Mavi considera como procedimiento *el agrupar a las figuras en dos clases, la de polígonos y la de no polígonos* [TF1.2A.21 U823]. Sabe que el clasificar figuras atendiendo a un criterio es un procedimiento matemático (KoT, procedimientos).

Para responder a la cuestión de si en matemáticas hay una única forma de definir polígono, los EPM saben que, aunque el objeto es único, hay diferentes formas de expresar la definición, equivalentes entre sí (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Así, por ejemplo, lo expresan Mónica y Sonia en sus intervenciones [TF1.2A.21 U827, 830].

El que para un mismo concepto pueda haber diferentes definiciones equivalentes entre sí le recuerda a Carolina *a la propiedad transitiva* [TF1.2A.21 U832]. Tiene sentido, tal y como le explica la formadora, pues cualquier relación de equivalencia verifica dicha propiedad.

Si en el conjunto de todas las definiciones de objetos matemáticos se estableciera la relación tal que una definición está relacionada con otra si ambas definen al mismo objeto, la relación verificaría la propiedad reflexiva ($\text{Def}_1 \mathcal{R} \text{Def}_1$, $\forall \text{Def}_1$ definición de un objeto matemático), la propiedad simétrica (si $\text{Def}_1 \mathcal{R} \text{Def}_2$ entonces $\text{Def}_2 \mathcal{R} \text{Def}_1$, siendo Def_1 y Def_2 definiciones de un objeto matemático), y la propiedad transitiva (si $\text{Def}_1 \mathcal{R} \text{Def}_2$ y $\text{Def}_2 \mathcal{R} \text{Def}_3$ entonces $\text{Def}_1 \mathcal{R} \text{Def}_3$, siendo Def_1 , Def_2 y Def_3 definiciones de un mismo objeto matemático).

En este caso, Carolina ha identificado una de las propiedades de las relaciones binarias en la relación de equivalencia que se puede establecer entre dos definiciones de un mismo concepto (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

[TF1.2A.22 U833-864] Obstáculos de la definición dada por los estudiantes.

833. *Formadora: La definición a la que llegan los escolares ¿qué consecuencias tiene respecto a la clasificación o categorización de polígonos?*

836. *Sonia: Yo he puesto que puede causar problemas a la hora de clasificar este tipo de figuras por lo mismo que hemos dicho antes.*

839. *Formadora: Porque crees que es ambigua.*

840. *Sonia: Porque no todos los lados son rectos.*

842. *Coral: Es que pueden llegar a clasificar los polígonos según si son o no polígonos, pero que no son capaces de clasificarlos según sus características, como por ejemplo cóncavo y convexo o regular e irregular.*

845. *Formadora: Pero ¿se les ha planteado esa situación?*

847. *Coral: Sí la de cóncavo y convexo sí, pero que no han profundizado en este tema.*

849. *Coral: Dijeron lo de los picos y tampoco se pronunció la palabra de que eso fuera cóncavo o convexo.*

859. *Coral: Pero que yo pienso que ellos no saben realmente lo que es. Que a lo mejor en ese momento sí, pero si tú le vuelves a poner una figura otra vez, pienso que no le ha quedado claro... Van a pensar en los picos, pero no van a pensar si es cóncavo o convexo, si es un polígono de verdad..., que yo pienso que no van a entender bien la definición de polígono.*

La cuestión que les plantea a los EPM analizar las consecuencias que puede tener la definición dada por los estudiantes respecto a la clasificación o categorización de figuras, la han interpretado de diferente forma.

Así, Sonia se ha centrado en un aspecto que expuso la formadora en cuanto a la concreción al decir en la definición “con lados que son rectos”. Si esta expresión pudiera dar lugar a que se entienda como que algunos lados son rectos, Sonia considera que *puede causar problemas a la hora de clasificar este tipo de figuras*, porque podría considerarse polígono a aquellas figuras en las que *no todos los lados fuesen rectos* [TF1.2A.22 U836, 840]. Sonia sabe que la posible ambigüedad en la definición puede afectar a la clasificación figuras planas en polígonos y no polígonos (KoT, procedimientos). Por otra parte, como ya se comentó en su momento, sabe que el atributo citado debería de enunciarse de una manera que no dejase lugar a duda, por ejemplo, especificando “con todos los lados rectos” (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Coral sabe que con la definición dada solo pueden agrupar las figuras en polígonos y no polígonos [TF1.2A.22 U842] (KoT, procedimientos), y conoce otras clasificaciones: *cóncavo y convexo o regular e irregular* [TF1.2A.22 U842] que, aunque no las describe, lo consideramos como indicio de KoT (procedimientos). Esta EPM piensa que los estudiantes *no van a entender bien la definición de polígono* [TF1.2A.22 U859]. Considera que la definición, tal y como está enunciada, va a generar dificultades a los estudiantes en cuanto a su comprensión. Muestra, por tanto, conocimiento sobre KFLM (fortalezas y dificultades).

[TF1.2A.23 U865-899] Criterios para agrupar polígonos.

865. *Formadora: Dice con relación a la clasificación y categorización de polígonos. ¿Qué cosas menciona la definición de los niños?*
866. *Cati: Los lados, los vértices...*
869. *Cati: Y que sean rectos.*
870. *Formadora: Que sean rectos..., vale. ¿Ahí hay alguna cosa que luego les pudiera permitir... hacer algún tipo de algo con ello?*
871. *Marco: Si son regulares e irregulares, ¿no?*
872. *Formadora: La definición dice que hay vértices y que hay lados. Pregunto... ¿eso podría servir para algo posteriormente?*
873. *Mónica: Para hacer una clasificación dentro de esa, ¿no?*
876. *Formadora: La pregunta dice qué consecuencias en relación a la clasificación puede tener. Esa definición ¿incluye qué conceptos?*
882. *Marco: Los ángulos.*
883. *Juana: Figuras planas. [La formadora escribe en la pizarra]*
885. *Formadora: Partiendo de ahí, ¿qué cosas si no están dejan de ser polígono y qué cosas podrían servirme variándolas para generar clasificaciones?*
886. *Alumnos: Los lados.*
887. *Formadora: ¿El número de lados pueden generar clasificaciones?*
888. *Alumnos: Sí.*
891. *Formadora: Número de lados. Vale, y ¿alguna otra cosa más?*
892. *Mónica: Los vértices, que es lo mismo.*
894. *Marco: Los ángulos.*
895. *Formadora: ¿Con los vértices obtendría una clasificación?*
896. *Mónica: Como la del número de lados. Bueno, el número de vértices que a la vez es el mismo que el número de lados.*
897. *Formadora: ¿Equivalentes?*
898. *Carolina: Sí, porque si tiene cinco vértices también tiene cinco lados.*

899. Formadora: *Efectivamente, o sea, que me daría lo mismo establecer una clasificación desde el número de lados que desde el número de vértices.*

Como última parte de la actividad 6, los EPM responden a cómo puede influir la definición de polígono que dan los escolares en posibles clasificaciones o categorizaciones de éstos. Para orientarles en la respuesta, la formadora pregunta por los conceptos que se incluyen en la definición. Los EPM identifican *los lados*, *los vértices* [TF1.2A.23 U866], que los lados *sean rectos* [TF1.2A.23 U869], *ángulos* [TF1.2A.23 882], *figuras planas* [TF1.2A.23 U883]. Es decir, conocen elementos del polígono y atributos de algunos de ellos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Marco afirma que esa definición puede permitir a los estudiantes ver *si son regulares o irregulares* [TF1.2A.23 U871]. Lo consideramos como indicio de su conocimiento sobre el significado de estos conceptos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos) y sobre la clasificación de polígonos atendiendo a la relación que hay entre las longitudes de sus lados o las amplitudes de sus ángulos (KoT, procedimientos).

Entre las intervenciones de los EPM, Mónica asegura que, por ejemplo, los estudiantes pueden fijarse en los lados *para hacer una clasificación dentro de esa* [TF1.2A.23 U873]. Según se deduce, con la definición se pueden agrupar las figuras planas en polígonos (si cumplen la definición) y no polígonos (en otro caso). Si ahora, en cada grupo, se pone la atención en los lados, se puede establecer un agrupamiento dentro del ya establecido (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático). Esta misma idea se retoma al preguntar la formadora sobre las cosas que podrían servir para generar clasificaciones. Son varios los EPM que dicen *los lados* [TF1.2A.23 U886], concretando en que la clasificación puede hacerse teniendo en cuenta el *número de lados* [TF1.2A.23 U890]. Los EPM saben que considerar el número de lados de la figura genera una clasificación de polígonos (KoT, procedimientos).

Mónica, además, sabe que se podría establecer otra clasificación de polígonos atendiendo *al número de vértices* [TF1.2A.23 U896] (KoT, procedimientos). También sabe que *el número de vértices es el mismo que el número de lados* [TF1.2A.23 U896] (KoT, definiciones propiedades y sus fundamentos), por lo que las clasificaciones que generan estos dos criterios son equivalentes. Carolina ejemplifica diciendo que si un polígono

tiene cinco vértices también tiene cinco lados [TF1.2A.23 U898] (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

[TF1.2A.24 U899-986] Clasificación vs categorización.

899. *Formadora: Estamos diciendo, todo el rato, clasificación. ¿Es clasificación? ¿O es una categorización?*
902. *Gabriel: Clasificación, ¿no? Porque es por clases.*
907. *Formadora: Y ¿cuáles serían las clases?*
910. *Alumnos: Triángulos...*
915. *Gabriel: De cuadriláteros, de pentágonos, de hexágonos...*
940. *Formadora: Así que esto sería, efectivamente...*
941. *Mónica: Una clasificación.*
942. *Formadora: Clases, clases... Cuando hablamos de clases hablamos de conjuntos disjuntos. Hablamos de conjuntos que o estás en uno o estás en otro, pero no en dos. Alba.*
943. *Alba: Dentro del número de lados se puede ver si son paralelos...*
955. *Alba: Que esta clasificación, la que ha hecho Gabriel, es según el número de lados. Pero se puede hacer otra clasificación que es según la posición de esos lados, relativos de esos lados, por ejemplo, el cuadrado que tiene los lados paralelos dos a dos, y por ejemplo otros no lo tienen.*
956. *Formadora: ¿Y ahí tendríamos una clasificación o una categorización?*
957. *Sonia: Categorización, ¿no? Es que yo no entiendo entonces qué es una categorización.*
958. *Formadora: ¿Qué era una categorización?*
960. *Mónica: Que un grupo está dentro de otro...*
966. *Juana: Es lo que hicimos con los cuadriláteros.*
967. *Formadora: Pues lo que hicimos con los cuadriláteros el año pasado, ¿qué fue?*
968. *Carolina: Quitarle propiedades.*
969. *Formadora: Lo que hacíamos primero era el cuadrilátero con mayor número de restricciones, que era el...*
970. *Juana: Cuadrado.*
971. *Formadora: Cuadrado. Y a ese ahora le íbamos quitando restricciones e íbamos obteniendo otras categorías. ¿Por qué hablábamos de categorías en ese caso?*
973. *Formadora: Si al cuadrado le quito la propiedad de que todos los ángulos sean iguales tenemos...*
974. *Juana: El rombo.*
975. *Formadora: El rombo. Haciéndolo así conseguíamos una... ca...*
976. *Cati: Categorización.*
977. *Formadora: Todo cuadrado es un rectángulo, pero no todo rectángulo es un rombo. ¿Y?*
978. *Juana: Y todo cuadrado es un rombo.*
979. *Formadora: Y todo cuadrado es un rombo, pero no todos los rombos son cuadrados.*

981. Formadora: *Y fíjate, Sonia, que eso es equivalente a decir que un cuadrado es un polígono de cuatro lados que tiene...*

982. Mila *Todos sus ángulos rectos.*

983. Formadora: *¿Qué tengo que hacer para definir cuadrado y rectángulo para definir clases disjuntas? [...]*

984. Carolina: *Según sean los lados iguales o dos a dos. Porque el cuadrado...*

El episodio comienza con la pregunta de la formadora sobre si el agrupamiento que se genera, considerando el número de lados (o de vértices) de un polígono como criterio, es una clasificación o una categorización. Gabriel sabe que es una *clasificación porque es por clases* [TF1.2A.24 U902], refiriéndose a las clases de equivalencia que se generan. El EPM muestra conocimiento sobre lo que implica la clasificación de objetos en matemáticas. Sabe que las clases de equivalencia son conjuntos disjuntos. También sabe de la inclusión de clases, que ocurre en las categorizaciones. Así, cuando la formadora plantea si un polígono de una clase de equivalencia podría estar a la vez en otra, él responde que sería *una categorización* [TF1.2A.24 U921]. También se evidencia este conocimiento cuando Mónica describe la categorización como una forma de agrupar en la que *un grupo está dentro de otro* [TF1.2A.24 U960] (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático).

Los EPM, además, saben qué clases de equivalencia genera el agrupamiento de polígonos atendiendo al número de lados que tiene. Así, enuncian las primeras clases ordenadas por el número de lados: *triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, ...* [TF1.2A.24 U910, 915]. Conocen las clases de equivalencia de la clasificación de polígonos según el número de lados (vértices o ángulos) (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Por otra parte, Alba plantea que *dentro* de la clasificación atendiendo al *número de lados*, *se puede ver si estos son paralelos* entre sí [TF1.2A.24 U910, 943]. Alba muestra conocimiento sobre un nuevo criterio de clasificación de polígonos, que puede tenerse en cuenta dentro de cada clase originada por la clasificación según el número de lados (KoT, procedimientos). Lo consideramos indicio de que conoce lo que significa que dos lados del polígono sean paralelos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Alba pone como ejemplo el caso del cuadrado entre los cuadriláteros. Así, dice que *el cuadrado tiene los lados paralelos dos a dos y otros no los tienen* [TF1.2A.24 U955]. Conoce características del cuadrado (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Además, Alba hace uso de un lenguaje preciso para compartir su argumento (KPM, uso de lenguaje formal).

Juana recuerda que en el curso anterior trataron la categorización de clases de *cuadriláteros* [TF1.2A.24 U966]. Una primera clasificación surge al usar como criterio el que dos cuadriláteros están relacionados si tienen dos lados paralelos (Liñán-García, 2017). Así se define la clase de los cuadriláteros que no tienen ningún par de lados paralelos (trapezoides), y la de los que, al menos, tienen dos lados paralelos. Esta segunda clase se puede subdividir en dos subclases de equivalencia, añadiendo más condiciones al paralelismo. Así estarían los cuadriláteros con solo dos lados paralelos (trapeacios) y los que tienen los lados paralelos dos a dos (paralelogramos). En esta última subclase se pueden definir otras clasificaciones atendiendo a la igualdad de lados o de ángulos. De esta forma se define una categorización de clases que permite establecer relaciones jerárquicas entre las clases descritas (ver Figura 4.33).

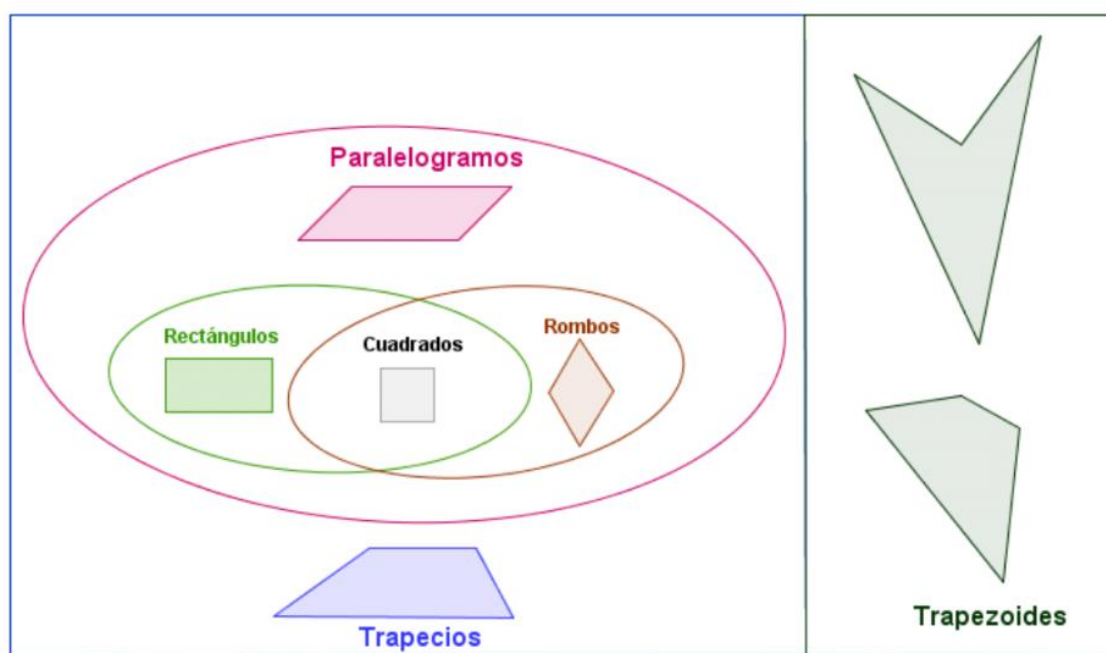


Figura 4.33 Clasificación jerárquica de cuadriláteros (Liñán-García, 2017)

La formadora interviene recordando lo que hicieron en ese momento y planteando algunas cuestiones al respecto. Así Juana sabe que el *cuadrado* [TF1.2A.24 U970] es el cuadrilátero con mayor número de restricciones. También sabe que la figura que verifica todos los atributos que se le exigen al cuadrado, salvo el que los cuatro ángulos tengan la misma amplitud, es el *rombo* [TF1.2A.24 U974]. Con esto, Juana sabe que *todo cuadrado*

es un rombo [TF1.2A.24 U978]. Es decir, Juana muestra conocimiento sobre distintos cuadriláteros y las relaciones que se pueden establecer entre ellos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Continúan tratando aspectos relacionados con los cuadriláteros. La formadora plantea que el cuadrado es un polígono de cuatro lados que tiene... Deja que sean los EPM los que completen la frase. En este caso, Mila dice que tiene *todos sus ángulos rectos* [TF1.2A.24 U982]. Es cierto que los ángulos de los cuadrados son todos rectos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos), pero no es un atributo que determine de manera biunívoca a estos cuadriláteros. Los rectángulos también son cuadriláteros con cuatro ángulos rectos. Para determinar la clase de los cuadrados debe añadir que los lados tienen igual longitud.

La formadora aprovecha la intervención de Mila para preguntar cómo se debe definir cuadrado y rectángulo para definir clases disjuntas. Carolina contesta que *según sean todos los lados iguales o iguales dos a dos* [TF1.2A.24 U984]. Conoce atributos relacionados con los lados de ambos tipos de polígonos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Tabla 4.36

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 6

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	<u>Procedimientos</u>	Saben cómo llevar a cabo las acciones que se requieren para resolver la actividad propuesta (U820, 821).
		Saben que la clasificación de figuras atendiendo a un criterio es un procedimiento matemático (U823).
		Saben que una definición ambigua puede tener consecuencias en la clasificación de las figuras planas (U836, 840).
		Saben que usar como criterio la definición dada por los estudiantes genera una clasificación de figuras en polígonos y no polígonos (U842).
		Saben que los polígonos se pueden clasificar en cóncavos y convexos o en regulares e irregulares (U842).
		Saben que los polígonos se pueden agrupar en regulares e irregulares (U871).
		Saben que se puede considerar el número de lados de una figura para generar una clasificación (U886, 890).

		Saben que el número de vértices de un polígono permite establecer una clasificación de polígonos (U896).
		Saben que los polígonos de un determinado número de lados se pueden clasificar atendiendo al número de pares de lados paralelos que tiene (U943).
		Conocen diferentes conceptos relacionados con el concepto de polígono (U816, 817).
		Saben que existe una relación entre la equivalencia de definiciones de un mismo concepto y la propiedad transitiva de las relaciones binarias de equivalencia (U832).
		Saben que uno de los atributos relevantes del concepto polígono es que todos los lados sean rectos (U836, 840).
		Conocen lo que significa que un polígono sea regular o irregular (U871).
		Saben que el número de lados de un polígono es igual a su número de vértices (U896).
		Saben que los polígonos con cinco vértices tienen, además, cinco lados (U898).
	<u>Definiciones, propiedades y sus fundamentos</u>	Saben cuáles son las clases de equivalencia que se generan al agrupar a los polígonos atendiendo al número de lados (U910, 915).
		Saben lo que significa que dos lados de un polígono sean paralelos (U943).
		Saben que los cuadrados tienen los lados paralelos dos a dos y que es el cuadrilátero con mayor número de restricciones (U955, 970).
		Conocen distintos cuadriláteros y las relaciones que se establecen entre ellos (U970, 974, 978).
		Saben que los cuatro ángulos de un cuadrado son rectos (U982).
		Saben que los cuadrados tienen los cuatro lados de igual longitud y las longitudes de los lados de los rectángulos son iguales dos a dos (U984).
		Saben que se pueden establecer criterios que generen clasificaciones dentro de los grupos creados por otra clasificación (U873).
KPM	<u>Prácticas particulares del quehacer matemático</u>	Sabe que al establecer una clasificación en el conjunto de polígonos se originan clases de equivalencia (conjuntos disjuntos) (U902).
		Sabe que si al clasificar polígonos, uno de ellos puede pertenecer a dos grupos, puede corresponder con una categorización (U921).
	Condiciones necesarias y suficientes para generar una definición	Saben que la definición de un objeto matemático se puede expresar de formas diferentes, equivalentes entre sí (U827, 830).

KFLM	Fortalezas y dificultades	Saben que los estudiantes pueden tener dificultad a la hora de entender la definición de polígono (U859).
	Formas de interacción con un contenido matemático	Saben que los estudiantes de este nivel utilizan un lenguaje informal para referirse a determinados conceptos (U818).

4.3.2.4. Actividad 7. ¿Qué aprenden los estudiantes?

Con esta actividad se pretende que los EPM reflexionen sobre el sentido didáctico de la actividad propuesta por Jimena, estableciendo una comparación entre los efectos que tiene en el aprendizaje de los estudiantes el que se les facilite una definición dada frente a que sean ellos quien la construyan (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

La resolución de esta actividad podría provocar la reflexión sobre los efectos de distintos enfoques de enseñanza (KMT, teorías de enseñanza) y sus efectos en el aprendizaje de los estudiantes.

Actividad 7. ¿Qué aprenden los estudiantes de primaria con esta actividad? ¿Qué interés tiene frente a que se les hubiera dado una definición a priori?

Los episodios en los que se divide el fragmento de la transcripción a analizar corresponden con los debates que se producen al dar respuesta a cada una de las preguntas que conforman la actividad.

Análisis

Tabla 4.37

Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 7

Código	Contenido del episodio
[TF1.2A.25 U987-1002]	Aprendizajes con esta actividad
[TF1.2A.26 U1003-1011]	Diferencias con actividad tradicional

[TF1.2A.25 U987-1002] Diferencias con actividad tradicional.

987. *Formadora: Pasamos a la actividad 7. ¿Qué aprenden los estudiantes de primaria con esta actividad? ¿Qué interés tiene frente a que se les hubiera dado una definición a priori?*

988. *Efrén: Con esta actividad aprenden el concepto de polígono de una forma diferente. Lo hacen más motivados, es diferente a las clases tradicionales de matemáticas.*

989. *Sonia: Yo creo que llegan a un aprendizaje más significativo de esta manera, ya que lo van descubriendo ellos mismos.*

990. *Formadora: Es un aprendizaje por descubrimiento, ¿no?*

991. *Paula: Yo creo que de esta forma los estudiantes aprenden a expresar sus ideas previas, compararlas con las de otros alumnos, van ampliando conocimientos.*
992. *Mila: Son capaces de llegar a la definición de polígono desde sus ideas previas y sus propios errores.*
993. *Formadora: Son cuestiones muy interesantes: ideas previas, errores...*
994. *Mila: Sí, al ir tratando el concepto de polígono de esta forma, se parte de lo que sabe el alumno, y va viendo lo que conoce y lo que no. Además, puede corregir posibles errores sobre el concepto polígono.*
995. *Mónica: Además, trabajan con figuras nuevas, salen de los polígonos prototípicos que se les presentan siempre. Tienen un abanico más amplio de ejemplos de polígono.*
996. *Formadora: Y de no ejemplos, es decir, de figuras que no cumplen algún atributo relevante y que, por lo tanto, no es ejemplo de polígono.*
997. *Mónica: Al decirles la maestra que sean más arriesgados está pidiendo que representen polígonos diferentes a los usuales, por eso salen figuras que no suelen aparecer en los libros.*
999. *Cati: De esta forma se desarrolla la creatividad, surgen figuras diferentes a las que siempre se usan. Además, pueden comparar con figuras de otros compañeros para ver qué propiedades comparten las distintas figuras.*
1000. *Formadora: Entonces hay varios aspectos que consideráis positivos en la forma en la que la maestra ha planteado la actividad, a diferencia de haberlo hecho de la otra manera.*
1001. *Sonia: Sí, creo que para los alumnos es más divertido, van a estar más implicados.*
1002. *Mónica: Además, a la profesora le permite identificar qué alumno sabe ese conocimiento y qué alumno no.*

Para responder a la actividad 7 los EPM deben analizar la tarea propuesta por la maestra para llegar a enunciar una definición de polígono y compararla con el hecho de haberles recordado directamente dicho concepto. Efrén, respondiendo a qué aprenden los estudiantes con la tarea que se les plantea, señala que *aprenden el concepto de polígono* [TF1.2A.25 U988], centrándose en el conocimiento matemático en el que se basa la actividad (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos), a lo que añade *de una forma diferente*. Este comentario lo amplía diciendo que *lo hacen más motivados, es diferente a las clases tradicionales de matemáticas*. [TF1.2A.25 U988]. Efrén sabe que el objetivo de la actividad es definir el concepto de polígono, además, muestra conocimiento sobre los efectos de proponer actividades en las que los estudiantes deban participar activamente (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

En esa misma línea están las respuestas de otros EPM en las que valoran positivamente la propuesta de actividades como la planteada por la maestra basándose en diferentes aspectos. Así, Sonia considera que *llegan a un aprendizaje más significativo ya que lo*

van descubriendo ellos mismos [TF1.2A.25 U989]. En esta intervención la EPM aprecia las consecuencias que tiene en el aprendizaje de los estudiantes el que éstos participen de manera activa en la resolución de la actividad (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Además, muestra conocimiento sobre la importancia de promover un aprendizaje significativo (Rodríguez, 2011), entendido como aquel en el que el estudiante relaciona activamente los nuevos conocimientos con lo que ya sabe (sus conocimientos previos), integrándolos de forma coherente y profunda (KFLM, teorías de aprendizaje).

Mila relaciona su respuesta con la de su compañero, añadiendo que, de esta forma, los estudiantes *son capaces de llegar a la definición de polígono desde sus ideas previas y sus propios errores* [TF1.2A.25 U992]. Conoce ventajas de trabajar con los estudiantes a través de actividades en las que deban usar sus conocimientos previos (KFLM, teorías de aprendizaje). Además, valora de manera positiva el que se pueda construir conocimiento a través de conocimientos erróneos (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Podemos considerar como indicio de que Mila conoce la teoría constructivista del aprendizaje, corriente pedagógica que sostiene que el conocimiento no se transmite pasivamente, sino que es construido activamente por el estudiante a través de la interacción con su entorno, sus experiencias previas y la reflexión. (KFLM, teorías de aprendizaje).

Otros beneficios de este tipo de actividades los remarca Paula al considerar que los estudiantes *aprenden a expresar sus ideas previas* y favorecen el aprendizaje al *compararlas con las de otros alumnos* [TF1.2A.25 U991]. En este caso, Paula destaca las ventajas que tiene sobre la expresión oral y escrita el hacer que los alumnos tengan que argumentar sus decisiones (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Mónica centra su argumento en otro aspecto relacionado con el potencial de la tarea que propone la maestra. Así dice que, de esta forma, *trabajan con figuras nuevas, salen de los polígonos prototípicos que se les presentan siempre. Tienen un abanico más amplio de ejemplos de polígono* [TF1.2A.25 U995]. Ve la importancia de tratar con polígonos diferentes a los habituales para evitar el uso exclusivo de figuras prototípicas, que pueden afectar a la concepción del estudiante sobre el concepto de polígono generando una imagen del concepto no alineada con su definición formal (Vinner, 1991) (KFLM, teorías de aprendizaje). La EPM valora, de la actividad propuesta por la maestra, el que los estudiantes visionen ejemplos variados de polígonos y de no polígonos (KMT,

estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Así, incide en que *salen figuras que no suelen aparecer en los libros* [TF1.2A.25 U997].

Esta idea la retoma Cati identificando otros beneficios al uso de la actividad propuesta por la maestra en lugar de dar una definición de polígono. Piensa que de esta forma *se desarrolla la creatividad, surgen figuras diferentes a las que siempre se usan. Además, pueden comparar con figuras de otros compañeros para ver qué propiedades comparten las distintas figuras* [TF1.2A.25 U999]. Por un lado, considera que favorece la creatividad permitiendo tener ejemplos diferentes a los tradicionales, es decir, da lugar a disponer de una muestra diversa de ejemplos (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Por otro lado, el tener un conjunto variado de figuras permite a los estudiantes compararlas entre sí para identificar atributos críticos, que cumplen todos los ejemplos del concepto, de otros irrelevantes, específicos de algunos casos concretos, consiguiendo así una definición óptima del concepto (KFLM, teorías de aprendizaje).

Otras potencialidades identificadas por los EPM están relacionadas con el uso como actividad de evaluación inicial para que *la profesora pueda identificar qué alumno sabe ese conocimiento y qué alumno no* [TF1.2A.25 U1002] (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). También con el efecto motivacional de la actividad. Entienden que para los estudiantes es más atractivo este tipo de trabajo que el recordar una definición ya dada. Con este tipo de actividades los estudiantes *van a estar más implicados* [TF1.2A.25 U1001].

[TF1.2A.26 U1003-1011] Diferencias con actividad tradicional.

1003. Formadora: *¿Qué interés tiene frente a que se les hubiera dado una definición a priori?*

1004. Cati: *Un poco lo que ya hemos dicho, ¿no? Los alumnos van a estar más motivados porque se sienten protagonistas de la tarea, van a participar de manera activa.*

1006. Gabriel: *La diferencia con darle una definición está en que el aprendizaje que se consigue con este tipo de actividad es más significativo, podrían olvidarlo más fácilmente. Si la profesora les da la definición sin más, sería un aprendizaje memorístico.*

1007. Sonia: *Además, con esta actividad se desarrolla la creatividad y el pensamiento crítico. A mí me parece muy importante usar el posible error en el proceso de aprendizaje.*

1010. Mara: *Es que, si les hubiera dado una definición desde el principio, los alumnos no hubieran pensado con profundidad sobre lo que es realmente un polígono, solo habría memorizado una definición.*

1011. Paula: *A mí me parece muy importante que, a la hora de trabajar de esta forma, los estudiantes amplíen su imagen de polígono. Además de los típicos, que serán los que ya tenían en su mente, añaden otros polígonos que no son habituales.*

Los EPM continúan dando argumentos que justifican el potencial de la actividad propuesta por la maestra para conseguir enunciar la definición de polígono frente a darles la definición del concepto. En la misma línea en la que venían expresando sus opiniones, Cati considera que *la participación activa hace que los estudiantes estén más motivados al sentirse protagonistas de la tarea* [TF1.2A.26 U1004]. Aunque puede considerarse como un conocimiento sobre la enseñanza en general, tenemos en cuenta que el enfrentarse a actividades con alto potencial didáctico, con sentido, favorece la implicación tanto cognitiva como emocional de los estudiantes. Esto contribuye a un aprendizaje profundo y promueve una actitud positiva hacia las matemáticas (Carrillo, 2000). Este tipo de actividades contribuyen al desarrollo de competencias matemáticas (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Gabriel se centra en la forma en la que los estudiantes aprenden el concepto de polígono. Diferencia entre *el aprendizaje memorístico* en el caso de que la maestra les de la definición de polígono, y un *aprendizaje más significativo* [TF1.2A.26 U1006] en el caso de llegar a la definición a partir del análisis de distintas figuras. Mara, en este sentido dice que, *si les hubiera dado una definición desde el principio, los alumnos no hubieran pensado con profundidad sobre lo que es realmente un polígono, solo habría memorizado una definición* [TF1.2A.26 U1010]. Al igual que en el caso de Cati, estos EPM saben que este tipo de estrategias de enseñanza favorece el desarrollo de competencias matemáticas (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Paula incide en la importancia de tratar con un conjunto extenso de ejemplos pues de esta forma *amplían su imagen de polígono, además de los típicos añaden otros que no son habituales* [TF1.2A.26 U1011]. Sabe que es importante que los estudiantes observen diferentes ejemplos de un concepto matemático para que su imagen sea completa (KFLM, teorías de aprendizaje).

Tabla 4.38

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 7

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO

KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Saben el concepto de polígono (U988).
KFLM	<u>Teorías de aprendizaje</u>	Conocen la teoría del aprendizaje significativo (U988).
		Conocen la teoría del conocimiento constructivista (U992).
		Saben que el uso exclusivo de figuras prototípicas como ejemplos generan imágenes del concepto no alineadas con su definición formal (U995).
KMT	<u>Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos</u>	Saben que el tener un conjunto amplio de ejemplos permite establecer comparaciones entre ellos identificando atributos relevantes e irrelevantes (U999, 1011).
		Saben que las actividades en las que los estudiantes participan activamente generan mayor motivación (U988).
		Saben que estas actividades favorecen un aprendizaje significativo (U999).
		Saben que un potencial de proponer actividades como la propuesta por la maestra es que expresan sus ideas y las comparan con las de otros compañeros, lo que genera aprendizaje (U991).
		Saben que proponer actividades en las que el estudiante deba usar conocimientos previos o erróneos es positivo (U992).
		Saben que esta forma de trabajar polígonos genera un conjunto amplio de ejemplos distintos de los habituales (U995).
		Saben que este tipo de actividades favorecen el desarrollo de la creatividad (U999).
		Saben de la potencialidad del uso de estas actividades en la evaluación inicial de un contenido (U1002).
		Saben que este tipo de actividades contribuyen al desarrollo de competencias matemáticas (U1004, 1006, 1010).

4.3.2.5. Actividad 8. Papel de ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática

La actividad 8 es equivalente a la 2.5 de la tarea implementada en el primer ciclo. El conocimiento pretendido con esta pregunta se vincula con la práctica matemática de definir (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático). Puede surgir KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) si se tratase cómo un profesor puede usar ejemplos y no ejemplos en una clase para guiar la construcción de definiciones, se movilizaría, aunque no es el foco de la actividad.

Actividad 8. ¿Qué papel juegan los ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática (resolución de la tarea)?

La transcripción del debate generado en el aula de formación inicial con la resolución de esta actividad se reduce a un episodio.

Tabla 4.39

Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 8

Código	Contenido del episodio
[TF1.2A.27 U1013-1027]	Papel de ejemplos y contraejemplos

[TF1.2A.27 U1013-1027] Papel de ejemplos y contraejemplos.

1013. *Formadora: ¿Qué papel juegan los ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática?*

1014. *Paula: Yo creo que hacen que los alumnos lleguen a la conclusión de cuáles son los atributos relevantes y cuáles son los irrelevantes y así llegar a una buena definición que cumpla con los requisitos de una definición matemática. Lo de no circular, mínima, ...*

1015. *Diana: Al tener una variedad de figuras, algunas pueden generarles dudas a los alumnos, y pueden razonar sobre ello y así comprender mejor el concepto y llegar a una definición matemática más acertada.*

1016. *Mónica: Con los ejemplos y contraejemplos que ponen, los alumnos son conscientes de lo que pueden ser polígono y lo que no. Los ven de forma visual, partiendo de su propia experiencia y con sus propias dudas y aciertos.*

1017. *Formadora: Parece importante que haya una variedad de figuras para que comparen entre ellas y analicen las similitudes y diferencias.*

1018. *Carolina: Claro, es que los ejemplos son necesarios para establecer relaciones entre elementos geométricos y observar las características pertinentes para la definición.*

1019. *Formadora: Al comparar las figuras entre sí se dan cuenta de las características de ciertos elementos que se repiten en todas las que son polígonos.*

1020. *Rocío: Yo diría que a veces hay que dar más importancia a los contraejemplos, ya que son los que van a sacar a los alumnos de su zona de confort de pensamiento y los va a hacer reflexionar sobre posibles respuestas. Pero los ejemplos son muy útiles para visualizar aquello que se aprende teóricamente. Por ejemplo, cuando los alumnos llegan a generalizar al afirmar que todas las letras son polígonos, la profesora les hace poner ejemplos, y se dan cuenta de que la M puede cumplir las características del concepto, pero, sin embargo, la P no es polígono porque tiene un lado curvo, dependerá de cómo se represente.*

1022. *Formadora: ¿Alguna otra idea?*

1023. *Mavi: Yo he puesto que los ejemplos y contraejemplos son importantes en la construcción de la definición ya que ayudan a aclarar las ideas previas equivocadas que puedan tener y así ir modificando sus esquemas mentales sobre lo que ya sabían.*

1025. *Cati: Es que de esta manera se pone al alumno a prueba de si realmente ha asimilado el concepto de polígono o no, y en caso de que no, se dé cuenta de sus características y comprenda el concepto.*

1026. *Sonia: Yo he puesto algo parecido, aunque algunos de los ejemplos puestos por los alumnos están mal, les sirve para compararlo con otros ejemplos dados y sacar más características del polígono.*

Aunque en la pregunta que se les plantea en la tarea se habla de contraejemplos, el término adecuado sería no-ejemplo, refiriéndose a un caso que no cumple la definición del concepto al no verificar alguno de los atributos críticos. El término contraejemplo hace referencia a un caso que refuta una afirmación o regla general al demostrar que no se cumple en todos los casos. El uso de contraejemplo en el discurso se interpreta como no-ejemplo.

Los EPM reconocen la necesidad del uso de un conjunto amplio de ejemplos y contraejemplos (no-ejemplos) para construir una definición matemática. Por ejemplo, Paula sabe que el análisis de figuras concretas permite identificar *cuáles son los atributos relevantes y cuáles son los irrelevantes y así llegar a una buena definición* [TF1.2A.27 U1014]. Los atributos relevantes son las propiedades que debe cumplir un objeto para ser ejemplo de un concepto. Los irrelevantes, aquellos que son específicos de algunos ejemplos, pero no caracterizan al concepto. En el caso de la definición de polígono, son atributos relevantes el que sea figura plana limitada por una línea poligonal cerrada y simple. Sería irrelevante el número de lados que tenga la figura, la relación entre las amplitudes de los ángulos o de las longitudes de los lados, la posición en la que esté representado, etc. Con esta intervención, Paula muestra conocimiento sobre que de cada concepto se puede diferenciar entre atributos que deben aparecer en su definición y otros que son superfluos (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

Además, al decir que la definición *cumpla con los requisitos de una definición matemática, lo de no circular, mínima...* muestra conocimiento sobre las características que debe tener una definición matemática para que sea precisa, comprensible y funcional dentro del pensamiento matemático. [TF1.2A.27 U1014] (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático).

Por otra parte, los EPM valoran positivamente el uso de un conjunto amplio de figuras que los estudiantes analicen para identificar los atributos relevantes del concepto polígono. Así, Diana alega que, *al tener una variedad de figuras, algunas pueden*

generarles dudas a los alumnos, y pueden razonar sobre ello y así comprender mejor el concepto y llegar a una definición matemática más acertada [TF1.2A.27 U1015]. En la misma línea va la aportación de Mónica, que considera que *con los ejemplos y contraejemplos que ponen, los alumnos son conscientes de lo que puede ser polígono y lo que no. Los ven de forma visual, partiendo de su propia experiencia y con sus propias dudas y aciertos* [TF1.2A.27 U1016]. Con estas intervenciones muestran conocimiento sobre el uso de ejemplos en la construcción de una definición matemática (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Carolina justifica el uso de ejemplos porque estos permiten *establecer relaciones entre elementos geométricos y observar las características pertinentes para la definición* [TF1.2A.27 U1018]. Ve en los ejemplos la intencionalidad de enseñanza de la maestra con relación a la definición de polígono (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Compartiendo esta idea, Rocío añade que *los ejemplos son muy útiles para visualizar aquello que se aprende teóricamente* [TF1.2A.27 U1020], refiriéndose, en este caso, a la definición de polígono. La intención es concretar con casos particulares un concepto abstracto (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). En el análisis de esta intervención interpretamos que Rocío destaca la importancia de establecer traslaciones entre el registro verbal, vinculado a “aquello que aprende teóricamente” y el registro gráfico (KoT, registros de representación), que permite visualizar los conceptos teóricos estableciendo una relación entre la definición de un concepto y su imagen. Indicio de conocimiento sobre KFLM (teorías de aprendizaje).

Por otra parte, entiende que el uso de los no polígonos (que Rocío llama contraejemplos) es para *hacerles reflexionar sobre posibles respuestas sacándolos de su zona de confort* [TF1.2A.27 U1020], es decir, les permite identificar atributos imprescindibles de los polígonos que no cumplen esas figuras (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). En su intervención, Rocío recuerda como la maestra les pide poner ejemplos de letras que se puedan representar con formas que sean polígonos. Así, por ejemplo, aparece la una representación de la letra M. Pero busca el uso del contraejemplo para invalidar que cualquier letra pueda representar un polígono, por ejemplo, ciertas grafías de la letra P. Rocío muestra conocimiento sobre el uso de casos concretos que no cumplan una

propiedad para invalidarla de manera general (KPM, formas de validación y demostración).

Las intervenciones de otros EPM redundan en las ideas ya señaladas sobre la intención de la maestra al plantear esta actividad en la que deben llegar a la definición de un polígono a partir del uso de ejemplos y no ejemplos del concepto (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Así, Mavi destaca su importancia *en la construcción de la definición ya que ayudan a aclarar las ideas previas equivocadas que puedan tener y así ir modificando sus esquemas mentales sobre lo que ya sabían*



[TF1.2A.27 U1023]. Para Cati, el pedir a los estudiantes que pongan ejemplos y no ejemplos de polígonos los pone *a prueba de si realmente ha asimilado el concepto de polígono o no, y en caso de que no, se dé cuenta de sus características y comprenda el concepto* [TF1.2A.27 U1025]. Por su parte, Sonia valora positivamente incluso el que propongan ejemplos erróneos, al considerar que estos *les sirve para compararlos con otros ejemplos dados y sacar más características del polígono* [TF1.2A.27 U1026]. En estas intervenciones identificamos conocimiento sobre el beneficio de plantear una actividad como la que propone la maestra (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Por último, Rocío sabe que alguna representación de la letra *P no es polígono porque tiene un lado curvo* [TF1.2A.27 U1020], es decir, sabe que un atributo relevante del concepto polígono es que todos sus lados sean rectos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Tabla 4.40

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 8

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Saben que todos los lados de los polígonos son rectos (U1020).
	Registros de representación	Conocen la necesidad de establecer relaciones entre el registro verbal, asociado a lo que se aprende teóricamente, y el registro gráfico (U1020).
KPM	Formas de validación y demostración	Saben que el uso de un caso concreto que no verifique una propiedad invalida su generalización (U1020).
	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	Saben que para dar una buena definición de un concepto a través de ejemplos se deben tener en cuenta qué atributos son relevantes y cuáles son irrelevantes (U1014).
	<u>Prácticas particulares del quehacer matemático</u>	Saben que una definición matemática debe verificar ciertas condiciones. Por ejemplo, debe ser no circular, mínima, etc. (U1014).

KFLM	Teorías de aprendizaje	Conocen la importancia de vincular la definición de un concepto con su imagen (U1020).
		Saben que el uso de ejemplos (y no ejemplos) ayudan en la construcción de una definición matemática (U1015-1016).
		Comprenden que la intención de la maestra al proponer el uso de ejemplos para conseguir la definición de polígono está relacionada con la enseñanza de este, consiguiendo determinar los atributos relevantes al establecer relaciones entre los elementos de las distintas figuras (U1018).
KMT	<u>Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos</u>	Saben que los ejemplos permiten visualizar casos concretos de conceptos abstractos (U1020).
		Saben que los no ejemplos permiten identificar atributos imprescindibles de polígonos que no cumplen esas figuras (U1020).
		Saben que la intención de la maestra a la hora de plantear esta actividad es que aclaren ideas equivocadas (U1023), identifique atributos y comprenda el concepto (U1025, U1026).

4.3.2.6. Actividad 9. Dificultades de los estudiantes.

El enunciado de esta actividad pone el foco en los obstáculos epistemológicos o conceptuales, errores habituales o concepciones alternativas que dificultan el aprendizaje (KFLM, fortalezas y dificultades).

Actividad 9. ¿Qué dificultades identificas en las respuestas de los estudiantes a la situación planteada? Posible origen de las dificultades.

El análisis de la resolución de esta actividad se realiza sobre un único episodio correspondiente al fragmento que se dedica a la resolución de la misma.

Análisis

Tabla 4.41

Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 9

Código	Contenido del episodio
[TF1.2A.28 U1028-1045]	Dificultades observadas

[TF1.2A.28 U1028-1045] Dificultades observadas.

1028. Formadora: La actividad 9. ¿Qué dificultades se identifican en las respuestas de los estudiantes?

1029. Efrén: Una dificultad está en relacionar polígono con figuras familiares, sin saber si realmente cumplen las características propias de los polígonos. Por ejemplo, ponen el círculo como polígono porque siempre lo han visto junto al triángulo y al cuadrado.

1030. Rocío: *Eso pasa también con el “rectángulo diferente”. Sabe que el rectángulo es un polígono, y para hacer una figura distinta dibuja un rectángulo con dos lados curvos, por lo que ya no es un polígono. No tiene en cuenta esa característica.*

1032. Paula: *Es que no piensan porqué los triángulos y los cuadrados son polígonos, solo se basan en que lo vieron en el libro.*

1033. Mara: *Se basan en ideas prototípicas de polígono que se han formado con lo que han visto en cursos anteriores.*

1034. Gabriel: *También relacionan polígono con las figuras más regulares, con las que son más simétricas.*

1035. Formadora: *¿Una figura puede ser más o menos regular que otra? Se es regular o no se es, ¿no? Igual pasa con la simetría.*

1036. Gabriel: *Ya, es una forma de hablar, es como que es más parecida a una figura regular.*

1038. Mila: *Cuando dan la definición de polígono, al referirse a que los lados son rectos, deberían de especificar que todos los lados son rectos, para así no llevar a la duda.*

1039. Formadora: *Sí, ya hemos visto que el rectángulo de lados curvos podría verificar la definición, porque tiene lados rectos. Pero no es polígono porque también tiene lados curvos.*

1040. Mila: *Yo creo que tienen dificultad en el uso de un vocabulario adecuado, ya que no utilizan uno técnico. Utilizan “picos” en vez de vértices, “huecos” en vez de que se trata de un polígono abierto...*

1041. Efrén: *Eso está relacionado con el nivel de razonamiento que tienen los estudiantes, ¿no? Con el tiempo irán pasando a un lenguaje más formal.*

1042. Formadora: *Este puede ser el origen de esta dificultad, ¿un posible origen de esas otras dificultades?*

1043. Mara: *Yo creo que el origen de algunas dificultades está en el uso excesivo del libro de texto, en el que se suelen usar las mismas figuras para representar a los polígonos.*

1044. Paula: *Yo he puesto que las dificultades surgen en el aula por la utilización del libro como único recurso y por el abuso de la representación de figuras prototípicas y sin material concreto.*

A la hora de responder a esta actividad los EPM tienen en cuenta, además de las dificultades propiamente dichas, los errores u obstáculos observados en las intervenciones de los estudiantes a la hora de resolver la tarea propuesta por la maestra con el propósito de construir la definición de polígono.

Así, Efrén considera que *una dificultad está en relacionar polígono con figuras familiares, sin saber si realmente cumplen las características propias de los polígonos* [TF1.2A.28 U1029]. En esta línea, Paula asevera que los estudiantes *no piensan porqué los triángulos y los cuadrados son polígonos, solo se basan en que lo vieron en el libro* [TF1.2A.28 U1032], o Gabriel asegura que *relacionan polígono con las figuras más*

regulares, con las que son más simétricas [TF1.2A.28 U1034], entendiendo por éstas las que *son más parecidas a una figura regular* [TF1.2A.28 U1036], o en su caso más parecidas a una figura simétrica. En resumen, Mara afirma que *se basan en ideas prototípicas de polígono que se han formado con lo que han visto en cursos anteriores* [TF1.2A.28 U1033]. Es decir, los EPM relacionan la dificultad en identificar correctamente a distintos polígonos con la imagen que tienen del concepto asociada a los polígonos tratados anteriormente (KFLM, fortalezas y dificultades).

Con relación a lo anterior, Mara identifica una de las causas de estas dificultades al decir que *el origen de algunas dificultades está en el uso excesivo del libro de texto, en el que se suelen usar las mismas figuras para representar a los polígonos* [TF1.2A.28 U1043]. Con este comentario Mara identifica posibles dificultades asociadas al uso del libro como recurso para la enseñanza del concepto de polígono, pues suelen utilizar los mismos casos para ejemplificar el concepto. Muestra, por lo tanto, conocimiento sobre KMT (recursos materiales y digitales) ya que.

Paula incide en esta idea al decir que *las dificultades surgen en el aula por la utilización del libro como único recurso, y añade el abuso de la representación de figuras prototípicas y sin material concreto* [TF1.2A.28 U1044]. Aunque no identifica un material concreto que pueda utilizarse para el trabajo del concepto de polígono, sí sabe que puede hacerse uso de él (KMT, recursos materiales y digitales). En la aportación de Paula identificamos un indicio de que sabe que los polígonos se pueden representar con material manipulativo en un registro figural-icónico (KoT, registros de representación) (Duval, 2006).

Por otra parte, en este episodio identificamos conocimiento sobre los temas. Por ejemplo, cuando Efrén dice *ponen el círculo como polígono porque siempre lo han visto junto al triángulo y al cuadrado* [TF1.2A.28 U1029], está identificando un error común en los estudiantes al considerar círculo como polígono porque se suele trabajar con otras figuras que sí lo son. Sabe que el triángulo y el cuadrado son ejemplos de polígonos y el círculo no lo es (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Rocío sabe que los estudiantes de primaria identifican al rectángulo como polígono (KMLS, nivel de desarrollo conceptual esperado), y dice que *para hacer una figura distinta dibujan un rectángulo con dos lados curvos, por lo que ya no es un polígono*

[TF1.2A.28 U1030]. Muestra conocimiento sobre atributos relevantes del concepto polígono, los lados deben ser rectos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

En el análisis de la definición a la que llegan los estudiantes de Primaria, Mila advierte que *deberían de especificar que todos los lados son rectos, para así no llevar a la duda* [TF1.2A.28 U1038]. Para ella es importante que se incida en que todos los lados deben ser rectos. Si se dice que tiene lados rectos, por ejemplo, la figura a la que se hace referencia en el párrafo anterior cumple ese atributo, pues tiene lados rectos, pero no es polígono porque no todos los lados lo son (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Mila sabe que una característica fundamental de una definición matemática es que ésta sea precisa, evitando la ambigüedad (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).



Por último, Mila se fija en el vocabulario que utilizan los estudiantes. Así dice que *tienen dificultad en el uso de un vocabulario adecuado, ya que no utilizan uno técnico. Utilizan “picos” en vez de vértices, “huecos” en vez de que se trata de un polígono abierto...* [TF1.2A.28 U1040]. Efrén lo justifica al relacionarlo *con el nivel de razonamiento que tienen los estudiantes. Sabe que con el tiempo irán pasando a un lenguaje más formal* [TF1.2A.28 U1041]. Se evidencia conocimiento, por una parte, del vocabulario comúnmente utilizado por estudiantes de este nivel (KFLM, formas de interacción con un contenido matemático). Por otra, sobre el modelo de razonamiento geométrico de van Hiele, al saber identificar el nivel de razonamiento de los estudiantes analizando sus respuestas a la tarea planteada (KFLM, teorías de aprendizaje).

Tabla 4.42

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 9

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Saben que el círculo no es un polígono (U1029).
		Saben que los lados de los polígonos son rectos (U1030).
	Registros de representación	Saben que un atributo relevante del concepto polígono es que todos los lados sean rectos (U1038).
KPM	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	Saben que el concepto de polígono puede representarse de manera figural-icónica (además de gráfica) (U1044).
		Saben que una definición matemática debe ser precisa, evitando la ambigüedad (U1038).
KFLM	Teorías de aprendizaje	Saben que los estudiantes pasan por diferentes niveles de razonamiento, y conocen el vocabulario usual en los niveles iniciales (U1041).

	<u>Fortalezas y dificultades</u>	Saben que los estudiantes relacionarán polígonos con la imagen conceptual generada por el trabajo previo sobre dicho concepto (U1029, 1032, 1034, 1036).
	Formas de interacción con un contenido matemático	Saben qué tipo de vocabulario utilizan comúnmente los estudiantes de cierto nivel (U1041).
KMT	Recursos materiales y digitales	Saben que el uso del libro de texto puede generar dificultades al generar imágenes prototípicas del concepto polígono asociadas a las figuras que usualmente se utilizan en este recurso (U1043, 1044). Saben que puede usarse material concreto para representar el concepto de polígono (U1044).
KMLS	Nivel de conocimiento conceptual y procedimental esperado	Saben que los estudiantes de 4º de Educación Primaria saben que el rectángulo es un tipo de polígono (U1030).

4.3.2.7. Actividad 10. Nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes.

Al igual que en el primer ciclo, la formadora había dedicado alguna clase anterior a la implementación de la tarea a mostrarles a los EPM el modelo de razonamiento geométrico de van Hiele, describiendo los niveles de razonamiento y las fases que se explicitan en el modelo. Habían hecho alguna práctica para identificar el nivel de aprendizaje de algún estudiante atendiendo a la forma en la que ejecuta algún proceso de razonamiento geométrico. A los EPM se les facilita una tabla resumen de las características del modelo.

El conocimiento pretendido está vinculado al conocimiento del modelo de van Hiele (KFLM, teorías de aprendizaje).

Actividad 10. Teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes, ¿podríamos determinar el nivel de razonamiento geométrico de cada uno de ellos? Selecciona una intervención que te parezca especialmente significativa en este sentido.

El fragmento correspondiente a esta tarea a analizar se concentra en un único episodio.

Análisis

Tabla 4.43

Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 10

Código	Contenido del episodio
[TF1.2A.29 U1046-1095]	Nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes

[TF1.2A.29 U1046-1095] Nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes.

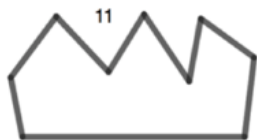
1046. Formadora: Bien, teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes, ¿a qué nivel creéis que llegan los alumnos?

1047. *Mónica: ¿Pero todos en general?*
1048. *Formadora: Situaciones en las que podáis ver..., [...].*
1049. *Mónica: En la 48... Dice... no, no lo es porque tiene un hueco.*
1053. *Mónica: Ahí está en el primer nivel.*
1054. *Alumnos: Sí.*
1056. *Cati: En la línea 57 que dice... porque tiene picos para adentro. También...*
1057. *Formadora: Estaríamos en la misma situación. Hay distintas intervenciones en las que utilizan un lenguaje no matemático, un lenguaje común, coloquial, que hace que podamos observar el nivel 1.*
1070. *Cati: Yo creo que en la línea 98, que dice... está cerrada tiene cuatro lados y tiene vértices, ahí podríamos decir que está en el segundo.*
1077. *Juana: ¿Y en la 112 y en la 113 también sería el dos?*
1080. *Jorge: En la 114, cuando dice un vértice del que salen cuatro lados y de los vértices de los polígonos solo pueden salir dos lados...*
1082. *Jorge: Ahí es el nivel dos porque ya... como que deduce propiedades a partir de la experimentación de la figura.*
1089. *Mónica: En la 99 que un alumno se da cuenta de un ejercicio anterior que la P tiene lados curvos.*
1094. *Formadora: El primero está dando propiedades, aunque lo haga de manera incorrecta. El segundo asume las propiedades, pero además...*
1095. *Mónica: Pero este alumno... le dice como que no, como que lo corrige. Entonces es capaz de asumir..., puede que tenga el nivel dos.*

Para responder a esta actividad, los EPM hacen uso del conocimiento que tienen sobre el modelo de razonamiento geométrico de van Hiele, que lo han trabajado en clase en sesiones previas a la implementación de la tarea formativa. Dicho modelo ofrece un marco para considerar distintos niveles de aprendizaje de contenidos geométricos. Es una teoría de aprendizaje desde el propio campo de la Educación Matemática. Para identificar el nivel de razonamiento de los estudiantes, los EPM deben fijarse en cómo ejecutan los distintos procesos de razonamiento (reconocimiento, definición, clasificación y demostración).

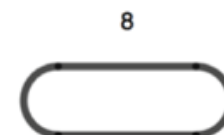
Los EPM identifican intervenciones de estudiantes que les permiten determinar el nivel de razonamiento de cada uno de ellos. Así, Mónica se fija en el argumento que utiliza un estudiante para justificar que la figura 13 no es un polígono. El alumno dice *no, no lo es porque tiene un hueco* [TF1.2A.29 U1049], refiriéndose a que la línea poligonal es abierta. Por su parte, Cati pone su atención en la justificación que hace otro estudiante para afirmar que la figura 11 no es polígono. Alude a una razón incorrecta al afirmar que

no lo es porque *tiene picos para adentro* [TF1.2A.29 U1056]. En ambos casos, las EPM consideran que los estudiantes están *en el primer nivel* [TF1.2A.29 U1053, U1056], al tener en cuenta el uso de un lenguaje coloquial, poco formal. Saben que hay una estrecha relación entre el lenguaje utilizado en la resolución de una actividad y los distintos niveles de razonamiento geométrico (KFLM, teorías de aprendizaje).



Esta misma EPM pone la atención en la respuesta que da un estudiante para justificar que la figura 8 es un

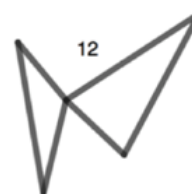
polígono. En este caso, el argumento es que la figura



está cerrada tiene cuatro lados y tiene vértices [TF1.2A.29 U1070].

Aunque la figura no es un polígono, por tener lados curvos, la respuesta del estudiante hace pensar a Cati *que está en el segundo nivel* [TF1.2A.29 U1070]. Sabe que en este nivel los estudiantes reconocen las figuras geométricas formadas por elementos dotados de propiedades matemáticas. Da un listado de propiedades de ciertos elementos, en este caso, del polígono. Muestra, por tanto, conocimiento sobre KFLM (teorías de aprendizaje).

Aludiendo al mismo argumento, Juana considera que el estudiante que dice que la figura 12 es un polígono *porque cumple las condiciones que hemos dicho antes que debe cumplir un polígono, es cerrado, tiene lados rectos y tiene vértices* [TF1.2A.29 U1078] está en el nivel 2, basándose, al igual que se compañera, en que utiliza un listado de elementos y propiedades para justificar que la figura es polígono (KFLM, teorías de aprendizaje).



Relacionado con esta última intervención, un estudiante alega que la figura 12 no es polígono porque hay *un vértice del que salen cuatro lados y de los vértices de los polígonos solo pueden salir dos lados* [TF1.2A.29 U1082], haciendo referencia a que la línea poligonal que delimita a un polígono es simple. Jorge considera que este estudiante también está en nivel dos *porque ya... como que deduce propiedades a partir de la experimentación de la figura* (KFLM, teorías de aprendizaje).

Por último, Mónica considera que el estudiante que para justificar que la figura 8 no es polígono porque le pasa lo mismo que a la *P* (figura 10), *tiene lados curvos* [TF1.2A.29 U1089], también está en *el nivel dos* [TF1.2A.29 U1095]. Se entiende que esta respuesta la da al tener en cuenta que el estudiante alude a propiedades de cierto elemento (KFLM, teorías de aprendizaje).



Tabla 4.44

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 10

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KFLM	<u>Teorías de aprendizaje</u>	Saben que los estudiantes que utilizan un lenguaje informal están en el primer nivel de razonamiento geométrico (U1053, 1056).
		Saben que los estudiantes que reconocen las figuras formadas por elementos con propiedades matemáticas están en el nivel 2 de razonamiento geométrico (U1070, 1077, 1095).

4.3.3. Tercer fragmento: Clasificación.

Resumen

En esta tercera parte del caso se les presenta a los EPM la resolución de la actividad que Jimena plantea a sus estudiantes para trabajar la clasificación de polígonos. Como ya se explicó en el apartado 4.3.3, la maestra da a cada grupo de estudiantes un conjunto de figuras y proyecta una imagen de ese mismo conjunto (Figura 4.34). Los estudiantes tienen que pensar en criterios que les permitan agrupar los polígonos en conjuntos con características equivalentes. En la puesta en común se agrupan los polígonos en clases según el criterio elegido.

La formadora invita a los EPM a leer el último fragmento del caso y a reflexionar sobre ciertos elementos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, con el fin de responder a las cuatro actividades propuestas.

Durante la lectura del caso y de los enunciados de las actividades los EPM plantean diversas dudas. La respuesta de la formadora propicia interacciones entre ella y los EPM que se desarrollan de manera previa a los debates que surgen en la resolución de cada actividad.

Para el análisis hemos modificado el orden natural de las intervenciones generando episodios asociados a las actividades. Así, las unidades de información que forman los episodios de alguna actividad no son consecutivos.

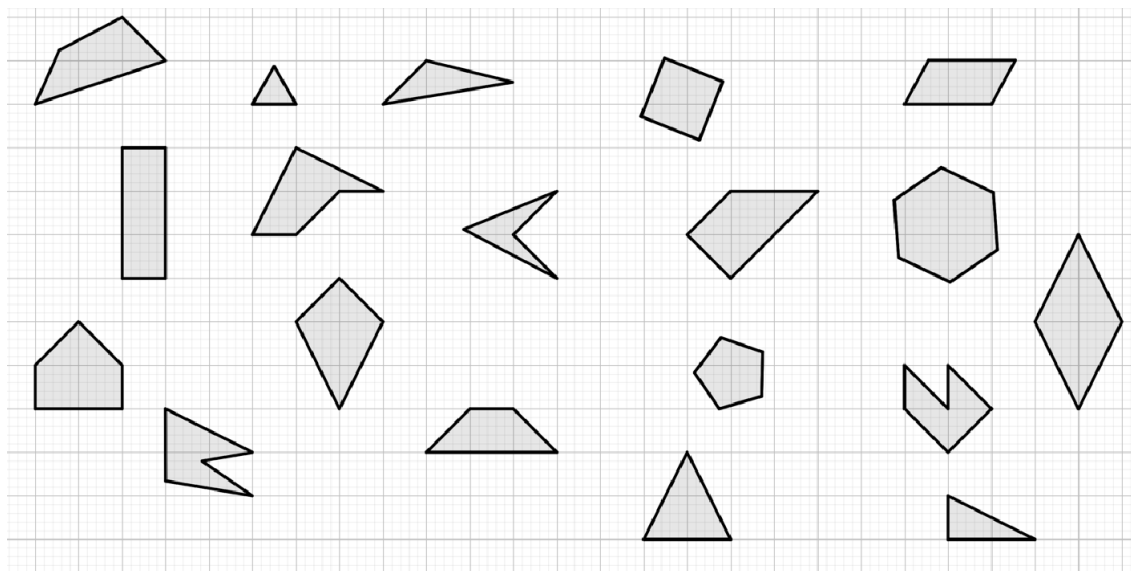


Figura 4.34 Conjunto de polígonos facilitados por la maestra

4.3.3.1. Actividad 11. Criterios para clasificar polígonos.

En el caso se muestran los dos criterios de clasificación de polígonos propuestos por los estudiantes de quinto de Educación Primaria. A los EPM se les plantea que propongan otros criterios que les permita clasificar polígonos.

El conocimiento pretendido, por lo tanto, está vinculado a la reflexión sobre características de los polígonos que puedan variar según la figura, de forma que puedan utilizarse para establecer clasificaciones (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos; procedimientos).

Actividad 11. Pensad otros criterios que se podrían usar para agrupar los polígonos de la Ilustración 2 (Figura 4.34).

La transcripción de la resolución en el aula de la actividad 11 la hemos dividido en seis episodios. En el primero de ellos tratan sobre los criterios que, tal y como aparecen en el caso, han utilizado los estudiantes de Primaria. En cada uno de los otros cinco episodios se trata uno de los nuevos criterios de clasificación de polígonos propuestos por los EPM.

Análisis

Tabla 4.45

Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 11

Código	Contenido del episodio
[TF1.2A.30 U1096-1209]	Criterios dados por los estudiantes
[TF1.2A.31 U1212-1222]	Criterios dados por los EPM: Ángulos de 90°
[TF1.2A.32 U1223-1258]	Criterios dados por los EPM: Número de diagonales
[TF1.2A.33 U1060-1266]	Criterios dados por los EPM: Regularidad
[TF1.2A.34 U1270-1286]	Criterios dados por los EPM: Simetría
[TF1.2A.35 U1287-1300]	Criterios dados por los EPM: Lados paralelos

[TF1.2A.30 U1096-1209] Criterios dados por los estudiantes.

1096. Formadora: Continuamos leyendo desde la línea 121 [...]. En ese fragmento la profesora plantea una actividad para trabajar la clasificación de figuras

1159. Juana: En lo del número de lados se establece una categorización, ¿no?, porque si tiene 4 lados tiene 3, ¿o no?

1161. Juana: Lo de cóncavo y convexo no puede ser.

1162. Formadora: ¿Cóncavo y convexo es una clasificación o una categorización?

1163. Juana: Es una clasificación, porque tienes cóncavos, por un lado, convexos por otro...

1164. Formadora: Y no hay ningún elemento en común.

1190. Juana: Pero los cóncavos tienen también ángulos convexos.

1191. Formadora: ¿Cómo sabemos si la figura es cóncava o es convexa?

1192. Carolina: Cóncava, es suficiente con que tenga un ángulo cóncavo.

1197. Formadora: Con tener uno ya es cóncavo. ¿Puede haber un polígono con todos los ángulos cóncavos?

1198. Alumnos: No.

1200. Juana: Porque no se puede cerrar.

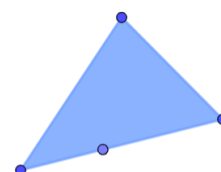
1201. Diana: No se cerraría.

1203. Juana: Vale, y ¿existe un polígono con ángulos de 180° ?

1205. Carolina: Es que si tiene un ángulo de 180° es un lado.

1206. Formadora: Claro. Si yo tengo aquí un ángulo de 180° [Dibujando en la pizarra un triángulo con un punto de un lado como vértice de un ángulo llano] y hago esto...

1207. Jorge: Es un triángulo.



Al inicio del episodio Juana plantea si agrupar un conjunto de polígonos atendiendo al número de lados es una categorización. Tiene dudas sobre si el uso del número de lados como criterio de agrupamiento de polígonos corresponde con un proceso de clasificación o de categorización. Es decir, si genera clases disjuntas (cada polígono pertenece de

manera exclusiva a una sola clase), o da lugar a una inclusión de clases, donde una clase puede estar contenida en otra, generando una jerarquía de conjuntos. Juana sabe que el número de lados se puede utilizar como criterio de clasificación (KoT, procedimientos).

Asimismo, esta EPM reconoce que la convexidad es un criterio útil para agrupar polígonos (KoT, procedimientos). Además, sabe que *es una clasificación, porque tienes cóncavos, por un lado, convexos por otro...* [TF1.2A.30 U1163]. Sabe que este criterio genera clases disjuntas (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático).

Los EPM saben qué significa que un polígono sea cóncavo. Así, Juana señala que *los cóncavos tienen también ángulos convexos* [TF1.2A.30 U1190]. Por su parte, Carolina dice que para que un polígono sea *cóncavo, es suficiente con que tenga un ángulo cóncavo* [TF1.2A.30 U1192]. Ambas EPM reconocen atributos relevantes del polígono cóncavo (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Carolina reconoce que el tener al menos un ángulo cóncavo es una condición suficiente.

Los EPM, además, saben que un polígono no puede tener todos los ángulos cóncavos, y así lo expresan respondiendo a la pregunta de la formadora. Juana y Diana lo justifican diciendo que si todos los ángulos fuesen cóncavos la figura *no se puede cerrar* [TF1.2A.30 U1200, 1201] (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Juana plantea si un polígono puede tener un ángulo de 180° . Esta pregunta suscita la reacción de Carolina, que responde que, de ser así, dicho ángulo coincidiría con la prolongación de un lado [TF1.2A.30 U1205], por lo que dejaría de definirse como ángulo interior y pasaría a formar parte del propio lado del polígono (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

La formadora representa un polígono con cuatro vértices, de tal forma que en uno de ellos el ángulo interior tiene una amplitud de 180° , como ejemplo de figura propuesta por Juana. Jorge reconoce que, a pesar de tener marcados 4 puntos como vértices, la figura representada es un triángulo, porque el “vértice” en el que el ángulo interior es llano realmente no se consideraría como tal (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos) [TF1.2A.30 U1207].

[TF1.2A.31 U1212-1222] Criterios dados por los EPM: Ángulos de 90°

1212. Formadora: ¿Qué otros criterios habéis planteado vosotros?

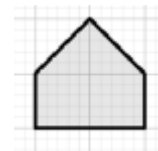
1213. Marco: Que las figuras tengan ángulos de 90° .

1214. Formadora: ¿Qué agrupamientos generaría ese criterio?

1215. Marco: Pues por un lado tendríamos a las figuras que no tuvieran ningún ángulo de 90° y por otro las que sí tengan un ángulo de 90° , o más.

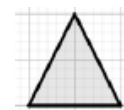
1216. Formadora: ¿Eso generaría una clasificación o una categorización? Dime un ejemplo de cada uno de los tipos, por favor.

1217. Marco: Por ejemplo, [Señalando a las figuras de la diapositiva (Figura 4.34)]. El pentágono que está abajo a la izquierda...



1220. Formadora: Ese tiene dos ángulos rectos, estaría en el primer grupo.

1221. Juana: Sí, y en el segundo grupo, por ejemplo, el triángulo.



1222. Marco: El trapecio, por ejemplo, que no tiene ningún ángulo recto, o



cualquiera de estas otras figuras, serían ejemplo del otro.

Habría dos grupos... Incluso podríamos detallar más. Ahí hay un grupo que sería de figuras con ángulos rectos y sin ángulos rectos, pero podríamos decir con 1 ángulo recto, con 2 ángulos rectos, con 3 ángulos rectos. Esa podría ser otra clasificación.

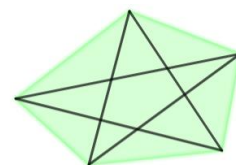
En el marco de la actividad 11, los EPM identifican y enuncian nuevos criterios de clasificación de polígonos. Como ejemplo, Marco propone utilizar como criterio la presencia de ángulos rectos en la figura, lo que permitiría diferenciar polígonos que poseen al menos un ángulo recto de aquellos que no lo tienen [TF1.2A.31 U1213, 1215]. Además, sabe que dependiendo de cómo se enuncie el criterio los polígonos se podrían agrupar de dos formas diferentes. Una de ellas genera dos clases de equivalencia: no tiene ángulos rectos, por un lado, y tiene ángulos rectos, por otro. En la otra agrupación habría infinitas clases de equivalencia: polígonos sin ángulos rectos, con un ángulo recto, con dos ángulos rectos, ..., con n ángulos rectos [TF1.2A.31 U1222]. Sabe el efecto que tiene la forma de enunciar el criterio en las clases que se generan al aplicarlo en el conjunto de polígonos (KoT, procedimientos).

Marco muestra conocimiento sobre lo que es un ángulo recto (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). También sabe que el tener en cuenta si el polígono tiene ángulos rectos o no es un criterio de clasificación de polígonos (KoT, procedimientos). Además, este EPM identifica representantes de diferentes clases generadas por el criterio enunciado y las reconoce por su nombre. Así dice *el pentágono* [TF1.2A.31 U1217], figura que aparece con dos ángulos rectos en la imagen, como representante de la clase de polígonos con ángulos rectos; o el *trapecio* isósceles [TF1.2A.31 U1222] como figura

que no tiene ángulos rectos. Juana también identifica al *triángulo* [TF1.2A.31 U1221] como representante de esa misma clase (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

[TF1.2A.32 U1223-1258] Criterios dados por los EPM: Número de diagonales

1223. Mavi: Otro criterio puede ser atendiendo al número diagonales.
1224. Formadora: ¿Cómo sería esa clasificación? ¿Por qué número de diagonales tendríamos que empezar a poner?
1229. Coral: Ninguna.
1231. Mónica: El triángulo, por ejemplo.
1234. Juana: Hay 0 y 2.
1235. Formadora: [...] ¿Con 1 diagonal habría alguna?
1236. Alumnos: No.
1237. Julio: Con dos.
1238. Formadora: ¿Con 3 diagonales?
1240. Carolina: Con 3 no.
1243. Formadora: Esta clasificación me gusta porque, además, ahora podemos intentar establecer conexiones entre ellas.
1245. Mara: Que las diagonales tienen que tener relación con los lados, ¿no?, porque todos los polígonos de 4 lados tienen 2 diagonales...
1246. Formadora: Muy bien, es cierto... [...] Además, la clasificación por el número de ángulos o por el número de vértices es la misma porque en un polígono siempre hay la misma cantidad de lados, de vértices y de ángulos. [...] La clasificación que ha dado Mavi [...] es equivalente a la que estaba puesta por los niños.
1250. Formadora: [...] Si tengo un pentágono van a tener 5 diagonales.
1251. Coral: Pero en un pentágono no hay 5 diagonales.
1252. Juana: Sí.
1256. Coral: Ah, vale ya... sí.
1257. Formadora: Hago desde aquí [representando en la pizarra] una, dos, tres, cuatro, cinco.
1258. Coral: Sí, sí.



Otro criterio de clasificación de polígonos lo aporta Mavi al decir que se pueden clasificar *atendiendo al número diagonales* [TF1.2A.32 U1223] (KoT, procedimientos).

Los EPM saben que hay polígonos que no tienen diagonales [TF1.2A.32 U1229] y también que hay polígonos con dos diagonales [TF1.2A.32 U1234]. Además, saben que no hay polígonos con una o con tres diagonales [TF1.2A.320 U1236, 1240]. En estas

intervenciones se evidencia conocimiento sobre propiedades de la diagonal (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, Mónica identifica al *triángulo* como ejemplo de polígono que no tiene diagonales [TF1.2A.32 U1231] (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Mara establece una relación entre la clasificación de polígonos según su número de lados con la que se genera atendiendo al número de diagonales. Reconoce que los cuadriláteros tienen todos dos diagonales [TF1.2A.32 U1245]. Es capaz de establecer una relación funcional entre ambas magnitudes (KoT definiciones, propiedades y sus fundamentos).

La formadora establece una equivalencia entre los criterios de clasificación de polígonos basados en el número de lados, el número de vértices o el de diagonales. Estos tres criterios generan particiones equivalentes del conjunto de polígonos.

[TF1.2A.33 U1260-1266] Criterios dados por los EPM: Regularidad

1260. Mila: *Yo he puesto clasificación de polígonos en regulares e irregulares.*

1261. Formadora: *Muy bien. Ese sería otro agrupamiento en figuras regulares que tienen que verificar ¿qué?*

1262. Mara: *Que sus lados y sus ángulos sean iguales.*

1263. Formadora: *Que tengan todos los lados de la misma longitud y los ángulos de la misma amplitud. Los que no verifican alguna de las propiedades serían ...*

1264. Mara: *Irregulares.*

1265. Formadora: *Eso sería, también, una...*

1266. Mara: *Clasificación.*

Mila propone un criterio clásico para clasificar polígonos. Plantea clasificar los polígonos en *regulares e irregulares* [TF1.2A.33 U1260]. De esta forma evidencia su conocimiento sobre características de los polígonos que permiten establecer clasificaciones (KoT, procedimientos; definiciones, propiedades y sus fundamentos).

La formadora interpela a los EPM para que muestren lo que entienden por polígono regular. Mara, lo define como aquel en el *que sus lados y sus ángulos sean iguales* [TF1.2A.33 U1262], refiriéndose a que los lados tengan la misma longitud y los ángulos la misma amplitud (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). También sabe que los polígonos que no cumplen alguno de estos atributos se llaman *irregulares*

[TF1.2A.33 U1264], correspondiendo con la otra clase de polígonos que genera este criterio (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Al final de este episodio, Mara reconoce que el agrupamiento generado a partir de este criterio es una *clasificación* [TF1.2A.33 U1266], en el sentido de que divide el conjunto de polígonos en clases de equivalencia (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático).

[TF1.2A.34 U1270-1286] Criterios dados por los EPM: Simetría

1270. Juana: En que sean simétricas o no.

1271. Formadora: Muy bien. En este caso las figuras quedarían agrupadas en..., simétrica...o no simétrica. Y eso sería...

1273. Mónica: Clasificación.

1274. Formadora: También clasificación. Simétrica por un lado y no simétrica por otro. Dentro de la simetría podríamos hilar un poco más fino y determinar también diferencias.

1275. Carolina: Sí, el número de ejes de simetría que tenga, ¿no?

1276. Formadora: Muy bien... Esta figura (el trapecio), por ejemplo..., ¿es simétrica?

1277. Alumnos: Sí.

1278. Formadora: ¿Dónde hay ejes de simetría?

1279. Mara: Hay uno así [marca una vertical con su brazo].

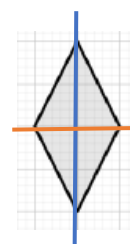


1280. Formadora: Hay un eje de simetría que pasa por el punto medio de los dos lados paralelos.

1281. [Los alumnos asienten].

1282. Formadora: Esa figura ¿es simétrica? El rombo.

1283. Alumnos: Sí [varias estudiantes marcan con sus manos el eje vertical y el horizontal].



1284. Formadora: Tiene dos ejes de simetría. Entonces, podríamos detallar un poquito más y decir... Hay figuras con 0 ejes de simetría [...] que quieren decir figuras no simétricas. Con 1 eje de simetría, con 2 ejes, con 3...

Un cuarto criterio de clasificación de polígonos aportado por los EPM es *que sean simétricas o no* [TF1.2A.34 U1270]. Aporta un nuevo atributo irrelevante para ser polígono, la simetría, que nos permite establecer agrupamientos de polígonos (KoT, procedimientos; definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Al igual que Mara al final del episodio anterior, Mónica sabe que el uso de la simetría como criterio de agrupamiento genera una *clasificación* [TF1.2A.34 U1273], en el mismo sentido que su compañera (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático).

La formadora invita a los EPM a profundizar en la reflexión sobre el criterio de simetría como medio de clasificación de polígonos. Los anima a “hilar más fino” con este atributo, explorando no solo la distinción entre polígonos simétricos y no simétricos, sino también la posibilidad de establecer una clasificación más refinada a partir del mismo criterio. Carolina propone fijarse en *el número de ejes de simetría que tenga* el polígono [TF1.2A.34 U1275]. Esta intervención la consideramos como indicio de que sabe qué significa el concepto eje de simetría (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, precisa el criterio de clasificación (KoT, procedimientos). Por otra parte, el uso de un lenguaje matemático con rigor lo consideramos KPM (*uso del lenguaje formal*).

Los EPM identifican figuras simétricas entre las que aparecen proyectadas (Figura 4.34), concretamente el trapecio isósceles y el rombo [TF1.2A.34 U1277, 1283]. Es decir, reconocen ejemplos de polígonos simétricos (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, cuando la formadora les pregunta por los ejes de simetría de cada una de las dos figuras, los EPM los identifican correctamente (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos) y los representan con movimientos verticales y/u horizontales en cada caso, utilizando un registro de representación gráfico, considerando el rastro que deja el movimiento [TF1.2A.34 U1279, 1283] (KoT, registros de representación).

[TF1.2A.35 U1287-1300] Criterios dados por los EPM: Lados paralelos

1287. Cati: *¿Por lados paralelos?*

1288. Formadora: *Pues esa podría ser otra clasificación. Habrá figuras sin pares de lados paralelos, con un par de lados paralelos, con dos pares de lados paralelos...*

1289. Rocío: *También podría ser los tipos de cuadriláteros que hay.*

1290. Formadora: *Sí, pero si nos fijamos en los tipos de cuadriláteros que hay me serviría para establecer una clasificación dentro de ese grupo, pero habría figuras que no las podría clasificar.*

1293. Mónica: *Con lo de los lados paralelos, si tú dices que tiene dos lados paralelos, sería clasificación, pero si dices que tenga al menos dos lados paralelos sería categorización, ¿no? Porque dentro de los polígonos con al menos 2 lados paralelos están los que tienen dos pares de lados paralelos.*

1296. Formadora: *Si digo solo que tenga lados paralelos voy a tener dos grupos.*

El último criterio de agrupamiento es propuesto por Cati, quien sugiere considerar si el polígono tiene *lados paralelos* [TF1.2A.35 U1287] como atributo para clasificar polígonos (KoT, procedimientos). Entendemos que conoce el significado del paralelismo

(KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). La propuesta de Cati evoca en Rocío la clasificación de los cuadriláteros [TF1.2A.35 U1289], basada en el número de pares de lados paralelos, aunque en la pregunta se pide criterios para clasificar polígonos en general, con cualquier número de lados. La intervención de Rocío es un indicio de que sabe lo que significa el término cuadrilátero (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

En las intervenciones finales de este episodio, Mónica evidencia comprensión sobre el significado de establecer clasificaciones, pues distinguen entre aquellas que generan clases de equivalencia y aquellas que suponen una inclusión de clases, donde se dispone una organización jerárquica en la que unas clases están contenidas en otras [TF1.2A.35 U1293]. Entiende, de manera general, qué significa establecer clasificaciones que generen particiones del conjunto o que formen relaciones de inclusión de clases (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático).

Tabla 4.46

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 11

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	<u>Procedimientos</u>	Saben que el número de lados de un polígono se puede utilizar como criterio de clasificación (U1159).
		Saben que el número de ángulos rectos de un polígono se puede utilizar como criterio de clasificación (U1213, 1215).
		Saben que la manera en la que se enuncie un criterio condiciona el número de clases que se generan (U1222).
		Saben que el número de diagonales de un polígono se puede utilizar como criterio de clasificación (U1223).
		Saben que la regularidad del polígono permite su clasificación (U1260).
		Saben que la simetría del polígono permite su clasificación (U1270).
		Saben precisar el criterio de simetría para establecer una partición más detallada (U1275).
	<u>Definiciones, propiedades y sus fundamentos</u>	Saben que el número de pares de lados paralelos es un criterio de clasificación (U1287).
		Saben qué significa que un polígono sea convexo o sea cóncavo (U1163).
		Saben que para que un polígono sea cóncavo es suficiente que tenga un ángulo cóncavo (1190, 1192).
		Saben que si un polígono tuviese todos los ángulos cóncavos no quedaría limitado por la línea poligonal (U1200, 1201).
		Saben que un polígono no puede tener ángulos de 180° porque un lado sería prolongación del consecutivo (U1205, 1207, 1208).
		Saben identificar ángulos rectos (U1213).

			Saben reconocer diferentes tipos de polígonos como representantes de las clases de equivalencia que genera el criterio “número de ángulos rectos” (U1217, 1221, 1222).
			Saben que hay polígonos con 0 o 2 diagonales, y que no los hay con 1 o 3 diagonales (U1229, 1234, 1236, 1240).
			Identifican ejemplos de polígonos con cero diagonales (U1231).
			Establecen una relación entre la clasificación de polígonos generada atendiendo al número de diagonales con la que se obtiene al considerar el número de lados (U1245).
			Saben que las características que permiten clasificar los polígonos en regulares e irregulares (U1260).
			Saben que los lados de los polígonos regulares tienen todos la misma longitud y sus ángulos la misma amplitud (U1262)
			Saben que los polígonos que no tienen todos los lados de igual longitud o no tienen todos los ángulos de igual amplitud se llaman irregulares (U1264).
			Saben qué significa que una figura sea simétrica (U1270).
			Conocen el significado del concepto eje de simetría (U1275).
			Reconocen ejemplos de polígonos simétricos (U1277, 1283).
KPM	Registros de representación		Saben lo que significa que dos lados sean paralelos (U1287).
			Saben el significado del concepto cuadrilátero (U1289).
	Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal		Saben representar con un registro gráfico los ejes de simetría de los polígonos señalados (U1279, 1283).
			Saben enunciar con precisión un criterio de clasificación de polígonos atendiendo al número de ejes de simetría que tiene la figura (U1275).
	Prácticas particulares del quehacer matemático		Saben que en una clasificación se generan clases disjuntas (U1163).
			Sabe que el criterio de regularidad constituye una clasificación, en el sentido de generar clases de equivalencia (U1266).
			Sabe que el criterio de simetría constituye una clasificación, en el sentido de generar clases de equivalencia (U1273).
			Saben diferenciar entre criterios que generan una partición de un conjunto de otras que establecen jerarquía de clases (U1293).

4.3.3.2. Actividad 12. Aprendizaje con esta actividad

Con esta actividad se pide a los EPM que reflexionen sobre los ventajas y desafíos que puede suponer a los estudiantes el que comparen y clasifiquen polígonos según distintos criterios, en lugar de enseñarles directamente las clasificaciones tradicionales. En la actividad 7 se les plantea que reflexionen sobre los beneficios o dificultades que les puede suponer a los estudiantes el tratar la definición de polígono desde la construcción inductiva del concepto (a partir de ejemplos y sus características comunes) comparada

con la simple memorización de una definición dada, para valorar cuál enfoque resulta más pertinente para la enseñanza.

Actividad 12. ¿Qué aprenden los alumnos con esta actividad? ¿Qué interés tiene frente a que se les hubiera dado un agrupamiento concreto?

El conocimiento pretendido con esta actividad está vinculado al análisis de la actividad propuesta por Jimena (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). La resolución de esta tarea se trata en un único episodio de la transcripción.

Análisis

Tabla 4.47

Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 12

Código	Contenido del episodio
[TF1.2A.36 U1302-1312]	Ventajas de trabajar así la clasificación de polígonos

[TF1.2A.36 U1302-1312] Criterios dados por los EPM: Simetría

1302. Formadora: Vamos a avanzar... ¿Qué aprenden los alumnos con esta actividad?

1303. Cati: Pues lo mismo de antes... Les ayuda a mejorar el conocimiento, a que tengan iniciativa, motivación..., no sé.

1304. Mónica: Yo he puesto que les enseña también a que dentro de un grupo se pueden clasificar en distintos grupos. Dentro de los polígonos puedes hacer diferentes clasificaciones y que lo hacen a modo de juego para los niños, con lo cual es más motivacional para ellos.

1306. Sonia: Así aplican los contenidos que ya han salido. Porque si tú no aplicas una cosa te la puedes saber en la teoría, pero en la práctica te puede resultar más difícil.

1308. Marco: Y además que tienen... mejor forma de participar, es decir, como trabajan en grupos de 4 pueden actuar más e interactuar más con los demás, en vez de que sea en toda la clase que son más alumnos.

1310. Coral: Que yo creo que también pueden ampliar conocimiento sobre el mismo concepto. Por ejemplo, tú sabes que un polígono tiene o no tiene diagonales, pero sabes por qué las tiene o por qué no las tiene, o por qué tiene a veces ninguna u otras veces...

1311. Formadora: Otro aspecto también importante yo creo que es el poder poner en la pizarra los agrupamientos en los que cada figura en cada agrupamiento tiene una posición, lo que hace es identificar a esa figura como representante de distintos grupos.

1312. Cati: Cada figura puede estar en distintos grupos.

Las ventajas que consideran los EPM están relacionadas, por una parte, con un conocimiento más profundo sobre la clasificación de polígonos, y por otra, con aspectos motivacionales.

Los EPM lo justifican destacando que el conocimiento que se construyen los estudiantes sobre la clasificación de polígonos a través de actividades como la propuesta por Jimena resulta más profundo y significativo que cuando se presentan clasificaciones ya determinadas [TF1.2A.36 U1303], pues favorece la aplicación de contenidos previamente trabajados [TF1.2A.36 U1306] y la ampliación de la comprensión del concepto [TF1.2A.36 U1310]. Es decir, valoran positivamente el uso de este tipo de actividades para el desarrollo de conocimiento de los estudiantes de Primaria (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Mónica, además, valora el que los estudiantes vean de manera pragmática que *dentro de un grupo* (de polígonos) *se pueden clasificar en distintos grupos*, es decir, dentro de clases se pueden establecer particiones. Además, le parece importante que se puedan establecer en paralelo *diferentes clasificaciones* de polígonos [TF1.2A.36 U1304]. Por otra parte, una potencialidad de este tipo de actividades está en conseguir que los estudiantes entiendan que *cada figura puede estar en distintos grupos* [TF1.2A.36 U1312]. Consideran, por lo tanto, beneficioso el que con este tipo de actividades los estudiantes puedan establecer relaciones entre diferentes clasificaciones (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Los otros argumentos dados por los EPM para justificar los beneficios de este tipo de actividades se orientan hacia aspectos motivacionales. Así, Cati destaca que esta actividad *hace que tenga iniciativa, motivación...* [TF1.2A.36 U1303]. Para Mónica, el que se trabaje *a modo de juego* es más *motivacional para ellos* [TF1.2A.36 U1304].

Consideran que la comparación de polígonos para establecer clasificaciones despierta mayor interés, participación y compromiso por parte de los estudiantes. A pesar de poder considerarlo como conocimiento pedagógico general, estamos de acuerdo con Carrillo (2000) en que el uso de actividades que impliquen al estudiante de forma cognitiva y afectiva contribuye a la construcción de aprendizaje significativo y fomenta el gusto por la matemática. Este tipo de tareas promueven el desarrollo de competencias matemáticas (Carrillo, J. et al., 2014) (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Tabla 4.48

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 12

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
.KMT	<u>Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos</u>	Saben que el uso de actividades en las que el estudiante tenga que construir diferentes clasificaciones generan un conocimiento más profundo y significativo (U1303).
		Saben que el uso de este tipo de actividades favorece la aplicación de contenidos previamente trabajados (U1306).
		Saben que el uso de este tipo de actividades amplía la comprensión del concepto (U1310)
		Conocen beneficios de la construcción de las clasificaciones frente a darlas ya determinadas (U1304).
		Consideran beneficioso el que con este tipo de actividades los estudiantes puedan establecer relaciones entre distintas clasificaciones de polígono (U1312).
		Saben que las actividades de construcción de clasificaciones despiertan mayor interés en el estudiante contribuyendo al desarrollo de competencias matemáticas (U1303, 1304)

4.3.3.3. Actividad 13. Recursos para la enseñanza

Esta actividad tiene como propósito principal que los EPM reflexionen sobre los beneficios y dificultades del uso de recursos materiales y digitales en la enseñanza de la clasificación de polígonos (KMT, recursos materiales y digitales). Cabe esperar que, dado que varios de estos recursos se basan en representaciones gráfico-figurales (Duval, 2006), a través de material manipulativo o de dibujos, puede emerger elementos de conocimiento vinculados a KoT (registros de representación) al considerar la forma en la que el tipo de representación pueda afectar a la comprensión de la definición o clasificación de polígonos.

Actividad 13. ¿Qué recursos para la enseñanza del contenido utiliza la maestra? Identifica potencialidades y limitaciones de los recursos utilizados.

El fragmento de la transcripción dedicado a responder a esta actividad lo vamos a dividir en dos episodios. El primero considera el diálogo generado en el aula mientras que algunos EPM formulan dudas de manera paralela a la lectura del caso y de los enunciados de las actividades. El segundo episodio corresponde al segmento de la sesión dedicado específicamente a la resolución de la actividad.

Análisis

Tabla 4.49

Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 13

Código	Contenido del episodio
[TF1.2A.37 U1102-1138]	Dudas de EPM sobre recursos
[TF1.2A.38 U1313-1340]	Debate sobre la actividad 13

[TF1.2A.37 U1102-1138] Dudas de EPM sobre recursos

1102. Juana: En recurso, ¿qué pongo, la pizarra?
1103. Formadora: Si ha utilizado la pizarra, pues sí. Y ahí además podéis decir [...] potencialidades o limitaciones que puede haber en el recurso.
1104. Juana: Yo he puesto lo que vimos en clase..., lo de llevar figuras para que las vieran sobre la mesa, la otra... Eso en la pizarra no lo puedes hacer.
1105. Formadora: Vale, eso para ti sería ¿una limitación o una potencialidad?
1106. Juana: Una limitación.
1108. Cati: Pero ¿un recurso no puede ser...? Sí, que salga a la pizarra a dibujar, pero... como positivo es que el niño está ampliando su imaginación o ... para buscar un elemento, pero una limitación también es que el niño se centraba en figuras prototípicas y la profesora les tuvo que incentivar a que se arriesgaran. ¿Eso podría ser un recurso?
1111. Formadora: Por recursos vamos a entender recursos materiales o virtuales.
1130. Mónica: Podemos considerar los recortes de cartulina como material concreto, ¿no?
1135. Carolina: ¿Las figuras de la diapositiva están hechas con GeoGebra?
1138. Formadora: Sí, esa proyección sí.

Este episodio corresponde con el diálogo que se genera de manera paralela a la lectura del caso y de los enunciados de las actividades al surgirle dudas a los EPM. Juana plantea si *la pizarra* [TF1.2A.37 U1102] se considera un recurso. Ella identifica como limitación del uso de la pizarra para trabajar la clasificación de polígonos la imposibilidad de manipular las figuras, lo que dificulta la interacción directa de los estudiantes con los objetos a clasificar (KMT, recursos materiales y digitales).

Juana identifica otro recurso, en este caso material. Se refiere a las *figuras* recortadas *para que las tengan sobre la mesa* [TF1.2A.37 U1104]. Aunque no lo dice explícitamente, se deduce por sus intervenciones sobre las limitaciones que detecta en el uso de la pizarra, que el que las figuras las puedan manipular los estudiantes lo considera un potencial del material (KMT, recursos materiales y digitales). Mónica también propone el uso de este mismo recurso como *material concreto* [TF1.2A.37 U1130].

De la pregunta de Carolina, *¿Las figuras de la diapositiva están hechas con GeoGebra?* [TF1.2A.37 U1135], deducimos que la EPM conoce el recurso virtual útil, entre otras cosas, para trabajar los contenidos matemáticos de manera dinámica (KMT, recursos materiales y digitales).

[TF1.2A.38 U1313-1340] Debate sobre la actividad 13

1313. *Formadora: ¿Qué recursos para la enseñanza utiliza la maestra? ¿Qué potencialidades o limitaciones habéis detectado?*

1314. *Paula: Yo he puesto la pizarra y la imagen proyectada de los distintos polígonos.*

1315. *Alumnos: Y las figuras recortadas en cartulina.*

1318. *Julio: Que son materiales manipulables que permite a los alumnos verlos y observar realmente las diferencias que hay entre uno y otro. Más fácil a la hora de comparar diferentes figuras.*

1319. *Formadora: Puedes comparar si los ángulos son iguales o uno mayor que otro...*

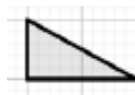
1320. *Juana: La simetría también.*

1321. *Formadora: La simetría con la cartulina se puede ver de una manera muy fácil, que es...*

1322. *Juana: Doblando.*

1329. *Sonia: Bueno, yo iba a decir una potencialidad... Al estar las figuras recortadas y ellos tenerlas en la mano, pueden cambiar las formas [se refiere a las posiciones] y salir, a lo mejor, de las formas prototípicas a las que están acostumbrados.*

1333. *Sonia: Porque aquí hay un triángulo que está puesto..., el triángulo de abajo a la derecha está puesto de forma prototípica, pero si ellos, a lo mejor, lo ponen en la mesa y al tirarlos lo ven de otra manera les puede crear confusión, que puede ser una potencialidad...*



1334. *Formadora: [...] Las figuras no tienen una forma única. [...] Lo van a poder tener en cualquier posición, y de esa manera estarían trabajando geometría de manera dinámica que es una de las recomendaciones para romper con las imágenes prototípicas. ¿Alguien ve alguna limitación en la pizarra o en las figuras de cartulina?*

1337. *Matilde: Que bueno, que lo ha hecho la profesora y puede que no sea perfecto y que de problemas a la hora de buscar los ejes de simetría..., que no esté perfecto puesto con sus...*

1339. *Jorge: Y que si tienen alguna duda en si la figura recortada es esa [comparándola con las figuras proyectadas], no las va a poder comparar como tal porque ahí [en la diapositiva] la imagen siempre se va a ver más grande y en una posición.*

1340. *Formadora: Sí, es verdad. Pero eso se podría resolver numerando las figuras.*

Los EPM no tienen dudas en identificar los recursos que utiliza la maestra con los estudiantes de quinto de Educación Primaria. Así, Paula identifica *la pizarra y la imagen*

proyectada de los distintos polígonos [TF1.2A.38 U1314] y varios alumnos dicen al unísono *las figuras recortadas en cartulina* [TF1.2A.37 U1315].

Julio identifica como potencialidad que los estudiantes puedan disponer de un conjunto de polígonos recortados en cartulina. De esa forma tienen la opción de observar simultáneamente varias figuras, facilitando su comparación y reconocimiento de similitudes y diferencias entre ellas [TF1.2A.37 U1318] (KMT, recursos materiales y digitales).

Juana concreta en las opciones que otorgan las figuras recortadas en cuanto a que permiten analizar la *simetría* de una figura de manera directa [TF1.2A.37 U1320], ya que al doblarlas es posible verificar si una figura es simétrica o no, lo que favorece el estudio de esta propiedad de manera práctica (KMT, recursos materiales y digitales). En esta intervención se evidencia que Juana sabe lo que significa que una figura sea simétrica (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Para Matilde, el que las figuras hayan sido recortadas por la maestra le parece que podría implicar algún conflicto, contemplando la posibilidad de que el material no esté *perfecto* y dificulte la localización de *los ejes de simetría* [TF1.2A.37 U1337]. Identifica, por lo tanto, una limitación del recurso (KMT, recursos materiales y digitales). Además, sabe el significado del concepto “eje de simetría” (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Una limitación que detecta Jorge en el uso de las figuras proyectadas y recortadas en cartulina de manera paralela es que, al tener diferente tamaño, y poder estar en distinta posición, los alumnos pueden tener dificultades en establecer la relación biunívoca entre las figuras de los dos conjuntos [TF1.2A.37 U1339]. Plantea una posible limitación de estos recursos (KMT, recursos materiales y digitales). Como solución, la formadora propone numerar las figuras proyectadas y recortadas estableciendo la equivalencia entre ellas.

Sonia observa una de las potencialidades principales de disponer de las figuras recortadas, que es que, al poder manipularlas, los estudiantes *pueden cambiar las formas [se refiere a las posiciones] y salir, a lo mejor, de las formas prototípicas a las que están acostumbrados*. [TF1.2A.37 U1329] (KMT, recursos materiales y digitales). La EPM

sabe que el cambio de posición de una figura hace que la imagen del polígono que se genere no sea la prototípica, que condiciona la toma de decisiones posteriores (Tall y Vinner, 1981) (KFLM, teorías de aprendizaje). Lo ejemplifica con el triángulo rectángulo que habitualmente se representa con los catetos, uno en horizontal y otro en vertical [TF1.2A.37 U1333].

Tabla 4.50

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 13

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Saben el significado de que un polígono sea simétrico (U1320).
		Conocen el concepto de ejes de simetría (U1337).
KFLM	Teorías de aprendizaje	Saben que el poder manipular los polígonos cambiándolos de posición permite no limitarse únicamente a imágenes prototípicas (U1329).
		Saben que la pizarra es un recurso material y que como limitación tiene que no permite la interacción directa de los estudiantes con los objetos a clasificar (U1102, 1104).
		Saben que disponer de polígonos recortados es un posible material para el trabajo de la clasificación de polígonos, e identifica como potencial de este el que los estudiantes puedan manipular las figuras (U1104, 1130).
		Conocen el recurso virtual GeoGebra (U1135).
KMT	<u>Recursos materiales y digitales</u>	Identifican los recursos materiales utilizados por la maestra en la sesión de clase: pizarra, proyección de figuras y polígonos recortados (U1315).
		Reconoce el potencial de las figuras recortadas como medio para comparar polígonos entre sí detectando similitudes y diferencias (U1318).
		Saben que el disponer de figuras recortadas en cartulina permite comprobar, de manera práctica, si un polígono es simétrico o no (U1320).
		Saben que si las figuras en cartulina no están bien recortadas puede dificultar la localización de los posibles ejes de simetría (U1337).
		Saben que el tener las figuras recortadas en papel y proyectadas de manera paralela puede suponer una dificultad a la hora de reconocer la equivalencia de las figuras de ambos conjuntos (U1339).
		Sabe que el uso de figuras recortadas en papel, al poder cambiarlas de posición, se generan imágenes del concepto no únicamente prototípicas (U1329).

4.3.3.4. Actividad 14. Adecuación de la actividad para quinto de primaria

Para la resolución de esta actividad, los EPM disponen de diversos documentos curriculares: el currículo andaluz de Educación Primaria (Consejería de Educación,

Cultura y Deportes, 2015) y un extracto de *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2000) relativo a esta etapa educativa. Con base en estos materiales, deben valorar la idoneidad de la actividad propuesta por Jimena para estudiantes de quinto de Educación Primaria (KMLS, resultados de aprendizaje esperados) y evidenciar conocimiento sobre las clasificaciones de polígonos pertinentes para este nivel (KMLS, nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado).

Debido a limitaciones de tiempo, la formadora propone que la actividad se resuelva de manera autónoma en casa; el análisis de la reflexión de los EPM se realizará a partir de sus producciones. Algunas de ellas se entregaron de formato manuscrito y otras en formato digital.

Análisis

Tabla 4.51

Episodio de la implementación de la TFor 1.2A Actividad 14

Código	Contenido del episodio
[TF1.2A.39 Producciones]	Adecuación de la actividad para 5° de Primaria

[TF1.2A.39 Producciones] Adecuación de la actividad para 5° de Primaria

Los EPM en sus reflexiones coinciden en que la actividad propuesta por Jimena es adecuada para trabajarla con estudiantes de 5.° de Educación Primaria, aunque difieren en el grado de profundidad de su argumentación. En la mayoría de los casos, los EPM fundamentan su respuesta en los documentos curriculares, haciendo referencia (implícita o explícitamente) a los criterios de evaluación o contenidos correspondientes al tercer ciclo de Primaria. Sin embargo, en otros casos se limitan a dar justificaciones basadas en su conocimiento global del currículo o su idea intuitiva de lo que creen que es adecuado.

Entre estas últimas están, por ejemplo, las producciones de Cati (Imagen 4.4) y de Sonia (Imagen 4.5). Cati la ve como una actividad de repaso. Es decir, sabe que los estudiantes han tratado la definición y clasificación de polígonos en cursos anteriores. Sonia también hace referencia a que la actividad pretende conectar los contenidos propios del curso con conocimientos previos adquiridos en cursos anteriores. En el nuevo curso podrán profundizar en esos mismos contenidos (KMLS, secuenciación de temas). Para ellas es una actividad que permite activar en sus conocimientos previos antes de seguir profundizando en ellos (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Sí, encaja en los estándares del currículum vigente. Además, es una actividad de repaso para ver los conocimientos que tenían los alumnos respecto a geometría de los cursos anteriores, por lo tanto, encaja con estudiantes de 5º de Primaria.

Imagen 4.4 Respuesta de Cati a la actividad 14

14. Considero que dicha actividad, si se encaja con facilidad y dinamismo a el curso de quinto de primaria ya que creo que a partir de los conocimientos previos de los alumnos para ir poco a poco construyendo una definición global de lo que se quiere trabajar es una de las maneras más adecuadas para crear peso en la asimilación del conocimiento recogido y así que ser una forma más natural y creativa para poder partir de una motivación.

Con respecto a los estándares curriculares, este tipo de actividad se adaptaría perfectamente ya que el principal objetivo es un aprendizaje a través de las experiencias con el propósito de que interfirieran unos conocimientos previos.

Imagen 4.5 Respuesta de Sonia a la pregunta 14

Otros EPM, aunque no identifican de manera explícita aquellos elementos del currículo de algún documento curricular que usan para justificar su respuesta, sí que los tienen en cuenta en su argumentación. Un ejemplo de ello es la respuesta de Mila (Imagen 4.6), que centra su justificación en aspectos metodológicos del currículo. También sirve de ejemplo de este tipo de respuestas la aportada por Julia (Imagen 4.7), en la que centra su argumento en los contenidos relativos al concepto de polígono que considera se debe trabajar en 5º de Primaria (KMLS, nivel de desarrollo conceptual y procedimental previsto).

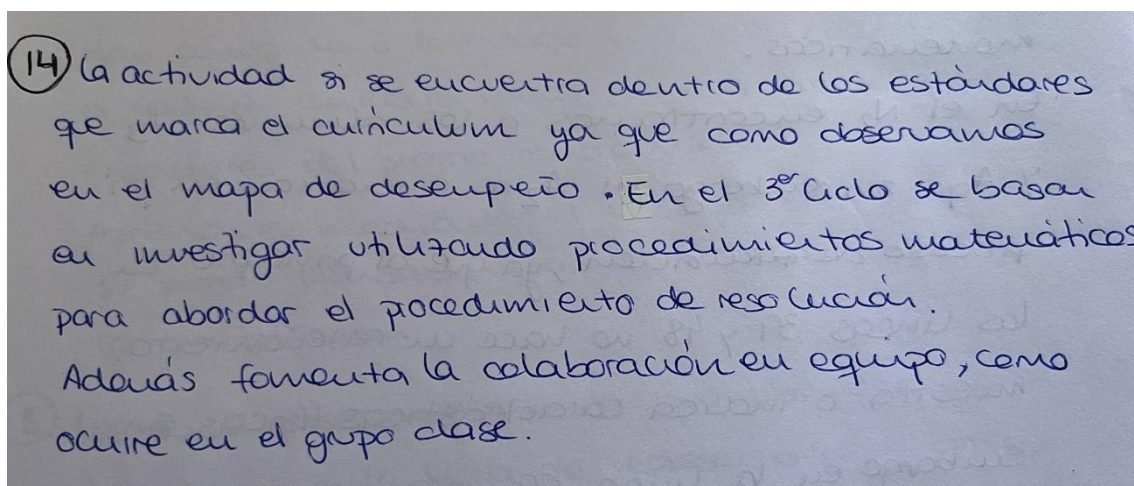


Imagen 4.6 Respuesta de Mila a la actividad 14

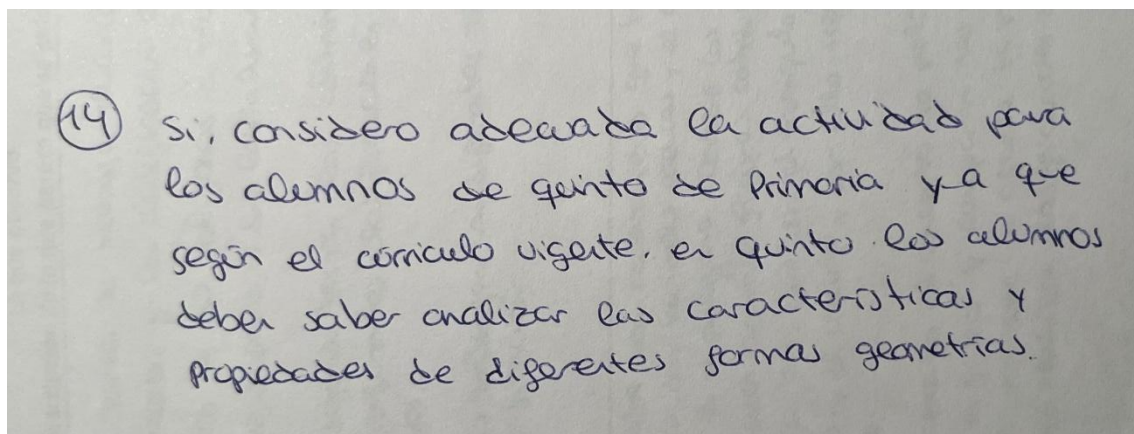


Imagen 4.7 Respuesta de Julia a la actividad 14

Al tener acceso a diversos documentos curriculares, la mayoría de los EPM citan de manera expresa algunos de los elementos del currículo allí establecidos. Así, por ejemplo, Rocío (Imagen 4.8) identifica contenidos y un objetivo de etapa relacionado la definición y clasificación de polígonos. Mara (Imagen 4.9) centra su argumento en contenidos,

objetivos, competencias y criterios de etapa identificados en los documentos curriculares (KMLS, resultados de aprendizaje esperados).

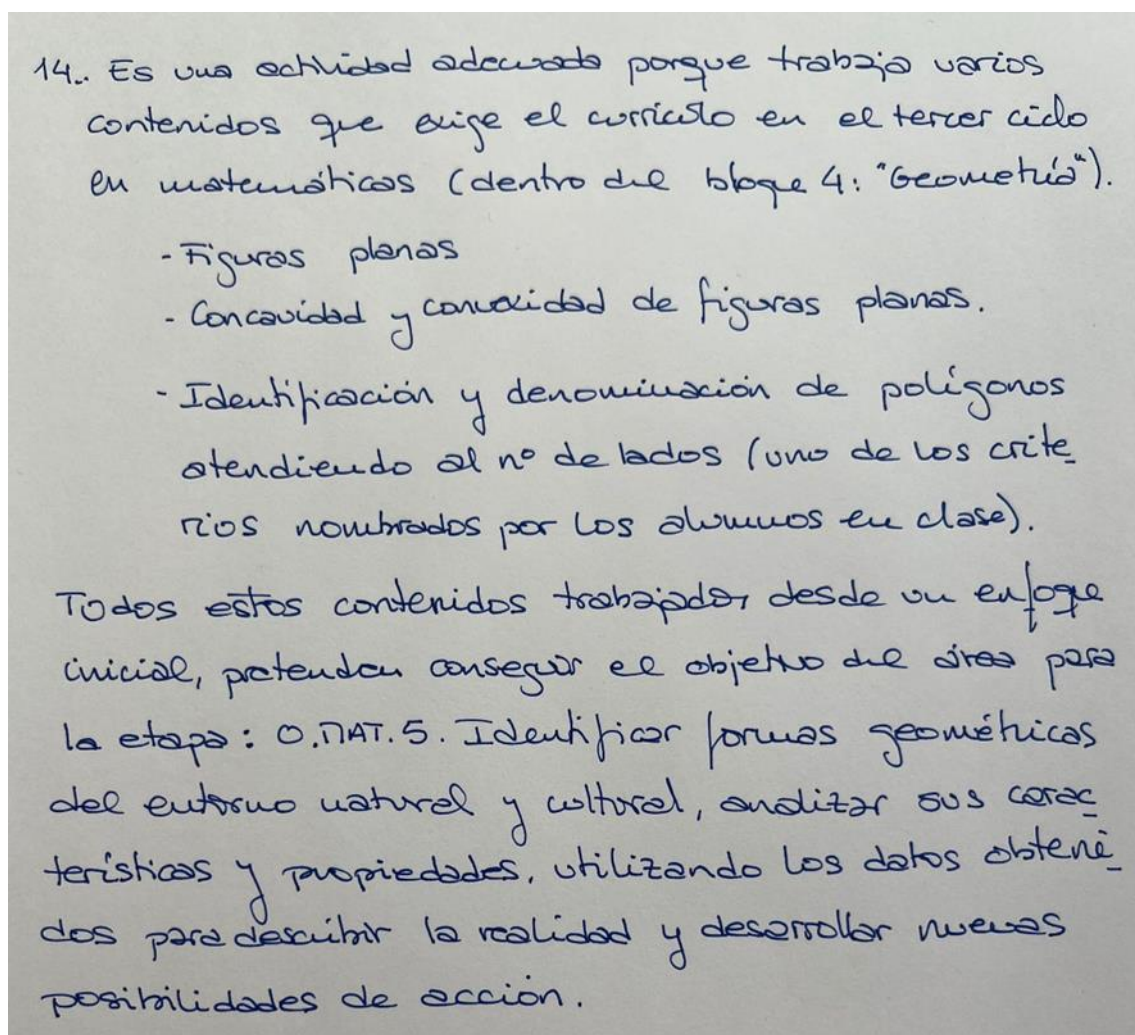


Imagen 4.8 Respuesta de Rocío a la actividad 14

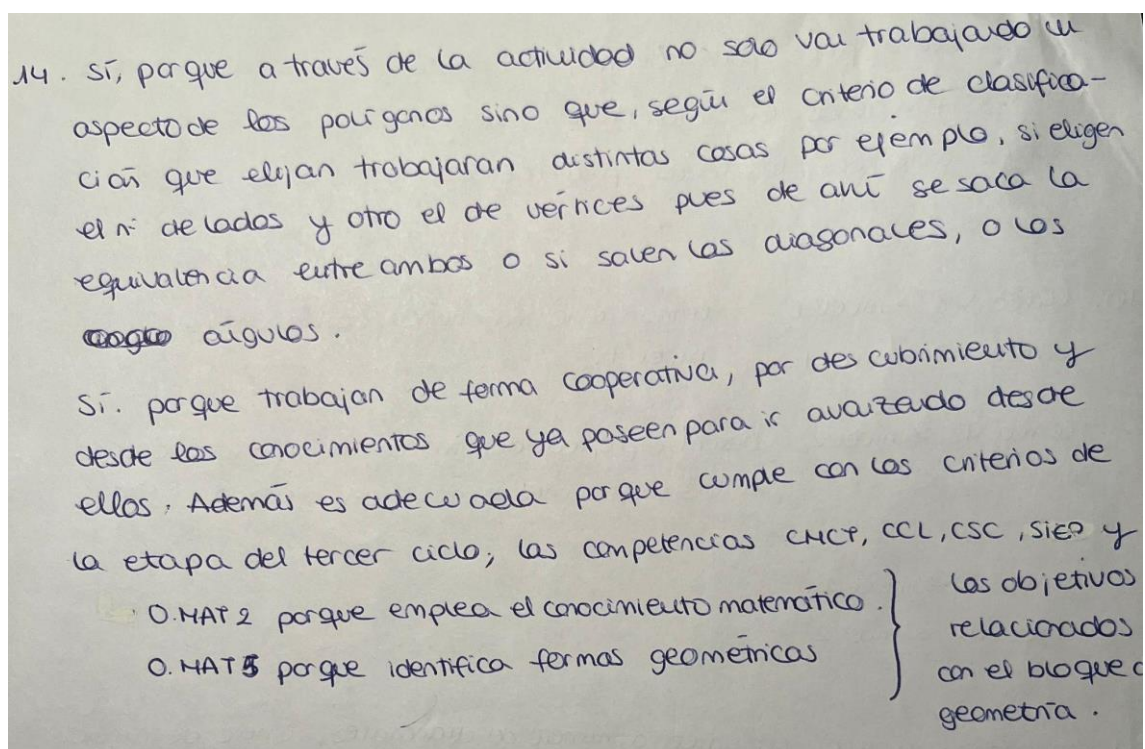


Imagen 4.9 Respuesta de Mara a la actividad 14

Tabla 4.52

Conocimiento especializado movilizado en la implementación de la TFor 1.2A. Actividad 14

SUBDOMINIO	CATEGORÍA/INDICADOR	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Saben que la actividad que plantea Jimena es introductoria y pretende conectar los conocimientos previos con el nuevo tema (Cati, Sonia).
	<u>Resultados de aprendizaje esperados</u>	Conocen objetivos, contenidos, competencias y criterios de etapa para 5° de Primaria con relación a la definición y clasificación de polígonos (Rocío y Mara).
KMLS	<u>Nivel de desarrollo conceptual y procedimental</u>	Saben qué deben conocer sobre la definición y clasificación de polígonos en cuanto a contenidos (Julia).
		Saben cómo deben llegar a utilizar ciertos procedimientos en la resolución de actividades (Mila).
	Secuencia de temas	Saben que la definición y clasificación de polígonos se trata en cursos anteriores a 5° de Primaria y que en este curso se debe de profundizar en el tema (Cati, Sonia).

4.4. Aspectos a mejorar en la tarea tras el segundo ciclo

Tras completar las tres fases del segundo microciclo del experimento de enseñanza (Cobb et al., 2003) y analizar la información recogida mediante los distintos instrumentos previamente descritos pudimos comprobar que, en la resolución de cada una de las actividades, los EPM movilizaron el conocimiento pretendido en el rediseño de la tarea. Así se puede constatar en las tablas resumen, que presentan las evidencias e indicios del conocimiento movilizado, y que se incluyen tras el análisis de los episodios de la

transcripción correspondientes a cada actividad. Por otra parte, identificamos debilidades en determinados elementos de la tarea formativa que resultan relevantes para su rediseño. Las propuestas de mejora se centran en ajustes en el enunciado de determinadas actividades, con el propósito de optimizar su claridad.

La primera actividad a la que proponemos modificar el enunciado es la 1. Recordamos que esta consigna es fruto de la reelaboración del enunciado de la actividad 1.1 que aparecía en la versión de la tarea que se implementó en el primer ciclo, que se enunciaba así:

Actividad 1.1: Analizad la distribución de las figuras representadas en la pizarra por parte de los escolares (que aparece representada en la primera parte del caso). ¿Qué consecuencias tiene dicha distribución en relación con el concepto de polígono? Indicad las ventajas o inconvenientes de la misma.

Tras los cambios sugeridos después del primer ciclo, atendiendo a las dudas que este enunciado suscitó a los EPM en cuanto a su comprensión, la actividad quedó formulada de la siguiente manera:

Actividad 1: Analizad la distribución de las figuras representadas en la pizarra por parte de los escolares (Ilustración 1). ¿Qué propiedades están considerando los escolares para establecer estos agrupamientos?

El conocimiento pretendido con esta actividad es KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos). Pero en la implementación del segundo ciclo observamos que a varios EPM la pregunta, tal y como está propuesta, les evocaba su conocimiento sobre el pensamiento de los estudiantes (KFLM). Para ellos esta actividad resultaba redundante en relación con la actividad 2, en la que se les pide:

¿Cuáles consideráis que habrán sido los argumentos esgrimidos por los estudiantes para realizar esta distribución entre polígono y no polígono? ¿En qué se fijan?

Con el fin de evitar que los EPM puedan interpretar ambas actividades como equivalentes, proponemos reformular el enunciado de la actividad 1, quedando redactada de la siguiente forma:

Actividad 1: Analizar la distribución de las figuras representadas en la pizarra por parte de los escolares (Ilustración 1). ¿Estás de acuerdo con esa distribución? ¿En qué casos sí y en qué casos no? Argumenta tu respuesta.

De esta forma queda claro que la pregunta se orienta al conocimiento matemático de los EPM.

La otra modificación que proponemos es en el enunciado de la actividad 8:

¿Qué papel juegan los ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática (resolución de la tarea)?

A la hora de diseñar la tarea formativa, al enunciar esta actividad se utilizó el término contraejemplo en el sentido amplio, como elemento matemático para la demostración y como no-ejemplo. Tras reflexionar sobre estos términos convenimos que, en este caso, en el que el objetivo de la tarea es construir la definición de polígono, sería más exacto el término no-ejemplo (Montes, M. et al (2022)). Por tanto, el enunciado de la actividad 8 para próximas implementaciones sería:

¿Qué papel juegan los ejemplos y no ejemplos en la construcción de una definición matemática (resolución de la tarea)?

Por último, considerando que una parte importante de actividades están centradas en conocimiento matemático de los EPM o en su reflexión sobre aspectos relativos al alumnado de Primaria, nos parece pertinente poner el foco en la gestión del aula que realiza la maestra. Con este propósito, incorporamos una nueva actividad orientada a que los EPM analicen su actuación durante el desarrollo de la tarea.

Considerando la gestión que realiza la maestra en la actividad. ¿qué destacarías sobre su actuación?

4.5. Conocimiento pretendido vs conocimiento movilizado

Al revisar el análisis de la resolución de la tarea formativa en los dos ciclos, se observa que en cada actividad se ha movilizado el conocimiento previsto en el diseño. Además, se han puesto en juego conocimientos pertenecientes a otras categorías o indicadores de

subdominios distintos, cuya aparición no se había previsto inicialmente, pero que emergieron a partir de las intervenciones de los EPM y/o de la formadora.

En las tablas siguientes se presenta el conocimiento movilizado en cada actividad durante los dos microciclos del experimento de enseñanza. Las tablas se organizan por actividad y, en cada una de ellas, se explicita el conocimiento movilizado en cada microciclo. El conocimiento previsto en el diseño de cada actividad se ha destacado en **negrita** y **subrayado** para facilitar su identificación. Para identificar las actividades usaremos la numeración considerada para la segunda implementación.

El conocimiento especializado pretendido con la primera actividad 1 se centra en reconocer los atributos relevantes que determinan si una figura es un polígono (KoT, definiciones, propiedades y fundamentos) y en analizar el procedimiento seguido por los escolares al clasificar figuras (KoT, procedimientos). Con la actividad 2 se pretende que los EPM identifiquen las estrategias, procesos y formas de lenguaje habituales en los alumnos al trabajar el concepto de polígono (KFLM, formas de interacción con el contenido), así como sus fortalezas y dificultades más frecuentes (KFLM). En ambos microciclos los EPM ponen en juego conocimiento relativo a dichas categorías. Además, como se muestra en la Tabla 4.53, se evidencia conocimiento sobre categorías de KMT, al vincular los EPM sus intervenciones a contextos de enseñanza. Además, en ambos microciclos, algún EPM hace uso de traslaciones entre diferentes registros de representación para hacerse entender, por ejemplo, definiendo algún concepto de manera verbal y apoyándose en representaciones gráficas o en representaciones concretas utilizando su propio cuerpo.

Tabla 4.53

Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en las actividades 1 y 2

PRIMER CICLO		SEGUNDO CICLO	
Actividad 1.1		Actividades 1 y 2	
KoT	Procedimientos	KoT	Procedimientos
	Definiciones, propiedades y sus fundamentos		Definiciones, propiedades y sus fundamentos
	Registros de representación		Registros de representación
KPM	Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal	KSM	Conexiones transversales
	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones		
	Teorías de aprendizaje		Teorías de aprendizaje

KFLM	Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático	KFLM	Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático
	Fortalezas y dificultades		Fortalezas y dificultades
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	Recursos materiales y virtuales		Recursos materiales y virtuales
KMLS	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado	KMLS	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado
Actividad 1.2			
KoT	Procedimientos		
	Definiciones, propiedades y sus fundamentos		
KFLM	Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático	KFLM	Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático
	Fortalezas y dificultades		Fortalezas y dificultades

En la actividad 3, los EPM deben elaborar una definición de polígono, contrastarla con las del grupo y valorar si incluye únicamente los atributos necesarios del concepto (KoT, definiciones, propiedades y fundamentos), analizando también la distinción entre atributos relevantes y superfluos, lo que implica considerar condiciones necesarias y suficientes para una definición matemática (KPM). Además del conocimiento pretendido, como se muestra en la Tabla 4.54, los EPM muestran conocimiento sobre registros de representación, en el mismo sentido que en las actividades anteriores. En el primer ciclo, los EPM aportan posibles argumentos que podría utilizar el alumnado de Primaria para justificar determinadas aseveraciones, mostrando así su capacidad para anticipar razonamientos infantiles y vincularlos con los elementos conceptuales del contenido.

Tabla 4.54

Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 3

PRIMER CICLO Actividad 1.3		SEGUNDO CICLO Actividad 3	
KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos
	Registros de representación		Registros de representación
KPM	Prácticas particulares del quehacer matemático	KPM	Fenomenología y aplicaciones
	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones		Uso de un lenguaje formal
KFLM	Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático		Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones
	Fortalezas y dificultades		

Dado que en la primera implementación las actividades 4 y 5 se resolvieron de manera conjunta, en la Tabla 4.55 se presenta de forma integrada el conocimiento movilizado en ambas. En la actividad 4 se pretende comprobar si los EPM distinguen adecuadamente qué figuras cumplen la definición de polígono (KoT, definiciones, propiedades y fundamentos), mientras que en la actividad 5 deben valorar si la definición elaborada por los escolares satisface los atributos necesarios de una definición matemática (KPM, condiciones necesarias y suficientes). Los EPM movilizan el conocimiento correspondiente a las categorías o indicadores pretendidos. Además, en el segundo microciclo emerge además conocimiento vinculado a KFLM. Es el equivalente al que se había movilizado en el primer ciclo durante el debate de la actividad anterior. Asimismo, aparecen intervenciones relacionadas con KMT, especialmente en lo que respecta a la valoración de la propuesta realizada por la maestra.

Tabla 4.55

Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en las actividades 4 y 5

PRIMER CICLO Actividades 2.1 y 2.2		SEGUNDO CICLO Actividad 4	
KoT	<u>Definiciones, propiedades y sus fundamentos</u>	KoT	Procedimientos <u>Definiciones, propiedades y sus fundamentos</u>
KPM	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	KPM	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones
		KFLM	Teorías de aprendizaje Fortalezas y dificultades Formas de interacción con un contenido matemático
		KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
		Actividad 5	
		KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos Registros de representación Fenomenología y aplicaciones
KPM	<u>Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones</u>	KPM	<u>Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones</u>
		KFLM	Teorías de aprendizaje

Con la actividad 6 se busca que los EPM movilicen conocimiento matemático (MK), identificando los conceptos y procedimientos implicados (KoT: definiciones, propiedades y sus fundamentos; procedimientos) y analizando procesos de razonamiento como definir y clasificar (KPM). Además, al examinar la actividad en un contexto de enseñanza y

aprendizaje, emerge también conocimiento vinculado a KFLM y KMT, que permite valorar tanto las interacciones posibles de los estudiantes con el contenido como la idoneidad de las decisiones didácticas asociadas a la tarea (Tabla 4.56).

Tabla 4.56

Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 6

PRIMER CICLO Actividad 2.3		SEGUNDO CICLO Actividad 6	
KoT	Procedimientos	KoT	Procedimientos
	Definiciones, propiedades y sus fundamentos		Definiciones, propiedades y sus fundamentos
KPM	Prácticas particulares del quehacer matemático	KPM	Prácticas particulares del quehacer matemático
			Condiciones necesarias y suficientes para generar una definición
KFLM	Teorías de aprendizaje	KFLM	Fortalezas y dificultades
	Formas de interacción con un contenido matemático		Formas de interacción con un contenido matemático
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos		

La actividad 7 se centra en cómo aprenden los estudiantes al construir una definición a partir de sus ideas iniciales, analizando los posibles obstáculos y cambios conceptuales (KFLM, teorías de aprendizaje) y reflexionando sobre la idoneidad de distintos tipos de tareas (KMT, estrategias, técnicas y ejemplos). Como puede observarse en la tabla 4.57, en la primera implementación, los EPM movilizan conocimiento relacionado con las formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático, así como con sus fortalezas y dificultades, situando el foco en aspectos vinculados al aprendizaje. El desarrollo del debate hace que las intervenciones evolucionen y se desplacen entre distintos subdominios del MTSK según los argumentos que van emergiendo.

Tabla 4.57

Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 7

PRIMER CICLO Actividad 2.4		SEGUNDO CICLO Actividad 7	
		KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos
KPM	Prácticas particulares del quehacer matemático		
KFLM	Teorías de aprendizaje	KFLM	Teorías de aprendizaje
	Formas de interacción con un contenido matemático		
	Fortalezas y dificultades		
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos

En esta actividad 8, los EPM deben analizar el papel de los ejemplos y contraejemplos en la construcción de definiciones, identificando los atributos críticos y descartando propiedades superfluas (KPM, prácticas del quehacer matemático). En sus intervenciones, los EPM relacionan el uso de ejemplos y contraejemplos (y no-ejemplos) con estrategias de enseñanza basadas en el trabajo con casos particulares, y reconocen su utilidad para argumentar que una propiedad no se cumple en todos los casos. A lo largo de la resolución también emergen conocimientos pertenecientes a otros subdominios del MTSK, que amplían la reflexión más allá del objetivo inicial de la actividad (Tabla 4.58).

Tabla 4.58

Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 8

PRIMER CICLO Actividad 2.5		SEGUNDO CICLO Actividad 8	
KPM	Prácticas particulares del quehacer matemático	KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos
	Formas de validación y demostración	KPM	Registros de representación
		KPM	Prácticas particulares del quehacer matemático
KFLM	Formas de interacción con un contenido matemático	KFLM	Formas de validación y demostración
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	KMT	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones
		KFLM	Teorías de aprendizaje
		KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos

La actividad 9 se orienta a reconocer las dificultades, errores y obstáculos frecuentes que presentan los escolares al construir una definición (KFLM, fortalezas y dificultades). Durante su resolución emerge conocimiento perteneciente a distintos subdominios del MTSK (Tabla 4.59), lo que pone de manifiesto que, a partir de una misma propuesta de trabajo, las intervenciones de los EPM y la gestión realizada por la persona encargada de la formación pueden favorecer la activación de unos conocimientos u otros.

Tabla 4.59

Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 9

PRIMER CICLO Actividad 2.6		SEGUNDO CICLO Actividad 9	
KPM	Prácticas particulares del quehacer matemático	KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos
	Formas de validación y demostración	KPM	Registros de representación
		KPM	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones

KFLM	Fortalezas y dificultades	KFLM	Teorías de aprendizaje
	Formas de interacción con un contenido matemático		Fortalezas y dificultades
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	KMT	Recursos materiales y digitales
		KMLS	Nivel de conocimiento conceptual y procedimental esperado

La actividad 10 tiene como objetivo que los EPM analicen el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes a partir del vocabulario que emplean y de los procesos que ponen en juego (reconocimiento, definición, clasificación o demostración) (KFLM: teorías de aprendizaje). En el primer microciclo se dedicó más tiempo al debate en torno a esta actividad, lo que favoreció la emergencia de conocimiento relacionado con distintos subdominios del MTSK. Por ejemplo, los EPM evidencian conocimiento sobre el uso del lenguaje propio de un estudiante en función de su nivel de razonamiento geométrico (Tabla 4.60).

Tabla 4.60

Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 10

PRIMER CICLO Actividad 2.7		SEGUNDO CICLO Actividad 10	
KoT	Procedimientos		
	Definiciones, propiedades y sus fundamentos		
KPM	Condiciones necesarias y suficientes para generar una definición		
KFLM	Teorías de aprendizaje Formas de interacción con un contenido matemático	KFLM	Teorías de aprendizaje

Con la actividad 11 se busca que los EPM reflexionen sobre aquellas características de los polígonos que pueden adoptar distintos valores y que, en consecuencia, permiten establecer criterios de clasificación o categorización (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos; procedimientos). El uso de material concreto por parte de la maestra favorece la aparición de conocimiento relacionado con los registros de representación, y el trabajo sobre la clasificación de polígonos propicia además la movilización de conocimiento vinculado a las prácticas matemáticas propias del KPM (Tabla 4.61).

Tabla 4.61

Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 11

PRIMER CICLO Actividad 3.1		SEGUNDO CICLO Actividad 11	

KoT	Procedimientos	KoT	Procedimientos
	Definiciones, propiedades y sus fundamentos		Definiciones, propiedades y sus fundamentos
	Registros de representación		Registros de representación
KPM	Prácticas particulares del quehacer matemático	KPM	Prácticas particulares del quehacer matemático
	Formas de validación y demostración		Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal
KFLM	Teorías de aprendizaje		

El conocimiento pretendido con la actividad 12 se vincula con KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), ya que los EPM deben analizar las ventajas e inconvenientes de emplear distintos tipos de tareas o estrategias. En ambas implementaciones, el debate se mantiene centrado en este conocimiento previsto, profundizando en la valoración de las decisiones didácticas asociadas a la propuesta (Tabla 4.62).

Tabla 4.62

Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 12

PRIMER CICLO Actividad 3.2		SEGUNDO CICLO Actividad 12	
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos

La actividad 13 se orienta a que los EPM reflexionen sobre los beneficios y las dificultades asociadas al uso de determinados recursos materiales o digitales para trabajar la clasificación de polígonos (KMT: recursos materiales y digitales), partiendo de los que utiliza la maestra en el caso. Durante el debate emerge también conocimiento relacionado con teorías de aprendizaje, al valorar los EPM la importancia de la relación entre la imagen de un concepto y su definición. Asimismo, destacan las posibilidades que ofrecen algunos recursos para un tratamiento dinámico del conocimiento geométrico, lo que enriquece la comprensión del contenido y su potencial didáctico (Tabla 4.63).

Tabla 4.63

Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 13

PRIMER CICLO Actividad 3.3		SEGUNDO CICLO Actividad 13	
KoT	Procedimientos	KoT	Procedimientos
	Definiciones, propiedades y sus fundamentos		Definiciones, propiedades y sus fundamentos
KFLM	Teorías de aprendizaje	KFLM	Teorías de aprendizaje
KMT	Teorías de enseñanza	KMT	Recursos materiales y digitales
	Recursos materiales y digitales		

Con la actividad 14 se busca que los EPM valoren la idoneidad de la propuesta de la maestra para su alumnado de quinto de Primaria (KMLS, resultados de aprendizaje esperados) y que identifiquen las clasificaciones de polígonos adecuadas para este nivel (KMLS, desarrollo conceptual y procedimental esperado). Dado que la actividad no se trabajó en el aula, el análisis se realiza a partir de las producciones escritas del alumnado. Aunque no hubo espacio para el debate, en algunas de estas producciones se observa la movilización de conocimientos pertenecientes a otros subdominios no previstos inicialmente (Tabla 4.64).

Tabla 4.64

Conocimiento pretendido y conocimiento movilizado en la actividad 14

PRIMER CICLO Actividad 3.4		SEGUNDO CICLO Actividad 14	
KMLS	Expectativas de aprendizaje	KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado	KMLS	Expectativas de aprendizaje
			Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado
		Secuencia de temas	

Las tareas formativas en la formación inicial de maestros están vinculadas estrechamente a las prácticas de los docentes, es decir, a las “tareas profesionales”, entendidas como el sistema de actividades del profesor que conforman su práctica cuando enseña matemáticas en su aula.

Joglar-Prieto et al. (2022, p. 212)

5. Discusión de resultados y conclusiones

En este capítulo presentamos la discusión de los resultados obtenidos en el estudio, con el propósito de retomar los objetivos y la pregunta de investigación y valorar en qué medida han sido atendidos. Para ello, interpretamos el conocimiento especializado que los EPM movilizaron al resolver la tarea formativa sobre definición y clasificación de polígonos, articulando el análisis a partir de los subdominios y categorías del modelo MTSK. A diferencia del capítulo anterior, en el que los resultados se organizaron siguiendo el orden asignado a las distintas actividades de la tarea, en esta ocasión los datos se reorganizan, interpretan y discuten desde la estructura del modelo, lo que permite comprender el conocimiento especializado movilizado con la resolución de la tarea. Por otra parte, lo realizado en el diseño, implementación y análisis ofrece evidencia para validar la tarea, al corroborar que promueve efectivamente el conocimiento pretendido con cada actividad.

La discusión conduce a unas consideraciones finales, en las que se sintetizan las aportaciones principales del estudio y se responde de forma explícita a los objetivos de investigación, y ofrecemos la versión refinada de la tarea, elaborada como resultado del análisis realizado. A continuación, presentamos las implicaciones derivadas de los resultados para la formación inicial del profesorado. El capítulo se cierra con la exposición de las limitaciones del estudio y las líneas de prospectiva que orientan futuras investigaciones.

5.1. Conocimiento movilizado por los EPM desde MTSK

A partir del análisis desarrollado en el capítulo anterior, presentamos los resultados relativos al conocimiento especializado movilizado en el aula de formación inicial, organizándolos según los subdominios del modelo MTSK. Para cada subdominio presentamos una tabla por microciclo en la que se recogen los indicadores de conocimiento identificados a partir de las evidencias e indicios (Escudero-Ávila, 2015), asociándolos tanto a las unidades de información como a la categoría o indicador correspondiente. Las unidades de información correspondientes al conocimiento pretendido se destacan en negrita para facilitar su identificación. Esta organización por microciclos permite identificar particularidades de los grupos que participan en cada uno de ellos, reconociendo similitudes o diferencias en cuanto el conocimiento especializado que movilizan. El hecho de que, en ambos microciclos, se movilice el conocimiento

pretendido con el enunciado de cada actividad respalda la validez de la tarea formativa, en tanto evidencia su capacidad para promover el conocimiento especializado en grupos diferentes de EPM.

Una vez presentada esta nueva interpretación, discutimos los resultados. Esta reflexión nos permite dar respuesta al primer objetivo de la investigación, en la medida en que permite comprender de qué modo el diseño, la implementación y la evaluación de la tarea formativa contribuyen a promover la construcción de conocimiento especializado en torno a contenidos geométricos, particularmente sobre la definición y clasificación de polígonos. Asimismo, nos permite abordar el segundo objetivo, al profundizar en la comprensión del conocimiento especializado que los futuros maestros movilizan durante la resolución de la tarea. Agrupar los indicadores según los subdominios del modelo MTSK ofrece una visión estructurada y fundamentada del tipo de conocimiento que los EPM ponen en juego y de qué forma se evidencia dicho conocimiento en su reflexión durante la resolución de la tarea formativa.

5.1.1. KoT movilizado por los EPM

Como se ha mostrado en los capítulos anteriores, el conocimiento pretendido con el enunciado de algunas de las actividades planteadas en la tarea está vinculado con el KoT. No obstante, al tratarse de una tarea basada en contenido geométrico, es razonable que, incluso en aquellas actividades centradas en otros subdominios del modelo se evidencien indicadores relacionados con este.

Las tablas 5.1, 5.2 y 5.3 recogen el conocimiento, vinculado al subdominio KoT, movilizado por los EPM durante la resolución de la tarea en el primer ciclo, identificado a partir de las evidencias e indicios observados.

Tabla 5.1*KoT (Procedimientos) movilizado por los EPM en el primer microciclo*

Sub	Cat	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado ²³
KoT	Procedimientos	E2 U134; E5 U277; E27 U1377, 1379	Clasificación de polígonos atendiendo a las longitudes de los lados
		E3 U181	Clasificación de figuras según su simetría
		E5 U273; E26 U1352	Clasificación de figuras teniendo en cuenta su regularidad
		E12 U666, E15 844; E21 U1107, 1119, 1125	Observación de características comunes a casos particulares para generar la definición de un concepto
		E15 U857, 861	Uso de propiedades de las figuras para generar clasificaciones
		E20 U980	Agrupación de objetos en clases de equivalencia o en categorías
		E21 U1015, 1029	Deducción informal como estrategia para llegar a la definición de un concepto
		E22 U1135	Clasificación de polígonos considerando su número de lados
		E22 U1137; E23 U1150, 1229	Clasificaciones de polígonos atendiendo a la amplitud de sus ángulos
		E15 U872; E24 U1273	Clasificación de triángulos según la amplitud (en particular)
		E24 U1279	Clasificación de polígonos teniendo en cuenta el número de ángulos rectos
		E15 U904; E25 U1304	Clasificación de ciertos polígonos de acuerdo con la posición relativa de sus lados
		E26 U1375	Clasificación de polígonos en función del número de diagonales
		E27 U1401, 1411	Relación entre triángulos isósceles y equiláteros según se definan (clases disjuntas o inclusión de clases)
		E29 U1435	Clasificación de polígonos atendiendo a la medida de la superficie o del perímetro

²³ Identificados a partir de evidencias e indicios. Hay que tener en cuenta que se expresa directamente el objeto de conocimiento. Si, por ejemplo, dice *Clasificación de figuras según su simetría* debe leerse *Saben clasificar figuras según su simetría*. Si aparece expresiones del tipo *Elementos de un polígono* se debe leer *Saben cuáles son los elementos de un polígono*. Esta indicación es válida para todas las tablas de este capítulo.

Tabla 5.2
KoT (Definiciones, propiedades y sus fundamentos) movilizado por los EPM en el primer microciclo

Sub	Cat	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado
KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	E1 U22; E2 U128, 130; E3 U201; E6 U298, 307; E7, U 436; E8 U461, 465, 494; E13 U769, 772; E15 U873, 878, 883; E20 U1088	Atributos relevantes del concepto polígono: figura cerrada, plana, delimitada por un conjunto de segmentos de recta consecutivos, que no se cruzan entre sí.
		E2 U134; E6 U298; E8 U448, 450, 494; E10 U569, 572; E12 U 621-623; E13 U752, 753, 764; E15 U857, 861; E20 U1066; E26 U1375; E8 U439	Elementos de un polígono y sus propiedades (lados, vértices, diagonales, ángulos)
		E2 U134	Tipos de polígonos atendiendo a diferentes criterios
		E2 U137-144, 161, 170; E3 U196; E5 U274	Características de los polígonos regulares
		E2 U163	Lados congruentes no implica regularidad
		E3 U196	Definición de polígono
		E4 U223, 226	Atributos comunes comparando figuras
		E5 U277	Características de las figuras simétricas
		E7 U357	Invariabilidad de los atributos relevantes por cambio de posición
		E7 U372	Concatenación de elementos es una figura
		E20 U1064	Triángulo es un tipo de polígono
		E22 U1137; E30 U1499, 1510	Atributos de los polígonos cóncavos y de los convexos
		E23 U 1231,1150,1151,1155, 1164,1168; E24 U1258, 1261	Concepto de ángulo y tipos según su amplitud (llano, recto, agudo, obtuso...)
		E23 U1209, 1212, 1213,1219,	Amplitud de un ángulo y su medida
		E24 U1286,	Características de los ángulos de un cuadrilátero (no todos agudos)
		E24 U1295, 1297	Suma de las amplitudes de los ángulos de un triángulo o de los de un cuadrilátero
		E26 U1350; E27 U1435	Magnitud superficie y su medida en unidades unidimensionales
		E27 U1393, 1395, 1399, 1405, 1412	Tipos de triángulos atendiendo a sus lados. Definición de cada uno
		E29 U1435	Magnitud longitud

Tabla 5.3*KoT (Registros de representación) movilizado por los EPM en el primer microciclo*

Sub	Cat	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado
KoT	Registros de representación	E2 U142	Representación de figuras simétricas utilizando elementos reales (manos), registro concreto
		E2 U142	Conversión entre el registro verbal y el concreto para representar figuras simétricas
		E4 U252	Conversión del registro gráfico al figural-icónico a través de figuras recortadas
		E6 U290, 296	Representación gráfica de polígonos
		E23 U1168	Representación concreta del ángulo llano usando el brazo propio
		E24 U1242	Representación concreta de un ángulo con los dedos de una mano

De forma general, se constata que el conocimiento identificado se vincula principalmente con la caracterización y clasificación de figuras geométricas, lo cual resulta coherente con la naturaleza de la tarea propuesta, centrada precisamente en la definición y clasificación de polígonos. Así, los EPM movilizan conocimientos orientados a reconocer atributos relevantes, establecer criterios de pertenencia y diferenciar entre tipos de figuras geométricas, poniendo en juego procedimientos y argumentos acordes con el contenido trabajado.

Los EPM apoyan sus intervenciones en su conocimiento sobre los elementos de las figuras y sus propiedades. Sin embargo, cuando se trata de formular una definición, algunos no lo hacen de manera exhaustiva. Suelen mencionar algunos atributos relevantes, pero no siempre logran recoger la totalidad de los que resultan necesarios para caracterizar el concepto de forma rigurosa. Por ejemplo, Tina define polígono como una *figura que posee un punto de inicio y un punto final [...], que están unidos, [...] y que puede empezar también en cualquier sitio que tú eliges* [TF1.1A.6 U290-296]. El único atributo relevante del concepto polígono que considera es que la línea que lo delimita sea cerrada, al indicar que el inicio y el final (se entiende que de dicha línea) están unidos. Este atributo no es suficiente para caracterizar el concepto polígono. Como se puede observar, las figuras representadas en la Figura 5.1 cumplen la definición de Tina sin ser polígonos.

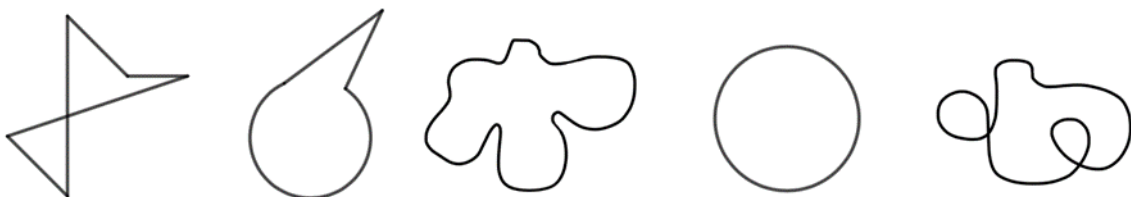


Figura 5.1 Figuras geométricas que verifican la definición de Tina y no son polígonos

En su caso, Belén, otra EPM, define polígono como *figura cerrada que tenga lados, ángulos y vértices* [TF1.1A.6 U298]. Enuncia una serie de elementos propios del polígono, pero no hace referencia a las características que deben cumplir dichos elementos. Por ejemplo, que los lados sean segmentos. En la Figura 5.2 se representan figuras que cumplen la definición dada por Belén, pero no son polígonos.



Figura 5.2 Figuras geométricas que cumplen la definición de Belén sin ser polígonos

En otras ocasiones, algún EPM añade a la definición atributos no relevantes. Por ejemplo, Daniel considera como polígono cualquier *figura cerrada con lados iguales* [TF1.1A.6 U321]. Consideramos que esta definición puede basarse en la imagen que tiene de este concepto, asociada a la representación de un polígono regular, de ahí que añada un atributo irrelevante (congruencia de los lados) como crítica (Vinner, 1991; Turégano, 2006).

Es habitual que los EPM fundamenten sus intervenciones en la identificación de atributos relevantes, tanto para formular la definición de un polígono como para determinar la pertenencia de una figura a una categoría en los procesos de clasificación. Esta identificación se apoya, con frecuencia, en la observación y análisis de casos particulares, avanzando desde estos hacia formulaciones más generales. Este modo de proceder muestra que la construcción del concepto se sostiene en procesos iniciales de generalización a partir de casos concretos.

De ahí la importancia de trabajar con una amplia variedad de ejemplos y no ejemplos (Zaslavsky et al., 2006). Los ejemplos permiten identificar qué atributos son esenciales para la definición del concepto y cuáles responden únicamente a características particulares de un caso concreto. En el caso del polígono, todos los ejemplos deben corresponder con figuras planas limitadas por líneas poligonales cerradas y simples (atributos relevantes), mientras que pueden variar en otros aspectos no esenciales, como la presencia o no de ángulos cóncavos, el número de lados o la igualdad o desigualdad en la longitud de estos. Por su parte, los no ejemplos resultan igualmente relevantes, pues permiten poner a prueba los límites de la definición y ayudan a los estudiantes a distinguir con claridad entre atributos esenciales (por ejemplo, que los lados sean segmentos rectos) y características no esenciales (como la posición o la apariencia visual de la figura). Analizar por qué una figura no es un polígono contribuye así a clarificar el concepto, favoreciendo que la clasificación deje de apoyarse únicamente en la percepción y avance

hacia formas de razonamiento más fundamentadas. La Figura 5.3 muestra ejemplos de polígonos y no polígonos representados por los estudiantes de Educación Primaria.



Figura 5.3 Ejemplos de polígonos y de no polígonos

La presencia de procesos de generalización a partir de casos particulares, así como de deducciones informales orientadas a construir definiciones, refleja un avance hacia formas más estructuradas de pensamiento matemático; sin embargo, la fuerte dependencia de ejemplos concretos y de representaciones manipulativas o icónicas indica que el conocimiento aún no se encuentra plenamente consolidado en términos conceptuales. Se trata, por tanto, de un conocimiento emergente, que muestra capacidad para reconocer propiedades relevantes y establecer relaciones entre ellas, pero que todavía requiere fortalecer la explicación fundamentada de los criterios utilizados y la delimitación rigurosa de los conceptos en juego.

Por otra parte, el uso de distintos registros de representación (concreto, icónico, gráfico y verbal) muestra que los EPM recurren a múltiples vías para sostener sus argumentaciones o validar sus clasificaciones. Dichas representaciones suelen desempeñar una función instrumental, en la medida en que se utilizan, por ejemplo, para mostrar la simetría con las manos, o dibujando una figura para comprobar por dónde pasan las diagonales.

En este primer ciclo no se han identificado evidencias o indicios de *fenomenología* y *aplicaciones*. Cabe destacar que, en ninguna de las actividades propuestas en la tarea, el conocimiento pretendido estaba vinculado con esta categoría. La movilización del conocimiento se concentró fundamentalmente en los aspectos formales y estructurales de la definición y clasificación de polígonos, sin que estos se relacionasen con situaciones, contextos o usos más amplios. Es decir, los EPM trabajaron mayoritariamente en el plano de la identificación de atributos relevantes y la determinación de pertenencia a categorías, pero no conectaron estas estructuras conceptuales con problemas o contextos reales en los que dichas definiciones resulten necesarias o significativas.

Todo ello sugiere que el conocimiento especializado se encuentra en un estado emergente, caracterizado por avances en la organización conceptual de la geometría elemental, pero todavía con necesidad de afianzar la justificación formal y la explicitación rigurosa de los criterios utilizados.

El análisis también revela algunos aspectos en el desarrollo de la comprensión de los conceptos geométricos que resultan especialmente significativos. Aunque los EPM son capaces de clasificar figuras atendiendo a sus atributos, en ocasiones se aprecia cierta dependencia de rasgos visuales (como la apariencia del dibujo o la posición de la figura), especialmente en el caso de los polígonos cóncavos o en la diferenciación entre regularidad y congruencia de lados. Por ejemplo, es habitual que los estudiantes identifiquen un cuadrado entre un conjunto de polígonos cuando dos de sus lados son horizontales y los otros dos lados verticales, pero pueden encontrar dificultad para reconocerlo cuando los lados del cuadrado son oblicuos. De hecho, pueden incluso clasificarlo como rombo si los lados del cuadrilátero forman ángulos de 45° respecto de la horizontal (ver Figura 5.4). Esta clasificación no responde a que comprendan que lo que caracteriza a un rombo es tener cuatro lados de igual longitud y que, por lo tanto, todo cuadrado es un rombo, sino a la influencia de posiciones prototípicas asociadas a las representaciones más habituales del rombo en libros de texto o aplicaciones digitales. Este hecho pone de manifiesto la necesidad de trabajar con variaciones no prototípicas para favorecer la comprensión conceptual por encima de la identificación visual (Kyaw y Vidákovich, 2025).



Figura 5.4 Distintas posiciones del cuadrado en el plano

Asimismo, se identifican aspectos en desarrollo en la comprensión de los conceptos de regularidad y simetría. Algunos EPM tienden a relacionar ambos términos y a expresarlos en grados, refiriéndose a unas figuras como “más regulares” o “más simétricas” que otras. Así, por ejemplo, Daniel dice que los estudiantes *intentan diferenciar los que son más regulares [...] de los que son más irregulares* [TF1.1A.2 U134], o para Rosa una de las

figuras representadas por los estudiantes está en polígonos porque es *casi regular por ser casi simétrico* [TF1.1A.2 U169, 171]. Sin embargo, ni la regularidad ni la simetría son propiedades graduales. Una figura es regular o no lo es; es simétrica o no lo es, dependiendo exclusivamente de si cumple o no los atributos que definen dichas propiedades. Esta forma de hablar indica que, en ocasiones, los EPM se apoyan en la apariencia visual o en la presencia de “cierta armonía” en la figura, en lugar de recurrir a los criterios formales que caracterizan estos conceptos. Ello refuerza la idea de que la comprensión conceptual se encuentra aún en proceso de desvinculación de lo perceptivo, y subraya la necesidad de explorar explícitamente los atributos definitorios de la regularidad y la simetría y su papel en la clasificación de polígonos.

Estos aspectos indican que, si bien se moviliza conocimiento relevante, este se encuentra todavía en proceso de descontextualización respecto de lo perceptivo y requiere un trabajo de formalización y explicitación del significado de las propiedades empleadas.

En las tablas 5.4, 5.5 y 5.6 se sintetizan las evidencias e indicios del conocimiento asociado al subdominio *KoT* que los EPM pusieron en juego durante la resolución de la tarea en el segundo ciclo.

Tabla 5.4*KoT (Procedimientos y Definiciones, propiedades y sus fundamentos) movilizado por los EPM en el segundo microciclo*

Sub	Cat	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado
KoT	Procedimientos	E1 U 90; E33 U1260	Clasificación atendiendo a la regularidad de la figura
		E3 U172, 176; E23 U886, 890	Clasificación según el número de lados
		E14 U513, 516	Clasificación de figuras en polígonos y no polígonos
		E21 U820, 821	Acciones que requiere la actividad que propone la maestra
		E21 U823	Clasificación de figuras como procedimiento matemático
		E22 U836, 840; E31 U1222	Repercusión del uso de la definición en la clasificación de figuras que genera
		E22 U842	Clasificación de figuras a partir de la definición dada por los estudiantes
		E22 U842; E23 U871; E34 U1270, 1275	Clasificación atendiendo a la regularidad, simetría o concavidad de los polígonos
		E23 U896; E30 U1159	Clasificación de polígonos según el número de lados
		E24 U943	Clasificación de polígonos atendiendo al número de pares de lados paralelos
		E31 U1213, 1215	Clasificación atendiendo al número de ángulos rectos del polígono
		E32 U1223	Clasificación según el número de diagonales del polígono
		E34 U1287	Clasificación considerando el número de pares de lados paralelos del polígono
	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	E1 U90; E7 U265; E23 U871; E33 U1260, 1262, 1264	Atributos relevantes de los polígonos regulares
		E2 U157; E4 U186, 190, 196, 200; E6 U223; E9 U301, 333, 345; E9 U320, 331, 333; E14 U529, 531; E18 U631; E20 U756; E20 U801, 808, 810; E22 U836, 840; E25 U988; E27 U1020; E28 U1030, 1038	Atributos relevantes del concepto polígono: figuras planas limitadas por líneas poligonales cerradas
		E2 U163; E5 U221; E34 U1270, 1277, 1283; E38 U1320	Diferencias entre figuras simétricas y las que no lo son
		E2 U168, 170; E34 U1275; E38 U1337	Ejes de simetría de una figura
		E4 U186	El cubo es un cuerpo geométrico, tiene tres dimensiones

Tabla 5.5
KoT (Definiciones, propiedades y sus fundamentos) movilizado por los EPM en el segundo ciclo

Sub	Cat	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado
KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	E4 U196; E12 U467; E13 U482; E14 U513, 516; E15 U545	Diferencian entre polígonos y figuras que no lo son (lados curvos, abiertas...)
		E8 U 290; E12 U475, 477, 478; E20 U769, 775	Características de las líneas poligonales complejas
		E9 U303; E9 U312; E9 U345	Identifican elementos de un conjunto y establecen relaciones entre ellos
		E9 U303; E32 U1229, 1231, 1234, 1236, 1240	Definición de diagonal de un polígono y posiciones respecto del mismo. Polígonos con 0 o 2 diagonales, pero no hay con 1 o 3
		E10 U388, 394, 400; E17 U629	Diferencia entre figuras bidimensionales y tridimensionales (tres dimensiones de un folio)
		E10 U409	Relaciones entre distintas magnitudes de un objeto
		E12 U464; E28 U1029	Círculo como ejemplo de no polígono
		E13 U513	Cambios en la posición no modifican los atributos relevantes de una figura
		E16 U570; E18 U649, 683, 694, 696; E19 U729; E21 U816, 817; E23 U896, 898	Elementos de un polígono (lados, vértices, diagonales, ángulos). Relaciones entre ellos
		E18 U705, 707	Posición de las diagonales en polígonos cóncavos y en polígonos convexos
		E21 U832	Transitividad en la equivalencia entre definiciones de un concepto
		E24 U910, 915	Clases que genera el agrupamiento de polígonos según su número de lados
		E24 U943; E35 U1287	Paralelismo entre dos lados de un polígono
		E24 U955, 970, 982	Cuadrado como el cuadrilátero con mayor número de restricciones
		E24 U970, 974, 978, 984; E35 U1289	Cuadriláteros. Relaciones entre ellos.
		E30 U1163, 1190, 1192, 1200, 1201	Polígonos cóncavos y polígonos convexos
		E30 U1205, 1207, 1208; E31 U1213	Tipos de ángulos en un polígono (saben que ninguno puede ser llano)
		E31 U1217, 1221, 1222	Tipos de polígonos considerando el número de ángulos rectos
		E32 U1245	Relación entre diferentes clasificaciones (según número de diagonales o según número de lados)

Tabla 5.6*KoT (registros de representación y fenomenología) movilizado por los EPM en el segundo ciclo*

Sub	Cat	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado
KoT	Registros de representación	E4 U196	Representación de ejes de simetría con un registro concreto (propio cuerpo)
		E10 U388	Representación de polígonos en un registro figural icónico. Obstáculos que conlleva.
		E17 U607, 609	Modelo de Lesh y los distintos registros que contempla
		E17 U613, 617	Representación a través de diagramas y situaciones reales para el rectángulo
		E27 U1020	Necesidad de conversión entre el registro verbal y el registro gráfico
		E28 U1044	Conversión entre registro gráfico y figural icónico
		E34 U1279, 1283	Representación gráfica de los ejes de simetría de polígonos
	Fen ²⁴	E10 U388, 400; E17 U615, 617	Formas planas en situaciones cotidianas

²⁴ Fenomenología y aplicaciones

En el segundo ciclo también se moviliza conocimiento geométrico relacionado con la clasificación de polígonos atendiendo a diversos criterios (regularidad, número de lados, paralelismo, concavidad, número de ángulos rectos o diagonales), lo que evidencia una mayor variedad en el conocimiento de criterios de clasificación. No obstante, al igual que ocurría con los EPM del primer ciclo, presentan dificultades para formular definiciones completas y precisas desde el inicio; en varios casos, los EPM mencionan algunos atributos relevantes, pero no todos los que caracterizan de manera rigurosa el concepto. Por ejemplo, Sonia define polígono como *la unión de varios segmentos unidos por un vértice, y son figuras cerradas* [TF1.2A.9 U301]. En este caso no es exhaustiva, el que varios segmentos se unan por un vértice incluye a polígonos complejos como el que se representa en la Figura 5.5.

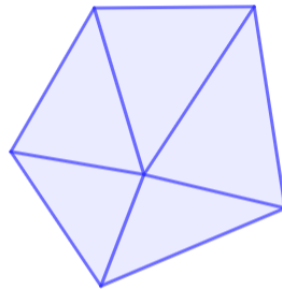


Figura 5.5 Figura formada por segmentos que se unen en un vértice, cerrada

En otros casos, añaden a la definición atributos irrelevantes. Así, Paula añade a una definición inicial de polígono el que *tienen el mismo número de lados que de vértices* [TF1.2A.9 U303], que es consecuencia de que los polígonos estén limitados por una línea poligonal cerrada y simple. Además, dice que los polígonos *tienen diagonales que pueden encontrarse dentro o parcialmente fuera de la figura* [TF1.2A.9 U303], aludiendo a características que no intervienen en la delimitación del concepto, sino en la descripción de casos particulares. Estas dificultades que surgen a la hora de enunciar definiciones completas o no redundantes son frecuentes en estudiantes de bachillerato (Haj-Yahya et al., 2023) y en EPM (Climent et al., 2024).

Los EPM, guiados por la formadora, han sido capaces de establecer relaciones entre clasificaciones. Por ejemplo, la vinculación que han establecido entre la clasificación de polígonos según el número de lados y la clasificación según el número de diagonales. Con ello se evidencia una comprensión estructurada y conectada del conocimiento geométrico, asociada a las particularidades del grupo de EPM en este segundo ciclo, en el que algunos de ellos mostraron una actitud especial analítica.

En cuanto al uso de registros de representación, en el segundo ciclo se observa un uso variado (concreto, icónico, gráfico y verbal), así como cierta conciencia de la necesidad de establecer conversiones entre ellos para apoyar la clasificación. No obstante, su función es aún principalmente operativa, es decir, sirven para visualizar o comprobar propiedades más que para sostener argumentaciones formales. Esto sugiere una progresiva integración de la representación en el razonamiento, aunque el uso de los registros como recurso explícito de justificación conceptual se encuentra todavía en proceso de consolidación.

En relación con *fenomenología y aplicaciones*, la presencia de este subdominio en el segundo ciclo es muy reducida. Aunque aparecen referencias aisladas a figuras en contextos cotidianos, estas no llegan a actuar como punto de partida para la definición o clasificación. El conocimiento geométrico se trabaja principalmente dentro del propio sistema matemático, sin proyectarse aún de forma estable hacia situaciones de uso o aplicación. Debemos tener en cuenta que esta categoría no forma parte del conocimiento pretendido con ninguna actividad de la tarea, sino que surge de manera espontánea a partir de las asociaciones que algunos EPM establecen entre el polígono como figura bidimensional y objetos del entorno (un folio, la cara de un estuche con forma de paralelepípedo).

Con todo ello, podemos decir que el conocimiento geométrico se encuentra en proceso de organización, avanzando desde una comprensión apoyada en la observación y la intuición hacia otra más estructurada, pero aún no plenamente consolidada.

En síntesis, el análisis del KoT, en ambos ciclos, evidencia que los EPM movilizan conocimiento especializado centrado en la definición y clasificación de polígonos, aunque este se encuentra aún en proceso de consolidación. Predomina una comprensión basada en rasgos perceptivos y ejemplos concretos. El uso de los registros de representación continúa siendo principalmente operativo y la fenomenología y las aplicaciones tienen una presencia limitada.

5.1.2. KSM movilizado por los EPM

En relación con el subdominio KSM, en el primer ciclo no se han identificado evidencias ni indicios de conexiones entre la definición y la clasificación de polígonos y otros temas. Esta ausencia puede interpretarse como consecuencia directa de la naturaleza de la tarea,

en la que no se plantea ninguna actividad que de manera explícita pida establecer conexiones con otros contenidos. En el segundo ciclo, únicamente se ha identificado una conexión transversal, que se muestra en la tabla 5.7, en la cual una EPM relaciona la simetría en figuras geométricas con la simetría en la gráfica de una función. Dicha conexión surge de forma puntual y espontánea, y no como resultado de una demanda explícita de la tarea. En este sentido, la escasa presencia de evidencias o indicios vinculados al KSM no debe entenderse como una falta de capacidad para establecer conexiones, sino como un efecto del diseño de la actividad, que no contemplaba acciones orientadas específicamente a promoverlas.

Tabla 5.7
KSM movilizado por los EPM en el segundo ciclo

Sub	Ind	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado
KSM	T ²⁵	E5 U210	Conexión entre la simetría de las figuras geométricas y la simetría en la gráfica de una función

²⁵ Conexiones transversales

5.1.3. KPM movilizado por los EPM

En relación con el KPM, en el primer ciclo los EPM ponen en juego algunas prácticas propias del quehacer matemático, especialmente vinculadas a la definición, la clasificación, el reconocimiento de ejemplos y no ejemplos, y el uso del contraejemplo como recurso para poner a prueba la validez de afirmaciones. Es lógico, teniendo en cuenta que la tarea formativa que están resolviendo trata sobre la definición y clasificación de polígonos. Las evidencias e indicios de conocimiento relativo al KPM identificados en el primer ciclo están recogidos en la Tabla 5.8.

Tabla 5.8*KPM movilizado por los EPM en el primer ciclo*

Sub	Ind	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado
KPM	F²⁶	E18 U947, 949; E26 U1389	Uso del contraejemplo para mostrar la falsedad de una conjetura
		E19 U953, 968	Reconocer que el uso de un caso que no sea ejemplo no es dar un contraejemplo
	P²⁷	E2 U134	Valorar la exhaustividad del lenguaje en las definiciones.
		E2 U144-153	Identificar falta de exhaustividad en expresiones del tipo “más regular”
	Prácticas particulares del quehacer matemático²⁸	E7 U403	Reconocer de polígonos con características comunes
		E8 U474-499	Reconocer de polígonos en un conjunto de figuras
		E12 U632-636, 662	Identificar procesos de razonamiento geométrico: reconocimiento, clasificación, definición, análisis, argumentación, ...
		E14 U799, 801	Equivalencia entre definiciones de un mismo concepto
		E15 U827, 832; E15 U840	Reconocer la naturaleza disjunta de las clases en una clasificación
		E15 U830	Identificar la inclusión de clases en una categorización
		E15 U844, 890, 904; E27 U1389	Entienden que el tipo de clasificación depende de los atributos considerados en la definición
		E18 U935	Uso del ejemplo como muestra de un caso particular de un concepto, y del contraejemplo como caso que no cumple alguna característica
	C²⁸	E25 U1319; E26 U1359	Clasificación de figuras independiente de la posición en la que se dispongan
		E2 U165; E3 U201	Características propias del concepto polígono
		E8 U494	Identificar de ejemplos y no ejemplos atendiendo a si cumplen o no todos los atributos relevantes
		E10 U569	Reconocer de implicaciones entre propiedades de distintos elementos de las figuras
		E10 U585	Identificar si una definición es circular
		E20 U1062, 1066	Definición simple de polígono como listado de propiedades de sus elementos

²⁶ Formas de validación y demostración²⁷ Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal²⁸ Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones

Se aprecia que los EPM son capaces de identificar atributos que determinan la pertenencia o no de una figura a la categoría de polígono, así como de reconocer que las clases que se generan dependen directamente del criterio empleado en la clasificación, lo cual evidencia una comprensión inicial de la naturaleza estructural de las clasificaciones en matemáticas. Por ejemplo, si se toma como criterio de equivalencia “tener el mismo número de lados”, un triángulo y un cuadrilátero pertenecen a clases diferentes, puesto que difieren en dicho atributo; no obstante, ambos comparten características comunes, como ser figuras planas delimitadas por líneas poligonales cerradas y simples. Ahora bien, si el criterio cambia y se considera, por ejemplo, “ser convexo” (o, de forma equivalente, no presentar ángulos interiores mayores de 180°), entonces un triángulo y un cuadrilátero convexo pasan a pertenecer a la misma clase, la de los polígonos convexos. Este ejemplo muestra que la organización de las clases no es fija, sino que se reconfigura en función de los atributos que se elijan definitorios, lo que constituye un paso importante hacia una comprensión más relacional y fundamentada del concepto de clasificación en geometría.

Sin embargo, este uso de prácticas matemáticas aparece de forma situada y puntual, como respuesta a la tarea que como estrategia planificada o sistemática. Por ejemplo, no siempre se distingue claramente entre un no-ejemplo y un contraejemplo, lo que indica que el razonamiento aún no es del todo consciente o formalizado. Elsa señala que no cree que los estudiantes *cuando lo están haciendo* (representando figuras en polígonos o no polígonos) *están dando contraejemplos* [TF1.1A.19 U968]. Esto sugiere que ella reconoce el sentido matemático del contraejemplo, pero percibe que, en las intervenciones que analiza, los estudiantes simplemente muestran ejemplos de polígonos y ejemplos de figuras que no lo son, sin explicitar que estas últimas funcionan como no-ejemplos de polígono.

Este uso no diferenciado de los términos contraejemplo y no-ejemplo puede estar relacionado con el propio enunciado de la actividad, en el que se utiliza únicamente el término contraejemplo. En consecuencia, los EPM lo emplean también para referirse a figuras que simplemente no cumplen la definición de polígono, cuando en esos casos se trataría de no-ejemplos. Por ello, hemos visto conveniente, como indicamos al final del análisis del segundo ciclo, que la tarea incluya explícitamente ambos términos, diferenciando su función en el proceso de definición y clasificación.

En relación con el uso del lenguaje formal, algunos EPM recurren a expresiones imprecisas como “más regular” o “casi simétrico”. En otros casos emplean un lenguaje coloquial para referirse a conceptos matemáticos, por ejemplo, ante la pregunta sobre cuántos ángulos se forman al unir dos segmentos por un extremo (entendidos como los ángulos que generan las semirrectas que contienen a cada uno de los segmentos), los EPM responden que se forman dos, y Daniel especifica *el de dentro y el de fuera* [TF1.1A.10 U573], en lugar de utilizar la terminología correspondiente. Ante estas formulaciones, la formadora interviene para llamar la atención sobre la importancia de utilizar un lenguaje matemático preciso, insistiendo en que la claridad y rigor al enunciar los atributos de un concepto es fundamental para que una definición o clasificación sea adecuada.

De manera global, el KPM movilizado puede caracterizarse como un conocimiento en desarrollo, que muestra que los EPM son capaces de reconocer, clasificar, refutar y justificar parcialmente, aunque en algún caso sean respuestas intuitivas en el contexto de la tarea. Se puede seguir fortaleciendo su uso consciente y explícito para que puedan ser aplicadas en situaciones similares.

En el segundo ciclo se identifican evidencias más explícitas de movilización del KPM (Tabla 5.9), especialmente relacionadas con la formulación precisa de definiciones, la delimitación de criterios de clasificación y la organización estructural de las clases de polígonos. Se observa que los EPM no solo reconocen cuándo una clasificación es válida, sino que reflexionan sobre las propiedades que permiten que dicha clasificación genere particiones disjuntas o jerarquías entre clases. Por ejemplo, Juana reconoce que la convexidad del polígono es *una clasificación, porque tienes cóncavos, por un lado, convexos por otro...* [TF1.2A.30 U1163], haciendo referencia a que genera dos clases de equivalencia. Por su parte, Mónica plantea que, con el criterio sobre pares de *lados paralelos*, *si tú dices que tiene dos lados paralelos, sería clasificación, pero si dices que tenga al menos dos lados paralelos sería categorización, ¿no? Porque dentro de los polígonos con al menos dos lados paralelos están los que tienen dos pares de lados paralelos* [TF1.2A.35 U1293]. En su intervención diferencia entre agrupamiento en clases disjuntas o jerarquía de clases dependiendo de cómo se enuncie el criterio.

Tabla 5.9
KPM movilizado por los EPM en el segundo ciclo

Sub	Ind	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado
KPM	F ²⁹	E27 U1020	El uso de un caso concreto que no verifique una propiedad invalida su generalización
	p ³⁰	E9 U301, 303, 333, 345	Lenguaje matemático para enunciar las definiciones y sus argumentos
		E28 U1275	Enunciado preciso del criterio de clasificación de polígonos atendiendo al número de ejes de simetría
	Prácticas particulares del ³¹	E23 U873	Clasificaciones dentro de clases
		E24 U902 ; E28 U1163, 1266, 1273	Agrupamientos de una clasificación en conjuntos disjuntos
		E24 U921	Agrupamientos de categorizaciones: inclusión de clases
		E27 U1014	Atributos de una definición matemática: no circularidad, minimalidad, jerarquía, ...
		E28 U1293	Diferencia entre criterios que generan una partición del conjunto de otras que establecen jerarquía de clases
	Condiciones necesarias y suficientes para generar ³²	E9 U308; E18 U639; E20 U756	Jerarquía de la definición: los términos usados en una definición matemática deben ser básicos o estar definidos previamente
		E13 U507	La posición de una figura es irrelevante en la definición de una figura
		E16 U568, 570, 575 ; E27 U1014	En la definición matemática solo deben considerarse los atributos relevantes
		E16 U570	Deducción de propiedades de una figura a partir de los atributos relevantes
		E17 U624; E18 U629, 631, 713	Minimalidad de la definición
		E18 U650	No circularidad de la definición
		E20 U797, 803 ; E21 U827, 830	Equivalencia entre definiciones
		E28 U1038	Precisión de las definiciones matemáticas evitando la ambigüedad

²⁹ Formas de validación y demostración

³⁰ Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal

³¹ Prácticas particulares del quehacer matemático

³² Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones

Además, los EPM muestran que pueden refinar una clasificación inicial, aplicando nuevos criterios dentro de una clase previamente establecida. Por ejemplo, tras clasificar los polígonos en función de su simetría, Carolina señala que, dentro del grupo de los polígonos simétricos, se podría realizar una nueva clasificación atendiendo al *número de ejes de simetría que tenga cada polígono* [TF1.2A.34 U1275]. Así, los cuadriláteros de la Figura 5.6 estarían en la clase de los polígonos simétricos, pero dentro de ellos, el trapecio estaría en el grupo de polígonos con un eje de simetría y el rombo en el grupo de los que tienen dos ejes de simetría.

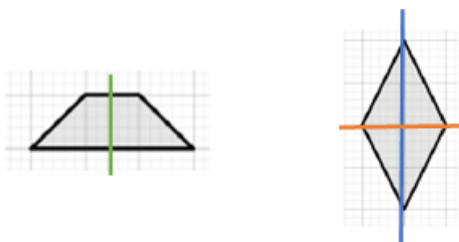


Figura 5.6 Cuadriláteros con sus ejes de simetría

Asimismo, se aprecia una atención creciente a la estructura formal de la definición matemática, al considerar atributos como la minimalidad (incluir únicamente los atributos necesarios), la no circularidad (no definir un concepto usando el mismo concepto), la jerarquía (la definición utiliza conceptos básicos ya definidos) o la coherencia entre definiciones equivalentes (Escudero et al.,2014; Zaslavsky y Shir,2005),

El uso del lenguaje matemático tiende a ser más preciso, tanto en la formulación de definiciones como en la explicitación de argumentos y justificaciones. Una muestra de ello es el hecho de que los EPM enuncien de manera precisa criterios de clasificación, como el número de ejes de simetría o el número de pares de lados paralelos, muestra que el lenguaje actúa, además de como medio de comunicación, como recurso para organizar el razonamiento.

Por otra parte, aparece el uso intencionado del contraejemplo para cuestionar o refutar una generalización, lo que muestra un avance en la comprensión de su función en el razonamiento matemático, más allá de su empleo como simple ilustración. Así ocurre en la intervención espontánea de Rocío, cuando señala que, *cuando los alumnos llegan a generalizar al afirmar que todas las letras son polígonos, la profesora les hace poner ejemplos, y se dan cuenta de que la M puede cumplir las características del concepto,*

pero, sin embargo, la P no es polígono porque tiene un lado curvo. [TF1.2A.27 U1020]
(ver Figura 5.7).



Figura 5.7 Figuras con forma de letra

En términos generales, el KPM movilizado en este segundo ciclo puede describirse como un conocimiento en cuanto a la identificación y explicitación de las prácticas matemáticas relacionadas con definir, clasificar, justificar y comparar conceptos geométricos. Aunque dichas prácticas siguen apareciendo principalmente vinculadas a la resolución de la tarea, comienza a apreciarse cierta estabilidad y coherencia en la manera de ponerlas en juego.

Comparando ambos ciclos, se aprecia que, en los dos casos, los EPM movilizan prácticas matemáticas relacionadas con la clasificación, el reconocimiento de ejemplos y no ejemplos y la identificación de atributos relevantes para definir y justificar. En algunos EPM, tienden a aparecer de manera más vinculada a la situación concreta de la tarea, con un uso del lenguaje no formal. En otros EPM su formulación es más consciente, y se verbalizan con mayor claridad aspectos como la precisión en el uso del vocabulario, la coherencia interna de las definiciones o la relación entre distintos criterios de clasificación. En ambos ciclos, por tanto, el KPM puede caracterizarse como conocimiento en desarrollo, que muestra progresos en la justificación y la argumentación, pero que aún requiere mayor sistematicidad y estabilidad para consolidarse más allá de la resolución puntual de la tarea.

5.1.4. KFLM movilizado por los EPM

En relación con el KFLM movilizado en el primer ciclo (Tabla 5.10), los EPM ponen en juego un conocimiento sobre el aprendizaje de la geometría que se articula, principalmente, a través de referencias implícitas y explícitas al modelo de van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998). Se reconoce que los estudiantes pueden operar en niveles de razonamiento diferentes, y que este hecho influye en la forma en que construyen definiciones, clasifican figuras o justifican sus decisiones. Así, se alude a que quienes se encuentran en niveles iniciales tienden a apoyarse en características perceptivas (forma,

orientación, apariencia homogénea), mientras que niveles más avanzados permiten considerar atributos relevantes y propiedades matemáticas a la hora de enunciar una definición o de fundamentar una clasificación. Asimismo, identifican la importancia de la construcción de definiciones vinculada al desarrollo progresivo del aprendizaje geométrico.

Como ejemplo, Pelayo justifica el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes basándose en los procesos de razonamiento que realizan. Así dice que los estudiantes *han pasado de la fase* (se refiere a nivel) *visual, que es nivel uno, y se encuentra en el nivel dos, que es la clasificación “pobrecita” de polígono [...], y no está en el tres porque no se mete en una clasificación más..., que sería lo de cóncavo, convexo* [TF1.1A.20 U980].

Por otra parte, los EPM identifican dificultades frecuentes en el alumnado de Educación Primaria, tales como: la confusión entre polígonos y figuras con lados curvos, la tendencia a considerar polígonos solo aquellos que se ajustan a imágenes prototípicas (regulares, simétricas, familiares), o la memorización de definiciones, pero no la utilizan para decidir la pertenencia de una figura a la categoría, lo que muestra que no han comprendido el papel de la definición como criterio que delimita el concepto.

También reconocen que el uso de contraejemplos puede generar conflicto cognitivo al cuestionar ideas previas arraigadas. Además, señalan que el trabajo exclusivamente estático puede limitar la comprensión de las propiedades geométricas, destacando el potencial de recursos dinámicos en la construcción del concepto.

Tabla 5.10
KFLM movilizado por los EPM en el primer ciclo

Sub	Cat	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado
KFLM	Teorías de aprendizaje	E4 U252	Potencial del tratamiento dinámico del conocimiento geométrico en el aprendizaje
		E17 U915	Relacionar la nueva información con conocimientos previos generan aprendizajes significativos
		E13 U755	Niveles de razonamiento geométrico de van Hiele
		E20 U980, 1033	El nivel de razonamiento para generar categorizaciones es mayor al necesario para clasificar
		E20 U984	El nivel de razonamiento es propio de cada individuo
		E20 U1062, 1066, 1090, 1092	Las definiciones de estudiantes de nivel 2 de van Hiele tienen estructura simple y se fijan en características matemáticas de los elementos, dando un listado de ellas
		E20 U1088	El reconocimiento de figuras de estudiantes de nivel 1 de van Hiele se hace fijándose en características físicas
		E30 U1478	Importancia de la relación entre la imagen de un concepto y su definición
	Fortalezas y dificultades	E3 U196; E5 U261, 270, 272, 280; E7 U405; E17 U915	Identifican dificultades de los estudiantes en la distinción entre polígono y no polígono y entre polígonos regulares e irregulares.
		E4 U252	El uso exclusivo de trabajo estático en geometría puede provocar obstáculos de aprendizaje
		E19 U953	Los alumnos tienen dificultad al clasificar figuras poco comunes (p.ej. con lados curvos)
		E19 U958	La memorización de definiciones frente a su construcción genera dificultades
		E19 U960	El uso de contraejemplos genera dificultad al rebatir su conocimiento sobre el concepto
		E19 U968	Algunos estudiantes consideran que el círculo es polígono por haberlo trabajado simultáneamente
	Formas de interacción con un contenido mate	E2 U134; E5 U262, 264, 270, 272, 277; E17 U928	Los estudiantes tienden a asociar el concepto de polígono con figuras regulares, simétricas o de apariencia homogénea.
		E3 U184, 191; E13 U750	Los estudiantes consideran polígonos las figuras que les resultan más familiares
		E7 U405, 426	Argumentos que pueden dar los estudiantes para justificar si una figura es polígono o no lo es
		E13 U755	Los estudiantes basan sus argumentos en características físicas de las figuras
		E18 U945	Los estudiantes a la hora de trabajar con ejemplos los comparan con su imagen del concepto
		E19 U953, 968	Estrategias que usan los estudiantes a la hora de representar figuras que no son polígonos
		E20 U1031	El vocabulario utilizado por el estudiante está vinculado con su nivel de razonamiento
		E20 U1092	En nivel dos se utiliza un vocabulario matemático

Finalmente, en cuanto a las formas de interacción con el contenido, los EPM reconocen que los estudiantes suelen apoyarse en su *imagen del concepto* para decidir si una figura es o no un polígono, comparando las figuras que observan con la representación mental que tienen asociada al término. Así, señalan que es más probable que un estudiante identifique como triángulo isósceles el que aparece a la izquierda que cualquier otro triángulo de la Figura 5.8. Cuando un concepto se presenta habitualmente en una misma posición se genera una imagen prototípica del mismo (Tall y Vinner, 1981; Turégano, 2006). Esto puede dificultar el reconocimiento de representaciones no prototípicas. Por ejemplo, en el caso del triángulo isósceles es más sencillo identificarlo cuando el lado desigual está en horizontal, y aún más si dicho lado es el menor, en coherencia con la imagen estática más habitual del concepto. De este modo, la identificación se apoya en rasgos visuales familiares, más que en los atributos geométricos que definen el concepto.

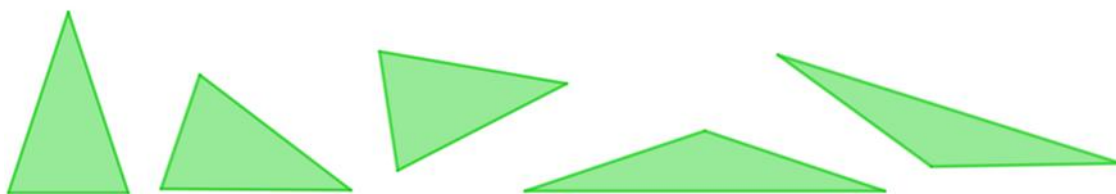


Figura 5.8 Triángulos isósceles en posiciones diferentes

Por otra parte, los EPM destacan que el vocabulario que utilizan los alumnos refleja su nivel de razonamiento: un lenguaje coloquial acompaña a interpretaciones basadas en lo perceptivo, mientras que el uso de términos matemáticos más precisos se vincula con niveles de razonamiento más avanzados.

Con todo, el KFLM movilizado en este primer ciclo puede caracterizarse como conocimiento en desarrollo, que muestra una comprensión inicial de cómo los estudiantes aprenden geometría y de las dificultades que emergen en ese proceso, especialmente en relación con la construcción y uso de definiciones, el papel de los ejemplos y no-ejemplos, y la influencia de la imagen mental del concepto. No obstante, este conocimiento aparece en ocasiones de manera descriptiva, por lo que aún requiere avanzar hacia una interpretación más articulada y fundamentada de las experiencias de aprendizaje.

En el segundo ciclo (Tabla 5.11), los EPM vuelven a movilizar conocimiento sobre el aprendizaje de la geometría que se articula en torno a dos ideas centrales. Por un lado, el

papel de la *imagen del concepto* en la construcción y uso de definiciones (Tall y Vinner, 1981), y por otro, la teoría sobre razonamiento geométrico de van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998).

En primer lugar, los EPM reconocen que el uso reiterado de determinadas representaciones puede generar imágenes prototípicas del concepto, lo que condiciona la identificación de polígonos y de sus clases. Al igual que en el primer ciclo, los EPM señalan que el alumnado tiende a considerar polígonos aquellas figuras familiares, simétricas o regulares, y encuentran mayor dificultad cuando las figuras son cóncavas, abiertas, irregulares o adoptan posiciones no habituales. Asimismo, muestran conciencia de que el vocabulario empleado por los estudiantes (más cotidiano o más matemático) es indicativo de diferentes niveles de razonamiento, y reconocen que las definiciones producidas por los alumnos pueden variar en función de ese nivel, aspecto coherente con la teoría de van Hiele.

De igual forma que en el primer ciclo, los EPM identifican una serie de dificultades persistentes en el aprendizaje de los estudiantes de Educación Primaria: la confusión entre figura e imagen prototípica, la consideración del círculo como polígono por haberse trabajado simultáneamente, la interpretación de polígonos complejos como unión de figuras simples, o la creencia de que un cambio en la posición de la figura modifica su naturaleza. Asimismo, reconocen que las dificultades para representar figuras no prototípicas o para comprender la definición de polígono se relacionan con el hecho de que los estudiantes apoyan su razonamiento en características perceptivas antes que en atributos formales.

Finalmente, en cuanto a las formas de interacción con el contenido, los EPM ponen de manifiesto que los estudiantes contrastan las figuras con su imagen mental del concepto, lo que condiciona tanto el reconocimiento como la argumentación. También se observa la referencia al modelo de registros de representación (Lesh, 1997), entendiendo que el paso entre descripción verbal, representación gráfica y manipulación concreta puede favorecer la identificación de atributos relevantes e irrelevantes del concepto.

Tabla 5.11*KFLM movilizado por los EPM en el segundo ciclo*

Sub	Cat	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado
KFLM	Teorías de aprendizaje	E6 U260; E25 U995	El uso reiterado de determinadas figuras genera imágenes prototípicas del concepto
		E13 U511; E19 U721, 723, 733	Diferentes niveles de razonamiento geométrico. Una forma de detectarlo es a través del lenguaje utilizado
		E16 U586, 589, 591; E28 U1041	Enunciados de definiciones diferentes en función del nivel de razonamiento de van Hiele
		E16 U591; E17 U609	Modelo de Lesh sobre registros de representación. Conversiones entre registros
		E25 U988, 992	Teoría de conocimiento constructivista
		E25 U999; E26 U1011	El uso amplio de ejemplos permite identificar atributos relevantes e irrelevantes
		E27 U1020	Importancia de vincular la definición y la imagen de un concepto
		E29 U1053, 1056, 1070, 1077, 1095	Teoría de razonamiento geométrico de van Hiele
	Fortalezas y dificultades	E4 U190	Consideración del círculo como polígono por trabajarse habitualmente de forma simultánea
		E6 U239 ; E13 U486	Dificultad de los estudiantes en representar figuras que no sean polígonos, figuras diferentes
		E15 U557	Dificultad en identificar diagonales exteriores en polígonos cóncavos
		E22 U859	Dificultad en la comprensión de la definición de polígono
		E28 U1029, 1032, 1034, 136	Los estudiantes vinculan la definición de polígono con su imagen del concepto
	Formas de interacción con un contenido matemático	E2 U157; E3 U180; E4 U190, 196; E8 U287; E6 U206; E7 U280; E8 U297	Los estudiantes van a considerar polígonos las figuras más comunes, las simétricas, regulares ...
		E4 U190	Algún estudiante puede considerar al círculo como polígono por trabajarse conjuntamente
		E4 U198	Pueden considerar polígono a aquellas figuras que cumplan algún atributo relevante
		E6 U223, 253, 260	Los estudiantes considerarán las figuras abiertas y las complejas como no polígonos
		E13 U497	Uso de lados curvos para representar figuras diferentes a las habituales
		E13 U501	Creencia de los estudiantes en que el cambio de posición de una figura genera otra figura
		E13 U509, 511; E21 U818; E28 U1041	Uso de vocabulario informal para referirse a elementos de las figuras (picos, huecos...)
		E14 U537	Interpretación de polígonos complejos como unión de polígonos simples

En síntesis, el KFLM movilizado en el segundo ciclo muestra una comprensión del modo en que los estudiantes construyen el significado de polígono y de las dificultades asociadas a ello. No obstante, este conocimiento se expresa más en forma de observaciones que como criterios didácticos explícitos, por lo que puede considerarse un conocimiento que avanza hacia una comprensión más reflexiva, pero que todavía requiere mayor sistematización y explicitación.

En ambos ciclos, el KFLM movilizado por los EPM se centra en la comprensión de cómo los estudiantes construyen el significado de polígono, destacando el papel de la imagen del concepto y los niveles de razonamiento geométrico (van Hiele) en la identificación y clasificación de figuras. En los dos casos reconocen que los alumnos suelen apoyarse en rasgos perceptivos y prototípicos, lo que puede dificultar el reconocimiento de representaciones no habituales y la elaboración de definiciones basadas en atributos formales. También identifican dificultades recurrentes, como la confusión entre polígonos y figuras con lados curvos o la consideración de la posición como rasgo definitorio. En conjunto, el KFLM evidencia una sensibilidad hacia cómo los estudiantes aprenden geometría, pero aún requiere hacerse más explícito para orientar la toma de decisiones didácticas.

5.1.5. KMT movilizado por los EPM

La tabla 5.12 presenta el conocimiento correspondiente al subdominio KMT movilizado por los EPM en el primer ciclo. Dicho conocimiento está vinculado tanto al papel de los recursos materiales y digitales en el aprendizaje de la geometría como a las estrategias de enseñanza que pueden favorecer la construcción del concepto de polígono y su clasificación.

Con relación a teorías de enseñanza, se reconocen la importancia del trabajo dinámico en geometría, señalando que la manipulación y transformación de las figuras permite completar y depurar la imagen mental del concepto. En relación con ello, los EPM destacan el potencial de los recursos materiales, como las figuras recortadas, para favorecer la comprensión de atributos críticos (por ejemplo, la presencia de lados rectos o el carácter cerrado de la figura), al permitir explorar la figura más allá de su representación estática.

Tabla 5.12*KMT movilizado por los EPM en el primer ciclo*

Sub	Cat	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado
KMT	T ³³	E29 U1461	El trabajo dinámico en geometría es esencial para generar imágenes completas de los conceptos
	Recursos materiales y digitales	E4 U252; E29 U1461	Las figuras recortadas es un recurso didáctico que favorece el trabajo dinámico
		E21 U1114	Las figuras recortadas favorecen la comprensión de atributos críticos del concepto pues no solo representa el contorno (como suele pasar con figuras dibujadas)
		E23 U1168; U24 U1242	Las partes del cuerpo pueden ayudar a representar determinados elementos geométricos
		E29 U1431, 1433, 1435, 1437	Recursos materiales utilizados por la maestra, sus potencialidades y sus debilidades
		E29 U1453	El uso de material permite trabajar de manera concreta con objetos abstractos
		E30 U1478	El uso de recursos gráficos puede provocar obstáculos por su condición estática
	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	E4 U211, 215, 217; E28 U1426	La tarea propuesta por la maestra permite identificar el conocimiento previo de los estudiantes
		E4 U241	El debate sobre la distribución de las figuras favorece la reflexión sobre atributos del polígono
		E12 U687, 697	El descubrimiento como estrategia para llegar a la definición de polígonos guiada por la maestra
		E16 U910; E17 U915; E28 U1427	Tareas para la construcción de la definición de un concepto generan un aprendizaje más significativo
		E16 U913	Plantear dudas que hagan al alumno reflexionar es una estrategia potente de enseñanza
		E16 U917	Proponer la enseñanza a partir de ciertos errores genera un aprendizaje más profundo
		E17 U924, 926	La propuesta de actividades ricas y con sentido generan mayor implicación cognitiva y afectiva
		E18 U933, 935, 937, 941, 947, 949	Ejemplos como casos particulares de un concepto
		E19 U958, 968	Las tareas que implican razonamiento generan un conocimiento más significativo que las de carácter memorístico.
		E28 U1430	Las tareas como la propuesta por la maestra favorecen la construcción de clasificaciones más diversas de polígonos, no solo las tradicionales

³³ Teorías de enseñanza

La representación de un polígono mediante un diagrama suele destacar únicamente la línea poligonal que lo delimita, sin señalar explícitamente la región del plano que queda encerrada. Cuando esta es la forma habitual de representación (ya sea en pizarra, cuaderno o pantalla) puede generar un obstáculo en el aprendizaje, pues el alumnado puede llegar a identificar el polígono con su contorno, y no con la figura plana que este delimita. Este fenómeno es análogo al que se observa cuando el círculo se representa sistemáticamente mediante la circunferencia, dificultando posteriormente la diferenciación conceptual entre ambos (ver Figura 5.9).

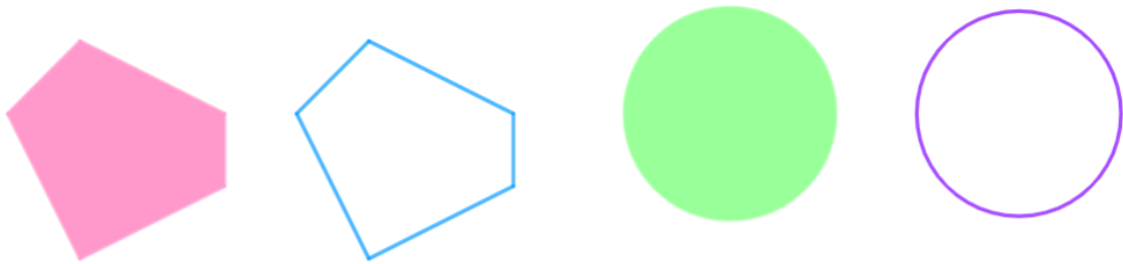


Figura 5.9 Polígono vs línea poligonal. Círculo vs circunferencia

En el aprendizaje de la geometría, es frecuente que los estudiantes confundan la frontera visible de una figura (en este caso, la línea poligonal) con el objeto geométrico completo, es decir, la región que dicha línea encierra (el polígono) (Fischbein, 1993). Esta tendencia se observa también en la formación inicial de profesores, donde la dependencia de imágenes prototípicas puede llevar a clasificaciones basadas en la apariencia en lugar de en los atributos formales que definen el concepto (Tall y Vinner, 1981). Estudios recientes con futuros maestros confirman que el paso de atender al contorno a focalizar en los atributos del concepto constituye un reto relevante en su desarrollo profesional (Bernabeu, Llinares et al., 2021; Ward, 2004). Esta evidencia subraya la necesidad de diseñar experiencias de aprendizaje que permitan manipular y variar las representaciones de los polígonos, de modo que se favorezca una comprensión más profunda y menos dependiente de la apariencia perceptiva.

En este sentido, el uso de figuras recortadas presenta una ventaja: permite identificar con claridad el objeto matemático y facilita su manipulación y cambio de posición, lo que contribuye a desvincular la comprensión del concepto de rasgos prototípicos ligados a orientaciones concretas. No obstante, conviene señalar que trabajar únicamente con figuras recortadas puede ocultar la existencia de líneas poligonales abiertas, por lo que es necesario hacer explícito que un polígono requiere estar delimitado por una línea

poligonal cerrada y simple. Este tratamiento dinámico y variado de las representaciones contribuye, por tanto, a que los estudiantes identifiquen las características críticas del concepto de polígono y no queden condicionados por aspectos perceptivos o posicionales.

Por otra parte, los EPM reconocen la importancia de estrategias de enseñanza que favorecen la construcción activa del conocimiento, tales como: promover debates en torno a la distribución y clasificación de figuras; utilizar el descubrimiento guiado como vía para llegar a la definición; provocar el conflicto cognitivo a través de preguntas o contraejemplos que obliguen a revisar ideas previas; o diseñar tareas ricas y con sentido que impliquen razonamiento y no mera aplicación mecánica. Asimismo, destacan que las actividades centradas en la construcción de definiciones generan aprendizajes más significativos, y reconocen el valor de partir de ejemplos y contraejemplos como casos particulares para delimitar el concepto.

El KMT movilizado en este primer ciclo, por lo tanto, puede caracterizarse como un conocimiento en consolidación, que muestra una conciencia creciente del papel de los recursos y las tareas en la construcción del significado geométrico. Sin embargo, este conocimiento aparece todavía más vinculado a la descripción de lo que sucede en el aula que a la selección explícita y justificada de estrategias de enseñanza. Es decir, los EPM reconocen potenciales didácticos, pero no siempre los articulan como criterios deliberados para el diseño o toma de decisiones profesionales.

En el segundo ciclo (Tabla 5.13), al igual que en el anterior, los EPM movilizan un conocimiento de la enseñanza de las matemáticas estrechamente vinculado al papel de los recursos y a la selección de estrategias y tareas que favorecen la comprensión del concepto de polígono y su clasificación. En primer lugar, reconocen que el uso reiterado de ejemplos prototípicos en materiales como los libros de texto puede generar obstáculos en la identificación de figuras no convencionales, lo que los lleva a valorar la necesidad de variar las representaciones y de hacer explícitos los criterios que delimitan la categoría de polígono. En este sentido, destacan las limitaciones de la pizarra como recurso, dado que su naturaleza estática dificulta mostrar la variación en la posición de las figuras, mientras que los polígonos recortados permiten un trabajo dinámico con el concepto, facilitando su manipulación, rotación, comparación y verificación de propiedades como la simetría mediante plegado. Asimismo, señalan el potencial de herramientas como GeoGebra para explorar el concepto desde un enfoque de geometría dinámica.

Tabla 5.13
KMT movilizado por los EPM en el segundo ciclo

Sub	Cat	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado
K M T	Recursos materiales y digitales	E6 U260; E28 U1043, 1044	Los libros de texto y otros recursos suelen abusar del mismo tipo de ejemplos, provocando obstáculos para aprendizajes posteriores
		E28 U1044	Uso de material concreto para representar el concepto de polígono
		E37 U1102, 1104	Limitación de la pizarra como recurso al no permitir cambios de posición de las figuras
		E37 U1104, 1130; E36 U1318, 1329	Los polígonos recortados son un material que permite el trabajo dinámico del concepto
		E37 U1135	GeoGebra como recurso de geometría dinámica
		E38. 1315	Identifican los recursos materiales que utiliza la maestra
		E38 U1318, 1320, 1337	Uso de figuras recortadas en cartulina para comprobar propiedades. Potencialidades y limitaciones
		E38 U1339	Disposición de las figuras recortadas en papel y proyectadas de manera paralela como posible dificultad para reconocer la equivalencia entre los dos conjuntos de figuras
	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	E4 U190	Obstáculos por tratar el círculo de manera simultánea al polígono
		E6 U260; E7 U280	Variedad en el uso de ejemplos para la enseñanza de un concepto
		E12 U473, 475	Aclaración de la diferencia entre polígono simple y polígono complejo desde el principio
		E25 U988; E26 U1004, 1006, 1010	Actividades que fomenten la participación activa desarrollan competencias matemáticas
		E25 U989, 991, 992, 999; U36 U1306; E36 U1310; Producción EPM	La actividad propuesta por la maestra favorece un aprendizaje significativo, genera debate, conecta con conocimientos previos
		E25 U995	Esta actividad genera un conjunto amplio de ejemplos diferentes a los prototípicos
		E25 U1002	Potencial de este tipo de actividad como evaluación inicial
		E27 U1015, 1016, 1018, 1023, 1025, 1027	Uso de ejemplos y no ejemplos favorecen la construcción de una definición matemática
		E27 U1020	Utilización de ejemplos para visualizar casos concretos de conceptos abstractosE27
		E27 U1020	Uso de no ejemplos para identificar atributos irrelevantes
		E36 U1303	Actividades que propongan diferentes clasificaciones generan un conocimiento más profundo
		E36 U1304, 1310, 1312	La construcción de las clasificaciones genera una mayor comprensión de los conceptos implicados, establece relaciones entre distintas clasificaciones

En cuanto a las estrategias y tareas, los EPM identifican la relevancia de proponer actividades que favorezcan la participación activa, el debate matemático y la conexión con conocimientos previos, lo que contribuye a generar aprendizaje significativo. También ponen de relieve la necesidad de diferenciar desde el principio conceptos como polígono simple y polígono complejo, así como de incorporar una variedad de ejemplos y no ejemplos para favorecer la construcción de definiciones basadas en atributos esenciales y no en características perceptivas.

La identificación de obstáculos como tratar el círculo y el polígono de forma simultánea evidencia una preocupación por la comparación conceptual y la progresión en la secuenciación del contenido. Del mismo modo, reconocen el valor formativo de tareas que requieren realizar distintas clasificaciones, dado que estas permiten establecer relaciones entre criterios y profundizar en la comprensión estructural del concepto.

En resumen, el KMT movilizado en el segundo ciclo muestra una reflexión sobre cómo los recursos, la selección de ejemplos y la naturaleza de la tarea influyen en la construcción del significado de polígono. Sin embargo, al igual que en el primer ciclo, este conocimiento se manifiesta principalmente a través de observaciones que describen el potencial de los recursos y estrategias, por lo que puede caracterizarse como un conocimiento que aún requiere de cierta consolidación para funcionar como criterio sistemático de toma de decisiones en la enseñanza.

En ambos ciclos, los EPM reconocen la importancia de variar las representaciones y de utilizar recursos manipulativos o dinámicos para evitar que la comprensión del polígono quede vinculada a imágenes prototípicas. También identifican el valor de tareas que promuevan la construcción activa de definiciones, el debate y el uso de ejemplos y no ejemplos. Valoran el potencial de los polígonos recortados y herramientas digitales para favorecer la exploración de propiedades y clasificaciones. En conjunto, el KMT en ambos ciclos puede caracterizarse como conocimiento que reconoce la influencia de los recursos y la tarea en el aprendizaje, pero que todavía requiere mayor sistematicidad e intencionalidad para orientar de manera estable la toma de decisiones didácticas.

5.1.6. KMLS movilizado por los EPM

Las tablas 5.14 y 5.15 muestran el conocimiento relativo al subdominio KMLS movilizado por los EPM, respectivamente, en el primer y segundo ciclo.

Tabla 5.14
KMLS movilizado por los EPM en el primer ciclo

Sub	Cat	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado
KMLS	R ₃₄	Producciones de EPM	Resultados de aprendizaje que aparecen en el currículo oficial andaluz con el tema tratado
	N ₃₅	E4 U260	La definición y clasificación de polígonos se trabaja en cursos previos a 5º de Educación Primaria
		Producciones de EPM	Objetivos de aprendizaje y contenidos secuenciados para cada curso

Tabla 5.15
KMLS movilizado por los EPM en el segundo ciclo

Sub	Cat	Unidades de información	Indicadores de conocimiento movilizado
KMLS	R ₃₆	Producciones de EPM	Objetivos, contenidos, competencias y criterios de etapa para 5º de Educación Primaria con relación a la definición y clasificación de polígonos
	N ₃₇	E4 U188	Los alumnos de 5º de Educación Primaria saben que los polígonos son figuras planas
		E28 U1030	Los alumnos de 5º de Educación Primaria saben que el rectángulo es un polígono
		Producciones de EPM	Los estudiantes de 5º de Educación Primaria deben conocer la definición y clasificación de polígonos en cuanto a contenidos
		Producciones de EPM	Uso de determinados procedimientos en la resolución de actividades por el curso en el que están
	S ₃₈	Producciones de EPM	Tratamiento previo de la definición y clasificación de polígonos en cursos anteriores, y la necesidad de profundizar en este contenido en 5º de Primaria

³⁴ Resultados de aprendizaje esperados

³⁵ Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado

³⁶ Resultados de aprendizaje esperados

³⁷ Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado

³⁸ Secuenciación de temas

El conocimiento que los EPM ponen en juego en relación con el KMLS en el primer ciclo se centra en el currículo oficial de Educación Primaria y en la secuenciación de los contenidos vinculados a la definición y clasificación de polígonos. Los EPM reconocen que este contenido aparece en cursos previos a 5.º de Educación Primaria, lo que indica cierta conciencia de progresión curricular y de la necesidad de construir conocimientos geométricos de manera gradual. Sin embargo, esta referencia aparece de forma muy general, limitada a situar el contenido dentro del nivel educativo correspondiente, sin profundizar en cómo se concreta en términos de criterios de evaluación, descriptores operativos o expectativas de desempeño.

Del mismo modo, los EPM aluden a objetivos y contenidos secuenciados, pero lo hacen en clave descriptiva, sin establecer relaciones claras entre dichos objetivos y las decisiones didácticas necesarias para favorecer el aprendizaje del alumnado. No se observa aún un uso del currículo como herramienta para orientar la planificación, sino más bien como marco de referencia general que señala dónde se ubica el contenido, pero no cómo debe enseñarse o con qué finalidad específica.

Así, podemos caracterizar el KMLS movilizado en este ciclo como un conocimiento inicial y emergente, que muestra familiaridad con el currículo y con la ubicación del contenido en la secuencia escolar, pero que aún requiere avanzar hacia una lectura más interpretativa, que permita utilizar los estándares y objetivos como guía efectiva para la toma de decisiones didácticas.

En el segundo ciclo, el conocimiento movilizado por los EPM en relación con el KMLS se centra en el reconocimiento general del lugar que ocupa la definición y clasificación de polígonos en el currículo de 5º de Educación Primaria. Los EPM identifican que este contenido forma parte de los objetivos y contenidos de etapa, y que el alumnado debería ser capaz de reconocer qué es un polígono, diferenciarlo de otras figuras planas y clasificarlo en función de ciertos atributos. Sin embargo, esta referencia al currículo aparece de forma descriptiva, orientada principalmente a situar el contenido en un nivel educativo concreto, sin llegar a relacionarlo con criterios de evaluación específicos o con las expectativas de desempeño asociadas a este aprendizaje.

Por otra parte, se menciona que el alumnado en cursos previos ya ha tenido contacto con la idea de polígono, lo que sugiere cierta conciencia de progresión y continuidad en el aprendizaje. No obstante, esta secuenciación se expresa en términos generales, sin detallar qué se espera consolidado antes de abordar nuevas clasificaciones o qué elementos requieren profundización en 5º curso. Tampoco se observa una vinculación explícita entre el nivel curricular y la selección de tareas, los recursos a emplear o las demandas cognitivas que se plantean al alumnado, por lo que el currículo funciona más como marco referencial que como instrumento de planificación didáctica.

En resumen, el KMLS movilizado en este segundo ciclo puede caracterizarse como un conocimiento incipiente, que reconoce qué contenidos se trabajan en el nivel educativo correspondiente y su continuidad respecto a cursos previos, pero que aún no se utiliza de forma estratégica para orientar decisiones didácticas relacionadas con la profundización, la gradación de la complejidad o el tipo de apoyo que necesita el alumnado para avanzar en la construcción del concepto de polígono.

No se observan diferencias significativas en la movilización de KMLS entre ambos ciclos. La actividad diseñada para trabajar este subdominio no fue objeto de discusión en el aula, de modo que las evidencias, salvo alguna intervención puntual en el debate sobre otras actividades o el propio caso, proceden de las producciones individuales de los EPM. Los EPM se limitan a situar el contenido en el nivel educativo correspondiente.

5.2. Conclusiones

En este apartado presentamos las aportaciones principales del estudio en relación con la pregunta de investigación y los objetivos formulados. La investigación se centra en comprender qué conocimiento especializado moviliza un grupo de EPM al resolver una tarea formativa sobre definición y clasificación de polígonos, diseñada *ad hoc* a partir de la observación de la práctica real en un aula de Educación Primaria. Para ello, hemos implementado la tarea en dos microciclos en un centro universitario adscrito a la Universidad de Sevilla. Tanto para el diseño de la tarea como para el análisis de los resultados hemos utilizado el modelo MTSK.

En relación con el proceso de diseño y validación de la tarea formativa, basada en la observación y adaptación de una situación real de aula, ha permitido generar un contexto

auténtico para la movilización y el análisis del conocimiento especializado de los EPM. La tarea, estructurada en torno a la definición y clasificación de polígonos, se concibió con el propósito de favorecer la reflexión sobre ciertos contenidos geométricos y sobre los procesos implicados en su enseñanza y aprendizaje.

Su implementación en dos ciclos de formación inicial ha mostrado que el diseño resulta pertinente para promover el conocimiento pretendido en cada actividad, vinculado a ciertas categorías o indicadores de los subdominios del modelo MTSK. En ese sentido, podemos afirmar que la tarea constituye un recurso útil para el desarrollo profesional como profesores de matemáticas de los futuros maestros.

La revisión de todo el proceso de implementación de la tarea evidencia su potencial formativo, al generar situaciones que invitan a los EPM a argumentar, contrastar ideas y relacionar conocimientos de tipo matemático y de tipo didáctico a partir de la práctica real.

En conjunto, el trabajo realizado en torno a la tarea permite afirmar que esta responde al objetivo de diseñar, implementar y evaluar un instrumento formativo orientado a promover la construcción de conocimiento especializado sobre contenidos geométricos, integrando la reflexión sobre la práctica y la teoría de la enseñanza de las matemáticas. En otras palabras, ofrecemos a los EPM una oportunidad para analizar la actividad matemática y la actividad docente desde dentro, es decir, desde la práctica y no únicamente desde marcos teóricos.

El hecho de que los conocimientos pretendidos en cada actividad se hayan movilizado en ambos ciclos constituye un indicio de la validez de la tarea, en la medida en que esta favorece la puesta en juego del conocimiento especializado pretendido en su diseño.

Además, la tarea no solo dio lugar al conocimiento pretendido. Durante el desarrollo de las actividades surgieron también manifestaciones de conocimiento de otras categorías o indicadores de subdominios del modelo MTSK, derivadas de las interpretaciones de los EPM, de sus comentarios espontáneos o de las intervenciones de la formadora al guiar el debate. Estas situaciones muestran el potencial formativo de la tarea, capaz de generar reflexión didáctica y de propiciar la articulación entre distintos tipos de conocimiento especializado, más allá de los contenidos geométricos inicialmente previstos.

De este modo, la validación se sustenta en la correspondencia entre los conocimientos pretendidos y los efectivamente movilizados, así como en la capacidad de la tarea y de la interacción en el aula para promover la construcción de conocimiento especializado.

En este estudio, la movilización del conocimiento pretendido en el enunciado de cada actividad ha sido un punto de partida. El análisis muestra que, durante la puesta en común y el debate que se genera en cada actividad, los EPM amplían y reorganizan las ideas inicialmente activadas, dando lugar a que emerja conocimiento no anticipado en el diseño, pero coherente con el contenido geométrico abordado. Parte del conocimiento que emerge en la resolución de la tarea sin ser pretendido corresponde a KoT, algo esperable dado que la tarea gira en torno a la definición y clasificación de polígonos. Muchos de los argumentos de los EPM remiten a conceptos matemáticos (definiciones, propiedades y sus fundamentos) y a procedimientos asociados. También emerge conocimiento relativo a los distintos registros de representación empleados para referirse a dichos conceptos. Asimismo, al analizar los casos desde la óptica de un maestro de Primaria que enseña matemáticas, aparece conocimiento no pretendido vinculado a KFLM (teorías de aprendizaje, fortalezas y dificultades, formas de interacción con un contenido matemático) y a KMT (recursos materiales y digitales; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Con menor frecuencia, aunque de manera apreciable, se identifican aportaciones relacionadas con diversos indicadores de KPM. Por último, en los subdominios KMS y KMLS la presencia de conocimiento no pretendido es mínima, limitándose a intervenciones puntuales y esporádicas.

Este hecho coincide con lo señalado por Molina et al. (2007) respecto a cómo, en tareas diseñadas a partir de la práctica, el conocimiento inicialmente previsto puede evolucionar a partir de las interacciones que se producen en el aula.

En nuestro caso, esta evolución se ha articulado tanto por la gestión de la formadora, que aclara, cuestiona, valida o reformula aportaciones, como por las intervenciones de los propios EPM, al plantear dudas, evidenciar comprensiones parciales, introducir elementos nuevos de manera espontánea o interpretar el enunciado desde perspectivas diversas. En conjunto, estas dinámicas han permitido que el conocimiento movilizado se hiciera más explícito, consciente y estructurado, favoreciendo la construcción colectiva de significado durante el desarrollo de la tarea. Además, ha permitido conectar conocimiento relativo a los dos subdominios en una misma actividad.

A partir del análisis realizado, es posible dar respuesta al segundo objetivo del estudio: *comprender el conocimiento especializado que muestran los EPM al resolver una tarea formativa sobre definición y clasificación de polígonos, basada en la práctica real de aula y diseñada específicamente para tal fin*. La caracterización que se presenta a continuación se deriva de la interpretación de los registros y producciones recogidas, así como de la discusión analítica desarrollada en el marco de la investigación, en la que hemos examinado las evidencias a la luz de los subdominios del MTSK.

En primer lugar, en relación con el KoT, los EPM muestran un manejo amplio de criterios para la definición, identificando entre todos los atributos relevantes del polígono, y para la clasificación de polígonos, tales como la regularidad, la presencia de pares de lados paralelos, la concavidad, el número de ángulos rectos, el número de ejes de simetría o el número de diagonales de la figura. Esta variedad de criterios es especialmente visible en el segundo ciclo, donde se aprecia una mayor diversidad en los procedimientos de clasificación y una atención más explícita a las propiedades geométricas que sustentan dichas decisiones.

No obstante, el uso de los criterios empleados no implica aún una consolidación plena del conocimiento geométrico. Persisten dificultades para formular definiciones completas, precisas y no redundantes, y para utilizar la definición como punto de partida del razonamiento, recurriéndose a ella principalmente cuando surge conflicto. Asimismo, aunque se recurre a distintos registros de representación (concreto, icónico, gráfico y verbal), su uso tiene todavía un carácter principalmente operativo, orientado a visualizar o comprobar propiedades más que a sostener argumentaciones formales.

Respecto al subdominio KSM, el análisis muestra una movilización muy limitada de este tipo de conocimiento en ambos ciclos. En el primer ciclo no se han identificado evidencias ni indicios que sugieran que los EPM establecen conexiones entre la definición y clasificación de polígonos y otros conceptos o contenidos matemáticos. En el segundo ciclo se observa únicamente una conexión transversal puntual que surge de manera espontánea durante el trabajo con la tarea y no como respuesta a una demanda explícita del enunciado.

La escasa movilización de KSM hallada en este estudio debe entenderse como resultado del foco de la tarea y no como indicador de falta de capacidad en los EPM. Es

consecuencia directa del diseño de la tarea, que no incluye actividades orientadas explícitamente a promover la construcción de relaciones con otros contenidos. Aun así, muestra el potencial para activar conexiones conceptuales cuando el contexto de trabajo o la reflexión personal lo propicia. La movilización de conocimiento de este subdominio podría incrementarse si se incorporan actividades que inviten explícitamente a relacionar el concepto de polígono con otros contenidos geométricos o de otras áreas matemáticas.

En lo relativo al subdominio KPM, el análisis evidencia una movilización notable de este conocimiento en ambos ciclos, con una mayor explicitación en el segundo. Los EPM muestran capacidad para reconocer y justificar cuándo un criterio de clasificación genera clases disjuntas y cuándo conduce a estructuras jerárquicas. Asimismo, son capaces de refinar una clasificación inicial incorporando nuevos criterios dentro de una clase previamente establecida, lo que indica una comprensión en proceso de consolidación acerca de la estructura interna de las categorías geométricas.

Este subdominio se manifiesta también en la atención creciente a la precisión del lenguaje matemático y a la coherencia interna de las definiciones. La formulación de definiciones y criterios se realiza evitando expresiones ambiguas o redundantes, y explicitando atributos relevantes. Un aspecto especialmente significativo es el uso intencionado del contraejemplo como recurso para cuestionar o refutar generalizaciones sustentadas en características perceptivas. Este uso supera su función ilustrativa y se orienta hacia la argumentación, lo que refleja un avance en la comprensión de cómo se construye y valida el conocimiento matemático.

El KPM movilizado evidencia que los EPM comprenden y ponen en juego prácticas matemáticas fundamentales para el trabajo con definiciones y clasificaciones, avanzando hacia formas de razonamiento más reflexivas y estructuradas, aunque todavía dependientes del andamiaje que la propia tarea y la gestión de la formadora proporcionan.

En cuanto al subdominio KFLM, los EPM muestran conocimiento sobre cómo construyen el significado de polígono los estudiantes de Educación Primaria, articulado principalmente en torno a dos ideas: el papel de la imagen del concepto en la identificación y uso de definiciones (Tall y Vinner, 1981), y la influencia del nivel de razonamiento geométrico del alumnado en la forma de definir, clasificar y justificar (Gutiérrez y Jaime, 1998).

Los EPM reconocen que los alumnos de Educación Primaria suelen apoyarse en prototipos visuales, lo que dificulta la identificación de figuras no convencionales, como polígonos cóncavos, irregulares o rotados. También identifican la confusión entre figura y representación, como considerar que un cambio de posición modifica la naturaleza del objeto geométrico y la tendencia a aceptar como polígono cualquier figura que “parezca” familiar o simétrica. Del mismo modo, se señala que la naturaleza del vocabulario utilizado por el alumnado (más cotidiano o más técnico) refleja distintos niveles de formalización y estructuras de pensamiento asociadas al progreso en los niveles de van Hiele.

Estas observaciones muestran que los EPM son capaces de reconocer dificultades recurrentes en el aprendizaje de la geometría en Primaria y de interpretarlas desde marcos teóricos consolidados, lo que evidencia una movilización del KFLM pertinente y fundamentada. No obstante, este conocimiento se expresa principalmente en forma de descripciones y observaciones, y no como criterios sistemáticos para orientar la toma de decisiones didácticas. Es decir, aunque los EPM identifican qué dificultades pueden aparecer y por qué, todavía no derivan de ello decisiones instruccionales explícitas, tales como la secuenciación de apoyos, la selección intencionada de ejemplos o la anticipación de estrategias para superar obstáculos.

En lo que concierne al subdominio KMT, los EPM reconocen el papel que desempeñan los recursos y las tareas en la construcción del significado de polígono. En ambos ciclos identifican que el uso reiterado de ejemplos prototípicos en materiales habituales, como libros de texto, puede llevar a que el alumnado asocie el concepto únicamente con figuras prototípicas, simétricas, regulares o de orientación estandarizada. A partir de ello, valoran la necesidad de variar las representaciones y de incorporar figuras no prototípicas, rotadas o irregulares, para favorecer una comprensión basada en atributos formales y no en características perceptivas.

Asimismo, los EPM destacan el potencial de recursos manipulativos, como los polígonos recortados, que permiten rotar, superponer o plegar las figuras para explorar propiedades como la simetría. También reconocen el valor formativo de herramientas digitales, como GeoGebra, para promover una exploración más dinámica de las figuras y sus atributos. Del mismo modo, señalan la importancia de tareas que favorezcan la participación activa

y el debate, como estrategias que contribuyen a hacer explícitos los criterios de clasificación y a contrastar diferentes formas de razonar.

No obstante, aunque los EPM identifican el efecto de estos recursos y estrategias en la construcción del concepto, este conocimiento se expresa principalmente como observación y no se traduce en criterios sistemáticos para planificar o justificar decisiones de enseñanza. Quizás porque en la tarea no se les pide explícitamente. Proponemos completar la tarea proponiendo alguna actividad que suponga el diseño de alguna secuencia de enseñanza para Primaria.

En el caso del subdominio KMLS, la movilización observada es incipiente. Los EPM sitúan adecuadamente la definición y clasificación de polígonos en el nivel educativo correspondiente y reconocen cierta continuidad respecto a los cursos previos.

Sin embargo, esta referencia al currículo se expresa de manera descriptiva, sin que se utilice como herramienta para orientar decisiones didácticas relacionadas con la secuenciación, la secuenciación detallada del contenido o la selección de tareas. En este caso, las evidencias de conocimiento se han tomado, salvo alguna aportación espontánea en cada ciclo, de las producciones escritas de los EPM, ya que la actividad que cuestionaba sobre estos aspectos no llegó a debatirse en clase.

En cuanto a la pregunta de investigación, puede concluirse que los EPM movilizan fundamentalmente KoT, KPM, KFLM y KMT, mientras que KMLS se manifiesta de manera incipiente y KSM apenas se manifiesta.

La movilización de KoT se concreta en el uso de diversos criterios para definir y clasificar polígonos, aunque las definiciones no se consolidan aún como punto de partida estable para el razonamiento. El KPM se evidencia en la capacidad para establecer y refinar clasificaciones, justificar decisiones y emplear el contraejemplo como recurso argumentativo, si bien estas prácticas siguen ligadas al contexto de la tarea. El KFLM aparece en el reconocimiento de dificultades frecuentes en el aprendizaje de la geometría, mientras que el KMT se refleja en la valoración del papel de los recursos y de la naturaleza de las tareas en la construcción del concepto. En conjunto, el conocimiento especializado movilizado.

5.2.1. Producto de la investigación: Tarea formativa

La actividad está pensada para trabajarla con estudiantes del grado en Educación Primaria. La duración aproximada de la implementación es de unas 4 horas de clase.

a. Justificación

A los EPM se les supone adquiridos unos conocimientos matemáticos acordes con las propuestas curriculares oficiales de las etapas educativas obligatorias (Liñán-García, 2012). A pesar de que los contenidos geométricos son una parte importante de dichas propuestas, es habitual que se les suela dedicar poco tiempo y se desarrollen de manera numérica relacionada con la medida de magnitudes, trabajándose de forma procedimental, a través del uso de fórmulas, desde un enfoque estático (Muñoz-Catalán *et al.*, 2013; Climent, 2011). No es habitual la construcción, reflexión y discusión de conceptos geométricos ni la búsqueda de relaciones entre ellos (Climent y Carrillo, 2002).

Como consecuencia del paso de los EPM por estas aulas de Educación Primaria como estudiantes, suelen identificar geometría con un conjunto de nombres, a veces complejos, relacionados con representaciones prototípicas y uso de expresiones para calcular medidas de magnitudes geométricas de manera indirecta (Clements y Battista, 1992; Vecino, 2003). Por ello, es frecuente que muestren dificultades al definir, clasificar, representar gráficamente objetos geométricos o realizar alguna demostración (Carreño y Climent, 2010).

La perspectiva práctica en la formación inicial del profesorado es más eficaz y mejora sus resultados (Boyd *et al.*, 2009), y se ven fortalecidos cuando se conecta la formación con la práctica profesional (Goos, 2014). Uniendo todas estas ideas, y teniendo en cuenta que las tareas profesionales deben ser el eje vertebrador del currículo de formación de profesorado (Ball y Forzani, 2007), nos centramos en la tarea profesional de reflexión tras una sesión de clase como medio para planificar más eficazmente la siguiente. Esta reflexión es más efectiva si se apoya en un marco organizativo (Santagata y Guarino, 2011) y desde una mirada profesional (Fernández *et al.*, 2018); en este caso, nuestro marco organizativo será MTSK (Carrillo *et al.*, 2018).

En esta tarea se tratan dos procesos de razonamiento geométrico fundamentales: definir y clasificar (Gutiérrez y Jaime, 1998), como parte del conocimiento especializado de un

profesor de matemáticas. Parece evidente, en relación con el primero de ellos, que el conocimiento de un profesor de matemáticas, además de las definiciones de conceptos matemáticos, incluye las estructuras subyacentes de las definiciones y el cómo se debe definir (Zazkis y Leikin, 2008). Con relación al segundo proceso, consideramos que se deben desarrollar tanto las clasificaciones disjuntas como las categorizaciones de clases (Liñán-García, 2017).

b. Objetivos generales

- Desarrollar el conocimiento especializado del profesorado en formación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la definición y la clasificación de polígonos.
- Reflexionar sobre las prácticas matemáticas de definir y clasificar en el contexto de los polígonos.
- Identificar ejemplos, contraejemplos y no ejemplos útiles para determinar una definición del concepto de polígono.
- Desarrollar la mirada profesional del profesorado en formación sobre la identificación del pensamiento del alumnado, la interpretación y diseño de actividades (Fernández et al., 2018).

c. Conocimientos, habilidades y/o competencias previas necesarias

Para resolver las actividades planteadas en esta tarea el profesorado en formación debe conocer previamente el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998) identificando las principales características de la forma en la que el alumnado desarrolla los principales procesos de razonamiento. Se habrá tratado ya la postura de Canals (1997) sobre el conocimiento geométrico y las orientaciones para trabajar este contenido desde asociaciones como NCTM (2000) y el currículo oficial.

d. Recursos físicos o virtuales

- Hojas de trabajo
- Anexos 1 y 2
- Conjunto de figuras recortadas para parte 3

e. Orientaciones generales para quien dirige la formación

La tarea se desarrolla alrededor de la definición y clasificación de polígonos. Se nutre de una clase transcrita de quinto de Primaria en la que se está trabajando contenido

geométrico. La maestra plantea una actividad con la intención de hacer que el alumnado recuerde lo que ya conoce sobre el polígono y establezcan diferentes criterios que permitan su clasificación.

La transcripción de la sesión se complementa y enriquece para transformarla en un caso de aprendizaje (con gestión alternativa de la maestra, otras posibles otras respuestas del alumnado o interacciones alternativas entre maestra y alumnado). Se fragmenta en episodios y se complementa con actividades orientadas al desarrollo de la reflexión del profesorado en formación y a la movilización del conocimiento especializado sobre los polígonos.

Esta tarea tiene dos actividades. Los EPM deben responder, en un primer momento, de manera individual, a continuación, compartirán sus respuestas en grupos de cuatro personas antes de hacer una puesta en común que será gestionada por quien dirija la formación. Todas las respuestas han de estar justificadas, velando por una argumentación correcta, precisa y válida desde una perspectiva didáctico-matemática.

En el propio documento que se les facilita a los EPM con la tarea, se adjunta (como anexo I) una tabla resumen con las características de una definición matemática. Se deberá utilizar después de que los EPM problematicen su propia concepción de lo que es una definición.

Con ambas ideas se puede discutir sobre su imagen del concepto y la definición correcta, antes de entrar a trabajar con los episodios a observar.

Para organizar la información de las transcripciones que van a analizar, se les proporciona una tabla de observación (Climent, Romero-Cortés et al., 2013) como anexo II del documento para el EPM. Con ella pueden focalizar su atención en aspectos sobre los que reflexionar para contestar más fácilmente a las preguntas de cada actividad.

f. Caso

f1. Primer fragmento

En una clase de quinto de Educación Primaria en la que se está trabajando contenido geométrico, la maestra plantea una actividad con la intención de hacer que el alumnado recuerde lo que ya conocen sobre el concepto polígono y establezcan diferentes criterios que permitan su clasificación.

En la primera parte de la actividad, cada alumno y alumna, de manera individual, dibujará en su cuaderno al menos una forma que represente un polígono y otra forma que no sea polígono. Reflexionarán sobre las características que deben tener las figuras propuestas en cada caso. El fin último de la tarea es enunciar una definición de polígono entre toda la clase.

A continuación, el alumnado podrá representar una de sus figuras en la pizarra, que previamente se ha dividido en dos zonas, una para polígonos y otra para no-polígonos. A medida que el alumnado dibuja una figura en una de las zonas, se debate en gran grupo para determinar si todo el alumnado está de acuerdo con la selección planteada. Si no hay acuerdo, se establecerá un diálogo en el que se intentará convencerles de la inclusión o no de la figura en el grupo correspondiente. Las figuras representadas en la pizarra una vez finalizada la actividad se presentan en la Figura 5.10.

f2. Segundo fragmento

Después de unos minutos, en que el alumnado ha dibujado en sus cuadernos un ejemplo de polígono y otro de no-polígono, la maestra pide que, de manera ordenada y de uno en uno, vayan saliendo a dibujar en la pizarra una de las figuras representadas en su cuaderno, teniendo en cuenta en qué grupo la incluye. El resto de la clase debe analizar la figura indicando si están de acuerdo con la asignación del grupo planteada. En caso de existir discrepancias tendrán que argumentar su disconformidad para convencer al resto de compañeros.

M³⁹. A ver, vamos a ir representando en la pizarra algunas de las figuras que habéis dibujado en vuestro cuaderno. Para ello iréis saliendo de manera ordenada de uno en uno, y podréis poner una figura en uno de los dos grupos, o polígono o no-polígono. En cada caso, el resto de la clase debe ver si está de acuerdo o no con el grupo en el que se haya dibujado la figura. ¿Quién quiere ser el primero?

³⁹ Identificamos con *M* las intervenciones de la maestra, con *As* las del alumnado en grupo. Las intervenciones individuales se identifican de la forma *A_i*, donde cada subíndice corresponde con una alumna o un alumno diferente.

Parte del alumnado levanta la mano. La maestra le pide a uno de ellos que salga a la pizarra y este dibuja la figura 1 en la zona de polígonos.

M. ¿Consideráis que la figura que hay en la pizarra está colocada en su grupo correspondiente (polígono y no polígono)?

As. Sí. (contestan a coro).

M. ¿Por qué consideráis que es un polígono?

A₁. Porque es un triángulo, y los triángulos son polígonos. Lo vimos el curso pasado.

M. ¿Qué características tiene la figura para ser un polígono?

A₂. Tiene lados y vértices.

A continuación, otra alumna representa la figura 2, y el resto está de acuerdo alegando las mismas razones que en el caso anterior. La maestra les pide que sean más arriesgados y dibujen figuras menos familiares.

M. El siguiente debe dibujar una figura que considere que no es un polígono.

Una alumna dibuja la figura 13 y uno de sus compañeros considera que no está en el grupo adecuado.

A₃. Pero esa figura también es un polígono porque tiene lados y vértices como las de antes.

A₂. No, no lo es porque tiene un hueco.

M. ¿Qué quieres decir con que tiene un hueco?

A₂. Que no se unen los lados.

M. Quieres decir que no está cerrada. Entonces no es un polígono porque, aunque tiene lados y vértices, no está cerrada.

El siguiente estudiantado representa las figuras 6 y 7 en el grupo de polígonos y la 14 en la de no polígonos y todos están de acuerdo, utilizando argumentos análogos a los anteriores. La siguiente figura dibujada es la 11.

M. ¿Tú por qué crees que no es un polígono?

A₄. Porque tiene picos para adentro.

M. ¿Quieres decir que los ángulos que se forman no están todos hacia fuera? ¿Y si es polígono no puede tener ángulos para adentro? A ver, ¿quién está de acuerdo con J. (A₄)?

A₅. Nosotras creemos que sí lo es porque está cerrado y tiene lados y vértices.

M. Entonces habrá que pasar la figura 11 al grupo de los polígonos. ¿Todos estáis de acuerdo?

As. Sí. (Responden a coro).

Con características parecidas a la anterior se representa la figura 5, estando de acuerdo todo el grupo en considerarla como polígono. A continuación, un alumno representa la figura 4.

M. ¿Estáis de acuerdo en que el círculo es un polígono?

A₂. Yo no, señor, porque no tiene vértices.

M. Eso es, el contorno es una línea curva, y no tiene vértices. ¿Todos de acuerdo?

El alumnado asiente.

A₆. Pues yo pensaba que sí es un polígono porque siempre lo he visto con el cuadrado, con el triángulo, con el rectángulo...

M. Es una figura geométrica pero no cumple las propiedades que se necesitan para ser polígono.

La siguiente figura que se representa es la 15, y el alumno la pone en el grupo de no-polígonos.

M. ¿Por qué crees que esta figura no es un polígono?

A₇. Porque es una letra.

A₃. Pero como figura tiene lados y vértices y es cerrada.

M. Claro, aunque tenga forma de letra, vista como figura es como la anterior. Es un polígono, ¿verdad?

As. Sí. (Responden a coro).

A₇. Señor, entonces ¿las letras son polígonos?

M. Depende de la letra. Pon otro ejemplo.

El alumno sale y pone la figura 10, representando una P.

M. ¿Qué pensáis? La figura que ha representado vuestro compañero, ¿es un polígono?

A₂. Yo creo que sí, porque es cerrada y tiene lados y vértices.

A₃. Pues yo creo que no porque tiene una parte curva y los lados de los polígonos tienen que ser rectos.

A₈. Señor, ¿eso es así? Es que yo había puesto un rectángulo diferente en los polígonos, como habías dicho que arriesgáramos.

M. ¿A qué te refieres con un rectángulo diferente? Sal y lo representas en la pizarra.

El estudiante dibuja la figura 8 en el grupo de los polígonos.

A₈. Está cerrada, tiene cuatro lados y tiene vértices.

A₅. Sí, pero le ocurre como a la P, tiene lados curvos.

M. Efectivamente, es como el caso anterior. Es cerrada, tiene vértices y lados, pero no todos los lados son segmentos. Los lados de los polígonos son rectos.

A₉. Pues yo he puesto como polígono un triángulo con los lados curvos, para que fuera diferente.

M. ¿Así? (La maestra dibuja la figura 9). En este caso ocurre como en los anteriores, no es polígono por no tener los lados rectos. ¿Alguna otra figura que queráis compartir?

Una chica levanta la mano y sale a la pizarra a dibujar en el grupo de polígonos la figura 3. En ese momento otro compañero dice que tiene una figura parecida (la 12) y que él la ha puesto en la parte de los no polígonos.

M. Estas dos figuras son muy parecidas. ¿Qué os hace pensar que es un polígono o que no lo es?

A₁₀. Yo creo que sí lo es porque cumple las condiciones que hemos dicho antes que debe cumplir un polígono. Es cerrado, tiene lados rectos y tiene vértices.

A₁₁. Pero tiene un vértice del que salen cuatro lados, y en los vértices de los polígonos solo pueden salir dos, ¿no seño?

M. Así es, vamos a considerar polígonos simples, en los que de cada vértice solo pueden salir dos lados. Por tanto, ¿cómo podemos definir el concepto “polígono”?

A₆. Pues una figura plana cerrada con lados que son rectos y vértices, cada uno con dos lados.

f3. Tercer fragmento

Para continuar trabajando la clasificación de polígonos, atendiendo a diferentes criterios, la profesora proyecta una imagen con diferentes polígonos de distintos tipos con la intención de que los estudiantes, en grupos de cuatro, determinen criterios que les permitan agrupar dichas figuras en clases diferentes. Para ello facilitará a cada grupo de escolares un juego con todos los polígonos de la imagen proyectada recortados en cartulina (Figura 5.11).

M. Ahí tenéis cada grupo un conjunto de polígonos como los que hay proyectados en la pantalla. Lo que tenemos que hacer es comparar unos

polígonos con otros para ver qué características comunes podemos encontrar. Podéis elegir una figura y buscar entre las otras todas las que se parecen a esa en algún aspecto. De esa forma haremos grupos de figuras con características comunes.

Mientras los estudiantes trabajan en la actividad, la profesora va pasando por los grupos, resolviendo las dudas que van surgiendo o planteando cuestiones para ayudar a la reflexión de los estudiantes. Pasado un tiempo se hace una puesta en común de los resultados de los distintos grupos.

M. A ver, vamos a ir viendo qué agrupaciones habéis hecho. ¿En qué os habéis fijado para determinar familias de polígonos?

A. Nosotros hemos pensado agruparlas por el número de lados que tiene cada polígono.

M. ¿Cuántos lados como mínimo se necesitan para formar un polígono?

A. Tres.

M. Muy bien, porque, ¿puede haber un polígono de dos lados?

A. No, porque no se puede cerrar.

M. Eso es, con solo dos lados no podemos cerrar la figura. Entonces hay polígonos de tres lados, ¿que se llaman?

A. Triángulos.

M. De cuatro lados. ¿Cómo se llaman?

A. Cuadrados.

M. No, pensad. Fijaos en los polígonos que tenéis de cuatro lados. ¿Son todos cuadrados?

A. No, también hay rectángulos.

A. Y rombos.

A. Y otros.

M. Se llaman cuadriláteros, cuadri de cuatro y látero de lado.

Se completa una tabla en la pizarra indicando el nombre de los polígonos hasta 10 lados.

M. ¿Puede haber polígonos de más de diez lados?

A. Sí, de cualquier número de lados.

A medida que van determinando los nombres de las diferentes clases de polígonos la profesora va pegando los polígonos recortados en la fila que le corresponde.

M. A ver, algún grupo que haya pensado en otro criterio.

A. Nosotros hemos visto que unos tienen algunos picos hacia adentro y otros no tienen ninguno.

M. Los polígonos que tienen vértices hacia adentro es porque el ángulo mide más de 180° . Se llaman cóncavos. Los que todos los ángulos son menores de 180° se llaman convexos. Así tenemos otra forma de agrupar. Fijaos que polígonos que en la tabla de antes estaban en el mismo grupo, en la nueva tabla pueden estar en distintos grupos.

La profesora representa en la pizarra otra tabla con dos filas, una para polígonos convexos y otra para polígonos cóncavos, en la que reparte otro juego de figuras recortadas.

M. Otro grupo que haya agrupado los polígonos de forma diferente.

g. Actividades que conforman la tarea

La tarea se estructura en cuatro partes: definición de polígono, resolución de la actividad por el alumnado de Primaria, clasificación de polígonos y clasificación de cuadriláteros. Cada una de ellas incorpora un fragmento del caso acompañado de un conjunto de actividades vinculadas a dicho fragmento.

g.1. Primera parte: definición de polígono

En la primera parte de la tarea trataremos aspectos relacionados con la definición de polígono y su representación gráfica. En ocasiones se conoce una definición de un concepto y aun así se cometen errores en la identificación de un representante del mismo entre un grupo de objetos. Esto se apoya en la diferenciación aportada por Vinner (1991, citado en Gutiérrez y Jaime, 1999) entre la definición de un concepto y la imagen de este, entendida como la representación mental que evoca el término. La formación de la imagen de un concepto se basa en la propia experiencia y en los ejemplos que se muestran. Parafraseando a Orton (1990), citado en Barroso (2000), los estudiantes no aprenden únicamente a través de definiciones, necesitan ejemplos y contraejemplos para entender correctamente la definición de un concepto matemático.

Con esta primera parte se pretende que los EPM reflexionen sobre el proceso de definir, viendo la importancia del uso de ejemplos variados (no solo prototípicos) y contraejemplos en el desarrollo de este proceso, favoreciendo de esa forma la creación de imágenes versátiles de los conceptos. Por otra parte, trataremos los atributos que caracterizan a una buena definición de un concepto.

El posicionamiento epistemológico que hay detrás de esta propuesta didáctica se apoya en el constructivismo social, teoría que sugiere que el conocimiento científico no constituye un corpus neutro de datos independiente de las prácticas culturales y los valores, sino que se origina en el seno de la sociedad, con lo que ello conlleva. De ahí que, a nivel metodológico, no se parta de una definición concreta de polígono, sino que el formador va gestionando la clase para consensuar una definición particular, pretendiendo discutir cuáles son las características de una definición y valorando las ventajas e inconvenientes de la definición adoptada.

Actividades parte 1: Análisis de una distribución de figuras en polígonos y no polígonos dada por los alumnos de educación primaria

Descripción

Para contextualizar el caso, se describe una situación en la que en un aula de 5º grado de Educación Primaria el alumnado ha representado figuras, diferenciando entre las que consideran polígonos y las que consideran que son no lo son. Se pide a los EPM que analicen la distribución de las figuras representadas por parte del alumnado (Figura 5.10).

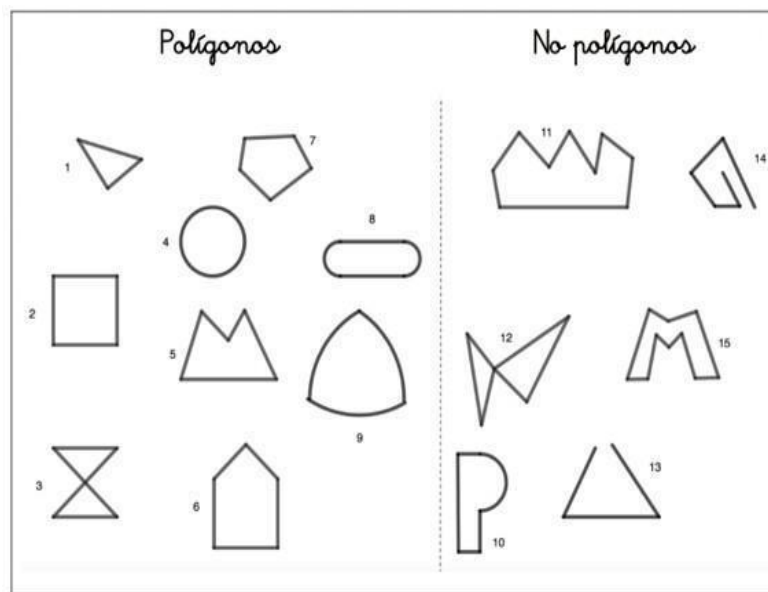


Figura 5.10 Polígonos vs no polígonos

Se cuestiona sobre las propiedades que se tienen en cuenta para establecer estos agrupamientos y sobre los argumentos que los EPM consideran que habrán sido esgrimidos por el alumnado para realizar esa distribución entre polígono y no polígonos. Posteriormente se les pide que enuncien su propia definición de polígono.

Las actividades correspondientes a este fragmento del caso son:

1. Analizad la distribución de las figuras representadas en la pizarra por parte de los escolares (Figura 5.10). ¿Estás de acuerdo con esa distribución? ¿En qué casos sí y en qué casos no? Argumenta tu respuesta.
2. ¿Cuáles consideráis que habrán sido los argumentos esgrimidos por los estudiantes para realizar esta distribución entre polígono y no polígono?
3. Enunciad una definición de polígono.

Objetivos específicos de estas actividades

- Revelar la interpretación de los EPM sobre el conocimiento que tiene el alumnado que ha realizado la distribución de la figura mostrada sobre el concepto de polígono.
- Mostrar sus ideas previas sobre la definición de polígono y tomar conciencia de la imagen de polígono de los EPM.
- Reflexionar sobre la idoneidad de la definición dada por el alumnado, en cuanto a los atributos que esta debe cumplir.

Orientaciones para la persona encargada de la formación

Quien dirige la formación debe ser consciente de que es una de las primeras veces en las que los EPM se enfrentan a la tarea de definir en matemáticas. Debemos tener en cuenta que los EPM pueden cometer errores similares a los que muestra el alumnado observado en la transcripción, como indicar que el círculo es un polígono o que ciertas figuras con lados curvos o abiertas son polígonos porque “se parecen” a un triángulo o un rectángulo, por ejemplo; esto puede ser usado para problematizar la situación haciendo preguntas y consiguiendo que los EPM generen, partiendo del error, su propia definición de polígono.

El formador o la formadora atiende posibles dudas y formula preguntas y comentarios para potenciar la reflexión, e institucionaliza el saber incidiendo en las características propias de una definición matemática.

Posibles preguntas que se pueden plantear para crear debate: ¿por qué el alumnado considera que las figuras 3 y 12 están en diferentes categorías?, ¿qué crees que les hace pensar que el círculo es un polígono?, ¿es esta tarea adecuada para el nivel en que se propone?, ¿qué preguntas plantearías en la sesión para dirigir al alumnado hacia su objetivo?

En la actividad 1 puede surgir en el debate cómo puede repercutir en la generación de la definición de polígono el que la representación gráfica de las figuras destaca el contorno frente a su superficie. Se puede aprovechar para tratar conocimiento relacionado con registros de representación, identificando potencialidades y debilidades de alguno de ellos.

g.2. Segunda parte: Resolución de la actividad por los alumnos de Primaria

En el segundo fragmento del caso se describe una secuencia en la que un grupo de estudiantes de 5º de Primaria resuelven la actividad propuesta por la maestra. Les propone al alumnado representar en la pizarra figuras que consideren polígonos, por un lado, y otras que consideren que no lo son, justificando su inclusión en uno u otro grupo. A partir de la transcripción, los EPM deben examinar cómo los alumnos ponen en juego sus ideas previas, qué argumentos utilizan, qué dificultades manifiestan y cómo la intervención de la maestra contribuye a la construcción colectiva de una definición de polígono.

Los EPM deben de identificar, interpretar y valorar los conocimientos matemáticos, de aprendizaje implicados en la situación, así como las decisiones de gestión de aula realizadas por la maestra.

Actividades parte 2: Análisis de una clase de 5º de Primaria en la que se trata la definición de polígono

En esta parte de la tarea formativa nos interesa la reflexión sobre el tratamiento del concepto de polígono como objeto de enseñanza y aprendizaje.

Descripción

Se comienza con la lectura individual de un episodio de clase (documento para EPM), en el que se describe cómo se resuelve en el aula de primaria la actividad planteada por la maestra. El alumnado va saliendo a la pizarra para dibujar una figura identificándola como polígono o como no polígono, discutiéndose entre todo el alumnado la opción de incluirla en un grupo u otro (polígonos y no polígonos) atendiendo a las características de cada figura.

De esta manera se pone a los EPM ante una situación real de aula, intentado que asuman el papel de docente, analizando las respuestas del alumnado y la gestión que la maestra hace de la situación. Para ello se les facilitará un documento de recogida de información

(Anexo II) para fijar el foco de atención en determinados aspectos de la realidad descrita, relacionados con el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas.

Partiendo del segundo fragmento del caso, se plantea que respondan a las siguientes preguntas:

4. De acuerdo con la definición que han establecido en el grupo, ¿la distribución de la Imagen 1 es correcta? ¿Esta definición coincide con la vuestra?
5. Teniendo en cuenta la tabla resumen sobre los atributos que debe verificar una definición matemática, según Escudero et al. (2014) (Anexo I del documento para el EPM) analizad si la definición a la que ha llegado el alumnado cumple los atributos de una definición matemática.
6. Indicad los conceptos, procesos y procedimientos implicados en la resolución de la actividad. ¿Qué argumentos utiliza el alumnado para incluir o no una figura como polígono? ¿Hay una definición única de polígono?
7. ¿Qué se espera que aprenda el alumnado de primaria con esta actividad? ¿Qué interés tiene frente a que se les hubiera dado una definición a priori?
8. ¿Qué papel juegan los ejemplos y no ejemplos en la construcción de una definición matemática (resolución de la tarea)?
9. ¿Qué dificultades del alumnado identificáis en sus respuestas a la situación planteada? Posible origen de las dificultades.
10. Teniendo en cuenta las respuestas del alumnado, ¿podríamos determinar el nivel de razonamiento geométrico de cada alumna y alumno? Selecciona una intervención que te parezca especialmente significativa en este sentido.
11. Considerando la gestión que realiza la maestra en la actividad, ¿qué destacarías sobre su actuación?

Objetivos específicos de estas actividades

- Enfrentarse a la construcción de la definición de un concepto matemático conocido, considerando las características de la definición.
- Analizar los argumentos dados por el alumnado para justificar la inclusión de una figura en el grupo de polígonos o de no polígonos.

- Reflexionar sobre las dificultades en la comprensión del concepto de polígono que podrían estar asociadas a la imagen de polígono que tiene.
- Estudiar la gestión de la clase que realiza la maestra.
- Determinar el nivel de razonamiento geométrico de cada alumna o alumno atendiendo a sus intervenciones.

Orientaciones para la persona encargada de la formación

Quien dirige la formación debe incidir en la reflexión sobre la relación que existe entre la imagen de un concepto y su definición. Así mismo, es importante profundizar en el papel de los ejemplos, contraejemplos y no ejemplos que se usan habitualmente como posibles limitantes para el aprendizaje.

Al igual que la primera parte, se inicia de manera individual para, a continuación, comentar con los compañeros de su equipo. Después se genera un debate con todo el grupo de EPM gestionado por quien dirige la formación, que atiende posibles dudas, formula preguntas y comentarios para potenciar la reflexión e institucionaliza el saber incidiendo en las características propias de una definición matemática.

El formador o la formadora puede preguntar por las limitaciones o fortalezas del uso de la pizarra a la hora en la que el alumnado resuelve la actividad (registro gráfico de las figuras). También es importante fomentar la reflexión sobre la gestión que realiza la maestra durante el desarrollo de la actividad con el alumnado. ¿Qué se entiende por vértice? ¿Y por polígono simple? ¿En qué forma se incentiva la argumentación como habilidad a desarrollar en matemáticas?

Para el enunciado 5, además de analizar si la definición a la que han llegado los alumnos cumple los atributos de una definición matemática, se puede hacer también con las definiciones aportadas por los EPM.

g.3. Tercera parte: Clasificación de polígonos

En este tercer fragmento se presenta una situación de aula orientada al trabajo de otro de los procesos de razonamiento matemático: la clasificación en sentido amplio. La profesora propone a los estudiantes de 5.º de Primaria una actividad en la que los alumnos deberán clasificar polígonos a partir de un conjunto de figuras recortadas que les facilita. La consigna invita a comparar las figuras, identificar características comunes y establecer

criterios propios de agrupación, que posteriormente se ponen en común. La maestra guía el proceso mediante preguntas que amplían, matizan o precisan los criterios planteados por los estudiantes.

Actividades parte 3: Clasificación de polígonos

Con esta actividad seguimos poniendo a los EPM ante una situación real de aula, con la intención de que analicen las respuestas de los alumnos y la gestión que la profesora hace de la situación desde el punto de vista de un profesor.

Los alumnos de Primaria usan criterios basados en propiedades geométricas que les permitan clasificar figuras, avanzando desde criterios simples (cantidad de lados) hacia criterios más elaborados (convexidad/concavidad, regularidad, etc.). La actividad potencia el razonamiento geométrico, el lenguaje matemático y la capacidad de justificar decisiones.

Descripción

En el fragmento 3 del caso se muestra como la maestra entrega a los estudiantes distintos polígonos recortados y les pide que identifiquen características comunes entre las figuras con el fin de agruparlas (Figura 5.11).

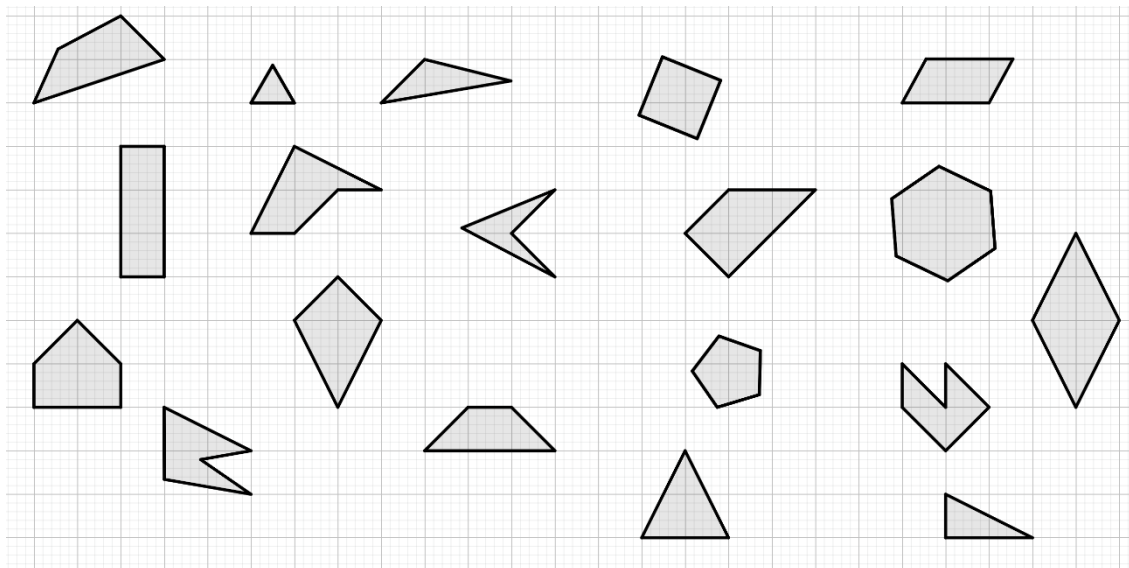


Figura 5.11 Polígonos para clasificar

Aunque el alumnado de Educación Primaria se centrará en la elaboración de clasificaciones en clases de equivalencia, si la dinámica lo permite el proceso debería

avanzar, con los EPM, hacia la construcción de clasificaciones jerárquicas, entendidas como la posibilidad de incluir unas clases de objetos dentro de otras (Liñán-García, 2017).

El alumnado propone dos criterios de clasificación: el número de lados y la concavidad o convexidad del polígono. La comparación en la pizarra de las agrupaciones generadas según cada uno de estos criterios permitirá que el alumnado de Primaria comprenda que, dependiendo del criterio elegido, un mismo polígono puede pertenecer a diferentes clases.

Los enunciados de las actividades correspondientes a este fragmento son los siguientes:

12. Pensad otros criterios que se podrían usar para agrupar los polígonos de la Figura 5.11.
13. ¿Qué aprenden los alumnos con esta actividad? ¿Qué interés tiene frente a que se les hubiera dado un agrupamiento concreto?
14. ¿Qué recursos para la enseñanza del contenido utiliza la maestra? Identifica potencialidades y limitaciones de los recursos utilizados.
15. ¿Consideras adecuada la actividad para estudiantes de quinto curso de Primaria? ¿Encaja en los estándares curriculares vigentes?

Para responder al primer enunciado, los EPM, deben pensar en otros criterios que permitan la clasificación de los polígonos que aparecen en la situación tratada. En este caso el formador intentará que surjan otros agrupamientos, por ejemplo, estableciendo la diferencia entre figuras regulares e irregulares, simétricas y no simétricas (este criterio podría generar una categorización de clases: figuras no simétricas, con al menos un eje de simetría, con al menos 2, con al menos 3, etc.), agrupación en función de cómo sean las diagonales (perpendiculares o no), etc.

Objetivos específicos de estas actividades

- Proponer y justificar criterios distintos para clasificar polígonos, desarrollando flexibilidad y precisión en el razonamiento geométrico.
- Analizar el valor educativo de permitir que el alumnado construya sus propias clasificaciones, identificando los aprendizajes que emergen de una tarea abierta frente a una dirigida.

- Evaluar críticamente la adecuación de los recursos manipulativos y didácticos utilizados para favorecer el análisis y la clasificación de polígonos.
- Valorar la pertinencia de la actividad en relación con el nivel cognitivo de 5.º de Primaria y su alineación con los estándares curriculares correspondientes.

Orientaciones para la persona encargada de la formación

Para responder al primer enunciado, los EPM, deben pensar en otros criterios que permitan la clasificación de los polígonos que aparecen en la situación tratada. En este caso el formador intentará que surjan otros agrupamientos, por ejemplo, estableciendo la diferencia entre figuras regulares e irregulares, simétricas y no simétricas (este criterio podría generar una categorización de clases: figuras no simétricas, con al menos un eje de simetría, con al menos 2, con al menos 3, etc.) o agrupación en función de cómo sean las diagonales (perpendiculares o no). La reflexión sobre las relaciones que podrían establecerse entre las distintas clasificaciones puede enriquecer la actividad.

En las actividades 14 y 15 se pueden plantear referidas a todas las actividades propuesta por la maestra. Al tratar el uso de los distintos recursos materiales o digitales, se puede relacionar con los diversos registros de representación de los polígonos.

La última actividad tiene intención de llevar al EPM a analizar someramente algunos documentos curriculares (NCTM, 2000; Consejería de Educación, Cultura y Deporte 2015). Para ello dispondrán de copia de la parte de dichos documentos u opción de consulta a través de la web, en caso de ser posible.

h. MTSK pretendido en la propuesta de la tarea

En las dos tablas 5.16 y 5.17 presentamos el conocimiento pretendido en la propuesta de las actividades asociadas a cada una de las cuatro partes en las que se divide la tarea. La primera tabla recoge el conocimiento asociado al dominio de conocimiento matemático, mientras que la segunda se centra en el dominio de conocimiento didáctico del contenido. En ambas se muestran las categorías de distintos subdominios, los indicadores de conocimiento vinculados y su relación con el grupo de actividades en las que dicho conocimiento se pone en juego.

Tabla 5.16
Conocimiento Matemático asociado a la tarea Definición y clasificación de polígonos

		Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades		
				P.1	P.2	P.3
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	KoT	Procedimientos	Clasificación de figuras según sus atributos	X		X
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Atributos relevantes de polígono	X	X	
			Otros atributos de polígono	X		X
	KPM	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	Características de una definición matemática		X	
		Prácticas particulares del quehacer matemático	Saber seleccionar ejemplos, contraejemplos y no ejemplos de un concepto matemático		X	
			Procesos de razonamiento matemático: definir, clasificar, comprobar, demostrar.	X	X	X

Tabla 5.17

Conocimiento Didáctico del Contenido asociado a la tarea Definición y clasificación de polígonos

		Categorías asociadas al subdominio	Indicadores de conocimiento	Actividades		
				P.1	P.2	P.3
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO	KFLM	Teorías de aprendizaje	Teoría de van Hiele sobre procesos de razonamiento geométrico		X	
			Imagen mental y definición conceptual de polígono		X	
		Fortalezas y dificultades	Obstáculos, dificultades o errores asociados a la definición de polígono.		X	
		Formas de interacción con un contenido matemático	Estrategias de definición utilizadas por el alumnado	X		
	KMT	Recursos materiales y digitales	El dibujo en papel o en pizarra de figuras planas destaca el contorno frente a la superficie, aspecto que puede repercutir en la generación de la definición		X	
			Potencialidades y debilidades del uso de ciertos recursos para la definición o clasificación de polígonos			X
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Papel limitante que el abuso de ejemplos con ciertos valores para las propiedades irrelevantes tiene para la construcción del concepto	X	X	
			Ejemplos distractores para la construcción de la definición de polígono	X	X	
			Cuándo conviene en el aula utilizar una definición y cuándo conviene construir dicha definición		X	
			Cuándo conviene en el aula utilizar una clasificación y cuándo conviene construirla			X
	KMLS	Resultados de aprendizaje esperados	El alumnado debe usar atributos de las figuras para definir y clasificar polígonos, explicando sus decisiones.			X
		Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado	El alumnado de 5º de Educación Primaria debe comprender el concepto de polígono y sus elementos esenciales, y ser capaz de aplicar un procedimiento claro para identificar y clasificar polígonos según sus atributos, justificando su elección.			X

i. Temporización**Tabla 5.18***Propuesta de temporización para la implementación de la tarea formativa*

Orden	Tiempo	Acción a realizar	Objetivo
1	5'	Presentación del caso	Contextualizar el trabajo de los EPM
2	5'	Lectura de las líneas 1-16 y visualización de la ilustración 1	Contextualizar el caso sobre definición de polígonos
3	20'	Planteamiento y resolución de las actividades de la 1ª parte (1-3).	Hacer reflexionar a los EPM sobre aspecto del conocimiento matemático
4	20'	Puesta en común sobre la resolución de las actividades 1-3.	Identificar evidencias de MK. Definir. Definición-Imagen de un concepto
5	5'	Lectura de las líneas 17-120	Conocer una situación matemática de un aula de primaria sobre la que reflexionar como docentes
6	35'	Planteamiento y resolución de las actividades de la 2ª parte (4-10).	Hacer reflexionar a los EPM sobre aspecto del conocimiento matemático y didáctico del contenido
7	30'	Puesta en común sobre la resolución de las actividades 4-10	Identificar evidencias de MTSK
8	5'	Lectura de las líneas 121-176	Conocer una situación matemática de un aula de primaria sobre la que reflexionar como docentes
9	20'	Planteamiento y resolución de las actividades de la 3ª parte (11-14).	Hacer reflexionar a los EPM sobre aspecto del conocimiento matemático y didáctico del contenido
10	25'	Puesta en común sobre la resolución de las actividades 11-14.	Identificar evidencias de MTSK

Previsto para dos sesiones de 100 minutos (hay un margen de 30').

5.2.2. Implicaciones para la formación inicial del profesorado de primaria

Los resultados de este estudio permiten señalar algunos aspectos relevantes para la formación inicial del profesorado de Educación Primaria. Las tareas de este tipo sitúan a los futuros maestros en condiciones de interpretar y dar sentido a lo que ocurre en el aula, lo que favorece el desarrollo de una mirada profesional fundamentada que les permite identificar elementos matemáticos, didácticos y cognitivos relevantes en situaciones de enseñanza; esto ratifica lo obtenido en investigaciones anteriores (Barrera-Castarnado et al., 2019; Barrera-Castarnado et al., 2024, Carrillo et al., 2020; Climent et al., 2024; Downton et al. 2018; Fernández, Sánchez-Matamoros et al., 2018; Joglar-Prieto et al., 2022; Mason, 2021).

Asimismo, la experiencia muestra que organizar el trabajo en torno a un contenido, en este caso, a la práctica matemática de definir y clasificar centrada en los polígonos, promueve la reflexión sobre cómo se construye el significado de los conceptos matemáticos en contextos reales. Aunque el estudio se ha llevado a cabo en torno a un contenido específico de geometría, este enfoque es transferible a otros contenidos y prácticas matemáticas (por ejemplo, justificar, generalizar, conjeturar). La clave no reside en el tema trabajado, sino en cómo la tarea permite discutir, contrastar y poner en relación diferentes perspectivas matemáticas y didácticas.

Además, las tareas diseñadas e implementadas desde MTSK pueden actuar como dispositivo formativo, favoreciendo que los futuros maestros aprendan a reconocer qué conocimiento se pone en juego cuando se enseña, y cómo este conocimiento se articula en la práctica (Climent et al., 2024). Esta forma de trabajo no solo facilita la comprensión de la labor docente, sino que contribuye a la construcción progresiva de un conocimiento profesional integrado, preparado para ser transferido a la práctica en el aula.

Los resultados de este estudio sugieren que el modelo MTSK constituye un marco útil para guiar el diseño de tareas formativas en la formación inicial del profesorado (Climent et al., 2024; Montes et al., 2019). Su uso orienta la selección y organización de las actividades de manera que los EPM pueden centrarse en aspectos específicos del conocimiento especializado, evitando discusiones excesivamente amplias o poco vinculadas a la práctica, algo señalado como frecuente en la literatura (Star y Strickland,

2008). Además, el diseño de tareas inspirado en MTSK, como muestran Climent et al. (2024), favorece que los futuros maestros analicen la actividad matemática desde la doble dimensión conceptual y didáctica, lo que contribuye a una comprensión más integrada de su futura labor docente.

La resolución de esta actividad, basada en el análisis de situaciones reales de aula, promueve procesos que pueden vincularse con el desarrollo de la competencia *noticing* por parte de los EPM. El trabajo con tareas de este tipo permite que los estudiantes fijen su atención en aquellos aspectos que consideran relevantes, iniciándose en el proceso de “mirar con sentido” situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Mason, 2021; Fernández, Llinares et al., 2018). De este modo, la actividad no solo promueve la movilización de conocimiento especializado, sino que también contribuye a la formación de una mirada profesional orientada a reconocer y valorar elementos matemáticos y didácticos en la práctica de aula. Nos parece importante tenerlo en cuenta en diseños de otras tareas.

Además, consideramos especialmente relevante en el diseño de una tarea formativa formular enunciados abiertos que inviten a justificar y argumentar. Asimismo, resulta importante seleccionar de manera intencional ejemplos y no-ejemplos que favorezcan la exploración de los atributos relevantes de los conceptos a trabajar y que, al mismo tiempo, permitan identificar atributos irrelevantes.

Por ejemplo, como se muestra en la Figura 5.10, se presenta una variedad de ejemplos de polígonos, todos ellos figuras planas delimitadas por líneas poligonales cerradas y simples (atributos relevantes), sin que influyan características como el número de lados, si hay pares de lados paralelos o la concavidad o convexidad de los ángulos (atributos irrelevantes). En los no-ejemplos de polígonos, las figuras incumplen al menos uno de los atributos relevantes del concepto, a pesar de ser todas planas, una es abierta, otras presentan lados curvos o bien su línea poligonal es compleja.

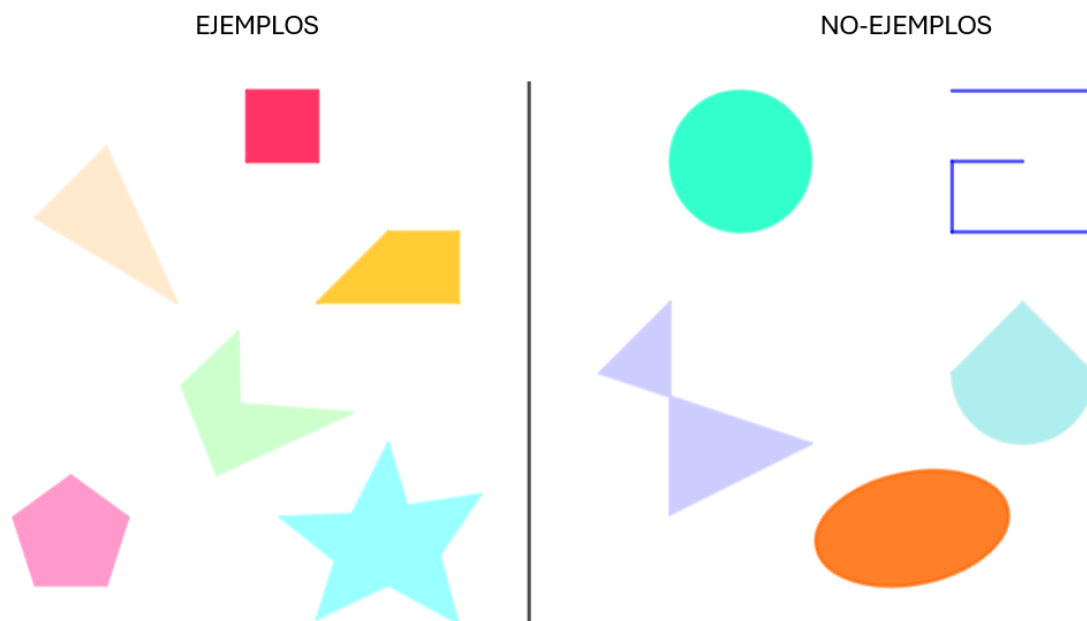


Figura 5.12 Ejemplos y no ejemplos de polígonos

También es importante planificar el tiempo dedicado a la puesta en común, de manera que esta se convierta en un espacio para hacer explícitas, contrastar y reorganizar las ideas

Estos factores no solo condicionan el tipo de razonamiento que se moviliza, sino que también influyen en que emerja conocimiento no previsto inicialmente. Si el debate cuenta con tiempo suficiente, se crean oportunidades para que los EPM relacionen distintos subdominios del MTSK. Esto subraya que el diseño no debe atender solo a qué tareas se proponen, sino también a cómo se gestionan: qué intervenciones realizar, cuándo hacerlo y qué producciones seleccionar para la discusión.

Además, los resultados de este estudio contribuyen a la línea de investigación que analiza la movilización del conocimiento especializado en contextos reales de formación, mostrando que el conocimiento del futuro profesorado no es estático, sino que se construye y reorganiza en interacción con las tareas y con los espacios de discusión. Asimismo, los hallazgos subrayan la importancia de considerar no solo el conocimiento que los EPM movilizan explícitamente, sino también el conocimiento que se evoca durante los procesos de interpretación y gestión de la actividad, en línea con lo señalado por Llinares (2014).

Además, este trabajo responde a la necesidad de conectar la investigación con la formación inicial del profesorado. Como han señalado García et al. (2010), una de las

tareas aún pendientes en la investigación en Educación Matemática es la transferencia efectiva de sus resultados a la práctica, de modo que el conocimiento generado pueda informar y transformar tanto el diseño de tareas como la toma de decisiones didácticas en el aula. En esta dirección, los resultados de nuestro estudio, aunque situados en un contexto formativo concreto, ofrecen orientaciones transferibles para el diseño instruccional, especialmente en lo relativo a la articulación entre la selección de tareas, su gestión y el tipo de conocimiento especializado que se busca promover.

5.2.3. Limitaciones del estudio

En este apartado presentamos las limitaciones del estudio, las cuales están vinculadas con la naturaleza metodológica de la investigación desarrollada. El trabajo se enmarca en un experimento de enseñanza. Este tipo de estudios ofrece una mirada profunda y situada, pero también conlleva una serie de restricciones derivadas de su contexto específico de realización, del papel del investigador en el desarrollo del experimento y del alcance interpretativo que puede atribuirse a los resultados

Por otra parte, mi participación como investigador, diseñador y analista del experimento exige hacer explícitos tanto el posicionamiento teórico adoptado como las decisiones interpretativas realizadas durante el análisis (Llinares, 2014), dado que la mirada con la que se interpreta lo ocurrido en el aula es también una construcción situada. En particular, la identificación de momentos relevantes de la interacción y la selección de episodios analizados responde a criterios fundamentados, pero no ajenos a la perspectiva y experiencia de quien investiga.

Además, aunque en esta tesis se analiza únicamente la implementación realizada por una formadora con experiencia, se cuenta también con registros de la misma tarea llevada a cabo por otro formador experto en otro grupo de EPM. Sin embargo, estos datos no se han incluido en el análisis presentado. Esta decisión permite mantener el foco en la coherencia interna del macrociclo analizado y profundizar en la relación entre la gestión de la tarea y el conocimiento movilizado por los participantes en ese contexto concreto. No obstante, supone una limitación en términos de contraste, ya que el análisis comparado entre ambos formadores podría haber aportado información sobre cómo diferentes decisiones de gestión influyen en el conocimiento especializado que los EPM ponen en juego y en el poder formativo de la tarea. Se trata, por tanto, de una línea abierta para

investigaciones futuras, especialmente relevante para avanzar en la comprensión del conocimiento del formador y su papel en el desarrollo del conocimiento especializado del futuro profesorado.

Consideramos que la tarea encierra un enfoque didáctico muy particular, centrado en el EPM, en el que se busca que los participantes reflexionen, analicen y discutan, tanto individualmente como en grupo, los distintos aspectos implicados en la enseñanza y el aprendizaje. En este marco, el formador asume un papel de guía o mediador, que orienta la reflexión sin dirigirla de manera directa.

No obstante, es pertinente preguntarse si esta misma tarea se implementara desde otro enfoque teórico mantendría el mismo potencial formativo. Esta cuestión abre una línea de reflexión sobre la dependencia entre el diseño de la tarea y el enfoque de enseñanza con que se lleva a cabo su implementación.

5.2.4. Líneas futuras de investigación

Esta investigación se ha centrado en el análisis de un macrociclo compuesto por dos ciclos de implementación de una tarea formativa en dos aulas de formación inicial, gestionado por una formadora con experiencia. No obstante, el proceso de recogida de datos proporcionó una cantidad de información significativamente mayor. En concreto, se transcribieron no solo las sesiones correspondientes a la tarea objeto de estudio, sino también otras cuatro tareas relacionadas, todas ellas implementadas tanto por la formadora, que ha gestionado la implementación de la tarea analizada, como por otro formador experto. Por ello, se abren diversas líneas de trabajo para estudios posteriores.

En primer lugar, la presencia de dos formadores y la implementación de las mismas tareas en diferentes aulas permite plantear un análisis comparativo de la gestión de la tarea por parte de los formadores, explorando cómo sus decisiones influyen en el conocimiento especializado que movilizan los EPM (Carrillo et al., 2018), así como el propio conocimiento profesional del formador en el desarrollo de la actividad (Grossman, 1990; Jaworski, 2008). Este análisis permitiría avanzar en la caracterización del papel del formador en la construcción del conocimiento especializado del futuro docente (Contreras, 2021; Pascual-Martín, 2021; Pascual-Martín et al., 2019) y en la comprensión de cómo determinadas decisiones instruccionales favorecen u obstaculizan la emergencia de distintos subdominios del conocimiento (Rowland et al., 2009).

Asimismo, la revisión de las transcripciones pone de manifiesto episodios en los que hemos identificado alternativas de gestión a partir de intervenciones de los EPM. Ello abre una posible línea orientada a examinar cómo pueden influir en la emergencia de subdominios específicos de MTSK las distintas formas de gestionar la puesta en común por el formador.

Por otro lado, el acceso a otras cuatro tareas formativas, que abordan prácticas matemáticas diferenciadas (como resolución de problemas, justificación o generalización), permite ampliar el estudio hacia la variación del conocimiento especializado movilizado según la práctica matemática y el contenido implicado (Stylianides y Stylianides, 2009; Schoenfeld, 2016). Esta comparación posibilitaría caracterizar cómo los EPM construyen y transforman su conocimiento en situaciones en las que el papel de la definición, la argumentación o la resolución desempeñan funciones distintas en la actividad matemática.

Asimismo, la realización de nuevos ciclos de implementación de esta tarea o de versiones refinadas de ella en aulas de formación inicial de contextos socioculturales diversos podría contribuir a identificar regularidades, diferencias y matizaciones en el conocimiento especializado que se construye (Adler y Davis, 2006; Montes et al., 2022). Esto permitiría profundizar en cómo contextos institucionales y culturales condicionan la movilización del conocimiento docente, el seguimiento de distintos grupos de estudiantes en cursos sucesivos, dado que la tarea se ha continuado utilizando en cursos posteriores, permite comparar el efecto de la tarea en la construcción de conocimiento especializado de los EPM.

Finalmente, otra posible línea de trabajo futura consiste en desarrollar estudios de carácter longitudinal que permitan analizar cómo el conocimiento movilizado en estas situaciones de formación se traslada a la práctica real de enseñanza cuando los EPM inician su ejercicio profesional (Llinares y Krainer, 2006).

Replication allows us to explore the generality of our research findings and helps us to take advantage of 'the self-correcting nature of science'.

Star (2021, p. 54)

6. Referencias

- Adler, J. y Davis, Z. (2006). Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(3), 205–223.
- Advíncula, E., Torres Céspedes, I., Carreño, E., Hau Yon, F. y Montes, M. (2024). Conocimiento especializado de un profesor de educación secundaria al diseñar clases de cuadriláteros. *PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 18(4), 415–438. <https://doi.org/10.30827/pna.v18i4.27637>
- Aguilar, A. (2015). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas: Un estudio de caso* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Repositorio Arias Montano <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/12006>
- Aguilar, Á., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Muñiz-Rodríguez, L. (2022). Las creencias y su papel en la determinación de relaciones entre elementos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 117–128). Dykinson. <https://doi.org/10.14679/14588>
- Alfaro, C., Flores, P. y Valverde, G. (2020). *Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración*. *PNA*, 14(2), 85–117. <https://doi.org/10.30827/pna.v14i2.9363>
- Amador, I. M., Choppin, J., Galindo, E. y Carson, C. (2020). Mathematics Field Experience Design: The role of teaching experiments and Lesson Study one year later during student teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*. <https://doi.org/10.1080/08878730.2020.1825891>
- Artigue, M. (1995). *Ingénierie didactique*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 281–308.
- Bakker, A. y van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. In A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 429–466). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_16
- Ball, D. L. y Forzani, F. M. (2007). What makes education research “educational”? *Educational Researcher*, 36(9), 529–540. <https://doi.org/10.3102/0013189X07312896>
- Ball, D. L. y Forzani, F. M. (2009). The work of teaching and the challenge for teacher education. *Journal of Teacher Education*, 60(5), 497–511. <https://doi.org/10.1177/0022487109348479>
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>

- Bannan-Ritland, B. y Baek, J. Y. (2008). Investigating the act of design in design research: The road taken. In A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 429–446). Routledge.
- Barab, S., y Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 1–14. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_1
- Barrantes, M. y Zapata, M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27(1), 55–71. <https://relatec.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1985/1273>
- Barrera Castarnado, V. J., Contreras, L. C., Muñoz Catalán, M. C. y Liñán García, M. del M. (2024). Conocimiento especializado del profesor: un experimento de enseñanza centrado en una tarea formativa sobre geometría. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (26), 1–19. <https://doi.org/10.35763/aiem26.5359>
- Barrera-Castarnado, V. J., Infante, J. M. y Liñán-García, M. M. (2013). Conocimiento matemático común en geometría de los estudiantes para maestro: Una propuesta de innovación. *EA: Escuela Abierta*, 16, 11–33.
- Barrera-Castarnado, V. J. y Liñán-García, M. M. (2021). *El conocimiento especializado en Matemáticas en las tareas formativas para la formación inicial de profesores de Educación Primaria*. En J. M. Romero, M. Ramos, C. R. y J. M. Sola (Eds.), *Escenarios educativos investigadores: hacia una educación sostenible* (pp. 934–946). Dykinson.
- Barrera-Castarnado, V. J., Liñán-García, M. del M., Muñoz-Catalán, M. C. y Méndez-Coca, M. (2023). Using teaching experiments to innovate in teaching process: the case of prospective primary teachers. En M. del Rocío Bonilla Quijada, M. Rosario García-Bellido, M. Fernanda Rey-Stolle Valcarce y V. Villagrasa Sebastián (Coords.), *Initiatives to educational and teaching innovation* (pp. 27-31). Dykinson.
- Barrera-Castarnado, V. J., Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, C. y Contreras, L. C. (2016). Conocimiento especializado, movilizado y emergente, en una clase de primaria sobre las posiciones relativas de las rectas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en educación matemática XX* (pp. 167–176). Málaga, España: SEIEM.
- Barrera-Castarnado, V. J., Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C. y Contreras, L. C. (2019). *El uso de MTSK en el diseño de tareas formativas para estudiantes para profesor de Educación Primaria*. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 110–118). Universidad de Huelva.

- Barrera-Castarnado, V. J., Muñoz-Catalán, M. C. y Méndez-Coca, M. (2023). *Un experimento de enseñanza con tareas formativas para la formación de maestros en matemáticas* (pp. 144-147). En Libro de resúmenes VIII Jornadas de Innovación Docente. Universidad de Sevilla. Disponible en https://educacion.us.es/images/Libro_de_resu%CC%81menes_VIII_Jornadas_Innovacio%CC%81n_Docente.pdf
- Barroso, R. (2000). El proceso de definir en matemáticas. Un caso: el triángulo. *Enseñanza de las Ciencias*, 18 (2), 285-295.
- Bassey, M. (1995). *Creating education through research*. British Educational Research Association.
- Bernabeu, M. (2022). Tips para la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Revista Números*, 110, 113–128.
- Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2021). Levels of sophistication in elementary students' understanding of polygon concept and polygon classes. *Mathematics*, 9(16), 1966. <https://doi.org/10.3390/math9161966>
- Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2019). El experimento de enseñanza como aproximación metodológica a la investigación en educación matemática. *Unipluriversidad*, 19(2), 103–118. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.07>
- Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2021). Primary school students' understanding of polygons and the relationships between polygons. *Educational Studies in Mathematics*, 106, 251–270. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10012-1>
- Boyd, D. J., Grossman, P. L., Lankford, H., Loeb, S. y Wyckoff, J. (2009). Teacher Preparation and Student Achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 31(4), 416-440. <https://doi.org/10.3102/0162373709353129>
- Bryman, A. (2004). *Social research methods* (2nd ed.). Oxford University Press.
- Campos-Cano, M. y Flores-Medrano, E. (2019). *Prácticas matemáticas: un avance en su caracterización*. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 87–94). Universidad de Huelva Publicaciones.
- Canals, M. A. (1997). La Geometría en las primreas edades escolares. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 25, 31-44.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). El experimento de enseñanza como metodología para la investigación en educación matemática. En E. Castro y M. Molina (Eds.), *Investigación en didáctica de la matemática: Avances y perspectivas* (pp. 97–120). Editorial Universidad de Granada.
- Carreño, E. y Climent, N. (2010). Conocimiento del contenido sobre polígonos de estudiantes para profesor de matemáticas. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 5(1), 11-23. <https://doi.org/10.30827/PNA.V5I1.615>

- Carreño, E. y Climent, N. (2019). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros. *PNA*, 14(1), 23-53. <http://hdl.handle.net/10481/60153>
- Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre matemática y su enseñanza: Metodología de la investigación y relaciones*. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Carrillo, J. (2000). Aportaciones desde la resolución de problemas a la construcción de conocimiento profesional. *Quadrante*, 9(2), 27–54. Disponible en la web de *Quadrante*.
- Carrillo, J. y Climent, N. (2009). From professional tasks in collaborative environments to educational tasks in mathematics teacher education. In B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education* (Mathematics Teacher Education, Vol. 4, pp. 215–234). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_15
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2020). *Using professional development contexts to structure prospective teacher education*. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Volume 2, Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 393-420). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004418967_007
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2014). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985–2994). ERME.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., y Contreras, L. C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la Matemática y su Enseñanza. *Educación Matemática*, 7(3), 79–92.
- Carrillo, J., Contreras, L. C. y Zakaryan, D. (2014). Oportunidades de aprendizaje y competencias matemáticas: un estudio de dos casos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(49), 313-338. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n49a09>
- Carrillo, J., Montes, M. y Climent Rodríguez, N. (Eds.). (2022). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*. Dykinson. <https://doi.org/10.14679/1450>
- Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée su leur spécialisation: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 22, 185-205.

- Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M. C. (2011). Comprendiendo el conocimiento del profesor que enseña matemáticas: Una aproximación desde la investigación cualitativa. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 303–316. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n3.467>
- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 6(2), 1-13. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2017.1-13>
- Castro, F., Lira, H. y Castañeda, M. T. (2017). *Estudio evaluativo del diseño e implementación curricular de la formación pedagógica en carreras de educación*. Revista AIE, 17(2), 1-23. <https://doi.org/10.15517/aie.v17i2.28675>
- Cayo, H., Codes, M. y Contreras, L.C. (2024). A mathematics teacher's specialized knowledge in the selection and deployment of examples for teaching sequences. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(3), 784-803, <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2158142>
- Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420–464). Macmillan.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z. y Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192–212. <https://doi.org/10.2307/749610>
- Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: Un estudio de caso* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. ProQuest Dissertations Publishing.
- Climent, N. (2011). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. (Proyecto Docente y de Investigación no publicado). Universidad de Huelva.
- Climent, N. y Carrillo, J. (2002). Una propuesta para la formación inicial de maestros. Ejemplificación: los triángulos, una situación de primaria. *Revista EMA* 7 (2)m 171-205.
- Climent, N. y Carrillo, J. (2003). *El desarrollo profesional del maestro de matemáticas desde la reflexión sobre la práctica*. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (33), 89–106.
- Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M., y Ribeiro, M. (2024). The MTSK model as a tool for designing tasks for teacher education. *ZDM – Mathematics Education*, 56(7), 1123–1135. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01605-8>.
- Climent, N. y Montes, M. (2022). El modelo MTSK: Antecedentes y estructura. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 27–44). Universidad de Huelva Publicaciones. <https://doi.org/10.14679/1451>

- Climent, N., Montes, M. Á., Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2013). *Tareas profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas: Una mirada desde el MTSK. Avances de Investigación en Educación Matemática*, (4), 35–54. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i4.83>
- Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Barrera-Castarnado, V. J. y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de vídeos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (9), 85–103. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9.108>
- Climent, N., Romero-Cortés, J., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M. C. y Contreras, L. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un 'video de aula? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 13-36.
- Cobb, P. (2000). The importance of a situated view of learning to the design of research and instruction. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 45–82). Ablex Publishing.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001009>
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68–95). Routledge.
- Codes, M. y Contreras, L. C. (2022). *El conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas*. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent Rodríguez (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 105–116). Dykinson. <https://doi.org/10.14679/1457>
- Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 15–42. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2
- Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 135–152). Cambridge University Press.
- Contreras, L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Contreras, L. C. (2021). Una aproximación a un modelo de conocimiento del formador de profesores de matemáticas. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, 1(1), 1–26. <https://doi.org/10.54541/reviem.v1i1.12>
- Contreras, L. C. (2022). Prefacio. En J. Carrillo, M. Montes, y N. Climent Rodríguez (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (p. 13-15). Dykinson.

- Consejería de Educación, Cultura y Deportes (2015). *Enseñanzas propias de la comunidad autónoma de Andalucía para la Educación Primaria*. Sevilla: Junta de Andalucía.
- Corbin, J. y Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (3rd ed.). Sage Publications.
- Cristini, M., Torrezan, E. y Ribeiro, M. (2022). Tarefa como recurso pedagógico: Um exemplo no âmbito da proporcionalidade para os anos finais. *Educação Matemática em Revista*, 27(77), 227–238. <https://doi.org/10.37001/emr.v27i77.3242>
- da Ponte, J. P. (2011). Using video episodes to reflect on the role of the teacher in mathematical discussions. En O. Zaslavsky y P. Sullivan (Eds.), *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics: Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning* (pp. 249–261). Springer.
- Da Ponte, J. P., Quaresma, M. y Branco, N. (2012). Prácticas profesionales de los profesores de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1(1), 65–86. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.5>
- DBRC [Design-Based Research Collective]. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5–8. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001005>
- De Gamboa, S., Badillo, E. y Ribeiro, M. (2015). *Reflexiones sobre el papel del conocimiento especializado en la formación inicial de profesores de matemáticas*. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez y P. Marín (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática: Retos y Perspectivas* (pp. 77–94). Granada: Editorial Comares.
- Delgado-Rebolledo, R. (2020). *Una propuesta de categorización del conocimiento de la práctica matemática de profesores universitarios* [Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/Txt-0000/UCB0379_01.pdf
- Delgado, R., Zakaryan, D. y Alfaro, C. (2022). *El conocimiento de la práctica matemática*. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 67–79). Dykinson. <https://doi.org/10.14679/1454>
- Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (2000). *Handbook of Qualitative Research* (2nd ed.). Sage.
- Depaepe, F., Verschaffel, L. y Kelchtermans, G. (2020). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, 98, 103264. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103264>
- Desimone, L. M. y Garet, M. S. (2015). Best practices in teachers' professional development in the United States. *Psychology, Society, & Education*, 7(3), 252–263. <https://doi.org/10.25115/psye.v7i3.515>

- de Villiers, M. (2004). The role of definitions in mathematics. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 257–264). Bergen University College.
- Downton, A., Muir, T. y Livy, S. (2018). Linking theory and practice: A case study of a co-teaching situation between a mathematics teacher educator and a primary classroom teacher. *Mathematics Teacher Education and Development*, 20(3), 102–118. <https://mtd.merga.net.au/index.php/mtd/article/view/471>
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif dans l'apprentissage des mathématiques. En R. Noirfalise y M. Artigue (Eds.), *Actes de la 13e École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 131–161). La Pensée Sauvage.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Escudero, I., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 7–31.
- Escudero-Ávila, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre la demostración y la refutación: Un estudio de caso* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Repositorio Arias Montano. <https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11367>
- Escudero-Ávila, D. (2022). *Conocimiento de las características del aprendizaje matemático*. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 93–104). Dykinson. <https://doi.org/10.14679/1456>
- Escudero-Ávila, D., Montes, M., Contreras, L. C. y Climent, N. (2016). Un análisis del conocimiento especializado del profesor de matemáticas a partir de la reflexión sobre una tarea formativa. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(3), 75–94. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1966>
- Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2018). Noticing and prospective teachers' learning. *ZDM – Mathematics Education*, 50, 1125–1136. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0950-0>
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 39–61. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.230>
- Fiantika, F. R., Budayasa, I. K. y Lukito, A. (2018). Analysis of students' spatial thinking in geometry: 3D object into 2D representation. *Journal of Physics: Conference Series*, 1013(1), 012140. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1013/1/012140>

- Fischbein, D. (1993). *The theory of figural concepts: Case studies of basic difficulties in understanding geometry*. Springer.
- Flick, U. (2007). *Managing quality in qualitative research*. SAGE.
- Flores-Medrano, E. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre el concepto de límite de una función: Un estudio de caso* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Repositorio Arias Montano. <https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11154>
- Flores-Medrano, E. (2022). Conocimiento de la estructura de las matemáticas. En J. Carrillo Yáñez, M. Á. Montes Navarro y N. Climent Rodríguez (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 47-55). Dykinson. <https://doi.org/10.14679/1453>
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. I. y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 3055–3064). ERME.
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. I., Montes, M., Aguilar, A., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, y N. Climent (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva: Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- Fujita, T. (2012). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing of the learning of definitions in mathematics. *Research in Mathematics Education*, 14(1), 5–22.
- Fujita, T. y Jones, K. (2006). *Primary trainee teachers' understanding of basic geometrical figures in Scotland*. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 129–136). PME
- Fujita, T. y Jones, K. (2007) Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9:1, 3-20, <https://doi.org/10.1080/14794800008520167>
- Gaudin, C. y Chaliès, S. (2015). Video viewing in teacher education and professional development: A literature review. *Educational Research Review*, 16, 41–67. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2015.06.001>
- Gibim, G., Rifo, L., Climent, N. y Ribeiro, M. (2025). Conhecimento Interpretativo de professores em uma tarefa de divisão de frações. *PNA*, 19(3), 305-329. <https://doi.org/10.30827/pna.v19i3.31002>
- Gómez, C. y Cañadas, M. C. (2016). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico [Pre-service mathematics teachers' difficulties in the learning of phenomenological analysis]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(3), 311–334. <https://doi.org/10.12802/relime.16.1932>

- Gómez-Torres, M. J. y Rico, L. (2016). *Lenguaje y conceptualización de figuras geométricas en la formación inicial de maestros*. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(3), 23–42.
- González-Regaña, A. J., Fernández-León, J., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Toscano, R. (2021). El discurso de estudiantes para maestro cuando describen y definen cuerpos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(1), 81–97. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3039>
- Goos, M. (2014). Researcher–teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, 46(2), 189–200. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0556-9>
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105–128.
- Gravemeijer, K. y Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. En J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 17–51). Routledge.
- Grevholm, B., Millman, R. y Clarke, B. (2009). Function, form and focus: The role of tasks in elementary mathematics teacher education. En B. Clarke, B. Grevholm, y R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education* (Vol. 4, pp. 1–5). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_1
- Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. Teachers College Press.
- Gutiérrez, Á. (1992). Exploring the links between visualization and geometry. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 14(2), 19–28.
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. 20 (2-3), 27-46.
- Gutiérrez, Á. Y Jaime, A. (1999). Preservice primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education* 2 (3), 253-275.
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Epistema y Didaxis: TED*, 32, 55-70. <https://doi.org/10.17227/ted.num32-1859>
- Haj-Yahya, A. H. (2025). Discussing mathematical events to foster teachers' noticing of geometric definitions. *Educational Studies in Mathematics*, 120, 497–523. <https://doi.org/10.1007/s10649-025-10436-7>
- Haj-Yahya, A., Hershkowitz, R. y Dreyfus, T. (2023). Investigating students' geometrical proofs through the lens of students' definitions. *Mathematics Education Research Journal*, 35(3), 607–633. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00406-6>

- Hammer, S. y Ufer, S. (2023). Professional competence of mathematics teachers in dealing with tasks in lesson planning. *Teaching and Teacher Education*, 132, 104246. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2023.104246>
- Herman, T. (2022). Students' misconceptions and conceptual understanding in mathematics education: A systematic review. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(11), em2227. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12627>
- Hernández-García, J., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2018). Dificultades de los futuros maestros en la clasificación de cuadriláteros: Un estudio de caso. *Revista de Educación Matemática*, 33(2), 45–60.
- Hiebert, J., Morris, A. K. y Glass, B. (2003). *Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics*. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 201–222. <https://doi.org/10.1023/A:1025162108648>
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.39.4.0372>
- Hill, H. C., Lynch, K., Gonzalez, K. E. y Pollard, C. (2020). Professional development that improves STEM outcomes. *Phi Delta Kappan*, 101(5), 50–56. <https://doi.org/10.1177/0031721720903829>
- Hjalmarson, M. A. y Lesh, R. A. (2008). Design research. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 521–534). Routledge.
- Horzum, T. y Arıkan, A. (2019). Understanding the polygon with the eyes of blinds. *International Journal of Progressive Education*, 15(1), 116–134. <https://doi.org/10.29329/ijpe.2019.184.8>
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169–202. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.41.2.0169>
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. y Philipp, R. A. (2021). Mathematics teacher learning to notice: A systematic review of studies of video-based programs. *ZDM Mathematics Education*, 53, 1–18. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01216-z>
- Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295–384). Alfar.
- Jakobsen, A., Ribeiro, M. y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19(3–4), 135–150. <https://doi.org/10.7146/nomad.v19i3-4.148652>

- Jaworski, B. (2001). *Developing mathematics teaching: Teachers, teacher educators and researchers as co-learners*. In F.-L. Lin y T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 187–203). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47204-1_11
- Jaworski, B. (2004). Insider research in mathematics teaching development: Theoretical and methodological considerations. *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 3–11.
- Jaworski, B. (2008). Mathematics teacher educator learning and development. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 4, pp. 335–361). Sense Publishers.
- Joglar-Prieto, N., Liñán-García, M. del M., y Contreras-González, L. C. (2022). MTSK en la formación inicial del profesorado de primaria: 10 años de camino. En J. Carrillo, M. Á. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 207–222). Dykinson.
- Jones, K. (2020). Geometry in the primary curriculum: Current issues and future directions. *Teaching Mathematics and its Applications*, 39(2), 69–82.
- Karsenty, R. y Arcavi, A. (2017). Mathematics, lenses and videotapes: A framework and a language for developing reflective practices of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(5), 433–455. <https://doi.org/10.1007/s10857-017-9379-x>
- Kelly, A. E. (2006). Quality criteria for design research. En J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 166–184). Routledge.
- Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.). (2008). *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. Routledge.
- Kilpatrick, J. y Spangler, D. A. (2016). *Educating future mathematics education professors*. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3.^a ed., pp. 297–309). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203448946>
- Kyaw, K. M., y Vidákovich, T. (2025). *The relationship between spatial reasoning and geometric reasoning in teachers*. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 21(8), Article em2684. <https://doi.org/10.29333/ejmste/16718c>
- Lampert, M., Beasley, H., Ghousseini, H., Kazemi, E. y Franke, M. (2013). Using designed instructional activities to enable novices to manage ambitious mathematics teaching. In M. Martinez y A. Castro Superfine (Eds.), *Proceedings of the 35th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA)* (pp. 1243–1250). University of Illinois at Chicago.

- Lesh, R., Post, T. R. y Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. (1997). Matematización: La necesidad “real” de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(3), 377–391.
- Lesh, R. y Kelly, A. E. (2000). Multitiered teaching experiments. In A. E. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 197–230). Lawrence Erlbaum.
- Li, S., Qi, C. y Li, R. (2025). The conceptualization of mathematics teachers’ professional competence in project-based learning contexts. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 21(7), em2660. <https://doi.org/10.29333/ejmste/16562>
- Lincoln, Y. S. y Guba, E. G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Sage.
- Liñán García, M. M. (2012). *Debilidades y fortalezas en el conocimiento matemático común en Geometría de los estudiantes para maestro*. Trabajo fin de máster inédito. Universidad de Huelva.
- Liñán García, M. M. (2017). *Conocimiento especializado en geometría en un aula de 5º de Primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Arias Montano. <http://hdl.handle.net/10272/14230>
- Liñán-García, M. M., Barrera-Castarnado, V. J., Muñoz-Catalán, M. C. y Contreras, L. C. (2017). El conocimiento especializado que la oportunidad evoca al investigador: Los ángulos en los símbolos indo-arábigos. En J. Carrillo y L. C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 114–118). CGSE. <http://www.redmtsk.com/wp-content/uploads/Actas-III-Jornadas-SIDM-2017.pdf>
- Liñán-García, M. M., y Contreras, L. C. (2013). Debilidades y fortalezas en el conocimiento de los temas matemáticos en geometría de los estudiantes para maestro. En A. Berciano et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 337–343). SEIEM.
- Liñán-García, M. M., Contreras, L. C., Climent, C., Montes, M. A., Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M. C. (2019). Features of the specialised knowledge in geometry of prospective primary teachers at the beginning of their training. In L. Jung (Ed.), *Student teaching: Perspectives, opportunities and challenges* (pp. 57–107). Nova Science.
- Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C. y Barrera-Castarnado, V. J. (2021). Specialised knowledge for teaching geometry in a primary education class: Analysis from the knowledge mobilized by a teacher and the knowledge evoked in the researcher. *Mathematics*, 9(21), 2805. <https://doi.org/10.3390/math9212805>

- Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros: Caracterizando perspectivas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 78, 5–16.
- Llinares, S. (2012). Roles de las tareas en la formación del profesorado de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(2), 23–34. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n2.689>
- Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación: Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, (extraordinario XXV aniversario, marzo), 31–51.
- Llinares, S. (2000). Secondary school mathematics teacher's professional knowledge: A case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 6(1), 41–62. <https://doi.org/10.1080/135406000114744>
- Llinares, S., Contreras, L. C., Climent, N., Montes, M., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2022). Knowledge mobilization in mathematics teacher education: Contributions from MTSK research. *ZDM – Mathematics Education*, 54, 789–803. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01370-9>
- Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 429–459). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901127_016
- López, C., Godino, J. D. y Font, V. (2015). Conocimiento y competencias para enseñar matemáticas: Análisis de respuestas de futuros maestros en tareas de geometría. *Educação Matemática Pesquisa*, 17(3), 629–653.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Macías, J. (2016). *Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos* [Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid]. Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones.
- Major, L. y Watson, A. (2018). The use of classroom videos in teacher education. *Educational Research Review*, 24, 57–74.
- Markovits, Z. y Smith, M. S. (2008). Cases as tools in mathematics teacher education. In D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Volume 2, Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 39–65). Sense Publishers.
- Martínez, S., Castro, E., Superfine, A. y Dasgupta, K. (2018). Examining the impact of a videocase-based mathematics methods course on secondary preservice teachers' skills at analyzing students' strategies. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 7(1), 12–37. <https://doi.org/10.4471/redimat.2018.1699>

- Matitaputty, C., Nusantara, T., Hidayanto, E. y Sukoriyanto. (2024). How mathematics teachers' special knowledge changing: A case study in the Professional Teacher Education program. *Journal on Mathematics Education*, 15(2), 545–574. <https://doi.org/10.22342/jme.v15i2.pp545-574>
- Mason, J. (2021). Learning about noticing, by, and through, noticing. *ZDM – Mathematics Education*, 53(1), 231-243. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01192-4>
- McKenney, S. y Reeves, T. C. (2012). *Conducting educational design research*. Routledge.
- McKenney, S. y Reeves, T. C. (2019). *Conducting educational design research* (2nd ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315105642>
- Mellone, M., Ribeiro, M., Jakobsen, A., Carotenuto, G., Romano, P. y Pacelli, T. (2020). Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education*, 22(2), 154-167. <https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1710557>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Boletín Oficial del Estado, núm. 52, de 1 de marzo de 2014, pp. 19349–19420. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2014/02/28/126>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Boletín Oficial del Estado, núm. 52, de 2 de marzo de 2022, pp. 24388–24463. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157>
- Molina González, M. (2006). *El conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Estudio de un caso sobre el conocimiento especializado de la relación proporcionalidad–linealidad* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. Universidad de Granada. <https://hdl.handle.net/10481/1213>
- Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En Diago, P. D., Yáñez, D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83-97). Valencia: SEIEM.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(1), 75–88. <https://doi.org/10.5565/REV/EC/V29N1.435>
- Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). *Teaching experiments within design research*. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*, 2(4), 435–440. <https://doi.org/10.18848/1833-1882/CGP/V02I04/52362>
- Montes, M. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Análisis del conocimiento de una maestra de primaria sobre el número racional* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Repositorio Arias Montano. <https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/10859>

- Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M. y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157–176). Ediciones Universidad de Salamanca.
- Montes, M. Á., Climent, N., y Contreras, L. C. (2022). Construyendo conocimiento especializado en geometría: un experimento de enseñanza en formación inicial de maestros. *Aula Abierta*, 51(1), 27–36. <https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.27-36>
- Montes, M., Contreras, L. C., Carreño, E., Hau Yon, F. y Advíncula, E. (2024). *Mathematics teachers' specialized knowledge mobilized through problem transformation. Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101132. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101132>
- Montes, M., Flores-Medrano, E., Carmona, E., Huitrado, J. L. y Flores, P. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. En J. Carrillo, L. C. Contreras y N. Climent (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 9–22). Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- Montes, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2021). Un experimento de enseñanza en formación continua de maestros: Diseño e implementación de tareas para el desarrollo profesional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(1), <https://doi.org/10.12802/relime.21.2410>
- Montes, M., Pascual Martín, M. I. y Climent, N. (2021). Un experimento de enseñanza en formación continua estructurado por el modelo MTSK. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(1), 83–104. <https://doi.org/10.12802/relime.21.2414>
- Morales Merino, R. A., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., y Moreno, M. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de educación primaria: Resultados de un experimento de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(3), 45–66. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2430>
- Moreno Martínez, C. y Climent, N. (2021). Conocimiento matemático especializado movilizado por estudiantes para maestro durante el análisis de situaciones de aula sobre polígono. *Revista Unión*, 17(62), 56–72.
- Moriel-Junior, A. (2014). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre proporcionalidad: Un estudio de caso en Brasil* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Repositorio Arias Montano. <https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/9435>
- Moriena, S. y Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, 15(1), 5-19.
- Muñoz-Catalán, M. C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Universidad de Huelva.

- Muñoz-Catalán, M. C. (2012). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Lambert Academic Publishing GmbH & Co. KG.
- Muñoz-Catalán, M. C: (2021). Reflexiones para una fundamentación del estudio de caso como diseño metodológico en Educación Matemática. En Diago, P. D., Yáñez, D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 65-80). Valencia: SEIEM.
- Muñoz-Catalán, M. C., Carrillo, J. y Climent, N. (2022). Professional knowledge in initial teacher education: MTSK perspectives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 25(3), 421–440. <https://doi.org/10.1007/s10857-021-09509-2>
- Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): Un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 18(3), 501–522. <https://doi.org/10.1007/s13398-015-0247-9>
- Muñoz-Catalán, M. C., Gavilán, J. M. y Liñán, M. M. (2017). La escritura como recurso para promover el conocimiento matemático especializado del estudiante para maestro. En E. J. Gallardo-Saborido y F. Núñez-Román (Eds.), *Escribir en las disciplinas: intervenciones para desarrollar los géneros académicos y profesionales en la Educación Superior* (pp. 39-57). Síntesis.
- Muñoz-Catalán, M. C. y Monteiro, R. (2016). Afrontando la controversia en la investigación cualitativa: Discusión sobre la naturaleza de elementos metodológicos desde la investigación en educación. *Omnia*, 4, 23–30.
- Muñoz-Catalán, M. C., Montes, M., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Aguilar, A. (2013). *La clasificación de las figuras planas en primaria: Una visión de progresión entre etapas y ciclos*. Universidad de Huelva Publicaciones.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics (Trad. SAEM Thales, 2003. *Principios y estándares para la educación matemática*). SAEM Thales.
- Nogueira, S., Climent, N. y Carrillo, J. (2022). Tareas de clasificación y razonamiento geométrico en la formación inicial de maestros. *Educação Matemática Pesquisa*, 24(1), 125–146.
- O’Keeffe, L. y White, E. (2022). Supporting mathematics pre-service teachers’ reflection with 360-degree video and the Knowledge Quartet. *Mathematics Education Research Journal*, 34, 45–68. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00405-7>
- Ortega, T. y Pecharromán, C. (2015). Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. *AIEM*, 7, 95-117. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.84>
- O’Rourke, J., Suri, S. y Tóth, C. D. (2017). Polygons. En J. E. Goodman, J. O’Rourke y C. D. Tóth (Eds.), *Handbook of discrete and computational geometry* (3.^a ed., pp. 787–810). CRC Press.

- Özçakır, B., Aydın, S. y Erbaş, A. K. (2019). Secondary school students' reasoning about geometric shapes: A concept definition and image perspective. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(5), 685–707. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1520933>
- Pascual Martín, M. I. (2021). El conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial, en relación con la enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas. Un estudio de caso (Tesis doctoral, Universidad de Huelva). Universidad de Huelva. <http://hdl.handle.net/10272/20208>
- Pascual Martín, M. I., Climent, N., Codes Valcarce, M., Martín Díaz, J. P. y Contreras, L. C. (2023). Tareas en la formación inicial de maestros para la construcción de conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado. Continuación de la Antigua Revista de Escuelas Normales*, 37(2), 55-72. <https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99221>
- Penalva, M. C., Roig Albiol, A. I. y del Río, M. (2009). Experimento de enseñanza: tareas de aprendizaje de la geometría en la formación de maestros de Educación Infantil. *VII Jornades de Xarxes d'Investigació en Docència Universitària: La qualitat del procés d'ensenyança/aprenentatge universitari des de la perspectiva del canvi* (pp. 130-136). Universitat d'Alacant.
- Pino-Fan, L. R. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87–109. https://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1011-22512015000100007
- Pinto, J. E. y González Astudillo, M. T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática*, 20(3), 83–100. <https://doi.org/10.24844/EM2003.04>
- Plazas, R., Climent, N. y Contreras, L. C. (2024). Tareas para la construcción de conocimiento especializado en la formación del profesorado de matemáticas [Póster]. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 620). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).
- Plazas, R., Climent, N., Contreras, L. C. y Sandoval, I. (2025). Conocimiento pretendido y movilizado de una tarea formativa sobre definición de polígonos usando viñetas: Análisis comparativo. En *Actas del IX Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM 2025)*.
- Plomp, T. y Nieveen, N. (Eds.). (2013). *Educational design research: Part A. An introduction* (2nd ed.). SLO.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Potari, D. (2020). Means for linking mathematics teaching to mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23(3), 233–235. <https://doi.org/10.1007/s10857-020-09462-4>

- Potari, D. y Jaworski, B. (2002). Investigating university mathematics teaching: A theoretical framework for analyzing teaching practice. *Research in Mathematics Education*, 4(1), 1–20. <https://doi.org/10.1080/14794800008520123>
- Puig Adam, P. (1986). *Curso de geometría métrica*. Euler Editorial S.A.
- Quiroga, F. y Gamboa, M. (2017). Contribución del MTSK en la elaboración del plan de formación de profesores de matemática. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 125-130). CGSE.
- Real Academia Española. (2024). *Diccionario de la lengua española* (23.^a ed.). Recuperado en 2025 de <https://dle.rae.es>
- Real Academia Española y Asociación de Academias de la Lengua Española. (2009). *Nueva gramática de la lengua española*. Espasa.
- Ribeiro, M., Policastro, M. S., Caldato, M. E. y Almeida, A. A. (2022). Interpretative knowledge of prospective kindergarten and primary teachers in the context of subtraction. *Acta Scientiae*, 24(3), 1-31. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6767>
- Rodríguez, M. (2011). La teoría del aprendizaje significativo: una revisión aplicable a la escuela actual. IN. *Revista Electrónica d'Investigació i Innovació Educativa i Socioeducativa*, 3(1), 29–50. http://www.in.uib.cat/pags/volumenes/vol3_num1/rodriguez/index.html
- Rojas, N. (2014). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre el concepto de área: Un estudio de caso* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Repositorio Arias Montano. <https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/9044>
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255–281. <https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5>
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. Sage.
- Sáenz-Ludlow, A. y Walgamuth, C. (1998). Students' constructions of meanings for geometric figures. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2–3), 43–65.
- Sánchez, V. y García, M. (2009). Tasks for primary student teachers: A task of mathematics teacher educators. In B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education* (pp. 37–49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_4
- Sánchez, N., Vásquez, G., Segura, C., Contreras, L. C. y Sosa, L. (2025). Conocimiento especializado de una profesora de matemática en la ejemplificación de la descomposición de radicales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 18(1), 201–215. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/62302>

- Santagata, R. y Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM – Mathematics Education*, 43(1), 133–145. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0292-3>
- Santagata, R. y Yeh, C. (2014). Learning to teach mathematics and to analyze teaching: Evidence from a video- and practice-based approach. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(6), 491–514. <https://doi.org/10.1007/s10857-013-9263-2>
- Santagata, R., Zannoni, C. y Stigler, J. W. (2021). Collaborative video analysis in teacher education: A framework for developing professional vision. *Journal of Teacher Education*, 72(1), 24–38. <https://doi.org/10.1177/0022487119879515>
- Santos, M. y Cai, J. (2016). Understanding and assessing mathematical proficiency. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 824–846). National Council of Teachers of Mathematics. <https://doi.org/10.5951/9780873539914.0008>
- Scheiner, T., Montes, M. y Ribeiro, M. (2019). Reconceptualising teacher specialisation in mathematics education. En G. H. González, M. A. Fernandes, y A. Carrillo-Yáñez (Eds.), *Mathematics teachers' specialised knowledge (MTSK): Advances and future perspectives* (pp. 3–22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29136-4_1
- Schwandt, T. A. (2001). *Dictionary of qualitative inquiry* (2nd ed.). Sage Publications.
- Shavelson, R. J., Phillips, D. C., Towne, L. y Feuer, M. J. (2003). On the science of education design studies. *Educational Researcher*, 32(1), 25–28. <https://doi.org/10.3102/0013189X03200102>
- Schoenfeld, A. H. (2016). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making*. *Journal of Education*, 196(2), 1–38. <http://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think*. Routledge.
- Schoenfeld, A. H. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243–261. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(99\)00031-0](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00031-0)
- Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Woods (Eds.), *Tools and processes in Mathematics Teacher Education. International handbook of mathematics teacher education 2* (pp. 321–354). Rotterdam: Sensepublisher.
- Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Basic Books.
- Sherin, M. G. y van Es, E. A. (2008). Teacher learning in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, 24(2), 244–276. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2007.05.001>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>

- Shulman, L. S. (1987). *Knowledge and teaching: Foundations of the new reform*. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Simon, M. A. (2000). Research on the development of mathematics teachers: The teacher development experiment. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335–359). Lawrence Erlbaum Associates.
- Skott, J., van Zoest, L. y Gellert, U. (2013). Theoretical frameworks in research on and with mathematics teachers. *ZDM – Mathematics Education*, 45(4), 501–505. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-y>
- Soler, M. (2012). *La argumentación y la prueba en la enseñanza de las matemáticas*. Graó.
- Sosa, L. y Reyes, A. M. (2022). *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*. En J. Carrillo Yáñez, M. Á. Montes Navarro y N. Climent Rodríguez (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 81–92). Dykinson. <https://doi.org/10.14679/1455>
- Star, J. R. y Strickland, S. K. (2008). *Learning to observe: Using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice*. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(2), 107–125. <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9063-7>
- Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–306). Lawrence Erlbaum Associates.
- Strauss, A., y Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 217–285). Sage.
- Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). *Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements*. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267–307). Erlbaum.
- Stylianides, A. J., y Stylianides, G. J. (2009). Mathematical knowledge for teaching and the teaching of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 133–149.
- Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA*, 4(4), 133–142. <https://doi.org/10.30827/pna.v4i4.6163>
- Swan, M. (2020). Design research in mathematics education: The contribution of realistic tasks. *ZDM Mathematics Education*, 52(7), 1245–1257. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01174-3>
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 12(3), 151–169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>

- Tiana, A. (2013). Los estándares de aprendizaje: significado y aplicación en el currículo escolar. *Revista de Educación*, (361), 14–32. <https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2013-361-223>
- Turégano, P. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos*, 21, 35–48.
- Van Dormolen, J. y Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 91–106.
- van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571–596.
- van Es, E. A., Tunney, J., Goldsmith, L. T. y Seago, N. (2014). A framework for the facilitation of teachers' analysis of video. *Journal of Teacher Education*, 65(4), 340–356. <https://doi.org/10.1177/0022487114534266>
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.
- Vasco, D. (2015). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre el número natural: Un estudio de caso* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Repositorio Arias Montano. <https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11363>
- Vasco, D. y Moriel Junior, J. (2022). Conocimiento de los temas. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 35-46). Dykinson. <https://doi.org/10.14679/1452>
- Vásquez, C. y Alsina, Á. (2015). Conocimiento didáctico-matemático del profesorado de educación primaria sobre probabilidad: Diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(52), 681–703. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a13>
- Ventura, A. C., Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Gardiner, A. M. y Newman-Owens, A. (2021). A learning trajectory in Kindergarten and first grade students' thinking of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *The Journal of Mathematical Behavior*, 62, 100866. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100866>
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Kluwer.
- Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 177–184.
- Wæge, K. y Fauskanger, J. (2020). Teachers' professional competence in mathematics: Opportunities and constraints in teacher education. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 25(2), 53–74.

- Ward, R. A. (2004). An investigation of K–8 preservice teachers' concept images and mathematical definitions of polygons. *Issues in Teacher Education*, 13(2), 39–56. <https://eric.ed.gov/?id=EJ796429>
- Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Bolite, J., Doorman, M., Kieran, C., Leung, A., Margolinas, C., Sullivan, P., Thompson, D. y Yang, Y. (2013). *Introduction*. En C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of the ICMI Study 22* (pp. 7–14). Oxford, UK: International Commission on Mathematical Instruction. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054>
- Wilson, M., y Cooney, T. J. (2002). Mathematics teacher change and development. In G. C. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 127–147). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_8
- Winicki-Landman, G. (2019). Las definiciones en matemáticas y los procesos de su formulación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 551–560.
- Zaslavsky, O. y Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal of Research in Mathematics Education*, 36(4), 317–346.
- Zaslavsky, O., Harel, G. y Manaster, A. (2006). A teacher's treatment of examples as reflection of her knowledge-base. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y S. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 5, pp. 457-464).
- Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (2), 131-148.