

Universidad de Huelva

Departamento de Ingeniería Electrónica, de Sistemas
Informáticos y Automática



Universidad
de Huelva

**Aplicaciones de técnicas DC a identificación paramétrica,
estimación de estados y conjuntos invariantes, en
sistemas no lineales**

**Memoria para optar al grado de doctor
presentada por:**

Manuel Joaquín Redondo González

Fecha de lectura: 22 de noviembre de 2012

Bajo la dirección de los doctores:

José Manuel Bravo Caro
Teodoro Álamo Cantarero

Huelva, 2013

ISBN: 978-84-15633-78-5

D.L.: H 38-2013



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

APLICACIONES DE TÉCNICAS DC A IDENTIFICACIÓN
PARAMÉTRICA, ESTIMACIÓN DE ESTADOS Y
CONJUNTOS INVARIANTES, EN SISTEMAS NO LINEALES

Tesis Doctoral de
Manuel Joaquín Redondo González

Codirigida por
José Manuel Bravo Caro
Teodoro Álamo Cantarero

UNIVERSIDAD DE HUELVA

Octubre de 2012



Universidad
de Huelva

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

APLICACIONES DE TÉCNICAS DC A IDENTIFICACIÓN
PARAMÉTRICA, ESTIMACIÓN DE ESTADOS Y
CONJUNTOS INVARIANTES, EN SISTEMAS NO LINEALES

Tesis Doctoral de
Manuel Joaquín Redondo González

Codirigida por
José Manuel Bravo Caro
Teodoro Álamo Cantarero

UNIVERSIDAD DE HUELVA

Octubre de 2012

*A mi familia,
por su ayuda,
por su apoyo e
infinita paciencia,
en todos mis proyectos.*

Agradecimientos

Agradezco a mis directores de tesis José Manuel Bravo y Teodoro Álamo el haberme introducido en el mundo de la investigación relacionada con los sistemas de control no lineales, así como el tiempo que han dedicado a esta tesis.

Agradezco a todos mis compañeros de los departamentos DIESIA y DTI el tiempo y la ayuda que siempre me han prestado cuando se los he demandado; especialmente a mis compañeros Paqui Segura y Javier Aroba por acompañarme, por darme siempre ánimos y por el tiempo dedicado a la lectura y corrección de esta tesis.

Índice de Contenidos

Índice de Contenidos	IX
Índice de Figuras	XV
Índice de Tablas	XXI
Notación	XXIII
Capítulo 1. Planteamiento General de la Tesis	27
1.1 Estructura de la tesis	27
1.2 Resumen y objetivos de la tesis	30
1.3 Innovaciones que aporta la tesis	34
1.4 Rendimiento científico de la tesis	35
Capítulo 2. El Método del Zonotopo	37
2.1 Introducción. Acotación garantista de conjuntos	37
2.2 Zonotopos	40
2.2.1 Generalidades	40
2.2.2 Definición y representación de zonotopos	43
2.3 Hiperplano soporte	45
2.4 Aritmética de zonotopos	46
2.4.1 Suma de zonotopos	46
2.4.2 Acotación de un zonotopo	48

2.4.2.1 Acotación caja	48
2.4.2.2 Acotación paralelepípeda mediante SVD	49
2.4.3 Inclusión entre zonotopos centrados	58
2.4.4 Intersección de dos zonotopos	61
2.4.5 Intersección de un zonotopo con una franja	63
2.4.6 Acotación de familias de zonotopos	74
Capítulo 3. Acotación del Rango de una Función. Técnicas Garantistas	75
3.1 Breve reseña histórica sobre funciones	75
3.2 Rango de una función	77
3.3 Métodos garantistas para la obtención del rango de una función	79
3.3.1 Técnica práctica para la construcción de una función de acotación externa aplicando la extensión intervalar natural	80
3.3.2 Técnica práctica para la construcción de una función de acotación externa aplicando la extensión intervalar del valor medio ...	87
3.3.3 Técnica práctica para la construcción de una función de acotación externa utilizando formas <i>slope</i>	90
3.3.4 Técnica práctica para la construcción de una función de acotación externa utilizando zonotopos, por el método de Kühn	98
3.3.5 Técnica práctica para la construcción de una función de acotación externa utilizando funciones DC	100
3.4 Funciones DC	103
3.4.1 Obtención de funciones DC	105
3.5 Ejemplos de aplicación de acotación externa del rango de una función	109

3.5.1 Ejemplo 1	109
3.5.2 Ejemplo 2	112
Capítulo 4. Identificación de Sistemas No Lineales basada en Técnicas DC	117
4.1 Introducción a la identificación de sistemas dinámicos	117
4.2 Algoritmo para identificación de sistemas no lineales con error acotado basado en programación DC	121
4.2.1 Introducción	122
4.2.2 Formulación del problema	124
4.2.3 Conceptos preliminares	125
4.2.4 Nociones sobre funciones DC	127
4.2.5 Algoritmo de identificación propuesto	130
4.2.6 Ejemplos	134
4.2.6.1 Ejemplo 1	135
4.2.6.2 Ejemplo 2	136
4.2.6.3 Ejemplo 3	137
4.2.6.4 Ejemplo 4	138
4.3 Conclusiones	139
Capítulo 5. Estimación de Estados basada en Técnicas DC	141
5.1 Introducción a la estimación de estados	141
5.2 Estimación garantista de estados	144
5.2.1 Formulación del problema de estimación garantista del estado en presencia de incertidumbres	146

5.3 Algoritmo para estimación de estados basado en error acotado aplicando programación DC	147
5.3.1 Formulación del problema	148
5.3.2 Programación DC	150
5.3.3 Acotando la evolución del sistema	152
5.3.3.1 Acotando el término error	153
5.3.3.2 Acotación garantista inicial de la evolución del sistema	155
5.3.3.3 Mejorando la acotación obtenida	156
5.3.4 Acotación del conjunto de estados consistente	159
5.3.5 Algoritmo de estimación de estados garantista	161
5.4 Ejemplo	162
5.5 Conclusiones	165
Capítulo 6. Análisis del Dominio de Atracción de un Sistema en Bucle Cerrado utilizando Técnicas DC	167
6.1 Introducción. Conjuntos invariantes para sistemas no lineales con restricciones	167
6.2 Oráculo basado en aproximaciones para conjuntos invariantes admisibles ..	168
6.3 Formulación del problema	170
6.4 Algoritmo	172
6.4.1 Obteniendo un plano de corte	173
6.4.2 Perfeccionando los planos de corte	176

6.5 Aplicación de funciones DC al problema del dominio de atracción de un sistema dinámico no lineal	181
6.6 Ejemplos	182
6.6.1 Ejemplo 1	182
6.6.2 Ejemplo 2	185
6.7 Conclusiones	188
Capítulo 7. Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación	189
7.1 Conclusiones y aportaciones originales	189
7.2 Futuras líneas de investigación	190
Bibliografía	193

Índice de Figuras

Figura 1.1 Estructura de la tesis	28
Figura 1.2 Aspectos del control que se abordan con las innovaciones propuestas en la tesis	34
Figura 2.1 Ejemplos de zonotos	44
Figura 2.2 Ejemplo de dos zonotos (Z_1 y Z_2) y su suma Minkowski ($Z_3 = Z_1 \oplus Z_2$) .	47
Figura 2.3 Dos zonotos (Z_1 y Z_2) y su suma Minkowski ($Z_3 = Z_1 \oplus Z_2$), centrados en el $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	48
Figura 2.4 Acotación caja (color verde) y paralelepípeda (color rojo) de un zonotopo (color azul)	51
Figura 2.5 Acotación mediante algoritmo recursivo de la Tabla 2.2 y comparación con el correspondiente a la descomposición en valores singulares	57
Figura 2.6 Inclusión entre zonotos	60
Figura 2.7 Intersección de zonotos	63
Figura 2.8 Intersección de franja y zonotopo (minimización de la intersección según norma Frobenius)	66
Figura 2.9 Intersección de zonotopo con franja. El zonotopo de color rojo muestra el zonotopo intersección según criterio de minimización de volumen y, el zonotopo de color negro lo muestra según el criterio de minimización de su norma Frobenius	70
Figura 2.10 Intersección de zonotopo con franja. Eliminación del segmento óptimo ...	73
Figura 3.1 Representación del concepto de función como la dependencia entre los elementos de los conjuntos A y B	77

Figura 3.2 Representación gráfica del concepto de función de acotación externa ($X \subseteq Y, f(X) \subseteq F(Y)$)	80
Figura 3.3 La diferencia entre el slope intervalar y el rango de derivadas para $x = [0, 2], c = 1$ y $f(x) = x^2$	93
Figura 3.4 La función f (en color rojo) es una función DC definida por las funciones convexas \tilde{g} (en color verde) y \tilde{h} (en color azul) ($f = \tilde{g} - \tilde{h}$)	102
Figura 3.5 Funciones convexas \tilde{g} (en color verde) y \tilde{h} (en color azul) con sus respectivas linealizaciones g_L y h_L en el punto $x_0 = 0$	102
Figura 3.6 Función f (en color rojo), una estimación inferior de la función f (\hat{f}) (en color verde) y una estimación superior de f (\check{f}) (en color azul)	103
Figura 3.7 Representación gráfica de la función $f_1(x) = x^2 - e^x = \tilde{g}_1(x) - \tilde{h}_1(x)$ en el dominio $x = [0, 2]$, con rango $\mathbf{f}_1^u(\mathbf{x}) = [-3.3891, -1.0000]$	110
Figura 3.8 Comparación de las acotaciones externas del rango de la función $f_1(x) = x^2 - e^x = \tilde{g}_1(x) - \tilde{h}_1(x)$ según se emplee aritmética intervalar (color azul), Extensión del Teorema del Valor Medio (color verde), slopes (color marrón) o funciones DC (color amarillo). El rango exacto de la función se representa en color rojo	112
Figura 3.9 Representación gráfica de la función $f_2(x) = x^3 + x^2 + 1$ en el dominio $x = [-1, 1]$, con rango $\mathbf{f}_2^u(\mathbf{x}) = [1, 3]$	113
Figura 3.10 Comparación de las acotaciones externas del rango de la función $f_2(x) = x^3 + x^2 + 1$ según se emplee aritmética intervalar (color azul), Extensión del Teorema del Valor Medio (color verde), slopes (color marrón) o funciones DC (color amarillo). El rango exacto de la función se representa en color rojo	115
Figura 4.1 Ilustración del algoritmo que se propone	126

Figura 4.2 Ilustración de los conjuntos $AFSS_{j-1}$ y $\Psi_{p,q}(v_B)$	133
Figura 4.3 La nube de puntos representa el FSS . El simplex inicial se representa por líneas continuas de color azul. La evolución del $AFSS_j$ está representada por líneas de puntos	135
Figura 4.4 Las nubes de puntos representan el FSS . Líneas continuas de color rojo representan el simplex final obtenido aplicando el algoritmo propuesto	136
Figura 4.5 Bisección del simplex final. Se muestra la nueva evolución $AFSS_j$ de la pareja de simplexes obtenida aplicando el algoritmo propuesto; en color verde lo que serían los simplexes finales	137
Figura 5.1 Proceso seguido en la mejora de la acotación garantista de $f(X,W)$ mediante un zonotopo	157
Figura 5.2 Evolución del volumen de la cota garantista del estado	162
Figura 5.3 Líneas continuas representan las acotaciones garantistas del estado x_1 que se han obtenido por el algoritmo presentado. Líneas discontinuas representan las acotaciones de x_1 obtenidas a partir de los conjuntos bajo incertidumbre exactos	163
Figura 5.4 Líneas discontinuas muestran los conjuntos $\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2$ y $\bar{\chi}_3$. Las líneas continuas representan los conjuntos $\hat{\chi}_0, \hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2$ y $\hat{\chi}_3$. Las nubes de puntos de color azul muestran los conjuntos bajo incertidumbre exactos χ_0, χ_1, χ_2 y χ_3 . Los conjuntos $f(\chi_0, W), f(\chi_1, W)$ y $f(\chi_2, W)$ se representan como nubes de puntos de color amarillo	164
Figura 5.5 Líneas continuas muestran los conjunto $\hat{\chi}_0, \hat{\chi}_1, \dots, \hat{\chi}_{15}$. Las nubes de puntos (color azul) representan los conjuntos bajo incertidumbre exactos $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{15}$. Las flechas representan la evolución existente en el sistema	164
Figura 6.1 Ejemplo de evolución de un estado $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$. Como $\phi(\hat{x}, M) \in \Omega_0$ entonces $\hat{x} \in \Omega_M$	172

Figura 6.2 Ejemplo de iteración del Algoritmo 2 para obtener un plano de corte. En este caso $\phi(\hat{x}, 4) \notin X$, de esta manera $\phi(\hat{x}, 4) \notin Y_4$ y el Algoritmo 2 se puede emplear para descartar \hat{x}	175
Figura 6.3 Ejemplo de conjunto escalado Ω_E . Los estados x tales que $x \notin \Omega_M$ están representados por puntos de color azul. Los estados x tales que $x \in \Omega_M$ se representan por puntos de color amarillo	177
Figura 6.4 El plano de corte previo $c_0^T x = d_0$ corta a Ω_E . Se obtiene un nuevo plano de corte $c(\lambda^*)^T x = d_0$ tangente a Ω_E	177
Figura 6.5 Obtención de un plano separador mediante la linealización de la función $\tilde{f}(\mathbf{x})$, relajación convexa de la función DC $f(\mathbf{x})$	181
Figura 6.6 Ω_M para $M = 100$. Los puntos interiores de color amarillo corresponden a los puntos que pertenecen al Ω_{100} . Los correspondientes azules representan los que no pertenecen a Ω_{100}	183
Figura 6.7 AIS aproximado obtenido por el Algoritmo Oráculo	184
Figura 6.8 AIS aproximado obtenido por el Algoritmo 2	184
Figura 6.9 Comparación entre el Algoritmo 2 y el Algoritmo Oráculo. Se puede observar que el Algoritmo Oráculo proporciona una aproximación menos conservativa que el Algoritmo 2	184
Figura 6.10 Comparación entre el AIS exacto y el aproximado obtenido por el Algoritmo Oráculo	185
Figura 6.11 Tanque mezclador del ejemplo 2	185
Figura 6.12 Se han utilizado 5000 puntos iniciales aleatorios para obtener una aproximación numérica de Ω_{100} . Los estados tales que $\hat{x} \in \Omega_{100}$ están representados por puntos de color amarillo. Los puntos de color azul muestran los estados tales que $\hat{x} \notin \Omega_{100}$. Los puntos de color verde muestran los estados tales que $\hat{x} \notin X$	186

Figura 6.13 AIS aproximado obtenido por el Algoritmo 3	187
Figura 6.14 Comparación entre el AIS exacto y el aproximado obtenido por el Algoritmo Oráculo	187
Figura 7.1 Representación gráfica de las herramientas matemáticas y las aplicaciones de esta tesis	191

Índice de Tablas

Tabla 2.1 Algoritmo para acotación paralelepípeda mediante SVD	50
Tabla 2.2 Algoritmo recursivo para acotación paralelepípeda	53
Tabla 3.1 Algoritmo para el cálculo de una matriz slope	95
Tabla 4.1 Algoritmo de identificación propuesto	132
Tabla 5.1 Descripción general del algoritmo de cálculo de un conjunto incierto aproximado $\hat{\chi}_k$	150
Tabla 5.2 Algoritmo de estimación de estado garantista	161
Tabla 6.1 Algoritmo 1: Oráculo que comprueba si un estado \hat{x} dado pertenece al conjunto Ω_M , devolviendo un plano de corte si no pertenece	173
Tabla 6.2 Algoritmo que calcula un plano de corte (c_0, d_0) , cuando $\hat{x} \notin \Omega_M$	174
Tabla 6.3 Algoritmo Oráculo	178

La notación empleada en el presente documento, así como los acrónimos que se utilizan, se muestra a continuación:

\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
\mathbb{I}	Conjunto de los intervalos reales
\mathbb{I}^n	Conjunto de todos los vectores intervalares de dimensión n cuyas componentes son intervalos reales
\mathbf{B}	Intervalo unitario $[-1,1]$
\mathbf{B}^n	Caja unitaria de n componentes
$\square(X)$	Inclusión intervalar del conjunto X (Caja o vector intervalar que acota X)
$mid(\square X)$	Centro de $\square X$
$diam(\square X)$	Anchura de $\square X$
$\diamond(\cdot)$	Operador inclusión zonotopo
$\Psi(\cdot)$	Operador acotación de un conjunto
$ \cdot $	Valor absoluto. Para un vector o matriz, se aplica a cada una de sus componentes
$\ \cdot\ _F$	Norma Frobenius de una matriz
$\ \cdot\ _1$	Norma-1 de un vector
$\ \cdot\ $	Norma-2 de un vector
$\ \cdot\ _\infty$	Norma- ∞ de un vector
$\overset{\circ}{S}$	Interior del conjunto S
∂S	Borde o frontera del conjunto S

NOTACIÓN

$Co(\cdot)$	Envoltura convexa de un conjunto
$Nn(\cdot)$	Envoltura no negativa de un conjunto
$Vol(\cdot)$	Volumen de un conjunto cerrado y acotado
\oplus	Suma Minkowski de dos conjuntos
P	Conjunto del tipo poliedro convexo
Z	Conjunto del tipo zonotopo
x	Escalar (en minúscula)
X	Vector o matriz (en mayúscula)
\mathbf{x}	Intervalo de \mathbb{I}
\mathbf{X}	Vector intervalar de \mathbb{I}^n
f	Función de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
ϕ	Función de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
F	Función de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
\tilde{g}	Función convexa
\hat{g}	Función cóncava
\mathbf{f}''	Rango exacto de una función f sobre un intervalo
\mathbf{f}_I	Extensión intervalar de una función f
\mathbf{f}_{IN}	Extensión intervalar natural de la función f
\mathbf{f}_{EIVM}	Extensión del valor medio de la función f
x_k	Estado de un sistema dinámico en el instante de tiempo k
u_k	Señal de control en el instante de tiempo k
w_k	Incertidumbre en el instante de tiempo k
$x(j k)$	Estado predicho para instante $k + j$, partiendo del estado x_k en el instante k

$u_N(k)$	Secuencia de N señales de control en el instante k
$u(j k)$	Acción de control calculada en el instante k , relativa al instante $k + j$
$J_N(x_k, u_N(k))$	Coste del problema de optimización del MPC con horizonte N , en el estado x_k con una secuencia de señales de control $u_N(k)$
$L(\cdot, \cdot)$	Coste de etapa de la función de coste del problema de optimización del MPC
$V(\cdot)$	Coste terminal de la función de coste del problema de optimización del MPC

Acrónimos

AFSS	<i>Approximate Feasible Solution Set</i> Conjunto Solución Factible Aproximado
AIS	<i>Admissible Invariant Sets</i> Conjuntos Invariantes Admisibles
DC	<i>Difference of Convex</i> Diferencia de Convexas
FSS	<i>Feasible Solution Set</i> Conjunto Solución Factible
LDI	<i>Linear Differential Inclusion</i> Inclusión Diferencial Lineal
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i> Desigualdades Matriciales Lineales
MPC	<i>Model Predictive Control</i> Control Predictivo basado en Modelo
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i> Descomposición en Valores Singulares

Capítulo 1. Planteamiento General de la Tesis

En líneas generales, la Optimización DC constituye una rama de la Optimización Global que trata la resolución de problemas de Programación Matemática No Lineal con función objetivo y/o restricciones que pueden expresarse como funciones DC (*Diference of Convex* - función que puede ser expresada como la diferencia de dos funciones convexas).

Esta tesis tiene como objetivos la propuesta de nuevos métodos para la estimación de estados, la identificación de sistemas y los conjuntos invariantes, para sistemas no lineales con incertidumbres paramétricas. Se diseñan nuevas técnicas, que permiten considerar esta incertidumbre paramétrica acotada, en los siguientes campos:

1. En la estimación de estados con método de error acotado basado en funciones DC.
2. En la identificación de sistemas con error acotado basado en funciones DC.
3. En la aproximación de conjuntos invariantes admisibles aproximados, muy semejantes a los conjuntos invariantes admisibles reales, aplicando linealización DC.

El núcleo común de todas las técnicas desarrolladas en esta tesis es la necesidad de un método de acotación del rango de funciones y de sus gradientes. En esta tesis se propone la utilización de programación DC para la estimación de estados, la identificación de sistemas y la obtención de conjuntos invariantes aproximados.

1.1 Estructura de la tesis

Tal como se muestra en la Figura 1.1, esta tesis se estructura según siete capítulos. En este primer capítulo, se introduce la temática de la tesis, se muestra la estructura de su documento, se presenta un resumen de la misma, se hace referencia a las innovaciones aportadas y se muestra el rendimiento científico obtenido y contribuciones como consecuencia de los trabajos que se han desarrollado.

El segundo capítulo aborda la acotación garantista de conjuntos, presentando el estado del arte del método del zonotopo. Se comienza introduciendo la acotación garantista de conjuntos, destacándose la importancia que tienen los métodos basados en la misma para el análisis y diseño del control en los sistemas inciertos con incertidumbre acotada. En la identificación de modelos mediante métodos de acotación se representa el conjunto solución factible aproximado mediante zonotopos; los zonotopos son poliedros convexos que se pueden representar mediante

la suma Minkowski de segmentos. Se definen y tratan las operaciones de este tipo de conjuntos, presentando la aritmética correspondiente a los mismos.

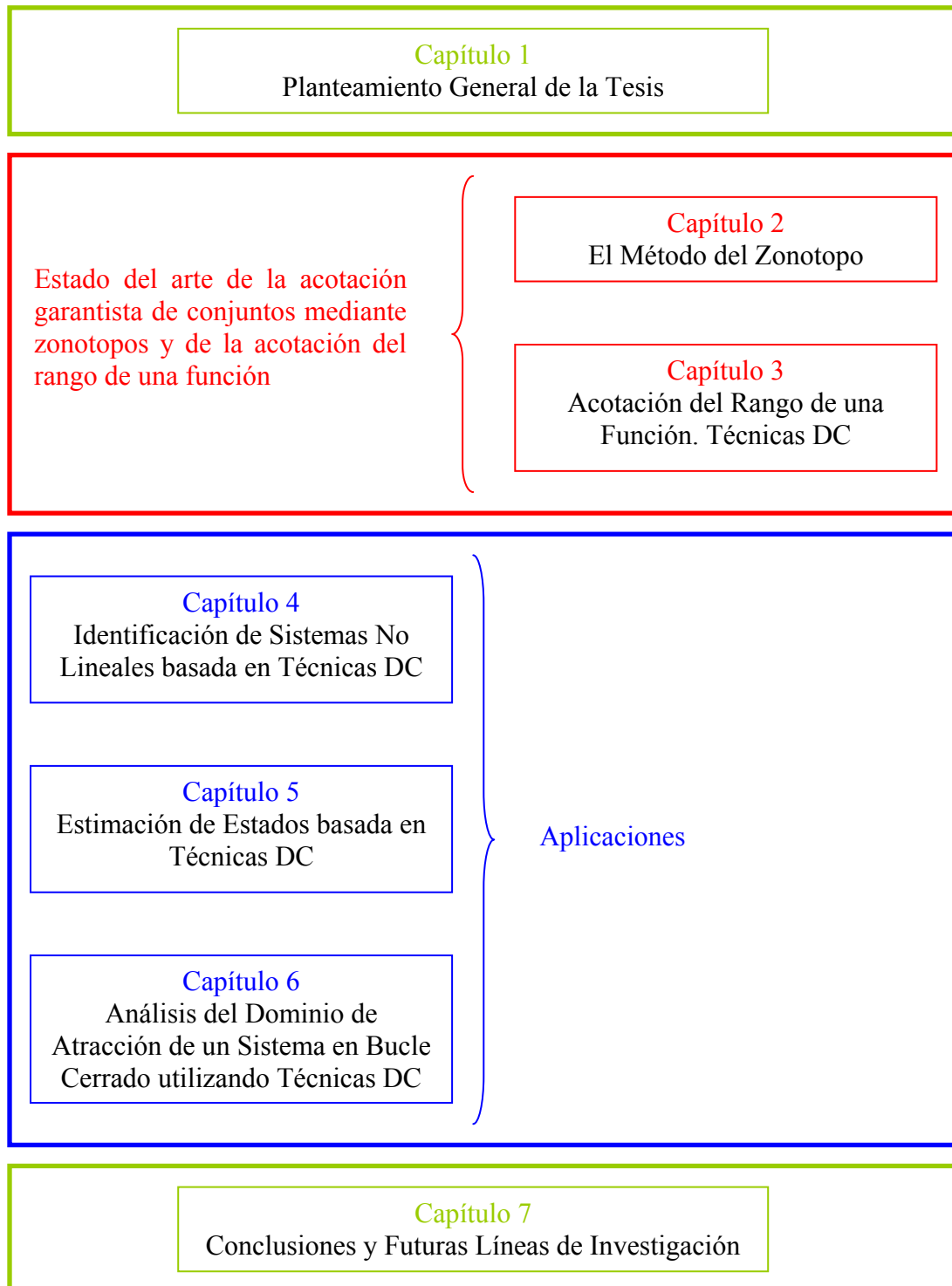


Figura 1.1 Estructura de la tesis.

El tercer capítulo estudia la aplicación de diferentes técnicas existentes en la literatura para la acotación garantista del rango de una función, incluyendo la correspondiente a la aplicación de funciones DC. El rango de una función representa el conjunto de todos los valores posibles al evaluar la misma. No es siempre fácil determinar dicho rango de forma exacta, o resulta difícil expresarlo algebraicamente; por ello, se suelen utilizar métodos garantistas para la obtención del rango aproximado. En este tema se plantean distintos métodos para calcular las cotas de dicho rango. Para la obtención del rango aproximado de una función de forma garantista, se construye una función acotación externa según diferentes técnicas:

1. Con la extensión intervalar natural.
2. Con la extensión del teorema del valor medio.
3. Con formas slope (que puede traducirse como pendiente, gradiente, ...).
4. Con zonotopos, aplicando el método de Kühn.
5. Con funciones DC.

Aunque la mayor parte de las funciones que se encuentran habitualmente en problemas de optimización son DC, no es siempre fácil identificarlas como tales y, aunque se tengan ya identificadas, el obtener una descomposición DC explícita no resulta ser una tarea fácil por lo general. No obstante, existen numerosos resultados que permiten obtener representaciones DC a partir de otras funciones más sencillas con descomposición conocida. Algunos de estos resultados se presentan en dicho tercer capítulo.

El cuarto capítulo trata de la identificación de sistemas no lineales con error acotado utilizando técnicas DC. Se presenta un método garantista para la estimación paramétrica de modelos no lineales con error acotado. El método considera representaciones DC para la forma funcional del sistema dinámico, con el fin de obtener una cota externa del conjunto de parámetros que es consistente con las medidas, el modelo del sistema y el error acotado considerado.

El quinto capítulo muestra un método de estimación de estados garantista para sistemas no lineales en tiempo discreto con descripción acotada del ruido y los parámetros. Los conjuntos de estados estimados, que son consistentes con la evolución del sistema, las salidas medidas y ruidos y parámetros acotados, se representan mediante zonotopos. Para la obtención de un conjunto compacto acotado se emplea la programación DC y operaciones de intersección.

El sexto capítulo presenta el análisis del dominio de atracción de un sistema en bucle cerrado. Se propone un método para la obtención de planos de corte que excluyen puntos no

pertencientes al conjunto invariante admisible máximo, dado un sistema no lineal y una ley de control. Para la obtención de dicho conjunto de planos de corte, se emplean linealizaciones a lo largo de la trayectoria del sistema en bucle cerrado y técnicas DC.

Finalmente, en el séptimo y último capítulo se presentan las conclusiones generales de esta tesis, así como las futuras líneas de investigación propuestas.

1.2 Resumen y objetivos de la tesis

La tesis aborda la identificación de sistemas, la estimación de estados y el análisis del dominio de atracción de sistemas no lineales, aplicando tanto técnicas basadas en error acotado, que toman como hipótesis inicial de trabajo el que las medidas tienen un error cuyo nivel es conocido o acotado, como metodologías cuya base son las funciones que consisten en la diferencia de dos funciones convexas, denominadas funciones DC.

La identificación es la técnica consistente en construir un modelo a partir de las variables medidas del proceso: entradas o variables de control, salidas o variables controladas y, posibles perturbaciones. Dentro de las posibles técnicas de identificación, la identificación paramétrica conduce a un modelo paramétrico cuyos parámetros se calculan atendiendo a ciertos criterios de minimización del error entre el modelo y el proceso real o de acotación del error.

En la tesis, para la identificación de sistemas, se presenta un método garantista para la estimación de modelos paramétricos no lineales basado en error acotado. Se consideran representaciones DC para la forma funcional del sistema dinámico con el fin de obtener una cota externa del conjunto de parámetros que es consistente con las medidas, el modelo del sistema y el error acotado considerado. En cada iteración, el algoritmo que se propone resuelve varios problemas de optimización convexa hasta descartar la parte de la cota exterior que no es consistente con las medidas. Esta operación se repite hasta no poderse obtener una solución mejor.

El conjunto de parámetros compatible con la estructura del modelo planteado, con las medidas obtenidas y la incertidumbre considerada, se denomina Conjunto Solución Factible (FSS – *Feasible Solution Set*). En la identificación, el objetivo consiste en obtener estos conjuntos de soluciones factibles. Los inconvenientes principales de los métodos exactos son consecuencia de la complejidad de la representación del conjunto solución factible exacto y la complejidad computacional que implica. Con el fin de reducir estas limitaciones, se emplean los Conjuntos de Solución Factible Aproximados (AFSS – *Approximate Feasible Solution Set*); estos conjuntos acotan externamente al correspondiente FSS.

En este trabajo, en el capítulo 4 de la tesis, para la representación del conjunto de soluciones factibles aproximado, que acota al exacto, se emplean simplexes. Un simplex es un politopo con $n+1$ vértices, que cumplen la restricción de independencia lineal, en un espacio n -dimensional. Básicamente, el algoritmo que se propone consiste en:

1. Se parte de un conjunto solución factible aproximado $AFSS_0$ inicial; que es un simplex. Este conjunto, por la propia definición contiene al conjunto solución factible FSS . $i = 0$.
2. Se define un conjunto candidato Ψ a partir de una porción de $AFSS_i$, también de tipo simplex.
3. Se comprueba si $\Psi \cap FSS = \emptyset$, resolviendo un problema de optimización convexa considerando relajaciones convexas (definen un estimador inferior, Definición 4.3) y cóncavas (definen un estimador superior, Definición 4.4) de la función que caracteriza la dinámica del sistema paramétrico no lineal.
4. Si $\Psi \cap FSS = \emptyset$, el conjunto Ψ se puede descartar; obteniéndose un simplex más reducido como $AFSS_{i+1} = AFSS_i \setminus \Psi$. Este es el nuevo simplex a considerar, comenzándose nuevamente en el punto 2.
5. Si $\Psi \cap FSS \neq \emptyset$, el conjunto Ψ no se puede descartar; definiéndose un nuevo Ψ candidato, más pequeño que el anterior. Y se vuelve al punto 3.

El algoritmo se aplica mientras no se alcance un tamaño mínimo dado para Ψ .

Aunque es posible obtener relajaciones convexas y cóncavas en representaciones DC de una función no lineal, en cualquier dominio de un politopo S , en el algoritmo que se propone se emplean simplexes por simplificarse la definición de las mismas (tal como se indica y justifica en el capítulo 4).

La estimación de estado consiste en, a partir de un modelo dinámico del sistema y consideradas las restricciones que sean necesarias, obtener un estimador del estado real del sistema, de forma que el error tienda a cero cuando el tiempo tienda a infinito, es decir, que el estado estimado converja al estado real del sistema de forma asintótica.

En el capítulo 5 de la tesis, el método de estimación de estados propuesto emplea zonotopos y programación DC para, en cada muestra de tiempo, obtener una acotación garantista de la trayectoria, que es indeterminada para el sistema no lineal. Se presenta un nuevo método para estimación de estados garantista, para sistemas no lineales en tiempo discreto con una

descripción acotada del ruido y los parámetros. Estos conjuntos de estados se representan mediante zonotopos. Para la obtención de un conjunto compacto acotado se emplea programación DC. El algoritmo propuesto es similar a un filtro de Kalman: primero, mediante zonotopos y programación DC, se obtiene una acotación externa de la evolución del sistema (pronóstico) y, en los siguientes pasos, se mejora la acotación externa usando la nueva salida medida y la programación DC (corrección). De forma resumida, el procedimiento que se propone es el siguiente:

1. Acotación del término error. Este error se produce como consecuencia de la aproximación del sistema no lineal mediante una linealización. Se aprovecha la estructura DC del sistema para acotar el error de forma garantista: primero se obtiene un zonotopo y posteriormente un paralelotopo que contiene al zonotopo anterior. Un paralelotopo es un zonotopo con $2n$ lados, siendo n la dimensión del espacio en el que se define.
2. Acotación del conjunto de estado consistente. Considerando los zonotopos que definen el espacio de estado inicial y el que define los parámetros variables y el vector perturbación del proceso, y el paralelotopo que acota el término error obtenido anteriormente, se obtiene primero un zonotopo y posteriormente un paralelotopo que acotan el conjunto de estado consistente (en el capítulo 5, se definen formalmente el conjunto de estado consistente y el conjunto de estado incierto, en la Definición 5.10 y la Definición 5.11 respectivamente).
3. Mejora de la acotación del conjunto de estado consistente. Partiendo del paralelotopo que acota el conjunto de estado consistente obtenido anteriormente y del paralelotopo que define el espacio de estado inicial, teniendo en cuenta la franja que define la salida medida, consistente con el estado actual, se obtiene un nuevo paralelotopo que permite obtener el zonotopo final que acota el conjunto de estado consistente.

Existen muchas metodologías de control de procesos, diferenciándose unas de otras en la forma de tener en cuenta los criterios de funcionamiento y en la forma de representar el proceso a controlar. Por ejemplo, el MPC tiene en cuenta dichos criterios de funcionamiento mediante funciones objetivo y restricciones, y representa el proceso mediante un modelo dinámico; el modelo puede incluir incertidumbres para que de forma explícita se incluyan en la formulación de los controladores, en cuyo caso se habla de MPC Robusto. La incertidumbre que se considera en esta tesis se supone acotada y en el dominio del tiempo.

Siguiendo con el MPC, en la mayoría de los casos, el MPC Robusto utiliza predicciones garantistas de la evolución del sistema. Estas predicciones incluyen los conjuntos de estados alcanzables por el sistema debido a las diferentes incertidumbres consideradas. Para el cálculo de estas predicciones se pueden utilizar modelos que incluyan parámetros inciertos y métodos de simulación garantistas que emplean funciones DC como herramienta de acotación. En la tesis, las predicciones son conjuntos de estados que se representan mediante zonotopos.

La teoría de los conjuntos invariantes es importante en el paradigma de los sistemas de control. Estos conjuntos pueden usarse por ejemplo para definir regiones terminales o para diseñar leyes de control óptimas con estabilidad garantizada en el contexto del MPC. El conjunto terminal invariante (positivo o de control) garantiza la factibilidad del sistema en todo instante, y como consecuencia el cumplimiento de las restricciones.

En un sistema autónomo, un *conjunto invariante positivo* es un conjunto en el que el sistema evoluciona hacia si mismo cuando está sujeto a las leyes del propio sistema dinámico. En un sistema en bucle cerrado, un *conjunto invariante de control* es aquel en el que para cualquier estado del mismo existe una acción de control que mantiene al sistema dentro de dicho conjunto.

Se define un *conjunto invariante admisible* (AIS) de la siguiente forma:

Dado un sistema no lineal definido por $x^+ = f(x, u)$, siendo $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ un vector de estado y $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ una acción de control, siendo $u = K(x)$. El conjunto Ω se dice que es un conjunto invariante admisible si:

1. Ω está incluido en X
2. $K(x)$ está incluida en U para todo x perteneciente a Ω
3. $f(x, K(x))$ está incluido en Ω para todo x perteneciente a Ω

En el capítulo 6 de esta tesis se propone un nuevo método oráculo para la obtención de planos de corte, que excluyen puntos no pertenecientes al conjunto invariante admisible máximo (contiene a todos los conjuntos invariantes admisibles), dado un sistema no lineal y una ley de control. Para la obtención del conjunto de planos de corte, el método emplea linealizaciones DC a lo largo de la trayectoria del sistema en bucle cerrado. Los planos de corte de la aproximación propuesta nunca cortan a una aproximación interior dada del conjunto invariante admisible máximo.

Dada la complejidad del cálculo exacto del conjunto invariante para un sistema no lineal, el método oráculo que se propone, por medio de una iteración simple, determina si una condición inicial dada pertenece al conjunto invariante admisible; si no pertenece, el método proporciona un algoritmo de plano de corte. Este plano de corte contiene al punto dado y respeta al conjunto invariante admisible estimado inicial. Dada la simple recursión empleada para la obtención del plano de corte, este método puede utilizarse en el contexto del control predictivo basado en modelos (permite manejar la restricción terminal de forma numéricamente eficiente).

1.3 Innovaciones que aporta la tesis

Las innovaciones aportadas por la tesis se describen y detallan en los capítulos 4, 5 y 6. En la Figura 1.2 se muestran los distintos aspectos del control que abordan.

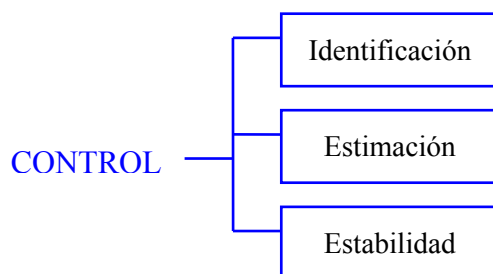


Figura 1.2 Aspectos del control que se abordan con las innovaciones propuestas en la tesis.

En el capítulo 4 se presenta un nuevo método de identificación de sistemas. Se muestra un método garantista para la estimación de parámetros de modelos no lineales en un contexto de error acotado. Se ha propuesto un algoritmo iterativo basado en una representación DC de la forma funcional del sistema considerado. Para acotar el conjunto de parámetros que es consistente con las medidas, el modelo del sistema y el error acotado, se han utilizado simplexes. En cada iteración se considera un simplex como acotación del conjunto solución exacta. La mejora de esta cota externa se realiza descartando los subconjuntos de ese simplex que no son consistentes con el error acotado; para ello se resuelve un número, polinomial respecto del número de parámetros, de problemas de optimización convexa.

En el capítulo 5, se propone un nuevo método sobre estimación de estado garantista para sistemas no lineales discretos con descripción acotada del ruido y de los parámetros. El algoritmo propuesto acota el conjunto de todos los estados consistentes con la salida medida, la acotación del ruido considerada y el modelo del sistema. El conjunto de estados se acota

mediante zonotopos. Para calcular dichos zonotopos que contienen la evolución del sistema, se utiliza programación DC y técnicas de acotación de conjuntos que se presentan en el capítulo 2 de esta tesis. Según se van obteniendo medidas de las salidas del sistema, se intersectan los zonotopos calculados con las franjas de los estados consistentes. Dada una medida del sistema, existe una franja que es consistente con la misma. Con el objeto de incluir esa información en el conjunto que acota el estado actual, se aplican operaciones de intersección.

En el capítulo 6, se propone un método oráculo para la obtención de planos de corte que excluyen puntos que no pertenecen al conjunto invariante admisible maximal. Para la obtención de este conjunto de planos de corte, el método usa linealizaciones DC (si la función es DC) a lo largo de la trayectoria en bucle cerrado. Los planos de corte obtenidos contienen al punto inicial y a la estimación inicial del conjunto invariante admisible. Para mejorar los planos de corte obtenidos mediante linealización, se emplea una versión escalada de un conjunto invariante inicial, que siempre va a ser respetado y conservado internamente. El método propuesto es útil en el contexto del control predictivo basado en modelo, por permitir manejar la restricción terminal de forma numéricamente eficiente.

1.4 Rendimiento científico de la tesis

Los trabajos de investigación descritos en la tesis, en los capítulos 4, 5 y 6, han dado lugar a las siguientes publicaciones:

- Bravo, J. M., Álamo, T., Redondo, M. J., Camacho, E. F. “An algorithm for bounded-error identification of nonlinear systems based on DC functions”. *Revista Automatica*. Vol. 44, pp. 437-444, 2008.
- Álamo, T. Bravo, J. M., Redondo, M. J., Camacho, E. F. “A set-membership state estimation algorithm based on DC programming”. *Revista Automatica*. Vol 44, pp. 216-224, 2008.
- Redondo, M. J., Bravo, J. M. and Álamo, T. “Oracle Based Approach to Admissible Invariant Sets”. Comunicación en el 2012 American Control Conference June 27-29, Montréal, Canada. WeA12 Regular Session, Hochelaga 6.
- Suárez, A., Redondo M. J., Vasallo, M., Álamo, T. y Bravo, J.M. “Predicción intevalar mediante identificación no paramétrica basada en error acotado”. Comunicación en el VIII Simposio CEA de Control Inteligente del 27 al 29 de Junio de 2012, Baiona (Pontevedra).

2.1 Introducción. Acotación garantista de conjuntos

En el ámbito del control, los métodos basados en la teoría de conjuntos hacen referencia a las técnicas relacionadas con las propiedades que comparten todos los elementos de unos conjuntos definidos en el espacio de estados. Estos métodos resultan muy útiles para el análisis y el diseño del control en los sistemas inciertos con incertidumbre acotada [75].

Para tratar los problemas de análisis y control de los sistemas inciertos, el enfoque clásico dado hasta finales de los años sesenta estaba basado en hipótesis estocásticas sobre la naturaleza de la incertidumbre. Con este argumento como base, el objetivo del control óptimo consistía en general, en determinar la ley de control que minimizara el valor de una función de coste, suponiendo una incertidumbre caracterizada por una determinada distribución de probabilidad. De la misma forma y, si se asume que el sistema es lineal y que las condiciones iniciales, las medidas y los ruidos que afectan al sistema se modelan por procesos blancos Gaussianos, el filtro de Kalman resuelve el problema de estimación proporcionando una solución óptima que es la que minimiza el valor esperado para el error de estimación considerado.

Otra forma de tratar los problemas de análisis y control de sistemas inciertos es hacerlo mediante un enfoque garantista, del peor caso (*worst-case*). En este caso, la hipótesis sobre la incertidumbre que afecta al sistema se asume desconocida pero acotada por un conjunto. Dicho enfoque tiene la siguiente justificación:

1. Asumir que se conoce exactamente la función que define la distribución de probabilidad de los ruidos y de las perturbaciones puede llegar a ser demasiado restrictiva, mientras que suponer la acotación de la incertidumbre puede ser más realista. En concreto, el enfoque garantista está justificado en las situaciones en las que no se puede hacer ninguna suposición probabilística sobre la incertidumbre, y sí es posible definir las cotas de los errores de los modelos considerados; en estos casos se consideran sistemas con dinámicas dependiente de parámetros, los cuales están restringidos por cotas que se definen como consecuencia de las limitaciones físicas que se conocen. Para estos casos, aplicar un enfoque garantista resulta bastante más cercano a la realidad que hacerlo como estocástico.

2. Cuando el sistema a controlar presenta restricciones duras, el enfoque garantista presenta ventajas. Mientras el enfoque estocástico no presenta garantía alguna de que se cumplan las restricciones, los resultados proporcionados por el enfoque garantista sí garantizan que se cumplan las restricciones cuando se cumplan las hipótesis definidas para la incertidumbre.
3. El asumir la presencia de incertidumbre en el sistema puede usarse para tratar no linealidades del mismo. Para un sistema con dinámicas no lineales conocidas, se puede emplear un sistema lineal con incertidumbre acotada siempre que dicha incertidumbre modele las discrepancias con el sistema no lineal original. Este procedimiento de aproximación, aunque introduce algún conservadurismo, permite aplicar resultados conocidos, basados en la linealidad, a sistema no lineales. Los sistemas de inclusión de diferencias lineales (LDI – *Linear Difference Inclusions*) y los sistemas lineales con incertidumbre aditiva son modelos representativos para este contexto [36], [87].

Los métodos basados en la teoría de conjuntos se presentan como alternativas a los métodos estocásticos para los problemas relacionados con el análisis de estabilidad, el diseño del control robusto, la identificación de sistemas y la estimación de estados para sistemas que estén afectados de incertidumbre. Considerar la incertidumbre desconocida pero acotada, en lugar de considerarla un proceso estocástico, aparece de forma pionera en los trabajos [178] y [197] a finales de los años 60 y en [25] a principios de los setenta. En [178], el autor trata de estimar en cada instante un conjunto del espacio de estados que contenga al estado real de un sistema lineal con perturbaciones sobre el estado y sobre la salida; las condiciones iniciales y las perturbaciones son desconocidas pero están acotadas por elipsoides. En [197], Witsenhausen aborda el problema de cálculo computacional de conjuntos en el espacio de estados que son compatibles con las observaciones y las condiciones iniciales; en este caso, el sistema se supone estar afectado por perturbaciones sobre el estado y sobre la salida, asumiendo que éstas están acotadas por conjuntos compactos y convexos; se proponen aproximaciones poliédricas que llevan a la resolución de problemas de programación lineal. En [25], se trata el mismo problema de estimación considerado en [178], pero ampliado con el análisis de los casos de suavizado y predicción; exponiéndose explícitamente su adaptación a sistemas en tiempo discreto.

En la utilización de los métodos basados en la teoría de conjuntos y el cálculo de conjuntos invariantes, uno de los problemas principales está relacionado con el hecho de que generalmente la falta de linealidad del sistema o del controlador conlleva conjuntos no convexos y no poliédricos, implicando normalmente una gran complejidad computacional. Es por lo que, de

forma general se emplean aproximaciones de los mismos, teniendo que compensarse el conservadurismo inducido y la complejidad computacional.

Referido a los sistemas no lineales, la obtención de los conjuntos alcanzables y de estimación garantista aproximados se reduce al cálculo de la secuencia de conjuntos en el espacio de estados que proporciona la garantía de contener el estado del sistema. Los sistemas lineales y no lineales en ambiente de incertidumbre están relacionados puesto que, a menudo, los métodos que se emplean para calcular los conjuntos alcanzables y la estimación garantista en los sistemas no lineales se basan en aproximaciones lineales de los mismos.

En [117] se trata el problema del cómputo de conjuntos alcanzables para los sistemas no lineales, utilizando una técnica para acotar la evolución real del sistema, que se basa en el teorema del valor medio; dado un sistema no lineal y un conjunto, se puede obtener una aproximación del conjunto alcanzable a un paso acotando la función que representa la dinámica del sistema no lineal con una función lineal con incertidumbre aditiva. De esta forma, la secuencia de conjuntos alcanzables se obtiene a través de un mapeo lineal y de una suma de Minkowski, en cada paso. Puesto que esto en general conlleva un excesivo aumento de complejidad de los conjuntos, se emplea zonotopos para representarlos, permitiendo controlar tanto la complejidad computacional como la representación de los conjuntos a costa de algo de conservadurismo. En [81] se proponen otros desarrollos usando zonotopos y cajas en la acotación de la evolución admisible del sistema.

Como ya se ha comentado, una forma de tratar el cómputo de los conjuntos alcanzables para un sistema no lineal consiste en aproximarlos a un sistema lineal incierto. En [167] se presenta un enfoque nuevo, garantizando la convergencia de la secuencia de conjuntos alcanzables aproximados, y empleándose las propiedades de invariancia con el fin de determinar una forma básica de acotación de los conjuntos alcanzables exactos. Mediante un método basado en la homotecia se determina un procedimiento computacional que combina un reducido esfuerzo computacional con una convergencia a cero del error de aproximación.

Para sistemas no lineales, la estimación de estado garantista también se ha tratado mediante enfoques basados en la teoría de conjuntos. En [3] se presenta, para sistemas en tiempo discreto no lineales con perturbaciones acotadas para la salida y el estado, un algoritmo para calcular un conjunto que contiene los estados compatibles con la salida medida y con el modelo del sistema; este conjunto se representa mediante un zonotopo, siendo minimizado éste, en cada paso dado en el algoritmo, mediante una expresión analítica o resolviendo un problema de

optimización convexa. Para calcular una secuencia garantista de conjuntos en el espacio de estados, se emplea aritmética intervalar.

En la literatura existente sobre métodos basados en la teoría de conjuntos se han utilizado diferentes figuras geométricas para acotar el conjunto de estados en el que se incluye la estimación en cada instante de muestreo; se utilizaron elipsoides en [178], poliedros en [118], cajas en [104] y paralelotos en [56] principalmente. En esta tesis se emplean zonotos y poliedros convexos.

A continuación, en este tema se aborda el estudio de los zonotos dada la importancia y aplicación de los mismos para las propuestas que se hacen en esta tesis sobre identificación de sistemas, estimación de estados y conjuntos invariantes admisibles aproximados; además de definirse, se hace un estudio profundo de la aritmética asociada a los mismos.

2.2 Zonotos

Los zonotos son poliedros convexos que se pueden representar mediante la suma Minkowski (Definición 2.14) de segmentos. El método del zonoto se utiliza a lo largo de esta tesis como herramienta de acotación de funciones ante la presencia de incertidumbres. En este apartado se repasan algunas generalidades sobre poliedros, se da una definición formal de zonoto así como la caracterización de éste sobre sus vértices y caras; se abordan técnicas para el cálculo de un hiperplano soporte de un zonoto, la suma Minkowski de dos zonotos y la acotación de zonotos mediante cajas y paralelepípedos.

2.2.1 Generalidades

En este apartado se dan definiciones y teoremas generales necesarios para abordar el estudio de los zonotos. En primer lugar se dan las siguientes definiciones básicas:

Definición 2.1 (ε -vecindad alrededor de un punto) Sea un punto $x \in \mathbb{R}^d$, una ε -vecindad alrededor de x se define como $N_\varepsilon(x) = \{y : \|y - x\| < \varepsilon\}$.

Definición 2.2 (Clausura de un conjunto) Sea un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$, un punto está en la clausura de S , denotada $cl S$, si $S \cap N_\varepsilon(x) \neq \emptyset$, $\forall \varepsilon > 0$.

Definición 2.3 (Conjunto cerrado) Si $S = cl S$ entonces es cerrado.

Definición 2.4 (Punto interior a un conjunto) Se dice que un punto x está en el interior de S , denotado S° , si existe algún $\varepsilon > 0$ tal que $N_\varepsilon(x) \subset S$.

Definición 2.5 (Conjunto abierto) Si $S = \overset{\circ}{S}$, entonces S es abierto.

Definición 2.6 (Punto en el borde de un conjunto) Un punto x está en el borde o frontera de S , denotado ∂S , si para todo $\varepsilon > 0$, $N_\varepsilon(x)$ contiene al menos un punto en S y otro fuera de S .

Definición 2.7 (Conjunto acotado) Un conjunto es acotado si se puede contener en una bola de suficiente radio.

Definición 2.8 (Conjunto compacto) Un conjunto es compacto si es cerrado y acotado.

A continuación se definen formalmente los conceptos de hiperplano y de poliedro convexo.

Definición 2.9 (Hiperplano) Un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^d$ es una colección de puntos de la forma $H = \{x : c^T x = d\}$, donde $c \in \mathbb{R}^d$ y $d \in \mathbb{R}$. Se dice que c es el vector normal al hiperplano. Un hiperplano define dos semiespacios: $H^+ = \{x : c^T x \geq d\}$ y $H^- = \{x : c^T x \leq d\}$.

Definición 2.10 (Poliedro convexo) Un poliedro convexo es la intersección de un número finito de semiespacios. También un poliedro convexo es un conjunto P de \mathbb{R}^d que se puede representar como la solución de un sistema lineal de inecuaciones. $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$ donde $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $b \in \mathbb{R}^m$.

Como se sabe, si se toman dos puntos $x_1, x_2 \in P$, poliedro convexo, cualquier combinación convexa de dichos puntos $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ con $(0 \leq \lambda \leq 1)$ también pertenece a P .

Dado un poliedro P , para un vector real $c \in \mathbb{R}^d$ y un número d , una inecuación lineal $c^T x \leq d$ se llama válida para P si $c^T x \leq d$ se cumple para todo $x \in P$.

A continuación se caracterizan las caras de un poliedro y se define *politopo*.

Definición 2.11 (Cara) Un subconjunto F de un poliedro P se llama cara de P si se representa como $F = P \cap \{x : c^T x = d\}$ para una inecuación válida $c^T x \leq d$.

Teorema 2.1 (Caracterización de caras) Sea un poliedro P representado con el sistema de inecuaciones lineales $Ax \leq b$. Un subconjunto no vacío F de P es una cara de P si y sólo si F se representa como el conjunto solución de un sistema de ecuaciones obtenido de $Ax \leq b$ convirtiendo alguna de las inecuaciones en igualdades: $F = \{x : A^1 x = b^1 \text{ y } A^2 x \leq b^2\}$ donde

$$A = \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix}.$$

Las caras de un poliedro pueden tener dimensiones: 0 (vértices), 1 (aristas), $d-2$ (crestas) y $d-1$ (facetas). Los vértices son los puntos extremos de P , definiéndose como puntos que no pueden ser representados como la combinación convexa de otros dos puntos de P . El número de caras k -dimensionales de P lo denotaremos como $f_k(P)$; en concreto, $f_0(P)$ y $f_{d-1}(P)$ denotan el número de vértices y facetas de P respectivamente.

Definición 2.12 (Envoltura convexa) Dado un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^d$, la envoltura convexa $Co(S)$ se define como el conjunto convexo más pequeño de \mathbb{R}^d que incluye a S .

Dados los vectores $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$, se tiene:

$$Co(v_1, v_2, \dots, v_k) = \left\{ x : x = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j, \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \text{ y } \lambda_j \geq 0, j=1, 2, \dots, k \right\} \quad (2.1)$$

Así mismo, se define la envoltura no negativa como:

$$Nn(v_1, v_2, \dots, v_k) = \left\{ x : x = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j, \quad \lambda_j \geq 0, j=1, 2, \dots, k \right\} \quad (2.2)$$

Teorema 2.2 (Minkowski-Weyl's) Para un subconjunto P de \mathbb{R}^d , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. P es un poliedro, es decir, para alguna matriz A y un vector b , $P = \{x : Ax \leq b\}$.
2. Existen vectores finitos reales v_1, v_2, \dots, v_n y r_1, r_2, \dots, r_s tales que $P = Co(v_1, v_2, \dots, v_n) \oplus Nn(r_1, r_2, \dots, r_s)$, siendo \oplus la suma Minkowski de la Definición 2.14.

El teorema de Minkowski-Weyl's establece que cada poliedro o politopo es generado finitamente. Cada poliedro tiene dos representaciones, la primera, basada en semiespacios (*halfspace*), denominada *H-representación* ($P = \{x : Ax \leq b\}$), y la segunda, basada en vértices (*vertices*), denominada *V-representación* ($P = Co(v_1, v_2, \dots, v_n) + Nn(r_1, r_2, \dots, r_s)$).

Definición 2.13 (Politopo) Un politopo es un poliedro acotado.

Definición 2.14 (Suma Minkowski) La suma de dos conjuntos X e Y se define mediante:

$$X \oplus Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\} \quad (2.3)$$

En geometría, la suma Minkowski es una operación sobre las partes de un espacio vectorial. A dos conjuntos X e Y se asocia un conjunto suma, formado por la suma de los elementos de X y de Y .

Definición 2.15 (Intervalo) *Un intervalo $X = [a, b]$ es el conjunto $\{x: a \leq x \leq b\}$ de números reales entre a y b inclusive. Se denota \mathbb{I} al conjunto de intervalos definidos sobre los números reales.*

Definición 2.16 (Intervalo unitario) *Se define como intervalo unitario el intervalo $[-1, 1]$.*

Definición 2.17 (Caja) *Una caja es un vector intervalar (vector cuyas componentes son intervalos). La inclusión intervalar de un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$, denotada por $\square X$, es una caja que satisface $X \subseteq \square X$. Dada una caja $\square X = ([a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n])^T$, su centro se denota como $\text{mid}(\square X)$, y su anchura como $\text{diam}(\square X) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)^T$.*

Definición 2.18 (Caja unitaria) *Se define como caja unitaria a un vector de intervalos unitarios. Se denota \mathbf{B}^n a una caja unitaria de n componentes.*

2.2.2 Definición y representación de zonotopos

En este apartado se define el concepto de zonotopo así como su representación matricial; representación matricial empleada a lo largo de la presente tesis para acotar conjuntos de estados o parámetros. En todos los aspectos tratados en esta tesis se hace uso de este tipo de figuras.

Definición 2.19 (Zonotopo) *Un zonotopo $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ es un politopo convexo que se puede representar como la suma Minkowski de un número finito de segmentos: $P = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_m$, donde los segmentos $L_i = S_i \mathbf{B}$ (\mathbf{B} intervalo unitario, $[-1, 1]$) con $S_i \in \mathbb{R}^d$ se definen como $L_i = \{s_i \in \mathbb{R}^d : s_i = S_i b, |b| \leq 1\}$, $i = 1, 2, \dots, m$.*

Un ejemplo de zonotopo en \mathbb{R}^d es el hipercubo unitario. Un zonotopo es un politopo convexo cuyas facetas vienen definidas por $(d-1)$ -tuplas de sus generadores. Por lo tanto, el vector c perpendicular a una de las facetas del zonotopo, es perpendicular a $(d-1)$ generadores del zonotopo. También, se cumple que un zonotopo es simétrico respecto de su centro. En 2D, todo polígono convexo y simétrico respecto del centro del mismo es un zonotopo; sin embargo, en 3D o dimensiones superiores esto no tiene por qué cumplirse. Como un zonotopo está siempre centrado respecto de su centro, cada faceta tiene una pareja opuesta.

Definición 2.20 (Representación matricial de un zonotopo) Un zonotopo se puede representar como una transformación afín de una caja unitaria más un punto central. Se tiene por tanto: $Z = p \oplus H\mathbf{B}^m$, donde $p \in \mathbb{R}^d$, $H \in \mathbb{R}^{d \times m}$ y $\mathbf{B}^m = \{b \in \mathbb{R}^m : \|b\|_\infty \leq 1\}$.

Hay que hacer notar que las columnas de la matriz H se corresponden con los vectores S_i de los segmentos L_i . Otra definición de zonotopo se muestra a continuación.

Definición 2.21 (Zonotopo de orden m) Dado un vector $p \in \mathbb{R}^d$ y la matriz $H \in \mathbb{R}^{d \times m}$, se define zonotopo de orden m al conjunto $p \oplus H\mathbf{B}^m$. Notar que es la suma Minkowski de los segmentos definidos por las columnas de la matriz H , esto es $p \oplus H_1\mathbf{B} \oplus H_2\mathbf{B} \oplus \dots \oplus H_m\mathbf{B}$.

El orden m de un zonotopo es una medida de su complejidad geométrica. La principal ventaja de los zonotopos en el contexto de parámetros variables con el tiempo es que la suma Minkowski de un zonotopo y una caja es otro zonotopo.

Ejemplo 2.1 En la Figura 2.1 se representan gráficamente los zonotopos $Z_1 = p_1 \oplus H_1\mathbf{B}^4$ (color azul), $Z_2 = p_2 \oplus H_2\mathbf{B}^4$ (color rojo) y $Z_3 = p_3 \oplus H_3\mathbf{B}^3$ (color verde), donde:

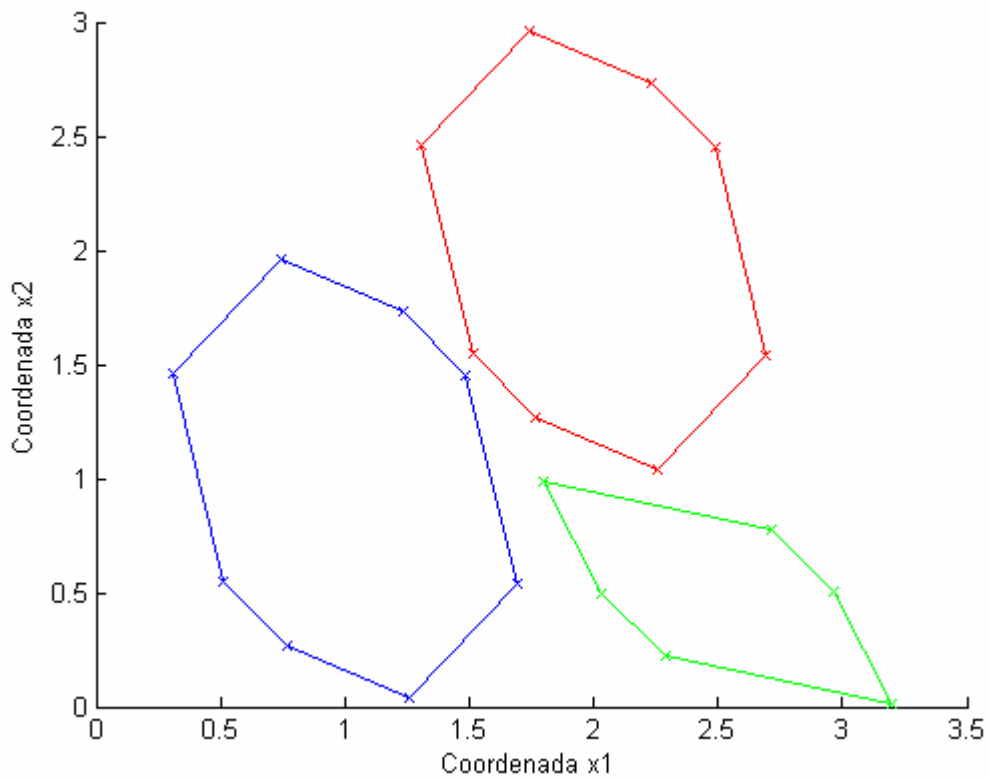


Figura 2.1 Ejemplos de zonotopos.

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad H_1 = \begin{bmatrix} -0.2457 & 0.1036 & 0.2175 & -0.1269 \\ 0.1163 & -0.4573 & 0.2520 & 0.1372 \end{bmatrix}. \quad \text{Para este caso: } d=2 \quad (p_1 \in \mathbb{R}^2),$$

$$m=4 \text{ y } H_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 4}.$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad H_1 = \begin{bmatrix} -0.2457 & 0.1036 & 0.2175 & -0.1269 \\ 0.1163 & -0.4573 & 0.2520 & 0.1372 \end{bmatrix}. \quad \text{Para este caso: } d=2 \quad (p_2 \in \mathbb{R}^2),$$

$$m=4 \text{ y } H_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 4}.$$

$$p_3 = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}; \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0.1163 & -0.4573 & -0.1269 \\ -0.2457 & 0.1036 & 0.1372 \end{bmatrix}. \quad \text{Para este caso: } d=2 \quad (p_3 \in \mathbb{R}^2), \quad m=3 \text{ y}$$

$$H_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

Los dos primeros zonotopos están definidos por la misma matriz H (H_1) pero distintos puntos centrales p (p_1 y p_2). El tercer zonotopo difiere de los dos primeros en p (p_3) y H (H_2).

[39] Dado un zonotopo $Z \in \mathbb{R}^d$ con m generadores ($m \geq d$), el número de vértices viene acotado por: $f_0(Z) \leq 2 \sum_{i=0}^{d-1} \binom{m-1}{i}$ y el número de facetas está acotado por $f_{d-1}(Z) \leq 2 \binom{m}{d-1}$.

2.3 Hiperplano soporte

Se define en este apartado el concepto de hiperplano soporte y se presenta cómo calcular el hiperplano soporte de un zonotopo a partir de su vector normal. Estos resultados se pueden utilizar para calcular la distancia entre un poliedro convexo que represente una región terminal y un zonotopo que represente un conjunto de estados incluido en una trayectoria de un sistema dinámico.

El hiperplano soporte es un concepto geométrico. Un hiperplano divide al espacio en dos semiespacios.

Definición 2.22 (Hiperplano soporte) *Sea un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ y sea $\bar{x} \in \partial S$; se llama hiperplano soporte de S en \bar{x} a:*

$$H = \{x : c^T (x - \bar{x}) = 0\} \quad \text{si } S \subseteq H^+ \text{ ó } S \subseteq H^- \quad (2.4)$$

Es decir, un hiperplano soporta a un conjunto S en el espacio euclídeo \mathbb{R}^d si se cumplen dos condiciones:

- S está completamente contenido en uno de los dos semiespacios cerrados determinados por el hiperplano (H^+ y H^-).
- El hiperplano contiene a S en al menos un punto.

Aquí, un semiespacio cerrado incluye al hiperplano.

Como definición equivalente a la dada formalmente de hiperplano soporte (Definición 2.17) se tiene que el hiperplano $H = \{x: c^T(x - \bar{x}) = 0\}$ es un hiperplano soporte de S en $\bar{x} \in \partial S$ si $c^T \bar{x} = \inf\{c^T x: x \in S\}$ ó si $c^T \bar{x} = \sup\{c^T x: x \in S\}$.

Definición 2.23 (Hiperplano soporte de un zonotopo) *Sea un zonotopo $Z = p \oplus H\mathbf{B}^m$ y sea un hiperplano con vector normal c , se define el hiperplano soporte del zonotopo como: $H = \{x: c^T x = \delta\}$ donde δ es la solución del problema de optimización: $\delta = \max_{x \in Z} c^T x$. Si definimos $H_c = H^T c$ se tiene que $\delta = c^T p + \|H_c\|_1^{-1}$ (en realidad, dado c , hay dos hiperplanos soporte: $\delta = c^T p + \|H_c\|_1$ y $\delta = c^T p - \|H_c\|_1$) [37], [42].*

2.4 Aritmética de zonotopos

En este apartado se muestra cómo calcular la suma de zonotopos, los métodos que permiten simplificar zonotopos, la intersección de dos zonotopos y la minimización de la misma, la intersección de un zonotopo con una franja y su minimización, y, por último, la acotación de familias de zonotopos.

2.4.1 Suma de zonotopos

Se muestra a continuación cómo calcular la suma Minkowski de dos zonotopos.

Sean dos zonotopos $Z_1 = p_1 \oplus H_1 \mathbf{B}^m$ y $Z_2 = p_2 \oplus H_2 \mathbf{B}^n$, el *zonotopo suma* se calcula como:

$$Z = Z_1 \oplus Z_2 = (p_1 + p_2) \oplus [H_1 \quad H_2] \mathbf{B}^{m+n} \quad (2.5)$$

¹ La norma 1 de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ viene definida por la expresión: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, donde los x_i son las componentes del vector x .

Ejemplo 2.2 En la Figura 2.2 se muestra el zonotopo suma de los zonotopos Z_1 y Z_2 :
 $Z = Z_1 \oplus Z_2 = (p_1 + p_2) \oplus [H_1 \ H_2] \mathbf{B}^{m+n}$ (en color verde) teniendo como valores:

$Z_1 = p_1 \oplus H_1 \mathbf{B}^m$; $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $H_1 = \begin{bmatrix} 0.1812 & 0.1968 & -0.2235 \\ 0.0186 & -0.1063 & -0.1267 \end{bmatrix}$; Para este caso: ($p_1 \in \mathbb{R}^2$),
 $m = 3$ y $H_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ (en color azul).

$Z_2 = p_2 \oplus H_2 \mathbf{B}^n$; $p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$; $H_2 = \begin{bmatrix} -0.0701 & -0.0704 & 0.2128 \\ 0.3807 & -0.4295 & -0.4937 \end{bmatrix}$; Para este caso: ($p_2 \in \mathbb{R}^2$),
 $n = 3$ y $H_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ (en color rojo).

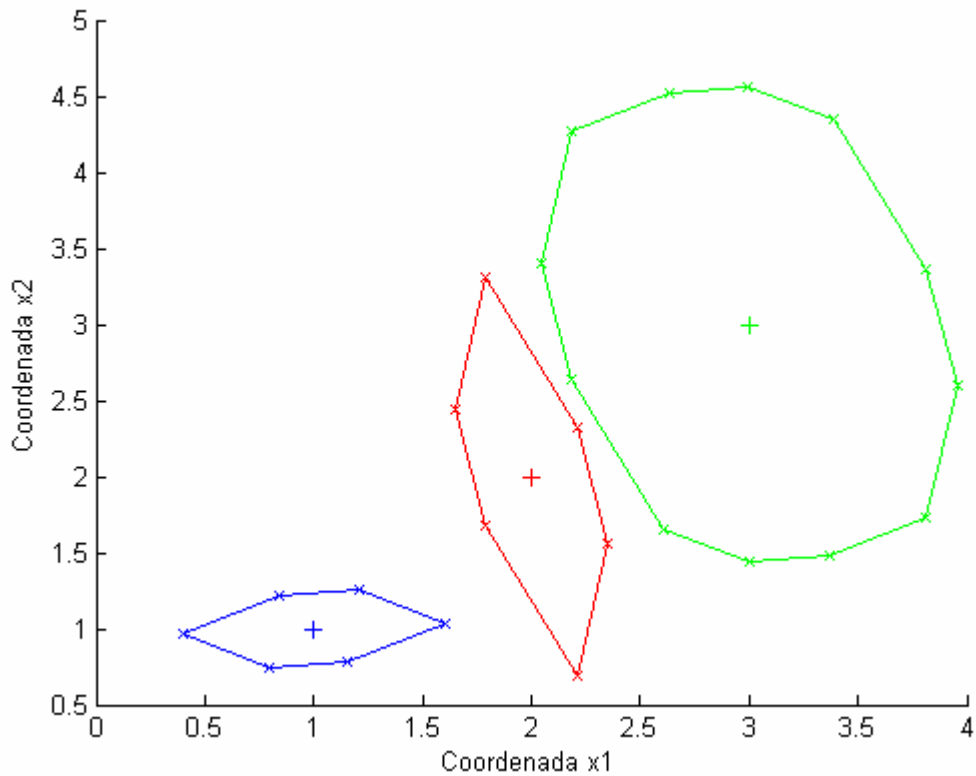


Figura 2.2 Ejemplo de dos zonotopos (Z_1 y Z_2) y su suma Minkowski ($Z_3 = Z_1 \oplus Z_2$).

Para que se pueda entender y asimilar mejor gráficamente la suma Minkowski de dos zonotopos, en la Figura 2.3 se representan los mismos zonotopos anteriores centrados todos en el origen:

$$p_1 = p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = p_3.$$

Se observa claramente la correspondencia de los lados de los zonotos sumandos (colores azul y rojo) con los correspondientes del zonotopo resultado (color verde).

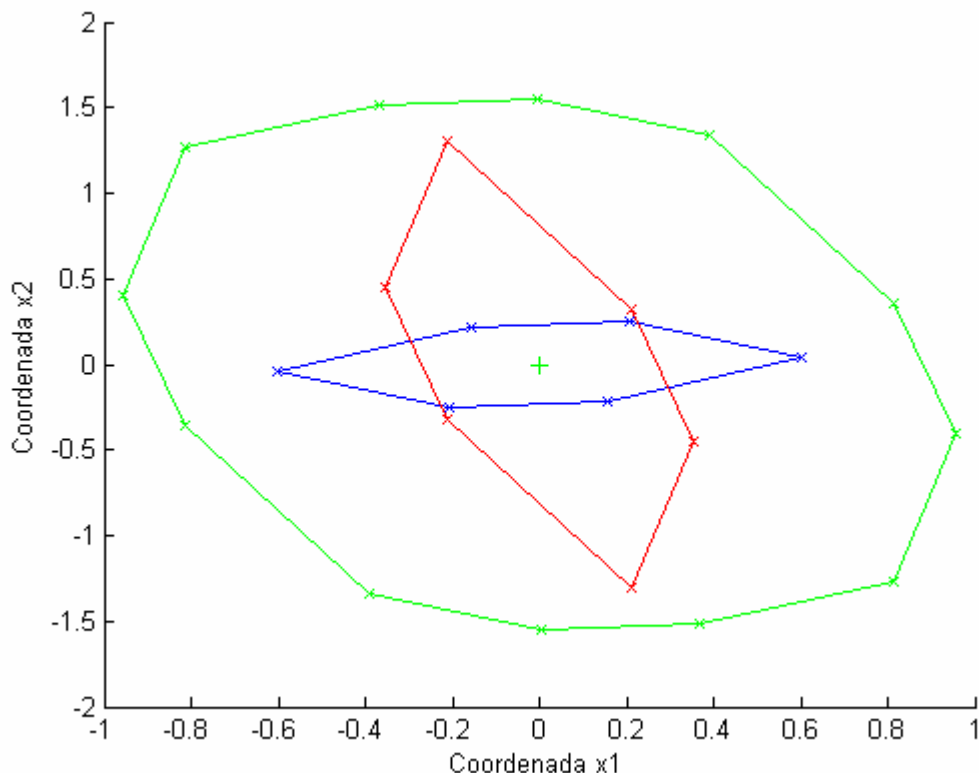


Figura 2.3 Dos zonotos (Z_1 y Z_2) y su suma Minkowski ($Z_3 = Z_1 \oplus Z_2$), centrados en el $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2.4.2 Acotación de un zonotopo

Se presentan en este apartado dos métodos para simplificar zonotos. La simplificación más sencilla consiste en acotar el zonotopo exteriormente mediante una caja. Sin embargo, dicha aproximación puede implicar una sobrestimación excesiva; por ello, se propone acotar el zonotopo mediante un paralelepípedo, que proporciona una aproximación más ajustada.

2.4.2.1 Acotación caja

Dado un zonotopo $Z = p \oplus MB^m \subseteq \mathbb{R}^n$, se puede calcular de forma sencilla una caja Z_c tal que $Z \subseteq Z_c$ simplemente realizando la operación $p \oplus MB^m$ utilizando aritmética intervalar²:

² La aritmética intervalar es una extensión de la aritmética real, que considera intervalos de números reales como operandos y con los mismos operadores que la aritmética real.

$$Z_c = \{x : |x_i - p_i| \leq \|M_i\|_1\} \quad (2.6)$$

donde M_i es la fila i -ésima de M y x_i, p_i son las componentes i -ésimas de los vectores x y p respectivamente.

2.4.2.2 Acotación paralelepípeda mediante SVD

Si se utiliza descomposición en valores singulares, es posible calcular una acotación poliédrica de un zonotopo complejo. Este cálculo no necesita la resolución de problemas de optimización debido al carácter lineal de los zonotopos.

La descomposición en valores singulares (SVD – *Singular Value Decomposition*) es una herramienta muy útil en el cálculo matricial. Toda matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con $n \leq m$ se descompone en el producto: $M = U \Sigma V^T$, donde $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz cuadrada que cumple $U^T U = I$, $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es otra matriz cuadrada que cumple $V^T V = I$ y $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es una matriz que contiene los valores singulares, que son las raíces cuadradas (positivas) de los valores propios no nulos de MM^T (o $M^T M$):

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

El número de valores singulares distintos de cero, constituyen el rango de la matriz. Las columnas de la matriz U contienen los vectores propios correspondientes a los valores propios no nulos de $M^T M$.

El objetivo es, dado un zonotopo $Z = p \oplus M \mathbf{B}^m$ con $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$, encontrar un paralelepípedo $Z_p = p \oplus M_p \mathbf{B}^n$ con $M_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $Z \subseteq Z_p$.

Para el cálculo de M_p se realiza la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz $M = U \Sigma V^T$. A continuación se asigna a M_p la estructura $M_p = U D$, donde D es una matriz diagonal con componentes D_{ii} . El objetivo es conseguir:

$$U \Sigma V^T \mathbf{B}^m \subseteq U D \mathbf{B}^m \quad (2.8)$$

Premultiplicando ambos miembros de la inclusión (2.8) por la matriz U^T se obtiene:

$$U^T U \Sigma V^T \mathbf{B}^m \subseteq U^T U D \mathbf{B}^m \quad (2.9)$$

y, como $U^T U = I$ se obtiene:

$$\Sigma V^T \mathbf{B}^m \subseteq D \mathbf{B}^m \quad (2.10)$$

Nótese que si se tiene la igualdad $D_{ii} = \|\sigma_i V_i\|$, donde V_i representa la columna i -ésima de la matriz V , la inclusión $Z \subseteq Z_p$ se cumple, siendo $M_p = UD$.

En la Tabla 2.1 se presenta un algoritmo que implementa la acotación descrita más arriba.

Algoritmo $M_p =$ Envoltura Paralelepípedo (M)
<p>Algoritmo</p> <p>$(U, \Sigma, V) =$ Valores Singulares (M)</p> <p>$D = 0^{n \times n}$</p> <p>Para $i = 1, 2, \dots, n$</p> <p style="padding-left: 40px;">$D(i, i) = \ \sigma_i V_i\$</p> <p>Finpara</p> <p>$M_p = UD$</p> <p>Fin del Algoritmo</p>

Tabla 2.1 Algoritmo para acotación paralelepípeda mediante SVD.

Ejemplo 2.3 Dado el zonotopo $Z = p_1 \oplus M_1 \mathbf{B}^3$, definido como:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } M_1 = \begin{bmatrix} -0.2230 & 0.1230 & 0.0320 \\ 0.1230 & -0.1230 & 0.0220 \end{bmatrix};$$

aplicando el algoritmo para obtener una acotación paralelepípeda a partir de los valores singulares, se obtiene $P = p_p \oplus M_p \mathbf{B}^2$, definido por:

$$p_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } M_p = \begin{bmatrix} -0.3654 & 0.0506 \\ 0.2429 & 0.0761 \end{bmatrix}.$$

La acotación intervalar proporciona la mínima caja C que acota Z , definida por:

$$C = \begin{bmatrix} 0.3780 & 0 \\ 0 & 0.2680 \end{bmatrix} \mathbf{B}^2.$$

En la Figura 2.4 se observa cómo la acotación paralelepípeda se ajusta mejor a la forma del zonotopo que la acotación caja.

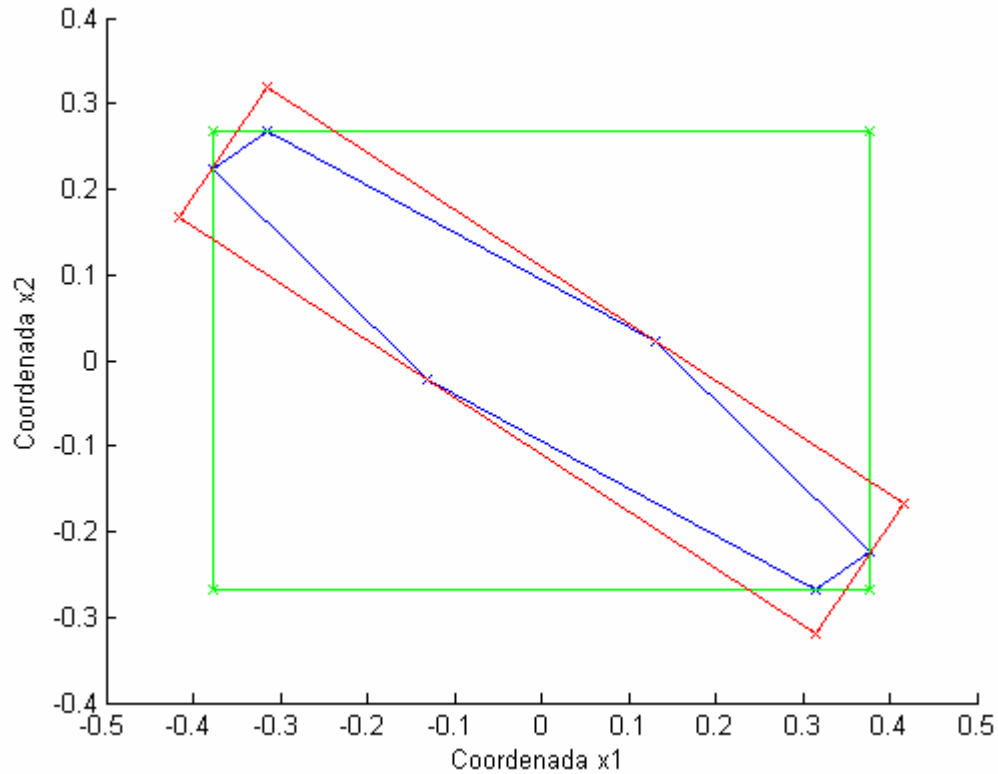


Figura 2.4 Acotación caja (color verde) y paralelepípeda (color rojo) de un zonotopo (color azul).

A continuación se muestra un algoritmo recursivo para la acotación paralelepípeda de un zonotopo [39]. Dicha acotación es más ajustada que la obtenida al usar descomposición en valores singulares.

Dado un zonotopo HB^r con $H \in \mathbb{R}^{n \times r}$, el algoritmo construye de forma recursiva un paralelepípedo PB^n tal que $HB^r \subseteq PB^n$. El algoritmo realiza n iteraciones; en cada iteración se selecciona y extrae una columna de la matriz H y se añade a la matriz P . Al final de cada iteración, P tiene una columna más y H una menos. Al conjunto restante de columnas de la matriz H que no han sido seleccionadas, se le suma un vector de forma que dichas columnas pasan a ser ortogonales a cierto vector v_i , donde i representa el número de iteración. Al finalizar las n iteraciones, la matriz P tiene n columnas y el conjunto de esas columnas que aún quedan en la matriz H son ortogonales a n vectores linealmente independientes v_i , implicando que son nulas.

La proposición que se presenta a continuación muestra cómo es posible transformar la matriz H para que cierta columna H_i pase a ser ortogonal a un vector v utilizando otra columna H_j como apoyo. Además, el nuevo zonotopo resultante incluye el zonotopo inicial. Dicha proposición se utiliza en el algoritmo de acotación.

Proposición 2.1 *Sea un vector $v \in \mathbb{R}^n$, un zonotopo HB^r con $H \in \mathbb{R}^{n \times r}$ siendo: $H = [H_1 \cdots H_i \cdots H_j \cdots H_r]$ y cierto $\alpha = v^T H_i (v^T H_j)^{-1}$; entonces se cumple:*

- *La inclusión $HB^r \subseteq H_s B^r$ donde $H_s = [H_1 \cdots H_i - \alpha H_j \cdots H_j (1 + |\alpha|) \cdots H_r]$*
- *La nueva columna $H_i - \alpha H_j$ es ortogonal a v . Esto es: $v^T (H_i - \alpha H_j) = 0$*

PRUEBA: Supóngase que $\forall x \in HB^r$; entonces existen $b_l \in \mathbf{B}$ con $l=1,2,\dots,r$ tales que $x = \sum_{l=1}^r H_l b_l$. Se tiene que $\forall y \in H_s B^r$; entonces existen $b_l^* \in \mathbf{B}$ con $l=1,2,\dots,r$ tales que $y = \sum_{l=1}^r H_l b_l^* + |\alpha| H_j b_j^* - \alpha H_j b_i^*$. Si se tiene que $b_i^* = b_i$ y que $b_j^* = (b_j + \alpha b_i^*) (1 + |\alpha|)^{-1}$, se cumple que $b_i^*, b_j^* \in \mathbf{B}$ y $H_i b_i + H_j b_j = (H_i - \alpha H_j) b_i^* + H_j (1 + |\alpha|) b_j^*$ y por tanto $\forall x \in HB^r$ existe $y \in H_s B^r$ tal que $x = y$.

$$\text{Por otro lado: } v^T (H_i - \alpha H_j) = v^T H_i - \alpha v^T H_j = v^T H_i - v^T H_i (v^T H_j)^{-1} v^T H_j = 0$$

□

La siguiente proposición presenta una extensión a varias columnas de la propiedad anterior.

Proposición 2.2 *Sea un vector $v \in \mathbb{R}^n$, un zonotopo HB^r con $H \in \mathbb{R}^{n \times r}$ siendo $H = [H_1 \cdots H_i \cdots H_j \cdots H_r]$ y ciertos escalares $\alpha_l = v^T H_l (v^T H_j)^{-1}$ con $l=1,2,\dots,r$; entonces se cumple:*

- *La inclusión $HB^r \subseteq H_s B^r$ donde la matriz H_s viene dada por*

$$H_s = [H_1 - \alpha_1 H_j \cdots H_i - \alpha_i H_j \cdots H_j \sum_{l=1}^r |\alpha_l| \cdots H_r - \alpha_r H_j]$$
- *Las nuevas columnas $H_l - \alpha_l H_j$ son ortogonales a v . Esto es $v^T (H_l - \alpha_l H_j) = 0$, para todo $l \neq j$.*

PRUEBA: La demostración no es más que una aplicación iterativa de la propiedad 2.1.

□

Por lo tanto, en la Tabla 2.2 se presenta el algoritmo que, de forma iterativa, calcula una acotación paralelepípeda.

<p>Algoritmo $P =$ Envoltura Paralelepípedo (H^i, P^i)</p>
<p>Algoritmo</p> <p>Si H^i es matriz nula entonces devolver P^i</p> <p>FinSi</p> <p>Paso 1: Obtener el índice j y el vector v_j</p> <p>Paso 2: Crear la matriz H_s^i</p> $H_s^i = [H_1^i - \alpha_1 H_j^i \quad H_2^i - \alpha_2 H_j^i \quad \cdots \quad H_j^i \sum_{l=1}^r \alpha_l \quad \cdots \quad H_{r-(i-1)}^i - \alpha_{r-(i-1)} H_j^i]$ <p>siendo $\alpha_l = v_j^T H_l^i (v_j^T H_j^i)^{-1}$ con $l = 1, 2, \dots, r - (i - 1)$</p> <p>Paso 3: Construir la matriz H^{i+1} eliminando la columna $H_j^i \sum_{l=1}^r \alpha_l$ de la matriz H_s^i</p> <p>Construir la matriz P^{i+1} añadiendo la columna $H_j^i \sum_{l=1}^r \alpha_l$ a la matriz P^i</p> <p>Paso 4: Devolver Envoltura Paralelepípedo (H^{i+1}, P^{i+1})</p> <p>Fin del Algoritmo</p>

Tabla 2.2 Algoritmo recursivo para acotación paralelepípeda.

En el algoritmo, en la iteración i , H^i y P^i representan las matrices H y P de entrada al algoritmo. Por lo tanto $H^1 = H$ y $P^1 = P$. Como se ha comentado anteriormente, en cada iteración H^i pierde una columna, que es la que se añade a P . Después de n iteraciones, las columnas de H^{n+1} se anulan (H^{n+1} es matriz nula), terminando el algoritmo y devolviendo P^{n+1} . Las distintas operaciones que se han realizado en el algoritmo se describen a continuación:

- En el paso 1 del algoritmo se selecciona una columna j de la matriz H^i . Se elige la columna con el subíndice $j = 1, 2, \dots, r - (i - 1)$, según el siguiente criterio de minimización:

$$\min_{v_i, \alpha_l} \sum_{l=1}^{r-(i-1)} |\alpha_l| \quad (2.11)$$

$$v_i^T (H_l^i - \alpha_l H_j^i) = 0 \quad \text{con } l=1, \dots, r-(i-1)$$

donde $v_i \in \mathbb{R}^n$ es un vector y los α_l son escalares. Si denotamos $\alpha = \sum_{l=1}^{r-(i-1)} |\alpha_l|$, el criterio selecciona la columna o segmento que necesita un menor α (que es un factor de expansión) para cumplir la condición de ortogonalidad representada por la restricción de igualdad.

Notar que, dado un v_i concreto, la restricción de igualdad del problema de optimización se cumple si se toma

$$\alpha_l = \frac{|v_i^T H_l^i|}{|v_i^T H_j^i|}.$$

Por tanto, la minimización se reduce a:

$$\min_{v_i} \sum_{l=1}^{r-(i-1)} \frac{|v_i^T H_l^i|}{|v_i^T H_j^i|} \quad (2.12)$$

Y, puesto que el vector v_i^T está multiplicando y dividiendo en la expresión a minimizar, el problema de optimización definido con la expresión (2.11) es equivalente al siguiente:

$$\min_{v_i} \sum_{l=1}^{r-(i-1)} |v_i^T H_l^i| \quad (2.13)$$

$$v_i^T H_j^i = 1$$

Por lo tanto, en la iteración i del algoritmo es necesario resolver $(r-(i-1))$ problemas de programación lineal para la columna j a seleccionar.

Para simplificar y no tener que utilizar ningún método numérico para la resolución del problema, una alternativa consiste en resolver un problema aproximado que proporcione una solución subóptima (aunque analítica). Se trata de obtener la columna óptima sin tener que resolver problemas de programación lineal, simplemente evaluando expresiones. Para ello, supóngase que el problema de optimización (2.13) se sustituye por el siguiente aproximado:

$$\begin{aligned} \min_{v_i} \sum_{l=1}^{r-(i-1)} v_i^T H_l H_l^T v_i \\ v_i^T H_j = 1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

En dicha expresión, para facilitar su representación, se ha simplificado H_j^i como H_j .

Considerando $G = \sum_{l=1, l \neq j}^{r-(i-1)} H_l H_l^T$; como G es una matriz simétrica, mediante la descomposición en valores singulares es posible calcular las matrices U y Σ tales que Σ es invertible, $U^T U = I$ y $G = U \Sigma U^T$. De esta forma, realizando el cambio de variable $z = \Sigma^{1/2} U^T v_i$ en (2.14), se tiene el siguiente problema de optimización equivalente:

$$\begin{aligned} \min_z \sum_{l=1, l \neq j}^{r-(i-1)} z^T z \\ H_j^T U \Sigma^{-1/2} z = 1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

La conclusión obtenida es que el óptimo debe estar en la dirección $\Sigma^{-1/2} U^T H_j$. Por lo tanto, se sabe que $z = \beta_j \Sigma^{-1/2} U^T H_j$; y, utilizando la restricción del problema de optimización se obtiene el valor de β_j como $\beta_j = (H_j^T U \Sigma^{-1} U^T H_j)^{-1}$. Por último, el valor de la función $z^T z$ a minimizar en el mínimo es $\beta_j^2 (H_j^T U \Sigma^{-1} U^T H_j)$ que, simplificándola se reduce a β_j . Por lo tanto, se trata de seleccionar la columna j que dé el menor β_j . Con el cambio de variable, el vector v_i es: $v_i = U \Sigma^{-1} U^T H_j \beta^{-1}$.

- Una vez se ha calculado el vector v_i a partir de la columna H_j^i , seleccionada en el paso anterior, el paso 2 consiste en construir la matriz H^{i+1} mediante la expresión:

$$H^{i+1} = [H_1^i - \alpha_1 H_j^i \quad \cdots \quad H_{j-1}^i - \alpha_{j-1} H_j^i \quad H_{j+1}^i - \alpha_{j+1} H_j^i \quad H_{r-(i-1)}^i - \alpha_{r-(i-1)} H_j^i]$$

donde la columna H_j^i ha desaparecido.

- Por último se añade una columna a la matriz P^i , quedando como:

$$P^{i+1} = \left[P^i : H_j^i \sum_{l=1}^{r-(i-1)} |\alpha_l| \right]$$

Las matrices H^{i+1} y P^{i+1} son las entradas de la siguiente iteración.

Proposición 2.3 *Sea la matriz H^i la matriz de entrada al algoritmo definido en la Tabla 2.2, en la iteración i . Entonces se cumple que:*

$$H^i \mathbf{B}^{r-(i-1)} \subseteq \left[H^{i+1} \quad H_j^i \sum_{l=1}^{r-(i-1)} |\alpha_l| \right] \mathbf{B}^{r-(i-1)}$$

donde H_j^i es el segmento o columna de H^i seleccionado en la iteración i por el paso 1 del algoritmo. La matriz H^{i+1} y los escalares α_l son los que se han calculado en el paso 2 del mismo algoritmo, en la iteración i .

PRUEBA: No es más que una aplicación directa de la propiedad 2.2.

□

Proposición 2.4 *Sea la matriz H^i la matriz de entrada al algoritmo de la Tabla 2.2, en la iteración i . Entonces se cumple que cualquiera de sus columnas es ortogonal a todos los vectores v_1, \dots, v_{i-1} calculados por el algoritmo en iteraciones anteriores.*

PRUEBA: Por construcción se tiene que, considerando $j=1, \dots, i-1$, cada vector v_j es ortogonal a las columnas de la matriz H^{j+1} . De la misma forma, al considerar la iteración i del algoritmo, cualquier columna l de la matriz de entrada H^i , por construcción, es la suma de $2k$ columnas de la matriz H^{i-k} que constituyó la entrada del algoritmo en la iteración $i-k$ con $k=1, \dots, i-1$. Por lo tanto, todas las columnas de la matriz H^i son ortogonales a cada vector v_j calculado por el algoritmo en iteraciones anteriores.

□

Teorema 2.3 *Dado un zonotopo $H\mathbf{B}^r$, el paralelepípedo $P\mathbf{B}^n$ que devuelve el algoritmo de la Tabla 2.2 cumple la inclusión $H\mathbf{B}^r \subseteq P\mathbf{B}^n$.*

PRUEBA: Si se denota como H^i la matriz H de entrada en la iteración i del algoritmo definido en la Tabla 2.2, por la Proposición 2.3 se tiene que:

$$\begin{aligned} H\mathbf{B}^r &= H^1 \mathbf{B}^r \subseteq \left[H^2 \quad H_{j^1}^1 \sum_{l=1}^r |\alpha_l^1| \right] \mathbf{B}^r \subseteq \left[H^3 \quad H_{j^1}^1 \sum_{l=1}^r |\alpha_l^1| \quad H_{j^2}^2 \sum_{l=1}^{r-1} |\alpha_l^2| \right] \mathbf{B}^r \subseteq \\ &\subseteq \left[H^{n+1} \quad H_{j^1}^1 \sum_{l=1}^r |\alpha_l^1| \quad H_{j^2}^2 \sum_{l=1}^{r-1} |\alpha_l^2| \quad \dots \quad H_{j^n}^n \sum_{l=1}^{r-(n-1)} |\alpha_l^n| \right] \mathbf{B}^r \end{aligned}$$

donde H_j^i y α_l^i son el segmento o columna seleccionado y los escalares calculados en la iteración i por los pasos 1 y 2 del algoritmo. La matriz H^{n+1} es la que el algoritmo construye en el paso 3, en la iteración n . La matriz H^{n+1} es una matriz nula, ya que por la Proposición 2.4 sus columnas debieran ser ortogonales a n vectores linealmente independientes v_j con $j=1, \dots, n$. La matriz P que devuelve el algoritmo tras las n iteraciones es:

$$P = \left[H_{j^1}^1 \sum_{l=1}^r |\alpha_l^1| \quad H_{j^2}^2 \sum_{l=1}^{r-1} |\alpha_l^2| \quad \dots \quad H_{j^n}^n \sum_{l=1}^{r-(n-1)} |\alpha_l^n| \right] \mathbf{B}^r$$

□

Ejemplo 2.4 Sea el zonotopo $Z = p \oplus H\mathbf{B}^5$ con las matrices p y H siguientes:

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 0.0010 & -0.3245 & 0.5600 & 0.0034 & 1.1123 \\ 0.2000 & 0.1210 & -1.3241 & -0.0301 & -0.1240 \end{bmatrix}$$

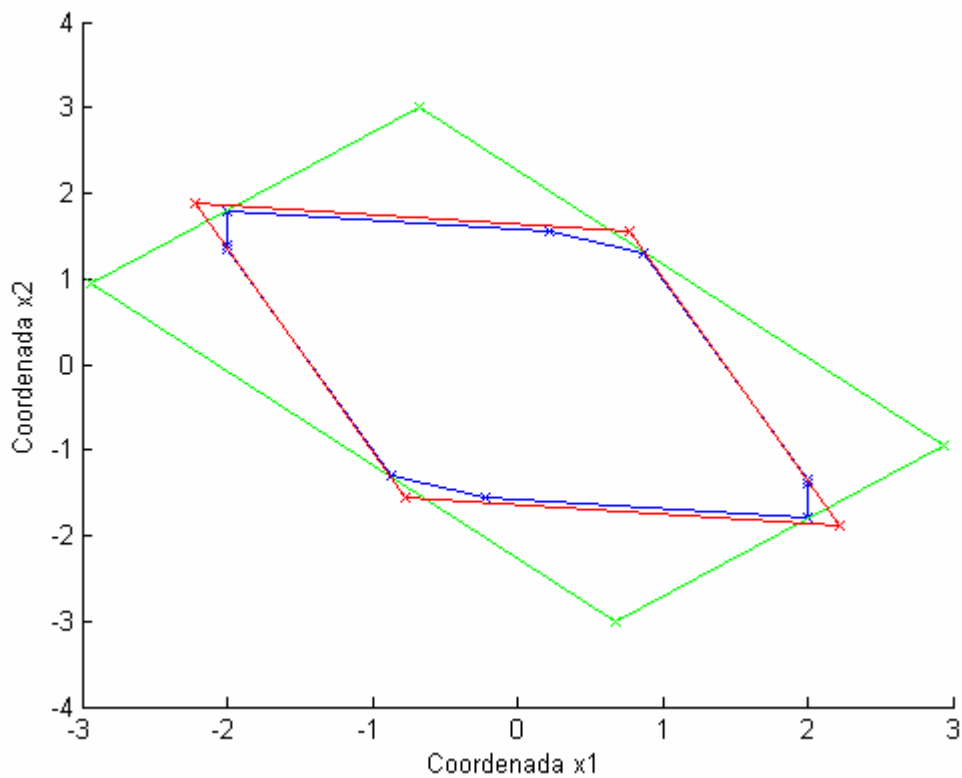


Figura 2.5 Acotación mediante algoritmo recursivo de la Tabla 2.2 y comparación con el correspondiente a la descomposición en valores singulares.

En la Figura 2.5 aparece el zonotopo (en color azul), el paralelepípedo obtenido mediante descomposición en valores singulares (en color verde) y el paralelepípedo obtenido mediante el algoritmo recursivo de la Tabla 2.2 (en color rojo). El volumen del paralelepípedo de la descomposición en valores singulares es 16.3640 y el del paralelepípedo obtenido con el algoritmo recursivo es 9.8034; se observa un mejor ajuste en el segundo.

2.4.3 Inclusión entre zonotosos centrados

En este apartado se proporciona una condición suficiente para probar que un zonotopo centrado está incluido en otro. Dados dos zonotosos centrados:

$$H\mathbf{B}^r = [H_1 \ H_2 \ \cdots \ H_r]\mathbf{B}^r \text{ y } P\mathbf{B}^m = [P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_r]\mathbf{B}^m$$

se presenta a continuación un método para demostrar que $H\mathbf{B}^r \subseteq P\mathbf{B}^m$.

En primer lugar, es necesario enunciar y demostrar algunas proposiciones para determinar el método que se propone en [39].

Proposición 2.5 *Sea un vector $P_1 \in \mathbb{R}^n$ y sean los zonotosos $H\mathbf{B}^r = [H_1 \ H_2 \ \cdots \ H_j \ \cdots \ H_r]\mathbf{B}^r$ y $H_s\mathbf{B}^{r+1} = [H_1 \ H_2 \ \cdots \ H_j - \alpha P_1 \ \cdots \ H_r | \alpha | P_1]\mathbf{B}^{r+1}$. Entonces, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que $H\mathbf{B}^r \subseteq H_s\mathbf{B}^{r+1}$.*

PRUEBA: Se tiene que $\forall x \in H\mathbf{B}^r$ existen $b_l \in \mathbf{B}$, con $l=1, \dots, r$ tales que $x = \sum_{l=1}^r H_l b_l$.

También se tiene que $\forall y \in H_s\mathbf{B}^{r+1}$ existen $b_l^* \in \mathbf{B}$, con $l=1, \dots, r$ y $b_{r+1}^* \in \mathbf{B}$ tales que

$$y = \sum_{l=1}^r H_l b_l^* + |\alpha| P_1 b_{r+1}^* - \alpha P_1 b_j^* . \text{ Si se tiene que } b_l^* = b_l \text{ y } b_{r+1}^* = \alpha (|\alpha|)^{-1} b_j^* , \text{ se cumple que:}$$

$b_l^*, b_{r+1}^* \in \mathbf{B}$ y $|\alpha| P_1 b_{r+1}^* - \alpha P_1 b_j^* = 0$ y, por tanto $\forall x \in H\mathbf{B}^r$ existe $y \in H_s\mathbf{B}^r$ tal que $x = y$.

□

La siguiente proposición no es más que una generalización de la anterior. Tiene como objetivo construir un zonotopo $P(\alpha)\mathbf{B}^m$ a partir de los zonotosos $H\mathbf{B}^r$ y $P\mathbf{B}^m$ tal que se cumpla: $H\mathbf{B}^r \subseteq P(\alpha)\mathbf{B}^m$.

Proposición 2.6 Sean los zonotopos HB^r y PB^m definidos anteriormente. Sean los vectores $L_i = \alpha_i^1 P_1 + \alpha_i^2 P_2 + \dots + \alpha_i^m P_m$ con $i = 1, \dots, r$, donde $\alpha_i^j \in \mathbb{R}$ con $j = 1, \dots, m$ son escalares. Sean los escalares $\alpha_j = \sum_{i=1}^r |\alpha_i^j|$ con $j = 1, \dots, m$. Sea el siguiente zonotopo:

$$H_s \mathbf{B}^{r+m} = [H_1 - L_1 \quad H_2 - L_2 \quad \dots \quad H_r - L_r \quad \alpha_1 P_1 \quad \alpha_2 P_2 \quad \dots \quad \alpha_m P_m] \mathbf{B}^{r+m}$$

entonces se cumple que $HB^r \subseteq H_s \mathbf{B}^{r+m}$

PRUEBA: Se basa en la utilización reiterada de la Proposición 2.5.

□

A continuación se enuncia el teorema que proporciona una condición suficiente para demostrar la inclusión. Está basado en un problema de optimización convexo; si el problema de optimización es factible (tiene solución) entonces se cumple que $HB^r \subseteq PB^m$.

Teorema 2.4 Sean los zonotopos HB^r y PB^m definidos anteriormente. Sean los vectores $L_i = \alpha_i^1 P_1 + \alpha_i^2 P_2 + \dots + \alpha_i^m P_m$ con $i = 1, \dots, r$, donde $\alpha_i^j \in \mathbb{R}$ con $j = 1, \dots, m$ son escalares. La inclusión $HB^r \subseteq PB^m$ se cumple si existen escalares α_i^j tales que: $H_i - L_i = 0$ para $i = 1, \dots, r$, $\sum_{i=1}^r |\alpha_i^j| \leq 1$ con $j = 1, \dots, m$.

PRUEBA: Efectivamente, si es posible encontrar ciertos $\alpha_i^j \in \mathbb{R}$ tales que $H_i - L_i = 0$ con $j = 1, \dots, m$ e $i = 1, \dots, r$, entonces se tiene que:

$$H_s \mathbf{B}^{r+m} = P(\alpha) \mathbf{B}^m = [\alpha_1 P_1 \quad \alpha_2 P_2 \quad \dots \quad \alpha_m P_m] \mathbf{B}^m$$

Está claro que si $0 \leq \alpha_j \leq 1$, entonces, por la propiedad 2.6 se tiene que $HB^r \subseteq H_s \mathbf{B}^{r+m} = P(\alpha) \mathbf{B}^m \subseteq PB^m$; cumpliéndose por tanto la inclusión.

□

Ejemplo 2.5 Sean los zonotopos $Z_1 = PB^3$ y $Z_2 = HB^5$, y definidas las matrices P y H como:

$$P = \begin{bmatrix} -0.1111 & 0.6230 & -1.5233 \\ 0.4500 & -0.5312 & 0.3222 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.1540 & -0.2009 & 0.0200 & 0.0421 & 0.7912 \\ 0.0112 & 0.0212 & -0.3210 & 0.0120 & -0.4100 \end{bmatrix}$$

En la Figura 2.6 aparecen representados los dos zonotosos, Z_1 en color azul, Z_2 en color verde. También aparece representado un zonotopo $P(\alpha)\mathbf{B}^3$ (en color rojo) con segmentos más pequeños o iguales a los del zonotopo $Z_1 = P\mathbf{B}^3$; concluyéndose por tanto que $Z_2 \subseteq Z_1$.

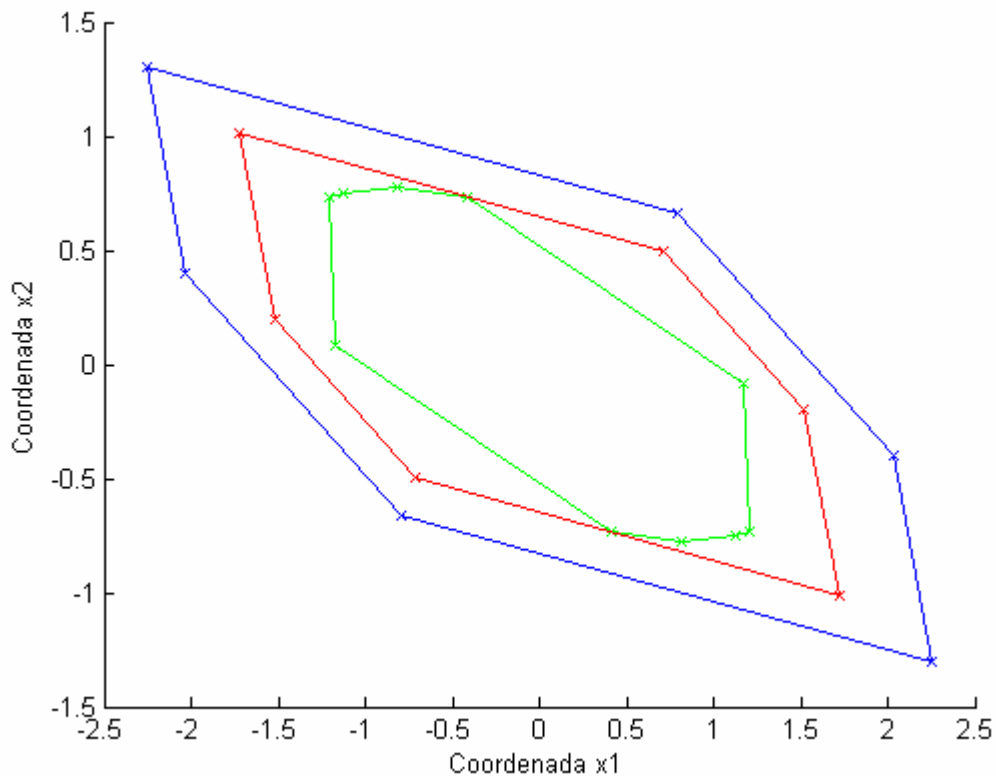


Figura 2.6 Inclusión entre zonotosos.

A continuación se trata la inclusión de la unión de varios zonotosos centrados. Dado un conjunto de zonotosos centrados Z_k , $k=1,\dots,s$ y sea un zonotopo centrado $P(\alpha) = [|\alpha_1|P_1 \quad |\alpha_2|P_2 \quad \dots \quad |\alpha_l|P_l]\mathbf{B}^l$; se trata de calcular los escalares α_j con cierto criterio óptimo y de forma que se cumpla la inclusión $\bigcup_{k=1}^s Z_k \subseteq P(\alpha)$. La inclusión se cumplirá si el problema de optimización convexa propuesto a continuación tiene solución.

Teorema 2.5 *Dados un conjunto de zonotosos centrados Z_k , $k=1,\dots,s$ y sea el zonotopo centrado $P(\alpha)$. Sea r_k el número de segmentos o columnas que componen la matriz del zonotopo Z_k . Sea H_i^k la columna o segmento i de la matriz del zonotopo Z_k . Sean los*

vectores $L_i^k = \sum_{j=1}^l \alpha_j^{H_i^k} P_j$, $j=1, \dots, s$, $i=1, \dots, r_k$, donde los escalares $\alpha_j^{H_i^k}$ son variables de decisión del problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_j, \alpha_j^{H_i^k}} \sum_{j=1}^l \alpha_j \\ \alpha_j \geq \sum_{i=1}^{r_k} |\alpha_j^{H_i^k}| \quad \text{con } j=1, \dots, l \\ H_i^k - L_i^k = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Si $\alpha^* = \{\alpha_j^*, j=1, \dots, l\}$ es la solución obtenida del problema de optimización, entonces se cumple que: $\bigcup_{k=1}^s Z_k \subseteq P(\alpha^*)$.

PRUEBA: Es básicamente igual a la del Teorema 2.4.

□

Al haberse minimizado respecto de α^* , el problema de optimización devuelve un zonotopo $P(\alpha^*)$, que acota la unión $\bigcup_{k=1}^s Z_k$ y se tienen segmentos generadores de tamaño mínimo. Por tanto, se ha obtenido un zonotopo de tamaño mínimo respecto de sus segmentos, que acota la familia de zonotopos.

2.4.4 Intersección de dos zonotopos

En este apartado se define una expresión $\widehat{\chi}(\lambda)$ que parametriza la intersección de dos zonotopos. Dicha intersección no va a ser más que una familia de zonotopos que depende de un parámetro λ . Asimismo se minimiza el tamaño del zonotopo intersección $\widehat{\chi}(\lambda)$.

Proposición 2.7 Sean dos zonotopos $\chi_1 = p_1 \oplus H_1 \mathbf{B}^{\eta_1} \subset \mathbb{R}^n$ y $\chi_2 = p_2 \oplus H_2 \mathbf{B}^{\eta_2} \subset \mathbb{R}^n$ y la matriz λ ($n \times n$), si se define:

- $\widehat{p}(\lambda) = \lambda p_1 + (I - \lambda) p_2$
- $\widehat{H}(\lambda) = [\lambda H_1 \quad (I - \lambda) H_2]$

Entonces, $\chi_1 \cap \chi_2 \subseteq \widehat{\chi}(\lambda) = \widehat{p}(\lambda) + \widehat{H}(\lambda) \mathbf{B}^{\eta_1 + \eta_2}$

PRUEBA: Supongamos que $x \in \chi_1 \cap \chi_2$, entonces $\exists z_1 \in \mathbf{B}^{n_1}, z_2 \in \mathbf{B}^{n_2}$ tal que:

$$x = p_1 + H_1 z_1 \quad (2.17)$$

$$x = p_2 + H_2 z_2 \quad (2.18)$$

Sumando y restando λ a x se obtiene:

$$x = \lambda x + (I - \lambda)x \quad (2.19)$$

Que, sustituyendo (2.17) y (2.18) en (2.19) se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= \lambda(p_1 + H_1 z_1) + (I - \lambda)(p_2 + H_2 z_2) = \lambda p_1 + (I - \lambda)p_2 + \lambda H_1 z_1 + (I - \lambda)H_2 z_2 = \\ &= \lambda p_1 + (I - \lambda)p_2 + \begin{bmatrix} \lambda H_1 & (I - \lambda)H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \widehat{p}(\lambda) + \widehat{H}(\lambda) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \widehat{\chi}(\lambda) \end{aligned}$$

□

Se ha demostrado que el zonotopo paramétrico $\widehat{\chi}(\lambda)$ acota la intersección; y, a continuación se encuentra el parámetro óptimo λ^* que proporciona el zonotopo mínimo para esa intersección.

Para minimizar el tamaño $\widehat{\chi}(\lambda)$ se elige la opción consistente en la minimización de los segmentos que lo forman. Dicho problema puede formularse como un problema de optimización convexa; pudiéndose resolver de forma eficiente.

Si H_{1i} y H_{2j} , $i = 1, \dots, m_1$, $j = 1, \dots, m_2$ representan las columnas de las matrices H_1 y H_2 , la función a minimizar es:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \sum_{i=1}^{m_1} (\lambda H_{1i})^T (\lambda H_{1i}) + \sum_{j=1}^{m_2} (H_{2j} - \lambda H_{2j})^T (H_{2j} - \lambda H_{2j}) = \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} H_{1i}^T \lambda^T \lambda H_{1i} + \sum_{j=1}^{m_2} H_{2j}^T H_{2j} - H_{2j}^T \lambda H_{2j} - H_{2j}^T \lambda^T H_{2j} + H_{2j}^T \lambda^T \lambda H_{2j} \end{aligned}$$

La función puede obtenerse mediante la resolución de un problema de optimización cuadrática. También, otra alternativa consiste en obtener el gradiente respecto de λ , igualarlo a cero y despejar λ .

Ejemplo 2.6 Sean los zonotopos $Z_1 = p_1 \oplus H_1 \mathbf{B}^m$ y $Z_2 = p_2 \oplus H_2 \mathbf{B}^n$ definidos de la siguiente forma:

$$p_1 = p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; H_1 = \begin{bmatrix} 0.1540 & -0.3009 & 0.3400 \\ 0.0012 & 0.1212 & -0.3210 \end{bmatrix}; H_2 = \begin{bmatrix} 0.0111 & 0.2230 & -0.1233 \\ 0.1500 & -0.2312 & 0.2222 \end{bmatrix}.$$

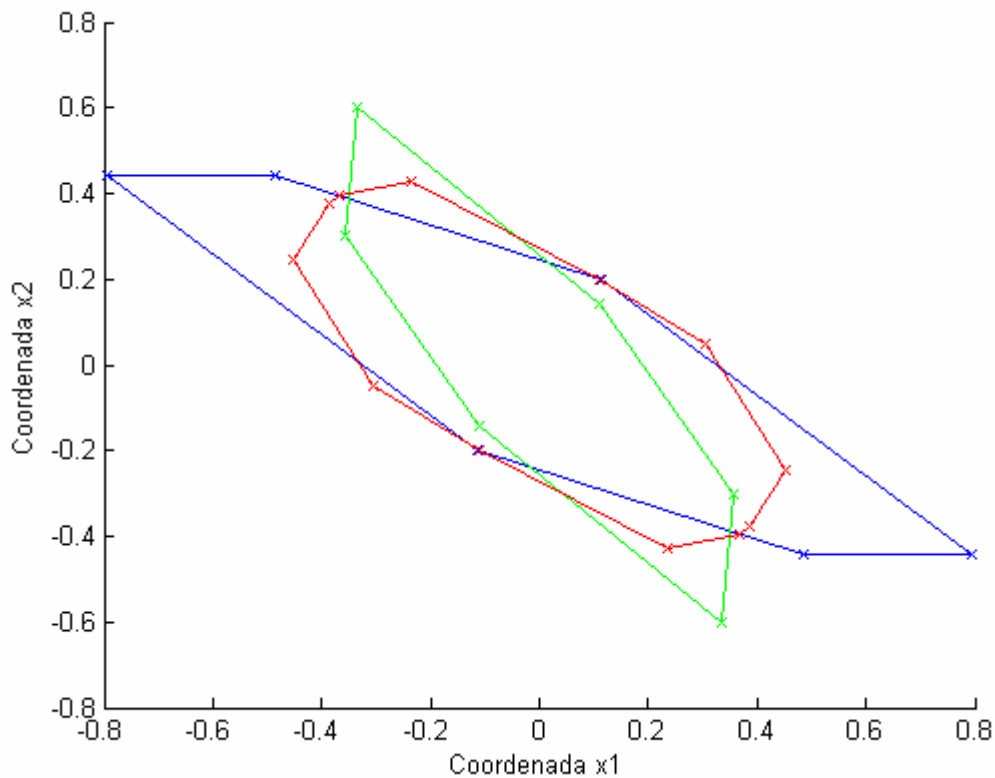


Figura 2.7 Intersección de zonotopos.

El zonotopo intersección óptimo viene definido por:

$$P_{IN} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; H_{IN} = \begin{bmatrix} 0.0339 & -0.0662 & 0.0748 & 0.0087 & 0.1739 & -0.0962 \\ 0.0658 & -0.0173 & -0.1461 & 0.0103 & -0.1168 & 0.0740 \end{bmatrix}. \text{ En este caso, el}$$

valor de la matriz λ óptima que se ha obtenido es $\lambda^* = \begin{bmatrix} 0.2200 & 0 \\ 0.4200 & 0.9000 \end{bmatrix}$, que da como valor

mínimo para la función $f(\lambda)$: $f(\lambda^*) = 0.0959$.

En la Figura 2.7 se representan los zonotopos Z_1 (en color azul), Z_2 (en color verde) y $Z_{IN} = P_{IN} \oplus H_{IN}$ (en color rojo).

2.4.5 Intersección de un zonotopo con una franja

Con la siguiente proposición se proporciona una expresión $\hat{\chi}(\lambda)$ que parametriza la intersección de un zonotopo con una franja. Dicha intersección representa a una familia de

zonotopos que es función de un parámetro λ . La técnica propuesta se utiliza en los métodos de identificación paramétrica y estimación de estados tratados en esta tesis.

Proposición 2.8 *Dado el zonotopo $\chi = p \oplus H\mathbf{B}^r \subset \mathbb{R}^n$, la franja normalizada*

$S = \{x \in \mathbb{R}^n : |c^T x - d| \leq 1\}$ *y el vector λ , se define:*

- $\hat{p}(\lambda) = p + \lambda(d - c^T p)$
- $\hat{H}(\lambda) = \begin{bmatrix} (I - \lambda c^T)H & \lambda \end{bmatrix}$

Entonces: $\chi \cap S \subseteq \hat{\chi}(\lambda) = \hat{p}(\lambda) \oplus \hat{H}(\lambda)\mathbf{B}^{r+1}$

PRUEBA: Supongamos que $x \in \chi \cap S$. Entonces $x \in \chi = p \oplus H\mathbf{B}^r$; implicando que existe un $z \in \mathbf{B}^r$ tal que:

$$x = p + Hz \tag{2.20}$$

Sumando y restando $\lambda c^T Hz$ a la anterior igualdad se tiene:

$$x = p + \lambda c^T Hz + (I - \lambda c^T)Hz \tag{2.21}$$

Como $x \in \chi \cap S$, $x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : |c^T x - d| \leq 1\}$. Por lo tanto, existe $b \in [-1, 1] = \mathbf{B}^1$ tal que $c^T x - d = b$. Teniendo en cuenta la ecuación (2.20) resulta que:

$$c^T (p + Hz) - d = b \Rightarrow c^T Hz = d - c^T p + b$$

que sustituyéndola en la ecuación (2.21), se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= p + \lambda(d - c^T p + b) + (I - \lambda c^T)Hz = p + \lambda(d - c^T p) + \lambda b + (I - \lambda c^T)Hz = \\ &= \hat{p}(\lambda) + \begin{bmatrix} (I - \lambda c^T)H & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ b \end{bmatrix} = \hat{p}(\lambda) + \hat{H}(\lambda) \begin{bmatrix} z \\ b \end{bmatrix} \in \hat{\chi}(\lambda) \end{aligned}$$

□

El zonotopo paramétrico $\hat{\chi}(\lambda)$ acota la intersección, pero nos interesa normalmente encontrar un parámetro óptimo λ^* que proporcione un zonotopo de tamaño mínimo. Existen varias métodos para seleccionar ese λ^* , se proponen tres de ellos:

- Encontrar el λ^* que minimiza la norma Frobenius del zonotopo intersección. En este caso, se está minimizando la longitud de los segmentos del zonotopo intersección.

- Obtención del λ^* que minimice el volumen del zonotopo intersección.
- Seleccionar un λ^* que disminuya el tamaño del zonotopo sin aumentar su orden o complejidad.

MINIMIZACIÓN DE LA NORMA FROBENIUS:

Se trata de calcular λ^* de tal forma que se minimicen los segmentos que componen $\widehat{\chi}(\lambda)$. Si se tiene en cuenta que los segmentos de $\widehat{\chi}(\lambda) = \widehat{p}(\lambda) \oplus \widehat{H}(\lambda)\mathbf{B}^{r+1}$ están representados por las columnas de la matriz $\widehat{H}(\lambda)$, una medida del tamaño de $\widehat{\chi}(\lambda)$ es la norma Frobenius de $\widehat{H}(\lambda)$.

La norma Frobenius de una matriz es la raíz cuadrada de la traza de la matriz ($tr(\cdot)$) resultante de multiplicar la traspuesta de la matriz inicial por la misma matriz inicial. Se trata de obtener λ^* que minimice la norma Frobenius de la matriz $\widehat{H}(\lambda)$.

La matriz $\widehat{H}(\lambda) = \begin{bmatrix} (I - \lambda c^T)H & \lambda \end{bmatrix}$ puede reescribirse como: $\widehat{H}(\lambda) = A + \lambda b^T$, donde $A = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix}$ y $b^T = \begin{bmatrix} -c^T H & 1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \|\widehat{H}(\lambda)\|_F^2 &= \|A + \lambda b^T\|_F^2 = tr(A^T + b\lambda^T)(A + \lambda b^T) = \\ &= tr(A^T A) + tr(b\lambda^T A) + tr(A^T \lambda b^T) + tr(b\lambda^T \lambda b^T) = \\ &= 2\lambda^T A b + (b^T b)\lambda^T \lambda + tr(A^T A) \end{aligned}$$

Habiéndose utilizado en la última expresión, la igualdad: $tr(XY) = tr(YX)$. Para obtener el mínimo no hay más que igualar a cero el gradiente respecto de λ . Concluyéndose por tanto que

$$\text{el mínimo de } \|\widehat{H}(\lambda)\|_F \text{ se alcanza para: } \lambda^* = \frac{-Ab}{b^T b} = \frac{HH^T c}{c^T HH^T c + 1}.$$

Ejemplo 2.7 Sean el zonotopo $Z_1 = p_1 \oplus H_1 \mathbf{B}^m$ y la franja $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |c^T x - d| \leq \sigma\}$ definidos tal como sigue:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0.2230 & 0.0987 & -0.1020 \\ -0.9425 & 0.2432 & 0.8020 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad d = 0.1; \quad \sigma = 1$$

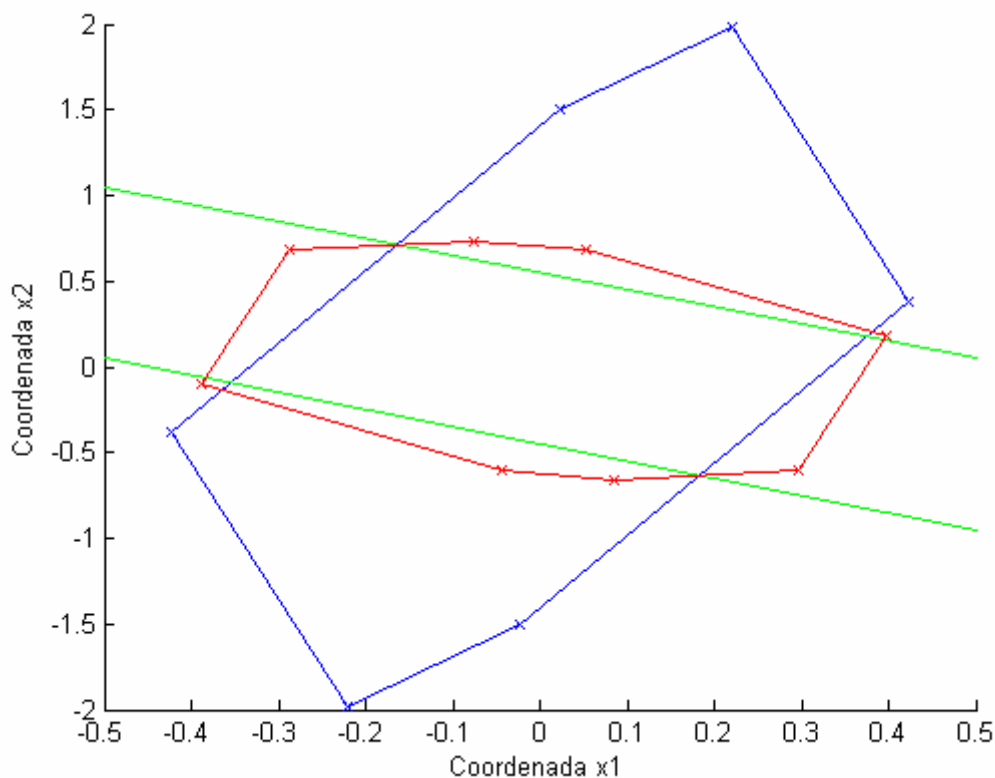


Figura 2.8 Intersección de franja y zonotopo (minimización de la intersección según norma Frobenius).

El zonotopo intersección obtenido $Z_{IN}^{N.Frob} = Z_1 \cap S$, minimizado según la norma Frobenius viene dado por:

$$P_{IN}^{N.Frob} = \begin{bmatrix} 0.0050 \\ 0.0393 \end{bmatrix}; \quad Z_{IN}^{N.Frob} = \begin{bmatrix} -0.1061 & 0.0644 & -0.1722 & 0.0502 \\ -0.0255 & -0.0258 & 0.2512 & 0.3934 \end{bmatrix}$$

que corresponde al valor $\lambda^{*N.Frob} = \begin{bmatrix} 0.0502 \\ 0.3934 \end{bmatrix}$

En la Figura 2.8 se representan el zonotopo Z_1 en color azul, la franja S en color verde y el zonotopo intersección minimizado según la norma Frobenius en color rojo.

MINIMIZACIÓN DEL VOLUMEN DEL ZONOTOPO INTERSECCIÓN:

Supongamos que el objetivo es minimizar el volumen de $\hat{\chi}(\lambda)$. Se debe elegir λ de tal forma que el volumen del zonotopo $\hat{\chi}(\lambda) = \hat{p}(\lambda) \oplus \hat{H}(\lambda) \mathbf{B}^{r+1}$ sea mínimo. Es decir, se desea

minimizar: $Vol(\widehat{p}(\lambda) \oplus \widehat{H}(\lambda) \mathbf{B}^{r+1})$. El volumen de un zonotopo en la dimensión n con m columnas viene dado por ([185], [145]):

$$Vol(a \oplus D\mathbf{B}^m) = \sum_{i=1}^{N(n,m)} 2^n \left| \det \begin{bmatrix} D_{s_1(i)} & D_{s_2(i)} & \cdots & D_{s_n(i)} \end{bmatrix} \right| \quad (2.22)$$

donde $N(n,m)$ representa las diferentes formas de elegir n elementos de un conjunto de m elementos. D_i representa la i -ésima columna de la matriz D . Los valores enteros $s_j(i)$, $j=1, \dots, n, i=1, \dots, N(n,m)$ representan cada una de las diferentes formas de elegir n elementos de un conjunto de m elementos. Estos números enteros cumplen:

$$1 \leq s_1(i) < s_2(i) < \cdots < s_n(i) \leq m$$

Además, si $i \neq j$ entonces se cumple:

$$[s_1(i) \quad \cdots \quad s_n(i)] = [s_1(j) \quad \cdots \quad s_n(j)]$$

Teorema 2.6 Sea el zonotopo paramétrico:

$$\widehat{\chi}(\lambda) = \widehat{p}(\lambda) \oplus \widehat{H}(\lambda) \mathbf{B}^{r+1} = p + \lambda(d - c^T p) + \left[(I - \lambda c^T) H \quad \lambda \right] \text{ definido en la Propiedad 2.8.}$$

El volumen de $\widehat{\chi}(\lambda)$ viene dado por la expresión:

$$Vol(\widehat{p}(\lambda) \oplus \widehat{H}(\lambda) \mathbf{B}^{r+1}) = \sum_{i=1}^{N(n,r)} 2^n |1 - c^T \lambda| |\det(A_i)| + \sum_{i=1}^{N(n-1,r)} 2^n |\det[B_i \quad v_i]| |v_i^T \lambda|$$

donde $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa cada una de las diferentes matrices que pueden ser obtenidas eligiendo n columnas de la matriz H ; $B_i \in \mathbb{R}^{n \times n-1}$ representa cada una de las diferentes matrices que pueden ser obtenidas eligiendo $n-1$ columnas de H . Y, el vector v_i representa a un vector ortonormal a $Imag(B_i)$ (subespacio generado por B_i).

PRUEBA: Puesto que $\widehat{H}(\lambda) = \left[(I - \lambda c^T) H \quad \lambda \right]$, la expresión correspondiente al volumen $\widehat{\chi}(\lambda)$ es:

$$Vol(\widehat{p}(\lambda) \oplus \widehat{H}(\lambda) \mathbf{B}^{r+1}) = \sum_{i=1}^{N(n,r)} 2^n \left| \det \left[(I - \lambda c^T) A_i \right] \right| + \sum_{i=1}^{N(n-1,r)} 2^n \left| \det \left[(I - \lambda c^T) B_i \quad \lambda \right] \right|$$

Por lo tanto, probaremos el teorema si se prueban las siguientes igualdades:

- $\det\left[(I - \lambda c^T)A_i\right] = (1 - c^T \lambda) \det(A_i)$
- $\det\left[(I - \lambda c^T)B_i \quad \lambda\right] = \det\left[B_i \quad v_i\right] v_i^T \lambda$

Las propiedades de los determinantes de una matriz que van a aplicarse en esta demostración son:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

$$\text{Dados los vectores } a, b \in \mathbb{R}^n, \text{ entonces: } \det(I + ab^T) = 1 + b^T a$$

Por lo tanto, aplicando esas propiedades a los términos expuestos en las dos igualdades se tiene:

- Términos de la forma: $\det\left[(I - \lambda c^T)A_i\right]$:

$$\text{En este caso, } \det\left[(I - \lambda c^T)A_i\right] = \det(I - \lambda c^T) \det(A_i) = (1 - c^T \lambda) \det(A_i)$$

- Términos de la forma $\det\left[(I - \lambda c^T)B_i \quad \lambda\right]$:

Para este caso hay que tener en cuenta que $B_i - \lambda c^T B_i$ se obtiene restando de cada columna de B_i la última columna de $\left[(I - \lambda c^T)B_i \quad \lambda\right]$ multiplicada por un escalar.

Como el determinante de una matriz no cambia si a una columna se le suma o resta otra:

$$\det\left[(I - \lambda c^T)B_i \quad \lambda\right] = \det\left[B_i \quad \lambda\right]$$

Dado que B_i tiene $n-1$ columnas, existe un vector v_i tal que $v_i^T v_i = 1$ y $v_i^T B_i = 0$. Por lo que v_i es ortonormal a $\text{Imag}(B_i)$. Pueden distinguirse dos casos: $\text{rango}\{B_i\} < n-1$ y $\text{rango}\{B_i\} = n-1$. Si $\text{rango}\{B_i\} < n-1$, entonces: $\det[B_i \quad z] = 0, \forall z \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $\det[B_i \quad \lambda] = \det[B_i \quad v_i] \lambda = 0$. A partir de aquí se supone que $\text{rango}\{B_i\} = n-1$ siendo $\Phi_i = [B_i \quad v_i]$ no singular. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \det[B_i \quad \lambda] &= \det[B_i \quad (v_i - v_i + \lambda)] = \det(\Phi_i + (\lambda - v_i)[0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]) = \\ &= \det(\Phi_i) \det(I + \Phi_i^{-1}(\lambda - v_i)[0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]) = \det(\Phi_i) (1 + [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \Phi_i^{-1} (\lambda - v_i)) \end{aligned}$$

que, si se tiene en cuenta que $[0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \Phi_i^{-1} = v_i^T$:

$$\det(\Phi_i)(1 + v_i^T(\lambda - v_i)) = \det(\Phi_i)(1 + v_i^T\lambda - 1) = \det(\Phi_i)(v_i^T\lambda)$$

$$\text{Por lo tanto, se concluye que: } \det\left[\begin{matrix} (I - \lambda c^T)B_i & \lambda \end{matrix}\right] = \det\left[\begin{matrix} B_i & v_i \end{matrix}\right]v_i^T\lambda.$$

□

Hay que resaltar que $\text{Vol}(\widehat{p}(\lambda) \oplus \widehat{H}(\lambda)\mathbf{B}^{r+1})$ es una función convexa de λ . Por lo tanto, obtener el vector λ que minimiza el volumen del zonotopo es un problema convexo, pudiéndose por tanto utilizar algoritmos especializados en la resolución de este tipo de problemas.

Ejemplo 2.8 Considérese el zonotopo $Z_1 = p_1 \oplus H_1\mathbf{B}^m$ y la franja $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |c^T x - d| \leq \sigma\}$ definidos de la siguiente forma:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad H_1 = \begin{bmatrix} -0.2230 & 0.0987 & -0.0020 \\ -0.9425 & 0.0432 & 0.3020 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 3.5 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad d = 0.1; \quad \sigma = 1$$

El zonotopo intersección obtenido $Z_{IN}^{N.Frob} = Z_1 \cap S$, minimizado según la norma Frobenius viene dado por:

$$p_{IN}^{N.Frob} = \begin{bmatrix} -0.0083 \\ -0.0456 \end{bmatrix}; \quad H_{IN}^{N.Frob} = \begin{bmatrix} -0.1319 & 0.1201 & -0.0524 & -0.0825 \\ -0.4383 & 0.1614 & 0.0231 & -0.4565 \end{bmatrix}$$

$$\text{que corresponde al valor } \lambda^{*N.Frob} = \begin{bmatrix} -0.0825 \\ -0.4565 \end{bmatrix}$$

El zonotopo intersección obtenido $Z_{IN}^{Vol} = Z_1 \cap S$, minimizado según el volumen del zonotopo intersección viene dado por:

$$p_{IN}^{Vol} = \begin{bmatrix} -0.0201 \\ -0.0851 \end{bmatrix}; \quad H_{IN}^{Vol} = \begin{bmatrix} -0.0010 & 0.1508 & -0.1248 & -0.2010 \\ -0.0026 & 0.2637 & -0.2180 & -0.8510 \end{bmatrix}$$

$$\text{que corresponde al valor } \lambda^{*Vol} = \begin{bmatrix} -0.2010 \\ -0.8510 \end{bmatrix}.$$

Los volúmenes correspondientes a los zonotopos $Z_{IN}^{N.Frob} = Z_1 \cap S$ y $Z_{IN}^{Vol} = Z_1 \cap S$ son respectivamente: $\text{Vol}(Z_{IN}^{N.Frob}) = 0.6398$ y $\text{Vol}(Z_{IN}^{Vol}) = 0.5533$.

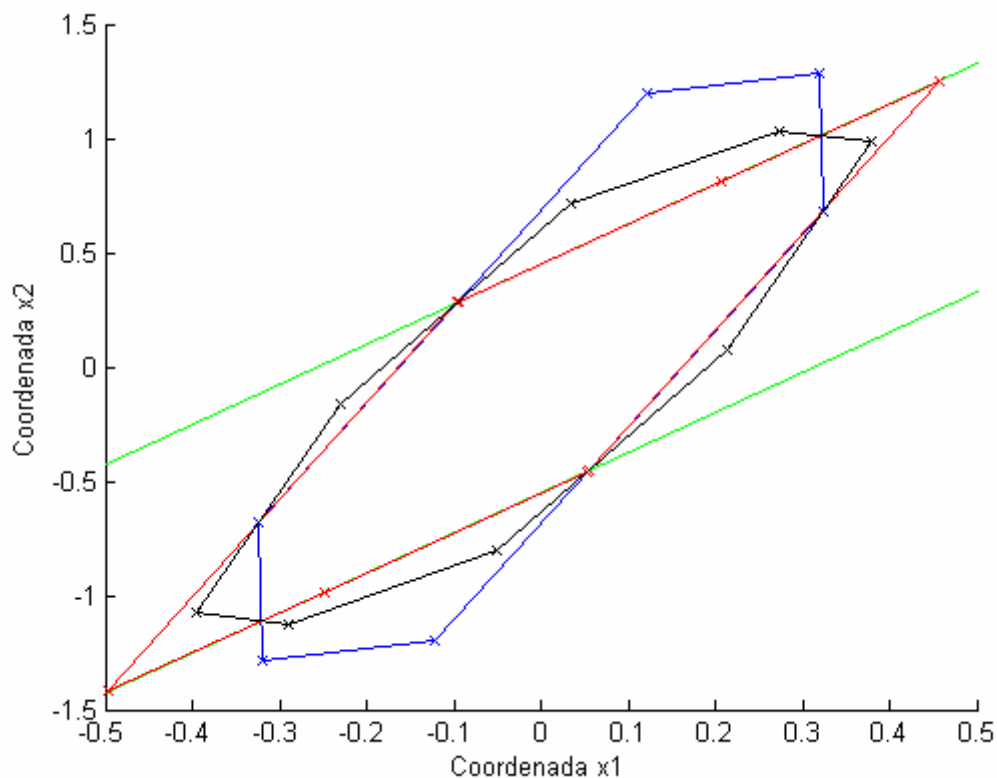


Figura 2.9 Intersección de zonotopo con franja. El zonotopo de color rojo muestra el zonotopo intersección según criterio de minimización de volumen y, el zonotopo de color negro lo muestra según el criterio de minimización de su norma Frobenius.

En la Figura 2.9 se representan el zonotopo Z_1 en color azul, la franja S en color verde, el zonotopo intersección según minimización de la norma Frobenius en color negro y, el zonotopo intersección según minimización de volumen, en color rojo. Se observa una mejora significativa en el zonotopo Z_{IN}^{Vol} con respecto al zonotopo $Z_{IN}^{N.Frob}$; más arriba se muestran los valores de ambos zonotopos.

MINIMIZACIÓN DEL ZONOTOPO INTERSECCIÓN POR ELIMINACIÓN DEL SEGMENTO ÓPTIMO:

Este método consiste en seleccionar un λ que elimine uno de los segmentos columna del zonotopo intersección; este segmento se le denomina *segmento óptimo*. Este método obtiene una solución que no incrementa el orden de complejidad del zonotopo intersección con respecto al zonotopo inicial. La siguiente propiedad caracteriza este λ .

Proposición 2.9 Sea el zonotopo paramétrico $\widehat{\chi}(\lambda) = \widehat{p}(\lambda) \oplus \widehat{H}(\lambda) \mathbf{B}^{r+1}$ con $\widehat{H}(\lambda) = \left[(I - \lambda c^T) H \quad \lambda \right]$. Sea la columna j -ésima H_j de la matriz H y supóngase que $c^T H_j \neq 0$. Entonces la columna j -ésima de $\widehat{H}(\lambda)$ se anula si $\lambda = H_j (c^T H_j)^{-1}$.

PRUEBA: Efectivamente, $(I - \lambda c^T) H_j = \left(I - H_j (c^T H_j)^{-1} c^T \right) H_j = H_j - H_j = 0$.

□

Hay que hacer notar que la nueva columna que aparece es $\lambda = H_j (c^T H_j)^{-1}$ y que el resto de columnas son ortogonales a c^T (ya que $c^T \left(\left(I - H_j (c^T H_j)^{-1} c^T \right) H_i \right) = (c^T - c^T) H_i = 0$).

La matriz del zonotopo que resulta al eliminar la columna H_j viene dada por:

$$\left[H_1 - \beta_1 H_j \quad H_2 - \beta_2 H_j \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad H_r - \beta_r H_j \quad H_j (c^T H_j)^{-1} \right] \quad (2.23)$$

siendo la columna j -ésima nula y $\beta_i = c^T H_i (c^T H_j)^{-1}$. En la expresión (2.22) se muestra que el volumen de un zonotopo es un sumatorio de determinantes de matrices. Cada matriz se compone de n de las r columnas de la matriz del zonotopo inicial. Salvo la última columna de (2.23), las restantes son ortogonales al vector c^T . Por lo tanto, el determinante de la matriz formada por n de estas columnas es siempre nulo. Teniendo en cuenta que: “si a una columna de una matriz se le suma o resta otra columna, su determinante no varía”, el volumen del zonotopo paramétrico $\widehat{\chi}(\lambda)$ con $\lambda = H_j (c^T H_j)^{-1}$ es por tanto:

$$\text{Vol}(\chi(\lambda)) = \sum_{i=1}^{N(n-1, r-1)} 2^n \left| \det \left[D_{s_1(i)} \quad D_{s_2(i)} \quad \cdots \quad D_{s_{n-1}(i)} \quad H_j (c^T H_j)^{-1} \right] \right|$$

donde $N(n-1, r-1)$ representa el número de diferentes formas de elegir $n-1$ elementos de un conjunto de $r-1$; D_i representa la columna i de la matriz \widetilde{H} , siendo \widetilde{H} la matriz H con la columna j eliminada. Los números enteros $s_j(i)$, $j=1, \dots, n-1$, $i=1, \dots, N(n-1, r-1)$ representan cada una de las diferentes formas de elegir $n-1$ elementos de un conjunto de $r-1$.

Por lo tanto, se tiene que:

$$\text{Vol}(\chi(\lambda)) = \zeta_j \left| (c^T H_j)^{-1} \right| \quad (2.24)$$

$$\text{donde } \zeta_j = \sum_{i=1}^{N(n-1,r-1)} 2^n \left| \det \begin{bmatrix} D_{s_1(i)} & D_{s_2(i)} & \cdots & D_{s_{n-1}(i)} & H_j \end{bmatrix} \right|$$

Está claro que el valor ζ_j es menor o igual al volumen del zonotopo inicial χ . Se pueden establecer distintos criterios para realizar la selección de la columna a eliminar. Distintas posibilidades son:

- Seleccionar la columna que proporcione el zonotopo de menor volumen. Los volúmenes se pueden obtener de forma exacta calculando los términos ζ_j . Este método puede ser muy costoso cuando el zonotopo tiene dimensión y orden grandes. Para estos casos, se puede obtener una estimación de los volúmenes por métodos estocásticos, calculando la esperanza del volumen.
- Utilizar el término $|c^T H_j|$ como estimador del volumen. Se toma la columna j que proporcione el mayor valor $|c^T H_j|$. Si dicho valor es mayor que la unidad, se tiene la seguridad de que el volumen disminuye; en caso de ser menor, estaríamos ante una medida heurística (se ha de tener en cuenta que, aunque dicho estimador sea menor que la unidad, el volumen del zonotopo intersección puede decrementarse puesto que muchos determinantes de la expresión del volumen se han anulado).
- Seleccionar aquella columna que proporcione el paralelepípedo de menor volumen que acote exteriormente al zonotopo. Por cada columna habría que calcular el paralelepípedo y su correspondiente volumen. En este tema han sido desarrollados dos métodos para calcular el paralelepípedo exterior, uno mediante una descomposición en valores singulares y el otro mediante un algoritmo recursivo.

Ejemplo 2.9 Considérese el zonotopo $Z_1 = p_1 \oplus H_1 \mathbf{B}^m$ y la franja $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |c^T x - d| \leq \sigma\}$ definidos de la siguiente forma:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad H_1 = \begin{bmatrix} -0.2230 & 0.0987 & -0.0020 \\ -0.9425 & 0.0432 & 0.3020 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 3.5 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad d = 0.1; \quad \sigma = 1$$

El zonotopo intersección obtenido $Z_{IN}^{Vol} = Z_1 \cap S$, minimizado según el volumen del zonotopo intersección viene dado por:

$$p_{IN}^{Vol} = \begin{bmatrix} -0.0201 \\ -0.0851 \end{bmatrix}; \quad H_{IN}^{Vol} = \begin{bmatrix} -0.0010 & 0.1508 & -0.1248 & -0.2010 \\ -0.0026 & 0.2637 & -0.2180 & -0.8510 \end{bmatrix}$$

que corresponde al valor $\lambda^{*Vol} = \begin{bmatrix} -0.2010 \\ -0.8510 \end{bmatrix}$.

El zonotopo intersección obtenido $Z_{IN}^{E.S.OPT} = Z_1 \cap S$, y minimizado según el volumen del zonotopo intersección viene dado por:

$$p_{IN}^{E.S.OPT} = \begin{bmatrix} -0.0202 \\ -0.0853 \end{bmatrix}; \quad H_{IN}^{E.S.OPT} = \begin{bmatrix} -0.2019 & 0.1510 & -0.1254 \\ -0.8533 & 0.2643 & -0.2194 \end{bmatrix}$$

que corresponde al valor $\lambda^{*Vol} = \begin{bmatrix} -0.2010 \\ -0.8510 \end{bmatrix}$.

Los volúmenes correspondientes a los zonotopos $Z_{IN}^{Vol} = Z_1 \cap S$ y $Z_{IN}^{E.S.OPT} = Z_1 \cap S$ son respectivamente: $Vol(Z_{IN}^{Vol}) = 0.5533$ y $Vol(Z_{IN}^{E.S.OPT}) = 0.5527$.

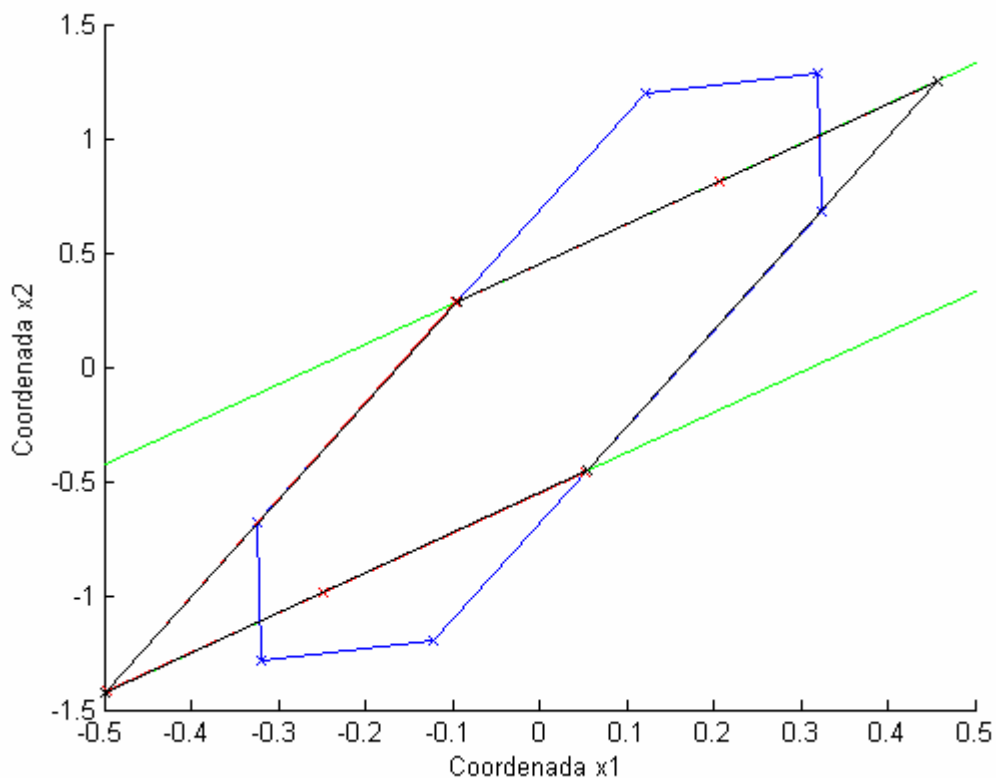


Figura 2.10 Intersección de zonotopo con franja. Eliminación del segmento óptimo.

En la Figura 2.10 se representan el zonotopo Z_1 en color azul, la franja S en color verde, el zonotopo intersección según minimización de volumen, en color rojo y el zonotopo intersección según la eliminación del segmento óptimo en color negro; prácticamente no hay diferencia entre ellos. Se observa que, aunque la mejora de $Z_{IN}^{E.S.OPT}$ con respecto a la de Z_{IN}^{Vol} es despreciable la matriz $H_{IN}^{E.S.OPT}$ es más sencilla puesto que tiene una columna menos.

2.4.6 Acotación de familias de zonotopos

Se presentan en este apartado operadores que permiten acotar exteriormente familias de zonotopos.

Dada una familia de zonotopos $Z_F(M) = p \oplus M\mathbf{B}^m$, donde M es una matriz con algún parámetro intervalar, el operador devolverá un zonotopo $\diamond Z$ que acota exteriormente a la familia de zonotopos.

Teorema 2.7 (Inclusión de zonotopos) *Dada una familia de zonotopos $Z_F(M) = p \oplus M\mathbf{B}^m$ donde $p \in \mathbb{R}^n$ es un vector real, $M \in \Pi^{n \times m}$ es una matriz intervalar y $\mathbf{B}^m \in \Pi^m$ es una caja unitaria, la inclusión zonotopo, representada por $\diamond Z$, se define como sigue:*

$$\diamond Z = p \oplus \begin{bmatrix} \text{mid}(M) & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^n \end{bmatrix} = p \oplus \mathbf{J}\mathbf{B}^{m+n}, \text{ donde } G \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ es una matriz diagonal que}$$

$$\text{satisface } G_{ii} = \sum_{j=1}^m \frac{\text{diam}(M_{ij})}{2}, \quad i = 1, \dots, n. \text{ Bajo estas definiciones resulta: } Z_F(M) \subseteq \diamond Z.$$

PRUEBA: Supongamos que $z \in Z_F(M)$. Entonces existe $b \in \mathbf{B}^m$ tal que: $z \in p \oplus Mb$.
Sumando y restando $\text{mid}(M)b$:

$$z \in (p + \text{mid}(M)b) \oplus (M - \text{mid}(M))b$$

Se tiene que $(M - \text{mid}(M))b \in G\mathbf{B}^n$. Por tanto,

$$z \in (p + \text{mid}(M)b) \oplus G\mathbf{B}^n \subseteq p \oplus \text{mid}(M)\mathbf{B}^m \oplus G\mathbf{B}^n = \diamond Z.$$

□

Capítulo 3. Acotación del Rango de una Función. Técnicas Garantistas

Los métodos propuestos en esta tesis para identificación de sistemas, estimación de estados y conjuntos invariantes admisibles, dada la no linealidad de los sistemas que tratan, necesitan de herramientas para la acotación del rango de las funciones que implican. En este tema se hace un recorrido sobre las distintas técnicas que pueden aplicarse para acotar el rango de una función, haciéndose una comparación de los resultados que se obtienen según el método de acotación empleado. La comparación justifica en cierto modo la acotación con funciones DC.

3.1 Breve reseña histórica sobre funciones

Hasta los inicios del cálculo en el siglo XVII [156] no aparece el concepto de *función* como un objeto matemático independiente, que puede ser estudiado por sí solo. La función como dependencia entre dos cantidades variables fue establecida por René Descartes³, Isaac Newton⁴ y Gottfried Leibniz⁵.

Los términos de ‘función’, ‘variable’, ‘constante’ y ‘parámetro’ fueron acuñados por Leibniz. Una función se identificaba, desde el punto de vista práctico, con una expresión analítica que permitía calcular sus valores. Sin embargo, esta definición tenía algunas limitaciones: expresiones distintas pueden arrojar los mismos valores, y no todas las ‘dependencias’ entre dos cantidades pueden expresarse de esta manera. En 1837 Dirichlet⁶ propone la definición moderna de *función numérica* como una correspondencia cualquiera entre

³ René Descartes (1596-1650). También llamado Cartesius, nacido en la Haye, en la Turena francesa, fue filósofo, matemático y físico, considerado como el padre de la filosofía moderna y uno de los nombres más destacados de la revolución científica.

⁴ Isaac Newton (1643-1727). Nacido en Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra, fue físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático, autor de los “*Philosophiae naturalis principia mathematica*”, más conocido como “*Principia*”, donde describió la Ley de la Gravitación Universal y estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Realizó trabajos sobre la luz y la óptica (descritos en su obra “*Opticks*”) y desarrolló el cálculo matemático. Comparte con Leibniz el crédito por el desarrollo del cálculo integral y diferencial.

⁵ Gottfried Leibniz (1646-1716). Nacido en Hannover, Alemania, fue filósofo, matemático, jurista, bibliotecario y político. Considerado uno de los grandes pensadores de los siglos XVII y XVIII (se le conoce como ‘El último genio universal’), hizo profundas contribuciones en metafísica, epistemología, lógica, filosofía de la religión, así como la matemática, física, geología, jurisprudencia e historia. Inventó el cálculo infinitesimal, independientemente de Newton, empleándose desde entonces su notación. También inventó el sistema binario.

⁶ Dirichlet (1805-1859). Nació en Düren, actual Alemania. Matemático que, sus aportaciones más relevantes se centraron en el campo de la teoría de los números, prestando especial atención al estudio de las series (desarrolló la teoría de las series de Fourier); aplicó funciones analíticas al cálculo de problemas aritméticos y estableció criterios de convergencia para las series.

dos conjuntos de números, que asocia a cada número en el primer conjunto un único número del segundo.

La ‘intuición’ sobre el concepto de función también evolucionó. Inicialmente la dependencia entre dos cantidades se imaginaba como un proceso físico, de modo que su expresión algebraica capturaba la ley física que correspondía a éste. La tendencia a una mayor abstracción se vio reforzada a medida que se encontraron ejemplos de funciones sin expresión analítica o representación geométrica sencillas, o sin relación con ningún fenómeno natural; y por los ejemplos ‘patológicos’ como funciones continuas sin derivada en ningún punto.

En los siglos XIX y XX, con el desarrollo de la teoría de conjuntos, surge la definición actual de función como la correspondencia entre dos conjuntos de objetos cualesquiera, no necesariamente numéricos. También en esta época, se vincula con el concepto de relación binaria.

El concepto de *función convexa* aparece por primera vez en el año 1905 en un artículo de Johan Jensen⁷. La convexidad tiene una gran importancia en la teoría de la optimización, por asegurar la validez global a las proposiciones que de otra manera únicamente serán válidas de forma local. Para funciones convexas, todo mínimo local es un mínimo global.

En 1954 Bruno de Finetti⁸ utiliza el término de función convexa para denotar lo que usualmente se conoce como función cóncava. Introduce también las funciones quasi-convexas (contiene a las funciones convexas).

En las funciones quasi-convexas, un punto estacionario ($\nabla f(x) = 0$) de una función quasi-convexa puede que no sea óptimo. Por esta razón Olvi. L. Mangasarian⁹ introduce en 1965 las funciones pseudo-convexas, bajo las cuales todos los puntos estacionarios son mínimos globales. Extendió las condiciones suficientes de Kuhn y Tucker a las funciones pseudo-convexas.

Las funciones DC ya fueron consideradas muchos años atrás por numerosos autores: entre los años 1949 y 1959 por Alexandroff [7], [8], Landis [120] y Hartman [90]; en los años ochenta por Shapiro [183], [184], Ellaia [73], Hiriart-Urruty [93], Penot [157], etc.

⁷ Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925). Más conocido como Johan Jensen. Fue un matemático e ingeniero danés; empleado de la Compañía de Teléfonos de Copenhague que en sus ratos libres se dedicaba a las matemáticas. Presidió la Sociedad Matemática Danesa desde 1892 a 1903. Su contribución matemática más conocida es su famosa desigualdad (para funciones convexas), la desigualdad de Jensen.

⁸ Bruno de Finetti (1906-1985). Fue un probabilista, estadístico y actuario italiano conocido por exponer en 1937 sus concepciones ‘operacionalmente subjetivas’ de la probabilidad.

3.2 Rango de una función

La definición general de *función* hace referencia a la dependencia entre los elementos de dos conjuntos dados:

Función es una terna constituida por:

1. Un conjunto A llamado *dominio* de la función.
2. Un conjunto B llamado *codominio* de la función.
3. Una *regla de correspondencia* que posee tres características:
 - a. A todo elemento del dominio (A) se le puede asociar un elemento del codominio (B).
 - b. Ningún elemento del dominio (A) puede quedarse sin un asociado en el codominio (B).
 - c. Ningún elemento del dominio (A) puede tener más de un asociado en el codominio (B).

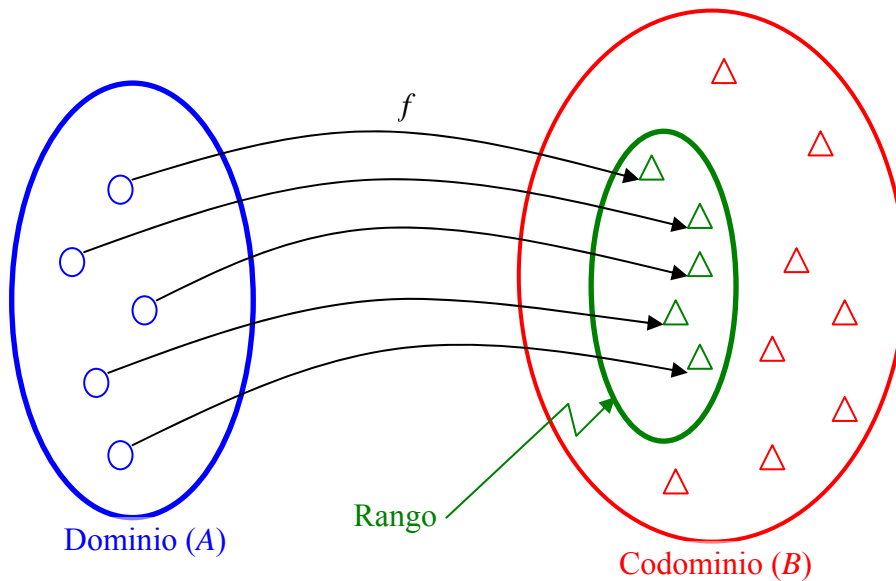


Figura 3.1 Representación del concepto de función como la dependencia entre los elementos de los conjuntos A y B .

Se denota $f : A \rightarrow B$. La relación de dependencia entre los elementos del conjunto A (dominio) y el conjunto B (codominio) se representa gráficamente la Figura 3.1.

El *dominio*, denotado $dom(f)$, de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente, es decir, son todos aquellos números para los cuales la función tiene sentido.

Al elemento que se obtiene en el *codominio* después de aplicar la regla de correspondencia a un elemento del *dominio* recibe el nombre de *imagen*. Al conjunto de todas las imágenes se le conoce como *rango*. El rango es un subconjunto del codominio ($rango \subseteq codominio$).

En términos de variables, una función también se puede definir de la siguiente forma:

Se dice que una variable y es función de otra x , cuando ambas están relacionadas de forma que a cada valor de x perteneciente a su campo de variación le corresponde sólo uno de y . La variable y recibe el nombre de variable dependiente, mientras que x es la variable independiente; su relación se representa como $y = f(x)$.

Por tanto, una función puede ser representada como: una expresión matemática del tipo $y = f(x)$, una tabla de valores, una *gráfica* o *grafo*, incluso una frase que exprese la relación entre varias variables. De esta forma, el rango viene definido por el conjunto $rango = \{f(x) : x \in dominio\}$ y la su *gráfica* o *grafo* es $grafo = \{(x, f(x)) : x \in dominio\}$.

Las funciones a las que habitualmente se hace referencia tienen un dominio en el espacio m -dimensional \mathbb{R}^m y un codominio n -dimensional \mathbb{R}^n . Cuando $m = n = 1$, la función se llama *función real de una variable real*. Cuando $m = 1$ y $n > 1$, la función se llama *función vectorial de una variable real*. Si $m > 1$ y $n = 1$, la función se llama *función real de una variable vectorial*; a este tipo de funciones pertenecen las funciones DC. Si $m > 1$ y $n > 1$ se llama *función vectorial de una variable vectorial*.

A continuación se da la definición formal de *rango de una función* $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$:

Definición 3.1 (Rango de una función) [39] Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función con dominio en \mathbb{R}^m . Se define rango de f sobre un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ incluido en su dominio por:

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} \tag{3.1}$$

El cálculo exacto del rango de una función arbitraria f , sobre un conjunto X , es similar a optimizar globalmente f sobre X . Por lo tanto, no siempre es fácil de determinar de forma exacta. Otras veces, resulta difícil expresar algebraicamente dicho rango. En el siguiente

apartado se describen métodos garantistas para la obtención del *rango aproximado* de una función; se plantean distintos métodos para calcular cotas de dicho rango sin necesidad de resolver el problema de optimización.

3.3 Métodos garantistas para la obtención del rango de una función

Una vez se ha definido el *rango* de una función y , antes de empezar a describir las distintas técnicas garantistas para la obtención del *rango aproximado* de la misma se define formalmente el concepto de *función de acotación externa*. Esta función va a permitir calcular el rango aproximado de una función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada.

Definición 3.2 (Función de acotación externa) Una función $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de acotación externa de $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ si para cualquier $X, Y \subset \mathbb{R}^m$, Y compacto, con $X \subseteq Y$, se cumple que $\{f(x) : x \in X\} \subseteq F(Y)$. (Ver Figura 3.2).

Para la obtención del rango aproximado de una función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de forma garantista, es decir, de forma que todos los elementos del *rango* de una función se encuentren incluidos en el *rango aproximado* calculado, se construye una *función de acotación externa* $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ a través de diferentes técnicas prácticas que se caracterizan según se aplique:

1. Aritmética intervalar; con la extensión intervalar natural.
2. La extensión del valor medio.
3. Formas *slope* (se puede traducir como pendiente, gradiente, ...).
4. Zonotopos; aplicando el método de Kühn.
5. Funciones DC.

Los conjuntos $Y \subset \mathbb{R}^m$ sobre los que se va a aplicar la función de acotación externa F de la función f dependen de la técnica que se aplique. En caso de que se aplique aritmética intervalar, extensión del valor medio o la forma *slope*, los conjuntos Y a los que se aplica la función de inclusión F cumplen $Y \subseteq \mathbb{I}^m$ (\mathbb{I} representa al conjunto de todos los intervalos reales). Para el caso de Zonotopos los conjuntos Y son zonotopos $Z \subseteq \mathbb{R}^m$. Y, para el caso de las funciones DC, los conjuntos Y pueden ser cualquier tipo de poliedro convexo $P \subseteq \mathbb{R}^m$.

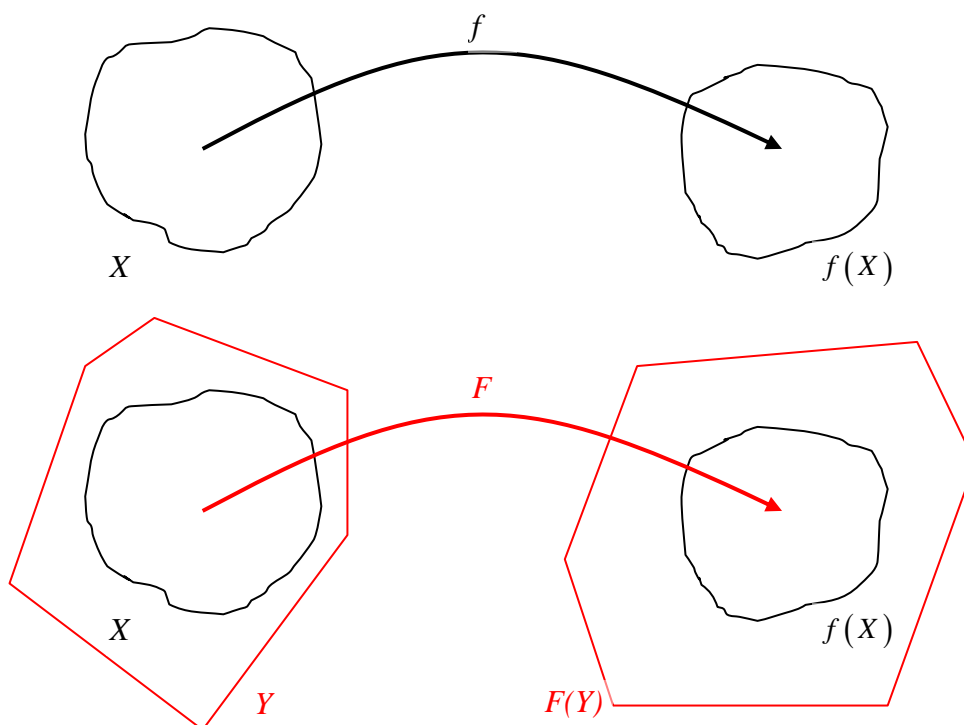


Figura 3.2 Representación gráfica del concepto de función de acotación externa ($X \subseteq Y$, $f(X) \subseteq F(Y)$).

3.3.1 Técnica práctica para la construcción de una función de acotación externa aplicando la extensión intervalar natural

Las extensiones intervalares de funciones se utilizan para obtener cotas garantistas de rangos de funciones.

En este caso, la función de acotación externa empleada es la que se conoce como *función de inclusión*.

Definición 3.3 (Función inclusión para aritmética intervalar) Una función $F : \Pi^m \rightarrow \Pi$, donde Π es el conjunto de todos los intervalos reales, es una función de inclusión de $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ si se cumple que $\{f(x) : x \in X\} \subseteq F(X)$ para todos los intervalos de $X \in \Pi^m$.

Anteriormente a generalizarse el uso de la aritmética intervalar, se obtenían a veces los límites del rango de una función por medio de las constantes de Lipschitz o empleando módulos de continuidad [109]. En realidad, dichos cálculos pueden considerarse casos especiales del

cálculo con cajas intervalares. Usando de forma correcta la aritmética intervalar se pueden obtener los límites de las acotaciones de forma llamémosla eficiente, sin realizar un análisis amplio a propósito para esto. También, la aritmética intervalar puede emplearse en el campo del redondeo, pudiendo proporcionar resultados rigurosos, desde el punto de vista matemático, de las operaciones en coma flotante.

La aritmética de intervalos reales, dentro del conjunto de los intervalos cerrados de números reales, fue introducida de forma novedosa por R. E. Moore [148].

Las cuatro operaciones básicas de la aritmética intervalar satisfacen la expresión general:

$$A \text{ op } B = \{a \text{ op } b : a \in A, b \in B\} \quad A, B \in \Pi \quad (3.2)$$

donde *op* es alguna de las cuatro operaciones (+, -, *, /) elementales. La ecuación (3.2) caracteriza las cuatro operaciones intervalares básicas [149]:

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [a + c, b + d] \\ [a, b] - [c, d] &= [a - d, b - c] \\ [a, b] * [c, d] &= [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)] \\ [a, b] / [c, d] &= [a, b] * [1/d, 1/c], \quad \text{si } 0 \notin [c, d] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Definiendo las cuatro operaciones básicas tal como se hace en (3.3), la imagen de cada una de esas cuatro operaciones básicas es el *rango exacto* de la operación real correspondiente.

La resta y la división, en la aritmética intervalar, no son las operaciones inversas de la suma y la multiplicación (una de las grandes diferencias con respecto a la aritmética real). En [89] y [109] se pueden encontrar extensiones de la aritmética intervalar que consideran el 0 en el intervalo $[c, d]$ de la división. De la misma forma, cuando se realiza la multiplicación en el computador, hay otras alternativas que, aunque más complejas, en promedio son más eficaces desde el punto de vista de cálculo en el computador.

La aritmética intervalar permite evaluar fácilmente expresiones aritméticas definidas sobre intervalos. Los resultados obtenidos mediante las cuatro operaciones elementales de la aritmética intervalar se corresponden exactamente a los que se obtendrían operando con números reales y sus operaciones correspondientes. Sin embargo, la composición de dichas operaciones proporciona cotas pesimistas y no exactas de los rangos de las expresiones reales. Por ejemplo, si $f(x) = x^2 - x$, la evaluación de la función f sobre el intervalo $[0, 1]$ con la aritmética intervalar definida en (3.3) da como resultado:

$$[0,1]^2 - [0,1] = [0,1][0,1] - [0,1] = [0,1] - [0,1] = [-1,1],$$

pero el rango real de la función f sobre $[0,1]$ es $[-1/4,0]$; por lo tanto, este cálculo intervalar sobrestima el rango real de la función. Esto se debe a que la variable x se supone implícitamente variable de forma independiente en los términos x^2 y $-x$. A este fenómeno se le conoce como *dependencia intervalar*. Como consecuencia de ésta, las expresiones algebraicas que en aritmética real son equivalentes, en aritmética intervalar dan resultados diferentes. Siguiendo con el ejemplo, si definimos la función f anterior como $f = x(x-1)$, que es equivalente para la aritmética de los números reales, se obtendría:

$$[0,1]([0,1]-1) = [0,1][-1,0] = [-1,0] \neq [-1,1].$$

Aunque no es siempre así, en este caso, para esta última forma de la función f , se obtiene una acotación más “fina” del rango que la correspondiente representación mediante potencias de la variable x . Más adelante se establecen algunas propiedades de dependencias intervalares.

La nomenclatura que se va a utilizar y se ha empleado hasta ahora, es la siguiente: en negrita se representan los intervalos; los valores escalares se representan con minúsculas; y, en mayúsculas se representan los vectores y matrices.. Los corchetes delimitan intervalos mientras los paréntesis delimitan vectores y matrices. También, con letras minúsculas se representan las distintas componentes del vector o matriz. Por ejemplo, \mathbf{x} representa un intervalo real, y \mathbf{X} es un vector o matriz intervalar cuyas n -componentes son intervalos reales: $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)^T$. El *centro o punto medio* de un intervalo \mathbf{x} se representa como $mid(\mathbf{x})$ y, el vector o matriz cuyas componentes son los puntos medios de cada una de las componentes del vector o matriz \mathbf{X} se denota como $mid(\mathbf{X})$. La *mayor magnitud de un intervalo* $\mathbf{x} = [a,b]$, *magnitud*, se define como $|\mathbf{x}| = \max\{|a|, |b|\}$. La *mayor magnitud de un vector o matriz intervalar* se interpreta componente a componente: $|\mathbf{X}| = (|\mathbf{x}_1|, |\mathbf{x}_2|, \dots, |\mathbf{x}_n|)^T$; donde la *norma de un vector intervalar* se define como: $\|\mathbf{X}\| = \|\mathbf{X}\|_\infty$ ⁹. La *menor magnitud de un intervalo* $\mathbf{x} = [a,b]$, *mignitud*, se define como $\langle \mathbf{x} \rangle = \min_{x \in \mathbf{x}} |x|$.

⁹ La norma- ∞ de un vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se define como $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

La anchura de un intervalo real $\mathbf{x} = [a, b]$ se define como: $\text{diam}(\mathbf{x}) = b - a$; y la anchura de un vector intervalar \mathbf{X} se define componente a componente.

Como ya se ha indicado, el conjunto de intervalos reales se representa como Π ; el conjunto de vectores intervalares n -dimensionales se representa como Π^n ; y, el conjunto de las matrices $m \times n$ cuyos elementos son intervalos se denota $\Pi^{m \times n}$.

En la aritmética intervalar que se ha empleado, los números reales se han interpretado como *intervalos delgados* (intervalos de anchura nula); por ejemplo, el número real 1 se ha interpretado como el intervalo $[1, 1]$.

La comparación de intervalos se hace igual que en los conjuntos; $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ significa que cada elemento de \mathbf{x} es menor que cada elemento de \mathbf{y} . La comparación de vectores intervalares $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Pi^n$ se hace componente a componente; $\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$ significa que $x_i \leq y_i$ para $1 \leq i \leq n$, mientras que $\mathbf{X} < \mathbf{Y}$ significa $x_i \leq y_i$ para $1 \leq i \leq n$ y $x_i \neq y_i$ para algún i por lo menos. La envoltura convexa de dos intervalos \mathbf{x} e \mathbf{y} es un intervalo que se denota como $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$.

Teorema 3.1 (Subdistributividad) *Con la aritmética definida en (3.3), la aritmética intervalar es subdistributiva en el sentido de; si $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ son intervalos pertenecientes a Π , entonces se cumple que: $\mathbf{x}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) \subseteq \mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{x}\mathbf{z}$.*

Por lo tanto, aunque las operaciones de suma y multiplicación de los intervalos son conmutativas y asociativas, la aritmética intervalar no tiene la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Por otra parte, aunque existe una identidad aditiva, $[0, 0]$ y otra multiplicativa, $[1, 1]$, no existen inversos aditivos y multiplicativos. Por ejemplo, $[1, 2] - [1, 2] = [-1, 3]$, demuestra que no se cancelan haciendo la resta tal como se ha definido en (3.3). A veces, en determinadas aplicaciones, podría ser interesante y necesario definir lo que se denomina una *cancelación subtractiva*, de la siguiente forma: $[a, b] \ominus [c, d] = [a - c, b - d]$

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida sobre un intervalo $\mathbf{x} \in \Pi$, entonces $\mathbf{f}''(\mathbf{x})$ representa el rango (exacto) de la función f sobre \mathbf{x} ; Moore lo denominó *extensión intervalar* de la función f . Los rangos (exactos) de funciones del tipo $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se representan de forma similar como Φ'' y \mathbf{F}'' .

A continuación se define la *extensión intervalar natural* de una función.

Definición 3.4 (Extensión intervalar natural de una función real) Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función calculable como una expresión, algoritmo o programa de ordenador que implica las cuatro operaciones aritméticas elementales, entonces una extensión intervalar natural de f , cuyo valor en un vector intervalo \mathbf{x} es denotado por $\mathbf{f}_{IN}(\mathbf{x})$, se obtiene reemplazando cada ocurrencia de x por el intervalo \mathbf{x} y ejecutando todas las operaciones de acuerdo a las fórmulas dadas en (3.3).

Para las funciones del tipo $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se representarían sus extensiones intervalares naturales como Φ_{IN} y \mathbf{F}_{IN} , respectivamente.

El operador caja es un vector intervalar que incluye el rango de la función: $\mathbf{F}''(\mathbf{X}) \subseteq \square(F(\mathbf{X}))$ (inclusión intervalar de un conjunto (caja) (Definición 2.17)). Una de las formas de obtener dicha caja es utilizando la extensión intervalar natural de la función F , $\mathbf{F}_{IN}(\mathbf{X})$.

Teorema 3.2 Si \mathbf{f}_{IN} es una extensión intervalar natural de f y $\mathbf{x} \in \Pi$ está contenido en el dominio de \mathbf{f}_{IN} , entonces $\mathbf{f}_{IN}(\mathbf{x})$ contiene el rango $\mathbf{f}''(\mathbf{x})$ de f sobre \mathbf{x} . Esto es equivalente a decir que \mathbf{f}_{IN} es una función de inclusión de f [149].

Este teorema es crucial para los cálculos intervalares, formando parte de la definición de extensión intervalar de una función.

Definición 3.5 (Extensión intervalar de una función) Una función $\mathbf{f}_I: \Pi \rightarrow \Pi$ se dice ser una extensión intervalar de una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siempre que $\{f(x): x \in \mathbf{x}\} \subseteq \mathbf{f}_I(\mathbf{x})$ para todos los intervalos $\mathbf{x} \in \Pi$ dentro del dominio de \mathbf{f}_I .

Para las funciones $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se definen extensiones intervalares de forma similar, Φ_I y \mathbf{F}_I respectivamente.

Como consecuencia, la aritmética intervalar permite obtener funciones de inclusión de forma sencilla. El Teorema 3.2 es crucial para la computación intervalar puesto que significa que mediante la aritmética intervalar se pueden encontrar acotaciones para las funciones reales.

Si se hace referencia a las funciones estándar, la extensión intervalar resulta posible:

- a) Para las funciones monótonas¹⁰ resulta fácil realizar su extensión intervalar; tan sólo hay que evaluar la función en los extremos del intervalo considerado. Por ejemplo, para las funciones logaritmo neperiano (\ln) y exponencial (e^x), sus extensiones intervalares son respectivamente:

$$\ln(X) = [\ln(\inf(X)), \ln(\sup(X))]$$

$$e^X = [e^{\inf(X)}, e^{\sup(X)}]$$

- b) Las funciones no monótonas deben tratarse de forma diferente. Para calcular las cotas de este tipo de funciones se puede utilizar la extensión intervalar de alguna expansión de la función que tenga una fórmula explícita del término de error. Por ejemplo, Kearfott [109] emplea una extensión intervalar del Polinomio de Taylor¹¹.

Las extensiones intervalares se pueden obtener para prácticamente cualquier función que pueda representarse con un programa de computador. Precisamente, buscando estas extensiones intervalares, se desea que los límites de los rangos de las funciones estén lo más ajustados posible. Estos límites, se pueden calcular empleando expansiones (mediante el polinomio de Taylor por ejemplo) que de alguna forma esté definido explícitamente el término error mediante una fórmula. Para el cálculo de estas extensiones intervalares, que se desea se ajusten lo máximo posible a los límites reales exactos, se emplea tanto la aritmética de las cuatro operaciones básicas definidas en (3.3) como extensiones intervalares de funciones consideradas estándar (conjunto de funciones tal como las especificadas en el FORTRAN 77 estándar). La precisión con la que se pueden llegar a obtener los rangos de la funciones estándar depende de

¹⁰ Dada una función $f: A \rightarrow B$, donde ambos conjuntos tienen definido un orden parcial (denotado como \leq o \geq), se dice que es monótona si y sólo si $\forall x, y \in A: x \leq y$ implica que $f(x) \leq f(y)$ (monótona creciente), o $x \leq y$ implica que $f(x) \geq f(y)$ (monótona decreciente).

¹¹ Polinomio de Taylor de grado n para la función f en el punto a , $P_{n,a}$, viene dado por el polinomio:

$$P_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

La diferencia entre $f(x)$

y $P_{n,a}(x)$ se hace pequeña cuando x se aproxima a a ($\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$). La fórmula de Taylor

nos da el error cometido empleando el polinomio de Taylor: *Resto de Lagrange*

$$f(x) - P_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para un cierto $c \in (a, x)$; o *Resto de Cauchy*

$$f(x) - P_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n)!}(x-c)^n(x-a)$$

para un cierto $c \in (a, x)$.

los límites que tenga el sistema de coma flotante que emplee el computador empleado para el cálculo. Existe una amplia bibliografía describiendo la forma de calcular extensiones intervalares de funciones estándar [18], [38], [61], [63], [96], [107], [108], [114], ...

Además de las propiedades enunciadas anteriormente con el Teorema 3.1 y el Teorema 3.2, las extensiones cumplen otras propiedades que se enuncian en lo que sigue.

Teorema 3.3 *Supóngase una extensión intervalar natural $\mathbf{F}_{IN}(\mathbf{X})$ de una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, que se ha obtenido por una secuencia de acotaciones de funciones estándar calculadas rigurosamente, junto con las operaciones aritméticas elementales definidas en (3.3). Entonces, esta extensión intervalar natural $\mathbf{F}_{IN}(\mathbf{X})$ contiene el rango de F sobre la caja \mathbf{X} , es decir $\mathbf{F}^u(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{F}_{IN}(\mathbf{X})$ [109].*

Aunque inicialmente se criticaba a la aritmética intervalar, aludiendo que las acotaciones de los rangos que se obtenían eran demasiado pesimistas, muy amplios, realmente no tiene por qué ser así si aplican correctamente las propiedades que cumplen. Los próximos resultados tratan de acotar el rango de una función con extensiones intervalares de forma aguda.

Teorema 3.4 *Supóngase una función $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, formalmente escrita por una secuencia de cálculo de funciones estándar con las cuatro operaciones aritméticas básicas; supóngase también que, en esta expresión, cada una de las n variables aparecen una única vez formalmente. Entonces, si $\Phi_I(\mathbf{X})$ se evalúa con aritmética intervalar exacta y con los cálculos de los rangos exactos de cada una de las funciones estándar, la acotación intervalar resultante será el rango exacto de la función ϕ sobre la caja \mathbf{X} ; es decir, $\Phi_I(\mathbf{X}) = \Phi^u(\mathbf{X})$ [109].*

El Teorema 3.4 y el Teorema 3.1 sugieren que para maximizar la agudeza de una extensión intervalar, las expresiones o algoritmos que las definen deben reescribirse de forma que minimicen el número de ocurrencias de cada variable o subexpresión. De hecho, normalmente ocurre así aunque no siempre.

Calcular el rango exacto de una función arbitraria ϕ sobre una caja \mathbf{X} es similar a optimizar ϕ sobre \mathbf{X} . Sin embargo, tanto en uno como en otro caso resultan útiles las propiedades asintóticas de las acotaciones intervalares del rango de ϕ , como que $\|\dim(\mathbf{X})\| \rightarrow 0$.

Definición 3.6 (Orden de una función de inclusión) Sea $F_I(\mathbf{X})$ una extensión intervalar de la función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ evaluada sobre una caja \mathbf{X} , y sea $\mathbf{F}^u(\mathbf{X})$ el rango exacto de F sobre \mathbf{X} . Si existe una constante K , independiente de la caja \mathbf{X} tal que

$$\text{diam}(\mathbf{F}_I(\mathbf{X})) - \text{diam}(\mathbf{F}^u(\mathbf{X})) \leq K (\text{diam}(\mathbf{X}))^\alpha \quad (3.4)$$

para todas las cajas \mathbf{X} con $\text{diam}(\mathbf{X})$ suficientemente pequeño y $\alpha > 0$ fijo, entonces se dice que \mathbf{F}_I es una función de inclusión de orden α para F . Cuando α es 1 ó 2, se denominan inclusión de primer orden o de segundo orden, respectivamente.

Para entender lo que viene a continuación fácilmente, se reformula la Definición 3.4 de una forma más general, para cualquier función de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definición 3.7 (Extensión intervalar natural de una función) Si $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función calculable como una expresión, algoritmo o programa de computador participando las cuatro operaciones aritméticas elementales y evaluaciones de las funciones estándar, entonces una extensión intervalar natural de F , cuyos valores sobre un vector intervalar \mathbf{X} se denota como $\mathbf{F}_{IN}(\mathbf{X})$, se obtiene reemplazando cada ocurrencia de cada componente x_i de \mathbf{X} por el correspondiente intervalo \mathbf{x}_i de \mathbf{X} , mediante la ejecución de todas las operaciones de acuerdo a las fórmulas (3.3), y de acuerdo al cálculo de los rangos exactos de las funciones estándar.

Teorema 3.5 [6], [150], [171] Las extensiones intervalares naturales son de primer orden.

Las extensiones intervalares naturales son algo más deseables, e incluso casi indispensables en algunos contextos. Se pueden obtener por ejemplo extensiones intervalares de segundo orden, por los desarrollos en series y acotando el rango de las derivadas.

En la siguiente técnica práctica que se describe para el cálculo de un rango aproximado garantista, se emplea la denominada *extensión intervalar del valor medio*.

3.3.2 Técnica práctica para la construcción de una función de acotación externa aplicando la extensión intervalar del valor medio

En el cálculo diferencial, el teorema del valor medio (de Lagrange), teorema de los incrementos finitos, teorema de Bonnet-Lagrange o teoría del punto medio es una propiedad de las funciones derivables en un intervalo. El teorema del valor medio es una generalización del teorema de Rolle que dice que, si una función está definida y es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a,b) y toma valores iguales en los extremos del

intervalo ($f(a) = f(b)$), entonces existe al menos algún punto $c \in (a, b)$ tal que la tangente a la curva en c es horizontal ($f'(c) = 0$).

Teorema 3.6 (Teorema del valor medio de Lagrange) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo $[a, b]$ y f es derivable sobre el intervalo (a, b) . Entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Es decir, la interpretación gráfica es, que existe un punto (c) en el que la tangente es paralela a la cuerda entre los puntos a y b .

En este caso, para obtener una función de acotación externa se aplica la siguiente proposición, basada en el teorema del valor medio de Lagrange.

Definición 3.8 (Extensión intervalar del valor medio) Supóngase que $\phi : \mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas continuas, $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{D}$ y $C \in \mathbf{X}$. Entonces, la extensión intervalar del valor medio para ϕ sobre \mathbf{X} y centrada en C se define como:

$$\Phi_{EVM}(\mathbf{X}, C) := \phi(C) + \nabla \Phi_I(\mathbf{X})(\mathbf{X} - C) \quad (3.5)$$

donde $\nabla \Phi_I(\mathbf{X})$ es una acotación intervalar componente a componente para el rango de $\nabla \phi$ sobre \mathbf{X} .

De forma general, con el símbolo ∇ se quiere representar la matriz Jacobiana de la función (f , ϕ o F); es decir, las n filas de la matriz $\nabla \phi$ representan los gradientes de las funciones componentes de ϕ , siendo los gradientes las m derivadas parciales de cada función componente:

$$\nabla f(x) = [\nabla f_1(x) \quad \nabla f_2(x) \quad \dots \quad \nabla f_n(x)]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Uniendo el teorema del valor medio y la aritmética intervalar se ha obtenido $\Phi_{EIVM}(\mathbf{X}, C)$ como acotación, caja o vector intervalar, del rango de ϕ sobre \mathbf{X} . Además se cumple lo que se indica en el siguiente teorema.

Teorema 3.7 (Orden de la extensión intervalar del valor medio) *Supongamos que $\nabla\Phi_I$ son extensiones intervalares de al menos orden 1 de $\nabla\phi$. Entonces Φ_{EIVM} es una extensión intervalar de orden 2 de ϕ [115].*

Por ejemplo, supongamos una función real de una variable real como $f(x) = x^2 - x$, $\mathbf{x} = [0,1]$ y $c = 1/2$. En este caso $\nabla f''(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} - 1 = 2[1,0] - 1 = [-1,1]$ es el rango exacto de la derivada de f sobre \mathbf{x} . La extensión intervalar natural es

$$\mathbf{f}_{IN}([0,1]) = [0,1]^2 - [0,1] = [0,1] - [0,1] = [-1,1],$$

mientras que la extensión intervalar del valor medio es:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{EIVM}(\mathbf{x}, c) &= f(c) + \nabla \mathbf{f}_I(\mathbf{x})(\mathbf{x} - c) = f(1/2) + (2[0,1] - 1)([0,1] - 1/2) \\ &= -1/4 + [-1,1][1/2, 1/2] \\ &= -1/4 + [-1/2, 1/2] = [-3/4, 1/4] \end{aligned}$$

El rango real de la función f en $\mathbf{x} = [0,1]$ es $\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = [-1/4, 0]$. Las anchuras de las distintas extensiones intervalares obtenidas son:

$$\text{diam}(\mathbf{f}_{IN}([0,1])) = \text{diam}([-1,1]) = 2$$

$$\text{diam}(\mathbf{f}_{EIVM}(\mathbf{x}, c)) = \text{diam}([-3/4, 1/4]) = 1$$

$$\text{diam}(\mathbf{f}''(\mathbf{x})) = \text{diam}([-1/4, 0]) = 1/4$$

Aunque en este caso no ocurre así, la intersección de las extensiones intervalares natural y del valor medio suele dar una acotación más ajustada al rango real que cualquiera de las extensiones independientemente.

En caso de tomar intervalos \mathbf{x} para el dominio pequeños, se observaría un cierto indicio de convergencia de las extensiones intervalares natural y del valor medio hacia el rango real de la función.

Aunque es deseable, en los algoritmos de optimización global, no es sencillo obtener extensiones intervalares de orden superior a 2, en [64] y [70] llegan a la conclusión de que

buscar una extensión intervalar de tercer orden puede requerir resolver un problema de programación cuadrática que no siempre tiene autovalores positivos.

La forma de la extensión intervalar del valor medio es un caso especial de las llamadas *formas centradas*. En [171] se discuten otras alternativas de formas centradas; dichas formas pueden ser apropiadas para acotaciones más exactas. Aunque en principio las extensiones natural y del valor medio pueden ser suficientes, se van a abordar otros vectores intervalares para $\nabla\Phi_I(\mathbf{X})$ en la expresión (3.5), con el fin de obtener extensiones intervalares más precisas; por ejemplo los *slopes*, que se verán en el próximo apartado de este mismo capítulo.

Por último, en lo referente al estudio de las extensiones intervalares, se define el concepto de *inclusión monotónica* o *isotónica*, que a menudo se supone en la literatura que cumplen las extensiones intervalares con el fin de facilitar las pruebas de convergencia.

Definición 3.9 (Inclusión monotónica o isotónica) *Una extensión intervalar Φ_I de una función $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una inclusión monotónica o una inclusión isotónica si dados $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Pi^n$, $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}$ implica $\Phi_I(\mathbf{X}) \subseteq \Phi_I(\mathbf{Y})$.*

Teorema 3.8 *Las extensiones intervalares naturales son inclusiones monotónicas, siempre que se use para calcularlas aritmética intervalar exacta y se calculen rangos exactos para las funciones estándar.*

A veces se sugiere la monotonicidad de la inclusión, como un criterio de parada para los algoritmos intervalares iterativos: la violación de la misma indica que el error de redondeo exterior está predominando. De todas formas, aunque la monotonicidad de la inclusión es conveniente, las propiedades asintóticas (es decir, el orden) son más importantes puesto que, algunas construcciones y procesos algorítmicos eficaces llevan a inclusiones intervalares que no son monotónicas.

3.3.3 Técnica práctica para la construcción de una función de acotación externa utilizando formas *slope*

Según [109], la acotación de los rangos en los que se producen las variaciones de las funciones sobre sus dominios es uno de los usos principales que se puede dar a la información de las derivadas de intervalos. Esto se ve directamente en la definición dada en la Definición 3.8, en la que además se ha obtenido una extensión intervalar que es de segundo orden. También, dicha información, es de gran importancia en los métodos de Newton intervalares, que

a su vez son fundamentales para los algoritmos de optimización global, que se ha verificado son rápidos, y eficientes desde el punto de vista de almacenamiento memoria.

Sin embargo, no siempre es necesario utilizar extensiones intervalares de la derivada. De hecho, existen dos técnicas que en realidad conducen a intervalos más estrictos, más ajustados. Para entender estas técnica, es útil introducir los conceptos de *matriz de Lipschitz* y de *matriz slope* para una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

DERIVADAS DE INTERVALOS Y MATRICES DE SLOPES

Definición 3.10 (Matriz de Lipschitz) [153] Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. La matriz \mathbf{A} se dice que es una matriz de Lipschitz para F sobre un \mathbf{X} dado, si para cada $X \in \mathbf{X}$ e $Y \in \mathbf{X}$, $F(X) - F(Y) = A(X - Y)$ para algún $A \in \mathbf{A}$.

Ejemplo 3.1 Considérese la función $\phi(x_1, x_2) = \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_2^3}{3} + x_1$. Entonces, una matriz de Lipschitz para ϕ sobre la caja $\mathbf{X} = ([-0.5, 0.5], [-0.5, 0.5])^T$ es cualquier extensión intervalar natural para el gradiente:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{3x_1^2}{3} + 1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{3x_2^2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla \phi = \left(\frac{3x_1^2}{3} + 1, \frac{3x_2^2}{3} \right) = (x_1^2 + 1, x_2^2)$$

$$\mathbf{A} = \left([-0.5, 0.5]^2 + 1, [-0.5, 0.5]^2 \right) = ([1, 1.25], [0, 0.25]),$$

mientras que la correspondiente extensión intervalar del valor medio correspondiente para ϕ , centrada en el punto $C = (0, 0)^T$, es:

$$\Phi_{EIVM}(\mathbf{X}, C) = \phi(C) + \nabla \Phi_I(\mathbf{X})(\mathbf{X} - C) = 0 + ([1, 1.25], [0, 0.25]) \left(\begin{array}{c} [-0.5, 0.5] \\ [-0.5, 0.5] \end{array} \right) = [-0.75, 0.75].$$

De hecho, si $F : \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, entonces una extensión intervalar componente a componente de la matriz Jacobiana de F constituye una matriz de Lipschitz para la función F sobre \mathbf{X} .

Definición 3.11 (Matriz Jacobiana intervalar) Si $F : \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, entonces $\nabla \mathbf{F}_{IN}(\mathbf{X})$ significará cualquier matriz intervalar cuyas componentes son extensiones intervalares

naturales sobre \mathbf{X} de las componentes correspondientes de la matriz Jacobiana de F . Cualquier matriz de este tipo se denominará matriz Jacobiana intervalar.

Una propiedad alternativa, más débil, es la que se indica en la siguiente definición.

Definición 3.12 (Matriz de slope intervalar) Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. La matriz \mathbf{A} es conocida como una matriz de slope intervalar (o, más general, un conjunto slope) para F sobre \mathbf{X} y centrada en el vector intervalar \mathbf{C} si, para todo $X \in \mathbf{X}$ y $C \in \mathbf{C}$, se cumple:

$$F(X) - F(C) = A(X - C) \text{ para algún } A \in \mathbf{A}.$$

Cualquier conjunto de matrices más pequeño que satisfaga esta condición se denotará como $\mathbf{S}^\#(F, \mathbf{X}, \mathbf{C})$. Un vector intervalar que contiene $\mathbf{S}^\#(F, \mathbf{X}, \mathbf{C})$ (generalmente un buen cálculo de estimación externo) se representa como $\mathbf{S}(F, \mathbf{X}, \mathbf{C})$.

Con frecuencia, pero no siempre, \mathbf{C} es un punto o una caja muy pequeña.

SLOPES UNIVARIABLES

La diferencia entre derivadas y slopes se entiende más fácilmente con un ejemplo unidimensional.

Ejemplo 3.2 Simplemente con el propósito de ilustrar, suponer que se desea una extensión de segundo orden para $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[0, 2]$. Entonces, el rango de la derivada sobre $\mathbf{x} = [0, 2]$ es $\mathbf{a} = [0, 4]$, y la *extensión intervalar del valor medio*, una acotación para el rango de $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[0, 2]$, centrada en $c = 1$, es:

$$\mathbf{f}_{EIVM}([0, 2], 1) = f(1) + \nabla \mathbf{f}_t([0, 2])([0, 2] - 1) = 1 + [0, 4] \cdot [-1, 1] = 1 + [-4, 4] = [-3, 5]$$

En contraposición, considerando slopes:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left\{ \mu : \mu = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \text{ para } x \in \mathbf{x} = [0, 2] \right\} = \left\{ \mu : \mu = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ para } x \in \mathbf{x} = [0, 2] \right\} \\ &= [1, 3] = \mathbf{S}^\#(f, [0, 2], 1) \end{aligned}$$

es un *conjunto de slopes* para $f(x) = x^2$ sobre $\mathbf{x} = [0, 2]$, centrado en $c = 1$. La acotación con slopes será para este caso:

$$\mathbf{f}_{EISLOPE}(\mathbf{x}, c) = f(c) + \mathbf{a}(\mathbf{x} - c) = f(1) + [1, 3]([0, 2] - 1) = [-2, 4] \quad (3.7)$$

En este caso se tiene que $\mathbf{f}_{EISLOPE}(\mathbf{x}, c) = [-2, 4] \subset [-3, 5] = \mathbf{f}_{EIVM}(\mathbf{x}, c)$

La Figura 3.3 ilustra gráficamente esta relación.

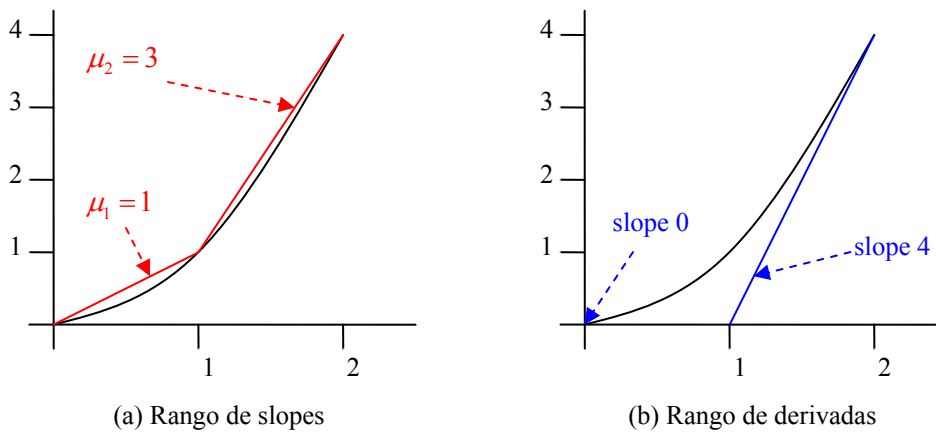


Figura 3.3 La diferencia entre el slope intervalar y el rango de derivadas para $\mathbf{x} = [0, 2]$, $c = 1$ y $f(x) = x^2$.

Aunque realmente no se utilizaría una extensión intervalar para $f(x) = x^2$ (desde que se puede calcular el rango exacto), el ejemplo planteado ilustra una relación general entre las derivadas y los slopes, indicada como:

Teorema 3.9 [109] Supongamos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cualquier $\mathbf{x} \in \Pi$ y $c \in \mathbf{x}$. Supongamos que $\nabla \mathbf{f}''$ es el rango de la derivada sobre \mathbf{x} (rango exacto). Entonces:

$$\lim_{diam(\mathbf{x}) \rightarrow 0} \frac{diam(\nabla \mathbf{f}''(\mathbf{x}))}{diam(\mathbf{S}^\#(f, \mathbf{x}, c))} = 2 \tag{3.8}$$

$diam(\mathbf{x})$ representa la anchura del intervalo \mathbf{x} .

Así, los slopes pueden conducir a intervalos más ajustados que las derivadas, cuando sea posible aplicarlos.

En general, solamente se pueden calcular acotaciones externas, no los rangos exactos, para el rango de la derivada y para el rango de eslopes $\mathbf{S}^\#(F, \mathbf{X}, \mathbf{C})$, y la relación entre las derivadas y los slopes para funciones multivariantes es más complicada. Sin embargo, si se utiliza diferenciación automática, el cálculo de acotaciones externas de las derivadas y de los slopes son igualmente sencillos, obteniéndose generalmente acotaciones más ajustadas con los slopes que con las derivadas. El Teorema 3.9 es una buena regla para predecir el comportamiento

relativo de derivada intervalar y el cálculo basado en slopes una gran variedad de los posibles escenarios.

SLOPES MULTIVARIABLES

En el ejemplo 3.1, que trata de una función que depende de dos variables, se puede calcular una acotación externa utilizando los slopes correspondientes a las derivadas parciales particulares de $\phi(x_1, x_2)$, es decir, en cada caso, tratando la otra variable como una constante. Por ejemplo, la segunda componente de la matriz slope para ϕ sobre $\mathbf{X} = ([-0.5, 0.5], [-0.5, 0.5])^T$ se puede calcular como:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= \left\{ \mu_2 : \mu_2 = \frac{\phi^2(x_2) - \phi^2(c)}{x_2 - c} \text{ para } x_2 \in [-0.5, 0.5] \right\} = \left\{ \mu_2 : \mu_2 = \frac{\frac{x_2^3}{3} - 0}{x_2 - 0} \text{ para } x_2 \in [-0.5, 0.5] \right\} \\ &= [0, 0.08334] = \mathbf{S}^\#(\phi^2, [-0.5, 0.5], 0) \end{aligned}$$

De forma similar se obtendría para la primera componente:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \left\{ \mu_1 : \mu_1 = \frac{\phi^1(x_1) - \phi^1(c)}{x_1 - c} \text{ para } x_1 \in [-0.5, 0.5] \right\} = \left\{ \mu_1 : \mu_1 = \frac{\frac{x_1^3}{3} + 1 - 1}{x_1 - 0} \text{ para } x_1 \in [-0.5, 0.5] \right\} \\ &= [1, 1.08334] = \mathbf{S}^\#(\phi^1, [-0.5, 0.5], 0) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la extensión intervalar de segundo orden utilizando slopes es:

$$\Phi_{EISLOPE}(\mathbf{X}, C) = \phi(C) + \mathbf{A}(\mathbf{X} - C) = ([1, 1.08334], [0, 0.08334]) \left(\begin{bmatrix} -0.5, 0.5 \\ -0.5, 0.5 \end{bmatrix} \right) \subset [-0.5834, 0.5834]$$

Si se emplea la derivada intervalar, con la forma correspondiente a la extensión intervalar del valor medio se obtiene:

$$\Phi_{EIVM}(\mathbf{X}, C) = \phi(C) + \nabla \Phi_I(\mathbf{X})(\mathbf{X} - C) = [-0.75, 0.75]$$

Si se comparan los resultados obtenidos, se comprueba como la extensión intervalar obtenida con slopes es más ajustada que la correspondiente al valor medio; es decir $[-0.5834, 0.5834] \subset [-0.75, 0.75]$.

Sin embargo, a la hora de calcular slopes de funciones multivariantes, debe tenerse un cuidado especial. Por ejemplo, si $\phi(X) = x_1^3 x_2^3$, con $\mathbf{X} = ([-0.5, 0.5], [-0.5, 0.5])^T$ y $C = (0, 0)^T$, se puede estar tentado de calcular el primer elemento de la acotación con slopes estableciendo $x_2 \leftarrow c_2 = 0$, y utilizando el cálculo del slope univariable para x_1 ; y, de manera similar, calcular el segundo elemento de la acotación con slopes, fijando $x_1 \leftarrow c_1 = 0$. Sin embargo, esto daría lugar a la matriz de slopes claramente incorrecta $\mathbf{A} = (0, 0)$. De este modo, en problemas multivariantes, las variables distintas a la que está activa al calcular una componente de la matriz slope se deben establecer en su intervalo, y no punto, de valores. Esto se cristalizó en el Algoritmo presentado en la Tabla 3.1 [109].

<p>Algoritmo $\mathbf{A} = \mathbf{S}(\phi, \mathbf{X}, \mathbf{C})$ (matriz slope)</p>
<p>Algoritmo</p> <p>ENTRADA: La función $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la caja \mathbf{X} y el centro \mathbf{C}, y un método de cálculo de un intervalo slope $\mathbf{S}(\phi^i, \mathbf{x}, \mathbf{c})$ para una función univariable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.</p> <p>SALIDA: Una matriz slope $\mathbf{A} = \mathbf{S}(\phi, \mathbf{X}, \mathbf{C})$.</p> <p>Para $i = 1, 2, \dots, n$:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Definir $f_i(x) = \Phi_I(\hat{\mathbf{X}})$, donde $\hat{\mathbf{x}}_j = \mathbf{x}_j$ para $1 \leq j \leq n, j \neq i$ y $\hat{\mathbf{x}}_i = x$, donde Φ_I es una extensión intervalar de ϕ. (Nótese que f_i es en general un intervalo, aunque x sea un punto). 2. Determinar \mathbf{a}_i para el slope de la función univariable $f_i: \mathbf{a}_i \leftarrow \mathbf{S}(f_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{c}_i)$. <p>Finpara</p> <p>Fin del Algoritmo</p>

Tabla 3.1 Algoritmo para el cálculo de una matriz slope.

ARITMÉTICA DE SLOPES

Cualquier matriz de Lipschitz intervalar, tal como $\nabla \mathbf{F}_{IN}(\mathbf{X})$ de la Definición 3.11, es también una matriz slope intervalar $\mathbf{S}(F, \mathbf{X}, C)$ para cualquier $C \in \mathbf{X}$. Sin embargo, se pueden calcular automáticamente intervalos ajustados para el C particular o para el $C \subset \mathbf{X}$ particular. Esto se establece con aritmética de slopes, que es similar a la aritmética de derivadas, basada en

las reglas elementales de la diferenciación (dadas en (3.9), representando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el par formado por la función y su derivada):

$$\begin{aligned}
 \langle u, u' \rangle + \langle v, v' \rangle &= \langle u + v, u' + v' \rangle \\
 \langle u, u' \rangle - \langle v, v' \rangle &= \langle u - v, u' - v' \rangle \\
 \langle u, u' \rangle \cdot \langle v, v' \rangle &= \langle u \cdot v, u' \cdot v' + u \cdot v' \rangle \\
 \langle u, u' \rangle / \langle v, v' \rangle &= \langle u / v, (u' \cdot v - u \cdot v') / v^2 \rangle
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

A continuación se muestran fórmulas análogas a éstas para los slopes; los slopes de funciones multivariantes se pueden calcular según estas reglas y mediante el Algoritmo de la Tabla 3.1.

Como con la aritmética diferencial, la aritmética de slopes se basa en definir operaciones y funciones estándar sobre ternas ordenadas de la forma $\langle \mathbf{u}^c, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(s)} \rangle$. La suma y la resta están definidas de la misma forma que en la aritmética de diferenciación, pero la multiplicación y la división difieren algo: las reglas correspondientes a las fórmulas (3.9) son:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{u}^c, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(s)} \rangle + \langle \mathbf{v}^c, \mathbf{v}, \mathbf{v}^{(s)} \rangle &= \langle \mathbf{u}^c + \mathbf{v}^c, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u}^{(s)} + \mathbf{v}^{(s)} \rangle \\
 \langle \mathbf{u}^c, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(s)} \rangle - \langle \mathbf{v}^c, \mathbf{v}, \mathbf{v}^{(s)} \rangle &= \langle \mathbf{u}^c - \mathbf{v}^c, \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u}^{(s)} - \mathbf{v}^{(s)} \rangle \\
 \langle \mathbf{u}^c, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(s)} \rangle \cdot \langle \mathbf{v}^c, \mathbf{v}, \mathbf{v}^{(s)} \rangle &= \langle \mathbf{u}^c \cdot \mathbf{v}^c, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^{(s)} + \mathbf{u}^{(s)} \cdot \mathbf{v}^c \rangle \\
 \langle \mathbf{u}^c, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(s)} \rangle / \langle \mathbf{v}^c, \mathbf{v}, \mathbf{v}^{(s)} \rangle &= \langle \mathbf{u}^c / \mathbf{v}^c, \mathbf{u} / \mathbf{v}, \frac{\mathbf{u}^{(s)} - \mathbf{u}^c \cdot \mathbf{v}^{(s)} / \mathbf{v}^c}{\mathbf{v}} \rangle
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Como con la aritmética diferencial, se pueden definir reglas para las funciones estándar según las reglas de la aritmética diferencial. Sin embargo, los intervalos slopes resultantes no están definidos de la mejor forma posible. Para las funciones estándar $\omega(x)$ en las que $\omega''(x) \neq 0$ para $x \in \mathbf{x}$, una fórmula diferente calcula el rango de slopes exacto $\mathbf{S}^\#(\omega, \mathbf{x}, x^c)$ con el error dentro de la acotación externa dada por el siguiente teorema.

Teorema 3.10 (Generalización de un teorema de Rump [174], [175]) *Supóngase $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{I}$, $\mathbf{x}^c \in \mathbb{I}$, y ω es cualquier función convexa o cóncava (es decir $\omega''(x) \neq 0$ si ω'' es continua) para todo x en el recubrimiento convexo $\mathbf{x} \sqcup \mathbf{x}^c$. Entonces $\mathbf{S}^{(d)}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}^c)$ definido*

$$\mathbf{S}^{(d)}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}^c) = h(\underline{x}) \sqcup h(\bar{x}) \quad \text{con} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{\omega(x) - \omega(\mathbf{x}^c)}{x - \mathbf{x}^c} & \text{para } x \notin \mathbf{x}^c \\ \omega'(\mathbf{x}^c) & \text{de lo contrario} \end{cases} \tag{3.11}$$

es un conjunto slope para ω sobre \mathbf{x} y centrado en \mathbf{x}^c . Si \mathbf{x}^c es un punto, entonces $\mathbf{S}^{(d)}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}^c)$ es el menor conjunto slope posible.

En [174] se prueba que $\mathbf{S}^{(d)}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}^c)$ es un conjunto slope si $\omega''(x) \neq 0$ y se puntualiza en [175] que $\mathbf{S}^{(d)}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}^c)$ es un conjunto slope cuando ω es convexo sobre $\mathbf{x} \sqcup \mathbf{x}^c$. El hecho de que este conjunto de slopes para puntos x^c esté “ajustado” es consecuencia de que cualquier conjunto de slopes debe contener a $h(\underline{x})$ y $h(\bar{x})$. El hecho de que $\mathbf{S}^{(d)}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}^c)$ es un conjunto de slopes cuando \mathbf{x}^c es un intervalo no degenerado se sigue a partir de las propiedades elementales de la aritmética intervalar, asumiendo que $\omega(\mathbf{x}^c)$ contiene el rango de ω sobre \mathbf{x}^c .

En las actuales aplicaciones, h no está definida exactamente como en la ecuación (3.11), ya que el error de acotación externa se convierte en grave cuando x es cerrado sobre \mathbf{x}^c , aunque $x \notin \mathbf{x}^c$. En dichas aplicaciones, $h(x)$ puede definirse como $\omega'(x)$ siempre que $(\mathbf{x}^c - x) < \sqrt{\varepsilon_m}$, donde ε_m es el epsilon máquina.

El Teorema 3.10 se puede aplicar directamente cuando $\omega \in \{\exp, \log, \sqrt{\quad}\}$. También puede aplicarse directamente a $\omega(x) = x^n$ cuando n es par, ya que tales ω están limitados a los casos en los que cumple las hipótesis. Puede aplicarse a $\omega(x) = x^n$ con n impar teniendo en cuenta los signos algebraicos de los extremos del \mathbf{x} y \mathbf{x}^c , y se puede aplicar a las funciones tales como $\omega(x, y) = x^y$, ya que éstas se pueden calcular mediante la composición del log y la exp. Chequeando las posiciones de los puntos de inflexión relativos a \mathbf{x} y \mathbf{x}^c , se puede aplicar el Teorema 3.10 cuando ω es una función trigonométrica inversa.

Es más difícil aplicar el Teorema 3.10 cuando $\omega \in \{\sin, \cos\}$. Para estas funciones, se puede utilizar la derivada intervalar u otras técnicas.

La Toolbox IntLab para MatLab® permite calcular tanto diferenciación automática como slopes de funciones aplicando las correspondientes aritméticas.

3.3.4 Técnica práctica para la construcción de una función de acotación externa utilizando zonotopos, por el método de Kühn

Existen técnicas basadas en la aritmética intervalar que resuelven el problema del valor inicial para los sistemas descritos en tiempo continuo. El pionero en resolver este problema mediante técnicas intervalares fue Moore [149]. Basándose en el uso de expansiones de Taylor de la solución y diferenciación automática, calculó los coeficientes de la expansión. Los coeficientes de Taylor los calculó mediante fórmulas recursivas y, para la acotación del término de error se puede utilizar el operador de Picard-Lindelöf [149]. Con el fin de evitar que la anchura de la solución aumentase en cada instante de integración, utiliza la extensión intervalar del teorema del valor medio; permitiendo que la anchura de los intervalos pueda decrementarse. Se pasa de una evaluación intervalar de la función a otra evaluación intervalar del gradiente de la función.

Lohner [132] mejora el método de Moore al disminuir el efecto envoltura. El método de Lohner se basa en un cambio de coordenadas que permita reducir la sobreestimación. Este cambio de coordenadas se efectúa incluyendo matrices de transformación en el método de Moore; estas matrices permiten calcular un paralelepípedo, que se ajusta mejor al conjunto solución que una caja.

Al igual que en tiempo continuo, en tiempo discreto se han desarrollado métodos intervalares para obtener soluciones de ecuaciones dinámicas. A pesar de que el método de Lohner permite disminuir considerablemente el efecto envoltura, el conjunto solución se sigue aproximando mediante un paralelepípedo, provocando una estimación excesivamente conservadora. El método de Kühn [116] aproxima la región solución mediante un zonotopo (ampliamente estudiado en el capítulo 2 de esta tesis). Demuestra el crecimiento subexponencial de la estimación del conjunto alcanzable exacto.

En el contexto de la acotación de los sistemas dinámicos, el método de Kühn se ha utilizado para acotar su trayectoria; en este apartado, dicho método se ha adaptado para realizar la acotación del rango de una función.

Para poder explicar el método de Kühn es necesario definir primero el *operador acotación*.

Definición 3. 13 (Operador Acotación) *Sea un sistema discreto:*

$$x_{k+1} = f(x_k, w_k) \quad (3.12)$$

donde $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ y $w \in W \subseteq \mathbb{R}^{n_w}$ siendo W un conjunto compacto (el conjunto W agrupa las posibles señales de control e incertidumbre del sistema). El operador $\Psi(\cdot, \cdot): \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ es un operador de acotación si para cualquier conjunto $\chi \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ con $\tilde{\chi} = \Psi(\chi, W)$ se tiene que $f(\chi, W) \subseteq \tilde{\chi}$.

El método de Kühn es un procedimiento para implementar el operador acotación, proporcionando una solución garantista al problema del valor inicial en sistemas no lineales discretos. La evolución del sistema se aproxima mediante zonotopos. El Teorema 2.7 define el operador inclusión en zonotopos. Dicho operador proporciona un zonotopo que acota a una familia de zonotopos dada. Este operador de inclusión se utiliza en el método de Kühn.

En [39] se presenta una generalización del método de Kühn, incluyendo la posibilidad de considerar incertidumbre en el sistema discreto utilizado. Esta generalización se materializa en el siguiente teorema.

Teorema 3.11 Sea el sistema (3.12), un zonotopo $X = p \oplus H\mathbf{B}^m$ y una caja W donde $p \in \mathbb{R}^n$, $H \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $W \subseteq \mathbb{R}^{n_w}$. Calcular las siguientes extensiones intervalares naturales:

- Un zonotopo $q \oplus \mathbf{SB}^n = \square(f(p, W))$.
- Una matriz intervalar $M = \square(\nabla_x f(X, W)H)$.
- Un zonotopo $\Psi(X, W) = q \oplus \mathbf{SB}^n \oplus \diamond(\mathbf{MB}^m) = q \oplus H_q \mathbf{B}^l$ con $l = 2n + m$

donde $\square(f(p, W))$ y $\square(\nabla_x f(X, W))$ son evaluaciones intervalares de las funciones $f(p, W)$ y $\nabla_x f(X, W)$, y $\diamond(\mathbf{MB}^m)$ es el operador inclusión zonotopo. Asumiendo todo lo anterior, se tiene que $\Psi(\cdot, \cdot)$ es un operador de acotación; es decir, $f(X, W) \subseteq \Psi(X, W)$.

Visto el método de Kühn, la construcción de una función acotación externa se realiza de la siguiente forma:

Dado el dominio $X = p \oplus H\mathbf{B}^m$, $X \in \mathbb{R}^n$, dado con una representación matricial de un zonotopo de orden m ; se trata de calcular el rango aproximado de la función $f(X)$ aplicando el método de Kühn. Desarrollando:

$$\begin{aligned}
 f(X) &\subseteq f(p) \oplus \square(\nabla f(X))(X - p) = \\
 &\subseteq f(p) \oplus \square(\nabla f(X))(H\mathbf{B}^m) = && \text{por ser } Z_l = \square(\nabla f(X)) \\
 &\subseteq f(p) \oplus Z_l H \mathbf{B}^m = && \text{como } Z_l H = M, \quad M \in \mathbb{R}^{n \times m} \\
 &\subseteq f(p) \oplus \mathbf{MB}^m
 \end{aligned}$$

Según el Teorema 2.7 sobre inclusión de zonotos, se tiene que:

$$f(X) \subseteq f(p) \oplus \left[\text{mid}(M) \quad G \right] \begin{bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^n \end{bmatrix} = f(p) \oplus \mathbf{JB}^{m+n}$$

$G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal cuyos elementos satisfacen $G_{ii} = \sum_{j=1}^m \frac{\text{diam}(M_{ij})}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

El Teorema 3.11 nos dice que, definido un dominio de una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como un zonotopo $X = p \oplus \mathbf{HB}^m$, $X \in \mathbb{R}^n$, podemos construir un zonotopo $f(p) \oplus \mathbf{JB}^{m+n}$ de tal forma que el rango de dicha función esté incluido en dicho zonotopo; es decir $f(X) \subseteq f(p) \oplus \mathbf{JB}^{m+n}$.

El zonotopo $f(p) \oplus \mathbf{JB}^{m+n}$ construido para $f(X)$, contiene al rango exacto de la función f en X . El rango aproximado obtenido mediante la aplicación del método de Kühn, por aplicarse un único paso, puede que no sea muy ventajoso si lo comparamos con otros métodos como puede ser el intervalar. Cuando realmente se comprueba la ventaja es al utilizarlo para la definición de conjuntos alcanzables en los que, por aplicarlo un número de pasos n ($n > 1$), se comprueba la eficacia del mismo generalmente; por ejemplo se puede comparar con el método intervalar. Con la extensión intervalar natural, el conjunto obtenido después de dar un nuevo paso se va haciendo cada vez mayor, siendo más ajustado el zonotopo final del método propuesto por Kühn.

En el capítulo 2 de esta tesis, se hace un estudio detallado de los zonotos y se trata también la inclusión de zonotos.

Más adelante, al final de este tema, se desarrollan varios ejemplos con el fin de poder comparar las distintas técnicas de construcción de funciones de acotación externa propuesta.

3.3.5 Técnica práctica para la construcción de una función de acotación externa utilizando funciones DC

Como ya se ha comentado anteriormente, la Optimización DC forma parte de la Optimización Global y, trata la resolución de problemas de Programación Matemática No lineal cuya función objetivo y/o restricciones pueden expresarse como funciones DC.

Una función se dice DC si puede representarse como la diferencia de dos funciones convexas. El conjunto de funciones DC definidas en un conjunto convexo compacto de \mathbb{R}^n es denso en el conjunto de las funciones continuas definidas en ese mismo conjunto. Por lo tanto, en principio, cada función continua puede aproximarse por una función DC con cualquier

precisión. Además, cada función de clase C^2 (derivada segunda continua) es una función DC. Aunque se dispone de representaciones DC para algunas clases de funciones interesantes, encontrar tales representaciones para una función DC arbitraria resulta una tarea difícil.

Una de las propiedades más importantes que cumplen la clase de funciones DC es su estabilidad con respecto a las operaciones que aparecen habitualmente en problemas de optimización. Como se pondrá de manifiesto en numerosos resultados más adelante, la clase de funciones DC es cerrada para las operaciones de suma, producto por escalares, máximo o mínimo puntual, producto, cociente, composición, etc. [154].

Dentro de la Optimización Global, los problemas que involucran funciones DC se están cada vez considerando más, ante la evidencia [192] de que, en la práctica, las funciones que aparecen con mayor frecuencia son DC. Estas funciones aparecen involucradas en problemas de diferentes disciplinas como: Economía, Ingeniería, Física, Química, Ecología, etc. (en las referencias [94], [191], aparecen a su vez otras referencias donde se enumeran aplicaciones).

Una acotación del rango de una función DC puede obtenerse por la linealización de las funciones convexas que la representan.

Dada una función, se pueden producir dos situaciones:

1. Se conoce la función DC que representa a la función $f : f(x) = \check{g}(x) - \tilde{h}(x)$.
2. No se conoce la representación DC de la función f ; en cuyo caso se obtiene una forma como: $f(x) = f(x) + x^T Q x - x^T Q x$; siendo $f(x) + x^T Q x$ y $x^T Q x$ funciones convexas.

Tanto en una situación como en otra la acotación externa del rango de una función f se realiza de la misma forma; en ambas situaciones se linealizan las funciones convexas que definen a la función f mediante su diferencia. Se trata de definir relajaciones cóncavas y convexas de la función f (\hat{f} y \check{f} respectivamente). Estas relajaciones son estimadores inferiores y superiores respectivamente de la función f .

Dada una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que directamente es una función DC o se puede buscar una representación DC de la misma: $f(\mathbf{x}) = \check{g}(\mathbf{x}) - \tilde{h}(\mathbf{x})$. Un estimador inferior de la función f (\hat{f}) se obtiene como: $\hat{f}(\mathbf{x}) = g_L(\mathbf{x}) - \tilde{h}(\mathbf{x})$, siendo $g_L(\mathbf{x})$ la linealización de la función $\check{g}(\mathbf{x})$ en un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. De la misma forma, un estimador superior de la función f (\check{f}) se

obtiene como: $\check{f}(\mathbf{x}) = \check{g}(\mathbf{x}) - h_L(\mathbf{x})$, siendo $h_L(\mathbf{x})$ la linealización de la función $\check{h}(\mathbf{x})$ en el mismo punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$.

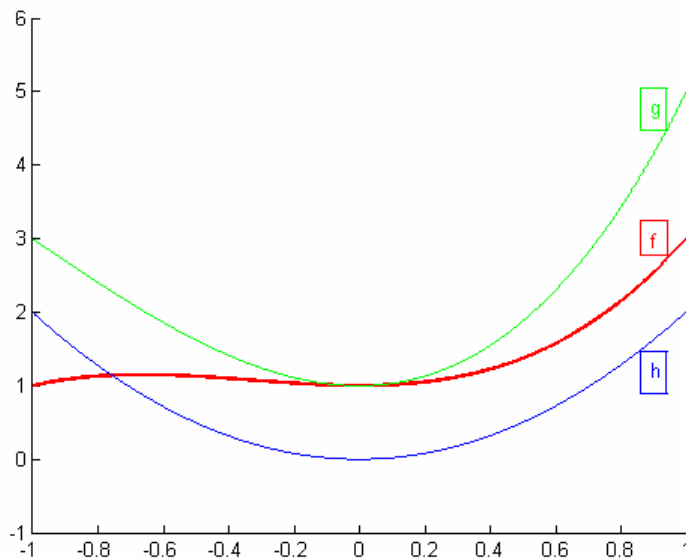


Figura 3.4 La función f (en color rojo) es una función DC definida por las funciones convexas \check{g} (en color verde) y \check{h} (en color azul) ($f = \check{g} - \check{h}$).

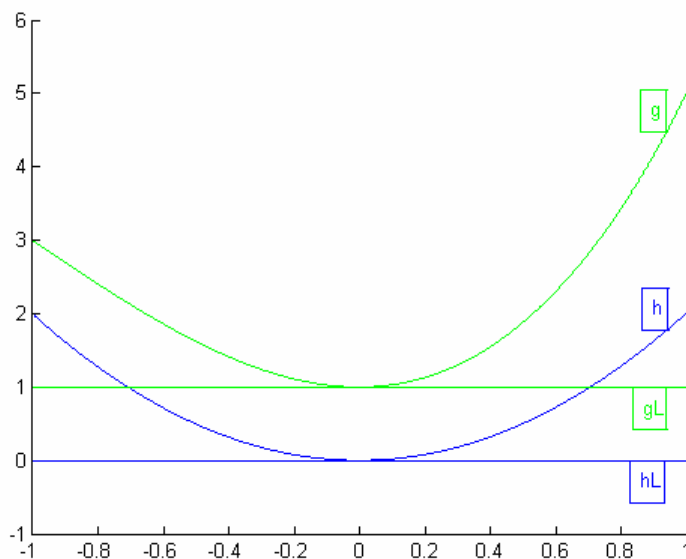


Figura 3.5 Funciones convexas \check{g} (en color verde) y \check{h} (en color azul) con sus respectivas linealizaciones g_L y h_L en el punto $x_0 = 0$.

En la Figura 3.4, en la Figura 3.5 y en la Figura 3.6 se representan gráficamente todas las funciones a las que se ha hecho referencia anteriormente, considerando la función $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, siendo X un intervalo real.

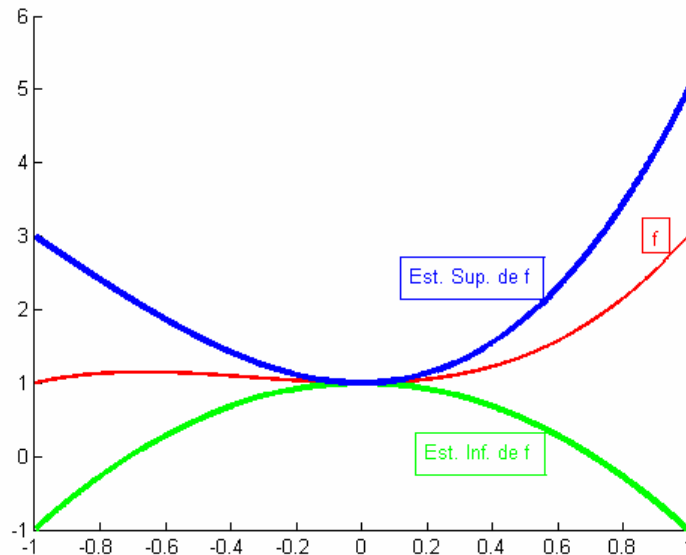


Figura 3.6 Función f (en color rojo), una estimación inferior de la función f (\hat{f}) (en color verde) y una estimación superior de f (\check{f}) (en color azul).

El rango de acotación externo, empleando técnicas DC, correspondiente al rango de la función $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ viene dado por el intervalo $\left[\min(\hat{f}(X)), \max(\check{f}(X)) \right]$.

En el apartado 3.5 de este capítulo se muestran algunos ejemplos comparativos de los métodos de acotación externa del rango de una función descritos.

En el siguiente apartado, apartado 3.4, se profundiza en el concepto de función DC y se describen métodos para obtener una representación de una función como función DC.

3.4 Funciones DC

Como ya se ha comentado anteriormente, en el campo de la optimización no convexa, la programación DC juega un papel importante e interesante tanto por sus buenas características teóricas como por su amplio rango de aplicaciones. Se emplean funciones DC, representadas como la diferencia de dos funciones convexas.

Antes de definir formalmente una *función DC*, a continuación se dan las definiciones de *conjunto convexo* y *función convexa*.

Definición 3.14 (Conjunto convexo) Un conjunto Ω se dice convexo si el segmento que une dos puntos cualesquiera pertenecientes a Ω pertenece a Ω , es decir, si $\forall x_1, x_2 \in \Omega$ y $\forall \theta: 0 \leq \theta \leq 1$, se tiene que $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in \Omega$.

Definición 3.15 (Función convexa) Una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es convexa si el $\text{dom}(f)$ es un conjunto convexo y si $\forall x, y \in \text{dom}(f)$ y $\forall \theta: 0 \leq \theta \leq 1$ se tiene que $f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$.

Definición 3.16 (Función DC) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto convexo. Una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es DC sobre Ω si puede expresarse como diferencia de dos funciones convexas definidas sobre Ω , es decir,

$$f(x) = \check{g}(x) - \check{h}(x) \quad (3.13)$$

siendo \check{g} y \check{h} funciones convexas sobre Ω . La representación (3.13) se dice que es una *descomposición DC* de f .

Para la identificación de las funciones DC, un resultado de gran importancia relaciona a una *función localmente DC* con un conjunto convexo.

Definición 3.17 (Función localmente DC) Una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida en un conjunto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ se dice que es localmente DC si para todo $x_0 \in \Omega$, existe un entorno N de x_0 y un par de funciones convexas \check{p} y \check{q} tales que $f(x) = \check{p}(x) - \check{q}(x) \quad \forall x \in N$.

Proposición 3.1 Toda función localmente DC en un conjunto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, abierto o cerrado, es una función DC en Ω [90].

Corolario 3.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto convexo abierto o cerrado y f_1, f_2 funciones DC en Ω . Entonces, el producto $f_1(x) \cdot f_2(x)$ y el cociente $f_2(x)/f_1(x)$, si $f_1(x) \neq 0$, son funciones DC en Ω [90].

El siguiente corolario, consecuencia también de la Proposición 3.1, establece el carácter DC de toda función dos veces continuamente diferenciable.

Corolario 3.2 [90] Toda función $f \in C^2$ es DC en cualquier conjunto compacto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Se deduce que las funciones DC constituyen un subespacio denso del espacio de Banach¹² de las funciones continuas definidas sobre un conjunto convexo y compacto, dotado con la norma del supremo¹³.

Definición 3.18 (Función vectorial DC) Dado un conjunto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, una función vectorial $F = (f_1, \dots, f_p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ se dice que es DC en Ω si cada componente $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$ es DC en Ω .

Proposición 3.2 (Composición de funciones DC) Sean $\Omega_1 \in \mathbb{R}^m$, $\Omega_2 \in \mathbb{R}^p$ conjuntos convexos, tales que Ω_1 es abierto o cerrado y Ω_2 es abierto. Si $F_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, $F_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^q$ son funciones DC, entonces $F_2 \circ F_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^q$ es también una función DC [191].

3.4.1 Obtención de funciones DC

La mayor parte de las funciones que están implicadas en problemas de optimización son funciones DC, pero identificarlas como tales no suele ser fácil; incluso una vez identificadas como funciones DC, no es fácil obtener una descomposición DC explícita de las mismas. A continuación se dan una serie de resultados que permiten obtener representaciones DC a partir de otras funciones más sencillas de las que se conoce sus representaciones DC.

Proposición 3.3 (Combinación lineal, máximo y mínimo, de funciones DC) Sean f_1, \dots, f_r funciones DC en $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ conjunto compacto y convexo, con $f_i = \check{g}_i - \check{h}_i$ (\check{g}_i, \check{h}_i funciones convexas). Entonces, dados $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, las funciones $\sum_{i=1}^r \lambda_i f_i$, $\min\{f_i(x) : i = 1, \dots, r\}$ y $\max\{f_i(x) : i = 1, \dots, r\}$ son funciones DC en el conjunto Ω . En particular, una descomposición DC para estas funciones viene dada por:

1.
$$\sum_{i=1}^r \lambda_i f_i = \left(\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i \check{g}_i - \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i \check{h}_i \right) - \left(\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i \check{h}_i - \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i \check{g}_i \right)$$
2.
$$\max_{i=1, \dots, r} f_i = \max_{i=1, \dots, r} \left[\check{g}_i + \sum_{j \neq i} \check{h}_j \right] - \sum_{i=1}^r \check{h}_i$$

¹² Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado que es un espacio métrico completo respecto a la métrica derivada de su norma.

¹³ En el espacio de las funciones continuas en un intervalo $[a, b]$, la norma del supremo se define como: $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$.

$$3. \min_{i=1,\dots,r} f_i = \sum_{i=1}^r \check{g}_i - \max_{i=1,\dots,r} \left[\check{h}_i + \sum_{j \neq i} \check{g}_j \right] \quad [92].$$

Proposición 3.4 [190] Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(x)$ es cóncava para $x < \bar{x}$ y convexa para $x \geq \bar{x}$. Entonces, una descomposición DC para la función f viene dada por $f(x) = \check{f}_1(x) - \check{f}_2(x)$, siendo

$$\check{f}_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})) & \text{si } x < \bar{x} \\ f(x) - \frac{1}{2}(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})) & \text{si } x \geq \bar{x} \end{cases}$$

$$\check{f}_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})) - f(x) & \text{si } x < \bar{x} \\ -\frac{1}{2}(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})) & \text{si } x \geq \bar{x} \end{cases}$$

La base de la obtención de una descomposición DC del producto de dos funciones está en la siguiente proposición.

Proposición 3.5 [192] (Descomposición DC de un producto de funciones DC) Sean $\check{f}_1, \check{f}_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$ funciones convexas. Entonces, una descomposición DC para su producto viene dada por:

$$\check{f}_1(x)\check{f}_2(x) = \frac{1}{2}(\check{f}_1(x) + \check{f}_2(x))^2 - \frac{1}{2}(\check{f}_1^2(x) + \check{f}_2^2(x))$$

Proposición 3.6 [93] (Descomposición DC de una función de clase C^2 en \mathbb{R}^m) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto convexo y compacto y f una función de clase C^2 en Ω . Entonces, una descomposición DC para f viene dada por:

$$f(x) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\rho\|x\|^2 \right) - \frac{1}{2}\rho\|x\|^2 \quad (3.14)$$

siendo ρ una constante no negativa que verifica:

$$-\min \left\{ \langle u, \nabla^2 f(x)u \rangle : x \in \Omega, \|u\| = 1 \right\} \leq \rho$$

Cuando la función f es de clase C^2 en \mathbb{R} , la siguiente proposición nos proporciona una representación DC alternativa.

Proposición 3.7 [28] (Descomposición DC para una función de clase C^2 en \mathbb{R}) Sea $I \subset \mathbb{R}$ ($I \in \Pi$) un intervalo compacto y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces continuamente diferenciable.

Dado $x_0 \in I$, sean

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)[f''(t)]^+ dt \\ f_2(x) &= \int_{x_0}^x (x-t)[f''(t)]^- dt \end{aligned}$$

para todo $x \in I$, con $[A]^+ = \max\{0, A\}$ y $[A]^- = \max\{0, -A\}$. Entonces f_1 y f_2 son funciones convexas ($f_1 \equiv \check{f}_1$ y $f_2 \equiv \check{f}_2$) (diferenciables) que satisfacen la ecuación $f = \check{f}_1 - \check{f}_2$ sobre I .

En [28] se proporciona una descomposición DC para un polinomio en una variable que puede extenderse a una serie infinita:

Sea f un polinomio de una variable real con coeficientes reales:

$$f(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k \quad (3.15)$$

a_k^+ , a_k^- , x_+ , x_- representan la parte positiva y negativa de a_k y x ; es decir,

$$x_+ = \max\{0, x\} = \frac{1}{2}(x + |x|); \quad x_- = \max\{0, -x\} = \frac{1}{2}(-x + |x|) \quad (3.16)$$

Evidentemente, las potencias x^0, x^2, x^4, \dots y $x_+^3, x_-^3, x_+^5, x_-^5, \dots$ son funciones de la variable x convexas (diferenciables), porque sus segundas derivadas nunca son negativas. Por tanto, combinaciones lineales de esas potencias con coeficientes no negativos son también funciones convexas (diferenciables). Pongamos el polinomio $f(x)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \sum_{k=2,4,\dots} (a_k^+ - a_k^-) x^k + \sum_{k=3,5,\dots} (a_k^+ - a_k^-) (x_+^k - x_-^k) = \\ &= \left\{ a_0 + a_1 x + \sum_{k=2,4,\dots} a_k^+ x^k + \sum_{k=3,5,\dots} (a_k^+ x_+^k + a_k^- x_-^k) \right\} - \\ &\quad - \left\{ \sum_{k=2,4,\dots} a_k^- x^k + \sum_{k=3,5,\dots} (a_k^- x_+^k + a_k^+ x_-^k) \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Esto nos lleva al Teorema 3.12:

Teorema 3.12 [28] (Representación DC para un polinomio en la variable x) Sea

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{k=2,4,\dots} a_k^+ x^k + \sum_{k=3,5,\dots} (a_k^+ x_+^k + a_k^- x_-^k) \quad (3.18)$$

$$h(x) = \sum_{k=2,4,\dots} a_k^- x^k + \sum_{k=3,5,\dots} (a_k^- x_+^k + a_k^+ x_-^k) \quad (3.19)$$

Entonces g y h son funciones convexas ($g \equiv \check{g}$, $h \equiv \check{h}$) (diferenciables), y la ecuación

$$f = \check{g} - \check{h} \quad (3.20)$$

se cumple para la función polinomial.

Si f es una serie infinita, $p = \infty$, el Teorema 3.12 sigue siendo válido dentro del intervalo abierto de la convergencia absoluta de f , puesto que el límite punto a punto de la secuencia de funciones convexas es también convexa.

En [192] se puede encontrar representaciones DC para una función afín a trozos y para una forma cuadrática no definida; también se describe el proceso para obtener una representación DC de un polinomio en \mathbb{R}_+^m .

La siguiente Proposición 3.8 muestra que, bajo hipótesis no excesivamente restrictivas, una función monótona convexa (o cóncava) de una función DC es también DC, obteniéndose fácilmente su descomposición. Esto nos va a permitir tratar funciones no lineales.

Proposición 3.8 [192] (Representación DC de una función de función DC i) Sea $h(x) = \check{u}(x) - \check{v}(x)$ donde $\check{u}, \check{v} : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ son funciones convexas definidas sobre un conjunto convexo y compacto $M \subset \mathbb{R}^m$, tal que $h(x) \geq 0$ para todo $x \in M$. Si $\check{q} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa no creciente tal que $\check{q}_+'(0) > -\infty$ ($\check{q}_+'(0)$ representa la derivada por la derecha de $\check{q}(t)$ en el punto 0), entonces $\check{q}(h(x))$ es una función DC en M :

$\check{q}(h(x)) = g(x) - K(\check{u}(x) + \check{v}(x))$, siendo $g(x) = \check{q}(h(x)) + K(\check{u}(x) + \check{v}(x))$ una función convexa ($g \equiv \check{g}$) y K es cualquier constante que verifique $K \geq |\check{q}_+'(0)|$.

Para el caso en que \hat{q} sea una función cóncava no decreciente y $\hat{q}_+'(0) < +\infty$ se establece el siguiente resultado análogo al de la Proposición 3.8:

Proposición 3.9 (Representación DC de una función de función DC ii) Sea $h(x) = \check{u}(x) - \check{v}(x)$ donde $\check{u}, \check{v} : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ son funciones convexas definidas sobre un conjunto convexo y compacto $M \subset \mathbb{R}^m$, tal que $0 \leq h(x) \leq a$ para todo $x \in M$. Si $\check{q} : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa no decreciente tal que $\check{q}_-'(a) < +\infty$ ($\check{q}_-'(a)$ representa la derivada por la izquierda de $\check{q}(t)$ en el punto a), entonces $\check{q}(h(x))$ es una función DC en M :

$\tilde{q}(h(x)) = g(x) - K(a + \tilde{v}(x) - \tilde{u}(x))$, siendo $g(x) = \tilde{q}(h(x)) + K(a + \tilde{v}(x) - \tilde{u}(x))$ una función convexa ($g \equiv \tilde{g}$) y K es cualquier constante que verifique $K \geq \tilde{q}'(a)$ [192].

3.5 Ejemplos de aplicación de acotación externa del rango de una función

En este apartado se aplican los métodos de cálculo de los rangos de acotación externa descritos a dos funciones reales de una variable real. Se consideran dos ejemplos de funciones, una función que está definida directamente como función DC ($f_1(x) = x^2 - e^x = \tilde{g}_1(x) - \tilde{h}_1(x)$), con $\tilde{g}_1(x) = x^2$ y $\tilde{h}_1(x) = e^x$, y otra función ($f_2(x) = x^3 + x^2 + 1$), doblemente diferenciable, con la que sumando y restando términos convexos se consigue una representación DC de la misma ($f_2(x) = x^3 + x^2 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = \tilde{g}_2(x) - \tilde{h}_2(x)$), con $\tilde{g}_2(x) = x^3 + x^2 + 1 + 2x^2$ y $\tilde{h}_2(x) = 2x^2$.

3.5.1 Ejemplo 1

Dada la función $f_1 : \mathbf{x} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 - e^x = \tilde{g}_1(x) - \tilde{h}_1(x)$ y $\mathbf{x} = [0, 2]$, se va a obtener el rango de acotación externo aplicando aritmética intervalar, la extensión del valor medio, la técnica de slopes y la correspondiente a la representación DC. Se comparan entre sí los resultados obtenidos con cada una de esas técnicas y con el rango exacto de la función.

RANGO EXACTO DE LA FUNCIÓN

La representación gráfica de la función f_1 definida con dominio $\mathbf{x} = [0, 2]$ viene dada en la Figura 3.7. Su rango de representación exacto está definido por el intervalo:

$$\mathbf{f}_1^e(\mathbf{x}) = [-3.3891, -1.0000] \tag{3.21}$$

RANGO CON ARITMÉTICA INTERVALAR

Si se aplica la extensión intervalar natural y según la aritmética intervalar se obtiene la siguiente acotación externa del rango:

$$\begin{aligned} f_1(x) = x^2 - e^x \Rightarrow \mathbf{f}_{1IN}(X) &= X^2 - e^X = ([0, 2])^2 - e^{[0, 2]} = [0, 4] - [e^0, e^2] = \\ &= [-e^2, 3] = [-7.3891, 3.0000] \end{aligned} \tag{3.22}$$

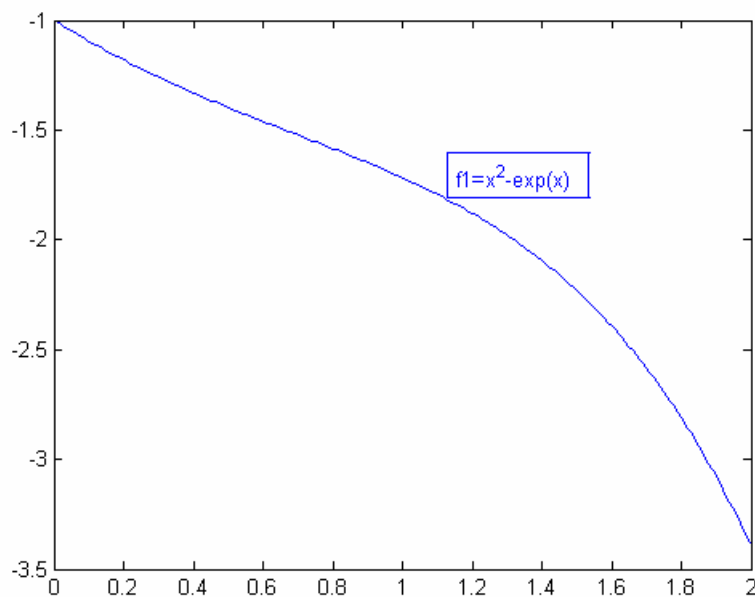


Figura 3.7 Representación gráfica de la función $f_1(x) = x^2 - e^x = \check{g}_1(x) - \check{h}_1(x)$ en el dominio $\mathbf{x} = [0, 2]$, con rango $\mathbf{f}_1''(\mathbf{x}) = [-3.3891, -1.0000]$.

RANGO CON LA EXTENSIÓN INTERVALAR DEL VALOR MEDIO

La extensión intervalar del valor medio de $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre \mathbf{x} y centrada en c es: $\mathbf{f}_{1EIVM}(\mathbf{x}, c) = f_1(c) + \square(\nabla f_1(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - c)$. Para la función planteada en este ejemplo y considerándola centrada en $c = 1$, se tiene:

$$f_1(x) = x^2 - e^x$$

$$\mathbf{x} = [0, 2]$$

$$\nabla f_1(x) = 2x - e^x$$

$$c = 1 \Rightarrow f_1(c) = 1 - e$$

$$\mathbf{x} - c = [0, 2] - 1 = [-1, 1]$$

$$\square(\nabla f_1(\mathbf{x})) = 2\mathbf{x} - e^{\mathbf{x}} = 2[0, 2] - e^{[0, 2]} = [0, 4] - [e^0, e^2] = [-e^2, 3]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{1EIVM}(\mathbf{x}, c) &= (1 - e) + [-e^2, 3]([0, 2] - 1) = (1 - e) + [-e^2, 3][-1, 1] = (1 - e) + [-e^2, e^2] = \\ &= [1 - e - e^2, 1 - e + e^2] = [-9.1073, 5.6708] \end{aligned} \quad (3.23)$$

RANGO CON SLOPES

Aplicando slopes se obtiene:

$$\mathbf{f}_{1EISLOPE}(\mathbf{x}) = f_1(c) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - c)$$

Llamando la función $slopeinit(C, X)$, dentro de la toolbox intlab de la MatLab, que calcula los slopes aplicando la aritmética de slopes, se obtiene:

- Slope interval center: [1.0000,1.0000]
- Slope interval range: [-5.3891,1.9525]
- Slope interval slope: [-3.6708,1.2818]

$$\mathbf{f}_{1EISLOPE}(\mathbf{x}) = f_1(c) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - c) = [-5.3891, 1.9525] \quad (3.24)$$

RANGO CON FUNCIONES DC

En este caso, la función viene definida directamente como una función DC:

$$f_1(x) = x^2 - e^x = \check{g}_1(x) - \check{h}_1(x)$$

$$\check{g}_1(x) = x^2 \Rightarrow \check{g}_1'(x) = 2x$$

$$\check{h}_1(x) = e^x \Rightarrow \check{h}_1'(x) = e^x$$

$$c = 1$$

Las linealizaciones en $c=1$ correspondientes a las funciones $\check{g}_1(x)$ y $\check{h}_1(x)$ son respectivamente:

$$g_{1L}(x) = \check{g}_1(c) + \nabla \check{g}_1(c)(x - c) = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$$

$$h_{1L}(x) = \check{h}_1(c) + \nabla \check{h}_1(c)(x - c) = e + e(x - 1) = xe$$

Por lo tanto un estimador inferior válido (función cóncava) es:

$$\widehat{f}_1(x) = g_{1L}(x) - \check{h}_1(x) = 2x - 1 - e^x; \text{ que tiene su mínimo en el punto } x = 2 \text{ (} \widehat{f}_1(2) = 3 - e^2 \text{)}.$$

y un estimador superior válido (función convexa) es:

$$\check{f}_1(x) = \check{g}_1(x) - h_{1L}(x) = x^2 - xe; \text{ que tiene su máximo en el punto } x = 0 \text{ (} \check{f}_1(0) = 0 \text{)}.$$

Por lo tanto, la acotación externa del rango que se obtiene aplicando funciones DC es:

$$[-4.3891, 0] \tag{3.25}$$

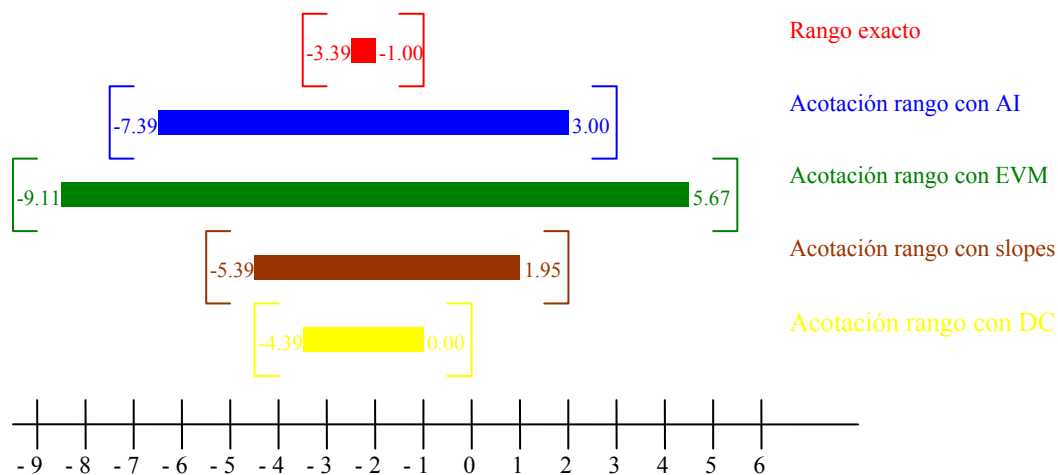


Figura 3.8 Comparación de las acotaciones externas del rango de la función $f_1(x) = x^2 - e^x = \check{g}_1(x) - \check{h}_1(x)$ según se emplee aritmética intervalar (color azul), Extensión del Teorema del Valor Medio (color verde), slopes (color marrón) o funciones DC (color amarillo). El rango exacto de la función se representa en color rojo.

En la Figura 3.8 se representan las acotaciones externas según las distintas metodologías propuestas y se comparan entre sí y con el rango exacto de la función. En este caso, el método que más aproxima la acotación externa al rango real es el correspondiente a la utilización de funciones DC (en color amarillo en la Figura 3.8).

3.5.2 Ejemplo 2

Dada la función $f_2 : \mathbf{x} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^3 + x^2 + 1$ y $\mathbf{x} = [-1, 1]$, al igual que en el ejemplo 1, se va a obtener el rango de acotación externo aplicando aritmética intervalar, la extensión del valor medio, la técnica de slopes y la correspondiente a la representación DC. Se comparan entre sí los resultados obtenidos con cada una de esas técnicas y con el rango exacto de la función. En este caso, la función no tiene una representación DC explícita; se va a definir una representación DC añadiendo y restando términos convexos.

RANGO EXACTO DE LA FUNCIÓN

La representación gráfica de la función f_2 definida con dominio $\mathbf{x} = [-1, 1]$ viene dada en la Figura 3.9.

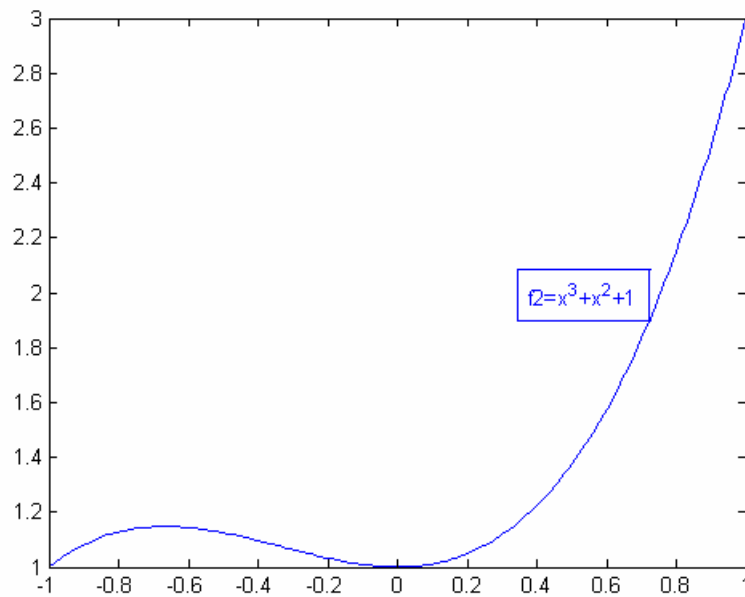


Figura 3.9 Representación gráfica de la función $f_2(x) = x^3 + x^2 + 1$ en el dominio $\mathbf{x} = [-1, 1]$, con rango $\mathbf{f}_2''(\mathbf{x}) = [1, 3]$.

El rango de representación exacto está definido por el intervalo:

$$\mathbf{f}_2''(\mathbf{x}) = [1, 3] \quad (3.26)$$

RANGO CON ARITMÉTICA INTERVALAR

Con la extensión intervalar natural y aplicando aritmética intervalar se obtiene la siguiente acotación externa del rango:

$$\begin{aligned} f_2(x) = x^3 + x^2 + 1 \Rightarrow \mathbf{f}_{2EIN}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^3 + \mathbf{x}^2 + 1 = [-1, 1]^3 + [-1, 1]^2 + 1 = \\ &= [-1, 1] + [0, 1] + 1 = [-1, 2] + 1 = [0, 3] \end{aligned} \quad (3.27)$$

RANGO CON LA EXTENSIÓN INTERVALAR DEL VALOR MEDIO

La extensión intervalar del valor medio de $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre \mathbf{x} y centrada en c es: $\mathbf{f}_{2EIVM}(\mathbf{x}, c) = f_2(c) + \square(\nabla f_2(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - c)$. Para la función planteada en este ejemplo y considerándola centrada en $c = 0$, se tiene:

$$f_2(x) = x^3 + x^2 + 1$$

$$\mathbf{x} = [-1, 1]$$

$$\nabla f_2(x) = 3x^2 + 2x$$

$$c = 0 \Rightarrow f_2(c) = 1$$

$$\mathbf{x} - c = [-1, 1] - 0 = [-1, 1]$$

$$\square(\nabla f_2(\mathbf{x})) = 3\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} = 3[-1, 1]^2 + 2[-1, 1] = [0, 3] + [-2, 2] = [-2, 5]$$

$$\mathbf{f}_{2EIVM}(\mathbf{x}, c) = 1 + [-2, 5]([-1, 1] - 0) = 1 + [-5, 5] = [-4, 6] \quad (3.28)$$

RANGO CON SLOPES

Aplicando slopes se obtiene:

$$\mathbf{f}_{2EISLOPE}(\mathbf{x}) = f_2(c) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - c)$$

Aplicando la función *slopeinit*(C, X) que, como se ha indicado anteriormente, calcula los slopes aplicando la aritmética de slopes, se obtiene:

– Slope interval center: [1.0000, 1.0000]

– Slope interval range: [0.0000, 3.0000]

– Slope interval slope: [-1.0000, 2.0000]

$$\mathbf{f}_{2EISLOPE}(\mathbf{x}) = f_2(c) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - c) = [0.0000, 3.0000] \quad (3.29)$$

RANGO CON FUNCIONES DC

En este caso, la función, al no venir definida directamente como una función DC, hay que convertirla en DC. Se puede convertir en DC sumando y restando términos convexos. Para la función f_2 se va a sumar y restar $2x^2$ (se justifica en detalle en el capítulo 4):

$$f_2(x) = x^3 + x^2 + 1 = x^3 + x^2 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = \check{g}_2(x) - \check{h}_2(x)$$

$$\check{g}_2(x) = x^3 + x^2 + 1 + 2x^2 \Rightarrow \check{g}_2'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$\check{h}_2(x) = 2x^2 \Rightarrow \check{h}_2'(x) = 4x$$

$$c = 0$$

Las linealizaciones en $c = 0$ correspondientes a las funciones $\check{g}_2(x)$ y $\check{h}_2(x)$ son respectivamente:

$$g_{2L}(x) = \check{g}_2(c) + \nabla \check{g}_2(c)(x - c) = 1 + 0(x - 0) = 1$$

$$h_{2L}(x) = \check{h}_2(c) + \nabla \check{h}_2(c)(x - c) = 0 + 0(x - 0) = 0$$

Por lo tanto un estimador inferior válido (función cóncava) es:

$$\hat{f}_2(x) = g_{2L}(x) - \check{h}_2(x) = 1 - 2x^2; \text{ que tiene su mínimo en los puntos } x = -1 \text{ y } x = 1 (\hat{f}_2(-1) = \hat{f}_2(1) = -1).$$

y un estimador superior válido (función convexa) es:

$$\check{f}_2(x) = \check{g}_2(x) - h_{2L}(x) = x^3 + x^2 + 1 + 2x^2 - 0; \text{ que tiene su máximo en el punto } x = 1 (\check{f}_2(1) = 5).$$

Por lo tanto, la acotación externa del rango que se obtiene aplicando funciones DC es:

$$[-1, 5] \tag{3.30}$$

En la Figura 3.10 se representan las acotaciones externas según las distintas metodologías propuestas y se comparan entre sí y con el rango exacto de la función. En este caso, los métodos que más aproximan la acotación externa al rango real son los correspondientes a la aritmética intervalar y a los slopes.

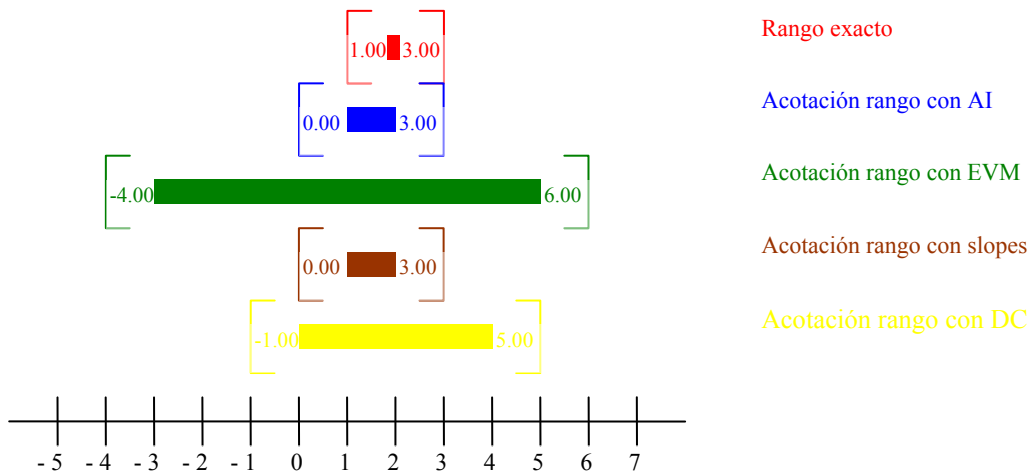


Figura 3.10 Comparación de las acotaciones externas del rango de la función $f_2(x) = x^3 + x^2 + 1$ según se emplee aritmética intervalar (color azul), Extensión del Teorema del Valor Medio (color verde), slopes (color marrón) o funciones DC (color amarillo). El rango exacto de la función se representa en color rojo.

En este ejemplo, dado que la función f_2 no venía expresada como una función DC, se ha obtenido una representación DC sumando y restando términos convexos (en este caso $2x^2$). Se

ha obtenido de esta forma una representación DC pero, no quiere decir que sea la mejor representación DC de esa función. En [33] se obtienen descomposiciones óptimas DC para funciones.

Capítulo 4. Identificación de Sistemas No Lineales basada en Técnicas

DC

Este capítulo presenta un método, eficiente, de identificación paramétrica para sistemas no lineales con error acotado, basado en funciones DC. Para el modelo se consideran representaciones DC, obteniéndose una cota externa del conjunto de parámetros que es consistente con las medidas, y el modelo paramétrico y error acotado considerados.

El capítulo se estructura según los siguientes apartados. En primer lugar, en el apartado 4.1 se hace una introducción a la identificación de sistemas dinámicos. En el apartado 4.2 se presenta el algoritmo de identificación propuesto; en primer lugar se caracteriza según las clasificaciones dadas en el apartado 4.1 de introducción y, a continuación se describe y presenta el algoritmo considerado: se formula el problema, se presentan los conceptos preliminares, se proporciona una pequeña revisión de las funciones DC y de la programación DC que ya se han tratado más a fondo en el capítulo 3, se proporciona una versión detallada del algoritmo y se aplica a algunos ejemplos antes de terminar en el apartado 4.3 con las conclusiones.

4.1 Introducción a la identificación de sistemas dinámicos

Con vistas a poder controlar un proceso, resulta imprescindible conocer el comportamiento dinámico del mismo. En muchas situaciones el trabajo de un ingeniero consiste en la realización de modelos matemáticos de los procesos estudiados [130]. Estos modelos se utilizan en distintas áreas: bioingeniería, meteorología, procesos químicos, economía, construcción, Se aplican estos modelos en distintos campos, destacando las aplicaciones como: control, supervisión, predicción, simulación, optimización,

En lo referente al diseño del controlador, tanto para la utilización de técnicas de diseño convencionales como de técnicas avanzadas (excepto la del control borroso basado en heurística), y especialmente las basadas en modelos, es muy aconsejable un modelo numérico preciso del proceso que se estudia.

La *identificación de sistemas* es una metodología para modelizar, que parte de la información disponible de dichos sistemas. Se analizan las entradas, señales de excitación y las salidas.

Se denomina *identificación* a la técnica de construir un modelo a partir de las variables medidas del proceso: entradas o variables de control, salidas o variables controladas y, posibles perturbaciones.

Hay varias formas de catalogar los modelos matemáticos [130]:

- Deterministas o estocásticos
- Dinámicos o estáticos
- De parámetros distribuidos o de parámetros concentrados
- Lineales o no lineales
- De tiempo continuo o de tiempo discreto
- De entrada-salida o de espacio de estados

En general, se busca que la función que va a representar el sistema sea parametrizable (que tenga un número finito de parámetros), en cuyo caso, se denomina *modelo paramétrico*. Existe un gran número de sistemas en los que su correcta representación no puede parametrizarse con un número finito de parámetros, los modelos que los representan se denominan *modelos no paramétricos*.

Para realizar la identificación del modelo, se pueden distinguir dos formas de acoplar el proceso con el ordenador:

- a) *Identificación en línea* (acoplamiento directo). Los datos son directamente procesados dando lugar al denominado *procesado en tiempo real*.
- b) *Identificación fuera de línea* (acoplamiento indirecto). Primero se almacenan los datos adquiridos del proceso y, posteriormente se transfieren al ordenador para ser evaluados y procesados.

Si hablamos de estimación en línea y en tiempo real, como se ha comentado anteriormente, los modelos se pueden formular en ecuación de estado, dando lugar al *modelo de espacio de estados*, o como relación de entrada-salida, empleando funciones de transferencia, dando lugar a los *modelos de entrada-salida*.

Los modelos formulados en ecuación de estado presentan la desventaja de que el problema de estimación de parámetros da en general origen a una relación no lineal entre variables medidas y parámetros; aunque existen formas canónicas especiales en las que esta relación es

lineal. En cambio, el problema de estimación de parámetros originado en un modelo entrada-salida lineal genera también una relación lineal entre variables medidas y parámetros.

Los métodos de identificación pueden clasificarse también *en función de los modelos obtenidos*:

1) *Técnicas de identificación no paramétrica*. Se obtienen *modelos no paramétricos*:

- a) *Análisis de la respuesta transitoria*.
- b) *Análisis de correlación*.
- c) *Técnicas frecuenciales*.

Todas las técnicas de identificación no paramétrica son aplicables para procesos lineales o linealizables. Para su utilización no se debe suponer ningún tipo de estructura para el modelo, siendo los resultados obtenidos de tipo gráfico, y más o menos fáciles de interpretar.

2) *Técnicas de identificación paramétrica*. Conducen a *modelos paramétricos*. En este caso se debe tener en cuenta una cierta estructura para el modelo. Los parámetros del modelo se calculan atendiendo a ciertos criterios de minimización de error entre el modelo y el proceso real o de acotación del error. En general, para este caso, se pueden distinguir tres tipos de técnicas (las dos primeras describen la incertidumbre mediante una aproximación estocástica y la tercera considera una aproximación de la incertidumbre desconocida pero acotada):

- a) *Técnicas frecuenciales*. Minimizan el error entre la respuesta frecuencial real del proceso y la respuesta frecuencial del modelo.
- b) *Técnicas temporales*. Minimizan el error temporal, *error de predicción* o *error de salida*, entre el modelo y el proceso.
- c) *Técnicas garantistas*. Obtienen conjuntos de soluciones factibles compatibles con la estructura del modelo, con las medidas obtenidas y la incertidumbre (acotada) considerada.

Estas técnicas de identificación paramétrica pueden aplicarse tanto para modelos continuos como discretos.

Aunque en la identificación paramétrica los métodos estadísticos son los más generalizados [131], [196], éstos tienen algunas desventajas:

- A veces se dispone de pocos datos de entrada-salida, lo que puede poner en duda los resultados que se han obtenido.

- No siempre es conocida la función de probabilidad que gobierna el valor del error. En algunas ocasiones, es más sencillo tener información sobre las cotas de error máximas.
- La función de probabilidad que casi siempre se asume es la Gaussiana.

Una alternativa a los métodos estadísticos de identificación son los métodos de acotación paramétrica basados en error acotado [143]. El objetivo de estos métodos es obtener el conjunto de valores de los parámetros del modelo, que son coherentes o consistentes con los datos. Estas técnicas de acotación proporcionan un método para relacionar incertidumbre en las entradas y salidas, independientemente de consideraciones probabilísticas y tomando como referencia únicamente un conjunto de datos. Básicamente, este enfoque en la identificación permite eliminar aquellos valores de los parámetros que no son consistentes con las medidas y que por tanto no necesitan ser tenidos en cuenta.

Los métodos de acotación paramétrica toman como premisa o hipótesis previa una cota máxima del error que perturba los datos. Las cotas de los parámetros que se obtienen mediante un método de acotación, definen un conjunto factible para la relación entre el modelo, los datos de entrada-salida y el error considerado. La cota de error considerada representa los valores límite de error que asume el método de acotación.

En este apartado se utiliza el paradigma de identificación de modelos paramétricos basado en error acotado [143]. Estos métodos de identificación obtienen una cota externa del conjunto solución factible, denotado FSS (Feasible Solution Set), que contiene los parámetros que mantienen la consistencia del modelo con las medidas de entrada-salida y la cota de error considerada.

El principal problema de los métodos exactos es el coste computacional asociado y la complejidad de la representación del conjunto solución factible exacto. Con el fin de reducir estas limitaciones, se utilizan conjuntos solución factible aproximados (AFSS) (Approximate Feasible Solution Sets), que acotan al conjunto solución factible exacto. Se usan cajas, elipses, paralelepípedos y poliedros de complejidad limitada, para representar el AFSS.

Es posible utilizar elipses [78] para representar el AFSS. En cada instante de muestreo, se utiliza una nueva media para obtener una elipse de mínimo volumen que acota el FSS. Para obtener mejores resultados, en [20] se utilizan hiperplanos tangentes. Otros resultados relacionados se pueden encontrar en [11] y [66]. El método del elipsoide también se puede utilizar con modelos no lineales respecto de los parámetros. En [88], se evita la dependencia no lineal respecto de los parámetros del modelo usando una representación equivalente en un espacio dimensional mayor.

4.2 Algoritmo para identificación de sistemas no lineales con error acotado basado en programación DC

En identificación basada en error acotado también se utilizan conjuntos solución aproximados poliédricos. En [141] y [82] se utilizan cajas de mínimo tamaño para representar el AFSS. Si el modelo es polinomial respecto de los parámetros del sistema, se puede utilizar programación signomial [142] para encontrar una caja que acote el FSS. En [103] se utilizan algoritmos de corte y acotación intervalares para describir el AFSS como una unión de cajas.

En [193] se presenta un algoritmo para calcular el paralelepípedo de mínimo volumen que acota la intersección de un paralelepípedo previo con una franja. Esta franja acota los parámetros que son consistentes con la medida actual. En [159] se usa un método recursivo basado en un poliedro de complejidad limitada. En [21] se utiliza una caja para computar la recursión.

Con el fin de estimar los parámetros variables con el tiempo de un sistema lineal, considerando error acotado, una modificación del algoritmo propuesto en [21] se ve en [22]. Una forma de factor de olvido se incorpora para asegurar que los datos antiguos, que no representan al sistema actual, influyen poco en la estimación de los parámetros. Dos algoritmos recursivos que utilizan descripciones poliédricas, se presentan en [160] para sistemas variantes en el tiempo. En el primer algoritmo, en cada instante considerado, el poliedro se expande para capturar las posibles variaciones de los parámetros. En el segundo algoritmo, el centro de Chebyshev del poliedro se mueve para conseguir la variación consistente con el nuevo dato.

En [39], se propone un nuevo esquema de identificación basado en error acotado para sistemas con parámetros variables en el tiempo. La metodología utiliza zonotopos para representar el conjunto solución factible aproximado. Las cajas y los paralelotopos son casos particulares de zonotopos. La principal contribución consiste en un algoritmo que acota el conjunto solución factible mediante un zonotopo. En cada instante de muestreo, con la nueva medida obtenida, el algoritmo intenta reducir el tamaño del zonotopo. Además, muestra cómo la naturaleza variable con el tiempo de los parámetros se captura mediante los zonotopos de una forma no conservadora. También discute el caso de los sistemas invariantes en el tiempo. En este caso particular muestra la equivalencia del método propuesto con el método del paralelepípedo [193].

4.2 Algoritmo para identificación de sistemas no lineales con error acotado basado en programación DC

En este apartado se presenta un método eficiente sobre identificación paramétrica para sistemas no lineales con error acotado. El método propuesto se basa en funciones DC que, como

ya se ha comentado anteriormente, están definidas por la diferencia de dos funciones convexas. El método considera representaciones DC para la forma funcional del modelo considerado, obteniéndose una cota externa del conjunto de parámetros que es consistente con las medidas, y el modelo paramétrico y error acotado considerados. El algoritmo que se propone resuelve en cada iteración varios problemas de optimización convexa, descartando la parte de la cota externa considerada en dicha iteración que no es consistente. El proceso se repite mientras puedan seguirse descartando partes de las nuevas cotas externas de cada iteración, con el fin de obtener la mejor solución posible. Al final, se muestran diferentes ejemplos con el fin de aclarar el algoritmo de identificación paramétrica propuesto.

4.2.1 Introducción

Como ya se ha indicado anteriormente, la identificación de sistemas es un área de investigación activa y, en años recientes se han desarrollado varias técnicas de identificación. Estas técnicas consideran formas diferentes de describir la incertidumbre. La aproximación estocástica supone una descripción probabilística de la incertidumbre. Otra posibilidad es, considerar una aproximación de la incertidumbre desconocida pero acotada. Siguiendo esta idea, la identificación basada en error acotado asume un error acotado aditivo y un modelo paramétrico. Ya definido anteriormente, el conjunto de parámetros que es compatible con la estructura del modelo, con las medidas obtenidas y la incertidumbre considerada, se denomina Conjunto Solución Factible (*FSS*) (*Feasible Solution Set*). El objetivo del método de identificación basado en error acotado es obtener estos conjuntos de soluciones factibles.

Cuando los métodos basados en error acotado se aplican a modelos afines¹⁴, el Conjunto Solución Factible (*FSS*) es un politopo¹⁵ que se puede obtener de forma exacta. Para este caso,

¹⁴ Se entiende por modelos afines aquellos que están representados por funciones afines (en el espacio bidimensional, aquellas que tienen como ecuación $y = a \cdot x + b$, donde b es la ordenada en el origen).

¹⁵ Se denomina politopo a todo conjunto de \mathbb{R}^n que es intersección de un número finito de *semiespacios cerrados*. El concepto de semiespacio viene definido a partir del concepto de *hiperplano*, entendiéndose éste como la generalización al espacio n -dimensional del concepto de recta. Un *semiespacio cerrado* es el conjunto de puntos que verifica $S = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq \alpha; \alpha \in \mathbb{R}\}$ (semiespacio inferior cerrado) o bien $S = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \geq \alpha; \alpha \in \mathbb{R}\}$ (semiespacio superior cerrado). Cada hiperplano define dos semiespacios; gráficamente se trata de la porción del espacio que está por encima del hiperplano (semiespacio superior) o por debajo del hiperplano (semiespacio inferior). Los semiespacios, tanto abiertos (cumplen la desigualdad estricta) como cerrados, son conjuntos convexos. Los hiperplanos son conjuntos convexos. Un conjunto S es *convexo* si cumple que: $\forall x_1, x_2 \in S$ se cumple que $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$, $\lambda \in [0, 1]$, es decir, que dados dos puntos cualesquiera del conjunto, el segmento lineal cerrado que une los dos puntos está totalmente contenido en el conjunto. La intersección finita o infinita de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

un algoritmo que proporciona las caras del conjunto solución se presenta en [43]. Alternativamente, el FSS se representa por sus vértices en [146]. En [195], se emplea un cono poliédrico para representar el FSS. Esta representación puede emplearse cuando el conjunto de parámetros inicial no está acotado.

Ya se ha comentado sobre la complejidad de la representación del conjunto solución factible exacto y la complejidad computacional asociada, son el principal problema de los métodos exactos. Los Conjuntos de Solución Factible Aproximados (AFSS) (*Approximate Feasible Solution Sets*) que acotan el correspondiente FSS, se usan para reducir estas limitaciones. Las cajas, los elipsoides, los paralelotoos y los poliedros con complejidad limitada se han usado para representar el AFSS cuando se considera un sistema lineal paramétrico invariante. El caso de parámetros variantes con el tiempo se trata en [40] donde se consideran zonotopos¹⁶ para capturar la naturaleza variable de los parámetros.

Si se considera un sistema no lineal paramétrico, la complejidad del problema crece bastante. En [88], en un espacio de dimensión superior, se usa un modelo lineal equivalente representándose el AFSS con una pseudoelipsoide. Como se ha indicado anteriormente, para un modelo polinomial en los parámetros del sistema, con la programación signomial¹⁷ se puede encontrar una caja que acota el FSS. En [102] se usa un algoritmo Branch and Bound intervalar para describir el AFSS como una unión de cajas. La metodología basada en error acotado se asume en [144] para desarrollar un método de identificación para sistemas no lineales. No se requiere información en la forma funcional de la función regresión que describe las relaciones entre la salida y las entradas medidas. Se asumen cotas en el gradiente de la función de regresión solamente.

En esta tesis se presenta un nuevo método de identificación basado en error acotado, para sistemas que tienen una dependencia no lineal con respecto a los parámetros. Se usa una representación DC equivalente de la forma funcional del modelo del sistema considerado para

La propiedad de la convexidad de los conjuntos es una propiedad deseable en los problemas de optimización, aunque si no se cumple, se pueden aplicar otras condiciones. Para algunos conjuntos no convexos es posible definir su *envoltura convexa* $Co(S)$, “el menor conjunto convexo que contiene a S (no convexo)”, o también como “la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S ”.

¹⁶ Dado un vector $p \in \mathbb{R}^n$ y una matriz $H \in \mathbb{R}^{n \times m}$, se denomina zonotopo de orden m al conjunto $p \oplus HB^m = \{p + Hz : z \in B^m\}$. Un zonotopo es la suma de Minkowski (\oplus) de los segmentos definidos por las columnas de la matriz H .

¹⁷ La técnica de programación signomial resuelve problemas no lineales en los que tanto la función objetivo como las restricciones son expresiones polinomiales con coeficientes positivos.

obtener relajaciones convexas. Se emplean simplexes¹⁸ para representar el AFSS que acota el conjunto de solución exacta. El método es un algoritmo iterativo que resuelve varios problemas de optimización convexa en cada iteración para mejorar el AFSS considerado.

4.2.2 Formulación del problema

En el contexto de la identificación basada en error acotado, se pretende obtener una cota del vector de parámetros $\theta \in \mathbb{R}^n$ que caracteriza la dinámica de un sistema paramétrico dado. Se asumirá que cada medida es una función de un vector regresión, del vector de parámetros θ y un error acotado dado:

Suposición 4.1 *Dado un conjunto de medidas y_1, y_2, \dots, y_N . Cada medida $y_k \in \mathbb{R}$ está relacionada con el vector de parámetros $\theta \in \mathbb{R}^n$ y el vector regresión $r_k \in \mathbb{R}^n$ mediante la siguiente expresión:*

$$y_k = f(r_k, \theta) + e_k \quad (4.1)$$

donde $f(\cdot) \in C^2$ es el modelo del sistema considerado y e_k representa el error considerado¹⁹. Este error pertenece a un conjunto acotado: $e_k \in E = \{e \in \mathbb{R} : |e| \leq \sigma\}$.

Se asumirá que $f(r_k, \theta)$ es una función no lineal con respecto al parámetro θ . El término e_k acota el efecto del modelo no dinámico, perturbaciones sobre el sistema, ruido en las medidas, etc.

Los resultados presentados se pueden generalizar fácilmente al caso en que la medida y_k sea un vector. No hay más que considerar que cada componente de y_k es una medida individual.

Definición 4.1 (Conjunto Solución Factible) *Dados los pares (y_k, r_k) , $k=1, \dots, N$. El Conjunto Solución Factible (FSS) se define como:*

$$FSS = \{\theta : |y_k - f(r_k, \theta)| \leq \sigma, \quad k=1, \dots, N\} \quad (4.2)$$

El objetivo de los métodos de identificación consiste en hallar el conjunto de parámetros que son consistentes con el modelo paramétrico y el error acotado supuestos, y las medidas

¹⁸ Un simplex es un politopo con exactamente $n+1$ vértices que cumplen con la restricción de independencia lineal.

¹⁹ $f(\cdot) \in C^2$ es una función con segunda derivada continua.

realizadas. Cuando se supone un sistema lineal en $\theta \in \mathbb{R}^n$ entonces, el *FSS* es la intersección de N franjas en el dominio de los parámetros, pudiéndose calcular exactamente. Sin embargo, la complejidad del *FSS* se incrementa con el número de medidas. En este caso el *FSS* exacto puede ser una región compleja, no convexa e incluso no conectada. Una solución alternativa es considerar cotas exteriores del *FSS*.

Definición 4.2 (Conjunto Solución Factible Aproximado) *Un Conjunto Solución Factible Aproximado, denotado AFSS, es un conjunto que satisface: $FSS \subseteq AFSS$.*

En el siguiente apartado se presentan algunos conceptos preliminares, que son necesarios para introducir el método iterativo de identificación basado en error acotado que se propone.

4.2.3 Conceptos preliminares

El método de identificación que se propone consiste en un algoritmo iterativo que considera las medidas y los vectores regresión (y_k, r_k) con $k=1, \dots, N$, el error acotado σ y la función regresión del sistema (4.1) para obtener una secuencia de Conjuntos Soluciones Factibles Aproximados $AFSS_j$ con $j \geq 1$. En cada iteración del algoritmo se emplea un conjunto de problemas de optimización convexos para mejorar el conjunto factible aproximado obtenido en la iteración anterior. Estos problemas de optimización convexa se definen usando relajaciones cóncavas y convexas del sistema (4.1).

La Figura 4.1 se emplea para ilustrar el algoritmo propuesto. El conjunto $FSS = \{\theta : y_k - \sigma \leq f(r_k, \theta) \leq y_k + \sigma\}$ es consistente con la medida y_k , el regresor r_k , el error acotado σ considerado y la forma funcional del sistema. Se consideran un conjunto inicial $AFSS_0$ tal que $FSS \subseteq AFSS_0$ y un conjunto candidato $\Psi \subseteq AFSS_0$. Nótese que $\Psi \cap FSS = \emptyset$ y un nuevo candidato $AFSS_1 = AFSS_0 \setminus \Psi$, donde \setminus es la resta de conjuntos, se puede considerar como la cota de *FSS*. Para probar la igualdad $\Psi \cap FSS = \emptyset$, el método de identificación propuesto emplea relajaciones convexas $\tilde{f}(r_k, \theta)$ y cóncavas $\hat{f}(r_k, \theta)$ (representadas por líneas de puntos en la Figura 4.1) de la función regresión $f(r_k, \theta)$ en Ψ . A continuación se muestran ambas definiciones.

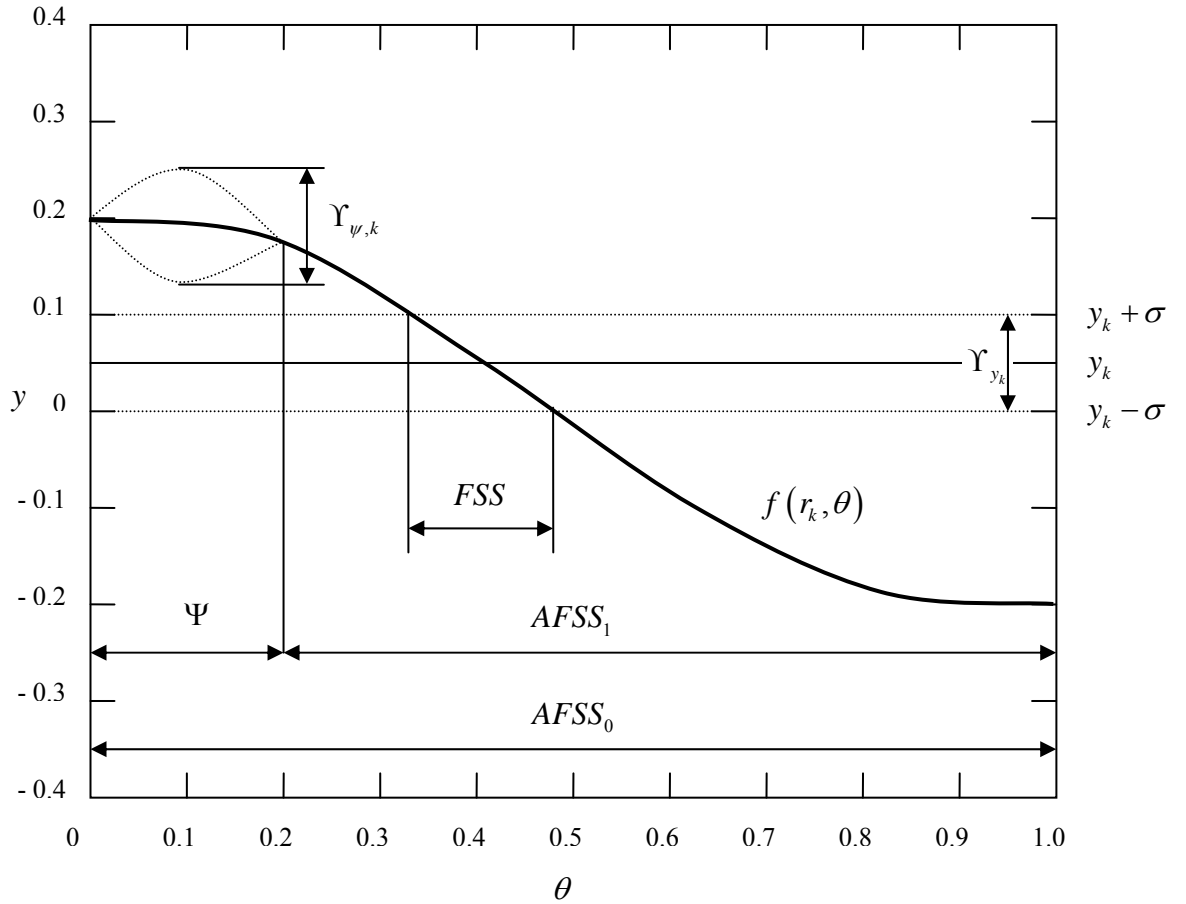


Figura 4.1 Ilustración del algoritmo que se propone.

Definición 4.3 (Estimador inferior de una función) Supongamos que el conjunto Ψ y los pares (y_k, r_k) con $k=1, \dots, N$. Las funciones $\tilde{f}(r_k, \theta)$ con $k=1, \dots, N$ son estimadores inferiores válidos de $f(r_k, \theta)$ si son convexos y $\tilde{f}(r_k, \theta) \leq f(r_k, \theta), \forall \theta \in \Psi$.

Definición 4.4 (Estimador superior de una función) Supongamos que el conjunto Ψ y los pares (y_k, r_k) con $k=1, \dots, N$. Las funciones $\hat{f}(r_k, \theta)$ con $k=1, \dots, N$ son estimadores superiores válidos de $f(r_k, \theta)$ si son cóncavos y $\hat{f}(r_k, \theta) \geq f(r_k, \theta), \forall \theta \in \Psi$.

Los estimadores superiores e inferiores válidos de $f(r_k, \theta)$ los utiliza el algoritmo para obtener el conjunto $\Upsilon_{\Psi, k} = \{y : y \geq \tilde{f}(r_k, \theta), y \leq \hat{f}(r_k, \theta), \forall \theta \in \Psi\}$.

Considerando $\Upsilon_{y_k} = \{y : |y_k - y| \leq \sigma\}$, si $\Upsilon_{\Psi, k} \cap \Upsilon_{y_k} = \emptyset$ se deduce entonces que $\Psi \cap FSS = \emptyset$ y consecuentemente, el conjunto Ψ puede descartarse y, se puede calcular una nueva cota externa $AFSS_1$ por la resta de conjuntos.

Una vez se ha obtenido $AFSS_1$, puede considerarse un nuevo conjunto candidato $\Psi \subseteq AFSS_1$; y pudiéndose iterar este proceso mientras el conjunto factible aproximado obtenido se mejore.

En el siguiente apartado se proporcionan algunas nociones relacionadas con las funciones DC y la programación DC.

4.2.4. Nociones sobre funciones DC

Como se ha visto anteriormente en el capítulo 3, una función DC es una función que puede descomponerse como la diferencia de dos funciones convexas. La estructura de ese tipo de funciones proporciona una manera eficiente de obtener relajaciones convexas y cóncavas para una función. Se va a considerar que la función $f(r_k, \theta)$ del sistema (4.1) es una representación DC de la función $f(r_k, \theta)$ o es posible construir una representación DC equivalente de ella. Con este supuesto, se suministra a continuación un método eficiente que permite obtener relajaciones convexas y cóncavas de las funciones $f(r_k, \theta)$ con $k=1, \dots, N$, y que van a utilizarse en el paso 1 del algoritmo que se propone más adelante.

En la Definición 3.11, se define formalmente el concepto de función DC en un conjunto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Como se sabe, el conjunto de funciones DC definido en un conjunto compacto convexo de \mathbb{R}^n es denso en el conjunto de las funciones continuas del conjunto dado [191], [95]. Por lo tanto, toda función continua en un conjunto compacto convexo puede aproximarse a una función DC con la precisión que se desee y toda función C^2 es una función DC. Dada una función diferenciable dos veces, es posible obtener una función DC sumando y restando términos convexas.

Considérese por ejemplo la función $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ en el dominio $x \in [-1, 1]$. Nótese que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) = 6x + 2$ y si $x \in [-1, 1]$ entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \in [-4, 8]$. Así, $f(x) + 2x^2$ satisface $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) > 0, \forall x \in [-1, 1]$. Definiendo $\tilde{g}(x) = f(x) + 2x^2$ y $\tilde{h}(x) = 2x^2$, la función equivalente $f(x) = \tilde{g}(x) - \tilde{h}(x)$ es una función DC en $x \in [-1, 1]$. Como ya se ha comentado, un método general para calcular representaciones DC puede encontrarse en [1], [77].

En este estudio se considera como conjunto Ω un politopo convexo (conjunto poliédrico acotado) del tipo simplex²⁰: $S = Co\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$, donde $v_i \in \mathbb{R}^n$ son los $n+1$ vértices de S y, $Co(\cdot)$ denota el recubrimiento convexo²¹. Sus vértices se denotan por $vert\{S\}$. Considerar la matriz $V \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ siguiente:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & v_1^T \\ 1 & v_2^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & v_{n+1}^T \end{bmatrix}.$$

La matriz V es invertible sólo si S tiene un volumen distinto de cero. La Propiedad 4.1 se puede utilizar para obtener una acotación del rango de una función DC sobre un simplex.

Propiedad 4.1 *Dados un simplex S de volumen no nulo y una función convexa $h: S \rightarrow \mathbb{R}$. Definir la función lineal $h_M(x)$ como $h_M(x) = h_0 + h_L^T x$, donde $h_0 \in \mathbb{R}$ y $h_L \in \mathbb{R}^n$ se obtienen a partir de la expresión:*

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & v_1^T \\ 1 & v_2^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & v_{n+1}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} h(v_1) \\ h(v_2) \\ \vdots \\ h(v_{n+1}) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

siendo $v_i, i=1, \dots, n+1$ los vértices de S . Entonces, $h_M(v_i) = h(v_i), i=1, \dots, n+1$ y $h(x) \leq h_M(x), \forall x \in S$.

PRUEBA: Como el volumen del simplex es diferente de cero, la expresión que proporciona h_0 y h_L está definida de forma conveniente. Además, por construcción, la igualdad $h_M(v_i) = h(v_i), i=1, \dots, n+1$ se cumple, es trivial. Para demostrar la segunda afirmación de la propiedad basta con demostrar que $\min_{x \in S} h_M(x) - h(x) \geq 0$.

²⁰ Un simplex es una figura poliédrica de $n+1$ vértices inmersa en un espacio de dimensión n . Así, por ejemplo, en el plano, un triángulo es un simplex y en el espacio tridimensional lo es un tetraedro. Estas figuras, en general, no tienen por qué ser regulares. Los simplex que se deben considerar son los que tienen área, volumen o hipervolumen no nulos.

²¹ $Co(S)$ Recubrimiento convexo o envoltura convexa es el menor conjunto convexo que contiene a S (no convexo). Por supuesto, la propiedad de la convexidad de los conjuntos es una propiedad deseable en los problemas de optimización, aunque si no se cumple se pueden aplicar otras condiciones.

Como $h_M(x)$ es una función afín y $h(x)$ es convexa en S , resulta que $h_M(x) - h(x)$ es cóncava en S . Esto implica que el mínimo de $h_M(x) - h(x)$ se encuentra en los vértices del simplex. Por lo tanto, $\min_{x \in S} h_M(x) - h(x) = \min_{i=1, \dots, n+1} h_M(v_i) - h(v_i) = 0$.

□

Propiedad 4.2 Dada una función DC $f(x) = \check{g}(x) - \check{h}(x)$, la función $\check{f}(x) = \check{g}(x) - h_M(x)$ es convexa y $f(x) \geq \check{f}(x)$, $\forall x \in S$.

PRUEBA: Está claro que $\check{f}(x) = \check{g}(x) - h_M(x)$ es convexa por ser la diferencia de una función convexa y una afín concreta. Por la Propiedad 4.1, $h_M(x) - \check{h}(x) \geq 0$, $\forall x \in S$; entonces $f(x) = \check{g}(x) - \check{h}(x) \geq \check{g}(x) - h_M(x) = \check{f}(x)$, $\forall x \in S$.

□

Nótese que la acotación convexa obtenida es una aproximación de segundo orden (en sentido de Taylor) y es exacta en los vértices v_1, \dots, v_{n+1} de S . Se puede obtener una estimación superior cóncava $\hat{f}(x)$ de $f(x) = \check{g}(x) - \check{h}(x)$ por la relajación convexa de la función $-f(x) = \check{h}(x) - \check{g}(x)$.

Observación 4.1 En principio, la aplicación de representaciones DC no está limitada a los simplexes. Es posible obtener una relajación convexa de una representación DC de una función no lineal en cualquier dominio politopo S . A continuación, se resumen las ventajas de emplear simplexes. El método propuesto está basado en la utilización de una función afín $h_M(x)$ que acota el término convexo $\check{h}(x)$ de la función DC. Esta función afín debe cumplir $h_M(x) \geq \check{h}(x)$ con $x \in S \subseteq \mathbb{R}^n$. Debido a la concavidad de $h_M(x) - \check{h}(x)$, se puede verificar esta condición únicamente comprobándose que la condición se satisface en los vértices de S . Si S es un simplex, deben consultarse $n+1$ vértices. Si S es una caja, deben consultarse 2^n vértices, que implica un número exponencial de vértices con respecto a la dimensión del problema. Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un simplex con volumen no nulo, entonces $h_M(x)$ se obtiene a partir de las igualdades $h_M(v_i) = \check{h}(v_i)$, $i=1, \dots, n+1$, donde v_i , $i=1, \dots, n+1$ representan los vértices del simplex (en este caso, la aproximación es exacta a los vértices del simplex). Además, en [52] se demuestra que esta elección de $h_M(x)$ es óptima en el sentido de que

proporciona la relajación convexa ajustada. Si S no es un simplex, entonces no es fácil obtener el valor óptimo para $h_M(x)$.

Observación 4.2 *Está claro que la representación DC de una función no lineal dada no es única. El funcionamiento del método propuesto puede mejorarse eligiendo una representación DC óptima de la función. Existen algunos resultados en la literatura tratando este punto. En concreto, el resultado sistemático y eficiente presentado en [2] puede emplearse para obtener una representación DC apropiada. Nótese que, dada una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ y una matriz A definida positiva, la representación $f(x) + x^T Ax - x^T Ax$ es DC en S si el Hessiano de $f(x) + x^T Ax$ es definido positivo en S . Por lo tanto, una forma de seleccionar una representación DC óptima es encontrar una matriz óptima A que proporcione el menor estimador superior. En [2] se proporciona un método sistemático para obtener una matriz diagonal subóptima A . La convexidad de $f(x) + x^T Ax$ se determina eficientemente por una evaluación de aritmética intervalar en S del Hessiano de $f(x) + x^T Ax$.*

A continuación, en el siguiente apartado se muestran las ventajas potenciales del uso de los métodos de programación DC en la identificación con error acotado, al igual que la programación DC ofrece relajaciones convexas de segundo orden en el problema de identificación original, y pudiéndose considerar todas las medidas al mismo tiempo.

4.2.5 Algoritmo de identificación propuesto

En este apartado se presenta el nuevo algoritmo de identificación propuesto, considerando funciones DC y simplexes. Dado un conjunto $\Psi \subseteq \mathbb{R}^n$ en el espacio de parámetros, el Teorema 4.1 constituye en sí mismo un método para el estudio de su consistencia con, las medidas consideradas, el sistema y el error acotado. Para verificar si la intersección de Ψ con FSS es un conjunto vacío se resuelve un problema de optimización convexo. Si esta intersección está vacía, el conjunto Ψ se puede descartar de la solución acotada exteriormente final.

Teorema 4.1 *Dado el sistema (4.1), los pares (y_k, r_k) con $k = 1, \dots, N$, un conjunto convexo $\Psi \subseteq \mathbb{R}^n$, relajaciones convexa y cóncava $\tilde{f}(r_k, \theta)$ y $\hat{f}(r_k, \theta)$ en Ψ válidas, $k = 1, \dots, N$ y el problema de optimización $\wp(\Psi)$ siguiente:*

$$\begin{aligned} \gamma_{\min} = \min_{\theta, \gamma} \gamma \\ \text{s.a.:} \\ \theta \in \Psi \\ \tilde{f}(r_k, \theta) - (y_k + \sigma) \leq \gamma \quad k=1, \dots, N \\ (y_k - \sigma) - \hat{f}(r_k, \theta) \leq \gamma \quad k=1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.4)$$

Entonces se deduce que, si $\gamma_{\min} > 0$, $\Psi \cap FSS = \emptyset$.

PRUEBA: Supóngase que $\Psi \cap FSS \neq \emptyset$, entonces hay un $\theta^* \in \Psi \cap FSS$. Como $\theta^* \in \Psi$, por definición: $\tilde{f}(r_k, \theta^*) \leq f(r_k, \theta^*) \leq \hat{f}(r_k, \theta^*)$ con $k=1, \dots, N$. Como $\theta^* \in FSS$, entonces $f(r_k, \theta^*) - (y_k + \sigma) \leq 0$ y $(y_k - \sigma) - f(r_k, \theta^*) \leq 0$ con $k=1, \dots, N$. Se deduce que $\tilde{f}(r_k, \theta^*) - (y_k + \sigma) \leq 0$ y $(y_k - \sigma) - \hat{f}(r_k, \theta^*) \leq 0$ con $k=1, \dots, N$ y, por tanto, $\gamma_{\min} \leq 0$. Por lo tanto, que $\gamma_{\min} > 0$ implica que $\Psi \cap FSS = \emptyset$.

□

Con este resultado, ya es posible presentar el algoritmo de identificación propuesto. En la iteración j se dispone de un simplex que acota el FSS . Este simplex se compone de $n+1$ vértices, y se denota como $AFSS_{j-1} = Co\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$. Entonces se puede calcular un nuevo $AFSS_j$ por el algoritmo presentado en la Tabla 4.1.

Para visitar todas las aristas del simplex $AFSS_{j-1}$, el algoritmo considera los vértices $v_p, v_q \in AFSS_{j-1}$. Se obtiene un nuevo vértice $v_B = \frac{v_p + v_q}{2} \in AFSS_{j-1}$. Haciendo uso de este vértice, se define el conjunto $\Psi_{p,q}(v_B) = Co\{v_1, v_2, \dots, v_{q-1}, v_B, v_{q+1}, \dots, v_{n+1}\}$, ver Figura 4.2. A continuación se construyen las relajaciones convexas $\tilde{f}_{p,q}(r_k, \theta)$ y cóncavas $\hat{f}_{p,q}(r_k, \theta)$ válidas de $f_{p,q}(r_k, \theta)$ en $\Psi_{p,q}$ con $k=1, \dots, N$ siguiendo el método expuesto en el apartado 4.2.4.

Una vez se han construidos las relajaciones convexas y cóncavas, se resuelve a continuación el problema de optimización $\wp(\Psi_{p,q}(v_B))$, obteniéndose el valor mínimo de γ , denotado γ_{\min} . Por el teorema Teorema 4.1, si $\gamma_{\min} > 0$ entonces $\Psi_{p,q}(v_B) \cap FSS = \emptyset$ y $\Psi_{p,q}(v_B)$ puede descartarse. El conjunto $AFSS_{j-1}$ se actualiza a $AFSS_{j-1} = AFSS_{j-1} \setminus \Psi_{p,q}(v_B) = Co\{v_1, v_2, \dots, v_{p-1}, v_B, v_{p+1}, \dots, v_{n+1}\}$. Si $\gamma_{\min} \leq 0$ y $\|v_B - v_p\| > \varepsilon_1$ (donde $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ es un parámetro de diseño), el vértice v_B cambia su valor a $v_B = \frac{v_B + v_p}{2}$. Estas

operaciones son iteradas hasta recorrer todos los extremos de $AFSS_{j-1}$. Finalmente, el algoritmo devuelve un conjunto $AFSS_j$ que está compuesto por vértices actualizados.

<p style="text-align: center;">Algoritmo $AFSS_{j-1} = Co\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$</p>
<p>Algoritmo</p> <p>Para $p = 1, \dots, n+1$</p> <p style="padding-left: 20px;">Para $q = 1, \dots, n+1$ con $q \neq p$</p> <p style="padding-left: 40px;">$v_B = \frac{v_q + v_p}{2}$</p> <p style="padding-left: 40px;">Mientras $\ v_B - v_p\ > \varepsilon_1$</p> <p style="padding-left: 60px;">$\Psi_{p,q}(v_B) = Co\{v_1, v_2, \dots, v_{q-1}, v_B, v_{q+1}, \dots, v_{n+1}\}$</p> <p style="padding-left: 60px;">Construir relajaciones convexas $\tilde{f}_{p,q}(r_k, \theta)$ y cóncavas $\hat{f}_{p,q}(r_k, \theta)$ válidas del sistema (4.1) en $\Psi_{p,q}$, con $k = 1, \dots, N$ siguiendo el método expuesto en el apartado 4.2.4</p> <p style="padding-left: 60px;">$\gamma_{\min} = \varrho(\Psi_{p,q}(v_B))$</p> <p style="padding-left: 60px;">Si $\gamma_{\min} > 0$ entonces $v_p = v_B$</p> <p style="padding-left: 60px;">si no $v_B = \frac{v_B + v_p}{2}$</p> <p style="padding-left: 40px;">Finsi</p> <p style="padding-left: 20px;">Finmientras</p> <p style="padding-left: 20px;">Finpara</p> <p>Finpara</p> <p style="padding-left: 20px;">$AFSS_{j-1} = Co\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$</p> <p>Fin del Algoritmo</p>

Tabla 4.1 Algoritmo de identificación propuesto.

Se puede utilizar el algoritmo propuesto mientras el volumen del conjunto factible aproximado obtenido se decremente, esto es: $Volumen(AFSS_{j-1}) - Volumen(AFSS_j) > \varepsilon_2$, donde $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ es otro parámetro de diseño.

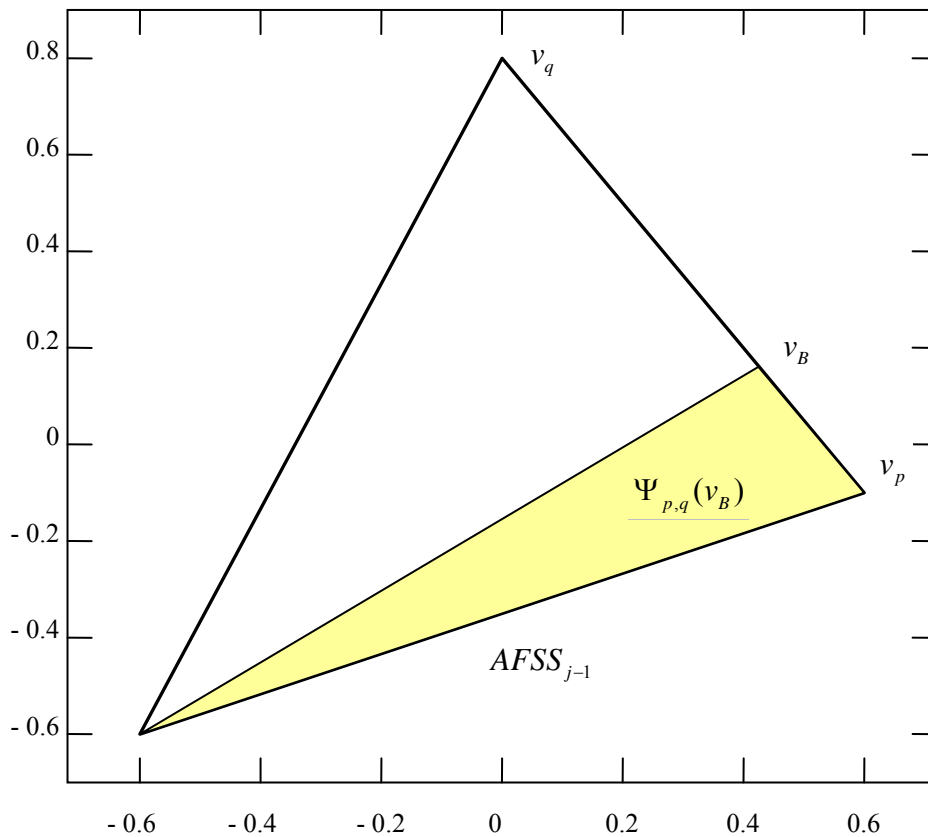


Figura 4.2 Ilustración de los conjuntos $AFSS_{j-1}$ y $\Psi_{p,q}(v_B)$.

Observación 4.3 El número de problemas de optimización a resolver en cada iteración j está acotado por $O\left(\log_2\left(\frac{d_v}{\varepsilon_1}\right) * (n+1) * n\right)$ (orden de complejidad del algoritmo)²² siendo d_v la máxima distancia entre dos vértices de $AFSS_{j-1}$. Nótese que los algoritmos de optimización convexa estándar pueden usarse para resolver los problemas convexos mencionados. Ver, por ejemplo, [37].

Observación 4.4 El Teorema 4.1 proporciona únicamente una condición suficiente para comprobar si la intersección de un conjunto convexo dado y el FSS es vacía. El conservadurismo de la condición suficiente puede reducirse arbitrariamente utilizando un esquema branch and bound. La idea es simple, como se muestra a continuación. El simplex original se divide en dos simplexes. Si el Teorema 4.1 determina que los dos simplexes tienen

²² El orden de complejidad de un algoritmo es una medida del n° de operaciones que hay que realizar (en el peor de los casos) en el algoritmo considerado.

una intersección no vacía con el FSS que se ha dado no se descarta ninguno. Si no, esos simplexes que satisfacen la condición suficiente proporcionada por el Teorema 4.1 se descartan. El proceso de división se hace otra vez con el simplex (simplexes) no descartado en el paso anterior. Usando el Teorema 4.1, el proceso de descarte se realiza una vez más. Todo esto se repite hasta que el tamaño de los simplexes alcanzan un nivel especificado previamente o hasta que el proceso de descarte determine que la intersección del simplex original con el FSS es vacía. Por supuesto, esto significa que en el peor de los casos se tendría tiempo de computación exponencial, pero la convergencia al conjunto solución exacto está asegurada porque el error de aproximación incurrido cuando se usan aproximaciones DC decrece cuadráticamente con el tamaño del simplex. Nótese que la complejidad exponencial correspondiente a la solución exacta del problema no es una sorpresa debido a la naturaleza NP-hard (dificultad-NP) del problema abordado. La solución obtenida por el algoritmo Branch and Bound es un conjunto de simplexes que acotan el FSS. Se puede calcular fácilmente una envoltura convexa de este AFSS (una caja o un elipsoide) usando los vértices de los simplexes.

El siguiente lema prueba que si $FSS \subseteq AFSS_0$, entonces la secuencia $AFSS_j$ acota al conjunto solución factible exacto para todo $j > 0$.

Lema 4.1 Dado el sistema (4.1), los pares (y_k, r_k) con $k = 1, \dots, N$ y un $AFSS_0$ inicial tal que $FSS \subseteq AFSS_0$; entonces, los conjuntos calculados por el algoritmo propuesto son conjuntos solución factible aproximados: $FSS \subseteq AFSS_j, \forall j \geq 1$.

PRUEBA: El algoritmo propuesto actualiza el conjunto $AFSS_{j-1}$ a $AFSS_{j-1} \setminus \Psi_{p,q}(v_B)$, donde $\Psi_{p,q}(v_B) \subseteq AFSS_{j-1}$ y $\gamma_{\min} > 0$. Por el Teorema 4.1, $FSS \cap \Psi_{p,q}(v_B) = \emptyset$; así $FSS \subseteq AFSS_{j-1} \setminus \Psi_{p,q}(v_B)$. Entonces se deduce que $FSS \subseteq AFSS_j, \forall j \geq 1$.

□

4.2.6 Ejemplos

En los ejemplos que se muestran en este apartado, los parámetros de diseño que se emplean son $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.01$. En total son cuatro ejemplos, de los cuales los dos primeros se corresponden con ejemplos propuestos por otros autores con el fin de comparar sus resultados con los obtenidos aplicando el algoritmo propuesto.

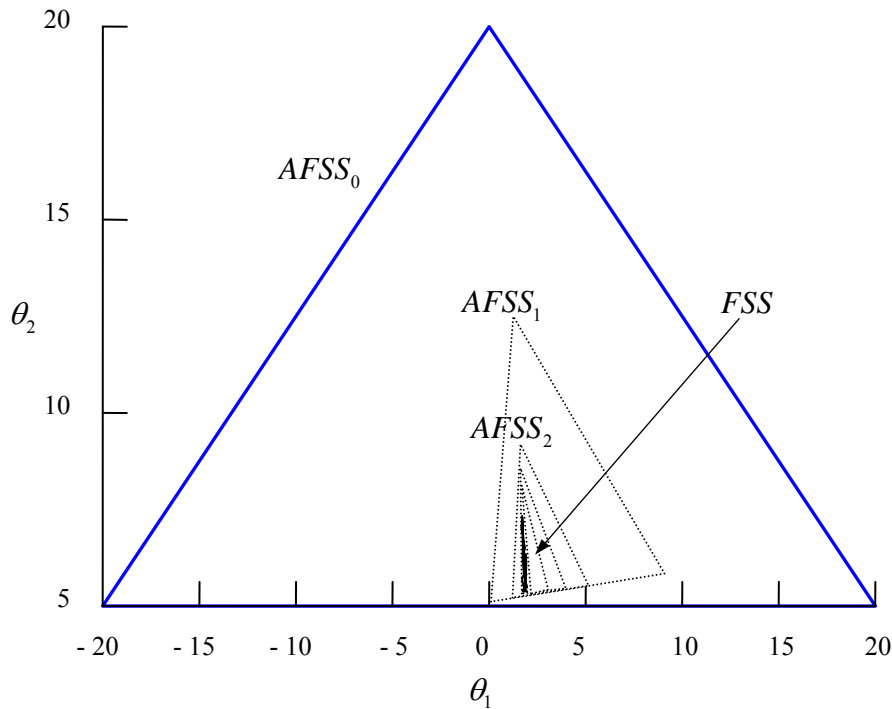


Figura 4.3 La nube de puntos representa el FSS . El simplex inicial se representa por líneas continuas de color azul. La evolución del $AFSS_j$ está representada por líneas de puntos.

4.2.6.1 Ejemplo 1

El método que se ha propuesto se utiliza para identificar el sistema no lineal de [74]:

$$y_k = \theta_1 + \frac{1}{r_k - \theta_2} + e_k, \quad (4.5)$$

donde y_k es la salida del sistema, r_k es el regresor, θ_1 y θ_2 son los parámetros a identificar y e_k es un término error. Se considera que $r_k - \theta_2 \neq 0$. Se considera como espacio de búsqueda inicial el simplex $AFSS_0 = Co\{(-20,5), (0,20), (20,5)\}$. La forma funcional de la función

regresión del sistema es una función DC, donde θ_1 y $-\frac{1}{r_k - \theta_2}$ son funciones convexas en

$AFSS_0$. Se consideran cinco regresores $r_k = k$ con $k = 0, \dots, 4$, para obtener las medidas correspondientes a $\theta_1 = 2$ y $\theta_2 = 6$. Los parámetros del sistema (4.1) vienen definidos por:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \sigma = 0.1.$$

La Figura 4.3 muestra la evolución del $AFSS_j$ con $j \geq 0$. La nube de puntos representa el FSS consistente con las medidas y el error acotado. Éste se ha obtenido haciendo una búsqueda aleatoria en $AFSS_0$ suficientemente densa. El algoritmo proporciona una secuencia de $AFSS_j$ con una reducción de volumen en cada iteración. El $AFSS$ final obtenido aplicando el algoritmo propuesto está definido por $Co\{(1.8,8),(1.9,5.4),(2.7,5.5)\}$.

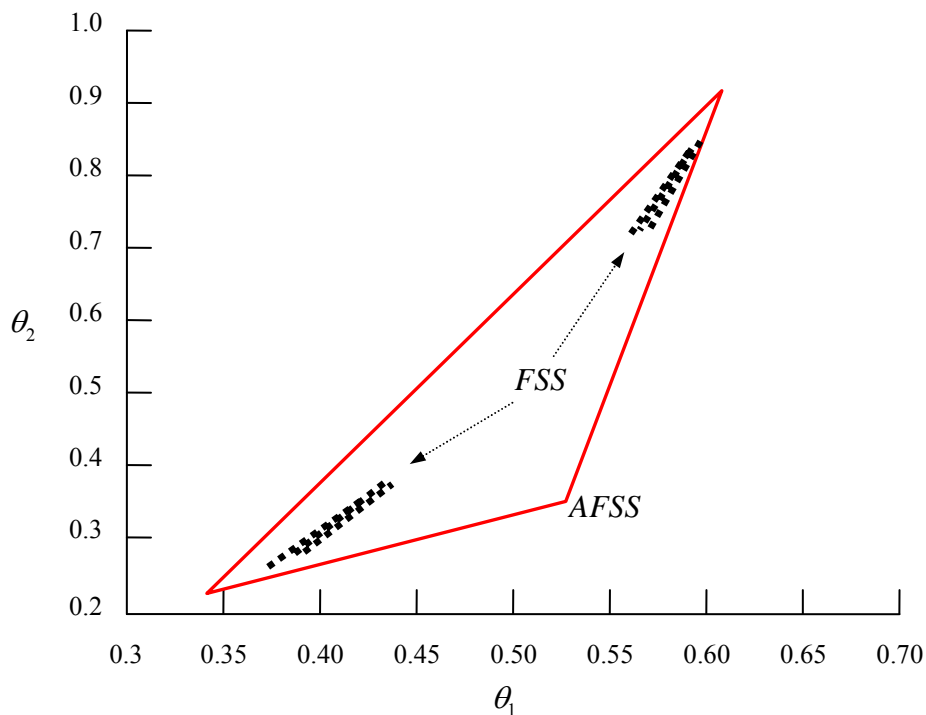


Figura 4.4 Las nubes de puntos representan el FSS . Líneas continuas de color rojo representan el simplex final obtenido aplicando el algoritmo propuesto.

4.2.6.2 Ejemplo 2

En este caso, el método de identificación propuesto se emplea para identificar el sistema no lineal de [100]:

$$y_k = 20e^{-\theta_1 r_k} - 8e^{-\theta_2 r_k} + e_k, \tag{4.6}$$

donde y_k es la salida, $r_k = k$ es el tiempo, θ_1 y θ_2 son los parámetros a identificar y e_k es un término error donde $\sigma = 0.1$. El espacio de búsqueda inicial es $AFSS_0 = Co\{(-2,0),(1,3),(4,0)\}$. Notar que la forma funcional de la función regresión del sistema es una función DC en $AFSS_0$.

Se consideran diez instantes de muestreo, $k=1,\dots,10$ para obtener las medidas correspondientes a $\theta_1 = 0.4$ y $\theta_2 = 0.3$. La Figura 4.4 muestra el simplex final obtenido por el algoritmo propuesto. La nube de puntos representa el *FSS* consistente con las medidas y el error acotado. Se puede ver que este conjunto está formado por dos regiones no conectadas. Para mejorar la solución, se puede considerar una bisección del simplex final. El par de simplexes obtenidos se reducen aplicando de nuevo el algoritmo propuesto. La nueva secuencia se ha representado en la Figura 4.5.

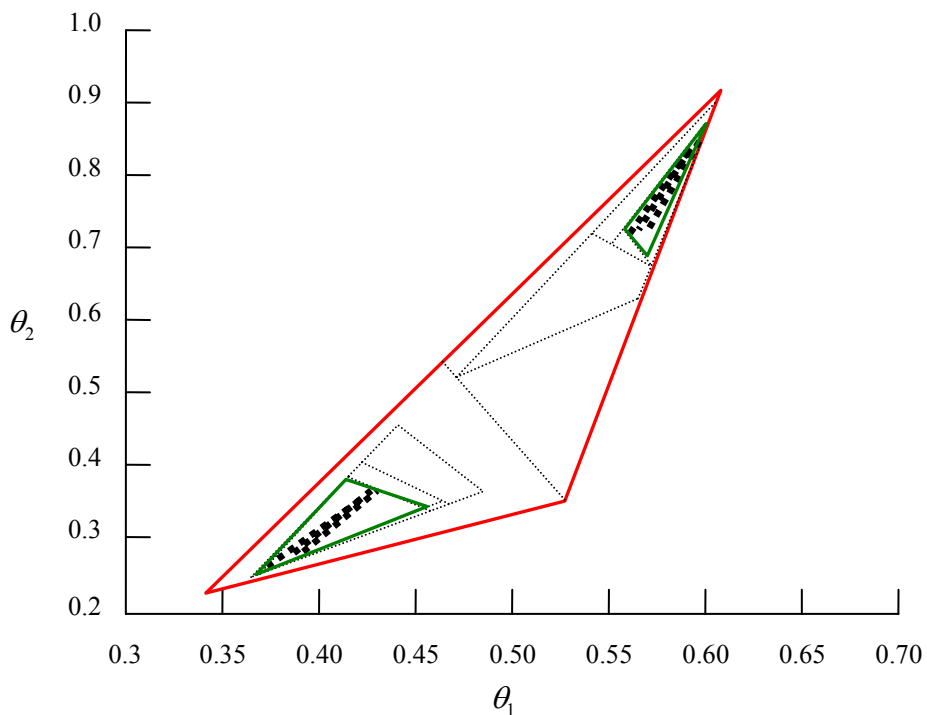


Figura 4.5 Bisección del simplex final. Se muestra la nueva evolución $AFSS_j$ de la pareja de simplexes obtenida aplicando el algoritmo propuesto; en color verde lo que serían los simplexes finales.

4.2.6.3 Ejemplo 3

En este ejemplo se aplica el método de identificación propuesto para identificar el siguiente sistema no lineal:

$$y_k = \theta_1 e^{-\theta_2 r_k} - \theta_3 e^{-\theta_4 r_k} + e_k, \quad (4.7)$$

donde $|e_k| \leq \sigma = 0.1$. Se asume que $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 > 0$. Con el fin de obtener una representación DC apropiada, se hace el siguiente cambio de variable: $\theta_1' = \log(\theta_1)$ y $\theta_3' = \log(\theta_3)$. Con este cambio de variables, el sistema no lineal modificado queda de la siguiente forma:

$$y_k = e^{-\theta_2 r_k + \theta_1} - e^{-\theta_4 r_k + \theta_3} + e_k. \quad (4.8)$$

Ahora, la forma funcional de la función regresión del sistema es una función DC. Los valores del sistema de parámetros que se han usado para obtener los correspondientes datos de entrada-salida son: $\theta_1' = \log(20) = 2.9957$, $\theta_2 = 1$, $\theta_3' = \log(8) = 2.0794$ y $\theta_4 = 0.1$. El espacio de búsqueda inicial es:

$AFSS_0 = Co\{(0,0,0,0), (7,0,0,0), (0,5,0,0), (0,0,7,0), (0,0,0,5)\}$; con *volumen* = 51.0417. El simplex *AFSS* final que se obtiene es:

$Co\{(1.94,0.05,1.95,0.05), (5.01,0,1.98,0), (3.13,1.61,1.60,0), (3.02,0,3.97,0), (2.65,0,3.54,0.57)\}$; con *volumen* = 0.2282. Se comprueba como el volumen se ha reducido drásticamente.

A continuación, con el fin de mejorar la solución obtenida, se ha aplicado un esquema branch and bound (ver Observación 4.4). En este caso, el simplex final obtenido constituye una acotación precisa con *volumen* = $6.4343 \cdot 10^{-5}$. El algoritmo propuesto emplea 2124 ramificaciones.

4.2.6.4 Ejemplo 4

Se aplica el método propuesto para identificar los parámetros $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ que satisfacen las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\theta_1^2 - 2\theta_1\theta_2 + 2\theta_2^2 - 2\theta_1\theta_3 + 2\theta_3^2 - 2\theta_2\theta_3 \\ 0 &= 2\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 + 2\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_3 + 2\theta_3^2 + 2\theta_2\theta_3 \\ 0 &\geq \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - 1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Hay que hacer notar que hay una única solución para estas restricciones ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$). Se ha implementado y ejecutado el algoritmo en un computador tipo PC con un procesador tan básico como un Pentium IV a 3.2 GHz. Se ha considerado como simplex inicial:

$$AFSS_0 = Co\{(0,0,3), (2\sqrt{2},0,-1), (-\sqrt{2},\sqrt{6},-1), (-\sqrt{2},-\sqrt{6},-1)\}.$$

En 8.9 segundos, y resolviendo 48 problemas de optimización convexa, se ha obtenido un simplex, que acota la solución exacta, de *volumen* = $1.2986 \cdot 10^{-5}$. De la misma forma, y habiéndose empleado el mismo computador, se ha desarrollado una implementación del algoritmo SIVIA [100] con la librería de aritmética intervalar INTLAB (Rump 1999) (el algoritmo SIVIA proporciona una lista de cajas que acotan la solución factible), y considerando

la caja inicial unitaria $AFSS_0 = \{[-1,1], [-1,1], [-1,1]\}$, para obtener un *volumen* aproximadamente igual al obtenido con el método propuesto en esta tesis, necesita 784 ramificaciones y emplea un tiempo computacional de 16.7 *segundos*.

4.3 Conclusiones

Se ha presentado en este capítulo un método garantista, en un contexto de error acotado, para la estimación de parámetros de modelos no lineales. El algoritmo iterativo propuesto está basado en una representación DC de la forma funcional del sistema considerado. Se han empleado simplexes para acotar el conjunto de parámetros que son consistentes con las medidas, el sistema y el error acotado considerados. Cada iteración del algoritmo propuesto, considera un simplex que acota el conjunto solución exacta; para mejorar esta cota externa, el algoritmo descarta los subconjuntos del simplex inicial que no son consistentes con el error acotado considerado. Esta operación se realiza resolviendo varios problemas de optimización convexa; siendo este número polinomial con respecto al número considerado de parámetros a identificar. Finalmente, para aclarar y documentar tanto gráfica como analíticamente el algoritmo propuesto, se han incluido algunos ejemplos.

Capítulo 5. Estimación de Estados basada en Técnicas DC

En este capítulo de la tesis se presenta un nuevo método para la estimación de estados garantista para sistemas discretos no lineales con parámetros incierto y ruido acotados. Los conjuntos de estados que son consistentes con la evolución del sistema, las salidas medidas y los parámetros inciertos y ruido se representan mediante zonotopos. Se emplea la programación DC y las operaciones de intersección para obtener un conjunto compacto acotado.

La estructura que se ha dado al capítulo incluye los apartados que se describen a continuación. En primer lugar se hace una introducción a la estimación de estados, definiendo formalmente los conceptos de estado, estimador de estado, observador de estado, etc.; se continúa introduciendo la estimación de estado garantista; se formula el problema general de estimación garantista de estado en presencia de incertidumbre; y se presenta el algoritmo propuesto en la tesis para la estimación de estados basada en error acotado aplicando programación DC. Al final del capítulo, y antes de terminar con las conclusiones, se aplica el algoritmo propuesto a un ejemplo.

5.1 Introducción a la estimación de estados

El análisis y control de sistemas en el espacio de estado está basado en la descripción del sistema mediante n ecuaciones en diferencias, que se agrupan en una ecuación vectorial matricial en diferencias.

Definición 5.1 (Concepto de estado) *El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (llamadas variables de estado) tal que, el conocimiento de esas variables en un instante determinado t_0 junto con el conocimiento de los valores de la señal de entrada para el instante $t \geq t_0$, permite determinar el comportamiento y evolución del sistema para cualquier instante de tiempo $t \geq t_0$.*

Las variables de estado se agrupan en el llamado *vector de estado* y el espacio n -dimensional que determinan los posibles valores de esas variables, se denomina *espacio de estados*.

En muchos sistemas industriales [35], la medición de variables es una tarea necesaria para la implementación de los lazos de control, para el diagnóstico de fallos, así como para permitir la monitorización y visualización de las variables críticas que indican la calidad del producto.

Esta labor, en muchos casos es ardua, costosa y difícil de realizar debido a, no poder disponerse de dispositivos fiables, los retardos de tiempo, los errores en el sistema de medida y los altos costes de los dispositivos. Además, se puede complicar la medida de algunas variables por el medio en el que debe convivir el elemento a medir (medio corrosivo, con temperaturas extremas, con altas presiones, etc.) [155]. En otros casos, los sensores no han sido diseñados para los intervalos de operación que se requieren o es reducida su disponibilidad en el mercado [194].

Para realizar la medición de variables ‘difíciles’ de forma indirecta, se utilizan los *estimadores de estado*, clasificados como: observadores de estado, filtros, sensores por software y más genéricamente como Sensores Virtuales Basados en Modelo (SVBM) [83]. Estos estimadores utilizan la medición de algunas variables del proceso conjuntamente con un modelo del mismo, para estimar las variables complicadas de medir o todas las variables que definen el estado completo.

El problema de estimación de estado [35] para sistemas continuos consiste en: *dado un proceso descrito por el modelo dinámico:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{f}(x(t), u(t)) \\ y(t) &= \mathbf{h}(x(t)) \end{aligned} \quad (5.1)$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, que se definen respectivamente como el estado, las entradas y las salidas del proceso (considerado con toda la información disponible del proceso mediante el análisis del mismo, mediante la experiencia y con los datos reales) y dadas las restricciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(x) &= 0 \\ \mathbf{j}(x) &\leq M \end{aligned} \quad (5.2)$$

el objetivo es obtener un estimador del estado real, representado por \hat{x} , que utilice las informaciones (5.1) y (5.2), de tal forma que el error de estimación, dado por $e = x - \hat{x}$, tienda a cero cuando el tiempo tienda a infinito; es decir, que el estado estimado converja al estado real del sistema (5.1) de forma asintótica.

A continuación se dan algunas definiciones relacionadas con el problema de la estimación de estados.

Definición 5.2 (Estimador de estado) *Sistema dinámico, determinístico o estocástico, capaz de reconstruir variables de estado inaccesibles pero importantes en un proceso, diseñado con base en un modelo matemático y algunas mediciones disponibles [187], [188].*

Definición 5.3 (Observador de estado) *Estimador de estado para sistemas normalmente determinísticos, capaz de producir un estimador del vector de estado [105], [134].*

Definición 5.4 (Filtro de Kalman) *Estimador de estados para sistemas normalmente estocásticos, que utiliza observaciones hasta el tiempo en que el estado del sistema dinámico es estimado [105].*

Definición 5.5 (Predictor de estado) *Estimador de estado que utiliza observaciones (los datos) estrictamente anteriores al tiempo en el cual el estado del sistema dinámico es estimado [86], [105].*

Definición 5.6 (Suavizador – Smoother) *Estimador de estado que utiliza observaciones más allá del tiempo en que el estado del sistema dinámico es estimado [86], [105].*

Definición 5.7 (Sensor virtual basado en modelo – SVBM – Soft sensor) *Asociación de un sensor (parte física) con algoritmos de estimación (programa de ordenador) que permite mediciones en línea de algunas variables de un proceso, para proporcionar estimaciones en línea de variables no medibles, parámetros del modelo o para superar retardos en la medición [67].*

Aunque existen una gran variedad de estimadores de estado, se pueden clasificar en *estimadores estocásticos* y *estimadores determinísticos*. En el caso de estocásticos se habla de *filtros* y en el caso de determinísticos se habla de *observadores de estado*.

De manera general, en el caso de los sistemas lineales, los denominados *filtros de Kalman* (estimador estocástico) y los *observadores de Luenberger* resuelven el problema de estimación de estados. Pero, la mayoría de los procesos tanto físicos como químicos son no lineales.

Para procesos dinámicos no lineales, una forma de abordar el problema de la estimación consiste en linealizar localmente el modelo del proceso en torno a un punto de referencia y, a partir de ahí, aplicar métodos de observación para sistemas lineales. Realizar esta aproximación tiene únicamente validez local, no resultando satisfactorio para el resto de puntos, aún cuando las no linealidades sean insignificantes. Por lo tanto, se necesitan diseñar observadores no lineales que incorporen las no linealidades inherentes al proceso.

Los observadores no lineales han recibido especial atención en el campo del control: [27], [91], [106], etc. porque la propiedad de observabilidad de los sistemas depende de la entrada del sistema. Además, la observabilidad de los sistemas no lineales considera entradas para las

cuales dos estados iniciales distintos no puedan distinguirse. A continuación se da la definición de observabilidad de un sistema.

Definición 5.8 (Estado observable) *El estado $x(t)$ es observable si dada cualquier entrada $u(t)$ existe un tiempo finito $t_f \geq t_0$, tal que con el conocimiento de $u(t)$ y la salida $y(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_f$ son suficientes para determinar $x(t)$ [9].*

En los sistemas lineales, la observabilidad es una propiedad global, no depende de los valores específicos de la entrada, los estados y la salida; en los sistemas no lineales, esta propiedad depende de las variables de entrada. En general, los sistemas no lineales tienen entradas singulares que los hacen no observables.

En [9] se dan las definiciones de *distinguibilidad*, *entrada universal*, *entrada singular*, *observabilidad uniforme*, *observabilidad*, *matriz de observabilidad*, que son útiles para entender el concepto de observabilidad de un sistema no lineal.

Se han desarrollado varios métodos de diseño para observadores no lineales, la mayoría de ellos están basados en el filtro de Kalman extendido y en el observador de Luenberger extendido. Algunos otros trabajos están basados en la técnica de horizontes deslizantes [140]; y otros basan el diseño de observadores no lineales en la resolución de un conjunto de ecuaciones simultáneas no lineales por medio del método de Newton [151].

5.2 Estimación garantista de estados

Los métodos de acotación garantista se basan en la construcción de un conjunto compacto que incluye, con garantía, los estados del sistema que son consistentes con el modelo considerado, con la salida medida y el error acotado considerado.

Como se ha comentado anteriormente, el filtro de Kalman proporciona una estimación óptima del estado de un proceso basándose en las salidas medidas. Sin embargo, son necesarios un modelo del proceso y las matrices de covarianza del ruido [122], [152]. En vez de usar ruido Gaussiano, como en el caso estocástico, se considera un ruido acotado mediante norma. En este capítulo se adopta este paradigma.

La solución al problema de la estimación garantista depende del sistema considerado y del tipo de cotas de error utilizadas. Si el sistema es lineal y se consideran cotas politópicas del error, la solución también es politópica. El problema es que la definición de ese politopo puede ser muy compleja [147], [158] y puede requerir gran cantidad de almacenamiento y

computación. También se ha considerado utilizar polítopos de complejidad limitada [44], constituyendo una buena aproximación, aunque los algoritmos siguen resultando algo complejos. En [182] se presenta un estimador garantista para sistemas no lineales basado en polítopos; considera linealizaciones de las ecuaciones de estado respecto del estado estimado, aplicándole un estimador lineal a la trayectoria. Los límites de los polítopos que representan el estado estimado se calculan resolviendo varios problemas de optimización lineal. También establece algunos criterios de convergencia del algoritmo.

En trabajos pioneros de estimación de estados garantista [25], [178] se utilizó una acotación elipsoidal del estado del sistema dinámico. Esta elección tiene como ventaja el que la complejidad computacional de la estimación no se incrementa con el número de observaciones. También se han desarrollado algoritmos que aproximan con regiones elipsoidales en sentido óptimo, calculando elipses de mínimo volumen [78]. Estos algoritmos se han extendido y aplicado al problema de la estimación de estados por diferentes autores: en [54] y [119] hay un excelente resumen del método del elipsoide. En [176] se presenta un método de estimación elipsoidal para sistemas con incertidumbres que satisfacen cierta restricción cuadrática integral; restricción que incluye las incertidumbres acotadas mediante una norma. En [72] se aborda el problema de estimación garantista cuando se considera un sistema con incertidumbre estructurada; en este caso se demuestra que el problema se puede reducir a un LMI (*Linear Matrix Inequalities* – Desigualdades Matriciales Lineales). En [19] se aborda una extensión del método de la elipse para sistemas no lineales con perturbaciones acotadas.

En [56] se presenta un método alternativo basado en paralelotopos (conjunto descrito mediante *norma* $-\infty$, facilitando la representación de la incertidumbre componente a componente. Los paralelotopos que se utilizan para estimar el estado de un sistema lineal discreto tienen un volumen mínimo y proporcionan complejidad polinomial.

En [111] se presenta un estimador no lineal recursivo garantista basado en un algoritmo de corte y acotación intervalar. El conjunto solución se presenta mediante una lista de cajas, permitiendo describir conjuntos no convexos e incluso no conexos²³. El inconveniente de este algoritmo es su complejidad exponencial respecto del número de parámetros inciertos que se consideren. Con el fin de mejorar la complejidad computacional, en [104] se consideran técnicas basadas en consistencia.

²³ Un conjunto conexo es un subconjunto de \mathbb{R}^n que no puede ser descrito como una unión disjunta de dos conjuntos abiertos (intuitivamente, una pieza, que no se puede dividir). Si un conjunto no es conexo se dice que es inconexo, disconexo o no conexo.

En [39] se presenta un método para la estimación de estado garantista para el caso de procesos discretos no lineales con parámetros inciertos y ruido acotados. En cada instante de muestreo aplica un algoritmo de dos fases: en la primera fase proporciona una cota garantista de la trayectoria incierta del sistema, usando aritmética intervalar; la segunda fase, que es un proceso corrector, calcula la intersección entre la acotación de la trayectoria garantista y los estados del sistema que son consistentes con la salida medida. El conjunto calculado se representa mediante un zonotopo de mínimo tamaño; para calcular el zonotopo de tamaño mínimo propone distintas alternativas: eliminar el segmento óptimo, calcular el zonotopo de mínimo volumen o el de mínimo tamaño de sus segmentos generadores. En [162], también se obtiene un conjunto mediante zonotopos pero la salida medida se usa para estimar el estado mediante una ganancia K . En [62] la medida se utiliza para calcular una cota de la región consistente con la medida obtenida mediante una descomposición en valores singulares.

5.2.1 Formulación del problema de estimación garantista del estado en presencia de incertidumbres

Considérese un sistema discreto no lineal de la forma:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, w_k) \\ y_k &= g(x_k, v_k) \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde $y_k \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida medida en el instante de muestreo k y $x_k \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema en el mismo instante k ; el vector $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ representa los parámetros del proceso variables con el tiempo y el vector de perturbaciones del proceso; el vector $v_k \in \mathbb{R}^{p_v}$ es el vector de ruido en la medida; y se asume que las incertidumbres y el estado inicial están acotados por conjuntos compactos conocidos: $w_k \in W$, $v_k \in V$ y $x_0 \in \mathcal{X}_0$.

El objetivo es encontrar en el instante k una aproximación exterior del conjunto de todos los posibles estados consistentes con las salidas medidas y el conjunto de estado inicial. Se define a continuación el conjunto de estados del sistema que son consistentes con las medidas obtenidas del mismo.

Definición 5.9 (Conjunto alcanzable consistente) *Considérese el sistema dado por (5.3), un conjunto de estados compacto inicial \mathcal{X}_0 y una secuencia de salidas medidas $(y_i)_{i=1}^k$ (subíndice y superíndice indican el primer y último valor de la i). Entonces, en el instante de muestreo k , el conjunto alcanzable consistente \mathcal{X}_k se define como:*

$$\mathcal{X}_k = \left\{ x_k : \exists (w_j)_0^{k-1} \in W, (v_j)_1^k \in V, x_0 \in \mathcal{X}_0 \text{ con } (x_j = f(x_{j-1}, w_{j-1}), y_j = g(x_j, v_j))_1^k \right\}.$$

Por lo tanto, \mathcal{X}_k es el conjunto de todos los estados consistentes con la salida medida y que pueden ser alcanzados por la evolución del sistema en el instante k . El cálculo exacto de estos conjuntos es una tarea difícil; para reducir la complejidad, estos conjuntos se acotan mediante conjuntos más conservadores, que son más fáciles de calcular.

5.3 Algoritmo para estimación de estados basado en error acotado aplicando programación DC

Como se ha comentado anteriormente, en esta tesis se presenta un nuevo método para la estimación de estados garantista para sistemas discretos no lineales con parámetros inciertos y ruido acotados. Los conjuntos de estados que son consistentes con la evolución del sistema, las salidas medidas y los parámetros inciertos y ruido se representan mediante zonotopos. Se emplea la programación DC y las operaciones de intersección para obtener un conjunto compacto acotado. Al final del capítulo se aplica a un ejemplo el algoritmo que se presenta.

El objetivo es presentar un nuevo estimador de estado para sistemas dinámicos discretos no lineales en ambiente de incertidumbre. La teoría del filtro de Kalman proporciona una estimación óptima con respecto a la varianza del error. En este caso se considera una incertidumbre de norma acotada; hipótesis empleada en [45], [79] y [143]. Este método construye un conjunto compacto que acota los estados del sistema que son consistentes con las salidas medidas y la incertidumbre de norma acotada.

Como ya se ha comentado anteriormente, para acotar el conjunto de estado consistente se han utilizado varias figuras geométricas, desde los trabajos pioneros de Schweppe en 1968, y pasando por los desarrollados por Kurzhanski y Valyi en 1996, Savkin y Peterson en 1998, El Ghaoui y Calafiore en 2001 y también en este último año, Durieu, Walter y Polyak [71], entre otros.

En [118], para obtener una estimación incremental exacta, se propone el uso de poliedros. Ya se ha comentado que, en [111], se determina un estimador no lineal recursivo garantista, basado en un algoritmo branch and bound intervalar; y que posteriormente se mejora el algoritmo en [104]. Y, alternativamente, basándose en paralelotopos en [56] y [57]. La estimación de estados para sistemas afines a trozos se enfoca en [165], empleando poliedros.

Como se indica en la Definición 2.20, un zonotopo es la transformación afín de una caja unitaria [145], [185]. Ya se ha indicado anteriormente que estas figuras geométricas se han

usado para construir un estimador de estado tipo caja deficiente. En [3] se combina aritmética intervalar y zonotopos para obtener un estimador de estado no lineal garantista.

El objetivo planteado en el algoritmo que se presenta consiste en aplicar un método de programación DC al problema de estimación de estado. El método propuesto emplea zonotopos y programación DC con el fin de obtener para el sistema no lineal en cada instante de tiempo una acotación garantista de la trayectoria indeterminada. Con un ejemplo al final se demuestra que el método mejora los resultados obtenidos en [3].

Como se indica en la Definición 3.11, una función DC $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que se puede expresar como la diferencia de dos funciones convexas, es decir $f(x) = \tilde{g}(x) - \tilde{h}(x)$, donde $\tilde{g}(x)$ y $\tilde{h}(x)$ son funciones convexas. La clase de las funciones DC es cerrada bajo las operaciones básicas. Por ejemplo, se ha visto en el capítulo 3 que, si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones DC, entonces $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$, $\max\{f_1(x), f_2(x)\}$ y $\min\{f_1(x), f_2(x)\}$ son funciones DC [95], [191]. También es digno de remarcar que cualquier función afín continua a trozos es una función DC. Se han desarrollado varias técnicas para resolver problemas de optimización global no convexos.

5.3.1 Formulación del problema

En primer lugar se introducen varias notaciones preliminares que, aunque se han definido en temas anteriores, pueden facilitar la exposición del problema. Un intervalo $[a, b]$ es el conjunto $\{x : a \leq x \leq b\}$. El intervalo unitario es $\mathbf{B} = [-1, 1]$. Una caja es un vector intervalo. Una caja unitaria en \mathbb{R}^m , denotada como \mathbf{B}^m , es una caja compuesta por m intervalos unitarios. La suma de Minkowski de dos conjuntos X e Y está definida por $X \oplus Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$. Dado un vector $p \in \mathbb{R}^n$ y una matriz $H \in \mathbb{R}^{n \times m}$, el conjunto $p \oplus H\mathbf{B}^m = \{p + Hz : z \in \mathbf{B}^m\}$ se denomina zonotopo de orden m ; nótese que este es la suma Minkowski de los segmentos definidos por las columnas de la matriz H . Un paralelotopo es un zonotopo con $n = m$. Dado el paralelotopo $P = p \oplus H\mathbf{B}^n$, donde $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es invertible, P puede reescribirse como $P = \{x : \|H^{-1}x - H^{-1}p\|_{\infty} \leq 1\}$.

Considérese un sistema discreto no lineal en ambiente de incertidumbre de la forma:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathbf{f}(x_k, w_k) \\ y_k &= \mathbf{d}(x_k, v_k) \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde $x_k \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ con $k \geq 0$ es el estado del sistema e $y_k \in \mathbb{R}^p$ es el vector salida medido en el instante de tiempo k . El vector $w_k \in W \subseteq \mathbb{R}^{n_w}$ con $k \geq 0$ representa los parámetros del proceso variables en el tiempo y el vector perturbación del proceso, y $v_k \in V \subseteq \mathbb{R}^{p_v}$ con $k \geq 0$ es el vector ruido de medida. Se asume que las incertidumbres y el estado inicial están acotados por zonotopos: $w_k \in W = c_w \oplus M_w \mathbf{B}^{r_w}$, $v_k \in V = c_v \oplus M_v \mathbf{B}^{r_v}$ y $x_0 \in \mathcal{X}_0 = p_0 \oplus H_0 \mathbf{B}^r$, donde $c_w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $c_v \in \mathbb{R}^{p_v}$ y $p_0 \in \mathbb{R}^n$.

Se asume que $\mathbf{f}(\cdot)$ y $\mathbf{d}(\cdot)$ son funciones continuas, y que cada componente de $\mathbf{f}(\cdot)$ y $\mathbf{d}(\cdot)$ tienen representaciones DC, esto es,

$$\begin{aligned} f_i(x, w) &= g_i(x, w) - h_i(x, w), \quad i = 1, \dots, n, \\ d_i(x, v) &= a_i(x, v) - b_i(x, v), \quad i = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

donde $f_i(\cdot, \cdot)$, $d_i(\cdot, \cdot)$ representan las i -ésimas componentes de las funciones $\mathbf{f}(x, w)$ y $\mathbf{d}(x, v)$ respectivamente, y donde las funciones $h_i(x, w)$, $g_i(x, v)$, $i = 1, \dots, n$ y $a_i(x, v)$, $b_i(x, v)$, $i = 1, \dots, p$ son convexas en (X, W) y (X, V) , respectivamente. Esto no supone una restricción verdadera porque toda función continua se puede aproximar por una diferencia de dos funciones convexas (función DC) [95] y cada función C^2 es una función DC [191]. En el apartado 5.4 se muestra un ejemplo.

Dada una función continua $\phi(\cdot)$ y un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\phi(X)$ indica el conjunto $\{\phi(x) : x \in X\}$. Con esta notación, el conjunto estado consistente y el conjunto de estado incierto exacto se definen como sigue:

Definición 5.10 (Conjunto de estados consistente) Dado el sistema (5.4) y la salida medida y_k , el conjunto de estados consistente en el instante de tiempo k se define como $\mathcal{X}_{y_k} = \{x \in \mathbb{R}^n : y_k \in \mathbf{d}(x, V)\}$.

Definición 5.11 (Conjunto de estados incierto exacto) Dado el sistema (5.4), el conjunto de estados incierto exacto \mathcal{X}_k es igual al conjunto de estados que son consistentes con las salidas medidas y_1, y_2, \dots, y_k y el conjunto de estado inicial \mathcal{X}_0 :

$$\mathcal{X}_k = f(\mathcal{X}_{k-1}, W) \cap \mathcal{X}_{y_k}, \quad k \geq 1.$$

El cálculo exacto de estos conjuntos es una tarea difícil. Con el fin de reducir la complejidad de los cálculos, estos conjuntos se acotan por medio de intervalos exteriores conservadores. Por lo tanto, en un instante de tiempo k , el objetivo es encontrar una aproximación externa del conjunto incertidumbre exacto correspondiente \mathcal{X}_k .

<p>Algoritmo <i>Cálculo de un conjunto incierto aproximado $\hat{\mathcal{X}}_k$</i></p>
<p>Algoritmo</p> <p><i>Paso 1:</i> Usar programación DC para acotar la trayectoria incierta del sistema no lineal: $\bar{\mathcal{X}}_k \supseteq f(\hat{\mathcal{X}}_{k-1}, W)$.</p> <p><i>Paso 2:</i> Calcular una acotación externa del conjunto de estados consistente \mathcal{X}_{y_k}; denotado como $\bar{\mathcal{X}}_{y_k}$.</p> <p><i>Paso 3:</i> Calcular una acotación externa de $\bar{\mathcal{X}}_k \cap \bar{\mathcal{X}}_{y_k}$; denotado como $\hat{\mathcal{X}}_k$.</p> <p>Fin del Algoritmo</p>

Tabla 5.1 Descripción general del algoritmo de cálculo de un conjunto incierto aproximado $\hat{\mathcal{X}}_k$.

En esta tesis se presenta un nuevo algoritmo de estimación de estado para sistemas no lineales basado en error acotado. Supóngase que una acotación externa del conjunto de estados incierto exacto está disponible en el instante de tiempo $k-1$ (acotación denotada como $\hat{\mathcal{X}}_{k-1}$); supóngase también que una salida medida y_k se ha obtenido en un instante de tiempo k . Bajo estos supuestos, en la Tabla 5.1 se da la descripción general del algoritmo.

El algoritmo propuesto es similar a un filtro de Kalman: el primer paso puede considerarse como un paso pronóstico, mientras que los segundo y tercer pasos constituyen un paso de corrección. En el primer paso se usan zonotopos [145], [185] y programación DC para obtener una acotación externa de la evolución del sistema. Esta acotación externa se mejora usando la información suministrada por la nueva salida medida y_k y la programación DC (segundo y tercer paso). En el apartado 5.3.5 se da la versión completa y se detalla el algoritmo que se propone.

5.3.2 Programación DC

En esta apartado se muestran o se recuerdan algunos resultados y conceptos fundamentales sobre programación DC, necesarios para introducir el algoritmo de estimación de estados

propuesto. Además de en el capítulo 3 de esta tesis, en las referencias [95], [191] y [192] se encuentra un escrutinio excelente sobre programación DC.

Definición 5.12 (Función DC sobre un politopo convexo) Sea S un politopo convexo (conjunto poliédrico acotado) en \mathbb{R}^n . Una función real estimada $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ se llama DC sobre S , si existen dos funciones convexas $\check{g}, \check{h} : S \rightarrow \mathbb{R}$ tales que la función f se puede expresar de la forma: $f(x) = \check{g}(x) - \check{h}(x)$.

Como ya se ha comentado anteriormente, el conjunto de las funciones DC definidas en un conjunto convexo compacto de \mathbb{R}^n es denso en el conjunto de las funciones continuas de este conjunto. Por lo tanto, todas las funciones continuas en un conjunto convexo compacto pueden aproximarse por una función DC con la precisión que se desee. Además, dada una función C^2 , es siempre posible obtener una representación DC.

Definición 5.13 (Problema de programación DC) La forma general del problema de programación DC viene dada por:

$$\min_{x \in S} f(x) \quad (5.5)$$

donde $f(x) = \check{g}(x) - \check{h}(x)$ y $\check{g}(x)$ y $\check{h}(x)$ son funciones convexas en S .

Nótese que no es necesario restringir S a la clase de politopos. Para ver una definición más general de programación DC ver [161]. Las definiciones que se dan a continuación son normales en la literatura existente sobre optimización convexa; ver, por ejemplo, [173] y [37].

Definición 5.14 (Subdiferencial de una función convexa) La subdiferencial de una función convexa $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto x_0 (también denominada el conjunto de subgradientes de g en el punto x_0), denotada $\partial g(x_0)$ se define como:

$$\partial g(x_0) = \{u_0 \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq g(x_0) + u_0^T(x - x_0), \forall x \in S\} \quad (5.6)$$

Si la función g es diferenciable en S , el vector u_0 se puede calcular por el gradiente de la función: $u_0 = (\partial/\partial x)g(x_0)$. Esto es consecuencia directa de la convexidad de g .

Definición 5.15 (Minorante lineal de una función convexa) Dada una función convexa $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ y un subgradiente u_0 de g en un punto $x_0 \in S$, un minorante lineal de g es la función lineal:

$$\bar{g}(x) = g(x_0) + u_0^T (x - x_0) \quad (5.7)$$

Por la propia definición, está claro que $g(x) \geq \bar{g}(x)$, $\forall x \in S$. De la misma forma, dada una función convexa $h: S \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{h}(x)$ indica un minorante lineal de h (obtenido por medio del concepto de subgradiente).

Si se denomina como $\text{vert}(S)$ al conjunto de los vértices de S , y teniendo en la mente que $\bar{g}(x) - h(x)$ es una función cóncava y $g(x) - \bar{h}(x)$ es una función convexa, se puede obtener una solución aproximada del problema de programación DC de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min_{x \in S} f(x) &\geq \min_{x \in \text{vert}(S)} \bar{g}(x) - h(x) \\ \max_{x \in S} f(x) &\leq \max_{x \in \text{vert}(S)} g(x) - \bar{h}(x) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Por lo tanto, para obtener cotas inferiores y superiores para una solución global, deben visitarse todos los vértices del conjunto S .

Haciendo uso de las ideas mostradas, se puede emplear la programación DC para acotar el rango de una función. En el ejemplo 1 del apartado 3.6.1 se mostró como el rango sobrestimado obtenido mediante aritmética intervalar se mejoraba si se aplicaba la programación DC; por lo tanto, el uso de programación DC mejora potencialmente los resultados previos basados en aritmética intervalar [3]. Las cotas obtenidas por funciones DC se basan en una aproximación lineal de una función convexa. Se proporciona una aproximación de segundo orden (en el sentido de Taylor); es decir, el error disminuye cuadráticamente con la distancia al punto de linealización. Esta propiedad asegura que hay un compromiso entre buen sobrestimador y coste computacional.

5.3.3 Acotando la evolución del sistema

Este apartado presenta un método novedoso para acotar la evolución del sistema no lineal (5.4). Primero, se utiliza una aproximación lineal de la forma funcional del sistema para obtener una aproximación de la evolución del mismo. A continuación, el método propuesto aprovecha la estructura DC del sistema (5.4) hasta acotar el error producido por la aproximación lineal con un método garantista. Combinando la aproximación lineal y el error acotado, se obtiene una cota superior de la evolución del sistema no lineal.

Considerar la función $\mathbf{f}(x, w): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (5.4), donde $x \in X = p \oplus H\mathbf{B}^m$ y $w \in W = c_w \oplus M_w \mathbf{B}^{n_w}$. Como se ha comentado anteriormente, se asume que cada componente de

$\mathbf{f}(x, w)$ es una función DC, esto es $f_i(x, w) = \tilde{g}_i(x, w) - \tilde{h}_i(x, w)$ con $i = 1, \dots, n$. Las funciones $\tilde{g}_i(x, w)$ y $\tilde{h}_i(x, w)$ son funciones convexas en (X, W) .

El objetivo del método propuesto es obtener una acotación externa del conjunto $\mathbf{f}(X, W)$. Para aproximar la función original $\mathbf{f}(x, w)$, se utiliza una función lineal representada como $\mathbf{f}^L(x, w) = \mathbf{f}(p, c_w) + G_x(x - p) + G_w(w - c_w)$. Esta función lineal se puede obtener de diferentes formas; por ejemplo, cuando $\mathbf{f}(x, w)$ es una función diferenciable, las matrices G_x y G_w pueden ser respectivamente $(\partial/\partial x)\mathbf{f}(p, c_w)$ y $(\partial/\partial w)\mathbf{f}(p, c_w)$. En el siguiente apartado, se determinan de forma exacta la función $\mathbf{f}^L(x, w)$ y el error producido.

5.3.3.1 Acotando el término error

En este apartado se proporciona una cota garantista del error que se produce cuando se aproxima el sistema no lineal mediante la linealización $\mathbf{f}^L(x, w)$. Con este fin se introduce la siguiente definición.

Definición 5.16 (Conjunto error) *El conjunto error, denotado como ξ se define como:*

$$\xi = \{e \in \mathbb{R}^n : e = \mathbf{f}(x, w) - \mathbf{f}^L(x, w), x \in X, w \in W\}, \quad (5.9)$$

donde $\mathbf{f}^L(x, w) = \mathbf{f}(p, c_w) + G_x(x - p) + G_w(w - c_w)$.

Notar que $\mathbf{f}(X, W)$ está incluido en $\mathbf{f}^L(X, W) \oplus \xi$, estando definida $\mathbf{f}^L(X, W)$ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^L(X, W) &= \mathbf{f}(p, c_w) \oplus G_x(X - p) \oplus G_w(W - c_w) = \\ &= \mathbf{f}(p, c_w) \oplus G_x H \mathbf{B}^m \oplus G_w M_w \mathbf{B}^{r_w} = \\ &= \mathbf{f}(p, c_w) \oplus [G_x H \quad G_w M_w] \mathbf{B}^{m+r_w} \end{aligned} \quad (5.10)$$

A continuación, nuestro objetivo es encontrar el paralelotopo $\bar{\xi}$ tal que $\xi \subseteq \bar{\xi}$. Para ello, en primer lugar, el siguiente lema (ya visto en el capítulo 2 de esta tesis) nos permite obtener un paralelotopo que acote a un zonotopo dado.

Lema 5.1 (Acotación de un zonotopo con un paralelotopo) *Considerar el zonotopo $Z = p \oplus M\mathbf{B}^m$ con $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$, donde $n \leq m$ y $\text{rango}(M) = n$. Considerar también la descomposición en valores singulares $M = U \Sigma V^T$, donde $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$. Denotar*

como D la matriz diagonal cuyas componentes son $D_{ii} = \|\sigma_i V_i\|_1$, $i=1, \dots, n$, donde V_i es la i -ésima columna de la matriz V . Bajo estos supuestos resulta que: $Z \subseteq P = p \oplus UDB^n$.

PRUEBA: $M\mathbf{B}^m = U \sum V^T \mathbf{B}^m = U [\sigma_1 V_1 \sigma_2 V_2 \dots \sigma_n V_n]^T \mathbf{B}^m \subseteq UDB^n$. La última inclusión, se basa en el hecho de que $\sigma_i V_i^T \mathbf{B}^m \subseteq \|\sigma_i V_i\|_1 \mathbf{B}^1 = D_{ii} B^1$, donde $\|\cdot\|_1$ representa la norma vectorial igual a la suma de los valores absolutos de las componentes de un vector dado.

□

Como se justifica a continuación, el supuesto $n \leq m$ y $\text{rango}(M) = n$ no es restrictivo. Considerar el zonotopo $\tilde{Z}(\varepsilon) = p \oplus [M \ \varepsilon I] \mathbf{B}^{m+n} = p \oplus \tilde{M} \mathbf{B}^{m+n}$. Es evidente que $Z = \tilde{Z}(0)$ y $Z \subseteq \tilde{Z}(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon$. Además \tilde{M} cumple el supuesto del lema para cada $\varepsilon \neq 0$. Por lo tanto, haciendo uso del Lema 5.1, es posible obtener para un $\varepsilon \neq 0$ dado un paralelotopo $\tilde{P}(\varepsilon)$ tal que $Z \subseteq \tilde{Z}(\varepsilon) \subseteq \tilde{P}(\varepsilon)$. Seleccionando arbitrariamente ε de forma que sea distinto de 0 pero pequeño, puede obtenerse un paralelotopo que acote al zonotopo Z .

A continuación se presenta una forma de calcular una cota externa $\bar{\xi}$ del conjunto error ξ . Esta cota se obtiene empleando los conceptos de programación DC que se han presentado anteriormente. En primer lugar, se asume que se dispone de un paralelotopo $P = t \oplus Q\mathbf{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ que acota al conjunto X ($X \subseteq P$) (este paralelotopo puede obtenerse por medio del resultado presentado en el Lema 5.1). Bajo este supuesto, se consideran ahora las siguientes funciones afines en x y w :

$$\bar{g}_i(x, w) = g_i(p, c_w) + u_{g_i}^T \begin{bmatrix} x - p \\ w - c_w \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, n$$

$$\bar{h}_i(x, w) = h_i(p, c_w) + u_{h_i}^T \begin{bmatrix} x - p \\ w - c_w \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, n,$$

donde u_{g_i} y u_{h_i} son subgradietes de $g_i(x, w)$ y $h_i(x, w)$, respectivamente, en $(x, w) = (p, c_w)$.

Debido a la convexidad de $g_i(\cdot, \cdot)$ y $h_i(\cdot, \cdot)$ resulta que $\bar{g}_i(x, w) \leq g_i(x, w)$ y $\bar{h}_i(x, w) \leq h_i(x, w)$, $\forall (x, w)$, $i=1, \dots, n$. Es decir, son minorantes lineales.

Ahora denominar con $f_i^L(x, w)$ la i -ésima componente de $\mathbf{f}^L(x, w)$. Con esta notación:

$$\begin{aligned} f_i(x, w) - f_i^L(x, w) &= g_i(x, w) - \bar{h}_i(x, w) - f_i^L(x, w) \\ &\leq g_i(x, w) - \bar{h}_i(x, w) - f_i^L(x, w). \end{aligned}$$

Es decir, $g_i(x, w) - \bar{h}_i(x, w) - f_i^L(x, w)$ es un mayorante convexo de $f_i(x, w) - f_i^L(x, w)$.

Denotando ahora como $vert(P, W)$ al conjunto de vértices de (P, W) se concluye que:

$$\begin{aligned} \max_{(x, w) \in (X, W)} f_i(x, w) - f_i^L(x, w) &\leq \max_{(x, w) \in (X, W)} g_i(x, w) - \bar{h}_i(x, w) - f_i^L(x, w) \leq \\ \leq \max_{(x, w) \in (P, W)} g_i(x, w) - \bar{h}_i(x, w) - f_i^L(x, w) &\leq \max_{(x, w) \in vert(P, W)} g_i(x, w) - \bar{h}_i(x, w) - f_i^L(x, w). \end{aligned}$$

Argumentando en la misma línea, se puede afirmar que

$$\min_{(x, w) \in (X, W)} f_i(x, w) - f_i^L(x, w) \geq \min_{(x, w) \in vert(P, W)} \bar{g}_i(x, w) - h_i(x, w) - f_i^L(x, w).$$

Lo que precede prueba el siguiente resultado.

Lema 5.2 (Paralelotopo acotación externa de un conjunto) *Supóngase que el paralelotopo P contiene al conjunto X y se define el paralelotopo $\bar{\xi}$ como $\bar{\xi} = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_i^- \leq x_i \leq \gamma_i^+, i = 1, \dots, n\}$ donde $\gamma_i^+ = \max_{(x, w) \in vert(P, W)} (g_i(x, w) - \bar{h}_i(x, w) - f_i^L(x, w))$ y $\gamma_i^- = \min_{(x, w) \in vert(P, W)} (\bar{g}_i(x, w) - h_i(x, w) - f_i^L(x, w))$, entonces el paralelotopo $\bar{\xi}$ es una acotación externa del conjunto ξ , es decir $\xi \subseteq \bar{\xi}$.*

Observación 5.1 *Notese que, en orden a calcular el paralelotopo $\bar{\xi}$, es necesario, en principio, visitar los 2^{n+r_w} vértices de (P, W) . Si se supone que w entra de una forma aditiva en el modelo del sistema, esto es, $\mathbf{f}(x, w) = \bar{\mathbf{f}}(x) + Ew$, para este caso, si se hace G_w igual a E , resulta que $f_i(x, w) - f_i^L(x, w)$ no depende de w , y únicamente tendrían que ser considerados 2^n vértices. Esto es el orden de la complejidad asociada a la evolución de la acotación del sistema bajo incertidumbre. Nótese que esta complejidad es asequible para los sistemas de orden bajo y proporciona un buen compromiso entre complejidad computacional y precisión.*

5.3.3.2 Acotación garantista inicial de la evolución del sistema

Ahora, se determina un teorema que proporciona un operador inicial para acotar la evolución del sistema. Este operador supone una nueva acotación externa para el conjunto error ξ (obtenido por medio del Lema 5.2).

Teorema 5.1 *Considerar los zonotosos $X = p \oplus H\mathbf{B}^m$ y $W = c_w \oplus M_w \mathbf{B}^{r_w}$. Suponer que el paralelotopo $\bar{\xi} = \bar{t} \oplus \bar{Q}\mathbf{B}^n$ cumple $\xi \subseteq \bar{\xi}$. Obténgase ahora el zonotopo $Z = p_z \oplus H_z \mathbf{B}^{m+r_w+n}$,*

donde $p_z = \mathbf{f}(p, c_w) + \bar{t}$ y $H_z = [G_x H \quad G_w M_w \quad \bar{Q}]$. Entonces, bajo estas definiciones se cumple que $\mathbf{f}(X, W) \subseteq Z$.

PRUEBA: Por la definición Definición 5.16 se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(X, W) &\subseteq \mathbf{f}^L(X, W) \oplus \xi \subseteq \mathbf{f}^L(X, W) \oplus \bar{\xi} = \\ &= \mathbf{f}(p, c_w) \oplus G_x H \mathbf{B}^m \oplus G_w M_w \mathbf{B}^{r_w} \oplus \bar{\xi} = \\ &= (\mathbf{f}(p, c_w) + \bar{t}) \oplus G_x H \mathbf{B}^m \oplus G_w M_w \mathbf{B}^{r_w} \oplus \bar{Q} \mathbf{B}^n = \\ &= p_z \oplus H_z \mathbf{B}^{m+r_w+n} = Z. \end{aligned}$$

□

5.3.3.3 Mejorando la acotación obtenida

Una vez se ha obtenido el zonotopo Z , que acota $\mathbf{f}(X, W)$, en esta sección se presenta una forma de mejorar dicha acotación.

Antes de detallar, justificar y demostrar cada uno de los pasos del algoritmo propuesto, de forma resumida, el proceso seguido es el siguiente:

1. Con el Teorema 5.1 se ha obtenido el zonotopo $Z = p_z \oplus H_z \mathbf{B}^{m+r_w+n}$ que acota al conjunto $\mathbf{f}(X, W)$ (Figura 5.1 a), color negro). En el algoritmo que se presenta más adelante, a este conjunto se denomina como $\bar{\chi}_k$ (Figura 5.1 b), color azul).
2. Se tiene un paralelotopo \hat{P} (Figura 5.1 c), color rojo y línea continua) como aproximación exterior del zonotopo $\bar{\chi}_k$ ($\bar{\chi}_k \subseteq \hat{P}$), así como el paralelotopo P que acota al conjunto X ($X \subseteq P$). Por medio del Teorema 5.2, se obtiene el paralelotopo \tilde{P} (Figura 5.1 d), color rojo y línea discontinua) de tal forma que $\mathbf{f}(X, W) \subseteq \bar{\chi}_k \cap \tilde{P}$. Este paralelotopo \tilde{P} se emplea para mejorar la acotación $\bar{\chi}_k$ que se obtuvo por el Teorema 5.1 (puede mejorar o no), mediante $\bar{\chi}_k \cap \tilde{P}$.
3. Empleando la Propiedad 5.1 se acota el conjunto de estados consistente χ_{y_k} por medio de la franja $\bar{\chi}_{y_k}$ (Figura 5.1 e), color verde).
4. Por último, se obtiene un zonotopo $\hat{\chi}_k$ (Figura 5.1 f), color naranja) que acota la intersección $\bar{\chi}_k \cap \tilde{P}$ con la franja $\bar{\chi}_{y_k}$, mediante el operador intersección entre franja y zonotopo propuesto en el Capítulo 2.

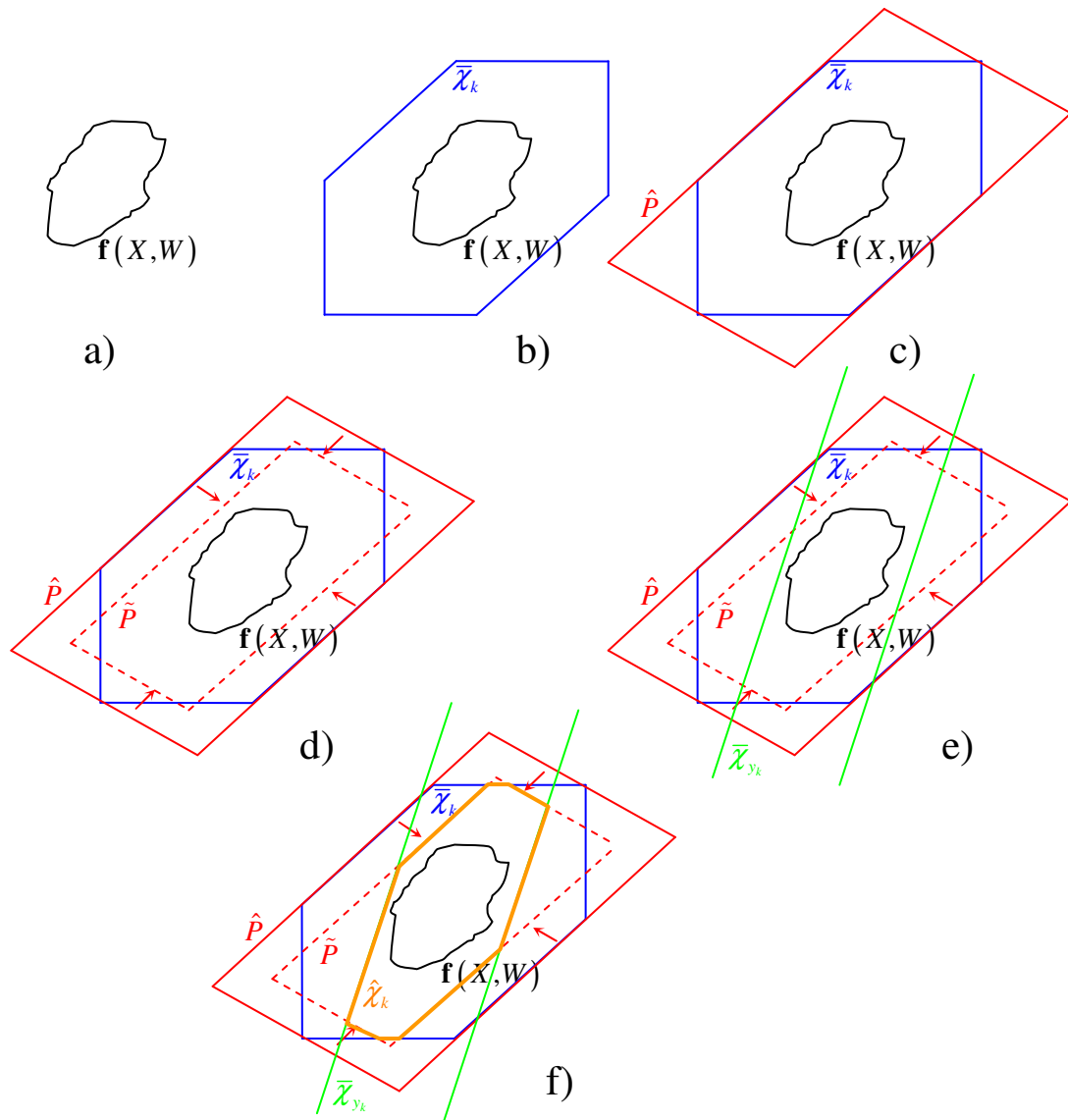


Figura 5.1 Proceso seguido en la mejora de la acotación garantista de $f(X, W)$ mediante un zonotopo.

Antes de introducir el resultado principal de este apartado, se enuncia la siguiente definición.

Definición 5.17 Dada la matriz $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y las funciones DC siguientes: $f_i(x, w) = g_i(x, w) - h_i(x, w)$, $i = 1, \dots, n$. Las funciones $g_i^E(x, w)$, $h_i^E(x, w)$, $i = 1, \dots, n$ se definen de la siguiente forma:

$$g_i^E(x, w) = \sum_{j=1}^n g_i^j(x, w) \quad \text{donde} \quad g_i^j(x, w) = \begin{cases} E_{i,j} g_j(x, w) & \text{si } E_{i,j} \geq 0 \\ -E_{i,j} h_j(x, w) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$h_i^E(x, w) = \sum_{j=1}^n h_i^j(x, w) \quad \text{donde} \quad h_i^j(x, w) = \begin{cases} E_{i,j} h_j(x, w) & \text{si } E_{i,j} \geq 0 \\ -E_{i,j} g_j(x, w) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Lema 5.3 Si E_i representa la i -ésima fila de la matriz E , entonces $E_i \mathbf{f}(x, w) = g_i^E(x, w) - h_i^E(x, w)$, $i = 1, \dots, n$. Además, las funciones $g_i^E(x, w)$ y $h_i^E(x, w)$ con $i = 1, \dots, n$ son convexas.

PRUEBA: Es fácil ver que $g_i^j(x, w) - h_i^j(x, w) = E_{i,j} (g_j(x, w) - h_j(x, w)) = E_{i,j} f_j(x, w)$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E_i \mathbf{f}(x, w) &= \sum_{j=1}^n E_{i,j} f_j(x, w) \\ &= \sum_{j=1}^n (g_i^j(x, w) - h_i^j(x, w)) \\ &= g_i^E(x, w) - h_i^E(x, w). \end{aligned}$$

Y, para terminar la demostración, nótese que por construcción $g_i^j(x, w)$ y $h_i^j(x, w)$ son convexas. De esa forma, $g_i^E(x, w)$ y $h_i^E(x, w)$ son convexas también. □

A continuación se declara un segundo operador acotación para mejorar los resultados obtenidos por el operador presentado en el Teorema 5.1. Entonces se supone que se ha obtenido un zonotopo Z tal que $f(X, W) \subseteq Z$.

El nuevo teorema utiliza el operador presentado en el Lema 5.1 para acotar el zonotopo Z por el paralelotopo \hat{P} .

Teorema 5.2 Suponer que $\mathbf{f}(X, W)$ está incluido en el zonotopo: $Z = p_z \oplus H_z \mathbf{B}^{m+r_w+n}$. Suponer también que el paralelotopo $\hat{P} = \{x : \|\hat{E}x - \hat{q}\|_\infty \leq 1\}$ es una aproximación exterior de Z ($Z \subseteq \hat{P}$) y el paralelotopo P acota el conjunto X ($X \subseteq P$). Bajo estos supuestos, obtener:

$$\bar{g}_i^{\hat{E}}(x, w) = g_i^{\hat{E}}(p_z, c_w) + \hat{u}_{g_i}^T \begin{bmatrix} x - p_z \\ w - c_w \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\bar{h}_i^{\hat{E}}(x, w) = h_i^{\hat{E}}(p_z, c_w) + \hat{u}_{h_i}^T \begin{bmatrix} x - p_z \\ w - c_w \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

donde \hat{u}_{g_i} , \hat{u}_{h_i} son subgradientes en $(x, w) = (p_z, c_w)$, de $g_i^{\hat{E}}(x, w)$ y $h_i^{\hat{E}}(x, w)$, respectivamente. Ahora calcular

$$\gamma_i^+ = \max_{x, w \in \text{vert}(P, W)} g_i^{\hat{E}}(p_z, c_w) - \bar{h}_i^{\hat{E}}(x, w)$$

$$\gamma_i^- = \min_{x, w \in \text{vert}(P, W)} (\bar{g}_i^{\hat{E}}(p_z, c_w) - h_i^{\hat{E}}(x, w))$$

donde $i = 1, \dots, n$.

Entonces, $f(X, W) \subseteq Z \cap \tilde{P}$, donde $\tilde{P} = \{x : \gamma_i^- \leq \hat{E}x \leq \gamma_i^+, i = 1, \dots, n\}$.

PRUEBA: \hat{E}_i es la i -ésima fila de la matriz \hat{E} , entonces $\hat{E}_i f(x, w) = g_i^{\hat{E}}(x, w) - h_i^{\hat{E}}(x, w)$, donde $g_i^{\hat{E}}(x, w)$ y $h_i^{\hat{E}}(x, w)$ son funciones convexas según el Lema 5.3. Teniendo en cuenta que $\bar{g}_i^{\hat{E}}(x, w)$ y $\bar{h}_i^{\hat{E}}(x, w)$ son minorantes lineales de $g_i^{\hat{E}}(x, w)$ y $h_i^{\hat{E}}(x, w)$, es claro que

$$\gamma_i^- \leq \bar{g}_i^{\hat{E}}(x, w) - h_i^{\hat{E}}(x, w) \leq \hat{E}_i f(x, w) \leq g_i^{\hat{E}}(x, w) - \bar{h}_i^{\hat{E}}(x, w) \leq \gamma_i^+, \quad \forall x, w \in X, W.$$

Entonces se deduce que $f(X, W) \subseteq \tilde{P}$.

□

Observación 5.2 Nótese que el paralelotopo \tilde{P} obtenido en el Teorema 5.2 puede emplearse para mejorar la acotación Z obtenida por el Teorema 5.1. El paralelotopo \tilde{P} se define por la intersección de n franjas o bandas. La operación $Z \cap \tilde{P}$ puede implementarse por medio de la intersección de n franjas. En [42] se presenta un operador eficiente para acotar la intersección de un zonotopo y una franja. Dada una franja y un zonotopo de orden r , el operador permite únicamente obtener un nuevo zonotopo, de orden r , conteniendo la intersección. El operador intersección referenciado se puede utilizar aquí para obtener acotaciones de la intersección de un zonotopo con una franja.

En el siguiente apartado se aborda el cálculo de una franja que acota el conjunto de estados consistentes con una medida dada.

5.3.4 Acotación del conjunto de estados consistente

En este apartado se proporciona una acotación del conjunto de estado consistente. Dada una medida $y_k \in \mathbb{R}^p$, el conjunto de estado consistente se definió anteriormente en la Definición

5.10 como $\mathcal{X}_{y_k} = \{x \in \mathbb{R}^n : y_k \in \mathbf{d}(x, V)\}$, donde $V = c_v \oplus M_v \mathbf{B}^{p_v}$. Ahora se definen los conjuntos $\mathcal{X}_{y_k}(i)$, $i=1, \dots, p$ como la región del espacio de estado consistente con la i -ésima componente de la salida y_k : $\mathcal{X}_{y_k}(i) = \{x \in \mathbb{R}^n : y_k(i) \in d_i(x, V)\}$, donde $d_i(x, V)$ representa la i -ésima componente de $\mathbf{d}(x, V) \in \mathbb{R}^p$. Con esta definición está claro que $\mathcal{X}_{y_k} \subseteq \bigcap_{i=1}^p \mathcal{X}_{y_k}(i)$.

En lo que sigue se mostrará el intervalo $\mathcal{X}_{y_k}(i)$ por medio de una franja en el espacio de estado. Si x_k pertenece al zonotopo $\bar{\mathcal{X}}_k$ entonces la i -ésima componente de la salida medida y_k puede utilizarse para obtener una acotación bien definida del estado como $x_k \in \bar{\mathcal{X}}_k \cap \mathcal{X}_{y_k}(i)$. La siguiente propiedad muestra que es posible acotar en el espacio de estado $\bar{\mathcal{X}}_k \cap \mathcal{X}_{y_k}(i)$ por medio de la intersección de $\bar{\mathcal{X}}_k$ y una franja.

Propiedad 5.1 *Dado el zonotopo $\bar{\mathcal{X}}_k$, la salida medida $y_k(i)$ y el vector $c_i \in \mathbb{R}^n$, obtener un paralelotopo P tal que $\bar{\mathcal{X}}_k \subseteq P$ y los escalares $s_i, \sigma_i \in \mathbb{R}$ tales que*

$$s_i = \frac{\rho_i^+ + \rho_i^-}{2}, \quad \sigma_i = \rho_i^+ - s_i$$

$$\rho_i^+ = \max_{x, v \in \text{vert}(P, V)} c_i^T x - (\bar{a}_i(x, v) - b_i(x, v))$$

$$\rho_i^- = \min_{x, v \in \text{vert}(P, V)} c_i^T x - (a_i(x, v) - \bar{b}_i(x, v))$$

Entonces, definiendo la franja $\bar{\mathcal{X}}_{y_k}(i) = \{x : |c_i^T x - y_k(i) - s_i| \leq \sigma_i\}$, resulta que $\bar{\mathcal{X}}_k \cap \mathcal{X}_{y_k}(i) \subseteq \bar{\mathcal{X}}_k \cap \bar{\mathcal{X}}_{y_k}(i)$.

Nótese que las funciones convexas $a_i(x, v)$ y $b_i(x, v)$ con $i=1, \dots, p$ son las i -ésimas componentes de $\mathbf{a}(x, v)$ y $\mathbf{b}(x, v)$, y las funciones $\bar{a}_i(x, v)$ y $\bar{b}_i(x, v)$ son sus minorantes lineales.

PRUEBA: Si $x \in \bar{\mathcal{X}}_k \cap \mathcal{X}_{y_k}(i)$ entonces existe $v \in V$ tal que $y_k(i) = d_i(x, v)$. Multiplicando la igualdad por -1 y sumando $c_i^T x$ se obtiene:

$$c_i^T x - y_k(i) = c_i^T x - d_i(x, v) \subseteq [\rho_i^-, \rho_i^+] = [s_i - \sigma_i, s_i + \sigma_i]$$

Y, como consecuencia, $|c_i^T x - y_k(i) - s_i| \leq \sigma_i$ para todo $x \in \bar{\mathcal{X}}_k \cap \mathcal{X}_{y_k}(i)$.

□

Adviértase que si $d_i(\cdot, \cdot)$ es diferenciable, una elección apropiada de c_i es $c_i = (\partial/\partial x)d_i(p_k, c_v)$. Si no, el vector c_i junto con una constante τ_i puede obtenerse de tal forma que $c_i^T x + \tau_i$ constituye una aproximación afín de la función $d_i(\cdot, \cdot)$ en (P, V) .

En el siguiente apartado, se presenta una versión detallada del algoritmo de estimación presentado.

5.3.5 Algoritmo de estimación de estados garantista

Supóngase que se dispone de una cota externa del conjunto de estado bajo incertidumbre exacto en el instante de tiempo $k-1$ (esta cota puede denotarse como $\hat{\mathcal{X}}_{k-1}$). Supóngase también que una salida medida y_k se ha obtenido en el instante de tiempo k . Bajo estos supuestos, el siguiente algoritmo (Tabla 5.2) estima una cota externa del conjunto de estado bajo incertidumbre exacto.

<i>Algoritmo Cálculo de una cota externa del conjunto de estado bajo incertidumbre exacto</i>
<p>Algoritmo</p> <p><i>Paso 1:</i> Usar el Teorema 5.1, calcular un zonotopo $\bar{\mathcal{X}}_k$ tal que $f(\hat{\mathcal{X}}_{k-1}, W) \subseteq \bar{\mathcal{X}}_k$.</p> <p><i>Paso 2:</i> Haciendo uso del Teorema 5.2, obtener un paralelotopo \tilde{P} tal que $f(\hat{\mathcal{X}}_{k-1}, W) \subseteq \tilde{P}$.</p> <p><i>Paso 3:</i> Utilizando la Propiedad 5.1, calcular una acotación externa del conjunto de estado consistente $\bar{\mathcal{X}}_{y_k}$. Esta acotación externa se denomina como $\bar{\mathcal{X}}_{y_k}$.</p> <p><i>Paso 4:</i> Calcular un zonotopo $\hat{\mathcal{X}}_k \supseteq \bar{\mathcal{X}}_k \cap (\tilde{P} \cap \bar{\mathcal{X}}_{y_k})$ (ver Observación 5.2).</p> <p>Fin del Algoritmo</p>

Tabla 5.2 Algoritmo de estimación de estado garantista.

El algoritmo comienza (primer y segundo paso) calculando los conjuntos $\bar{\mathcal{X}}_k$ y \tilde{P} . Estos conjuntos son acotaciones externas de la evolución del sistema y se calculan haciendo uso de la programación DC. Una cota externa del conjunto de estados que es consistente con la nueva y_k medida se obtiene en el paso 3 usando programación DC. Finalmente, en el paso 4 se utiliza un operador intersección del zonotopo y la franja para obtener la cota externa $\hat{\mathcal{X}}_k$.

5.4 Ejemplo

En este apartado se presenta un ejemplo de estimación de estado para un sistema no lineal. Dadas las funciones:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= -0.7x_2 + 0.1x_2^2 + 0.1x_1x_2 + 0.1e^{x_1} \\ f_2(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 + 0.1x_1^2 + 0.2x_1x_2 \end{aligned}$$

El sistema se describe por la expresión:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_1(x_1(k), x_2(k)) + w_1(k) \\ x_2(k+1) &= f_2(x_1(k), x_2(k)) + w_2(k) \end{aligned}$$

donde $|w_1(k)| \leq 0.1$ y $|w_2(k)| \leq 0.1$. Las salidas medidas son: $y_k = x_1(k) + x_2(k) + v(k)$. El error está acotado por: $|v(k)| \leq 0.2$, $k \geq 0$. El estado inicial pertenece a la caja $3\mathbf{I}^2$, siendo I la matriz identidad. La señal a estimar es $z_k = [1 \ 0]x_k$. Conociendo que para cada matriz Q de dimensión $n \times n$, existen dos matrices A y B de dimensión $n \times n$ semidefinidas positivas tales que $x^T Q x = x^T A x - x^T B x$ [95] y considerando que $0.1e^{x_1}$ es un término convexo, está clara la obtención de una representación DC para el sistema considerado.

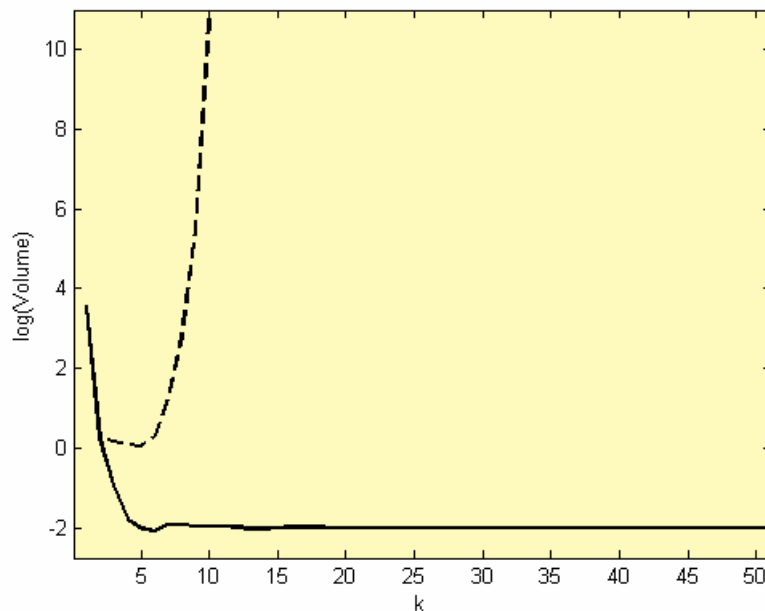


Figura 5.2 Evolución del volumen de la cota garantista del estado.

La Figura 5.2 muestra en línea continua la evolución del volumen de la cota garantista del estado, obtenida con el algoritmo del método propuesto. La línea discontinua muestra el volumen obtenido con el método presentado en [3]; en este caso, se usa la aritmética intervalar para acotar la evolución de los sistemas. Se comprueba que el método que se ha propuesto en esta tesis mejora la estimación resultante obtenida de [3]. La Figura 5.3 compara las acotaciones sobre x_1 obtenidas con las correspondientes a los conjuntos de estados bajo incertidumbre exactos. Adviértase que los conjuntos de estados bajo incertidumbre exactos se han obtenido a partir de los valores mínimos y máximos resultantes de la evolución bajo incertidumbre de una nube de puntos suficientemente densa.

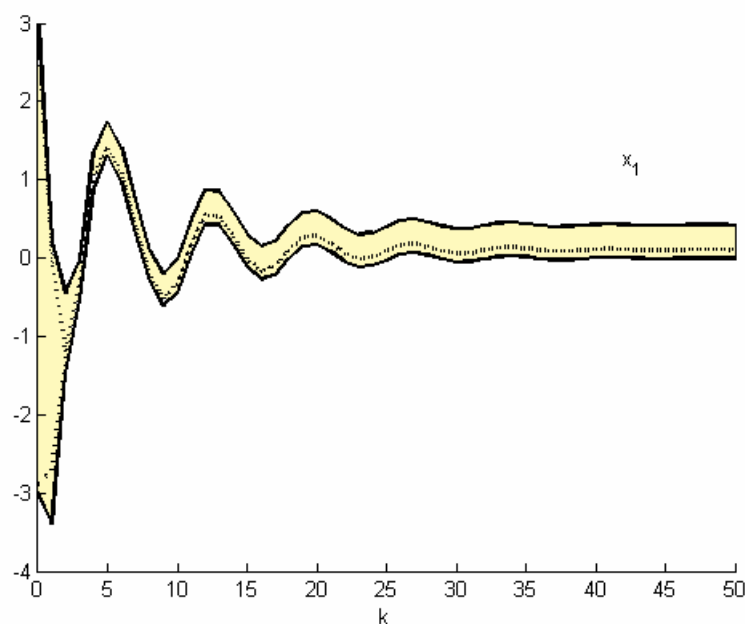


Figura 5.3 Líneas continuas representan las acotaciones garantistas del estado x_1 que se han obtenido por el algoritmo presentado. Líneas discontinuas representan las acotaciones de x_1 obtenidas a partir de los conjuntos bajo incertidumbre exactos.

La Figura 5.4 muestra una sucesión de conjuntos $\bar{\chi}_k$ y cómo el algoritmo propuesto reduce sus volúmenes por intersección, obteniendo los conjuntos $\hat{\chi}_k$. La Figura 5.5 muestra una sucesión de conjuntos $\hat{\chi}_k$ obtenidos por el algoritmo que se propone.

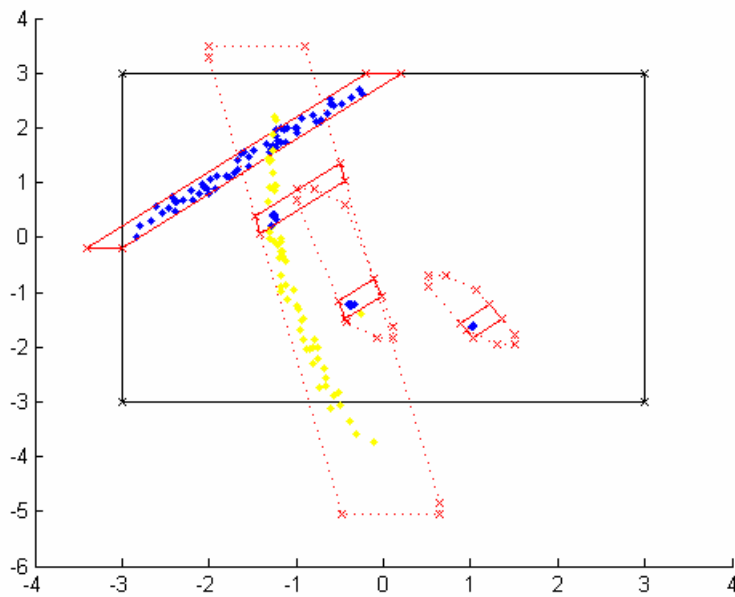


Figura 5.4 Líneas discontinuas muestran los conjuntos $\bar{\mathcal{X}}_1$, $\bar{\mathcal{X}}_2$ y $\bar{\mathcal{X}}_3$. Las líneas continuas representan los conjuntos $\hat{\mathcal{X}}_0$, $\hat{\mathcal{X}}_1$, $\hat{\mathcal{X}}_2$ y $\hat{\mathcal{X}}_3$. Las nubes de puntos de color azul muestran los conjuntos bajo incertidumbre exactos \mathcal{X}_0 , \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 y \mathcal{X}_3 . Los conjuntos $f(\mathcal{X}_0, W)$, $f(\mathcal{X}_1, W)$ y $f(\mathcal{X}_2, W)$ se representan como nubes de puntos de color amarillo.

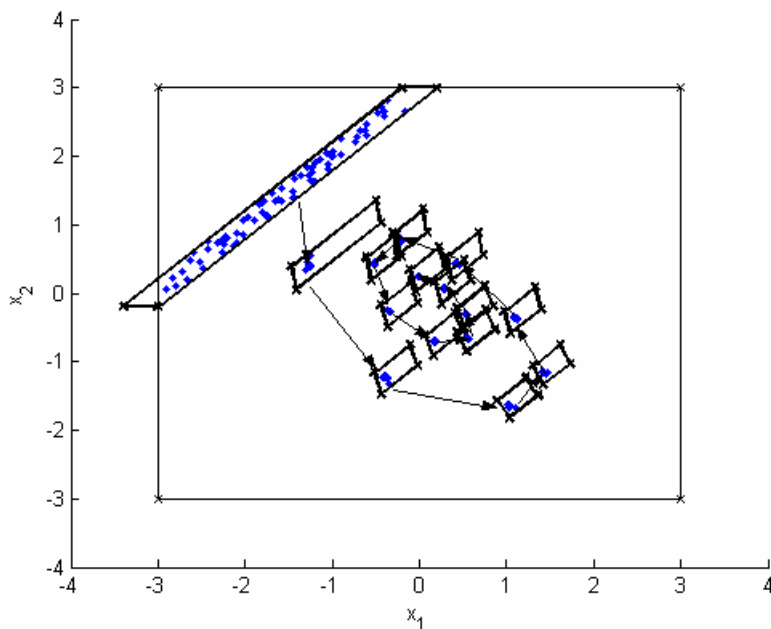


Figura 5.5 Líneas continuas muestran los conjuntos $\hat{\mathcal{X}}_0, \hat{\mathcal{X}}_1, \dots, \hat{\mathcal{X}}_{15}$. Las nubes de puntos (color azul) representan los conjuntos bajo incertidumbre exactos $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{15}$. Las flechas representan la evolución existente en el sistema.

5.5 Conclusiones

Se ha propuesto en la tesis un método para estimación de estado garantista propuesto para sistemas discretos no lineales con una descripción acotada del ruido y de los parámetros. El algoritmo acota el conjunto de todos los estados que son consistentes con la salida medida y el ruido y parámetros determinados. La evolución del sistema se captura por zonotopos, utilizándose programación DC para la obtención de esos zonotopos. Las medidas obtenidas se usan para hacer la intersección de los zonotopos calculados con las franjas de los estados consistentes. Por último, el ejemplo que se ha estudiado muestra gráficamente la aplicación del método propuesto.

Capítulo 6. Análisis del Dominio de Atracción de un Sistema en Bucle Cerrado utilizando Técnicas DC

El capítulo 6 de esta tesis se estructura de la siguiente forma. En el apartado 6.1 se introducen los conjuntos invariantes para sistemas no lineales con restricciones, con el fin de centrar el problema que resuelve el nuevo método oráculo presentado; y, dentro de este apartado, el subapartado 6.1.1 hace un recorrido bibliográfico sobre el cálculo de conjuntos invariantes para sistemas no lineales con restricciones. En el apartado 6.2 se presenta el oráculo basado en aproximaciones para conjuntos invariantes admisibles. En el apartado 6.3 se formula el problema y se describe la forma de resolución propuesta. Se continúa en el apartado 6.4 formalizando el algoritmo de resolución propuesto. El apartado 6.5 hace referencia a la aplicación de las funciones DC al problema y resolución propuestos. En el apartado 6.6 se proporcionan dos ejemplos ilustrativos el método de resolución propuesto. Y, finalmente, se presentan las conclusiones en el apartado 6.7.

6.1 Introducción. Conjuntos invariantes para sistemas no lineales con restricciones

El concepto de conjunto invariante deriva directamente de la teoría de Lyapunov. Se puede utilizar una función de Lyapunov para demostrar que un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable. La región del espacio de estados en la que la función de Lyapunov está acotada es una región de atracción del punto de equilibrio, y constituye un conjunto invariante positivo. Una vez el sistema se encuentre dentro de dicha región, no la abandona nunca.

Para el análisis de sistemas autónomos con restricciones y el diseño de controladores estabilizantes de sistemas con restricciones, la teoría de la invarianza de conjuntos es muy importante. Dicha teoría se ha desarrollado extensamente y se han presentado un gran número de resultados desde el artículo inicial [26]. En [31] se discuten resultados importantes obtenidos en esta teoría.

Por lo tanto, es un problema importante calcular los conjuntos invariantes correspondientes a ciertos sistemas dinámicos. La forma más general de calcular los conjuntos invariantes se basa en el llamado conjunto a un paso. El conjunto a un paso es el conjunto de los estados que pueden alcanzar en un sólo paso un conjunto destino mediante una acción de control admisible. Usando el conjunto a un paso de forma recursiva, pueden calcularse conjuntos invariantes de

control. De la misma forma, también es posible definir el máximo conjunto invariante o máximo conjunto estabilizable.

El cálculo del conjunto a un paso se puede considerar un problema geométrico, no existiendo un método general para obtenerlo. Existen diferentes algoritmos para sistemas lineales [80], sistemas politópicos [29], sistemas lineales a trozos [110], etc. Sin embargo, el cálculo de conjuntos invariantes es aún un campo abierto.

La teoría de los conjuntos invariantes es importante en el paradigma MPC. Estos conjuntos pueden utilizarse para definir regiones terminales o para diseñar leyes de control óptimas con estabilidad garantizada.

Un ingrediente principal para el diseño MPC estable es el conjunto terminal invariante (positivo o de control) que garantiza la factibilidad en todo instante, y como consecuencia el satisfacer restricciones. Una mayor región terminal provee al controlador de un mayor dominio de atracción, motivando el estudio de los conjuntos invariantes en este sentido. Se ha considerado aumentar la región terminal en sistemas lineales [68], [127], donde se considera una ley de control saturada. En [55] se aumenta el conjunto terminal utilizando una representación local LDI (*Linear Differential Inclusion* - Inclusión Diferencial Lineal) para el sistema no lineal y resolviendo fuera de línea un problema de optimización LMI. En [49], se utiliza también una representación local LDI, pero se calcula un conjunto terminal politópico. Este resultado se mejoró en [50]. En [125] se consigue el aumento reemplazando el conjunto terminal invariante por una secuencia contractiva de conjuntos.

El cálculo de conjuntos invariantes puede usarse en el diseño de leyes de control óptimas en el tiempo [137] o como restricciones estabilizantes [23], [30]. En [10] y [126], para relajar la computación, una formulación robusta MPC en bucle cerrado utiliza una secuencia de conjuntos controlables robustos contractivos como restricciones estabilizantes robustas.

6.2 Oráculo basado en aproximaciones para conjuntos invariantes admisibles

Dado un sistema no lineal y una ley de control, se propone en este capítulo un nuevo método para obtener planos de corte excluyendo puntos no pertenecientes al máximo conjunto invariante admisible. El método emplea linealizaciones a lo largo de la trayectoria del sistema en bucle cerrado con el fin de obtener un conjunto de planos de corte. La principal ventaja del método es que si se dispone de una aproximación interior al máximo conjunto invariante admisible, los planos de corte que se proporcionan no cortan nunca a esta aproximación inicial. Para mejorar los planos de corte obtenidos por linealización se emplea una versión escalada de

un conjunto invariante inicial. El método propuesto puede utilizarse en el contexto del control predictivo basado en modelos no lineales. Al final, el método se ilustra con dos ejemplos.

Uno de los problemas más relevantes en teoría de control es encontrar la caracterización de un *AIS* (*Admissible Invariant Set* - Conjunto Invariante Admisible) para sistemas en bucle cerrado [31]. Estos conjuntos invariantes admisibles juegan un papel clave en la teoría de Control Predictivo basado en Modelo, donde se utilizan para la estabilidad garantista [138]. Se han considerado diferentes métodos cuando se propone un sistema lineal. Por ejemplo, en [80] se obtiene una aproximación cerrada del conjunto admisible de salida máximo representada por un número finito de desigualdades funcionales, en [112] se presenta la caracterización y cálculo de conjuntos invariantes para sistemas lineales con entradas con perturbaciones acotadas. Se proporcionan otras aproximaciones del conjunto positivamente invariante robusto mínimo en [166]. En [84] se refiere al caso de sistemas lineales sujetos a control saturado. Los métodos para obtener una estimación de una aproximación interior del dominio de atracción se han ampliado para sistemas no lineales también. Una estimación del dominio de atracción de una clase de sistema Lur'e discreto en el tiempo se presenta en [5], en [41] se propone un algoritmo para obtener conjuntos invariantes de control para sistemas no lineales con restricciones. Se emplean funciones DC en [76] para proporcionar un método para calcular conjuntos invariantes de control robustos para sistemas discretos no lineales.

Es bien sabido que el cálculo exacto del conjunto invariante para un sistema no lineal es un problema de naturaleza NP-compleja (NP-hard; nondeterministic polynomial time (NP)) [41]. En orden a soslayar este asunto se presenta en esta tesis un método oráculo. Por medio de una iteración simple, el oráculo determina si una condición inicial dada pertenece al conjunto invariante admisible. Si la iteración revela que el estado dado no pertenece al conjunto invariante admisible máximo entonces se proporciona un algoritmo de plano de corte. Este plano de corte que suministra el algoritmo cumple que contiene el punto inicial y además una estimación inicial del conjunto invariante admisible. El plano de corte se obtiene siguiendo una simple recursión. En el contexto del MPC, se puede utilizar este plano de corte para obtener una mejora en la aproximación de la región terminal admisible. El método propuesto permite manejar la restricción terminal de una forma numéricamente eficiente.

6.3 Formulación del problema

Considérese un sistema no lineal definido por la siguiente ecuación

$$x^+ = f(x, u) \quad (6.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es la acción de control y x^+ es el estado siguiente. Supóngase que la ley de control $u = K(x)$ estabiliza localmente el origen $x=0$. En lo que sigue, $f_K(x)$ representa el sistema en bucle cerrado

$$x^+ = f_K(x) = f(x, K(x)) \quad (6.2)$$

A continuación se proporciona una definición de Conjunto Invariante Admisibles AIS [32].

Definición 6.1 (Conjunto invariante admisible (AIS)). *Dados los conjuntos X y U , Ω es un conjunto invariante admisible si*

- 1) Ω está incluido en X .
- 2) $K(x)$ está incluido en U para todo x perteneciente a Ω .
- 3) $f_K(x)$ está incluido en Ω para todo x perteneciente a Ω .

Puede obtenerse un AIS haciendo uso de diferentes métodos como los presentados en: [4], [189], [85], [97], [98], [51], [32]. Por ejemplo, el AIS elipsoidal

$$\Omega_0 = \{x : x^T P x \leq \rho\} \quad (6.3)$$

donde P es una matriz simétrica definida positiva, y P puede ser obtenido usando una inclusión en diferencias lineales (LDI) del sistema (6.2) alrededor del origen [36]. Sin embargo, el AIS obtenido puede ser de tamaño reducido por dos razones. Primero, el método LDI anteriormente mencionado puede producir resultados demasiado conservativos cuando se aplica a sistemas no lineales. Además, obligando a que la forma del conjunto invariante sea un elipsoide se tiene una fuente de conservadurismo.

Dado un AIS inicial Ω_0 , es posible obtener un AIS ampliado usando simplemente un esquema iterativo [32]. Basta con definir la secuencia de los conjuntos como $\Omega_k = \{x : x \in Y, f_K(x) \in \Omega_{k-1}\}$, $k=1,2,\dots,M$, donde el conjunto Y está definido como $Y = \{x : x \in X, K(x) \in U\}$.

Cada conjunto Ω_k es invariante, admisible y cumple $\Omega_{k-1} \subseteq \Omega_k$. Para cualquier condición inicial \hat{x} tal que su evolución converge al origen de una forma admisible, se puede encontrar un

entero \hat{k} tal que $\hat{x} \in \Omega_{\hat{k}}$. Por lo tanto, si M es lo suficientemente grande, Ω_M es normalmente más grande que Ω_0 y constituye una buena aproximación del máximo AIS. Para un entero dado M , Ω_M puede ser un conjunto no convexo y complejo [32]. Sin embargo, es bien simple comprobar si un punto \hat{x} dado pertenece a Ω_M o no; es suficiente integrar el sistema hacia adelante en el tiempo y comprobar que evoluciona a Ω_0 en una forma admisible en no más de M muestras. Se define:

$$\phi(\hat{x}, k) := \begin{cases} \hat{x} & \text{if } k = 0 \\ f_k(\phi(\hat{x}, k-1)) & \text{if } k \geq 1. \end{cases}$$

También, dado k cumpliendo $0 \leq k \leq M$, el conjunto Y_k se define como

$$Y_k = \begin{cases} Y & \text{if } 0 \leq k \leq M-1 \\ \Omega_0 & \text{if } k = M, \end{cases}$$

Con estas definiciones, Ω_M puede reescribirse como

$$\Omega_M = \{ x : \phi(x, k) \in Y_k, k = 0, \dots, M \} \quad (6.4)$$

Se advierte de que esta definición proporciona un esquema secuencial para comprobar si una condición inicial \hat{x} dada pertenece a Ω_M . Este punto se ilustra en la Figura 6.1 por medio de un estado inicial \hat{x} perteneciente al conjunto Ω_M .

El AIS Ω_M puede utilizarse para implementar un modelo de estrategia predictiva para el sistema (6.1) con restricciones $x \in X$ y $u \in U$. Puesto que Ω_M es un conjunto invariante admisible para el sistema (6.2), el siguiente problema de optimización de Control Predictivo basado en Modelos se puede proponer para una condición inicial \hat{x} dada:

$$\begin{aligned} \min_{u_0, \dots, u_{N-1}, x_0, x_1, \dots, x_N} & \sum_{k=1}^N L(x_k, u_k) + V(x_N) \\ \text{s.t.} & x_0 = \hat{x}, \\ & x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}), \quad k = 1, \dots, N \\ & x_k \in X, u_k \in U, \quad k = 0, \dots, N-1 \\ & x_N \in \Omega_M. \end{aligned}$$

donde $L(\cdot, \cdot)$ representa el coste de etapa y $V(\cdot)$ es un coste terminal. Este método está íntimamente relacionado con la noción de horizonte predictivo. El empleo de Ω_M como un conjunto terminal es equivalente a considerar Ω_0 como restricción terminal, N como horizonte

de control y M como horizonte de predicción [47]. Dada una secuencia $\{u_0, u_1, \dots, u_N\}$, es fácil comprobar si la restricción terminal se cumple usando (6.4). Si la restricción terminal no se satisface, entonces normalmente es difícil traducir este hecho en una corrección de la secuencia candidata $\{u_0, u_1, \dots, u_N\}$.

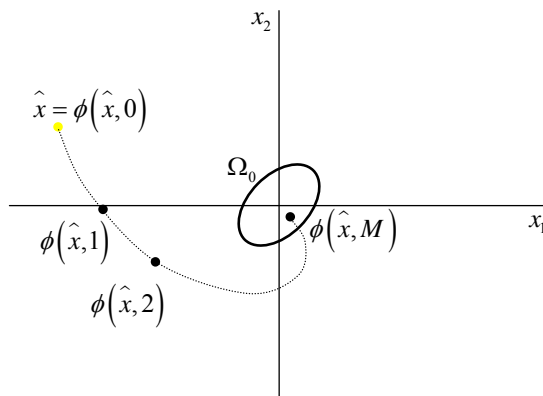


Figura 6.1 Ejemplo de evolución de un estado $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$. Como $\phi(\hat{x}, M) \in \Omega_0$ entonces $\hat{x} \in \Omega_M$.

La contribución principal del trabajo desarrollado y que se muestra en este tema es proporcionar un algoritmo que no compruebe sólo si una condición dada pertenece a Ω_M , sino que proporcione también un plano de corte que pueda utilizarse para obtener la aproximación de Ω_M . De esta forma, se puede resolver el problema MPC desprovisto de restricciones terminales y comprobar si la solución obtenida cumple la restricción terminal. Si la respuesta es negativa, se obtiene un plano de corte y se incluye como restricción terminal adicional. Este procedimiento se repite de tal forma que cada vez que el algoritmo detecta que la solución obtenida no la satisface, $x_N \notin \Omega_M$, se incluye en el problema de optimización una restricción lineal nueva de la forma $c^T x_N \leq d$. En el siguiente apartado se presenta un algoritmo que nos permite obtener planos de corte, que además no excluyen ningún punto del AIS inicial Ω_0 . Como se ilustra por medio de diferentes ejemplos en el apartado 6.6, este algoritmo constituye una ventaja clara con respecto al uso del esquema de diferenciación estándar.

6.4 Algoritmo

A continuación, en la Tabla 6.1, se introduce la estructura del oráculo que comprueba si un estado \hat{x} dado pertenece a Ω_M , y proporciona un plano de corte si la respuesta es negativa.

Algoritmo 1: Oráculo que comprueba si un estado \hat{x} dado pertenece a Ω_M

Algoritmo 1

- 1) Si $\hat{x} \in \Omega_M$, entonces devuelve ‘SÍ’
- 2) EN OTRO CASO, obtener $c_0 \in \mathbb{R}^n$, $d_0 \in \mathbb{R}$ de forma que $c_0^T \hat{x} = d_0$ y $c_0^T x \leq d_0$ para todo $x \in \Omega_0$
- 3) DEVUELVE c_0, d_0

Fin del Algoritmo 1

Tabla 6.1 Algoritmo 1: Oráculo que comprueba si un estado \hat{x} dado pertenece al conjunto Ω_M , devolviendo un plano de corte si no pertenece.

El algoritmo 1 devuelve el par c_0, d_0 tal que $c_0^T \hat{x} = d_0$ y $\Omega_0 \subseteq \{x : c_0^T x \leq d_0\}$. Se observa que, puede obtenerse una aproximación convexa de Ω_M iterando el Algoritmo 1 propuesto con diferentes puntos iniciales \hat{x} del espacio de estado. A continuación, en A, se muestra cómo obtener un plano de corte.

6.4.1 Obteniendo un plano de corte

El paso 2 del algoritmo 1 se aplica si el estado \hat{x} no pertenece a Ω_M . En este caso, por definición, existe $\hat{k} \leq M$ tal que $\phi(\hat{x}, \hat{k}) \notin Y_{\hat{k}}$. En lo que sigue se asume que los conjuntos Y_k , $k = 0, \dots, M$ son convexos. Bajo este supuesto se tiene que si $\phi(\hat{x}, \hat{k}) \notin Y_{\hat{k}}$ entonces existe $c_{\hat{k}} \in \mathbb{R}^n$ y $d_{\hat{k}}$ tales que $c_{\hat{k}}^T x < d_{\hat{k}}$, $\forall x \in Y_{\hat{k}}$ y $c_{\hat{k}}^T \phi(\hat{x}, \hat{k}) = d_{\hat{k}}$. Esto es, $c_{\hat{k}}^T x < d_{\hat{k}}$ es un plano separador del estado $\phi(\hat{x}, \hat{k})$ y el conjunto convexo $Y_{\hat{k}}$, el cual puede calcularse usando adecuadamente técnicas conocidas [37].

Se designa como $A(\tilde{x})$ a la derivada parcial de $f_k(\cdot)$ con respecto a x en el punto \tilde{x} . Esto es $A(\tilde{x}) = \left. \frac{\partial f_k}{\partial x}(x) \right|_{x=\tilde{x}}$.

Se está ahora en disposición de presentar un algoritmo general que calcula un plano de corte cuando $\hat{x} \notin \Omega_M$, en la Tabla 6.2.

<p>Algoritmo 2: Cálculo de un plano de corte cuando $\hat{x} \notin \Omega_M$</p>
<p>Algoritmo 2</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Obtener el menor entero j tal que $\phi(\hat{x}, j) \notin Y_j$. 2) Obtener c_j y d_j tales que $c_j^T x < d_j$ para todo $x \in Y_j$ y $c_j^T \phi(\hat{x}, j) = d_j$. 3) MIENTRAS QUE $j > 0$ $c_{j-1} = A(\phi(\hat{x}, j-1))^T c_j$ $d_{j-1} = c_{j-1}^T \phi(\hat{x}, j-1)$ $j = j - 1$ <ol style="list-style-type: none"> 4) END MIENTRAS. 5) DEVUELVE (c_0, d_0). <p>Fin del Algoritmo 2</p>

Tabla 6.2 Algoritmo que calcula un plano de corte (c_0, d_0) , cuando $\hat{x} \notin \Omega_M$.

Se observa que el par (c_0, d_0) obtenido con el Algoritmo 2 cumple, por construcción, $c_0^T \hat{x} = d_0$. La restricción $c_0^T \hat{x} \leq d_0$ puede utilizarse como plano de corte para descartar el estado \hat{x} si no pertenece a Ω_M . En un esquema MPC, esta restricción se puede añadir a las restricciones terminales. En la Figura 6.2 se ilustra una iteración del Algoritmo 2.

El siguiente teorema pone de manifiesto que bajo un supuesto de linealidad, la restricción obtenida $c_0^T \hat{x} \leq d_0$ la cumplen todos los elementos del conjunto Ω_M . Esto significa que en este caso el algoritmo es no conservativo ya que no excluye ningún punto de Ω_M . Esto es, el algoritmo proporciona un plano de corte que separa \hat{x} de Ω_M .

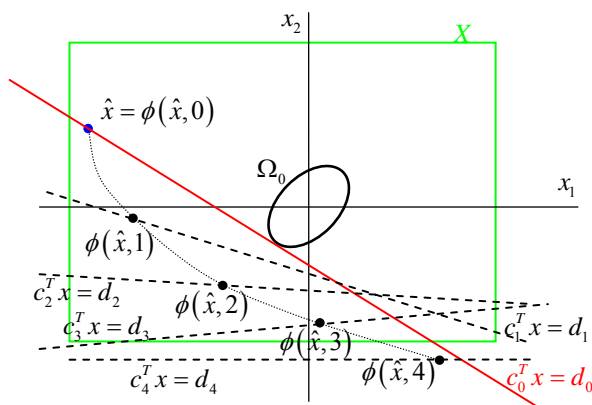


Figura 6.2 Ejemplo de iteración del Algoritmo 2 para obtener un plano de corte. En este caso $\phi(\hat{x}, 4) \notin X$, de esta manera $\phi(\hat{x}, 4) \notin Y_4$ y el Algoritmo 2 se puede emplear para descartar \hat{x} .

Teorema 6.1 Suponer que Y_k , $k=0, \dots, M$ son convexos y que $x^+ = f_k(x) = A_k x$. Entonces, dado $\hat{x} \notin \Omega_M$, el Algoritmo 2 proporciona un plano de corte $c_0^T x = d_0$ que cumple $\Omega_M \subset \{x : c_0^T x \leq d_0\}$.

PRUEBA: El supuesto $x^+ = f_k(x) = A_k x$ implica que $A(x) = A_k$, para todo x . Por lo tanto, $c_{l-1} = A(\phi(\hat{x}, l-1))^T c_l = A_k^T c_l$, para todo $l=1, \dots, j$. Esto ahora nos demuestra que $d_{l-1} = d_l$, para $l=1, \dots, j$.

$$d_{l-1} = c_{l-1}^T \phi(\hat{x}, l-1) = c_j^T A_k \phi(\hat{x}, j-1) = c_j^T \phi(\hat{x}, j) = d_j.$$

A partir de las igualdades $c_{l-1} = A_k^T c_j$ y $d_{j-1} = d_j$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \{x : c_0^T x \leq d_0\} &= \{x : c_1^T A_k x \leq d_1\} \\ &= \{x : c_2^T A_k^2 x \leq d_2\} \\ &\vdots \\ &= \{x : c_j^T A_k^j x \leq d_j\} \\ &= \{x : c_j^T \phi(x, j) \leq d_j\} \\ &\supseteq \{x : \phi(x, j) \in Y_j\} \\ &\supseteq \{x : \phi(x, k) \in Y_k, k=1, \dots, M\} = \Omega_M. \end{aligned}$$

□

6.4.2 Perfeccionando los planos de corte

Si el sistema en bucle cerrado es no lineal entonces los supuestos del Teorema 6.1 no se cumplen y los planos de corte obtenidos por medio del Algoritmo 2 pueden ser muy conservativos. En el peor de los casos, el conjunto $\{x : c_0^T x \leq d_0\}$ puede tener una intersección con Ω_M vacía. En este apartado se presenta una estrategia para dirimir esta cuestión. La idea clave es utilizar una versión escalada del elipsoide Ω_0 , denominado Ω_E , que sirve como una aproximación convexa de Ω_M . Si Ω_M es un conjunto no convexo, puede que no sea posible encontrar para un punto $\hat{x} \notin \Omega_M$ dado un plano de corte que separe \hat{x} de Ω_M . Dado $\hat{x} \notin \Omega_M$, el algoritmo que se presenta en este apartado, obtiene un plano de corte $c_0^T x = d_0$ que pasa a través de \hat{x} y que está diseñado para satisfacer, cuando es posible, la restricción $\Omega_E \subseteq \{x : c_0^T x \leq d_0\}$. Como se va a demostrar, el algoritmo siempre proporciona para cada $\hat{x} \notin \Omega_M$ un plano de corte que separe \hat{x} de Ω_0 , que se asume que es una aproximación interior de Ω_M . Los resultados obtenidos con esta modificación mejora sobre los correspondientes del Algoritmo 2 como se ilustra más adelante.

Con objeto de obtener el nuevo elipsoide Ω_E , se considera un conjunto de estados $S = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ seleccionados aleatoriamente en Y . Ahora denominamos como T al subconjunto de elementos de S que no pertenecen a Ω_M . Esto es, $T = \{x : x \in S, x \notin \Omega_M\}$. Está claro que $\Omega_E = \{x : x^T P x \leq \rho_E\}$ con

$$\rho_E = \min_x x^T P x$$

$$\text{s.t. } x \in T$$

constituye una aproximación del conjunto Ω_M . Se advierte que Ω_E no garantiza ser AIS. Sin embargo, si m se elige lo suficientemente grande, los puntos pertenecientes a Ω_E están contenidos en Ω_M con una alta probabilidad. En la Figura 6.3 se muestra un ejemplo de conjunto escalado Ω_E , representando mediante puntos azules los estados x tales que $x \notin \Omega_M$; y en color amarillo aquellos puntos x tales que $x \in \Omega_M$. Para llegar a Ω_E , se ha partido de un conjunto Ω_0 .

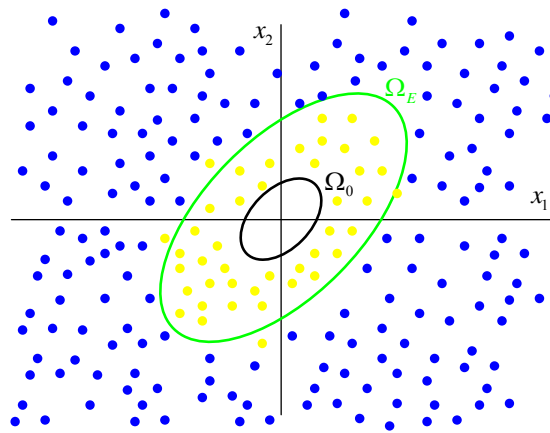


Figura 6.3 Ejemplo de conjunto escalado Ω_E . Los estados x tales que $x \notin \Omega_M$ están representados por puntos de color azul. Los estados x tales que $x \in \Omega_M$ se representan por puntos de color amarillo.

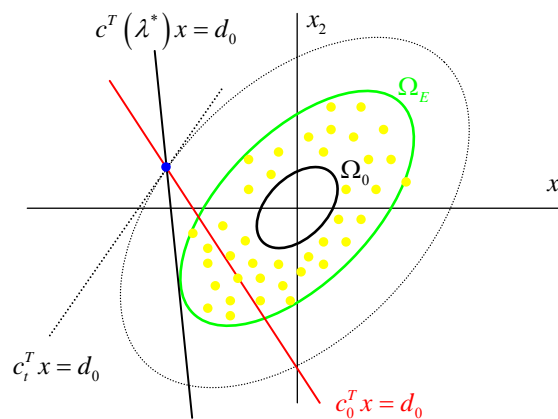


Figura 6.4 El plano de corte previo $c_0^T x = d_0$ corta a Ω_E . Se obtiene un nuevo plano de corte $c(\lambda^*)^T x = d_0$ tangente a Ω_E .

A continuación se presenta el Algoritmo Oráculo. El algoritmo comienza comprobando si el estado inicial \hat{x} pertenece al conjunto Ω_M empleando la definición (6.4). El algoritmo devuelve SÍ en caso positivo. Si $\hat{x} \notin \Omega_M$ entonces se aplica el Algoritmo 2 para obtener un plano de corte previo definido por el par (c_0, d_0) . Si $d_0 < 0$ entonces la restricción $c_0^T x \leq d_0$ no se cumple para una fracción grande de Ω_M ya que es violada por el origen $x = 0$. En este caso o si $\hat{x} \in \Omega_E$ el Algoritmo Oráculo devuelve un plano de corte nuevo que es tangente a la elipse definida por $\{x: x^T P x \leq \hat{x}^T P \hat{x}\}$. Por otro lado, si $d_0 > \sqrt{\rho c_0^T P^{-1} c_0}$, el plano definido por el par (c_0, d_0) no corta a Ω_E , de esta manera se considera un buen plano de corte y no se

modifica. Finalmente, si el plano inicial corta a Ω_E , se calcula un nuevo plano de corte que es tangente a Ω_E . Esta acción se ilustra en la Figura 6.4. A continuación, en la Tabla 6.3, se presenta el Algoritmo Oráculo.

Algoritmo Oráculo
<p>Algoritmo Oráculo</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) SI $\hat{x} \in \Omega_M$ entonces DEVOLVER ‘SÍ’ 2) EN OTRO CASO <ol style="list-style-type: none"> i Obtener (c_0, d_0) por el Algoritmo 2 ii SI $d_0 \leq 0$ o $\hat{x} \in \Omega_E$ $c_0 = P\hat{x}, \quad d_0 = c_0^T \hat{x}$ <p style="text-align: center;">DEVOLVER (c_0, d_0)</p> iii SI $d_0 > \sqrt{\rho_E c_0^T P^{-1} c_0}$ <p style="text-align: center;">DEVOLVER (c_0, d_0)</p> iv Definir $c(\lambda) = (1-\lambda)c_0 + \lambda c_i$ y $c_i = d_0 P\hat{x} / ((P\hat{x})^T \hat{x})$, determinar λ^* como el mínimo valor de $\lambda \in [0,1]$ tal que $\rho_E c(\lambda^*)^T P^{-1} c(\lambda^*) \leq d_0^2$ y DEVOLVER $c(\lambda^*), d_0$ <p>Fin del Algoritmo Oráculo</p>

Tabla 6.3 Algoritmo Oráculo.

El siguiente teorema demuestra las afirmaciones realizadas en el Algoritmo Oráculo de la Tabla 6.3.

Teorema 6.2 Dado $\hat{x} \notin \Omega_M$, y los elipsoides $\Omega_0 \subseteq \Omega_E$, donde $\Omega_0 \subseteq \Omega_M$ es un AIS, el par (c_0, d_0) devuelto por el Algoritmo Oráculo cumple:

$$1) \quad c_0^T \hat{x} = d_0.$$

$$2) \Omega_0 \subset \{x: c_0^T x \leq d_0\}.$$

$$3) \text{ Si } \hat{x} \notin \Omega_E \text{ entonces } \Omega_E \subset \{x: c_0^T x \leq d_0\}.$$

PRUEBA: A partir de la inclusión $\Omega_0 = \{x: x^T P x \leq \rho\} \subseteq \Omega_M$ se tiene que si $\hat{x} \in \Omega_0$ entonces $\hat{x} \in \Omega_M$; el Algoritmo Oráculo devuelve ‘SÍ’. De esa forma, se asume que en el paso 2 del Algoritmo Oráculo $\hat{x} \notin \Omega_0$ y como consecuencia $\hat{x}^T P \hat{x} > \rho$. A continuación se prueba que se cumplen las afirmaciones ii, iii y iv del paso 2 del Algoritmo Oráculo.

- ii En este caso tenemos por construcción que $c_0^T \hat{x} = d_0$. Por las igualdades $c_0 = P \hat{x}$ y $d_0 = c_0^T \hat{x}$ se tiene que $d_0 = \hat{x}^T P \hat{x} = c_0^T P^{-1} c_0 > 0$. Dado que $\hat{x} \notin \Omega_0 = \{x: x^T P x \leq \rho\}$ se tiene que $d_0 = \hat{x}^T P \hat{x} > \rho$. A partir de esto y del Lema 6.1 se obtiene

$$d_0 > \sqrt{\rho d_0} = \sqrt{\rho c_0^T P^{-1} c_0} = \max_x c_0^T x \quad \text{s.t. } x^T P x \leq \rho.$$

A partir de esto concluimos que $\Omega_0 \subset \{x: c_0^T x \leq d_0\}$. Bajo el supuesto $\hat{x} \notin \Omega_E = \{x: x^T P x \leq \rho_E\}$ se obtiene $d_0 = \hat{x}^T P \hat{x} > \rho_E$ y

$$d_0 > \sqrt{\rho_E d_0} = \sqrt{\rho_E c_0^T P^{-1} c_0} = \max_x c_0^T x \quad \text{s.t. } x^T P x \leq \rho_E.$$

Esto prueba que si $\hat{x} \notin \Omega_E$ entonces $\Omega_E \subset \{x: c_0^T x \leq d_0\}$.

- iii El Algoritmo 2 proporciona, por construcción, el par (c_0, d_0) tal que $c_0^T \hat{x} = d_0$. De ese modo la primera afirmación del teorema está demostrada. Ya que $d_0 > \sqrt{\rho_E c_0^T P^{-1} c_0}$ se infiere a partir del Lema 6.1 que

$$d_0 > \sqrt{\rho_E c_0^T P^{-1} c_0} = \max_x c_0^T x \quad \text{s.t. } x^T P x \leq \rho_E.$$

Se concluye que $\Omega_E \subset \{x: c_0^T x \leq d_0\}$.

- iv En este caso, y de nuevo por construcción, únicamente puede verificarse que $c_0^T \hat{x} = d_0$. Ya que

$$c(1) = c_i = \frac{d_0 P \hat{x}}{\sqrt{\hat{x}^T P^{-1} \hat{x}}},$$

Se tiene que $\rho_E c(1)^T P^{-1} c(1) = d_0^2$.

A partir de esto se deduce que siempre existe λ en el intervalo $[0,1]$ tal que $\rho_E c(\lambda)^T P^{-1} c(\lambda) \leq d_0^2$. Dado que $c_0 = c(\lambda^*)$ cumple $\rho_E c_0^T P^{-1} c_0 \leq d_0^2$ se tiene a partir del Lema 6.1

$$d_0 > \sqrt{\rho_E c_0^T P^{-1} c_0} = \max_x c_0^T x \quad \text{s.t.} \quad x^T P x \leq \rho_E.$$

Se concluye que $\Omega_E \subset \{x : c_0^T x \leq d_0\}$.

□

El Lema empleado en el Teorema 6.2, para la demostración de la afirmación iv del Algoritmo Oráculo de la Tabla 6.3, se muestra a continuación.

Lema 6.1 [36] *Suponer que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva y que ρ es un escalar positivo. Entonces, dado $c \in \mathbb{R}^n$ se tiene:*

$$\sqrt{\rho c^T P^{-1} c} = \max_x c^T x \quad \text{s.t.} \quad x^T P x \leq \rho$$

PRUEBA: Sea x^* definido por

$$x^* = \arg \max_x c^T x \quad \text{s.t.} \quad x^T P x \leq \rho \quad (6.5)$$

Para obtener una expresión de forma cerrada de x^* se aplica el cambio de variable $x = \sqrt{\rho} P^{-1/2} z$. Entonces, (6.5) se puede escribir como

$$z^* = \operatorname{argmax}_z c^T \sqrt{\rho} P^{-1/2} z \quad \text{s.t.} \quad z^T z \leq 1.$$

La solución de forma cerrada de este problema es

$$z^* = P^{-1/2}c / \sqrt{c^T P^{-1}c}.$$

Entonces, reemplazando la variable original $x^* = \sqrt{\rho} P^{-1}c / \sqrt{c^T P^{-1}c}$.

Se concluye que

$$c^T x^* = \sqrt{\rho c^T P^{-1}c}.$$

□

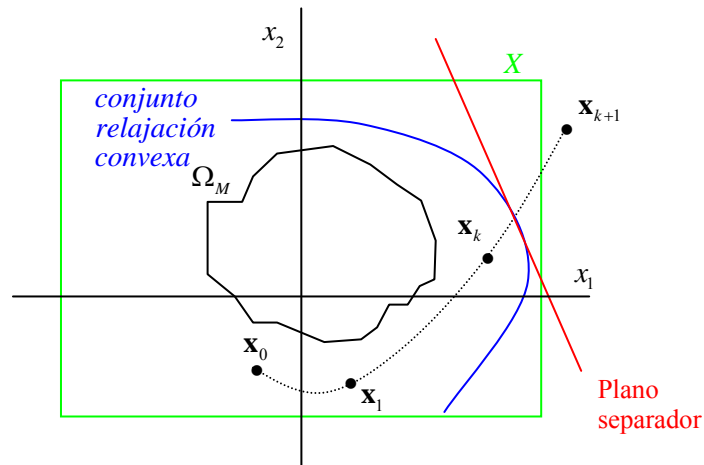


Figura 6.5 Obtención de un plano separador mediante la linealización de la función $\tilde{f}(\mathbf{x})$, relajación convexa de la función DC $f(\mathbf{x})$.

6.5 Aplicación de funciones DC al problema del dominio de atracción de un sistema dinámico no lineal

Cuando la función es DC, $f(\mathbf{x}) = \tilde{g}(\mathbf{x}) - \tilde{h}(\mathbf{x})$, para discriminar el punto que define el estado a partir del cual el sistema evoluciona hacia un punto fuera del conjunto de restricciones X , una buena aproximación se obtiene aprovechando la naturaleza DC de la función $f(\mathbf{x})$. En la Figura 6.5, el punto \mathbf{x}_0 evoluciona hacia un estado \mathbf{x}_{k+1} fuera del conjunto X que define las restricciones; el estado \mathbf{x}_{k+1} incumple al menos una de las restricciones que definen X . Por lo

tanto, si suponemos que $r_i(\mathbf{x}) \leq 0$ es una de las restricciones que se incumple, según el supuesto planteado en la Figura 6.5, $r_i(f(\mathbf{x}_k)) > 0$. Es decir, $r_i(\tilde{g}(\mathbf{x}_k) - \tilde{h}(\mathbf{x}_k)) > 0$. En lugar de linealizar la función $r_i(f(\mathbf{x}))$ (también DC) en los estados por los que evoluciona el sistema, se linealiza un estimador superior de $r_i(f(\mathbf{x}))$ en el punto de intersección de la frontera del conjunto relajación convexa (obtenido como consecuencia de dicho estimador superior; en color azul en la Figura 6.5) con la trayectoria de la evolución del sistema considerado (en línea punteada negra en la Figura 6.5); obteniéndose el plano separador que se representa en color rojo en la misma Figura 6.5. El proceso seguido es el mismo que el planteado anteriormente en el algoritmo propuesto; se aplica repetidamente hasta obtener la discriminación del punto \mathbf{x}_0 .

6.6 Ejemplos

Los resultados del trabajo presentado en esta tesis se ilustran por medio de dos ejemplos, que se muestran a continuación.

6.6.1 Ejemplo 1

La técnica presentada en esta tesis se aplica a los sistemas no lineales descritos por:

$$x^+ = Ax + D\sigma(Kx) + (1-\alpha) \begin{bmatrix} x^T I x \\ x^T B x \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz identidad, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 1.0 \\ 0.0 & 1.1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} -0.5234 \\ 1.1010 \end{bmatrix}^T \quad \sigma(Kx) = \begin{cases} Kx & \text{if } |kx| \leq 1 \\ 1 & \text{if } kx > 1 \\ -1 & \text{if } kx < -1 \end{cases}$$

Se aplica un conjunto de restricciones en el espacio de estado, que es $X = \{x : Rx \leq b\}$ donde:

$$R = \begin{bmatrix} -1.9 & -1.0 \\ 0.0 & 1.0 \\ 1.9 & 1.0 \\ 0 & -1.0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2} \quad b = \begin{bmatrix} 20.0 \\ 6.0 \\ 20.0 \\ 6.0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

En este ejemplo se fija $\alpha = 0.99$. Para este valor de α la saturación es la no linealidad dominante en torno al origen mientras que los términos cuadráticos son los únicos dominantes

para puntos muy alejados del origen $\|x\|_\infty > 10$. Se ha calculado un AIS inicial Ω_M con $\rho = 0.5$ y se ha obtenido:

$$P = \begin{bmatrix} 3.5306 & 1.5555 \\ 1.5555 & 3.0681 \end{bmatrix}$$

para el sistema.

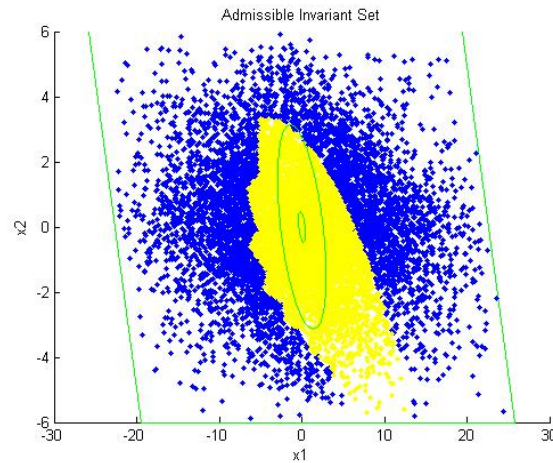


Figura 6.6 Ω_M para $M = 100$. Los puntos interiores de color amarillo corresponden a los puntos que pertenecen al Ω_{100} . Los correspondientes azules representan los que no pertenecen a Ω_{100} .

En este ejemplo se fija M igual a 100. En la Figura 6.6 se muestra una aproximación de Ω_M correspondiente a simulaciones numéricas intensivas (10000 puntos aleatorios iniciales). El conjunto Ω_E es igual a $\{x: x^T P x \leq \rho_E\}$, donde el valor $\rho_E = 0.5$ se había obtenido usando 200 puntos iniciales aleatorios. En la Figura 6.7 se presenta una aproximación de Ω_M correspondiente a los planos de corte obtenidos por medio del Algoritmo Oráculo. Para esta aproximación han sido empleadas 12 condiciones iniciales aleatorias. En la Figura 6.8 se muestra la aproximación obtenida por medio del Algoritmo 2. Mientras el Algoritmo 2 no pueda evitar los planos de corte a partir de la aproximación intersectada Ω_M , los resultados obtenidos son más conservativos (ver Figura 6.9). La Figura 6.10 muestra ambos, la aproximación de Ω_M proporcionada por el Algoritmo Oráculo y el conjunto Ω_M .

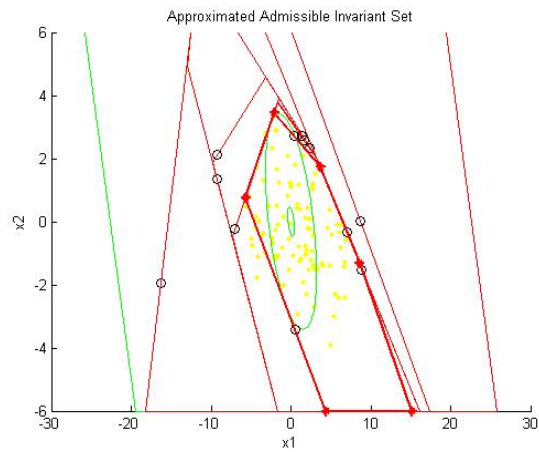


Figura 6.7 AIS aproximado obtenido por el Algoritmo Oráculo.

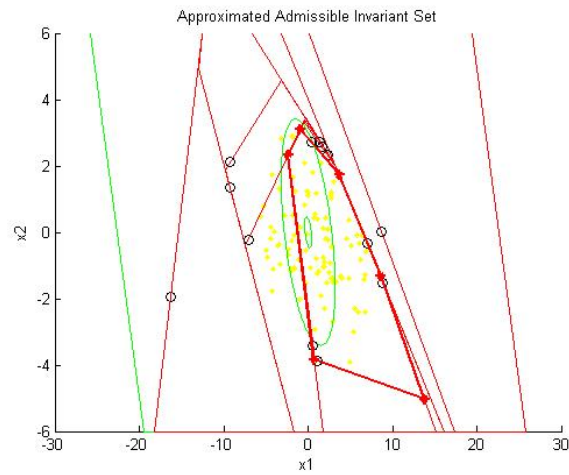


Figura 6.8 AIS aproximado obtenido por el Algoritmo 2.

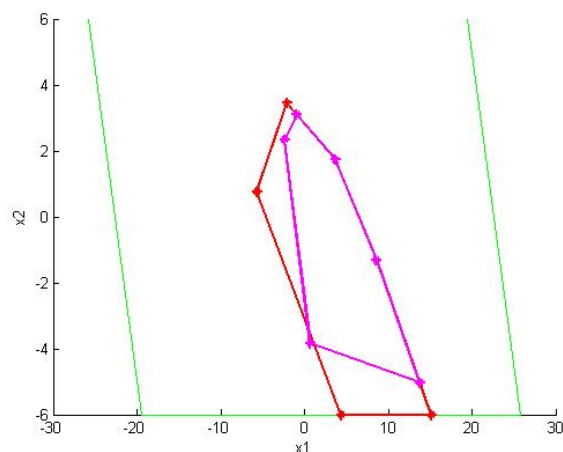


Figura 6.9 Comparación entre el Algoritmo 2 y el Algoritmo Oráculo. Se puede observar que el Algoritmo Oráculo proporciona una aproximación menos conservativa que el Algoritmo 2.

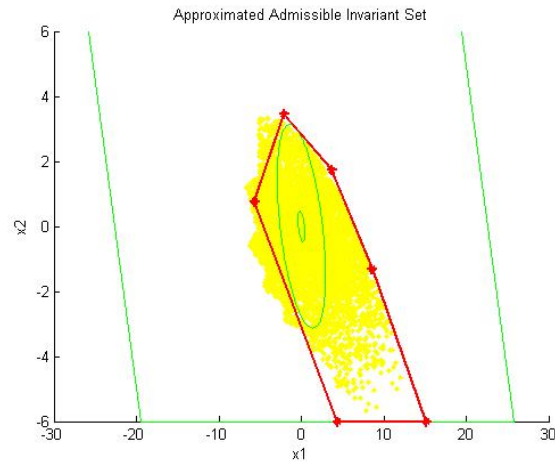


Figura 6.10 Comparación entre el AIS exacto y el aproximado obtenido por el Algoritmo Oráculo.

6.6.2 Ejemplo 2

El segundo ejemplo considera un sistema mezclador. Este proceso está esquematizado en la Figura 6.11. El objetivo del proceso operación es mezclar dos productos A y B. El proceso está descrito por las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{Sh} (F_A (\rho_A - \rho) + F_B (\rho_B - \rho))$$

$$\dot{h} = \frac{1}{S} (F_A + F_B - F).$$

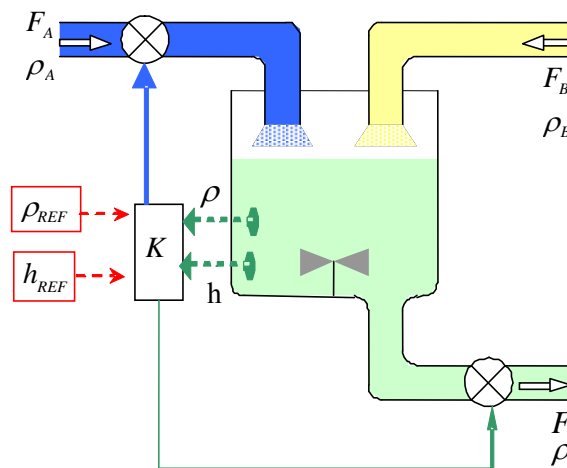


Figura 6.11 Tanque mezclador del ejemplo 2.

Las variables manipuladas son el flujo de entrada F_A y el de salida F . Las variables controladas son la concentración ρ y el nivel del producto en el tanque h . Las concentraciones $\rho_A = 1$ y $\rho_B = 0$ y el flujo $F_B = 0.5$ son considerados constantes. Se considera un punto de referencia $(\rho_{REF}, h_{REF}) = (0.2, 10)$. Con el fin de obtener un controlador se obtiene una linealización alrededor del punto de referencia. Esta linealización se utiliza para obtener un regulador cuadrático lineal y un AIS inicial Ω_0 . El estado y el vector control considerado y la ganancia del controlador obtenido son los siguientes:

$$x = \begin{bmatrix} \rho - \rho_{REF} \\ h - h_{REF} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} F_A \\ F \end{bmatrix} = Kx \quad K = \begin{bmatrix} 30.5838 & 0.0418 \\ 3.3964 & -0.3135 \end{bmatrix}.$$

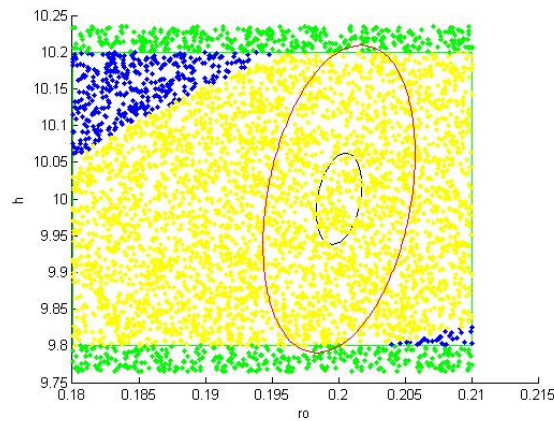


Figura 6.12 Se han utilizado 5000 puntos iniciales aleatorios para obtener una aproximación numérica de Ω_{100} . Los estados tales que $\hat{x} \in \Omega_{100}$ están representados por puntos de color amarillo. Los puntos de color azul muestran los estados tales que $\hat{x} \notin \Omega_{100}$. Los puntos de color verde muestran los estados tales que $\hat{x} \notin X$.

Las variables de maniobra F_A y F están restringidas a valores comprendidos entre 0 y 1. Además, se aplica un conjunto de restricciones al dominio del espacio de estado, es decir, $X = \{x : Rx \leq b\}$ donde:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0.21 \\ -0.18 \\ 10.2 \\ -9.8 \end{bmatrix}$$

Se ha calculado in AIS inicial Ω_M con $\rho = 0.01$ y $P = \begin{bmatrix} 3.8228 & -0.0306 \\ -0.0306 & 0.0028 \end{bmatrix} \cdot 10^3$.

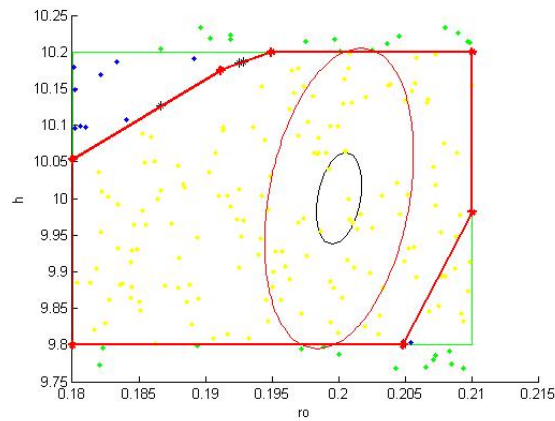


Figura 6.13 AIS aproximado obtenido por el Algoritmo Oráculo.

El cálculo numérico de Ω_E produce en este caso un valor de ρ_E igual a 0.11. Se emplea una aproximación simple de Euler con un paso de tiempo de 2 para obtener los planos de corte. La Figura 6.12 muestra el AIS exacto Ω_{100} obtenido con 5000 estados iniciales de prueba. Para obtener el elipsoide escalado Ω_E , se han considerado 200 estados iniciales. El algoritmo procesa 13 planos de corte para obtener la aproximación final. La Figura 6.13 muestra el AIS aproximado final obtenido por el Algoritmo Oráculo. Finalmente, la Figura 6.14 muestra una comparación entre el AIS exacto y el aproximado obtenido únicamente por el Algoritmo Oráculo.

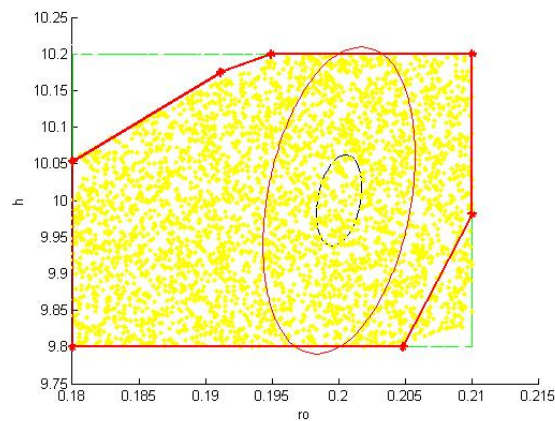


Figura 6.14 Comparación entre el AIS exacto y el aproximado obtenido por el Algoritmo Oráculo.

6.7 Conclusiones

Considerando un sistema no lineal y una ley de control, se ha propuesto un método oráculo para obtener planos de corte excluyendo puntos no pertenecientes al máximo conjunto invariante admisible. El método usa linealizaciones a lo largo de la trayectoria del sistema en bucle cerrado para obtener un conjunto de planos de corte. Estos planos de corte satisfacen que contienen al punto inicial y también una estimación inicial del conjunto invariante admisible. Se usa una versión escalada de un conjunto invariante inicial para mejorar los planos de corte obtenidos por linealización. El enfoque propuesto puede utilizarse en el contexto del control predictivo basado en modelo porque nos permite manejar de forma numéricamente eficiente la restricción terminal. El método propuesto se ha ilustrado con dos ejemplos.

Capítulo 7. Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación

7.1 Conclusiones y aportaciones originales

A lo largo de la tesis se han abordado nuevos métodos para la estimación de estados, la identificación de sistemas y los conjuntos invariantes, para sistemas no lineales con incertidumbres paramétricas en los modelos de predicción. Los resultados de la tesis son de aplicación, entre otros, al campo del MPC.

Como núcleo común de las técnicas desarrolladas está la necesidad de un método de acotación del rango de funciones y de sus gradientes. En la tesis se ha propuesto utilizar programación DC, dentro de lo que se conoce como Optimización DC, que es una de las ramas de la Optimización Global que trata de la resolución de problemas de Programación Matemática No Lineal con función objetivo y/o restricciones representables como funciones DC.

Dentro de la acotación garantista de conjuntos y en el campo del MPC, se ha representado el conjunto solución factible aproximado mediante zonotopos; habiéndose realizado un amplio estudio de estos poliedros convexos, representables mediante la suma Minkowski de segmentos, incluyendo la aritmética correspondiente.

Se ha realizado un estudio general de la aplicación de técnicas DC a la acotación garantista del rango de una función; y se compara sus resultados con los obtenidos mediante otras técnicas existentes como la extensión intervalar natural, la extensión del teorema del valor medio, la técnica que utiliza slopes o el método de Kühn (con zonotopos). Para cuando no se tiene una representación DC inmediata de una función, se han recopilado resultados que permiten obtener representaciones DC a partir de otras funciones más sencillas de las que se conocen sus representaciones DC.

En el campo de la identificación de sistemas, se ha presentado un nuevo método de identificación paramétrica, eficiente desde el punto de vista computacional, para sistemas no lineales con error acotado. El método considera representaciones DC en la forma funcional del sistema dinámico, con el fin de obtener una cota externa del conjunto de parámetros que es consistente con las medidas, el sistema y el error acotado considerados.

El conjunto de parámetros que es compatible con la estructura del modelo, con las medidas obtenidas y la incertidumbre considerada, el Conjunto Solución Factible (*FSS*), presenta normalmente una gran complejidad en su representación así como en su cálculo computacional,

sobre todo si el sistema es no lineal. Para simplificar y reducir estos problemas, se usan los Conjuntos Solución Factible Aproximados (*AFSS*), que acotan el correspondiente *FSS*. En esta tesis, el método presentado usa representaciones DC equivalentes de la forma funcional del sistema para obtener relajaciones convexas. Para la representación de los *AFSS* se emplean simplexes (figura poliédrica de $n+1$ vértices inmersas en un espacio de dimensión n), acotando el conjunto *FSS* correspondiente. El método propuesto es un algoritmo iterativo que resuelve varios problemas de optimización convexa, mejorándose el *AFSS* considerado (un simplex) en cada iteración. El algoritmo va descartando los subconjuntos del simplex inicial que no son consistentes con el error acotado considerado.

En lo que se refiere a la estimación de estados, en la tesis se propone un método que, empleando zonotopos y programación DC, en cada muestra de tiempo, obtiene una acotación garantista de la trayectoria indeterminada para el sistema no lineal. Se ha presentado un nuevo método que, para obtener los conjuntos de estados definidos mediante zonotopos, emplea programación DC; se va capturando la evolución del sistema. El algoritmo que describe el método tiene una estructura similar a un filtro de Kalman, hay un primer paso pronóstico y el resto son pasos de corrección.

Por último, se ha propuesto un Oráculo basado en aproximaciones para conjuntos invariantes admisibles. Dado un sistema no lineal y una ley de control, se ha propuesto un método nuevo para obtener planos de corte que excluyen los puntos no pertenecientes al máximo conjunto invariante admisible. El método emplea linealizaciones a lo largo de la trayectoria del sistema en bucle cerrado, para obtener un conjunto de planos de corte. Otra ventaja adicional que incluye el método propuesto está en que, si se dispone de una aproximación interior del máximo conjunto invariante admisible, los planos de corte proporcionados no cortan nunca a dicha aproximación inicial. En el método propuesto y, buscando la mejora de los planos de corte, se emplea una versión escalada del conjunto invariante inicial.

7.2 Futuras líneas de investigación

En esta tesis se han empleado una serie de recursos matemáticos como la aritmética intervalar, el método del zonotopo y las funciones DC, aplicados a la identificación de sistemas, la estimación de estados y los conjuntos invariantes, para sistemas no lineales, y dentro de los métodos basados en parámetros acotados y error acotado. En la Figura 7.1 se muestra

gráficamente las distintas herramientas matemáticas y las aplicaciones que se han llevado a cabo.

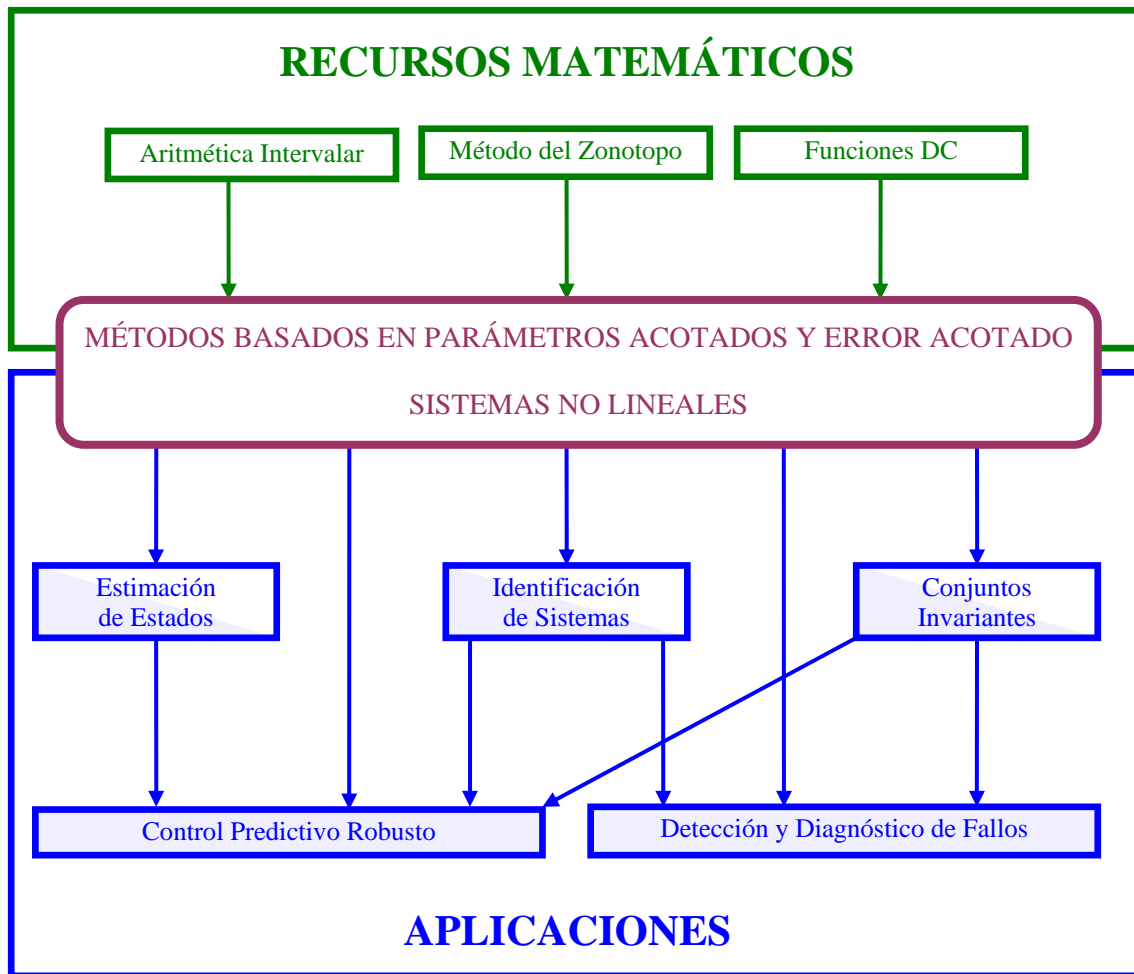


Figura 7.1 Representación gráfica de las herramientas matemáticas y las aplicaciones de esta tesis.

En la misma figura se incluyen aplicaciones como la del control predictivo robusto, a la que de forma natural se están encaminando las investigaciones como consecuencia de los resultados que se han obtenido en estimación de estados, identificación de sistemas y conjuntos invariantes; esperando obtener resultados en un futuro inmediato. Además, se está empezando a aplicar los resultados obtenidos en identificación de sistemas y en el cálculo de conjuntos invariantes al campo de la detección y el diagnóstico de fallos.

Se han desarrollado en esta tesis nuevas técnicas para identificación de modelos, estimación de estados. De la misma forma, se han enunciado nuevos métodos y algoritmos para el cálculo

de conjuntos invariantes que garantizan la estabilidad de forma garantista. Los campos abordados permiten numerosos puntos objeto de investigación en un futuro:

- Disminución de la complejidad de los algoritmos planteados utilizando funciones DC para identificación de sistemas y estimación de estados.
- Modificación y mejora del algoritmo de cálculo de los conjuntos invariantes admisibles aproximados.
- Implementación de un controlador predictivo robusto.
- Aplicación de los resultados obtenidos en la tesis a la detección y diagnóstico de fallos.

- [1] Adjiman, C. and Floudas, C. ‘Rigorous convex underestimators for general twice-differentiable problems’, *J. Global Optimization*, 9, 23-40, 1996.
- [2] Adjiman, C., Dallwig, S., Floudas, C. and Neumaier, A. ‘A global optimization method, α BB, for general twice-differentiable constrained NLPs-I. Theoretical advances’ *Computers and Chemical Engineering*, 22(9), 1137-1158, 1998.
- [3] Álamo, T., Bravo, J. M. and Camacho, E. F. ‘Guaranteed state estimation by zonotopes’, *Automatica*, 41, 1035-1043, 2005.
- [4] Alamo, T., Cepeda, A., Limon, D., Camacho, E. F. ‘A new concept of invariance for saturated systems’. *Automatica*, 42(9), 1515-1521. September 2006.
- [5] Alamo, T., Cepeda, A., Fiacchini, M., Camacho, E. F. ‘Convex invariant sets for discrete-time Lur'e systems’. *Automatica*, 45(4), 1066-1071, April 2009.
- [6] Alefeld, G. and Herzberger, J. Introduction to Interval Computations. Academic Press, New York, 1983.
- [7] Alexandrov, A. D. ‘On surfaces which may represented by a differenced of convex functions’ (in Russian), *Izvestiya Akademii Nauk Kazakhkoj SSR, Seria Fiziko-Matematicheskikh*, 3, 3-20, 1949.
- [8] Alexandrov, A. D. ‘On surfaces which may represented by differences of convex functions’ (in Russian), *Doklady Akademii Nauk SSR*, 72, 613-616, 1950.
- [9] Ángeles, M. Diseño de observadores no lineales para procesos de intercambio de calor. PhD thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Cuernavaca, 2003.
- [10] Angeli, D., Casavola, A. and Mosca, E. Ellipsoidal low-demanding MPC schemes for uncertain polytopic discrete-time systems, in ‘Proceedings of the CDC’, 2002.
- [11] Arruda, L. and Favier, G. ‘A review and a comparison of robust estimation methods, in ‘Prep. 9th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation’, Budapest, Hungary, 1027-1032, 1991.
- [12] Åström, K. J. Introduction to Stochastic Control Theory. Academic Press, 1970.
- [13] Åström, K. J. and P. Eykhoff. System Identification – A Survey. *Automatica*, 7, 123-162. Pergamon Press, Great Britain, 1971.
- [14] Åström, K.J. y Hägglund T. ‘Automatic Tuning of PID controllers’, Research Triangle Park, NC. EUA, Instrument Society of America (ISA), 1988.

- [15] Backx, T; Zhu, Y. 'Identification of multivariable industrial processes for simulation, diagnosis and control'. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [16] Badgwell, T. A. 'Robust model predictive control of stable linear systems', *Int. J. Control*, 68(4), 797–818, 1997.
- [17] Badgwell, T. A. 'Robust stability conditions for siso model predictive control algorithms', *Automatica*, 33(7), 1357–1361, 1997.
- [18] Bauch, H., Jahn, K. U., Oelschlägel, D., Süsse, H. and Wiebigke, V. *Intervallmathematik – Theorie und Anwendungen*. Teubner, Leipzig, 1987.
- [19] Becis-Aubry, Y., Boutayed, M. and Darouach, M., An ellipsoidal state estimation algorithm for nonlinear systems subject to bounded disturbances, in 'European Control Conference 2003', Cambridge, England, 2003.
- [20] Belforte, G., Bona, B. and Cerone, V. 'Parameter estimation algorithms for a set-membership description of uncertainty', *Automatica*, 26, 887-898, 1990.
- [21] Belforte, G. and Tay, T. Two new algorithms for sequential parameter estimation with unknown but bounded noise, in 'Proc. 29th IEEE Conference on Decision and Control', Vol. 6, Honolulu, USA, pp. 3546-3551, 1990.
- [22] Belforte, G., Teo, Y. and Tay Recursive parameter estimation for time-varying systems in presence of unknown but bounded measurement noise, in 'Proceedings of International Conference on Intelligent Control and Instrumentation, SICICI '92.', Vol. 2, Singapore, pp. 945-950, 1992.
- [23] Bemporad, A. 'A predictive controller with artificial lyapunov function for linear systems with input/state constraints', *Automatica*, 34, 1255–1260, 1998.
- [24] Bemporad, A., Morari, M., Dua, V. and Pistikopoulos, E. N. 'The explicit linear quadratic regulator for constrained systems', *Automatica*, 38(1), 3–20, 2002.
- [25] Bertsekas, D. P. and Rhodes, I. B. 'Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty', *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16, 117-128, 1971.
- [26] Bertsekas, D. P. and Rhodes, I. B. (1971a), 'On the minimax reachability of target sets and target tubes', *Automatica*, 7, 233–247, 1971.
- [27] Birk, J. and Zeitz, M. 'Extended Luenberger observer for non-linear multivariable systems'. *International Journal of Control*, 47(6), 1823-1836, 1988.
- [28] Bittner, L. 'Some Representation Theorems for Functions and Sets and their Application to Nonlinear Programming', *Numerische Mathematik*, 16, 32-51, 1970.
- [29] Blanchini, F. 'Ultimate boundedness control for discrete-time uncertain system via set-induced lyapunov functions', *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, 428–433, 1994.

- [30] Blanchini, F. ‘Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced lyapunov functions’, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(2), 428–433, 1994.
- [31] Blanchini, F. ‘Set invariance in control’, *Automatica*, 35, 1747–1767, 1999.
- [32] Blanchini, F. and Miani, S. *Set-Theoretic Methods in Control*. Boston: Birkhäuser, 2008.
- [33] Blanquero, R. *Localización de servicios en el plano mediante técnicas de optimización*. D.C. PhD thesis, Universidad de Sevilla, 1999.
- [34] Bordons, C. and Cueli, J. ‘Predictive controller with estimation of measurable disturbances. application to an olive oil mill’, *Journal of Process Control*, 14(3), 305–315, 2004.
- [35] Botero, H. A., Álvarez, H. D. ‘Una revisión delos métodos más frecuentes para la estimación del estado en procesos químicos’. *Dyna*, 158, 135-146, 2009.
- [36] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. *Linear Matrix Inequalities in systems and control theory*, Philadelphia: SIAM, 1994.
- [37] Boyd, S. and Vandenberghe, L. *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [38] Braune, K. D. *Hochgenaue Standardfunktionen für reele und komplexe Punkte und Intervalle in beliebigen Gleitpunkttrastern*. PhD thesis, Universität Karlsruhe, 1987.
- [39] Bravo, J. M. *Control predictivo no lineal robusto basado en técnicas intervalares*, PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2004.
- [40] Bravo, J. M., Alamo, T. and Camacho, E. F. Robust nonlinear based on guaranteed prediction, in ‘CONTROLO: Sixth Portuguese Conference on Automatic Control’, Faro, Portugal, 2004.
- [41] Bravo, J. M., Limon, D., Alamo, T., Camacho, E. F. ‘On the computation of invariant sets for constrained nonlinear systems: An interval arithmetic approach’. *Automatica*, 41(9), 1583-1589. September 2005.
- [42] Bravo, J. M., Alamo, T. and Camacho, E. F. ‘Bounded error identification of systems with time-varying parameters’, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006.
- [43] Broman, V. and Shensa, M. A compact algorithm for the intersection and approximation of n-dimensional polytopes, in ‘Proc. 12th IMACS world Congr. on Scientific Computation’, Vol. 2, Paris, France, pp. 473-476, 1988.
- [44] Broman, V. and Shensa, M. J., ‘A compact algorithm for the intersection and approximation of n-dimensional polytopes’, *Math. Comput. Simulation*, 32, 469–480, 1990.

- [45] Calafiore, G., ‘Reliable localization using set-valued nonlinear filters’, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 35(2), 189-197, 2005.
- [46] Camacho, E., Berenguel, M. and Bordons, C. ‘Adaptive generalized predictive control of a distributed collector field’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2(4), 462–467, 1994.
- [47] Camacho, E. F. and Bordons, C. *Model Predictive Control, 2 edn*, Ed. London: Springer Verlag, 2004.
- [48] Campo, P. J. and Morari, M. Robust model predictive control, in ‘Proceedings of the American Control Conference’, Green Valley AZ, USA, pp. 1021–1026, 1987.
- [49] Cannon, M., Deshmukh, V. and Kouvaritakis, B. ‘Nonlinear model predictive control with polytopic invariant sets’, *Automatica*, 39, 1487–1494, 2003.
- [50] Cannon, M., Kouvaritakis, B. and Deshmukh, V. Enlargement of polytopic terminal region in NMPC by interpolation and partial invariance, in ‘Proceedings of the ACC’, 2003.
- [51] Cao, Y. Y. and Lin, Z. ‘Stability analysis of discrete-time systems with actuator saturation by a saturation-dependent Lyapunov function’. *Automatica*, 39(7), 1235–1241. July 2003.
- [52] Carrizosa, E. ‘An optimal bound for d.c. programs with convex constraints’. *Mathematical Methods of Operations Research*, 54(1), 47-51, 2001.
- [53] Casavola, A., Giannelli, M. and Mosca, E. ‘Min-max predictive control strategies for input-saturated polytopic uncertain systems’, *Automatica*, 36, 125–133, January 2000.
- [54] Chernousko, F. L., *State Estimation for Dynamic Systems*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1994.
- [55] Chen, W. H., Ballance, D. J. and O’Reilly, J. Optimisation of attraction domains of nonlinear MPC via LMI methods, in ‘Proceedings of the ACC’, 2001.
- [56] Chisci, L., Garulli, A. and Zappa, G. ‘Recursive state bounding by parallelotopes’, *Automatica*, 32, 1049-1056, 1996.
- [57] Chisci, L., Garulli, A., Vicino, A., and Zappa, G., ‘Block recursive parallelotopic bounding in set membership identification’. *Automatica*, 34, 15-22, 1998.
- [58] Chisci, L., Rossiter, J. A. and Zappa, G. ‘Systems with persistent disturbances: predictive control with restricted constraints’, *Automatica*, 37, 1019–1028, 2001.
- [59] Clarke, D. W. and Gawthrop, P. J. Self-tuning control, in ‘Proceedings IEEE’, Vol. 123, pp. 633–640, 1979.

- [60] Clarke, D. W., Mohtadi, C. and Tuffs, P. ‘Generalized predictive control – part i. the basic algorithm’, *Automatica*, 23(2), 137–148, 1987.
- [61] Cody, W. J. and Waite, W. Software Manual for the Elementary Functions. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [62] Combastel, C., A state bounding observer based on zonotopes, in ‘European Control Conference 2003’, Cambridge, England, 2003.
- [63] Corliss, G. F. ‘Guaranteed error bounds for ordinary differential equations’. In W. A. Light and Marletta, editors, *Theory of Numerics in Ordinary and Partial Differential Equations, Advances in Numerical Analysis*, vol. IV, pp. 1-75, Oxford University Press, London, 1995.
- [64] Cornelius, H. and Lohner, R. ‘Computing the range of values of real functions with accuracy higher than second order’. *Computing*, 33(3), 331-347, 1984.
- [65] Cutler, C. R. and Ramaker, B. C. Dynamic matrix control-a computer control algorithm, in ‘Proc. Automatic Control Conference’, San Francisco, 1980.
- [66] Dasgupta, S. and Huang, Y. ‘Asymptotically convergent modified recursive least-squares with data-dependent updating and forgetting factor for systems with bounded noise’, *IEEE Transactions on Information Theory*, 33(3), 383-392, 1987.
- [67] De Assis, A. J., Maciel, R. ‘Soft Sensors Development for On – Line Bioreactor State Estimation’. *Computers & Chemical Engineering*, 24, 1099-1103, 2000.
- [68] De Doná, J. A., Seron, M. M., Mayne, D. Q. and Goodwin, G. C. ‘Enlarged terminal sets guaranteeing stability of receding horizon control’, *Systems & Control Letters*, 47, 57–63, 2002.
- [69] De Nicolao, G., Magni, L. and Scattolini, R. Stability and robustness of nonlinear receding horizon control, in ‘International Symposium on Nonlinear Model Predictive Control’, Ascona, Switzerland, 1998.
- [70] Du, K. Cluster Problem in Global Optimization using Interval Arithmetic. PhD thesis, University of Southwestern Louisiana, 1994.
- [71] Durieu, C., Walter, E., and Polyak, B. ‘Multi-input multi-output ellipsoidal state bounding’. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 111(2), 273-303, 2001.
- [72] El Ghaoui, L. and Calafiore, G., ‘Robust filtering for discrete-time system with bounded noise and parametric uncertainty’, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(7), 1084–1089, 2001.
- [73] Ellaia, R. ‘Contribution à l’analyse et l’optimisation de différences de fonctions convexes, Thèse de troisième cycle, Université de Toulouse, 1984.
- [74] Esposito, W., and Floudas, C. ‘Parameter estimation in nonlinear algebraic models via global optimization’. *Computers and Chemical Engineering*, 22(1), S419–S426, 1998.

- [75] Fiacchini, M. Convex Difference Inclusions for Systems Analysis and Design, PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2009.
- [76] Fiacchini, M., Alamo, T., Camacho, E. F. ‘On the computation of convex robust control invariant sets for nonlinear systems’. *Automatica*, 46(8), 1334-1338. August 2010.
- [77] Floudas, C. Deterministic global optimization: Theory, algorithms and applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [78] Fogel, E. and Huang, Y. ‘On the value of information in system identification - bounded noise case’, *Automatica*, 18, 229-238, 1982.
- [79] Garulli, A., Tesi, A., and Vicino, A. Robustness in identification and control. Berlin, Heidelberg, Germany: Springer, 1999.
- [80] Gilbert, E. G. and Tan, K. ‘Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets’, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, 1008–1020, 1991.
- [81] Girard, A., LeGuernic, C. and Maler, O. *HSCC 2006, LNCS 3927*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, chapter Efficient Computation of Reachable Sets of Linear Time-Invariant Systems with Inputs, pp. 257-271, 2006.
- [82] Goffin, J. and Vial, J. ‘Cutting planes and column generation techniques with the projective algorithm’, *Journal of Optimization. Theory and Applications*, 65, 409-429, 1990.
- [83] Goldberg, H. ‘What is Virtual Instrumentation?’. *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, 6, 2000.
- [84] Gomes da Silva, J. M. Jr. and Tarbouriech, S. ‘Polyhedral Regions of Local Stability for Linear Discrete-Time Systems with Saturating Controls’. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(11), 2081–2085, November 1999.
- [85] Gomes Da Silva, J. M. Jr. and Tarbouriech, S. ‘Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls: An LMI-based approach’. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(1), 119–125. January 2001.
- [86] Grewal, M., Andrews, A.. Kalman Filtering: Theory and Practice Using Matlab. 2 Ed. John Wiley & Sons Inc. New York, 2001.
- [87] Gurvits, L. ‘Stability of discrete linear inclusion’, *Linear Algebra and its Applications*, 231(1), 47-85, December 1995.
- [88] Hanebeck, U. Recursive nonlinear set-theoretic estimation based on pseudo ellipsoids, in ‘Proc. International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems’, Paris, France, pp. 159-164, 2001.
- [89] Hansen, E. *Global optimization using interval analysis*, Marcel Dekker, Inc., 1992.

- [90] Hartman, P. ‘On Functions Representable as a Difference of Convex Functions’, *Pacific Journal of Mathematics*, 9, 707-713, 1959.
- [91] Hermann, R. and Krener, A. J., ‘Nonlinear Controllability and Observability’. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22(5), 728-740, 1977.
- [92] Hiriart-Urruty, J. B. ‘Generalized Differentiability, Duality and Optimization for Problems Dealing with Differences of Convex Functions’. En J. Ponstein, editor, *Convexity and Duality in Optimization*. Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [93] Hiriart-Urruty, J. B. ‘From convex optimization to nonconvex optimization, Part I: Necessary and sufficient conditions for global optimality’, in *Nonsmooth optimization and related topics*, eds. F. H. Clarke, V. F. Demyanov, F. Giannessi, Plenum, New York, 1989.
- [94] Horst, R. and Tuy, H. *Global Optimization. Deterministic Approaches*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [95] Horst, R. and Thoai, N. ‘Dc programming: Overview’, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 103(1), 1-43, 1999.
- [96] Hu, C. and Kearfott, R. B. ‘On bounding the range of some elementary functions in FORTRAN 77. *Interval Computations*, 3, 29-39, 1993.
- [97] Hu, T. and Lin, Z. ‘Control systems with actuator saturation analysis and design’. Basel: Birkhäuser. 2001.
- [98] Hu, T., Lin, Z. and Chen, B. M. ‘Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation’. *Systems and Control Letters*, 45(2), 97–112. February 2002.
- [99] Iserman, R.. ‘Practical aspects of process identification’, *Automatica*, 16, 575-587, 1980.
- [100] Jaulin, L. and Walter, E. Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation. *Automatica*, 29(4), 1053-1064, 1993.
- [101] Jaulin, L. and Walter, E. ‘Guaranteed parameter bounding for nonlinear models with uncertain experimental factors’, *Automatica*, 35, 849-856, 1999.
- [102] Jaulin, L. ‘Interval constraint propagation with application to bounded-error estimation’, *Automatica*, 36, 1547-1552, 2000.
- [103] Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O. and Walter, E. ‘Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics’, Springer-Verlag, 2001.
- [104] Jaulin, L. ‘Nonlinear bounded-error state estimation of continuous-time system’, *Automatica*, 36(7), 1079-1082, 2002.

- [105] Kalman, R. E. ‘A New Approach to Linear Filtering Predictions Problems’, *Transactions of ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 82D, 35-45, 1960.
- [106] Kazantzis, N. and Kravaris, C. ‘Nonlinear Observer Design for Process Monitoring’. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 39, 408-419, 2000.
- [107] Kearfott, R. B., Dawande, M., Du, K. S., and Hu, C. ‘INTLIB: A portable FORTRAN 77 elementary function library’. *Interval Computations*, 3(5), 96-105, 1992.
- [108] Kearfott, R. B., Dawande, M., Du, K. S., and Hu, C. ‘Algorithm 737: INTLIB, a portable FORTRAN 77 interval standard function library’. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 20(4), 447-459, December 1994.
- [109] Kearfott, R. B. *Rigorous Global Search: Continuous Problems*, Kluwer, Dordrecht, Netherlands, 1996.
- [110] Kerrigan, E. C. *Robust Constraint Satisfaction: Invariant Sets and Predictive Control*, PhD thesis, University of Cambridge, 2000.
- [111] Kieffer, M., Jaulin, L. and Walter, E., ‘Guaranteed recursive nonlinear state estimation using interval analysis’, *International journal of adaptive control and signal processing*, 16, 193–218, 2002.
- [112] Kolmanovskiy, I. and Gilbert, E. G. ‘Theory and Computation of Disturbance Invariant Sets for Discrete-Time Linear Systems’. *Mathematical Problems in Engineering*, 4(4), 317-367, 1998.
- [113] Kothare, M. V., Balakrishnan, V. and Morari, M. ‘Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities’, *Automatica*, 32, 1361–1379, 1996.
- [114] Krämer, W. *Inverse Standardfunktionen für reelle und komplexe Intervallargumente mit a priori Fehlerabschätzungen*. PhD thesis, Universität Karlsruhe, 1987.
- [115] Krawczyk, R. and Nickel, K. ‘The centered form in interval arithmetics: Quadratic convergence and inclusion isotonicity. *Computing*, 28(2), 117-137, 1982.
- [116] Kühn, W. ‘Rigorous computed orbits of dynamical systems without the wrapping effect’, *Computing*, 61(1), 47-67, 1998.
- [117] Kühn, W. *SCAN 98, Developments in Reliable Computing*, Kluwer, chapter Towards an Optimal Control of the Wrapping Effect, pp. 43-51, 1998.
- [118] Kuntsevich, V. M. and Lychak, M. M. *Synthesis of Optimal and Adaptive Control Systems: The Game Approach [in Russian]* Naukova Dumka, Kiev, 1985.
- [119] Kurzban, A. and Valyi, I., *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, Birkhäuser, Boston, Massachusetts, 1996.

- [120] Landis, E. M. ‘On functions representable as the difference of two convex functions’, *Doklady Akademii Nauk SSR*, 80, 9-11, 1951.
- [121] Lee, J. H. and Yu, Z. ‘Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters’, *Automatica*, 33, 763–781, 1997.
- [122] Li, H. and Fu, M., ‘A linear matrix inequality approach to robust filtering’, *IEEE Trans. Signal Processin*, 5, 2338–2350, 1997.
- [123] Limon, D. Control Predictivo de Sistemas no lineales con restricciones: estabilidad y robustez, PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2002.
- [124] Limon, D., Alamo, T. and Camacho, E. F. Input-to-state stable MPC for constrained discrete-time nonlinear systems with bounded additive uncertainties, in ‘Proceedings of the CDC’, 2002.
- [125] Limon, D., Alamo, T. and Camacho, E. F. Enlarging the domain of attraction of MPC controller using invariant sets, in ‘Proceedings of IFAC World Congress’, 2002.
- [126] Limon, D., Alamo, T. and Camacho, E. F. Robust mpc based on a sequence of sets, in ‘Proceedings of the CDC’, 2003.
- [127] Limon, D., Gomes da Silva, J. M., Alamo, T. and Camacho, E. F. (2003), Improved MPC design based on saturating control laws, in ‘Proceedings of the ECC’, 2003.
- [128] Ljung, L. System identification – Theory for the user, Prentice Hall, 1987.
- [129] Ljung L. System Identification Toolbox: User’s Guide. The Math Works Inc. Natick, MA, 1991.
- [130] Ljung, L. and Glad, T. Modelling of dynamic system, Prentice Hall, 1994.
- [131] Ljung, L. System Identification, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
- [132] Lohner, R. J. Einschließung der Lösung gewöhnlicher Anfangs und Randwertaufgaben und Anwendungen, PhD thesis, Universität Karlsruhe, 1988.
- [133] Lu, Y. and Arkun, Y. ‘A quasi-min-max mpc algorithm for lpv systems’, *Automatica*, 36, 527–540, 2000.
- [134] Luenberger, D. ‘An Introduction to Observers’. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC 16(6), 596-602, 1971.
- [135] Magni, L., Nijmeijer, H. and Van der Shaft, A. ‘A receding-horizon approach to the nonlinear h1 control problem’, *Automatica*, 37, 429–435, 2001.
- [136] Mahfouf, M., Asbury, A. J. and Linkens, D. A. ‘Unconstrained and constrained generalised predictive control of depth of anaesthesia during surgery’, *Control Engineering Practice*, 1(12), 1501–1515, 2003.

BIBLIOGRAFÍA

- [137] Mayne, D. Q. and Schroeder, W. R. (1997), 'Robust time-optimal control of constrained linear systems', *Automatica*, 33(12), 2103–2118, 1997.
- [138] Mayne, D. Q., Rawlings, J., Rao, C. V. and Scokaert, P. O. M. 'Constrained model predictive control: Stability and optimality', *Automatica*, 36, 789–814, 2000.
- [139] Michalska, H. and Mayne, D. Q. 'Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems', *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(11), 1623–1633, 1993.
- [140] Michalska, H. and Mayne, D. Q. 'Moving Horizon Observer-Based Control'. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(6), 995-1006, 1995.
- [141] Milanese, M. and Belforte, G. 'Estimation theory and uncertainty intervals evaluation in presence of unknown but bounded error: linear families of models and estimators', *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27, 408-414, 1982.
- [142] Milanese, M. and Vicino, A. 'Estimation theory for nonlinear models and set membership uncertainty', *Automatica*, 27, 403-408, 1991.
- [143] Milanese, M., Norton, J., Piet-Lahanier, H. and Walter, E. 'Boundary Approaches to System Identification', Plenum Press, New York, 1996.
- [144] Milanese, M. and Novara, C. 'Set membership identification of nonlinear systems', *Automatica*, 40, 957-975, 2004.
- [145] Montgomery, H. L. 'Computing the volume of a zonotope', *Amer. Math. Monthly*, 96, 431, 1989.
- [146] Mo, S. and Norton, J. Recursive parameter-bounding algorithms which compute polytope bounds, in 'Proc. 12th IMACS world Congr. on Scientific Computation', Vol. 2, Paris, France, pp. 477-480, 1988.
- [147] Mo, S. H. and Norton, J. P., 'Fast and robust algorithm to compute exact polytope parameter bounds', *Math. Comput. Simulation*, 32, 481–493, 1990.
- [148] Moore, R. E. Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing. PhD thesis, Stanford University, October 1962.
- [149] Moore, R. E. *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [150] Moore, R. E. *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia, 1979.
- [151] Moraal, P.E. and Grizzle, J. W. 'Observer design for nonlinear systems with discrete-time measurements'. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3), 395-404, 1995.
- [152] Nagpal, K. M. and Khargonekar, P. P., 'Filtering and smothing in a setting', *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, 152–166, 1991.

- [153] Neumaier, A. and Shen, Z. ‘The Krawczyk operator and Kantorovich’s theorem’. *Mathematical Analysis and Applications*, 149(2), 437-443, July 1990.
- [154] Oishi, Y., Alamo, T. ‘Robust semidefinite programming problems with general nonlinear parameter dependence: Approches using the DC-representations. *Automatica*, (In Press, Corrected Proof, Available online 24 July 2012), 2012.
- [155] Oliveira, J., Santos J.N., Seleglim Jr. P. ‘Inverse Measurement Method for Detecting Bubbles in a Fluidized Bed Reactor—Toward the Development of an Intelligent Temperature Sensor. *Power Technology*, 169, 123–135, 2006.
- [156] Pedro, J. ‘The history of the concept of function and some educational implications’, *The Mathematics Educator*, 3(2), 1992.
- [157] Penot, J. P. and Bogoard, M. L. ‘Approximation and decomposition properties of some classes of locally d.c. functions’, *Mathematical Programming*, 41, 195-227, 1988.
- [158] Piet-Lahanier, H. and Walter, E., Futher results on recursive polyhedral description of parameter uncertainty in the bounded-error context, in ‘Proc. IEEE 28th CDC’, Tampa, FL, pp. 1964–1966, 1989.
- [159] Piet-Lahanier, H. and Walter, E. Polyhedral approximation and tracking for bounded-error models, in ‘Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems’, Vol. 1, Chicago, USA, pp. 782-785, 1993.
- [160] Piet-Lahanier, H. and Walter, E. ‘Bounded-error tracking of time-varyng parameters’, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, 1661-1664, 1994.
- [161] Pinter, J. Global optimization in action. Dordrecht: Kluber Academic Publisher, 1996.
- [162] Puig, V., Cuguelo, P. and Quevedo, J., Worst-case estimation and simulation of uncertain discrete-time systems using zonotopes, in ‘Proceedings of European Control Conference’, Portugal, 2001.
- [163] Qin, J. and Badwell, T. A. An overview of industrial model predictive control technology, in ‘Proceedings of the conference on Chemical Process Control’, 1997.
- [164] Radhakrishnan Mahadevan, S. K. A. and III, F. J. D. ‘Differential flatness based nonlinear predictive control of fed-batch bioreactors’, *Control Engineering Practice*, 9(8), 889–899, 2001.
- [165] Raković, S. V., and Mayne, D. Q. ‘State estimation for piecewise affine, discrete time systems with bounded disturbances’. In 43rd IEEE conference on decision and control. Atlantis, Paradise Island, Bahamas, submitted for publication, 2004.
- [166] Raković, S. V., Kerrigan, E. C., Kouramas, K. I. and Mayne, D. Q. ‘Invariant Approximations of the Minimal Robust Positively Invariant Set’. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3), 406–410, March 2005.

BIBLIOGRAFÍA

- [167] Raković, S. V. and Fiacchini, M. 'Approximate reachability analysis for linear discrete time systems using homothety and invariance', in 'Proceeding of IFAC World Congress', Seoul, Korea, 2008.
- [168] Ramírez, D. R. Control predictivo min-max: análisis, caracterización y técnicas de implementación, PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2002.
- [169] Ramírez, D. R. and Camacho, E. F. Implementation of min-max mpc using hinging hyperplanes, in 'Proceedings of the 15th IFAC World Congress', Barcelona, Spain, 2002.
- [170] Ramírez, D., Camacho, E. and Arahal, M. 'Implementation of min-max mpc using hinging hyperplanes. application to a heat exchanger', *Control Engineering Practice*, 12(6), 700–709, 2004.
- [171] Ratschek, H. and Rokne, J. Computer Methods for the Range of Functions. Horwood, Chichester, England, 1984.
- [172] Richalet, J., Rault, A., Testud, J. L. and Papon, J. 'Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes', *Automatica*, 14, 413–428, 1978.
- [173] Rockafellar, R. Convex analysis. Princeton University, 1970.
- [174] Rump, S. M. 'Verification methods for dense and sparse systems of equations'. In J. Herzberger, editor, *Topics in Validated Computations*, pp. 63-135, Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1994.
- [175] Rump, S. M. 'New results on validation algorithms for large systems of equations, 1995'. Talk given at SCAN'95, Wuppertal, Germany, Sept. 26-29, 1995.
- [176] Savkin, A. V. and Petersen, I. R., 'Robust state estimation and model validation for discrete-time uncertain system with a deterministic description of noise and uncertainty', *Automatica*, 34(2), 271–274, 1998.
- [177] Schoukens, J.; Pinetelon, R.. Identification of Linear Systems. Pergamon Press, 1991.
- [178] Schweppe, F. C. 'Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs', *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13, 22-28, 1968.
- [179] Scokaert, P. O. M., Rawlings, J. B. and Meadows, E. S. 'Discrete-time stability with perturbations: Application to model predictive control', *Automatica*, 33(3), 463–470, 1997.
- [180] Scokaert, P. O. M. and Mayne, D. Q. 'Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems', *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(8), 1136–1142, 1998.
- [181] Seborg, D. Edgar, T. Mellichamp, D. Process dynamics and control. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 2003.

- [182] Shamma, J. S. and Tu, K.-Y., 'Approximate set-valued observers for nonlinear systems', *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(5), 648–658, 1997.
- [183] Shapiro, A. 'On functions representable as a difference of two convex functions in inequality constrained optimization', Research Report, University of South Africa, 1983.
- [184] Shapiro, A. and Yomdin, Y. 'On functions representable as a difference of two convex functions and necessary conditions in constrained optimization', Department of Mathematics, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva, Israel, 1981.
- [185] Shephard, G. C. 'Combinatorial properties of associated zonotopes', *Canadian Journal of Mathematics*, 26, 302–321, 1974.
- [186] Söderström, T., Stoica, P.. System identification, Prentice Hall, 1989.
- [187] Soroush, M.. 'Nonlinear State Observer Design With Application to Reactors'. *Chemical Engineering Sciences*, 52(3), 387-404, 1997.
- [188] Soroush, M. 'State and Parameter Estimations and Their Applications in Process Control', *Computers & Chemical Engineering*, 23, 229-245, 1998.
- [189] Tarbouriech, S. and Gomes Da Silva, J. M. Jr. 'Admissible polyhedra for discrete-time linear systems with saturating controls'. In American control conference, vol. 6 (pp. 3915–3919). Albuquerque, New Mexico. June 1997.
- [190] Tuy, H. 'Global Minimization of a difference of two Convex Functions', *Mathematical Programming Study*, 30, 150-182, 1987.
- [191] Tuy, H. 'D.C. Optimization: Theory, Methods and Algorithms'. En *Handbook of Global Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [192] Tuy, H. 'Convex Analysis and Global Optimization. Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1998.
- [193] Vicino, A. and Zappa, G. 'Sequential approximation of feasible parameter sets for identification with set membership uncertainty', *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(6), 774-785, 1996.
- [194] Wallas, S. Chemical Process equipment. Selection and design. Butterworth. 1988.
- [195] Walter, E. and Piet-Lahanier, H. 'Exact recursive polyhedral description of the feasible parameter set for bounded-error models', *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34, 911-915, 1989.
- [196] Walter, E. and Pronzato, L. Identification of Parametric Models from Experimental Data, Springer-Verlag, 1997.
- [197] Witsenhausen, H. S. 'Sets of possible states of linear systems given perturbed observations', *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13, 556-558, 1968.

BIBLIOGRAFÍA

- [198] Zheng, A. and Morari, M. ‘Stability of model predictive control with mixed constraints’, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40, 1818–1823, 1995.