Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

Análisis de la construcción del concepto de la derivada en un primer ciclo de enseñanza superior asistida por ordenador

Memoria para optar al grado de doctora
presentada por:

María Angélica Vega Urquieta

Fecha de lectura: 20 de febrero de 2012

Bajo la dirección de los doctores:

José Carrillo Yáñez
Jorge Soto Andrade

Huelva, 2012

ISBN: 978-84-15633-93-8
D.L.: H 260-2012

Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

ANÁLISIS DE LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA EN UN PRIMER CICLO DE ENSEÑANZA SUPERIOR ASISTIDA POR ORDENADOR

Maria Angélica Vega Urquieta

TESIS DOCTORAL

Huelva, 2011

DIRECTOR DEL TRABAJO DE TESIS

Prof. José Carrillo Yañez

Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

Facultad de Ciencias de la Educación.

Universidad de Huelva.

DIRECTOR DEL TRABAJO DE TESIS

Prof. Jorge Soto Andrade

Centro de Investigación Avanzada en Educación & Facultad de Ciencias.

Universidad de Chile.

DOCTORANDO

María Angélica Vega Urquieta

Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas.

Universidad de Chile.

A Dios,

Por haberme dado la oportunidad de terminar

lo comenzado en algún momento de mi vida.

Por haberme otorgado la salud y los medios

para cumplir las metas y lograr mis objetivos.

Gracias por su infinita bondad y amor.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo llegó a buen término, porque hubo personas que me apoyaron con su existencia, compañía y aliento.

Quiero agradecer muy sinceramente a mi director de tesis Dr. José Carrillo Yáñez, ya que sin su benevolencia, disposición, sugerencias y apoyo no hubiese podido terminar este gran desafío. También, tengo especiales agradecimientos para mi codirector, el Dr. Jorge Soto Andrade, que apoyó mi trabajo en Chile, tuvo fe y confianza en que este trabajo era interesante e importante realizarlo.

En los afectos fundamentales quiero agradecer públicamente a Guillermo Díaz Araya, mi esposo, quien ha sido un pilar fundamental en mi vida personal y profesional. Y en este camino, un motor de inspiración y apoyo, al darme en todo momento palabras de aliento, ánimo y fuerza para proseguir a pesar de las dificultades. También a mis hijos por darme ánimo y a mis nietos por entregarme su amor y angelical dulzura.

Y sin el apoyo de mi madre y sacrificio de mi padre hubiese sido muy difícil desarrollar mis estudios de doctorado, ya que ella con mucha dedicación y cariño cuidó de mis hijos durante mi primera estadía en España.

Por ellos he avanzado en todos los planos de mi vida.

Finalmente, agradezco al Centro de Investigación Avanzada en Educación de la Universidad de Chile (PBCT- CONICYT, Project CIE-05) por su apoyo económico y su confianza depositada en mí durante la realización de esta Tesis.

María Angélica Vega Urquieta

COLABORADORES

En este trabajo han colaborado ya sea en el diseño o en el apoyo con sus conocimientos respecto al software que he usado para el desarrollo de esta tesis, las siguientes personas a las que les estoy también muy agradecida:

Antonio Behn von Schmieden

Julio Deride Silva

Nancy Lacourly Ventre

Bárbara López Maturana

INDICE

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN 7
1.1. Antecedentes, Motivación y Objeto de Estudio 8
1.2. Presentación del Estudio 13

Capítulo 2. MARCO TEÓRICO 17
2.1. La Teoría APOS como Modelo de Cognición 20
2.1.1. Introducción 20
2.1.2. Descripción del modelo APOS 28
2.1.3. Elección de un Modelo Cognitivo 48
2.1.4. Fundamentos Biológicos de la Teoría APOS 50
2.2. El Aprendizaje Matemático a través de Software 52
2.2.1. La Tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las funciones 55
2.2.1.1. Uso de la tecnología como simplificadora 56
2.2.1.2. Uso de la tecnología como integradora 57
2.2.1.3. Uso de la tecnología como instrumento o mediadora 58
2.2.2. La Tecnología en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial 60
2.3. Creencias de los Estudiantes sobre la Metodología de Enseñanza 65

Capítulo 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN. 73
3.1. Objetivos y Problema de Investigación 74
3.2. Caracterización de la Investigación 76
3.3. Los Casos 83
3.3.1. La Encuesta Diagnóstica 85
3.3.2. Evaluaciones Diagnósticas 92
3.3.2.1. Primera Evaluación Diagnóstica 92
3.3.2.2. Segunda Evaluación Diagnóstica 94
3.4. Estrategias de Enseñanza 96
3.4.1. Metodología de la Enseñanza 97
3.4.2. Descomposición Genética Inicial del Concepto 98
3.4.2.1. Esquema de función 98

3.4.2.2. Esquema de función derivada 99
3.4.3. Descomposición Genética Inicial de los Módulos de Clases y su Descripción 102
3.4.3.1. Descripción de los Módulos de Clases 103
3.4.4. Descomposición Genética de los Laboratorios Computacionales y su Descripción 106
3.4.4.1. Descripción de los Laboratorios Computacionales 113
3.5. Instrumentos de Obtención de Información 118
3.5.1. Definición de los Estándares para un Curso de Cálculo Diferencial 119
3.5.1.1. Estándares de Aprendizaje 119
3.5.1.2. Clasificación de los Estándares 119
3.5.1.3. Estándares para la Sección de Cálculo Diferencial. 120
3.5.2. Prueba de Medición de Estándares (PME) 121
3.5.2.1. Relación entre la Prueba de Estándares y el Modelo Cognitivo APOS 125
3.6. Instrumentos de Análisis 129
3.6.1. Prueba de Medición de Estándares 130
3.6.2. Análisis de Creencias 131

Capítulo 4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS 137
4.1. Introducción 138
4.2. Caso 1: Juan Ignacio 142
4.2.1. Instrumento de Análisis: Prueba de Estándares 142
4.2.2. Análisis de las Creencias 150
4.3. Caso 2: Daniela 156
4.3.1. Instrumento de Análisis: Prueba de Estándares 157
4.3.2. Análisis de las Creencias 163
4.4. Caso 3: Lola 170
4.4.1. Instrumento de Análisis: Prueba de Estándares 170
4.4.2. Análisis de las Creencias 180
4.5. Caso 4: Nancy 185
4.5.1. Instrumento de Análisis: Prueba de Medición de Estándares 186
4.5.2. Análisis de las Creencias 193
4.6. Análisis de la relación entre Rendimiento y Prueba de Medición de Estándares 198
4.6.1. Juan Ignacio 198
4.6.2. Daniela 199
4.6.3. Lola 200
4.6.4. Nancy 201

Capítulo 5. CONCLUSIONES 203

5.1. Síntesis de los resultados 204
5.1.1. Caso 1: Juan Ignacio 204
5.1.2. Caso 2: Daniela 206
5.1.3. Caso 3: Lola 207
5.1.4. Caso 4: Nancy 209
5.2. Conclusiones Generales sobre el Aprendizaje Construido evidenciado a través de la PME 210
5.3. Conclusiones sobre la Estrategia de Enseñanza 212
5.3.1. De los Módulos de Clases 212
5.3.2. De los Laboratorios Computacionales 213
5.3.3. Comentarios de las Creencias en relación a la Estrategia de Enseñanza 216
5.4. Conclusiones Generales 218
5.5. Proyecciones de la Investigación 220
5.5.1. Trascendencia de la Investigación 220
5.5.2. Preguntas Abiertas 221

Referencias 223

ANEXOS 231
ANEXO 1: MÓDULOS DE CLASES 231
Introducción al concepto derivada de una función e interpretación. 231
Problema de entrada 232
Conceptos conocidos que utilizaremos para definir el concepto de derivada 232
Velocidad media y velocidad instantánea 232
Derivada de una función en un punto. 233
Interpretación geométrica y práctica de la derivada. 234
Relación entre la derivada de una función en un punto con continuidad en el punto. 235
Derivada Numérica o derivada de una función dada mediante una tabla. 236
Definición de la función derivada 238
Derivadas de algunas funciones importantes. 239
Algebra de Derivadas 239
Derivada de sumas, restas, productos y cuocientes de funciones. 239
Derivada de una composición o Regla de la cadena. 242
Introducción. 242
Derivada de la inversa de una función. 244
La derivada de una función dada mediante un gráfico. 246
Relaciones entre f y f' 246

Relaciones entre f' y f'' y el gráfico de f. 246
Derivada de un cuociente de funciones 249
Monotonía y Concavidad 251
Monotonía de una función 251
Puntos críticos de una función 252
Concavidad y convexidad 256
Segunda derivada de una función 259
Puntos de inflexión. 259
Aplicaciones de la Derivada: Linealidad local, Incrementos y Diferenciales 260
Aproximación lineal o linealidad local 260
Incrementos y Diferenciales 261
Uso de la diferencial 262
Derivada de las funciones trigonométricas. 263
Una ecuación diferencial para las funciones trigonométricas sen(x) y cos(x). 264
Aplicaciones de la Derivada: Valores Extremos 266
Puntos críticos de una función 266
Máximos y mínimos locales 266
Máximos y mínimos globales 267
Método Analítico de Graficación 270
Problemas de Optimización. 271
ANEXO 2: LABORATORIOS COMPUTACIONALES 275
ANEXO 3: ENCUESTA DE DIAGNÓSTICO 304
ANEXO 4: PRIMERA PRUEBA DE DIAGNÓSTICO 314
ANEXO 5: PRUEBA DE MEDICIÓN DE ESTÁNDARES 333
ANEXO 6: ENCUESTA SOBRE LAS CREENCIAS DE LOS ESTUDIANTES 360
ANEXO 7: PRUEBAS ACUMULATIVAS 391
ANEXO 8: GUÍAS DE EJERCICIOS 398
ANEXO 8: GUÍAS DE EJERCICIOS 424
ANEXO 9: TABLAS DE DESERCIÓN 434
Índice de Autores 437
Índice de Conceptos 439

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

1.1. Antecedentes, Motivación y Objeto de Estudio

1.2. Presentación del Estudio

1.1. Antecedentes, Motivación y Objeto de Estudio

Dada la importancia que tiene la Matemática como ciencia básica para la formación de profesionales en las carreras científicas, tecnológicas y de las ciencias de la ingeniería, por mencionar algunas, se requiere que la docencia en esta disciplina esté en un proceso continuo de evaluación y mejoramiento de la calidad de su enseñanza. Esto con el fin de estar en condiciones de preparar al profesional del nuevo milenio para que su integración a la sociedad sea efectiva y suponga un aporte original y una fuente de constante innovación. Estas características surgen como resultado de un desarrollo mental creador, que se puede lograr a través del proceso educativo, desarrollando las potencialidades del individuo, logrando una formación integral de éste.

El sostenido avance científico - tecnológico de los últimos tiempos y la incorporación de la computación, a finales de los años 70 y comienzos de los años 80, ha provocado modificaciones en la sociedad haciendo inminente la incorporación de estos avances a la educación.

Sin embargo, la enseñanza de la Matemática a menudo se realiza bajo condiciones poco estimulantes para los alumnos; incluso hoy en día la forma clásica de presentar la Matemática es a través de la clase tradicional expositiva, donde la enseñanza consiste esencialmente en la transmisión de conocimientos por el profesor con o sin apoyo de algún tipo de material. Claramente, el alumno tiene una participación pasiva en su personal proceso de aprendizaje. La sala de clases entusiasma cada vez menos, desmotiva al alumno alejándolo de la asignatura y por tanto de los objetivos que se quieren lograr.

El promedio de los porcentajes de los estudiantes que abandonaron[1] la Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas, entre los años 1994 y 1997, fue de $44.5\,\%$, siendo el más significativo el porcentaje del año 1996 de un $59\,\%$. Para la década comprendida entre los años 1998 y 2008, tenemos un informe del porcentaje de abandono más detallado, en el sentido que conocemos los porcentajes de abandono por año cursado. En efecto, al segundo año de la carrera abandonaron sus estudios el $10.8\,\%$; al tercer año, un $21.8\,\%$ y al cuarto año, un $29.3\,\%$. Para un informe más detallado, consultar el *Anexo 9: Tablas de Deserción*.

La enseñanza "tradicional" [2]en el sentido usado por Barbosa (2003) (p.2), empleada en la enseñanza de la Matemática a través de los años, no ha solucionado el problema general de rendimiento y desmotivación de los estudiantes por las asignaturas de Matemática. Por lo tanto, considero que es importante desarrollar una serie de acciones con el fin de incentivar el estudio de la Matemática, usando recursos adecuados y actualizados, así como psicopedagógicamente

[1] Ya sea por causal de retiro o eliminación por rendimiento académico.

[2] "Sistema pedagógico que no se fundamenta en una investigación científica en Educación Matemática y que, en general, no ha logrado avances en el aprendizaje de los conceptos matemáticos".

válidos de modo de interesar a los alumnos por las asignaturas de Matemáticas y gatillar procesos que produzcan en los estudiantes un aprendizaje significativo.

Según mi experiencia en el ámbito universitario un problema generalizado es el que los estudiantes de Primer Año tengan dificultades para acreditar el curso de Cálculo Diferencial. Este hecho me motivó para desarrollar en el aula nuevas metodologías de enseñanza, que promuevan un mejor aprendizaje en el estudiante.

A mi llegada a la Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas de la Universidad de Chile en 1994, el rendimiento de los estudiantes de Primer Año en la asignatura de Matemáticas I, queda detallado en la tabla 1.1.

TABLA 1.1. Rendimientos en la asignatura de Matemáticas I de los Alumnos de Primer Año

Años	**Q. Farmacia - Bioquímica**		**Química - I. Alimentos**	
	Aprobados	**Reprobados**	**Aprobados**	**Reprobados**
1994	46.70%	53.30%	42.86%	51.14%
1995	43.86%	56.14%	62.96%	37.04%
1996	43.79%	56.21%	64.15%	35.85%

En junio de 1995, fui nominada Jefe del Área de Matemáticas y posteriormente, Coordinadora General del Área. Se me encomendó el desafío de elevar el rendimiento de los estudiantes de Primer Año. Para ello, me propuse realizar algunos cambios en la metodología de enseñanza incorporando el apoyo informático.

Sugerí la compra de ordenadores para los profesores, la adquisición del software Maple y cursos de perfeccionamiento para los académicos, y así poder enfrentar el proyecto de innovación. Cabe hacer presente que, en mi experiencia como académico en la Universidad de Antofagasta, mi trabajo anterior, tuve formación en el área de la informática, que me permitió impartir cursos con apoyo computacional a las carreras del área de Ingeniería Civil (Mecánica, Electricidad, Minas, Química) en diversos lenguajes como FORTRAN, PASCAL, BASIC, MAPLE, etc. Es decir, tenía experiencia en implementaciones instruccionales.

En el año 1997 se pusieron en marcha algunos talleres con apoyo computacional, en forma piloto, en los cursos de Primer Año y en el curso de Ecuaciones Diferenciales. Los resultados obtenidos de los alumnos de Primer Año se muestran en la tabla 1.2.

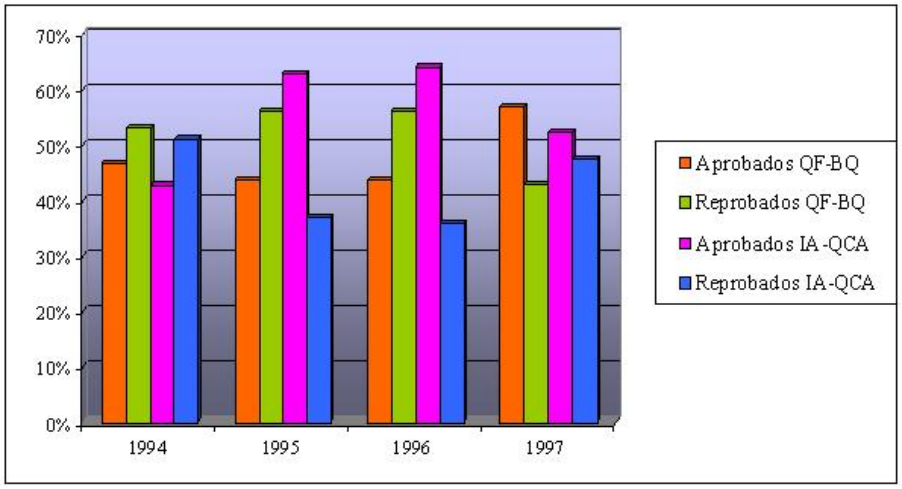
Lamentablemente, por problemas de infraestructura, fundamentados por la escasa cantidad de ordenadores y la limitación de ampliar el número de licencias del software, este proyecto no siguió adelante.

TABLA 1.2. Rendimientos en la asignatura de Matemáticas I de los Alumnos de Primer Año 1997.

Años	Q. Farmacia - Bioquímica		Química - I. Alimentos	
	Aprobados	Reprobados	Aprobados	Reprobados
1997	57.02%	42.98%	52.50%	47.50%

Si observamos el gráfico de la Figura 1.1 es claro que al comparar los porcentajes de aprobación desde el año 1994 al año 1997 podemos percibir, que en el año 1997 se produjo un aumento del rendimiento de los estudiantes de la asignatura de Matemáticas I, en las cuatro carreras.

FIGURA 1.1. Resumen del rendimiento en la asignatura de Matemáticas I



Aunque estos resultados de rendimiento constituyen un posible indicador de logros, no permiten establecer ninguna conclusión respecto al impacto de la herramienta computacional, pues entendemos que no es aplicable lo que Schoenfeld (1994, p. 697) denomina Paradigma Agrícola[3], que, en este caso, nos permitiría conjeturar que "Si en dos aulas similares se implementaran tratamientos de enseñanza diferentes y en los resultados obtenidos hay una diferencia significativa, la conclusión obvia es que se debe a la diferencia de tratamientos". En el año 2002, al participar como co-investigadora en el proyecto de docencia MECESUP UCH0002, logramos adquirir como parte de este proyecto, un laboratorio computacional equipado con 37 ordenadores destinado al uso exclusivo de la docencia de las asignaturas que se imparten en el área de Matemáticas.

Este nuevo escenario me motivó a no realizar una simple innovación, que venía incorporando hace algunos años, sino a investigar el rol que desempeñaría un software educativo como apoyo

[3]"Si dos campos de maíz se sometieran a tratamientos casi idénticos y hubiera un diferencia significativa en la cosecha de entre ellos, esa diferencia podría atribuirse presumiblemente a la diferencia de tratamientos".

didáctico en el aprendizaje de los estudiantes, pensando en la disminución de la reprobación que se produjo en la experiencia piloto del año 1997.

También pensé que sería interesante implementar un tratamiento educativo instruccional de aprendizaje distinto al convencional, innovando en lo posible el método tradicional de la clase expositiva en el aula y adicionalmente, incorporando clases con apoyo computacional y luego, estudiar el impacto que esta situación didáctica produciría en el proceso de aprendizaje de la Matemática, fundamentalmente en los estudiantes que cursan la asignatura de Matemáticas I. Además, es importante saber el rol que cumple la interacción social entre los estudiantes y el ordenador, entre los estudiantes con sus pares y con su profesor.

Por otra parte, a nivel nacional en Chile, se comienza a divulgar en los Congresos y Jornadas de Educación trabajos en que se exponen distintas experiencias innovadoras con entornos tecnológicos interactivos para el aprendizaje de las Matemáticas, en los que participé junto a otros colegas (Sánchez y Vega, 1998; Vega et al, 1997).

Y a nivel internacional encontramos algunas publicaciones que indican que hay investigadores incursionando e incorporando la tecnología al proceso enseñanza - aprendizaje. Es interesante el trabajo de tesis doctoral de Murillo (2003), titulado "Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geometría en la ESO".

En dicha investigación se analizan y clasifican las interacciones que se producen en un entorno interactivo de aprendizaje, constituido fundamentalmente por una red electrónica, donde la resolución de las actividades se realiza con apoyo de CABRI y las respuestas se canalizan por correo electrónico o bien en el Tablero (foro de discusión), constituyendo el medio esencial del aprendizaje en este trabajo.

Para nuestra investigación se ha escogido el concepto de la derivada y algunas de sus aplicaciones, principalmente porque la Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas cultiva las ciencias químicas, biológicas, farmacológicas y ciencias de los alimentos, es decir, es eminentemente científica y la Matemática que se imparte está orientada a las aplicaciones fundamentalmente y el concepto de la derivada de una función es importante a la hora de modelar fenómenos científicos. Por citar algunos, crecimiento de bacterias, decaimiento radiactivo, problemas de enfriamiento, etc.

Todos estos fenómenos se modelan mediante una ecuación diferencial.[4] Esta facultad está ubicada físicamente en el Campus de la Salud, junto a la Facultad de Medicina y a la Facultad de Odontología. Desde esta perspectiva, la construcción de modelos matemáticos diferenciales, se utiliza ampliamente por estudiantes, científicos y profesionales de la salud para el estudio

[4]Ecuación en la que aparece como incógnita la derivada de una función, más otros términos como la función misma y funciones de la variable independiente.

de problemas en Medicina, Biología, Fisiología, Bioquímica, Epidemiología, Farmacocinética, etc., con la finalidad de describir, explicar, predecir fenómenos y procesos en dichas áreas. Montecinos et al (2007) afirman usar modelos diferenciales para estudiar la dinámica de las enfermedades infecciosas; con el fin de idear programas efectivos de control e implementar patrones epidemiológicos, (p. 219).

Se sabe que D' Alembert fue el primero en describir la propagación de enfermedades infecciosas, mediante un modelo matemático en el siglo XVIII. Sin embargo, el primer artículo conocido en forma explícita para una enfermedad infecciosa fue el de Daniel Bernouilli, en 1760, quien propuso varios modelos diferenciales para modelar algunas enfermedades infecciosas. Una de las conclusiones del trabajo de Bernouilli fue que la variolación [5], protegía contra la viruela y confería inmunidad de por vida. López et al (2000) hacen una reseña histórica de todos los aportes y modelos matemáticos usados en la modelación de las epidemias, incluyendo por cierto a Bernouilli.

Todos estos antecedentes, producen en mí una reflexión que me induce por una parte, como profesor de la asignatura de Matemáticas I, a realizar un cambio de la metodología de enseñanza usada en el aula e implementar una nueva teoría práctica para cambiar la situación, y que permita una mejor entrega de estos temas, tan importantes para los estudiantes que ingresan a estudiar carreras científicas. Por otra parte, como investigadora, me pregunto:

(1) ¿Qué procesos cognitivos se generan en un estudiante que escogió una carrera científica para comprender el concepto de la función derivada?
(2) ¿Qué procesos cognitivos se generan para relacionar el concepto de la función derivada con otros conceptos, como los que definen las propiedades cualitativas de una función?
(3) ¿Qué construcciones mentales se ponen en juego al aplicar el concepto de derivada, en la modelación y resolución de algunos problemas científicos, mediante una ecuación diferencial?
(4) De acuerdo a las creencias de los estudiantes ¿Cómo influye la mediación informática en su aprendizaje?
(5) ¿Cuál es la opinión de los estudiantes respecto al cambio de la metodología de enseñanza y cómo influye en sus aprendizajes?

A través de estas preguntas, pretendemos en este estudio investigar qué construcciones mentales realiza un estudiante para la comprensión del concepto de la derivada y algunas de sus aplicaciones, los factores que lo afectan y caracterizar los niveles de desarrollo de estas construcciones mentales, en cuatro estudiantes de ingreso a la carrera de Ingeniería en Alimentos.

[5] Inoculación de la viruela

Además, pretendemos indagar cómo afecta en su aprendizaje el recurso didáctico consistente en el uso de Módulos de Clases y Laboratorios Computacionales usando el Software MAPLE V en la enseñanza del Cálculo Diferencial, específicamente en el capítulo "La derivada y algunas de sus aplicaciones".

Se diseñó un texto guía escrito entregado por secciones, que llamamos módulos de clases. Estos se diseñaron de acuerdo al programa de la asignatura de Matemáticas I con el fin de apoyar al estudiante en su estudio, puesto que en ellos se tratan los conceptos que se discutirán y analizarán en el aula, además del tipo de actividades que deberán realizar. También, se usa el recurso informático como un apoyo a la enseñanza. Para ello, la profesora diseñó una serie de actividades guiadas para que los estudiantes desarrollen en una clase o taller computacional de 2 horas académicas de duración, cuyo objetivo es ayudar a la comprensión de los conceptos estudiados en el aula, aplicar propiedades, graficar y resolver problemas afines a la temática. Aunque el uso de la tecnología propicia el desarrollo de la actividad investigativa en la educación no es nuestro propósito en este trabajo. Una característica de la enseñanza investigativa es que exige niveles superiores en el desempeño de los estudiantes al solucionar problemas de mayor complejidad, por lo que escapa a la motivación de esta investigación.

1.2. Presentación del Estudio

Este estudio lo hemos organizado en cinco capítulos y nueve anexos. En este primer capítulo hemos presentado los antecedentes generales que han motivado este estudio, así como el desafío de querer mejorar la práctica educativa, que se traduce en indagar y obtener evidencias del aprendizaje construido por los estudiantes y responder las preguntas que surgen en forma natural ante esta problemática planteada.

El segundo capítulo es el Marco Teórico en el que presentamos las tres dimensiones que contempla este trabajo y las correspondientes bases teóricas necesarias en las que se sustenta nuestra investigación. El modelo Cognitivo APOS de Dubinsky (1996), el aprendizaje matemático a través de Software y el estado del arte sobre las creencias de los estudiantes.

En relación a nuestro Modelo de Cognición APOS presentamos las bases teóricas en que se sustenta este modelo, su relación con otros modelos cognitivos como el de Tall y Vinner (1981) y el de Sfard (1991). Además exponemos una descripción del modelo y el por qué lo seleccionamos como el modelo cognitivo en nuestro estudio. Presentaremos además otras teorías más actuales que están siendo usadas como Marco Teórico para la Didáctica de las Matemáticas. Entre ellas mencionamos el Enfoque Ontosemiótico (EOS) nacida de un trabajo de 15 años de

Díaz-Godino (2003) impulsado por problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y la aspiración de articular las distintas dimensiones y perspectivas involucradas.

Otra teoría actual cuyo propósito es describir la estructura cognitiva del aprendizaje es la Teoría de los Conceptos Nucleares (TCN) desarrollada por el grupo CIBERDIDACT de la Universidad de Extremadura, coordinado por Ricardo Luengo. Esta teoría usa las Redes Asociativas Pathfinder que describen, representan y estudian procesos mentales relacionados con la adquisición de un concepto y su evolución a través de su desarrollo. (Casas y Luengo, 2003) La TCN, como propuesta teórica fue utilizada por Casas (2002) en su tesis denominada: "El estudio de la estructura cognitiva de alumnos a través de Redes Asociativas Pathfinder. Aplicaciones y posibilidades en Geometría".

Con respecto al Aprendizaje Matemático a través de software, exponemos el trabajo de Ferrara et al, quienes recopilaron los estudios realizados por investigadores del PME, en relación al uso de la tecnología en el estudio de las matemáticas. De estos trabajos presentamos aquellos que tienen relación con nuestro estudio, las funciones y Cálculo Diferencial. En esta sección nos referimos a tres usos de la tecnología, como simplificadora, como integradora y como mediadora. Compartimos la reflexión de Hoyles et al (2006) en reconocer el potencial de la tecnología para transformar el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Aunque falta mucho por investigar la naturaleza de las estructuras cognitivas que utilizan los estudiantes con el uso de la tecnología.

Otro trabajo relevante que se refiere al uso de la tecnología es la revisión del estado actual en este ámbito de Codes y Sierra (2005). Ellos señalan la existencia de dos marcos teóricos principales que determinan el paradigma en que se desarrollan las investigaciones: el constructivismo y el instrumental. Ambos tienen como objetivo común mejorar la enseñanza y el aprendizaje de distintos temas matemáticos, difieren en la forma en que se lleva a cabo este avance. Estos autores señalan las ventajas para aprovecharlas e inconvenientes para evitarlos que tiene el entorno computacional como herramienta, que comentaremos en este capítulo y que compararemos con nuestras conclusiones.

En este capítulo también mencionamos algunos trabajos de tesis doctorales relacionados con nuestro modelo cognitivo, la teoría APOS, y que usaremos posteriormente como referentes. Entre ellos elegimos: el de Barbosa (2003), que usa APOS en la enseñanza de la inecuaciones, el trabajo de Sánchez-Matamoros (2004) sobre "Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de la universidad sobre la noción matemática de la derivada". E incluimos además a Trigueros (2005), que define la concepción de "Esquema de una función",

Hacemos referencia a otros trabajos que utilizan APOS en otros tópicos de la Matemática: el trabajo de Parraguez (2009) que estudia la evolución cognoscitiva del concepto de Espacio Vectorial de los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas, del Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso de Chile y el de Aneshkumar

(2010) que analiza la comprensión del concepto de límite de una función por los estudiantes de pregrado de Ciencias de la Universidad de Kwazulu-Natal de Sud Africa.

Finalmente nos referimos al estudio realizado por Gómez-Chacón et al (2006) sobre el estado del arte en el tema de las creencias de los estudiantes. En esta revisión se han considerado las investigaciones realizadas en las tres últimas décadas. Estos trabajos destacan "cinco categorías de aptitudes que un estudiante debería obtener para tener una buena disposición para aprender matemáticas: conocimiento matemático, métodos heurísticos, metaconocimientos, habilidades de autorregulación y creencias positivas sobre la matemática y su aprendizaje". (ibid, p. 310)

Además, presentamos las caracterizaciones que realizan algunos autores como Furinghetti y Pehkonen (2002) sobre los conceptos de creencias, sistemas de creencias y conocimiento, Yackel y Rasmussen (2002) que postulan que las creencias son las comprensiones que tienen los estudiantes de las cosas. Plantean que mediante la coordinación de la perspectiva sicológica y la sociológica es posible desarrollar métodos para explicar cómo en las clases de matemáticas pueden producirse cambios en las creencias de los estudiantes.

Otro trabajo interesante es el de Kapetanas y Zachariades (2007), quienes evidencian la estructura de las creencias y actitudes de los estudiantes acerca del estudio y el aprendizaje de las matemáticas y la forma en que el rendimiento en matemática y la habilidad son influenciados por ellas.

El tercer capítulo corresponde al Diseño de la Investigación. Éste comprende a su vez seis secciones, en la primera retomamos la génesis de nuestro problema, formulamos las interrogantes en relación a nuestra investigación y exponemos nuestros objetivos.

En la segunda sección se relaciona nuestro estudio con las caracterizaciones sobre Investigación-Acción desarrolladas por Elliott (2000) y otros investigadores, en resumen nuestro trabajo es una Investigación-Acción. Elliot presenta ocho caracterizaciones del modelo Investigación-Acción, en este apartado se analizan haciendo una comparación entre el modelo formulado por estos autores y esta investigación. Se comentan las etapas de la Investigación-Acción y se contrastan con nuestro trabajo.

La tercera sección se refiere a los casos, se describen los criterios de selección de una muestra formada por cuatro estudiantes de la carrera de Ingeniería en Alimentos.

La cuarta sección se refiere a las Estrategias de Enseñanza. Bajo este título hemos desarrollado la Metodología de Enseñanza basándonos en el Modelo Cognitivo APOS. Se realizó la Descomposición Genética Inicial[6] del concepto de función y función derivada. Además

[6]Se define como análisis teórico del concepto en función de las construcciones mentales que un individuo debería realizar para desarrollar la comprensión de dicho concepto.

definimos a priori la descomposición genética de los Módulos de Clases y de los Laboratorios Computacionales. Presentamos además los Fundamentos biológicos del modelo APOS realizada por Tall (1999).

En la quinta sección se describen los Instrumentos de Obtención de la Información. Usaremos como instrumento secundario al conjunto de evaluaciones aplicadas durante el desarrollo del curso de Matemáticas I, que utilizaremos como referencia en el momento de analizar el conocimiento construido y como instrumentos de Análisis la Prueba de Medición de Estándares y la Encuesta sobre la Creencias de los estudiantes.

Además, hemos introducido en esta sección un breve resumen de los Estándares, en función de indicadores de logro que se definieron para este curso de Cálculo Diferencial. En esta sección también relacionamos la Prueba de Medición de Estándares con los indicadores de logros correspondientes a los Estándares seleccionados y con el Modelo Cognitivo APOS. En la sexta sección presentamos los Instrumentos de Análisis de la Información, la Prueba de Medición de Estándares y la Encuesta sobre las Creencias de los Estudiantes en relación a los Módulos de Clases y Laboratorios Computacionales. Para realizar el estudio elaboramos un análisis de los contenidos que mediremos, basándonos en el Análisis de Contenidos de Bardin que representaremos mediante una tabla resumen.

En el cuarto capítulo se analiza cada caso de la muestra seleccionada, se presenta el nivel de aprendizaje construido según el Modelo APOS, un informe de la Prueba de Medición de Estándares y un informe sobre las creencias de estos estudiantes con respecto a los Módulos de Clases y Laboratorios Computacionales.

En el capítulo quinto se exponen las conclusiones con respecto al aprendizaje construido en cada caso y las Creencias de los estudiantes en relación a la Metodología de Enseñanza. Además, se comentan las proyecciones de este estudio.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

2.1. La Teoría APOS como Modelo de Cognición

2.1.1. Introducción
2.1.2. Descripción del Modelo APOS
2.1.3. Elección de un Modelo Cognitivo
2.1.4. Fundamentos Biológicos de la Teoría APOS

2.2. El Aprendizaje Matemático a través de Software

2.2.1. La Tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las funciones
  2.2.1.1. Uso de la tecnología como simplificadora
  2.2.1.2. Uso de la tecnología como integradora
  2.2.1.3. Uso de la tecnología como instrumento o mediadora
2.2.2. La Tecnología en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial

2.3. Creencias de los Estudiantes sobre la Metodología de Enseñanza

Nuestro marco teórico contempla tres dimensiones. Una es el modelo cognitivo APOS que seleccionamos para investigar sobre el aprendizaje construido en cuatro estudiantes del curso de Matemáticas I, impartido para los estudiantes que ingresan a primer año de la carrera de Ingeniería en Alimentos. Como punto de partida este modelo comienza con una *acción* que se interioriza mediante una repetición. Al convertirse en una construcción interna se transforma en un *proceso*, el logro de esta etapa indica que el estudiante es capaz de reflexionar el proceso. Esto significa, que puede pensarlo a la inversa, ir y volver al proceso original, componerlo en otros procesos y transformarlo mediante una acción. Al logro de esta etapa, Dubinsky le denomina proceso encapsulado u *objeto*. En este momento el *objeto* existe en la mente del estudiante y le asigna un nombre, que permite al estudiante conectar este nombre con el *proceso* del cual se construyó dicho *objeto*. Finalmente, un *esquema* es una colección de procesos y objetos que un estudiante utiliza para resolver un problema y según el desarrollo logrado puede clasificarse a su vez en sub-etapa Intra, Inter o Trans. Este es uno de los desafíos, descubrir cuál es el nivel de aprendizaje logrado por estos estudiantes del concepto en estudio.

La segunda dimensión es el uso de la tecnología en la metodología de enseñanza, como una posibilidad de mejorar la práctica educativa e indagar de qué manera influye el recurso computacional en el aprendizaje de estos estudiantes desde su propia perspectiva y cómo se relaciona esta creencia con las investigaciones realizadas sobre la tecnología como apoyo a la enseñanza. Algunas de las consultadas exponen que los entornos gráficos han hecho posible las investigaciones sobre la forma de las gráficas de las funciones a nivel local y global. Por otra parte, los lenguajes de programación han permitido las investigaciones en el Cálculo Numérico, pero el mayor progreso en la enseñanza de la matemáticas con apoyo informático se debe a la introducción de software dinámicos.

Los laboratorios que se diseñaron como apoyo a la enseñanza combinan algunas de estas bondades. El primero de ellos introduce al estudiante al conocimiento del software a través de aplicaciones simples, fundamentalmente operaciones conocidas por ellos. También introdujimos el uso bibliotecas que integra el software, como la de Entornos Gráficos, Álgebra Lineal, Cálculo, etc. Ellas permitirán conocer la forma de las gráficas de algunas funciones en dos dimensiones y gráficos tridimensionales, usar vectores para realizar y ejecutar programas simples, y trabajar con los comandos del Cálculo Diferencial e Integral. Además, se ilustra la animación (o componente dinámico) de gráficos de funciones.

De acuerdo al modelo cognitivo que usaremos para investigar el aprendizaje logrado por los casos seleccionados. Las actividades que contemplan este laboratorio tienen como fin estimular el uso de la tecnología a partir de algunos conocimientos básicos de los estudiantes. Estas actividades las hemos clasificados a nivel de *acción*.

El segundo laboratorio enfatiza el estudio de funciones y la animación de algunos conceptos que en el aula se estudian en forma estática como la derivada de una función en un punto. El estudiante debe aprender la nueva sintaxis, interiorizarla para expresar las ideas matemáticas a través del teclado, es decir, previamente debe construir el concepto de funciones y de derivada en un punto a nivel de *proceso*. Al construir mentalmente estos conceptos, el estudiante podrá encapsular los procesos logrando el concepto de *objeto*.

Con el fin de integrar los esquemas estudiados en clases con el informático, el tercer laboratorio ilustra la resolución de un problema de variable relacionada con asistencia computacional. Este laboratorio incluye actividades de un nivel más alto de comprensión, su propósito es incorporar tres esquemas, el de las propiedades cualitativas de las funciones, la derivada y la informática. Para desarrollar este laboratorio el estudiante debe ser capaz de integrar estos esquemas, demostrando un nivel de pre-esquema.

Por último, el cuarto laboratorio ilustra la resolución de problemas de optimización. El estudiante debe integrar el software para resolver problemas de mayor complejidad, evidenciando una coordinación entre los distintos esquemas involucrados transitando de un pre-esquema a esquema nivel Trans.

De aquí, se desprende otro de nuestros propósitos, investigar el rol del ordenador al integrar el esquema representado por la tecnología, a través de las actividades de laboratorios diseñadas para los estudiantes con los esquemas matemáticos que se relacionan con el concepto de la derivada y sus aplicaciones. Por otra parte, investigar qué beneficios podría proporcionar al estudiante integrar todos estos esquemas.

La tercera dimensión está constituida por las creencias de los estudiantes respecto de los recursos didácticos que se usaron y qué rol les atribuyeron. De las revisiones que se consultaron, podemos inferir que hay varias caracterizaciones del concepto de creencia. Yackel y Rasmussen (2002) y colaboradores han desarrollado un marco interpretativo para analizar la actividad individual y colectiva en el aula, y que coordina la perspectiva sicológica y la sociológica. La importancia de este marco radica en el hecho que es un resultado de la investigación basada en el aula y no de un análisis teórico a priori. Lo fundamental del trabajo de estos autores es la suposición de que las creencias de los estudiantes son esencialmente de naturaleza cognitiva. Esto significa que las creencias son las comprensiones que tienen los estudiantes de las cosas. Exponen que mediante la coordinación de la perspectiva sicológica (es decir, creencias de los estudiantes) y la sociológica (es decir, normas sociales en el aula y socio matemáticas) es posible desarrollar métodos para explicar cómo en las clases de matemáticas pueden formarse cambios en las creencias. Algunas investigaciones coinciden en que las actitudes de los estudiantes pueden ser cambiadas en forma más positiva. Regna y Dalla (1992) afirman que cuando los maestros son

entusiastas y su enseñanza y el plan de actividades son accesibles para los estudiantes entonces, las actitudes pueden ser mejoradas. Los resultados de este estudio evidencian la estructura de las creencias y actitudes de estos estudiantes acerca del estudio y el aprendizaje de las matemáticas, y la forma en que el rendimiento en matemática y la habilidad (capacidad) son influenciados por ellas. Por el contrario, los profesores que muestran actitudes positivas hacia las matemáticas, utilizan métodos que inducen a la iniciativa y a la autonomía, provocan en los estudiantes el gusto y la confianza hacia la asignatura.

En este ámbito, nos interesa indagar desde la información proporcionada por los estudiantes, desde sus creencias qué rol asignan a los recursos utilizados en esta intervención didáctica. Al investigar sobre las creencias de los estudiantes podremos descubrir, si hay alguna relación entre ellas y su rendimiento y qué dificultades tienen los estudiantes para estudiar en forma exitosa: ¿Qué podría permitir un acercamiento al estudio y aprendizaje de la derivada y sus aplicaciones?, ¿Las actividades propuestas mejoran la confianza y una creencia positiva hacia las matemáticas?

Observamos que estos tres ejes están interrelacionados, puesto que, las creencias de los estudiantes nos proporcionarán información sobre el rol que ellos atribuyen al uso de los módulos de clases y de la tecnología en su aprendizaje. Esta información es una retroalimentación que permite a la profesora diseñar nuevas estrategias para mejorar su práctica educativa, que incide en el rendimiento de los estudiantes y a su vez nos permite investigar y conocer el nivel del aprendizaje construido mediante el modelo APOS al usar nuevas estrategias de enseñanza y analizar cómo influyen en el aprendizaje.

2.1. La Teoría APOS como Modelo de Cognición

2.1.1. Introducción

Varios son los trabajos y los autores que podríamos citar como fundamento de este trabajo de investigación en lo que se refiere a nuestro modelo cognitivo; sin embargo, destacamos el hecho de que los trabajos de Piaget son, en cierta forma, la base para algunas investigaciones posteriores, como las de Ed Dubinsky, Tall y Vinner, Ana Sfard y los aportes de Clark y equipo, que contribuyeron a mejorar la fase de esquema de la teoría de Dubinsky, basándose en la tríada de Piaget y García (1989). Estos trabajos son un gran aporte al mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por tanto un valioso aporte para esta investigación.

Realizaremos una revisión del estado del arte de cada dimensión. Primero analizaremos brevemente algunos modelos y teorías interesantes y pertinentes en nuestra investigación sobre la comprensión de la Matemática. Comenzaremos con las teorías más recientes. Es sabido que

uno de los objetivos específicos de la Didáctica de las Matemáticas como dominio de investigación es el estudio de las causas que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de proyectos de mejoramiento de dichos procesos.

Díaz-Godino (2003) señala que uno de los principales problemas meta-didácticos que se debe abordar es clarificar las nociones teóricas utilizadas en el área del conocimiento, en particular cuando se analizan fenómenos cognitivos. Entre estas nociones están: conocimientos, saberes, competencias, concepciones[1], conceptos[2], representaciones internas[3], imágenes conceptuales, esquemas, significados, etc. (Díaz-Godino, 2010)

Godino et al (2009) piensan que: "Es necesario y posible construir un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática que permita superar los dilemas que se plantean entre los diversos paradigmas en competición: realismo-pragmatismo, cognición individual- institucional, constructivismo-conductismo, etc. Para ello se deben tener en cuenta algunas herramientas conceptuales y metodológicas de disciplinas de tipo holístico como la semiótica, antropología y la ecología, articuladas de manera coherente con la psicología y pedagogía, que tradicionalmente han sido el punto de referencia inmediato para la Didáctica de las Matemáticas". (p.2)

Es así como nace el Modelo o Enfoque Ontológico Semiótico (EOS) que proporciona herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y elementos que condicionan su desarrollo. Ellos definen y precisan, además las nociones teóricas que conforman el EOS. (Díaz-Godino, 2003)

Sus creadores señalan que hay dos maneras de entender la *comprensión*: como proceso mental o competencia. Los dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que son divergentes. Agregan que existen enfoques en la Didáctica de las Matemáticas que entienden la comprensión como proceso mental, mientras que los pragmatistas del EOS entienden la comprensión como competencia y no tanto como proceso mental. Es decir, un sujeto comprende un determinado objeto matemático[4] si lo usa de manera competente en diferentes prácticas[5]. (Godino y Batanero, 1994)(p. 334) (Díaz-Godino, 2003)

---

[1]Concepción designa al aglomerado completo de representaciones internas y asociaciones evocadas por el concepto.

[2]Concepto o noción es una idea matemática en su forma oficial, como un constructo teórico dentro del universo formal del conocimiento ideal.

[3]Representaciones internas son los constructos de simbolización personal de los estudiantes, las asignaciones de significado a las notaciones matemáticas.

[4]Entendiéndose por Objeto Matemático situaciones-problemas, procedimientos, conceptos, proposiciones, argumentaciones, teoría, etc.

[5]Práctica Matemática es toda ecuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución definida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas

La ontología matemática que propone: "El enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático concibe el objeto matemático como un emergente de los sistemas de prácticas ligadas a campos de problemas". (Godino y Batanero, 1994)(p. 43)

El hecho de considerar que las funciones semióticas[6] tienen un rol esencial en el proceso relacional entre identidades o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas, permite entender en el EOS la comprensión en términos de funciones semióticas, las que se realizan cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua. (Ibid) Las nociones teóricas definidas por los autores se complementan con la noción de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción que se define como la articulación coherente y sistémica de seis componentes. A nuestro juicio estos criterios son importantes de tenerlos en cuenta al realizar un proceso de instrucción, por lo que los aplicaremos posteriormente a nuestro trabajo. Estos son los siguientes:

(1) Idoneidad epistémica se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales[7] implementados[8] (o pretendidos) , respecto de un significado de referencia. Por ejemplo la enseñanza de la suma o adición en educación primaria puede restringirse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad) o tener en cuenta los diferentes tipos de situaciones aditivas e incluir la justificación de algoritmos (alta idoneidad),(Díaz-Godino, 2003).

(2) Idoneidad cognitiva expresa el grado en que los significados pretendidos-implementados estén en la zona potencial de los estudiantes, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos-implementados. Por ejemplo en el estudio de la aritmética, un proceso con alto grado de idoneidad cognitiva se produciría si en el aprendizaje de las operaciones con números de 3 o más cifras, el profesor realizara una evaluación inicial para saber si la mayoría de los estudiantes dominan la operación de los números con 2 y tres cifras, de lo contrario debería comenzar el proceso trabajando con dichos números. (Ibid)

(3) Idoneidad Interaccional desde esta perspectiva un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor grado de idoneidad si las configuraciones y trayectorias didácticas[9] permiten,

---

[6]Desde una epistemología pragmatista- antropológica, una función semiótica cuyo antecedente (significante) es el objeto matemático o la expresión que lo designa y el consecuente (significado) un nuevo constructo. Este nuevo constructo los autores lo describen como el sistema de prácticas matemáticas realizadas por un persona o en forma institucional bajo una clase de situaciones-problemas.

[7]Si los sistemas de prácticas son compartidas bajo el alero de una institución, los objetos emergentes se consideran *institucionales*. Si son específicos de una persona se consideran como *"objetos personales"*. (p. 8)

[8]Implementado en un proceso de estudio es el sistema de prácticas implementadas por el docente.

[9]Una "configuración didáctica" está formada por las interacciones alumno-profesor en relación a un objeto o contenido matemático usando unos recursos materiales específicos. Se concibe como una realidad organizacional, como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de las trayectorias didácticas.

identificar conflictos semióticos potenciales[10] , que se puedan detectar a priori, y por otro lado resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción. (Ibid p.15)

Por ejemplo, si consideramos un proceso de estudio realizado según una secuencia de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización tiene potencialmente mayor idoneidad semiótica que uno magistral que no considera las dificultades de los estudiantes. (Ibid)

(4) Idoneidad mediacional corresponde al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, si el profesor y los estudiantes tuvieran a su disposición recursos pertinentes con el estudio de un determinado tópico, el proceso de estudio que se apoye en el recurso informático tendría potencialmente mayor idoneidad mediacional que otro tradicional basado en forma exclusiva en pizarra, lápiz y papel. (Ibid)

(5) Idoneidad emocional es el grado de implicación o interés del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada con factores que dependen tanto de la institución como del estudiante y de su historia escolar anterior. Por ejemplo tendrán este tipo de alta los procesos basados en el uso de situaciones- problemas que sean de interés para los estudiantes. (Ibid)

(6) Idoneidad ecológica es el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a las condiciones del medio en que se desarrolla. (Ibid) Según los autores todos estos conceptos son útiles para el análisis de proyectos y experiencias en la enseñanza, opinión que compartimos y que consideraremos en nuestro trabajo. Como una aplicación del EOS, los autores mencionan la Tesis Doctoral de V. Font sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada por estudiantes de bachillerato. Nos parece pertinente comparar las conclusiones obtenidas bajo este enfoque con las nuestras en el Capítulo 5. Destacaremos solo las que podrían ser comparables con las nuestras:

   i) El significado personal de objetos que se suponía que los alumnos habían estudiado previamente (función, variación de una función, pendiente, tasa media de variación, velocidad, etc.) era insuficiente. De aquí se deduce una buena manera de asegurar que los alumnos adquieren un buen significado personal de dichos objetos previos.

[10] Un "conflicto semiótico" es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales se habla de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto, los conflictos semióticos son de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) y dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (alumno-alumno o alumno-profesor) los conflictos son de tipo interaccional.

ii) La definición de derivada como límite de las tasa medias de variación presenta una gran complejidad semiótica.

iii) La noción de función semiótica junto con las dualidades cognitivas extensivo-intensivo[11], expresión-contenido[12], son utilizadas para analizar la complejidad ontosemiótica de la definición de derivada y derivada en un punto. Este análisis permite identificar conflictos semióticos potenciales, que se tienen en cuenta en el diseño de la experiencia y como explicación de algunas dificultades persistentes en la comprensión de dichas nociones.

Describiremos otra teoría moderna que estudia los proceso mentales relacionados con le enseñanza y aprendizaje, es la Teoría de los Conceptos nucleares (TCN) concebida por Casas y Luengo (2003). Ellos usan como parte de la teoría las Redes Asociativas Pathfinder a través de las cuales pueden describir, representar y estudiar procesos mentales relacionados con la adquisión de un concepto y su evolución a lo largo del desarrollo.

Ellos señalan dos tipos de enfoques para el estudio de los procesos mentales, uno que analiza el estado inicial de un grupo de alumnos en un área del conocimiento, se aplica un tratamiento y se evalúa el nivel de cambio conseguido con él. Estos estudios permiten averiguar la efectividad de los diferentes tratamientos educativos y proporcionan un conocimiento parcial, puesto que se valoran más las producciones obtenidas que los procesos internos seguidos. El otro enfoque es desde la Ciencia Cognitiva, que tiene por objetivo estudiar todo el fenómeno, analizando todo el proceso y no solo los resultados. Ellos sitúan su teoría en este último enfoque.

Nuestro trabajo parte realizando un estudio de la situación inicial y los resultados obtenidos al aplicar una cierta metodología de enseñanza y diseño instruccional, pero, además, determina los obstáculos espistemológicos en el estudio de la derivada y el nivel de aprendizaje construido de cada integrante de la muestra seleccionada. Veamos los principales elementos de la TCN:

(1) Organización geográfica del conocimiento.

Esta teoría propone que la adquisición de un concepto se produce en forma análoga a la adquisición del conocimiento geográfico, donde a partir de "hitos", puntos destacados del paisaje, se establecen enlaces en forma de "rutas". Equivalentemente, un concepto no se aprende en forma aislada, sino siempre asociado a otros, formando una estructura. Una vez que se dominan las rutas se alcanza la "vista de conjunto", que es un conocimiento

[11] La dualidad extensivo - intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de las matemática: el uso de elementos genéricos. Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático.

[12] Expresión-contenido: corresponde al antecedente y consecuente en cualquier función semiótica.

general que permite un dominio del entorno geográfico o de la estructura cognitiva del concepto en toda su amplitud, con todas sus relaciones. Casas y Luengo (2003)(p. 186).

(2) Conceptos Nucleares

Los puntos más destacados del conocimiento geográfico no son necesariamente los puntos más importantes, sino aquellos que por diferentes motivos son los de mayor interés para el sujeto. Análogamente, los puntos más destacados de la estructura cognitiva no son solamente los más significativos por su grado de generalidad o abstracción, sino aquellos ejemplos utilizados en la enseñanza que por razones personales de los autores se han afianzado más. Estos son los que denominan como "conceptos nucleares". La existencia de los conceptos nucleares está demostrada por la presencia de conceptos en torno a los cuales y de forma mayoritaria se organizan las redes de los alumnos. Se puede observar en ellas que estos conceptos no son necesariamente los más abstractos o generales, sino simplemente los más significativos para los alumnos. (Ibid).

(3) Senderos de mínimo coste

La estructura cognitiva organizada alrededor de un concepto no se hace necesariamente más compleja de acuerdo al aumento del conocimiento, sino de acuerdo a lo que los sujetos utilizan, dependiendo de los propósitos para cada caso, estructuras más sencillas que los autores denominan "senderos de mínimo coste". Los autores señalan que esta afirmación queda confirmada por el dato que, a medida que aumenta el dominio del concepto estudiado, las redes de los alumnos se hacen más simples, con relaciones más sencillas entre los conceptos. (Ibid)

(4) Redes Asociativas

Las redes asociativas Pathfinder permiten un conocimiento de la estructura cognitiva del alumno con muy poca interferencia por parte del profesor y señalando los conceptos más significativos de dicha estructura.

Según los autores las redes asociativas constituyen una herramienta útil para obtener datos, que pueden ser interpretados bajo el enfoque de la TCN. Las aplicaciones de esta teoría han sido realizadas fundamentalmente en el campo geométrico, pero pueden extenderse a otras áreas no solo de la Didáctica de la Matemática.

Describiremos ahora la teoría APOS de Dubinsky, que consideramos como el modelo cognitivo más afín con la metodología usada en nuestro trabajo para analizar cada nivel de aprendizaje de cada caso estudiado. Aunque este modelo se relaciona a su vez con otros, como el modelo teórico concepto - imagen de Tall y Vinner y con el modelo operacional y estructural de Sfard, puesto que los tres modelos tienen etapas similares en común. APOS tiene también similitudes y diferencias

con el modelo de la comprensión matemática de Pirie y Kieren (1991a) que reseñaremos en forma suscinta en la siguiente sección.

La teoría APOS (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) surge como un intento de entender el mecanismo de la *abstracción reflexiva* introducida por Beth y Piaget (1980) [13] y que constituye la noción central de la teoría de Piaget sobre la construcción del conocimiento por los individuos.

Según Dubinsky (1991)(p.1): "el concepto de abstracción reflexiva puede ser una poderosa herramienta en el estudio del pensamiento matemático avanzado, que puede proporcionar una base teórica que apoye y contribuya a nuestra comprensión de qué es y cómo podemos ayudar a los estudiantes a desarrollar la capacidad de participar en ella".

La abstracción reflexiva es un concepto introducido por Piaget para describir la construcción de estructuras lógicas-matemáticas por un individuo durante el curso del desarrollo cognitivo. De hecho Piaget (1974)(p.143) afirma que: "El desarrollo de estructuras cognitivas es debido a la abstracción reflexiva..." Según este autor, la primera parte de la abstracción reflexiva consiste en la elaboración de propiedades de las acciones mentales o físicas en un nivel de pensamiento. Esto implica, entre otras cosas, una medida del conocimiento o la conciencia de las acciones. También puede incluir separar una forma de su contenido. Lo que es "abstracto" se proyecta sobre un plano superior de pensamiento, donde otras acciones se presentan así como modos más poderosos de pensamiento.

Para Dubinsky (1991) y su equipo, la abstracción reflexiva será la construcción de objetos mentales y de acciones mentales sobre esos objetos. Definen el concepto de *esquema* como una colección más o menos coherente de *objetos* y *procesos*. Por el término *objeto* se refieren a un objeto mental o físico y el término de*proceso o proceso mental* a una acción mental de naturaleza interna de un individuo. Puntualizan que uno de los propósitos de elaborar una teoría general es aislar pequeñas porciones de esta estructura compleja y dar descripciones explícitas de posibles relaciones entre los esquemas. Afirman que no es fácil separar una descripción del conocimiento matemático de su *construcción*, y que no es posible observar directamente los esquemas de un individuo o sus objetos y procesos. Solo se puede inferir de las observaciones que puede o no llevarlos a enfrentar problemas, situaciones en las que el sujeto está buscando una solución o tratando de comprender un fenómeno.

Siguiendo con las ideas de estos investigadores, cuando una persona es exitosa, afirman que el problema ha sido "asimilado" por el esquema. Cuando una persona no es exitosa, en condiciones favorables, su esquema existente puede ser "acomodado" para manejar el nuevo fenómeno. (Dubinsky, 1991)(p.104) Este hecho es el aspecto constructivo de la abstracción

[13] *Piaget llama así a la abstracción que parte de las acciones u operaciones y no meramente de los objetos.*

reflexiva. En este sentido, el estudio de la abstracción reflexiva es complementaria a la investigación de conceptos tales como obstáculos epistemológicos estudiados por Cornu y Sierspinska, y conflictos entre "imagen del concepto" y "definición del concepto" estudiado por Dreyfus, Tall y Vinner.

Dubinsky (1991) plantea la idea de usar las experiencias computacionales para ayudar a los estudiantes a crear abstracción reflexiva, como una forma de lidiar con estos obstáculos epistemológicos y conflictos. Otro punto interesante respecto a la construcción de conceptos es que estos autores aíslan cinco tipos de construcciones, que Piaget encontró en el desarrollo del pensamiento lógico de los niños. Estas son: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión. Aportan ejemplos ilustrativos de estas construcciones, entre ellas comentan la construcción de la comprensión del concepto de función. Esta construcción la comentaremos cuando desarrollemos algunos ejemplos de aplicación de la teoría APOS.

En la teoría APOS el desarrollo de la comprensión comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos para formar *acciones*, las acciones se interiorizan para formar *procesos* los que a su vez se encapsulan para formar *objetos* (que a su vez en muchas operaciones matemáticas, es necesario desencapsular un objeto y trabajar con el proceso del cuál proviene) y finalmente las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en *esquemas*. (Dubinsky, 1995).

APOS es una teoría constructivista que comienza con la hipótesis: "El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia[14] para responder ante las situaciones matemáticas problemáticas, reflexionando sobre ellas dentro de un contexto social y mediante la construcción o reconstrucción de acciones, procesos y objetos matemáticos, y organizándolos en esquemas pueda ser capaz de dar la solución a estas situaciones" (Asiala et al, 1996)(p.5). De modo que un individuo tendrá una gran serie de esquemas.

Además, para este investigador el aprendizaje consiste en la aplicación de la abstracción reflexiva a esquemas existentes, para construir nuevos esquemas para la comprensión de conceptos. Por lo tanto, un esquema no puede ser construido sin el prerrequisito de esquemas existentes, lo que es a menudo ignorado en la enseñanza tradicional.

[14] El término tendencia es explicado en el mismo artículo por Asiala et al (1996), donde se refieren a las relaciones entre la construcción mental y las interconexiones que un individuo utiliza para entender un concepto y la forma en que el individuo las usa (o falla en el uso) en situaciones problemáticas.

2.1.2. Descripción del modelo APOS

Una acción, similar a los esquemas de acción de Piaget (1971),[15] se origina mediante la manipulación de objetos físicos o mentales construidos para formar acciones. Una acción es la reacción a un estímulo, que el individuo percibe como esencialmente externo y se compara con cualquier operación mental o física repetible, que transforma de alguna manera dicho objeto. Como resultado las acciones tienden a ser algorítmicas y de influencia externas. (Clark et al, 1997).

A pesar de que la acción parece tener un enfoque limitado, la construcción de la comprensión resulta ser un elemento necesario, puesto que las acciones se realizan sobre objetos matemáticos familiares para el estudiante.

Una acción es una transformación de un objeto, que se interioriza mediante la repetición de dicha acción y cuando el individuo reflexiona sobre ella, de modo que la acción ya no se produce por influencias externas y en ese momento se vuelve una construcción interna que Dubinsky denomina proceso, similar a las operaciones de Piaget (1972)[16] Una parte importante de la comprensión de un concepto es la construcción de un "proceso".

Observemos como otros investigadores han definido y aplicado el modelo cognitivo APOS en el estudio de un tema matemático concreto; revisemos las etapas o niveles de las construcciones mentales, que realizan los estudiantes al usar el modelo APOS.

El trabajo del equipo de Dubinsky, publicado por Asiala et al (1996), plantea que un estudiante que es incapaz de interpretar una situación o problema que involucra a una función, a menos que tenga una fórmula (específica) para calcular los valores, está limitado a un concepto de acción de

---

[15] Para Piaget un esquema representa lo que puede repetirse y generalizarse en una acción. Un esquema es una actividad operacional que se repite (al principio de manera refleja) y se universaliza de tal modo que otros estímulos previos no significativos se vuelven capaces de suscitarla.
La teoría de Piaget trata en primer lugar los esquemas. Al principio los esquemas son comportamientos reflejos, pero posteriormente incluyen movimientos voluntarios, hasta que tiempo después llegan a convertirse en operaciones mentales. Con el desarrollo surgen nuevos esquemas y los ya existentes se reorganizan de diversos modos. Esos cambios ocurren en una secuencia determinada y progresan de acuerdo con una serie de etapas.

[16] La teoría de Piaget descubre los estadios de desarrollo cognitivo desde la infancia a la adolescencia. Como las estructuras psicológicas se desarrollan a partir de los reflejos innatos, se organizan durante la infancia en esquemas de conducta, se internalizan durante el segundo año de vida como modelos de pensamiento, y se desarrollan durante la infancia y la adolescencia en complejas estructuras intelectuales que caracterizan la vida adulta.
Piaget divide el desarrollo cognitivo en cuatro periodos importantes:

(1) Etapa sensorio motriz.
(2) Etapa Preoperacional
(3) Etapa de las Operaciones Concretas
(4) Etapa de las Operaciones Formales (que comienza desde los 12 años.)

En esta última etapa el adolescente logra la abstracción sobre conocimientos concretos observados (adquiridos en la etapa anterior) que le permiten emplear el razonamiento lógico inductivo y deductivo. Desarrolla sentimientos idealistas y se logra formación continua de la personalidad, hay un mayor desarrollo de los conceptos morales.

la función. En tal caso, el estudiante no es capaz de hacer mucho con esta función, excepto de evaluarla en puntos específicos y manipular la fórmula.

Ellos aclaran que las mayores dificultades de los estudiantes se manifiestan cuando deben trabajar con funciones que tienen dominios a tramos, funciones inversas, composición de funciones, conjuntos de funciones, la idea de que la derivada de una función es una función y la idea de que la solución de una ecuación diferencial es una familia de funciones (Asiala et al, 1996).

En este caso puntualizan que la principal razón de esta dificultad es que el estudiante no es capaz de ir más allá de la concepción de acción de una función y todos estos conceptos requieren para su elaboración, la concepción de proceso u objeto función.

Consideremos por ejemplo, la descomposición genética que propone Barbosa (2003), sobre el aprendizaje de *"La enseñanza de las inecuaciones usando la teoría APOS"*. Este modelo de aprendizaje constituye parte de su tesis doctoral. La autora propone que los estudiantes logran un aprendizaje a nivel de acción en este contexto, al:

i) "Resolver una inecuación imitando los pasos de la resolución de una ecuación similar.

ii) Procurar soluciones de una inecuación, sustituyendo valores específicos y verificando si satisfacen o no la inecuación". (Barbosa, 2003) (p.200)

Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un proceso. Es decir, es una construcción interna que realiza la misma acción, pero no dirigida por estímulos externos.

Un estudiante que ha logrado la concepción de proceso de un concepto matemático puede reflexionar sobre el proceso de transformación, describirlo e incluso revertir los pasos de la transformación sin necesitar del estímulo externo.

El estudiante puede pensar en realizar un proceso sin llegar a hacerlo y por tanto puede pensarlo a la inversa y componerlo con otros procesos para obtener nuevos procesos, ya sea mediante la *coordinación* o la *reversión de procesos* (Asiala et al, 1996).

Según Asiala et al (1996) en el ejemplo de las funciones, una concepción de proceso permite al sujeto pensar en una función, como el ingreso de uno o más valores de la variable independiente, realiza una o más operaciones sobre los valores y devuelve el resultado como salida, o los valores de la variable dependiente .

Por ejemplo, para entender una función como $sen(x)$ se necesita una concepción proceso, puesto que, no hay instrucciones explícitas para obtener la variable dependiente, dado el valor de la variable independiente.

Con el objetivo de implementar la función hay que imaginar el proceso que asocia un número real con su seno. Con una concepción proceso de una función, un individuo puede vincular dos o más procesos para construir una composición o invertir el proceso para obtener funciones inversas (Asiala et al, 1996).

La *coordinación* de procesos múltiples relacionados da como resultado la construcción de nuevos procesos, además existen situaciones en las que el estudiante encuentra temas que requieren la composición de procesos aparentemente no relacionados para crear una estructura más compleja, lo que es explicado con detalles por Dubinsky (1991).

La *reversión* permite al estudiante concebir un nuevo proceso que deshaga la sucesión de transformaciones que formaron el proceso inicial, es como la operación inversa de un proceso internalizado.

Una vez que el estudiante puede reflexionar sobre un proceso y transformarlo mediante una acción, el proceso se considera como encapsulado para convertirse en un objeto. Siguiendo ahora, con el ejemplo sobre la construcción de proceso de una inecuación proporcionado por Barbosa, ella afirma: "Un individuo ejecuta un proceso en el aprendizaje de la resolución de inecuaciones cuando:

i) El aprendiz resuelve una ecuación sin imitar necesariamente el método para solucionar otra similar. Aquí, puede iniciar la resolución de una ecuación procurando colocarla en una forma que le permita aplicar un cierto algoritmo de solución. Además, puede describir los pasos necesarios para resolver una ecuación sin realmente ejecutarla. Empero, un aprendiz que no posee un nivel de concepción proceso de resolución de ecuación no consigue ejecutar una acción en el conjunto solución sin antes determinarlo. Barbosa (2003) (p.203)

ii) Es capaz de pensar en una inecuación de forma generalizada y dinámica. Puede recibir una o más entradas,[17] ejecutar operaciones con ellas y obtener un valor booleano, esto es, (V) si la entrada es una solución de la inecuación y falso (F) si no lo es. El individuo que posee una concepción de proceso de inecuación, además utiliza el conjunto solución para responder si un determinado valor hace que la inecuación sea V o F, sin necesidad de sustituir tal valor en la inecuación para verificarlo" (Ibid).

Una vez que el proceso ha sido encapsulado, el objeto existe en la mente del individuo y necesita la asignación de una etiqueta para el objeto. Esta etiqueta permite al estudiante nombrar el objeto y conectar dicho nombre con el proceso del cual se construyó dicho objeto.

[17] Barbosa usa la palabra " entrada" como sinónimo de "valor de prueba"

Esta doble visión del objeto es importante, porque el estudiante debe ser capaz de desencapsular un objeto y regresar al proceso a una forma anterior al encapsulamiento.

El desencapsular permite al estudiante utilizar las propiedades inherentes al objeto para realizar nuevos manejos a partir de él (Dubinsky et al, 1994). Es decir, cuando el individuo reflexiona sobre las acciones aplicadas a un proceso específico y adquiere una conciencia de su totalidad, percibe que transformaciones (sean acciones o procesos) pueden actuar sobre él y es capaz de construirlas. En este caso se dice que el individuo reconstruyó o encapsuló, aquel proceso como *objeto cognitivo*.

Es fácil ver cómo la encapsulación de procesos a objetos y la desencapsulación de los objetos de vuelta a los procesos surge cuando uno está pensando en la manipulación de funciones tales como sumar, multiplicar, o simplemente la formación de conjuntos de funciones.

Para Asiala et al (1996) en general encapsular procesos para convertirlos en objetos es considerado extremadamente difícil y no hay muchas estrategias pedagógicas que hayan sido eficaces para ayudar a los estudiantes a hacer esto en situaciones como las funciones.

Los autores reconocen que una parte de la razón de esta ineficacia es que hay muy poco (o nada) en sus experiencias que corresponda a realizar acciones sobre lo que se interpreta como procesos.

Barbosa (2003) ilustra el aprendizaje de un concepto a nivel de objeto, planteando dos ejemplos, el concepto de función y el concepto de inecuación, afirma que:

i) "Un individuo capaz de pensar en una función como la suma de funciones, sin hacer referencia a ejemplos específicos, piensa en ella como un objeto.

i) Un individuo competente para analizar equivalencias entre inecuaciones utilizando propiedades de los números reales presenta una concepción objeto de inecuaciones. Aquí, demuestra estar consciente del proceso como una totalidad, puede ejecutar acciones aplicando propiedades de los número reales y analizar equivalencias" (Barbosa, 2003) (p.204).

Como la etapa culmine de aprendizaje del modelo APOS, Dubinsky propone que:
"Un esquema para cierto concepto matemático es una colección de procesos, objetos, y otros esquemas, los cuales son vinculados por algún principio para crear un sentido del concepto o fenomenología estudiada" (Dubinsky y Mc Donald, 1994) (p.223)

Un esquema puede tener como resultado otros esquemas subordinados para abarcar varios puntos de un dominio particular. Estos esquemas son representaciones mentales de los conceptos, puesto que existen en la mente del estudiante (Ibid).

Además, estos autores enfatizan que un esquema puede utilizarse para resolver una situación problemática, descomponiéndolo y trabajando sobre los procesos y objetos del individuo. Un esquema puede también ser tratado como un objeto en el sentido que sobre él se pueden aplicar acciones y procesos. Esta última cualidad de concebir un esquema, como objeto que se puede transformar mediante acciones y procesos, infiere una cualidad fractal con esquemas que contienen otros esquemas.

Los esquemas son estructuras organizativas que el estudiante a través de las acciones, procesos, objetos y otros esquemas, invoca para resolver un problema (Meel, 2003). La construcción de estas estructuras usa un mecanismo llamado generalización, que permite ampliar su uso.

Piaget se refiere a esta construcción como una asimilación reproductiva o generalizada[18] y la llamó generalización extensional (Dubinsky, 1991).

Esta generalización es la forma más simple y familiar de la abstracción reflexiva, puesto que se relaciona con la aplicación de un esquema ya existente para un nuevo conjunto de objetos (Meel, 2003).

Asiala et al (1996) explican metafóricamente la distinción entre esquema y las otras construcciones mentales, sugieren que es como la distinción en biología entre un órgano y una célula. Ambos son objetos, pero el órgano (esquema) establece la organización necesaria para el funcionamiento de las células en beneficio del organismo.

En resumen, un esquema de un individuo es la totalidad del conocimiento mediante el cual la persona está conectada (consciente o inconscientemente) a un tema matemático particular.

Dubinsky (1991)(p.117) postula acerca del concepto de función que es especulativo, puesto que está basado principalmente en la teoría general (APOS) y la comprensión de este concepto desde el punto de vista matemático. Un esquema poderoso para las funciones supondrá la interiorización de acciones. Cuando un sujeto percibe una situación, que puede tratar en términos de una función, se puede decir que el individuo puede mirar la situación como una acción que transforma objetos en otros objetos. Esta acción es interiorizada y una parte importante de qué significa conocer una función es construir un cierto tipo de proceso, que puede ser usado para dar sentido a cierto tipo de fenómenos. A esto el autor se refiere como una representación mental de una función y señala que el punto importante, de cuando una función es conocida como un proceso

[18] "La asimilación y la acomodación se muestran en la teoría piagetiana como las herramientas cognitivas útiles y fundamentales en el restablecimiento del equilibrio cognitivo en el individuo. El binomio asimilación-acomodación produce en los individuos una reestructuración y reconstrucción de los esquemas cognitivos existentes. Si los individuos construyen su propio conocimiento, la equilibración expresa el proceso mediante el cual se produce tal construcción, señalándose así el carácter dinámico en la construcción del conocimiento por los individuos, como hipótesis de partida para una teoría del análisis de los procesos cognitivos" (García, 1997) (p. 41).

interiorizado, es que este conocimiento tiene una componente dinámica que afecta la naturaleza de la interacción del individuo con la situación función. La evaluación de una función se convierte en la acción de tomar un valor específico del dominio y realizar el proceso sobre éste para obtener un nuevo valor en el recorrido. Entonces, puede ser posible que el individuo coordine el proceso función y su gráfico. El individuo entonces puede relacionar la potencialidad de los gráficos, que es la relación entre la forma física de la gráfica y el comportamiento de la función.

Un proceso función puede ser invertido, obteniendo así la función inversa. Reflexionando sobre la totalidad del proceso función, tiene sentido el concepto de una función sobre y la reflexión sobre el proceso función y su proceso inverso parece implicar la idea de función uno a uno. Un número importante de actividades matemáticas pueden requerir que el esquema función sea construido en un nivel más alto, donde una función no es solo un proceso interiorizado, sino el resultado de una encapsulación. Este proceso puede ser tratado por el individuo como un objeto.

Siguiendo con Asiala et al (1996) un individuo tendrá un esquema de función, un esquema de derivada, un grupo de esquema, etc. Los esquemas son importantes para el individuo, para el empoderamiento de las matemáticas, pero en general, estos investigadores reconocen estar muy lejos de conocer todos los detalles y que falta mucho estudio acerca de cómo esta organización (esquema) determina el rendimiento matemático.

Como afirma Clark et al (1997) una de las formas de usar los resultados de los análisis provenientes de una investigación, al utilizar el modelo APOS, es dar lugar a revisiones o cambios en la Descomposición Genética [19] inicial, completando así un ciclo, a través de los componentes del marco de la investigación.

Desde esta perspectiva la contribución de Clark et al (1997) fue mejorar el concepto de esquema de la teoría APOS. Su investigación surge al estudiar la construcción de la comprensión de la derivada de una función compuesta, conocida como *Regla de la Cadena*. Este concepto incorpora distintos subconceptos, que la teoría APOS no proporcionaba en forma sólida, puesto que no es el resultado del encapsulamiento de un solo proceso (Meel, 2003).

Clark y su equipo investigaron en los escritos de Piaget y García (1989), con el propósito de analizar el mecanismo triádico que se utiliza en la descripción del desarrollo de un esquema.

En el desarrollo a nivel de esquema de un concepto este mecanismo consta de tres etapas: Intra, Inter y Trans.

La etapa Intra se caracteriza por el enfoque de un solo objeto en forma aislada de otras acciones, procesos y objetos; y la etapa Inter se caracteriza por el conocimiento de las relaciones

[19] Descomposición Genética es el nombre con el que Dubinsky denomina al modelo de cognición APOS.

entre las distintas acciones, procesos, objetos y/o esquemas. Clark y su equipo, decidieron denominar pre-esquema a la colección que se encuentra en la etapa Inter del desarrollo.

Por último, la etapa Trans se caracteriza por la construcción de una estructura coherente que subyace en algunas de las relaciones descubiertas en la etapa Inter del desarrollo (Clark et al, 1997).

Este mejoramiento del concepto de esquema permitió a Clark explicar las acciones y afirmaciones de los estudiantes respecto de la regla de la cadena. Es importante entonces destacar que el concepto de esquema continúa siendo reexaminado a medida que la teoría evoluciona (Meel, 2003). De hecho, este es el argumento que Barbosa (2003) utiliza en su artículo para explicar por qué no aborda en su tesis doctoral la concepción de esquema en el estudio de la resolución de una inecuación. Por tanto, el concepto de esquema del modelo APOS, lo ilustraremos usando las definiciones propuestas por Trigueros (2005) para la concepción o nivel de esquema de *propiedades de una función y su evolución.*

Afirma textualmente que: "Para construir el esquema de función en términos de sus propiedades, el estudiante debe coordinar el objeto o esquema función con los de primera y segunda derivadas y con los conceptos de continuidad y límite a nivel de proceso u objeto. En la solución de problemas relacionados con la identificación y uso de las propiedades de una función, el estudiante lleva a cabo acciones o procesos sobre la función a través del cálculo de derivadas, de límites, del análisis de la continuidad o del proceso que se requiere cuando la función se representa de manera gráfica.

Estos procesos deben coordinarse con el esquema de función en términos de las implicaciones de los resultados obtenidos en el comportamiento de una función. Todas estas acciones o procesos individuales deben así coordinarse en el esquema llamado propiedades de la función.

La coherencia de ese esquema se puede atestiguar mediante la capacidad del estudiante de verificar si existe una única función o una única representación para una función que satisface todas esas propiedades" (Trigueros, 2005) (p.17)

Antes de proseguir con la ilustración de la evolución de los conceptos del estudio que realiza Trigueros, a través de las distintas sub-etapas que definen la concepción de un esquema, realizaremos algunas observaciones, con respecto a su descomposición genética:

(1) Respecto de su afirmación: "Para construir el esquema de una función en términos de sus propiedades, el estudiante debe coordinar el objeto o esquema con los de primera y segunda derivadas y con los conceptos de continuidad y límite a nivel de proceso u objeto". En mi opinión no aclara a qué propiedades de las funciones se refiere y qué propiedades

de las funciones va a considerar en su estudio, se refiere ¿al álgebra de funciones, que incluye el estudio de la regla de la cadena? o ¿a las propiedades cualitativas de una función?, si son las propiedades cualitativas ¿cuáles?, ¿incluye el comportamiento de una función al infinito o en el infinito? o ¿monotonía y concavidad? y desde qué punto de vista, incluye el estudio de ¿valores extremos y cambio de concavidad?

El estudio cualitativo de las funciones se puede realizar usando como concepto previo desigualdades o bien desde la perspectiva del cálculo diferencial, es decir la función derivada y funciones de orden superior.

En resumen, el ámbito de las propiedades de las funciones es amplio y decir propiedades en forma general es ambiguo, porque no se precisan qué propiedades.

(2) Luego que se elige una opción, en este caso propiedades cualitativas de una función usando los conceptos de primera y segunda derivada. Concuerdo que debe explicitarse el hecho de que el estudiante ha logrado los niveles de proceso, objeto o esquema de los conceptos de límite y continuidad, pero falta agregar una descripción más precisa de qué conceptos relacionados con la función derivada el estudiante debe poseer a nivel de proceso u objeto, como el cálculo de derivadas, usando su definición o propiedades, álgebra de derivadas y graficación de funciones.

(3) Respecto de la afirmación: "La coherencia de ese esquema se puede atestiguar mediante la capacidad del estudiante de verificar si existe una única función o una única representación para una función que satisface todas esas propiedades".

No es muy claro que el estudiante deba demostrar unicidad de una función en este nivel, puesto que es un concepto previo que está contenido en el aprendizaje de una función a nivel de esquema. Además falta agregar la esencia del significado de la definición de un esquema, la integración de todos los esquemas que el estudiante debe coordinar y que constituyen la caracterización de las etapas Inter y un nivel más superior la etapa Trans.

Veremos cuál es la descripción de las sub-etapas de un esquema que define Trigueros, para el aprendizaje de las propiedades de las funciones.

Nivel Intra-propiedades

"Un estudiante que se encuentra en el nivel de esquema *Intra* de las propiedades es capaz de establecer relaciones entre acciones, procesos u objetos relacionados únicamente con la coordinación de uno de estos esquemas, por ejemplo, el de la primera derivada con el comportamiento de la función. Estas relaciones pueden considerarse como internas de un objeto de aprendizaje: la primera derivada. El estudiante puede estar consciente de que se han definido otras propiedades, pero no las puede coordinar con la propiedad que está empleando en el

contexto gráfico" (Trigueros, 2005)(p. 17).

Nivel Inter-propiedades

"El nivel *inter-propiedades* se determinó en términos de la posibilidad del estudiante de coordinar los efectos de las acciones, procesos u objetos provenientes de dos o más esquemas en el comportamiento de la función". (Trigueros, 2005)(p.17)

Nivel Trans-propiedades

"El nivel se determinó por la capacidad del estudiante de coordinar todos los esquemas y objetos mencionados como parte de una estructura, una nueva función, lo cual se pone en evidencia por la posibilidad del estudiante de encontrar distintas funciones que satisfagan dichas propiedades, cuando éste es el caso" (Trigueros, 2005)(p.17-18).

Es obvio que las definiciones de las sub-etapas y la evolución del aprendizaje de éstas depende de los conocimientos del o de los investigadores. En mi opinión, falta precisar un poco más el nivel de aprendizaje Inter. Creo que hay que especificar cuáles son los esquemas que el estudiante debe coordinar en este contexto específico. Este nivel es importante puesto que en esta etapa el estudiante ha logrado el desarrollo de un pre-esquema.

Por ejemplo, el estudiante debería coordinar el esquema de función con los esquemas de las propiedades cualitativas y su relación con el esquema de la derivada que incluye los criterios de la primera y segunda derivada y sus significados, y el esquema de concepto gráfico de las propiedades cualitativas y su relación con el sentido gráfico de primera y segunda derivada.

Un componente son las definiciones formales, teoremas y propiedades que rigen la monotonía y concavidad en el cálculo diferencial y otra es la interpretación gráfica y su relación con las definiciones formales.

Una opinión más de Trigueros que compartimos es que: "Desde la perspectiva de la teoría APOS, la tríada para la evolución de los esquemas sirve como apoyo real en la construcción de instrumentos de análisis que permiten dar cuenta de la manera como los estudiantes aprenden muchos conceptos matemáticos.

El uso de la idea de la evolución de los esquemas a través de la triada ha permitido, además, el diseño de material didáctico que ha mostrado ser efectivo para el aprendizaje de esos conceptos. Esta no es una teoría fácil de usar, implica mucho trabajo y eso es lo que la hace, en ocasiones, difícil de entender. Pero al igual que otras teorías, constituye un acercamiento que nos permite

estudiar el fenómeno de la construcción de conceptos matemáticos que ha dado resultados positivos" (Trigueros, 2005) (p.18).

Considerando estas últimas ideas que no solamente menciona Trigueros en su trabajo, sino que declaran los investigadores que crearon el modelo APOS y también otros investigadores que lo han perfeccionado, como Clark y colaboradores, respecto a la continua evolución de los esquemas y de APOS misma. Podemos percibir entonces, que este modelo está aún en un constante perfeccionamiento.

Sería un interesante desafío para una investigación futura, que nos aportaría más información, indagar usando APOS el aprendizaje construido por los estudiantes a nivel de esquema de las funciones y sus propiedades, indicando explícitamente qué propiedades se considerarán para realizar una descomposición genética más detallada de todos los conceptos involucrados.

En relación a este punto, hemos planteado anteriormente que nuestro trabajo está enfocado al aprendizaje construido por los casos seleccionados de la derivada y sus aplicaciones al análisis cualitativo de funciones y a la modelación de crecimiento poblacional. Nuestro propósito es realizar este estudio, considerando como supuesto que los estudiantes ya han logrado un aprendizaje de las funciones y sus aplicaciones a nivel de esquema. Para tener una mejor comprensión de un esquema y percibir cómo se construye el aprendizaje de un concepto matemático, nos parece pertinente y provechoso resumir las ideas de concepción de esquema de la regla de la cadena, que investigó y definió Clark et al (1997) y que es la etapa más compleja de alcanzar por los estudiantes y que forma parte del tema central de este estudio. Aunque en nuestro trabajo, debido a lo amplio del tema de la derivada y sus aplicaciones, la investigación se orientó a la derivada y sus aplicaciones al análisis cualitativo de una función y a la modelación de problemas mediante una ecuación diferencial.

Clark et al (1997) investigaron como ya hemos anticipado la *regla de la cadena*, que afirma que :

Si g es una función diferenciable en a, y f es una función derivable en $g(a)$, entonces $h = g \circ f$ es una función diferenciable en a y

$$h'(a) = (f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Este grupo establece que para que un estudiante tenga éxito en la tarea de descomponer una función, dadas dos funciones H G, encontrar F tal que,

$$H = F \circ G$$

el o la estudiante debe tener una concepción de proceso de función y composición. (Clark et al, 1997) [20]

Estos autores proponen que, como parte de su esquema de función el estudiante debería haber desarrollado:

i) "la concepción de un proceso o un objeto de una función y
ii) la concepción de un proceso o un objeto de una composición.

Y como parte de su esquema de derivada, el estudiante:

i) ha desarrollado una concepción de diferenciación.
ii) coordina previamente los esquemas construidos de una función, de una composición de funciones y de la diferenciación, para definir la regla de la cadena. La coordinación, consiste primero en el reconocimiento de una función dada como composición de dos funciones, que es la reversión del proceso de composición de dos funciones y luego tomar sus derivadas separadamente en los dos puntos, (x para g y $g(x)$ para f) y luego multiplicarlos.
iii) reconoce y aplica la regla de la cadena a situaciones específicas" (Clark et al, 1997) (p.8).[21]

Nivel Intra-regla de la cadena

En el nivel más bajo de desarrollo la etapa Intra el estudiante tiene una colección de reglas para encontrar derivadas; incluyendo algunos casos especiales de la regla de la cadena como la regla general de la potencia y tal vez incluso la fórmula general, pero no reconocería las relaciones entre ellas.

Una observación que hacemos respecto de este análisis es que es bastante general en el sentido que no se menciona la historia cognitiva previa de los estudiantes, se ignora su recorrido cognitivo previo que es importante.

---

[20] Los objetivos de la investigación de estos autores es poder contestar las siguientes interrogantes:

(1) "¿Cómo puede un estudiante construir su conocimiento de la regla de la cadena?
(2) ¿Cuáles son los conceptos componentes que se necesitan para construir el concepto de la regla de la cadena?
(3) ¿Cómo los estudiantes reconocen y aplican la regla de la cadena en diversas situaciones matemáticas? " (ibid, p.3)

[21] Vale la pena señalar que es sólo cuando el esquema alcanza la etapa de Trans de desarrollo podemos propiamente referirnos a ella como un esquema. La razón es que en la fase de Trans la estructura subyacente se construye, la que proporciona la coherencia necesaria para identificar la colección como un esquema. Una función importante y característica de esta coherencia es su uso en decidir qué está en el ámbito el esquema y qué no está.

Nivel Inter-regla de la cadena

En la etapa de la Inter el estudiante comienza a recoger estos casos especiales y a reconocer que de alguna manera están relacionados. La colección de elementos en el esquema de regla de la cadena se está formando.

Nivel Trans-regla de la cadena

En la etapa Trans el alumno construye la estructura subyacente de la regla de la cadena. El estudiante liga la función compuesta y la diferenciación, y reconoce varias instancias de la regla de la cadena como ligada a una misma regla general a través de la composición de funciones. Los elementos en el esquema pasan a ser caracterizados esencialmente por una lista que se describe por una sola regla.

Respecto de este ejemplo, nos parece pertinente destacar que se perciben en forma clara y precisa las características de cada sub-etapa del nivel de esquema, de modo que constituye un claro ejemplo de cómo se puede modelar la construcción de otros conceptos matemáticos.

En relación a esta última afirmación, una aplicación del modelo APOS de Dubinsky, es la tesis doctoral intitulada "Evolución cognitiva del concepto de Espacio Vectorial" de Marcela Parraguez. La autora presenta la descomposición genética "hipotética" del concepto mediante un diagrama donde representa las distintas etapas que forman el modelo APOS. Es así como define a nivel de:

(1) *Acción*: el aplicar el esquema de Operación Binaria a elementos específicos de un conjunto.
(2) *Proceso*: En este nivel, aplicar el esquema de Operación Binaria a elementos cualesquiera de un conjunto.
(3) *Objeto*: Conjunto con operación binaria que satisface axiomas. Por lo tanto, es tratado como objeto el esquema de axioma. Además, menciona: Conjunto con una operación binaria, Cuerpo (conjunto con dos operaciones binarias diferentes), conjunto con una operación binaria sobre un cuerpo y conjunto con dos operaciones binarias (una sobre un cuerpo) que satisface axiomas.
(4) *Esquema*: Según las subetapas de un esquema:
    i) Intra: Objetos aislados; espacios vectoriales, proceso, acciones, esquemas.
    ii) Inter: Relaciones entre subespacios, transformaciones lineales, bases, etc.
    iii) Trans: Los esquemas pueden ser evocados cuando sean necesarios para resolver problemas. Los estudiantes están conscientes de la estructura.

Comentamos las conclusiones que a nuestro juicio nos puedan aportar información de tipo general a nuestro trabajo. No comentaremos las conclusiones que son específicas al concepto de Espacio

Vectorial, puesto que no es nuestro tema de estudio. Parraguez (2009) comenta que el proceso de análisis le ha permitido, no solo ampliar cada sub-etapa del esquema de espacio vectorial, sino dar cuenta de la evolución de dicho esquema y la no linealidad del aprendizaje de este concepto a modo de discusión. Respecto de este punto, señala que: "La no linealidad del aprendizaje se aprecia cuando los estudiantes pueden mostrar una concepción específica para algunos aspectos de un concepto y elementos de otra concepción para algún otro aspecto del mismo concepto. También pueden ir y venir entre diferentes concepciones". (p.155)

Una reflexión de la autora es buscar la forma que los profesores motiven el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes mediante una reflexión profunda de los conceptos. El camino que señala es que la descomposición genética (refinada o modificada) puede ser la base que motive esta reflexión que va más allá de la considerada por los libros de texto. Otro trabajo que utiliza APOS como modelo de cognición es el de Aneshkumar (2010) sobre la comprensión del concepto de límite de una función, concepto que en nuestro trabajo forma parte de los conocimientos previos que deben tener los estudiantes. Revisaremos la descomposición genética que establece para el concepto y sus propiedades:

(1) *Acción*: Una transformación es concebida primero como una acción, cuando se trata de una reacción a los estímulos que un individuo percibe como externa. Un estudiante requiere una expresión explícita (percibida como externa) para pensar en el límite de una función $lim_{x\to a} f(x)$ y puede hacer más que valores de sustitución de x cercanos a "a" para la variable en la expresión $f(x)$ y manipularla, se considera que tiene una comprensión a nivel de acción del límite de una función. (Ibid) (p. 43)

(2) *Proceso*: Cuando un individuo repite y reflexiona sobre una acción, puede interiorizarla en un proceso mental. Un proceso es una estructura mental que realiza la misma operación que una acción, pero totalmente en la mente del individuo. Específicamente, el individuo puede imaginar que realiza la transformación sin tener que ejecutar cada paso en forma explícita. Por ejemplo, un individuo con una comprensión de procesodel límite de una función $lim_{x\to a} f(x)$ construirá un proceso mental para valores de x cercanos a "a" y pensar en términos de entradas (inputs) de valores inespecíficos y las transformaciones de las entradas para producir resultados (outputs). (Ibid)

(3) *Objeto*: Si uno se da cuenta de un proceso como un todo, se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar en conjunto y realmente puede construir tales transformaciones (explícitamente o en la imaginación), entonces decimos que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo. Por ejemplo, para el concepto de límite de una función un individuo puede confrontar situaciones en las que requiere aplicar varias acciones y/o procesos. Estos podrían incluir pensamientos sobre una operación que toma

dos funciones y produce una nueva función, tal como,

$$lim_{v\to 4^+}\frac{4-v}{|4-v|} \quad \text{o} \quad lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sin(x)}$$

Para operar sobre un límite lateral de esta nueva función, el proceso de comprensión debe ser encapsulado y convertido en un objeto. (Ibid)

(4) *Esquema*: Un tópico matemático a menudo involucra muchas acciones, procesos y objetos que se necesitan para organizar, vincular en una estructura coherente, llamada esquema. Es coherente en el sentido que proporciona al individuo un camino de decisión, cuando se le presenta una situación matemática en particular si es esquema se aplica. Por ejemplo, la coherencia podría estar en la comprensión de que para determinar la existencia de un límite de una función $lim_{x\to a}f(x)$, debe considerarse: valores de entrada por la izquierda y por la derecha de "a", los valores de salida correspondientes y un medio para transformar elementos de entrada en elementos de salida. (Ibid)

Las reflexiones en cuanto a las explicaciones ofrecidas por APOS, se limitan a la descripción de los pensamientos de lo que una persona es capaz de hacer. No se afirma que dicho análisis describa lo que realmente sucede en la mente de un individuo, ya que es imposible de saber. Además el hecho de que un individuo posea una cierta estructura mental, no significa que la aplicará necesariamente en una situación dada. Esto depende de otros factores, por ejemplo estrategias de gestión, flexibilidad y de los estados del sistema emocional. Según este autor, el principal uso de un análisis APOS es señalar las posibles estrategias pedagógicas. El enfoque pedagógico de la teoría APOS y las hipótesis sobre enseñanza y aprendizaje es un ciclo repetitivo ACE que consiste de tres componentes: (A: Activities) actividades, (C: Classroom discusions) discusión en la sala de clases y (E: Exercises) ejercicios que se hacen fuera de la sala de clases. Este ciclo en nuestro estudio nos ha ayudado a perfeccionar el diseño de nuestros módulos de clases y laboratorios.

Las actividades, que constituyen el primer paso del ciclo, son diseñadas para fomentar el desarrollo de las estructuras mentales de los estudiantes, denominado como un análisis APOS. En la clase el profesor guía a los estudiantes para que reflexionen sobre las actividades y sus relaciones con los conceptos matemáticos que están siendo estudiados. Los estudiantes hacen esto mediante la realización de tareas matemáticas. Ellos discuten sus resultados y escuchan las explicaciones de sus compañeros o el profesor de los significados matemáticos sobre los que están trabajando. Los ejercicios de tarea son problemas estándar. Refuerzan el conocimiento obtenido en las actividades y discusiones en el aula de clases. Los estudiantes aplican este conocimiento para resolver problemas estándares relacionados con el tópico que está siendo estudiado. La implementación de este enfoque y su efectividad en ayudar a los estudiantes a

hacer construcciones mentales y aprender matemáticas ha sido reportado en varios estudios de investigación. Un resumen de los primeros trabajos se pueden encontrar en Weller et al (2003). Respecto de las conclusiones de este trabajo, el autor señala que los hallazgos de su estudio confirman que el concepto de límite de una función es uno de los conceptos que los estudiantes encuentran difícil de entender y es resultado de que muchos estudiantes no tienen las estructuras mentales adecuadas en los niveles de proceso, objeto y esquema. Además argumenta que su descomposición genética fue adecuada, sin embargo, sus reflexiones sobre el diseño de enseñanza indican que es necesario dedicar más tiempo a ayudar a los estudiantes a desarrollar las estructuras mentales a nivel de proceso, objeto y esquema. Esto significa que la enseñanza debe centrarse en:

1) Enfoques verbales y gráfico para encontrar límites de funciones.
2) Desempaquetar las estructuras que dan forma simbólica.
3) Modelos de posibles esquemas.

"Un enfoque gráfico podría facilitar el desarrollo de estructuras mentales a nivel de proceso y objeto, mientras que un enfoque sobre estructuras simbólicas ayudaría a las concepciones de objeto. Si los esquemas organizan y vinculan las acciones, procesos y objetos, deberían ser una parte de la enseñanza. El impacto de este enfoque en la enseñanza requiere más investigación". (Aneshkumar, 2010)(p.50)

Pensamos que las reflexiones globales de este autor se pueden extender a cualquier concepto matemático, no solo a límite de una función. Comentaremos ahora el trabajo de Tesis Doctoral de Carmen Azcárate intitulado: "La velocidad: Introducción al Concepto de Derivada", que desde nuestro estudio e interés consideramos que es un estudio previo al nuestro. Más aún, forma parte del esquema de conceptos previos para definir el Concepto de Derivada, considerando que los estudiantes conocen y han aprendido los conceptos de límite y continuidad.

El trabajo de Azcarate (1991) introduce el concepto de derivada de una función en tres cursos de Segundo Año de BUP (111 alumnos). Es decir, está dirigido a estudiantes que no poseen los conocimientos de límite y continuidad. Su investigación se centró en el estudio y seguimiento de los esquemas conceptuales de los estudiantes respecto de tres conceptos fundamentales relacionados con el concepto de derivada: pendiente de una recta, velocidad instantánea de un movimiento variado y el concepto de tasa instantánea de variación de una función (o valor de la función derivada en un punto). Además, incluye en su trabajo el análisis de los procedimientos utilizados por los alumnos.

La autora clasificó las respuestas de los estudiantes en los aspectos conceptuales, estableciendo *perfiles* de los estudiantes, característicos en cada momento de sus esquemas

conceptuales de cada uno de los tres conceptos en estudio. Respecto del concepto de pendiente de una recta identificó tres perfiles: geométrico, operacional y funcional.

El *perfil geométrico* corresponde al aspecto menos abstracto, más simple e intuitivo. Agrega que este perfil es más reforzado por el significado del concepto por el lenguaje cotidiano. Caracteriza a los estudiantes cuyo esquema conceptual consiste en imágenes gráficas y cuya descripción utiliza elementos propios del lenguaje geométrico, tanto descriptivo como analítico. El *perfil operativo* corresponde al quehacer habitual de los ejercicios de clases en los que se calcula la pendiente a partir de una ecuación. Caracteriza a los alumnos, cuyo esquema conceptual tiene una fijación numérica, de modo que en una fórmula del tipo función afin: $y = a?x + b$, asocian con el coeficiente "a" el término de pendiente. El *perfil funcional* está relacionado con el significado de pendiente como variación de la función por unidad. Es el menos intuitivo, más abstracto y más complejo, caracteriza a los alumnos cuyo esquema conceptual asocia al término ?pendiente? una relación de dependencia lineal entre los incrementos de las variables independiente y dependiente de la función, así como la imagen gráfica de una recta en la que destacan dichos incrementos. En relación de los conceptos de velocidad instantánea y de tasa instantánea de una función se han determinado 3 tipos de esquemas conceptuales de los alumnos que la autora denomina: primitivo, aproximación y límite.

El *perfil primitivo* corresponde a alumnos que no han construido un esquema conceptual específico de las nociones de velocidad instantánea o de tasa instantánea de variación de una función. Estos estudiantes tienen un esquema conceptual de velocidad en general, que corresponde a la fórmula verbal (física): "La velocidad es igual al espacio partido por el tiempo". Según Azcarate (1991) muy estable y coherente que no distingue entre velocidad constante, velocidad media y velocidad en un punto.

El *perfil aproximación* corresponde a alumnos que, en el caso del concepto de velocidad instantánea, han generalizado su esquema conceptual de la noción de velocidad media a la noción de velocidad media entre dos puntos cercanos, que les sirve para describir en forma aproximada la velocidad en un punto dado. En el caso de la descripción puntual de una función han realizado una transposición a partir de sus esquemas conceptuales de velocidad media y han generado un esquema conceptual de tasa media de variación. El *perfil de límite* corresponde a alumnos que durante la etapa de aprendizaje han construido esquemas conceptuales tanto del concepto de velocidad instantánea como de tasa instantánea de variación de una función en un punto. De modo que estos estudiantes interpretan, describen y representan situaciones de variación instantánea de una función dada mediante su gráfica. Entre las conclusiones de las autores destacamos que:

(1) El estudio de la evolución de los perfiles de los alumnos durante la fase de aprendizaje evidencia que ha habido un cambio y una evolución de progreso importante en los

esquemas conceptuales de los alumnos, puesto que, aprecia un desplazamiento desde un gran número de *perfiles primitivo* en la situación inicial hasta un gran número de *perfiles límite* en la situación final, pasando también por una mayoría de *perfiles aproximación* durante la fase de aprendizaje.

(2) Ha observado que los alumnos tienden a utilizar un solo lenguaje, ya sea verbal, simbólico o gráfico y que les cuesta pasar de uno a otro. Esto implica una cohesión frágil en el esquema conceptual que pone de manifiesto la dificultad que existe en la asimilación de todos los aspectos del concepto. (Azcarate, 1991)

De los trabajos que hemos reseñado, podemos percibir que el concepto de la derivada ha sido el centro de varias investigaciones, como objeto matemático y como concepto de enseñanza y aprendizaje. Además hemos incluido a modo de ilustración otros objetos matemáticos que han sido analizados a través del modelo APOS para estudiar su comprensión por parte de los estudiantes y otros marcos teóricos recientes sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.

Finalizamos nuestra revisión bibliográfica, evidenciando la relación que existe entre el modelo APOS y los modelos cognitivos que tienen relación con el uso que Piaget (1971) da al término esquema y que se relaciona a su vez con los modelos de imagen del concepto de Tall y Vinner (Asiala et al, 1996). De aquí viene la conexión del modelo de Tall y Vinner con el modelo APOS de Dubinsky. Estos autores postulan que el estudiante adquiere conceptos cuando construye una *imagen del concepto* (Tall y Vinner, 1981) (p.152). [22].

La imagen del concepto involucra las distintas relaciones del concepto asociadas con otras estructuras del conocimiento, ejemplares, prototipos y procesos. Es decir, la *imagen del concepto* es una estructura cognitiva general construida por un estudiante, sin embargo, en distintos contextos, aparecen distintas componentes de esta imagen.

Como se dijo anteriormente, estas porciones de la imagen del concepto constituyen la imagen del concepto evocada, que es un subconjunto de la imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981).[23]

Esta distinción entre *imagen del concepto* e *imagen del concepto evocada* permite explicar cómo los estudiantes pueden responder de manera inconsistente, entregando evidencia de

---

[22] *Llamaremos "imagen del concepto evocado" a la porción de la imagen del concepto que se encuentra activa en un momento determinado, y esta imagen se compone de toda la estructura cognitiva de la mente del individuo, que está asociada a un concepto determinado, es decir, la recolección de imágenes mentales, representaciones y propiedades relacionadas que se atribuyen al concepto.*

[23] Obviamente una *imagen del concepto* difiere de una definición formal del concepto en caso que exista, puesto que la imagen de concepto ejemplifica la forma en que un concepto específico puede ser observado y construido por un individuo.

comprensión algunas veces y careciendo de comprensión otras. Cualquier imagen del concepto tiene una definición del concepto relacionada por un estudiante para especificar el concepto. [24]

Dubinsky (1996) relaciona el concepto de esquema con el de imagen del concepto, aseverando que ambos sirven para el mismo propósito, es decir organizar y estructurar las comprensiones obtenidas en relación a un concepto. Estas reflexiones de Dubinsky tienen similitud con la descripción de Tall y Vinner de la imagen del concepto evocada, que como ya hemos visto se relacionan con porciones de una imagen de concepto producido por un estímulo particular.

En este contexto, Tall y Vinner afirman que: "Los distintos estímulos pueden activar diferentes partes de la imagen del concepto, desarrollándolos de una manera que no necesita ser totalmente coherente" (Tall y Vinner, 1981) (p.152). Por tanto, se puede percibir que existe una gran conexión entre esquemas e imágenes del concepto.

Por otra parte, el encapsulamiento de un proceso es casi sinónimo del proceso de reificación (o cosificación) de Sfard. (Meel, 2003). La autora define los fundamentos de las matemáticas como dos entes, concepto y concepción. [25]

Estas dos definiciones se relacionan con el análisis de Vinner sobre la definición del concepto formal y la descripción de una imagen del concepto.

Sfard (1994) expone que los conceptos matemáticos están arraigados en una dualidad de concepción, por tanto se pueden visualizar como estáticos, instantáneos e integradores-estructurales o dinámicos, secuenciales y detallados- operacionales.

Una *concepción operacional* se relaciona con los procesos, algoritmos y acciones que ocurren a nivel físico o mental, y una *concepción estructural* es más abstracta, más integrada y menos detallada que una concepción operacional.

En particular, una concepción estructural es en cierta forma similar a la capacidad de ver las construcciones matemáticas avanzadas que no son entes físicos sino organizaciones mentales abstractas que pueden percibirse solo en el ojo de la mente de cada persona. [26]

---

[24] Sin embargo, esta definición del concepto puede diferir de la definición formal de un concepto, debido a que la definición del concepto es una descripción del individuo mismo. La construcción de estas imágenes del concepto suceden cuando el estudiante encuentra nueva información dentro de su estructura cognitiva presente.

[25] Un concepto es una idea que se define matemáticamente, mientras que una concepción de él involucra un grupo de representaciones y vínculos internos del estudiante, causados por el concepto.

[26] Sfard expone que las concepciones estructurales reciben el apoyo de las imágenes mentales compactas e integradoras en lugar de representaciones verbales que requiere un proceso secuencial.

Estas imágenes mentales permiten al estudiante hacer las ideas abstractas más tangibles y las considera casi como entes físicos en las que las operaciones relacionadas con ellas ocurren completamente en los ojos de la mente. (Sfard, 1994)[27]

La autora usó un análisis histórico de la formación del concepto para identificar tres etapas distintas durante el proceso, la generación de un proceso a partir de objetos ya familiares, el reconocimiento emergente de los procesos como entidades autónomas y la capacidad de concebir la nueva entidad como una estructura sintetizada similar a un objeto. Estas tres etapas se clasifican como interiorización, [28] condensación (Sfard, 1991) (p.20)[29] y reificación,[30] respectivamente.

Entonces, una vez que se ha reificado un proceso, éste produce un objeto en el que puede actuar un proceso de un nivel más elevado. En este momento, el proceso se interioriza y se repite todo el ciclo. Como resultado se tiene el proceso trifásico de interiorización, condensación y reificación es generalmente jerárquico y repetitivo.

Resumiendo todas estas reflexiones, el modelo cognitivo APOS de Dubinsky se conecta con *la dualidad operacional y estructural* de Sfard con el nivel de *objeto* que corresponde a *un proceso encapsulado*. En efecto, Sfard y Linchevsky (1991) hablan de este vínculo cuando califican a la teoría APOS de facilitadora, de un modelo muy cercano a su dualidad proceso-objeto de conceptos matemáticos. En particular, afirman que el nexo principal entre estos dos modelos es la descripción de Piaget sobre la abstracción reflexiva.

Por lo demás el término reificación y el de encapsulamiento de Dubinsky tienen significados similares, debido a que ambos surgen de la descripción de Piaget sobre los orígenes operacionales de las nociones matemáticas (Sfard, 1994). [31] Afirma que tanto su trabajo como el de Dubinsky elaboran más aún las ideas originales de Piaget y que su caracterización de una dicotomía entre las concepciones operacionales y estructurales proporciona una conjetura más amplia para la dualidad del pensamiento matemático.

---

[27] Además dicha visualización permite al estudiante desarrollar una visión global del concepto y por lo tanto dejarle realizar observaciones desde varias perspectivas y al mismo tiempo que el estudiante conserve la identidad de una relación dentro del concepto. La comprensión llega más allá de una capacidad de resolver problemas o demostrar teoremas como lo plantea en la referencia.

[28] La *interiorización* se presenta cuando un estudiante se familiariza con los procesos, los cuales finalmente pueden reificarse en un objeto matemático. La interiorización en este contexto es similar al mecanismo descrito por Piaget (1971) (p.14), que comprende esencialmente un cambio de las concepciones con base en las operaciones físicas hasta realizar operaciones con base en las representaciones mentales de los procesos.

[29] " En esta etapa la persona se vuelve más capaz de pensar sobre un determinado proceso en su conjunto, sin necesidad de entrar en detalles. Permite al estudiante concebir una secuencia como un solo proceso y relacionar su input y output sin mencionar las etapas que intervienen en el hecho".

[30] Se define como un cambio ontológico - una habilidad repentina para ver algo familiar en una luz totalmente nueva. Así, mientras la interiorización y la condensación son graduales, cuantitativos y no los cambios cualitativos, la reificación es un salto instantáneo.

[31] Según Sfard *el trabajo pionero en este campo lo realizó Piaget*, quien escribió en su libro sobre epistemología genética (1970, p.16) "La abstracción matemática aparece no desde el objeto en el que actúa, sino desde la acción en sí misma". Nos parece que esta es la base de la abstracción lógica matemática.

Una experiencia relevante para nuestro interés que se señala en Dubinsky (1991) es que en el diseño de la enseñanza han encontrado que las actividades computacionales son una fuente importante de experiencia para los estudiantes, que es muy útil para fomentar la abstracción reflexiva. Plantean como ejemplo que si un estudiante implementa un proceso computacionalmente, usando un software que no introduce las distracciones de la programación (tales como sintaxis compleja, construcciones que no se relacionan con las ideas matemáticas, etc.) entonces los estudiantes, como resultado de su trabajo computacional, tienden a interiorizar el proceso. Si ese mismo proceso una vez implementado, se puede tratar en el ordenador como un objeto en el que se pueden realizar operaciones, entonces es probable que el estudiante encapsule el proceso.

Meel (2003) realiza una reflexión importante, en la que compara entre el Modelo sobre el crecimiento de la comprensión Matemática de Pirie y Kieren (1991a) y la Teoría APOS. Estos investigadores están de acuerdo con la conclusión de Schoenfeld de la comprensión "como un elemento orgánico inestable y retrogresivo, y consideraron a la comprensión como proceso de crecimiento de la comprensión como un proceso de crecimiento interminable, completo, dinámico y estratificado pero no lineal. Rechazan el concepto del crecimiento de la comprensión como una función monótona creciente y la consideran como un proceso dinámico de organización y reorganización". (Meel, 2003)(p.224)

Por otro lado, Dubinsky (1991) basa su teoría, como hemos comentado anteriormente, en los trabajos de Piaget que explica que la abstracción reflexiva es la clave para el desarrollo cognitivo de los conceptos lógico-matemáticos. La comprensión es un proceso interminable de construcción de esquemas iterativos, mediante la abstracción reflexiva. (Ibid) Meel (2003) (p.270) señala que: "aunque exiten variados marcos teóricos sobre la comprensión matemática y al parecer tanto el modelo de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática como el modelo APOS de Dubinsky incluyen las características más relevantes de los mismos, Pirie y Kieren (1989) plantean la comprensión como un proceso conectivo, de varios estratos, no lineal y recursivo con características fractales". Agrega que desde este enfoque el desarrollo de la comprensión se relaciona con la construcción y la reorganización de las estructuras de conocimiento de la persona.

El movimiento entre los niveles de comprensión es producto de la generalización y va más allá del nivel previo y la reconstrucción de una comprensión de estratos más bajos. Dicho proceso se evoca con lo que Pirie y Kieren denominan folding back[32] . La construcción de

[32]Foldig back (vuelta atrás) Es un proceso dinámico,que se genera cuando el individuo se encuentra con un problema cuya solución no es inmediata, tiene la necesidad de volver a doblar para llegar a un nivel más interno para extender la comprensión actual e inadecuada de la persona. Este proceso de volver a doblar provoca la reexaminación de la comprensión de un estrato en una forma diferente, a partir de las acciones que aparecieron originalmente a cuando se trabajó dicho nivel.

la comprensión permite la examinación de las conexiones cimentadas entre las imágenes y el concepto, la detección de las conexiones faltantes, incorrectas o parciales y la reorganización de estas conexiones en una estructura estable y consistente. Meel (2003) Análogamente, Dubinsky afirma que la comprensión debe entrelazarse en el desarrollo del esquema, por lo que requiere de varias construcciones especificadas por la abstracción reflexiva. Desde este enfoque el desarrollo de la comprensión es un proceso continuo, aunque no lineal, de los esquemas de construcción de mayor elaboración que agrupan las acciones en un proceso y este proceso se encapsula en objetos, los cuales conducen a nuevas acciones. El esquema organiza estas acciones, procesos objetos y esquemas subordinados, en una estructura que va más allá de los componentes y al mismo tiempo proporciona un significado de un concepto. (Ibid) Finalmente, señalamos que Meel (2003) opina que el modelo de crecimiento de la comprensión de Pirie y Kieren, la teoría APOS de Dubinsky y otros marcos teóricos contemporáneos sobre la comprensión, son visiones distintas, pero compatibles respecto al desarrollo de la comprensión. Cada marco se ha desarrollado para proporcionar a los investigadores y profesores observar la comprensión como un proceso continuo en el cual la interpretación se sugiere de acuerdo con las estructuras de conocimiento personal del estudiante, la dinámica social de la situación de aprendizaje en la que se presenta y las restricciones de la exteriorización de de dicha comprensión debido a la naturaleza del medio ambiente.

2.1.3. Elección de un Modelo Cognitivo

Después de realizar un análisis de los distintos modelos, sus orígenes e interconexiones, los trabajos de los autores que hemos considerado son concluyentes respecto a que los modelos de Dubinsky, Tall y Vinner y el de Sfard sobre la comprensión de objetos matemáticos, están estrechamente relacionados. Sin embargo, al momento de decidir qué modelo cognitivo es más cercano a la intervención didáctica usada en el aula y laboratorios computacionales, la implementación, evaluación e instrucción, la doctorando se inclinó por aplicar como modelo de cognición la teoría APOS, por su claridad en la diferenciación de las etapas y por su naturaleza algorítmica.

Adicionalmente, esta teoría fue usada por su autor y equipo para investigar el aprendizaje de sus estudiantes trabajando con álgebra abstracta, funciones y cálculo, matemáticas discretas y teoría elemental de los números (Dubinsky et al, 2001).

La aplicación de esta teoría implica realizar un ciclo de investigación, que comienza con un análisis teórico de los elementos percibidos como necesarios para la comprensión conceptual, el diseño de actividades e instrucciones para guiar a los estudiantes a que realicen las construcciones

requeridas, la observación y evaluación de las construcciones del estudiante (Asiala et al, 1996), etapas que hemos realizado también en nuestra investigación.

Como se mencionó al inicio de esta sección, la construcción de la comprensión mediante la teoría APOS, comprende varias etapas manejadas por impulsos externos que después se internalizan y se reflexiona sobre ellas[33] para finalmente organizarse. El acto de la reflexionar es esencial para APOS, es la atención consciente del estudiante para las operaciones que está realizando.

Esta reflexión tiene una función integral en el aprendizaje y en el conocimiento, puesto que se proyecta más allá de la observación en la ejecución de alguna técnica y algoritmo particular (Asiala et al, 1996). Reflexionar sobre un proceso le permite al estudiante tomar conciencia de la forma en que trabajan los procedimientos, valorar un resultado sin realizar las operaciones físicamente, la capacidad de analizar, manipular algoritmos, la capacidad de observar la relación y organizar la experiencia.

Esta acción de reflexionar es una parte integral de la *abstracción reflexiva* que consta de propiedades para expresar en papel, mediante la atención consciente de las acciones, la interiorización de dichas acciones en procesos, el encapsulamiento de los procesos en objetos y la organización que relaciona las acciones, procesos, objetos en entidades mentales llamadas esquemas.

En particular reflexionar sobre un esquema con el fin de transformarlo amplía la comprensión del estudiante originando medios adicionales para construir un objeto. En resumen APOS permite la construcción de objetos desde dos fuentes diferentes, el encapsulamiento de los procesos y la reflexión sobre los esquemas.

Según Dubinsky, en el estudio de cómo los estudiantes pueden aprender un concepto matemático específico, un ingrediente esencial que el investigador debe proporcionar es un análisis del concepto en términos de estos constructos específicos, el resultado es un modelo de cognición llamado descomposición genética del concepto.

Una *descomposición genética* de un concepto deriva de tres fuentes: los datos psicológicos[34], las ideas de Piaget sobre la formación del concepto y la comprensión del concepto (Dubinsky, 1991). [35]

---

[33] Recordemos que reflexionar significa que el individuo es capaz de describir un proceso e incluso revertir los pasos de la transformación sin necesitar de un estímulo externo.

[34] Los *datos psicológicos* se obtienen a partir de las observaciones de los estudiantes en medio del aprendizaje de un concepto.

[35] *Las ideas de Piaget* sobre algunas mejoras importantes influyeron sobre la construcción y la revisión de la descomposición genética del modelo. Estos cambios provienen de las reflexiones en los experimentos del aprendizaje para producir un modelo más representativo.

Finalmente, las *descripciones matemáticas de un concepto* son necesarias, puesto que la descomposición genética debe tener sentido desde un punto de vista matemático.

Una descomposición genética de un concepto es una descripción idealizada de las representaciones, relaciones, objetos, procesos y acciones matemáticas que, casi siempre, se atribuyen a tal concepto. Este modelo proporciona un camino posible para el estudio de cómo los estudiantes forman conceptos. Sin embargo, puede no ser representativa de la trayectoria que tengan todos los estudiantes (Dubinsky, 1991).

Nuestra investigación incluye como punto de orientación la publicación "Estándares para un Curso de Cálculo", que son el resultado de las investigaciones provenientes del Proyecto MECESUP UCH002 del Ministerio de Educación de Chile - Universidad de Chile, denominado "Innovaciones Programáticas y Metodológicas en la Enseñanza de la Física, Matemáticas y Estadística".

De esta investigación surgió la publicación de los estándares de calidad señalada para poner en práctica en las facultades, que formaron parte de este proyecto y que marcan un nivel de profundidad de los contenidos deseables en matemáticas para los estudiantes de las carreras de la Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas.

El modelo cognitivo que aplicaremos lo proporciona la teoría APOS de Dubinsky, que nos permitirá modelizar las construcciones mentales realizadas por los estudiantes en el aprendizaje de la derivada y sus aplicaciones.

Exponemos ahora la fundamentación Biológica del Modelo Cognitivo APOS presentada por Tall.

2.1.4. Fundamentos Biológicos de la Teoría APOS

Los fundamentos biológicos del modelo APOS son una respuesta de Tall (1999) a la presentación de Ed Dubinsky en un foro de investigación sobre la teoría APOS, como una perspectiva teórica en la investigación de la enseñanza en matemáticas.

Los fundamentos biológicos revelan estructuras cognitivas de reconocimientos de objetos y de análisis. Para explicar la incidencia de la descomposición genética en los materiales didácticos diseñados nos referimos a los módulos de clases y a los laboratorios computacionales.

Según Tall (1999)(p.111) el trabajo de Dubinsky y su equipo se ha centrado en estudios de las matemáticas de nivel superior[36], desarrollando prácticas adecuadas de trabajo[37] y secuencias de aprendizaje[38] en una amplia gama de áreas especificas de las matemáticas.[39]

Tall afirma que: "La teoría APOS parece tener una profunda estructura biológica subyacente". (Ibid)

La Figura 2.1 muestra un modelo esquemático de tres etapas del desarrollo del cerebro como resultado de estímulos sucesivos.

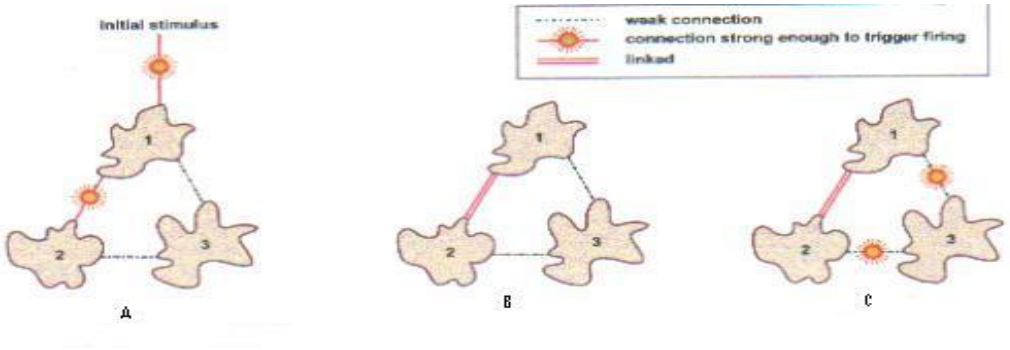


FIGURA 2.1. Memorias en el cerebro (Carter, 1999)(p.160).

El estado A simula un estímulo externo que afecta a un grupo neuronal 1, que es lo suficientemente intenso para estimular a un grupo 2, pero no a un grupo 3.

Este estímulo provoca un enlace entre los grupos 1 y 2, llegando a ser sensible por un periodo de horas o días, por esto comúnmente recordamos eventos recientes. Si la conexión se reactiva resulta más fácil de estimular hasta alcanzar un estado B, donde cualquier excitación del grupo 1 también estimula al grupo 2. La potenciación a largo plazo de las conexiones neuronales construye nuevas estructuras.

La fuerza combinada de los grupos 1 y 2 puede estimular al grupo 3 y así sucesivamente. De esta forma un estímulo externo puede causar un estímulo entre dos estados que inicialmente se percibían como independientes y que luego se unieron para formar parte en conjunto grupos

[36] Estudios universitarios.
[37] Por ejemplo aprendizaje cooperativo.
[38] Descomposición Genética.
[39] Matemática discreta, lógica, álgebra lineal, teoría de grupos.

neuronales más complejos y pueden extenderse a situaciones más complejas. Luego, el modelo Acción-Proceso-Objeto- Esquema tiene un sustento biológico natural.

Como sabemos, la teoría APOS comienza con las Acciones que se mueven a través de Procesos, que son encapsulados en Objetos y éstos son integrados en los Esquemas. Esto sugiere una primacía de la Acción sobre el Objeto. Es claro que las acciones cognitivas son necesarias para la construcción de objetos cognitivos. Según Tall, esta es una fortaleza de APOS, en que las acciones y procesos son acciones o procesos (conscientes o inconscientes) no solamente matemáticos (Tall, 1999).

Tal como mencionamos en el capítulo anterior, la etapa del modelo APOS que utiliza la tríada de la teoría de Piaget y García (1983) es el concepto de Esquema, que en el modelo APOS proviene del concepto de Objeto descrito a su vez como un *Proceso encapsulado*. De esta forma se mantiene la primacía de cada etapa en la secuencia de APOS.

La teoría APOS incluso formula el concepto de *Objeto Permanente*, que surge según Dubinsky et al (1988), a través del encapsulamiento del Proceso de realizar transformaciones en el espacio que no destruyen al objeto físico. Así, el objeto mental que permanece en la mente es creado por una acción física o perceptual de un objeto exterior, para mantener la primacía del Proceso sobre el Objeto.

La discusión anterior de estos autores lleva a una rígida estrategia de la secuencia, Acción-Proceso-Objeto-Esquema a cada plan de estudios, incluso el programa de estudios de APOS tiene subsecuencias de la construcción de los objetos.

Desde esta perspectiva, los Módulos de Clases y los Laboratorios Computacionales tienen por objetivo reactivar el primer estímulo que se genera de la discusión en la clase misma, la percepción del concepto de derivada (ACCIÓN); y una segunda reactivación del estímulo a través de las actividades grupales diseñadas en cada módulo y laboratorios computacionales. Entonces la misma sucesión de diagramas presentadas por Carter podría representar una relación entre el concepto y sus propiedades, de modo de ayudar al estudiante a construir un aprendizaje efectivo.[40]

2.2. El Aprendizaje Matemático a través de Software

En este apartado exponemos y comentamos la revisión del estado del arte sobre Entornos Computacionales y Educación Matemática. Comentaremos y expondremos las ideas relacionadas con nuestro trabajo con el del realizado por Codes y Sierra (2005) que describen los dos marcos teóricos principales y que determinan el paradigma en que se encuadran y desarrollan las diferentes investigaciones que tiene como objetivo mejorar la enseñanza y el aprendizaje en

[40] Sistema más complejo de propiedades y conexiones.

matemáticas. Además incluimos la revisión realizada por Ferrara et al (2006), quienes realizan una detallada exposición sobre los distintos usos y roles que los investigadores le dan al uso de la tecnología.

El avance tecnológico incide de manera directa sobre nuestros estudiantes creando en ellos nuevos estímulos, prefiriendo incorporar la información a sus mentes, a través de videos o de una pantalla de ordenador. En Didáctica de las Matemáticas existen varias investigaciones en las que se introducen los entornos computacionales, se analizan las ventajas que estos ofrecen, sin dejar de lado los obtáculos adicionales que podrían producirse.

De acuerdo a Codes y Sierra (2005), existen dos marcos teóricos principales que determinan el paradigma en el que se desarrollan estas investigaciones: el constructivismo y el instrumental. Ambos coinciden en que el objetivo es mejorar la enseñanza y el aprendizaje de distintos temas de matemáticas, difieren en la forma de realizar este mejoramiento. El punto de discrepancia entre ambos enfoques es el valor dado al trabajo técnico. Bajo la perspectiva instrumental, se piensa que la forma en que interactuamos con los objetos matemáticos está determinada y expresada a través de tareas y técnicas que le dan forma y valor, y del discurso técnico y teórico del medio. Por esta razón, este enfoque se apoya en la teoría antropológica de Chevallard, que permite integrar la dimensión institucional y defiende el rol de las técnicas y los instrumentos matemáticos como mediadores del conocimiento matemático.

La perspectiva constructivista concentra su atención en el aspecto "cognitivo del aprendizaje" y no le da el mismo valor al trabajo técnico, que está relacionado con la automatización de tareas y a veces a la falta de comprensión. La teoría antropológica afirma que el conocimiento avanza con la automatización de los trabajos y técnicas, mientras que el enfoque constructivista observa con recelo los automatismos que puedan ocultar una falta de comprensión y postula que el conocimiento matemático se forja desarrollando destrazas cognitivas como la interiorización, abstracción, etc. Sin embargo, ambos paradigmas tienen en común el interés por mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y además utilizan la noción de esquema introducido por Piaget. Una posición conciliadora respecto del uso de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas es la de Buchberger (2003) que propone el principio de caja-blanca versus caja-negra, que establece un uso mesurado que depende de la fase de aprendizaje en la que se encuentre el tópico matemático que queremos ilustrar mediante un ordenador.

En este modelo, el tópico matemático que se enseña pasa por dos etapas, la etapa caja-blanca y la de la caja- negra. En la etapa caja-blanca el tópico matemático es nuevo para el alumno y no debe usarse el ordenador para aquellos algoritmos involucrados directamente. En la etapa caja negra, el alumno ha superado la etapa de aprendizaje de este concepto y puede utilizar el ordenador para ejecutar el algoritmo relacionado con el concepto ya aprendido. En la propuesta

de este autor, el uso del ordenador toma una posición intermedia en el sentido que no rechaza, ni se asume sin restricciones, sino se emplea en mayor o menor grado dependiendo de la fase de aprendizaje en que se sitúe el concepto matemático. Las restricciones en cada fase deben ser controladas por el profesor para facilitar la interiorización de los conceptos que se quieren transmitir. (Codes y Sierra, 2005)(p. 9).

Cabe hacer notar que nuestro trabajo se enmarca en este principio intermedio de caja-blanca y caja-negra, donde el concepto matemático es situado en cada fase de acuerdo a la descomposición genética realizada según APOS y el progreso del estudiante es función del profesor facilitar el uso de la tecnología e interiorización del concepto. Diversos autores comparten la idea de utilizar el ordenador en forma controlada, entre ellos Dana-Picard et al (2003). Sostienen que el estudiante debe utilizar comandos de bajo nivel para fomentar la creatividad; cuando se ha superado la comprensión del concepto en cuestión, se pueden usar comandos de alto nivel para realizar los cálculos que hayan sido interiorizados. El trabajo presentado en esta tesis coincide con esta idea de comenzar con los comandos básicos de sintaxis que los autores denominan de bajo nivel y en la medida que el estudiante vaya interiorizando el lenguaje, vamos incorporando en forma graduada actividades de pensamiento matemático avanzado. De hecho realizamos una Descomposición Genética de los laboratorios que aplicamos. Resumiendo el trabajo de estos autores, exponemos su propuesta respecto al entorno computacional como una herramienta de la que hay que considerar sus ventajas para utilizarlas y sus inconvenientes para evitarlos. (Codes y Sierra, 2005) (p.11)

(1) Proporcionar un entorno que interese a los estudiantes.
(2) A pesar de las dificultades intrínsecas del uso de una herramienta informática no debe ser un nuevo obstáculo difícil de superar.
(3) Favorecer la visualización y la interpretación de las representaciones gráficas y geométricas proporcionando las condiciones necesarias para que el estudiante maneje distintos registros: analítico, geométrico y gráfico.
(4) Contribuir a la experimentación y liberar al estudiante de los cálculos tediosos y de los errores involucrados en ellos.
(5) Introducir un entorno de trabajo actual y contribuir a que sea familiar para el estudiante, puesto que vivimos en una sociedad en los que los ordenadores forman parte de nuestro entorno diario.

Reflexionando al respecto, estamos conscientes y compartimos estas ideas que se tornan en ventajas. Nuestro trabajo está orientado a poner en práctica y utilizar estos beneficios que forman parte de nuestra motivación y búsqueda en aplicar metodologías que permitan mejorar

la práctica educativa y por tanto incentivar a nuestros estudiantes y mejorar sus rendimientos en las asignaturas de matemáticas.

Ferrara et al (2006) exponen que un problema global de la investigación en educación es cómo dirigimos el uso del ordenador en la educación matemática del futuro. Ellos plantean algunas preguntas en este contexto desde el ámbito del álgebra:

(1) ¿De qué manera el uso de la tecnología tiende a redefinir el tema de expresiones y variables en la escuela?
(2) ¿Es el rol del currículo del álgebra elemental que debe cambiar como consecuencia de la disponibilidad de las nuevas tecnologías?
(3) ¿Cómo podría la investigación de expresiones y variables con tecnología informar el diseño de la tecnología?
(4) ¿Cuáles son las áreas más urgentes en la investigación de expresiones y variables con tecnología que pueden apoyar la enseñanza del álgebra en las escuelas?

Estos autores han recopilado los estudios realizados por investigadores del PME, en relación al uso de la tecnología con respecto a variables y expresiones, la noción algebraica de función y conceptos del cálculo diferencial e integral. De este estudio nos interesa conocer el estado del arte en el estudio de las funciones y cálculo diferencial respecto del uso de tecnología.

Estos resultados constituyen un buen referente para nuestra investigación, puesto que el investigador, en su rol de profesor, ha utilizado el recurso tecnológico como uno de los materiales didácticos para mejorar y transformar la práctica educativa.

Además, queremos indagar en qué medida la tecnología es una ayuda en la construcción del aprendizaje de la derivada y algunas aplicaciones de una muestra de cuatro estudiantes seleccionados para tal propósito.

2.2.1. La Tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las funciones

El currículo básico de la enseñanza del álgebra se centra en la resolución de ecuaciones en una variable o incógnita, dada en forma simbólica[41]. Este tema va aumentando su complejidad cuando en cursos posteriores interesa encontrar el valor de una o más incógnitas. La simbología se va *encapsulando* e interesa no solo un valor, sino una variable o parámetro que representa un conjunto de valores en un dominio o codominio. Este hilo conduce al estudio de las funciones y sus gráficos que por muchos autores es considerado como el precursor del cálculo.

[41] Es decir, mediante una fórmula.

Sabemos que existen tres sistemas para representar una función [42] y muchos de los esfuerzos en el aprendizaje están orientados de modo que los estudiantes puedan asimilar estos tres tipos de representación en forma significativa y coherente como un todo. Existe por supuesto una cuarta representación, la verbal, asociada antiguamente al papel y lápiz más que a la tecnología que aquí es nuestro objetivo (Ferrara et al, 2006).

De las revisiones realizadas en los PME de las tres últimas décadas, los autores concluyen que: "Se identifican tres aproximaciones diferentes frente a la tarea de analizar y difundir el cómo impacta la tecnología en el proceso de asimilación:

i) Una de las estrategias ha sido investigar el uso de la tecnología como un medio de poner énfasis en un tipo de representación, simplificando quizás los otros dos.
ii) Un segundo enfoque es diametralmente opuesto; se ha intentado usar la tecnología para apoyar conexiones simultáneas entre varios sistemas de representación.
iii) Finalmente, un tercer enfoque ha tratado de considerar cómo el estudiante usa la herramienta en sí teniendo en cuenta un contexto más amplio. Es decir, es posible usar la tecnología como integradora y como instrumento o mediador" (Ferrara et al, 2006) (p.247).

Como la revisión realizada por estos autores sobre el uso de la tecnología en los PME es extensa, citaremos aquellos trabajos, que ilustren los conceptos que nos interesan para nuestra investigación, comenzando por las representaciones de una función.

2.2.1.1. *Uso de la tecnología como simplificadora*

Moreira (2002) describe las actividades de un grupo pequeño de estudiantes participantes[43] en un proyecto curricular, que tiene por objetivo desarrollar las *competencias democráticas* [44] en el contexto de educación matemática. Ellos usan Excel para trabajar problemas relacionados con funciones (gráficos y cálculos).

En este estudio el uso de la tecnología está orientada en dos direcciones: La creación de un gráfico claro y bien presentado de la función y evitar cálculos engorrosos. Los estudiantes verifican afirmaciones sobre el tamaño de la población de ballenas involucrada en el problema. La potencialidad del ordenador es demostrada en el trabajo de estos estudiantes, quienes son capaces de verificar afirmaciones sobre la población de ballenas.

---

[42] Gráfica, algebraica y mediante una tabla de observaciones.

[43] Los alumnos que forman parte del proyecto pertenecen a un curso de Primer Año de Licenciatura en Gestión.

[44] Se refiere a la realización de profundos cambios en los diseños curriculares, que actualmente es preocupación en los ámbitos educativos a nivel mundial, donde una de las interrogantes es buscar una nuevo concepto de la evaluación del aprendizaje (Becerra y Moya, 2008).

Otros investigadores han incursionado en el uso de aulas con conectividad. Kaput y Hegedus (2002) proporcionan ejemplos de trabajo con esta modalidad, donde los estudiantes discuten representaciones de familias de funciones. [45] Ellos examinaron como la conectividad tecnológica genera una identidad personal como un recurso para centrar la atención y generar el compromiso con el trabajo. Además informaron sobre la sólida conexión que existe entre su trabajo y el álgebra formal (Hegedus y Kaput, 2003).

Usando un enfoque de pre-test y post-test, estos autores comunican los beneficios que se logran en el aprendizaje mediante el sotware SimCalc, que permite un acercamiento inicial a una función, a través de una simulación virtual de todas las situaciones posibles, normalmente modelos de fenómenos transientes.[46]

Por otra parte, el uso de un enfoque kinestésico conduce a la perspectiva de modelizar funciones miradas desde la óptica como un medio para explorar y analizar el mundo real o simular comportamientos (Ferrara et al, 2006).

Esta función de la tecnología como *simplificadora* es una de las líneas de investigación del PME que parece haber hecho progresos considerables desde esta perspectiva. Fue fundamentalmente utilizada para verificar procedimientos con el propósito de acercarnos a la enseñanza de las funciones, a través de nuevas representaciones, de la kinestesia[47], usando la tecnología para modelar el comportamiento, tema en el que estos autores están directamente comprometidos (Ferrara et al, 2006).

2.2.1.2. *Uso de la tecnología como integradora*

A menudo las funciones se introducen en los libros de texto mediante una definición estática.[48] Una potencialidad de la tecnología es ofrecer el acceso a un variado tipo de representaciones de una función. Esta potencialidad ha sido ampliamente explotada en las investigaciones del PME en las últimas tres décadas.

Algunos investigadores se han centrado sobre los tipos de traducción entre sistemas de representación, otros se han centrado en las nuevas formas que la tecnología permite a los estudiantes manipular una función principalmente como objeto gráfico.

Schwarz y Bruckheimer (1988) consideraron la transferencia de conocimientos entre las representaciones de las funciones en un entorno computarizado. Estos autores observaron y

---

[45] Usaron calculadoras TI-83 (Texas Instrument 83)

[46] Término que se usa para indicar que un fenómeno depende del tiempo.

[47] " El uso de los enfoques kinestésicos conduce a una perspectiva del modelado de funciones, en el sentido que son miradas como un medio para explorar o analizar el mundo real o simular el comportamiento", Ibid.

[48] Estática, en el sentido que su aproximación surge de la tecnología del lápiz y papel, con el cual la definición no puede ser vista directamente como un potencial de cálculo dinámico.

ensayaron con niños de noveno grado de una escuela secundaria, a quienes se les solicitó usar TRM[49] para buscar soluciones de un problema que involucra funciones.

Un grupo comenzó la búsqueda de la solución mediante representaciones gráficas antes de utilizar el tipo de representación algebraica. A otro, se le pidió que enfocaran el problema en orden inverso. Los autores concluyeron que podrían esbozar tres niveles cognitivos de pensamiento funcional. El nivel numérico donde la búsqueda de una solución fue sistemática; el nivel de razonamiento funcional, donde la búsqueda fue sistemática, pero las secuencias lógicas de cálculo no fueron utilizadas, y el nivel dinámico de razonamiento funcional, donde la riqueza del concepto de la función fue entendida y la búsqueda fue eficiente.

De esta investigación ellos concluyen además que centrándose en los gráficos antes del álgebra, conduce a un razonamiento de alto nivel funcional, como los procedimientos de precisión y convergencia transferidos desde los gráficos al álgebra, pero no viceversa.

Desde otra perspectiva, en uno de los foros de investigación del PME, Nemirovsky (2003) conjeturó que la actividad percepto-motora (PCM) puede ser la raíz de la abstracción matemática y que el pensamiento puede ser la (PCM) distribuida en las distintas áreas de la percepción y de la acción motora como una forma de experiencias previas sobre un tema.

Como evidencia para la justificación de estas conjeturas, Borba y Scheffer (2003) comunicaron la experiencia realizada con estudiantes que, usaron un sensor conectado a mini-coches, para argumentar que las tecnologías de la información pueden crear vínculos entre la actividad del cuerpo y las representaciones normales.

Como una evidencia más, Rasmussen y Nemirovsky (2003) informaron sobre otra experiencia realizada con estudiantes que usando una rueda de agua conectada con un software gráfico en tiempo real, llegaron a la conclusión de que la aceleración a través de una herramienta como la rueda de agua es algo que crece y emerge en los estudiantes a través de una gama de sistemas de representación.

2.2.1.3. *Uso de la tecnología como instrumento o mediadora*

Algunos investigadores han examinado ampliamente el valor agregado del uso de la tecnología en comparación con los enfoques convencionales. De este modo, Guttenberger (1992) comparó el rendimiento de 31 estudiantes de XI grado con acceso a un trazador de funciones por ordenador con aquellos que no tuvieron acceso.

Un test posterior mostró que estos estudiantes rindieron en el nivel superior. Comparando los estudiantes que usaron calculadores gráficos en sus actividades sobre funciones, con los otros

[49] TRM (Triple Representational Model: Algebraic, grafical and tabular)

estudiantes, Gómez y Fernández (1997) no encontraron grandes diferencias entre los dos grupos en la fase de adaptación, pero sí encontraron diferencias significativas en la fase consolidación.

Sin embargo, según Ferrara et al (2006) (p.254): "Esta investigación es limitada en su capacidad de explicar, el diseño o las perspectivas cognitivas de cómo o por qué sucedió tal mejoramiento."

Ha habido poca investigación sobre el diseño de herramientas para apoyar la enseñanza y el aprendizaje. Algunos estudios se han centrado más en los aspectos de mediación de la tecnología. A este respecto, Lagrange (1999) publicó un estudio sobre los esquemas de uso, realizado por estudiantes de XI grado, en el aprendizaje de las funciones usando calculadoras complejas.[50]

Desde la perspectiva de la génesis instrumental, Vernillon y Rabardel (1995), autores del *análisis del desarrollo de planes de estudio* de uso en un curso de pre-cálculo, destacaron el papel de las calculadoras en términos de la mediación que ofrece al proceso del aprendizaje.

Hay otras citas de investigadores sobre el rol mediador de la tecnología, pero nos extenderíamos demasiado en este apartado. Por lo tanto, nos referiremos mejor a las conclusiones realizadas por Ferrara et al (2006) (p.255) sobre la investigación que realizaron:

(1) Hay un cierto consenso de que la tecnología puede ser explotada para privilegiar cierto tipo de representaciones de funciones sobre otras. De los tres tipos de representaciones, parece existir cierta evidencia de que los estudiantes pueden usar el conocimiento intuitivo de los aspectos gráficos de una función para dar sentido a la simbolización con más facilidad que viceversa.
(2) También existe cierta evidencia que sugiere que un enfoque kinestésico puede ofrecer acceso a un nivel intuitivo que, puede ser utilizado para permitir que un tipo de representación de una función pueda impulsar la experiencia a los tres sistemas de representación estándar.
(3) Ha habido un considerable esfuerzo en investigación para explotar el potencial de la tecnología, para ofrecer representaciones vinculadas de manera múltiple. Algunos resultados parecen sugerir que las representaciones visualizadas a través de una pantalla pueden crear un vínculo con las conexiones mentales que están siendo construidas.
(4) Ha habido poca investigación por parte de los investigadores del PME en el diseño de equipos.

Indagaremos ahora sobre el estado del arte en el cálculo diferencial, puesto que en nuestra investigación no hemos considerado el estudio del aprendizaje de conceptos de cálculo integral.

[50] Texas Instrument, TI 92)

2.2.2. La Tecnología en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial

La introducción de la tecnología en el cálculo en los últimos años abarca los tres aspectos raíz de este como disciplina (Kaput, 1994). [51] Su enfoque en las tres últimas décadas ha sido diferente al introducirse en la escuela en forma paralela a la tecnología.

Las investigaciones numéricas han sido posible gracias a los lenguajes de programación utilizados para resolver problemas relacionados con funciones en forma numérica.[52] Así, los entornos gráficos han hecho posible las investigaciones sobre la forma de las gráficas de las funciones, tanto a nivel local como global.

Además, las funciones simbólicas han hecho posible introducir Sistemas Informáticos Algebraicos en los ordenadores y calculadoras. Pero, la mayor revolución en la enseñanza de las matemáticas usando tecnología fue la introducción de softwares dinámicos. [53]

En la revisión realizada por Ferrara et al (2006) hay información muy interesante sobre el uso de la tecnología en los temas típicos de cualquier programa de Cálculo como son: límites, derivadas, sumas infinitas e integrales. Nosotros limitaremos concretamente nuestro estudio a indagar sobre la derivada y sus aplicaciones, que es nuestro tema de interés.

La enseñanza de la derivada y de las integrales plantea problemas análogos a los que surgen en la enseñanza de los límites. La idea intuitiva de la aproximación del concepto versus el concepto formal.

Los estudios de Tall (1989) fundamentan estos contenidos en las raíces cognitivas de la linealidad local de una función en el caso de la derivada y el área bajo la gráfica de una curva para la integral. El uso de las nuevas tecnologías muestra la posibilidad de fundamentar los conceptos de derivada e integral sobre otros conceptos más simples, ya implementados a través de varios entornos, tales como el numérico, el gráfico y el simbólico.

La investigación en educación matemática es de una progresiva conceptualización hacia la definición abstracta y el uso de estos conceptos abstractos, pasando por actividades de

---

[51] Según este autor, estos tres aspectos son:

(1) El cálculo de áreas, volúmenes y tangentes, y primero que todo fue práctico como el trabajo de Arquímedes.
(2) Fue una mezcla de interés práctico y teórico, involucrando el estudio de la variación de cantidades físicas. Este comienza en la Grecia antigua con la matematización del cambio, que tiene un periodo de oro con el estudio de Newton sobre el movimiento.
(3) Es inherentemente teórico a partir de las paradojas de Zenon del movimiento antiguo y continuando con la formalización completa del Análisis en el siglo XIX, que ha sido recientemente completado con el Análisis no estándar

[52] El significado de la palabra "numérica" debe entenderse desde el punto de vista del Análisis Numérico, que constituye una rama reciente de las matemáticas, denominado las matemáticas del cálculo científico.

[53] Una forma dinámica de controlar y dominar los objetos virtualmente en el ordenador, de modo que el estudiante puede explorar muchas situaciones y observar que cambios puede realizar y cuáles no.

exploración, conjeturas y la demostración de las conjeturas. El uso de software, como cálculo gráfico, se puede realizar a distintos niveles, como Tall muestra en sus artículos.

En general, el cálculo gráfico puede ser utilizado de una manera rica, empleando las imágenes dinámicas de una manera cognitiva fructífera. Por ejemplo, una función y su gradiente pueden ser dibujados en un mismo gráfico y moviendo una cuerda sobre el primer proceso es posible generar la siguiente.

Tall y Sheath (1983) señalan que cuando un estudiante escribe: *Yo nunca entendí lo que significaba que la derivada de* $\sin(x)$ *es cos*(x)*, hasta que lo vi aumentar de tamaño*[54] el verbo *grow* personifica la naturaleza dinámica de la función gradiente, como lo ve el estudiante en la pantalla del ordenador.

Como los estudiantes exploran y enriquecen sus conceptos imágenes de una forma más personal, ven al ordenador como una autoridad que no presenta la misma amenaza que el profesor. Parecen mucho más dispuestos a discutir las dificultades conceptuales planteadas por el ordenador que aquellas dificultades de comprensión producto de la explicación de un profesor. (Ibid)

Después de realizar una investigación de los contenidos de álgebra, funciones y cálculo, Ferrara et al (2006) plantean preocupaciones comunes como las siguientes:

i) "Inquietud por el desarrollo de un enfoque funcional.
ii) Inquietud por el enfoque de la noción de derivada, de la existencia de una buena aproximación de primer orden. El ordenador permite la visualización exacta de esta propiedad, mediante la ampliación de la gráfica incluso antes de que la noción de límite sea tratada" (Ferrara et al, 2006) (p.256).

Todo esto nos lleva a concluir que el poder de las nuevas tecnologías dinámicas interactivas debe ser explotado de modo que vayan más allá que facilitar el uso de sistemas simbólicos tradicionales, [55] y permiten controlar los vínculos entre los acontecimientos mensurables, que son experimentados por los estudiantes como reales y las representaciones matemáticas más formales de estos acontecimientos (fenómenos).

Según Ferrara et al (2006) la característica común de los artículos revisados es que concuerdan en educar a los estudiantes para observar secuencias numéricas, observar y analizar un gráfico, y leer a través de símbolos.

De estos trabajos son escasos los que indagan sobre la naturaleza de las estructuras cognitivas que utilizan los estudiantes con el uso de la tecnología. Una investigación en esta otra dirección es la realizada por Suh y Moyer-Packkenham (2007). El propósito de su trabajo

[54] El verbo usado en forma textual por el estudiante es *grow*, que se ha traducido por aumentar de tamaño.
[55] Algebraicos, numéricos y gráficos.

fue examinar la teoría de codificación dual, en entornos virtuales de multi-representación en matemática (Clark y Paivio, 1991). Específicamente, en su trabajo investigan la naturaleza de los procesos de pensamiento algorítmico de los alumnos, cuando exploran tareas matemáticas con objetos electrónicos dinámicos o manipuladores virtuales.

Estas autoras con el propósito de evidenciar su investigación citan los trabajos de Cifareli (1998), Fennell y Rowan (2001), Goldin y Shteingold (2001), Lamon (2001) y Perry y Atkins (2002), quienes han demostrado a su vez que *el uso de y la capacidad para traducir entre sistemas de múltiple representación, influye en las habilidades de un estudiante para modelar y entender construcciones matemáticas*. Esta habilidad requiere que el alumno utilice diferentes estructuras cognitivas para el procesamiento de una variedad de entradas[56] durante el aprendizaje.

La ciencia cognitiva ha influido en la investigación educativa mediante la propuesta de modelos teóricos que explican la codificación de la información entre los sistemas de representación. La Teoría de Doble Codificación (DCT), propuesta por los investigadores en el campo de la psicología educativa y basada en la teoría cognitiva de procesamiento de la información, supone que la información para la memoria es procesada y almacenada por dos sistemas interconectados y juegos de códigos (Clark y Paivio, 1991). Estos conjuntos de códigos son visuales y verbales, a veces referidos como códigos simbólicos[57]. De acuerdo con la teoría de la doble codificación, cuando a los estudiantes se les presentan códigos visuales y verbales, los que funcionan en forma independiente, este hecho tiene efectos sumativos en su recuerdo.

Rieber (1994) informa de que es más fácil recordar la información proveniente de códigos de procesamiento visual que códigos de procesamiento verbal, porque a la información visual se accede mediante un procesamiento sincrónico, en lugar de uno secuencial. De este estudio, Suh y Moyer-Packkenham (2007) concluyen que el entorno multi-representacional mediante un applet [58] virtual de fracciones fue diseñado de modo que permite a los estudiantes centrarse en estas conexiones representacionales. El doble código del entorno virtual de fracciones ofrece mucho apoyo meta-cognitivo, como la grabación de las acciones de los usuarios y la transformación de anotaciones numéricas. Esto le permitió a los alumnos reasignar sus recursos cognitivos a la actividad, centrados en la observación, la reflexión, y la conexión.

Por otra parte, Kaput (1992) (p.529) establece que las estructuras de apoyo restringido construidas en un ordenador basado en ambientes de aprendizaje "Pone en libertad a los estudiantes para centrarse en las conexiones entre las acciones de los dos sistemas [notación

---

[56] La palabra usada por ellos en inglés es *input*.

[57] Pueden representar letras, números o las palabras.

[58] Un applet es un componente de una aplicación que se ejecuta desde otro programa. A diferencia de un programa, un applet ofrece información gráfica y algunas veces interactuar con el usuario y tiene privilegios de seguridad restringidos.

y visual], acciones que de otra forma tienen la tendencia de consumir todos los recursos cognitivos de los estudiantes, incluso antes de que la traducción pueda llevarse a cabo".

Siguiendo con estas ideas, Lesh, Landau, y Hamilton (1983) afirman que los Modelos Traductores sugieren que la experiencia con distintos modos representacionales es importante para la comprensión de las ideas matemáticas, puesto que cuando los alumnos re-interpretan las ideas de un modo de representación a otro hacen conexiones conceptuales.

Este estudio sugiere que las representaciones de doble código en entornos de manipulación virtual, donde los estudiantes combinan imágenes visuales con los sistemas de notación simbólica, tienen el potencial de ser eficiente en los procesos de enseñanza de la matemática.

En particular, el método que usa las representaciones de doble código puede colaborar en el aprendizaje de los procesos de algoritmos más complejos, ayudándole al alumno a interpretar y almacenar la información presentada, tanto a través de códigos visuales como de códigos verbales.

De los trabajos presentados y discutidos por Ferrara et al (2006) hemos seleccionado aquellos que se relacionan directamente con nuestro estudio, compartiendo la opinión de estos autores, en el sentido que hay pocos trabajos cuyo interés sea investigar la naturaleza de las estructuras cognitivas que utilizan los estudiantes con el uso de la tecnología.

Existe un marcado interés en el desarrollo de software y programas que permitan manejar un gran volumen de información, lo que nos posibilita conjeturar que hay un mayor interés por utilizar el ordenador como una herramienta, propio de las carreras de tipo práctico entre ellas las ingenieriles.

Según la experiencia de otros investigadores, que han estudiado qué rol cumple el entorno computacional en el proceso enseñanza-aprendizaje, podemos considerar también como un antecedente las reflexiones expresadas por Balacheff y Kaput (1996) en el sentido que el ordenador actuaría como un *micromundo computacional* el cual estaría compuesto por:

i) Un conjunto de objetos primitivos y las operaciones que los relacionan y,
ii) Un dominio fenomenológico que involucra al quehacer del estudiante y las operaciones que realiza en este micromundo computacional.

En este estudio se introducirá al estudiante al micromundo computacional a través del software MAPLE V, el ordenador y las potencialidades de ambos. Los comandos simbólicos, las instrucciones o sentencias disponibles para graficar, animar, evaluar, describir, imprimir, etc., serán nuestros objetos primitivos, sobre los que los estudiantes realizarán las operaciones pertinentes, analizarán, crearán, investigarán y deducirán conocimiento respecto al concepto de la derivada y algunas de sus aplicaciones.

Por último, a modo de reflexión, compartimos la apreciación de Hoyles et al (2006) expuesta en el trabajo de Goos (2010) producto de su revisión en este campo:

"El potencial de las tecnologías digitales para transformar aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas ha sido ampliamente reconocido desde hace algún tiempo. Las investigaciones han evidenciado que el uso eficaz de los programas matemáticos, hojas de cálculo, gráficos y calculadoras, y equipos de registro de datos permiten un cálculo rápido y exacto, y análisis de los datos, reales o simulados, y la investigación de las representaciones de los conceptos matemáticos. [59] Sin embargo, la integración de las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje ha sido más lenta de lo inicialmente previsto" (Goos, 2010) (p.1-2).

En este sentido, queremos experimentar y a la vez indagar hasta qué punto el apoyo computacional será una contribución real en el aprendizaje de la derivada y algunas de sus aplicaciones, desde las creencias de los estudiantes respecto al uso de la tecnología.

[59] Y los vínculos entre numéricos, simbólicos y gráficos.

2.3. Creencias de los Estudiantes sobre la Metodología de Enseñanza

Gómez-Chacón et al (2006) realizan un análisis del estado del arte en el tema de las creencias de los estudiantes expresando que existen resultados internacionales de evaluación[60] muy recientes sobre "Las dificultades y la falta de destrezas de los alumnos para reconocer, formular y abordar problemas matemáticos en contextos reales.

El impacto de los resultados en la comunidad internacional y en cada país está favoreciendo un debate sobre varios aspectos como: qué conlleva la competencia matemática de los estudiantes, cuáles son los conocimientos esenciales y qué ocurre con los conocimientos inertes, cómo influye el profesor en la práctica del aula y en el pensamiento de los alumnos en el aula, a qué son debidos los índices de ansiedad tan altos ante las matemáticas, etc." (Gómez-Chacón et al, 2006) (p.310).

De la revisión bibliográfica efectuada en nuestra investigación hemos considerado las realizadas en las tres últimas décadas sobre esta temática, comentadas en los trabajos efectuados por Op't Eynde et al (2002), Schoenfeld (2000). En ellas se señalan cinco categorías de aptitudes que un estudiante debería lograr para tener una buena disposición para aprender matemáticas. Estas son:

(1) Conocimientos matemáticos
(2) Métodos heurísticos
(3) Meta conocimientos
(4) Habilidades de autorregulación
(5) Creencias positivas sobre la matemática y su aprendizaje.

Además, ellos indican que gran parte de la complejidad del aprendizaje y la enseñanza de la matemática se debe a la conexión recíproca que el estudiante debe establecer con estas aptitudes.

De estas cinco aptitudes dedicaremos nuestros esfuerzos a indagar sobre la última, es decir, las *Creencias positivas sobre la matemática y su aprendizaje*.

Una contribución sobre las creencias es proporcionada por Gómez-Chacón et al (2006), quienes destacan los estudios realizados por Leder et al (2002) y el de Muis (2004) en los que señalan tres necesidades relacionadas con las creencias y sistemas de creencias:

(1) "Determinar las dimensiones constitutivas de los sistemas de creencias de los estudiantes para la constitución de un marco conceptual,
(2) Describir las relaciones entre las creencias de los estudiantes y su comportamiento en el aprendizaje, y

[60] Informe PISA 2003, TIMSS, etc.

(3) Desarrollar estudios que profundicen los estilos instruccionales que favorezcan un cambio de las creencias" (Leder et al, 2002) (p.346) y Muis (2004) (p.364).

Ellos agregan además: "Urge plantear más investigaciones que examinen las relaciones entre creencias de los estudiantes y los ambientes de clases".

Gómez-Chacón et al (2006) destacan que los estudios realizados por Kloosterman (1996 y 2002) han puesto de manifiesto la influencia de las creencias en el interés y la motivación de los estudiantes. Este autor insiste en la urgencia de elaborar un marco explicativo sobre creencias teniendo en cuenta las teorías recientes sociológicas y psicológicas, como por ejemplo, la teoría de atribución y la teoría de la autoeficacia.

En el modelo que elaboró sobre las creencias, motivación y logro, incorporó el estudio de las creencias de los estudiantes sobre el rol del profesor como transmisor de conocimiento y como fuente de respuesta, asignándole una categoría clave. También este investigador ha señalado las limitaciones de las escalas de Likert para la elicitación [61] de creencias en contexto.

Con el fin de analizar este tema con mayor propiedad nos preguntamos ¿qué son las creencias y sistemas de creencias?

Furinghetti y Pehkonen (2002) (p.47-48) señalan al respecto que: "Existe una variedad de representaciones sobre el concepto de creencia y sistema de creencias usados en los estudios del campo de la educación matemática. Debido a la vaga caracterización del concepto, los investigadores a menudo han formulado su propia definición de creencia las que podrían estar en contradicciones unas con otras".

Según nuestra revisión bibliográfica hay varias caracterizaciones del concepto de creencia, como las mencionadas en el artículo de Gómez-Chacón et al (2006). Una caracterización corresponde a la definición clásica de Rokeach (1968) (p.2) que dice que una creencia es: "Una forma organizada psicológicamente, aunque no necesariamente lógica, de todas y cada una de las incontables creencias personales sobre la realidad física y social" y otra que corresponde a la visión de Green (1971), respecto a un sistema de creencias como: "Una *metáfora* para examinar y describir cómo se organizan las creencias de una persona".

Sin embargo, Furinghetti y Pehkonen (2002) destacan en su trabajo ocho caracterizaciones del concepto de creencias, donde no aparecen aludidas las dos citadas anteriormente. Ellos mencionan además en su estudio, que se aplicó un cuestionario con estas ocho caracterizaciones a dieciocho (18) especialistas sobre el tema, los que debían expresar su grado de grado o desagrado en forma codificada.

---

[61] Es el acto de extraer información de una persona o de un grupo de personas.

Expondremos cuatro caracterizaciones, en primer lugar las dos que tienen un mayor número de frecuencia de SI y luego aquellas en que predominaron los Si ante los No. (Ibid, p.47)

(1) Una es la caracterización de Schoenfeld (1992) (p.358) que indica que la creencias deben ser interpretadas: "Como la comprensión y los sentimientos de la persona que dan forma al modo en que el individuo conceptualiza y se involucra en el comportamiento matemático".
(2) La otra es la de Thompson (1992) (p.132), "Las concepciones de un profesor de la naturaleza de las matemáticas se pueden ver como las creencias del profesor consciente o del subconsciente, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias relativas a la disciplina de las matemáticas".

Y las caracterizaciones que predominan los SI ante los NO son:

(3) La caracterización de Hart (1989) (p.44): "Usamos la palabra creencia para reflexionar sobre ciertos juicios acerca de un conjunto de objetos".
(4) Una cuarta que citaremos es la visión de Lester, Garofalo y Kroll (1989) (p.77) : "Las creencias constituyen el conocimiento subjetivo del individuo sobre sí mismo, las matemáticas, resolución de problemas y los temas tratados con planteamiento de problemas."

Existen dos conceptos interrelacionados con las creencias, que es preciso aclarar para evitar confusiones futuras con la terminología, éstos son: el concepto de concepción y el concepto de conocimiento, los que son usados de distintas maneras en la literatura sobre educación matemática. Según Furinghetti y Pehkonen (2002) el concepto de *concepción* pertenece al mismo grupo que el concepto de creencias y al igual que ellas existen distintas caracterizaciones para explicar este concepto.

Revisando la literatura encontramos por ejemplo que Thompson (1992) entiende a las creencias como una sub-clase de las concepciones. La idea de Thompson es a su vez tomada por Furinghetti y Pehkonen (2002) (p.41), quienes explican que es "*An individual's conception of mathematics as a set of certain beliefs*" (es decir, una concepción individual de las matemáticas es un conjunto de ciertas creencias).

Otros autores, Pehkonen (1994) y Saari (1983) caracterizan las concepciones como creencias conscientes. Lloyd y Wilson (1998) (p.249) conectan las creencias con las concepciones diciendo: "Usamos la palabra concepciones para referirnos a la estructura mental general de una persona que abarca conocimientos, creencias, entendimientos, preferencias y puntos de vista".

Por lo tanto, podemos deducir de estas caracterizaciones que las concepciones incluyen a las creencias, es decir es un concepto más amplio. Relacionado con estos dos conceptos hay una

tercera idea, el concepto de conocimiento, cuya clásica definición es: "*Knowledge is justified true belief*" [62] Mc Dowell (1987) (p.94, 201d).

Examinaremos lo que tienen en común las cuatro caracterizaciones anteriores de creencias.

Schoenfel expresa que es la capacidad o facultad de *comprender y razonar* que tiene un individuo más su parte afectiva que moldean su comportamiento matemático. Hart afirma que usamos la palabra creencia para reflexionar sobre ciertos juicios de un conjunto de objetos; es decir, *razonar* en forma detenida y juzgar situaciones y circunstancias sobre un conjunto de objetos en general, que Schoenfel particulariza como conceptos matemáticos. Hart se refiere a las creencias en general.

Lester, Garofalo y Kroll(1989) asocian las creencias con el conocimiento subjetivo de un individuo sobre sí mismo, las matemáticas, resolución de problemas, es decir en lugar de la palabra razonar, que es una facultad o capacidad, estos autores asocian las creencias con el conocimiento que tiene un individuo. En otras palabras con un conjunto integrado de información, reglas, interpretaciones, conexiones dentro de un contexto y de una experiencia que en nuestro caso es el conocimiento de objetos matemáticos.

La caraterización de Thompson (1992) se refiere a las creencias de un profesor como sus ideas sobre la naturaleza de las matemáticas que pueden ser conscientes o inconscientes sobre conceptos, reglas, imágenes mentales y preferencias relativas a las matemáticas.

Este autor identifica la naturaleza de las matemáticas como creencias conscientes o subconscientes relativas a conceptos, significado, reglas, etc y su relación con las matemáticas.

Thompson al igual que los otros autores se refiere a las creencias como un conjunto de objetos y su relación con la Matemática, miradas desde el profesor.

De esta revisión, podemos deducir que las creencias en general están contenidas en las concepciones de un individuo y sea la capacidad de comprender de una persona o su conocimiento es en relación a lo que comprende o sabe de sí mismo y del entorno que lo rodea, como lo conceptualiza y se involucra en él.

Conocemos entonces las caracterizaciones y las relaciones entre las creencias y conceptos relacionados.

En esta investigación nos interesan las creencias de los estudiantes con respecto a la estrategia de enseñanza utilizada y su relación con el aprendizaje.

---

[62] Es decir, el conocimiento es una creencia justificada y verdadera.

Siguiendo con nuestra revisión bibliográfica encontramos el aporte de algunas investigaciones que han evaluado las creencias, tanto de los profesores como la de los estudiantes en relación del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y sus conclusiones.

Lester (2002) presenta una revisión de cinco trabajos relacionados con las creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas. Comentaremos los tres más acorde con nuestro interés.

Kloosterman (2002) opina sobre la importancia de incluir un rango de tipos de creencias cuando intentamos indagar el interés de los estudiantes por estudiar matemáticas y la motivación para que ellos aprendan. Este investigador argumenta sobre la importancia de las creencias, puesto que pueden tener un impacto sustancial sobre el interés de los estudiantes por la matemática, disfrutarla junto con sus motivaciones.

Según Lester (2002) la fuerza especial del trabajo de Kloosterman radica en su perseverancia por establecer un marco conceptual, basado en la teoría sicológica contemporánea. Esto es, en la teoría de la atribución, teoría del autoestima, la teoría de la auto-eficacia, y la teoría de las metas de orientación.

Otro aporte importante en esta dirección es el realizado por Yackel y Rasmussen (2002) y sus colaboradores, puesto que han desarrollado un marco interpretativo para analizar la actividad individual y colectiva en el aula, y que coordina la perspectiva sicológica y la sociológica. La importancia de este marco radica en el hecho que es un resultado de la investigación basada en el aula y no de un análisis teórico a priori.

Lo fundamental de este trabajo es la suposición de que las creencias de los estudiantes son esencialmente de naturaleza cognitiva. Esto es, las creencias son las comprensiones que tienen los estudiantes de las cosas. Ellas exponen que mediante la coordinación de la perspectiva sicológica (es decir, creencias de los estudiantes) y la sociológica (es decir, normas sociales en el aula y socio matemáticas) es posible desarrollar métodos para explicar cómo en las clases de matemáticas pueden formarse cambios en las creencias.

Las autoras ilustran su conjetura con un caso en una universidad, en una clase de matemáticas sobre ecuaciones diferenciales. Una conclusión importante que deducen es que, si los profesores desearan deliberadamente afectar las creencias de sus estudiantes sobre las matemáticas, deberían prestar una atención especial a la negociación de las normas en el aula. Verifican que los estudiantes no creen espontáneamente, que ellos deben hacer un esfuerzo para dar sentido a las matemáticas que están aprendiendo.

Hay una serie más de investigadores cuyo interés es estudiar el efecto de las creencias y el aprendizaje de las matemáticas. Otro aporte concreto es el de Schoenfeld (1989) que demuestra

que las creencias de los estudiantes acerca de la geometría euclidiana son una consecuencia de la enseñanza de las matemáticas.

Algunas investigaciones coinciden en que las actitudes de los estudiantes pueden ser cambiadas en forma más positiva. Regna y Dalla (1992) afirman que cuando los maestros son entusiastas y su enseñanza y el plan de actividades son accesibles para los estudiantes entonces, las actitudes pueden ser mejoradas. Al igual como ocurre con los conceptos caracterizados anteriormente, entre ellos el concepto de *creencias*, existe una especie de consenso sobre el concepto de *actitudes*.

Hay investigadores que utilizan las actitudes como un término que incluye a las creencias sobre las matemáticas y uno mismo. Por ejemplo, Mc Leod (1992) acepta que las actitudes están relacionadas con respuestas afectivas que suponen sentimientos positivos o negativos de intensidad moderada y estabilidad razonable, ellas pueden aparecer como resultado de la automatización. [63]

De acuerdo con el artículo de Hannula (2002) (p.30): "La actitud no es considerada como un único constructo psicológico, sino como una categoría de comportamiento que es producido por diferentes procesos de evaluación. Los estudiantes pueden expresar agrado o desagrado por las matemáticas, debido a las emociones, expectativas o los valores". Agrega, que las actitudes pueden cambiar bajo circunstancias apropiadas.

Otro trabajo sobre creencias y actitudes de los estudiantes es el de Kapetanas y Zachariades (2007). Ellos realizaron un estudio en que investigan las creencias y las actitudes de los estudiantes de X, XI y XII grado, de 25 escuelas secundarias en Grecia, y que se refieren principalmente al estudio y aprendizaje de las matemáticas y exploran su estructura factorial[64] e investigan si existen diferencias en las creencias y actitudes de los estudiantes, relativas a su condición social y de género, y examinan si esos factores se correlacionan e influyen en el desempeño de los estudiantes en la escuela y su capacidad para comprender las demostraciones matemáticas.

Los resultados de este trabajo evidencian la estructura de las creencias y actitudes de estos estudiantes acerca del estudio y el aprendizaje de las matemáticas, y la forma en que el rendimiento en matemática y la habilidad (capacidad) son influenciados por ellas.

Ellos investigaron dos factores diferentes relativos a las creencias y tres factores relacionados con las actitudes y han dilucidado que las creencias de los alumnos y sus actitudes son independientes de su estatus social.

---

[63] De una repetida reacción emocional hacia las matemáticas o de la asignación de una actitud ya existente ante una nueva, pero relacionada con esa tarea.

[64] Estructura de las funciones intelectuales.

Este hallazgo probablemente sería diferente si hubiesen comparado estudiantes de distritos agrícolas con estudiantes de un área urbana.

También se evidenciaron que las niñas creen más que los niños en que la comprensión matemática se logra a través de procedimientos. Además de ser más cuidadosas y trabajadoras en el estudio y aprendizaje de las matemáticas. La fuerte creencia en la utilidad de las demostraciones y las matemáticas, así como el amor por las matemáticas se correlacionan positivamente con el estudio de las matemáticas de tal manera, que garantiza la buena y profunda comprensión (estudiando con la comprensión y la reflexión).

Ellas se correlacionan positivamente con el alto rendimiento y la habilidad matemática también. El estudio de las matemáticas con comprensión (primer nivel de estudio) y con la reflexión (segundo nivel de estudio) se correlaciona positivamente con el alto rendimiento y también con la capacidad de comprender las demostraciones.

Por otra parte, desde el punto de vista de la problemática, el procedimiento de estudio de las matemáticas se correlaciona negativamente con el alto rendimiento en matemáticas y la habilidad de comprender las demostraciones. Es decir, el rendimiento en matemáticas y habilidad para entender las demostraciones dependerá de la forma en que los estudiantes estudian las matemáticas.

Es notable como el amor por las matemáticas es el factor que se correlaciona más positivamente con el rendimiento y la habilidad matemática.

En relación a la formación de actitudes Mato y De la Torre (2010) comentan sobre lo decisivo que puede tener la influencia de los profesores en la formación de actitudes[65] de los estudiantes hacia las matemáticas, la motivación hacia su estudio, la ansiedad, el agrado, la utilidad y la confianza. Ellos a su vez hacen referencia a las investigaciones de Relich y Way (1994) y Karp (1991), quienes informan que si los profesores tienen actitudes negativas, demuestran inseguridad, falta de conocimientos y transmiten disgusto hacia la materia, están utilizando con sus estudiantes métodos de enseñanza que fomentan en los estudiantes sentimientos similares a los suyos.

Por el contrario, los profesores que muestran actitudes positivas hacia las matemáticas, utilizan métodos que inducen a la iniciativa y a la autonomía, provocan en los estudiantes el gusto y la confianza hacia la asignatura.

Reflexionando sobre los antecedentes presentados, junto al gran aporte de estos investigadores y de otros que no hemos mencionado, porque nos extenderíamos demasiado sobre este tema, podemos deducir la importancia que tienen las creencias de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

[65] Positivas o negativas.

Coincidimos con las ideas y percepciones de estos autores producto de sus investigaciones y en la importancia de establecer un marco conceptual, en particular con las experiencias de Yackel y Rasmussen en la creación de un marco interpretativo para analizar las creencias de los estudiantes que son de naturaleza cognitiva, donde se coordinan la perspectiva sicológica y la sociológica para comprender las cosas, en particular para aprender matemáticas y que un profesor podría ser capaz de cambiar.

De acuerdo a nuestros objetivos estamos interesados en investigar las creencias de los estudiantes al término del curso de la asignatura de Matemáticas I, específicamente queremos indagar sus creencias en relación al material de enseñanza utilizado en esta intervención didáctica. Concretamente nos referimos a los módulos de clases, los laboratorios computacionales y sus creencias en relación a la estrategia de enseñanza. Estos resultados son importantes si pretendemos mejorar la práctica educativa, pues son una retroalimentación para el profesor de la asignatura, ya sea para cambiar los materiales didácticos y/o la estrategia de enseñanza.

CAPÍTULO 3

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

3.1. Objetivos y Problema de Investigación
3.2. Caracterización de la Investigación
3.3. Los Casos
  3.3.1. La Encuesta Diagnóstica
  3.3.2. Evaluaciones Diagnósticas
    3.3.2.1. Primera Evaluación Diagnóstica
    3.3.2.2. Segunda Evaluación Diagnóstica
3.4. Estrategias de Enseñanza
  3.4.1. Metodología de la Enseñanza
  3.4.2. Descomposición Genética Inicial del Concepto
    3.4.2.1. Esquema de función
    3.4.2.2. Esquema de función derivada
  3.4.3. Descomposición Genética Inicial de los Módulos de Clases y su Descripción
    3.4.3.1. Descripción de los Módulos de Clases
  3.4.4. Descomposición Genética de los Laboratorios Computacionales y su Descripción
    3.4.4.1. Descripción de los Laboratorios Computacionales
3.5. Instrumentos de Obtención de la Información
  3.5.1. Definición de los Estándares para un Curso de Cálculo Diferencial
    3.5.1.1. Estándares de Aprendizaje
    3.5.1.2. Clasificación de los Estándares
    3.5.1.3. Estándares para la Sección de Cálculo Diferencial
  3.5.2. Prueba de Medición de Estándares (PME)
    3.5.2.1. Relación entre la Prueba de Estándares y el Modelo Cognitivo APOS
3.6. Instrumentos de Análisis
  3.6.1. Prueba de Medición de Estándares
  3.6.2. Análisis de Creencias

3.1. Objetivos y Problema de Investigación

El problema del bajo rendimiento en las universidades chilenas es antiguo; es sabido que las asignaturas de matemáticas provocan dificultades en el aprendizaje de la mayoría de los estudiantes que ingresan por primera vez a la universidad. Los factores son variados desde cursos masivos; problemas que los estudiantes traen consigo desde la Enseñanza Media, que se traducen en vacíos en las materias; madurez emocional y el "salto cuántico", que representa la gran diferencia del paso de Enseñanza Media a la Enseñanza Universitaria, etc.

En mi opinión una forma de acortar la gran brecha entre enseñanza media y universitaria es mejorar la práctica educativa, modificando la enseñanza *Tradicional*, incorporando estrategias de enseñanza que faciliten un rol participativo en lugar de la actitud habitualmente pasiva desarrollada en el estudiante.

La génesis del problema de investigación comienza con mi llegada a la Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas, en el año1994, que como comentamos en la introducción de esta tesis, en dicho año el porcentaje de reprobación de la asignatura de Matemáticas I impartida en los cursos de Primer Año de la facultad fue de $52.2\ \%$

Al promediar los porcentajes de reprobación, entre los años 1994 y 1996, se obtiene que el de los estudiantes que ingresaron a la carrera de Química y Farmacia y Bioquímica fue de $52.2\,\%$ y el de los estudiantes que ingresaron a las carreras de Ingeniería en Alimentos y Química fue de un $41.3\,\%$. El detalle completo de estos porcentajes está contenido en la Tabla 1.1 (p.8) de esta tesis.

Al ser nominada Jefe del Área de Matemáticas las autoridades me encomendaron el desafío de encontrar formas y acciones para mejorar este rendimiento de los estudiantes que proviene de un problema de aprendizaje.

Después de un profundo análisis frente a estos hechos se pusieron en práctica algunas medidas inmediatas como reducir el número de estudiantes por cursos, lo que implicó un aumento del número de cursos que en ese momentos eran dos, llegando en la actualidad a seis cursos. Además, sugerí la idea de comenzar a realizar apuntes cortos con los temas de Cálculo Diferencial e Integral, enfocados al quehacer matemático de la facultad. De modo que nos repartimos por secciones los contenidos programáticos entre los profesores, que impartíamos clases en los cursos de Primer Año, para elaborar el material escrito en forma modular; de allí el nombre de Módulos de Clases.

Esta idea no prosperó en los años posteriores al año 1997 por el costo que involucraba editar estos módulos para los 220 estudiantes de Primer Año y por el tiempo extra que debían invertir los profesores en actualizar el material año a año. Por estos motivos, seguí sola al comienzo con el

propósito de dar apoyo a los estudiantes de Primer Año, que formaban parte del curso que se me asignara como profesora.

Luego de un tiempo, se sumó otra profesora del Área de Matemáticas a la idea de proseguir con la edición de los Módulos de Clases para apoyar el trabajo de los estudiantes.

Por lo tanto, comenzamos a perfeccionar en conjunto el material original, que es presentado en esta tesis en el *Anexo 1: Módulos de Clases*, y que ha constituido la partida de una iniciativa más global en el sentido que ha sido implementada en más de un curso de la Asignatura de Matemáticas I, y que al menos esta doctorando sigue realizando de modo que el material didáctico de apoyo se sigue usando y perfeccionando en la medida que las condiciones lo requieren.

Paralelamente, a la luz de otras experiencias me fui dando cuenta que los alumnos del siglo XXI tienen otra filosofía, viven en un mundo tecnológico donde este tipo de recurso es cada vez más usado y llega cada vez más a las escuelas y a los hogares. A una gran parte de estos adolescentes les motiva la herramienta tecnológica y cada vez se desmotivan más en las clases pasivas. Por lo tanto, reflexionando sobre todas estas ideas surge la pregunta, desde la perspectiva de la Investigación-Acción:

¿Cómo mejorar la práctica educativa con el propósito de mejorar el rendimiento de los estudiantes en matemáticas, específicamente en uno de los temas de difícil comprensión para ellos *La derivada y algunas de sus aplicaciones*?

Hay un supuesto implícito en esta pregunta que es el nexo entre "mejorar la práctica educativa, mejorar el rendimiento estudiantil y las construcciones mentales que debe realizar un estudiante para comprender conceptos matemáticos, específicamente la derivada y sus aplicaciones".

En mi opinión, si queremos mejorar la práctica educativa, las medidas realizadas hasta el año 1997 no son suficientes. Por tanto mi plan de acción fue implementar en mis asignaturas:

(1) Módulos de Clases[1]
(2) Laboratorios Computacionales[2]
(3) La interacción social entre todos los actores del proceso enseñanza - aprendizaje.

Por lo tanto, mis interrogantes en relación a esta investigación son:

1) ¿Cuál es el nivel del aprendizaje construido por cuatro estudiantes del curso de Matemáticas I formado por los estudiantes de la carrera de Ingeniería en Alimentos, desde la perspectiva del modelo cognitivo APOS, al utilizar nuevas estrategias de enseñanza?

[1]Un módulo de clase, palabra que acuñé para este propósito es un pequeño apunte, orientado con el enfoque particular dado a esta disciplina. En la siguiente sección se hace una descripción detallada de un módulo.
[2]Un laboratorio computacional es una clase realizada en una aula interactiva.

La Prueba que diseñamos para este propósito se aplicó ocho meses después de la intervención.

2) ¿Cuáles son las creencias de los estudiantes respecto del aporte de los Módulos de Clases y el software MAPLE V en su aprendizaje?

Resumiendo las ideas anteriores, el propósito es implementar nuevas estrategias para mejorar el aprendizaje de los estudiantes y conocer sus creencias posteriormente a la intervención didáctica, con el fin de mejorar el diseño usado como estrategia de enseñanza.

Por lo tanto, mi objetivo prioritario es:

1) Obtener evidencias del aprendizaje construido por cada estudiante de la muestra considerada del curso de matemáticas I, según el modelo cognitivo APOS.

Y como objetivo secundario:

2) Obtener evidencias de las creencias de los estudiantes respecto del uso del software y el apoyo de los Módulos de Clases.

3.2. Caracterización de la Investigación

Esta investigación se sitúa en el modelo Investigación-Acción, descrita por Elliott (2000)(p.23) como "reflexión relacionada con el diagnóstico". Este autor plantea ocho caracterizaciones de la Investigación-Acción en el aula. Analizaremos las caracterizaciones atingentes a esta investigación.

(1) "La Investigación-Acción se relaciona con los problemas prácticos cotidianos experimentados por los profesores, en lugar de los *problemas teóricos* definidos por los investigadores puros en el entorno de una disciplina del saber. Puede ser desarrollada por los mismos profesores o por alguien a quien ellos se lo encarguen". (Ibid, p.24)

Esta característica de la Investigación-Acción se verifica en el sentido que el problema es planteado por la "profesora" de uno de los cursos de la Asignatura de Matemáticas I, como se ha comentado en la introducción de este trabajo. La situación problemática es un "problema práctico cotidiano" que está en relación directa con el mal rendimiento de los estudiantes que cursan esta asignatura en el primer año de sus carreras; este mal rendimiento se refleja en el porcentaje de reprobación de esta asignatura.

(2) "El propósito de la Investigación-Acción consiste en profundizar la comprensión del profesor, es decir, el diagnóstico de su problema. Por tanto, adopta una postura exploratoria frente a las definiciones iniciales de su propia situación que el profesor pueda

mantener. La comprensión no determina la acción adecuada, aunque la acción adecuada debe fundarse en la comprensión". (Ibid, p.24)

La profesora de la asignatura de Matemáticas I ha detectado que algunos estudiantes no poseen algunos conocimientos mínimos exigidos en la Enseñanza Media; algunos no manejan la operatoria de rutina, y otros no saben aplicar los conocimientos para resolver un problema contextualizado. Esta situación se ha constatado aplicando un instrumento que se ha denominado *Prueba de Diagnóstico*. Además, señala que esta situación incide en las actitudes de los estudiantes, se sienten inseguros de los conceptos matemáticos previos y con mayor razón de los conocimientos nuevos. Este hecho se acrecienta cuando el tema de aprendizaje es *La Derivada y sus propiedades* que constituye una situación problemática real para los estudiantes.

"El diagnóstico del problema" es claramente percibido por la profesora y las acciones que realizó fueron producto de la "comprensión del mismo". Las acciones se pueden resumir en dos actividades prácticas. La primera fue reforzar los conocimientos previos de los estudiantes durante un mes y la segunda en mejorar la práctica educativa, a través de la aplicación de nuevas estrategias de enseñanza, en el sentido de modificar la práctica de la clase tradicional. Para ello, la profesora diseñó e implementó las siguientes acciones:

i) Editar y repartir a cada estudiante apuntes por secciones de contenidos del currículo que hay que impartir y que designó *Módulos de Clases.*
ii) Incorporar talleres prácticos con apoyo computacional que denominó *Laboratorios Computacionales.*
iii) Integrar el trabajo colaborativo a través de los materiales didácticos.

La profesora ha realizado acciones desde su comprensión de la problemática. Por lo tanto este trabajo cumple en alguna medida con lo que declara el autor como segunda caracterización de la Investigación-Acción.

(3) "La Investigación-Acción adopta una postura teórica según la cual la acción emprendida para cambiar la situación se suspende temporalmente hasta conseguir una comprensión más profunda del problema práctico". (Ibid, p.24-25)

En el estudio que se está elaborando, la profesora implementó en forma piloto el recurso computacional en condiciones que declara no óptimas, como se describió en el *Capítulo 1: Introducción*. La acción de mayor peso tardó en llevarla a la práctica alrededor de cinco años, gestionando en el intertanto los medios necesarios para elaborar el material e imprimirlo y tener también la infraestructura necesaria para implementar un laboratorio computacional con una capacidad adecuada al número de estudiantes por curso.

En la situación que estamos investigando hay una diferencia con esta caracterización que radica en que la acción en este trabajo fue suspendida por una falta de recursos, que a su vez permitió recopilar y elaborar ideas para diseñar los laboratorios computacionales y no por una "comprensión más profunda del problema en sí", que la profesora declara que siempre estuvo presente. Mientras que, la caracterización de la Investigación-Acción adopta una postura teórica al suspender la acción para conseguir una mayor comprensión del problema.

(4) "Al explicar lo que sucede, la Investigación-Acción construye *un guión* sobre el hecho en cuestión, relacionándolo con un contexto de contingencias mutuamente interdependientes, o sea, hechos que se agrupan porque la ocurrencia de uno depende de la aparición de los demás". (Ibid, p.25) Este guión se denomina a veces *estudio de casos*. Los estudios de casos proporcionan una teoría naturalista de la situación, presentada de forma narrativa, en lugar de una teoría formal enunciada de forma proposicional". (Ibid, p.25)

Según Bisquerra et al (2004) (p.310- 311): "El estudio de casos [3] es un método de investigación cualitativa que se ha utilizado ampliamente para comprender en profundidad la realidad social y educativa".

Para Stake (1998): "Es el estudio de la particularidad y a su vez de la complejidad de un caso peculiar, para llegar a comprender su actividad en circunstancias precisas.

El investigador de casos desempeña funciones diferentes y elige como se han de desempeñar.[4] El propósito de la investigación es informar, ilustrar, contribuir a una mayor competencia y madurez, socializar y liberar. Éstas son también responsabilidades del profesor". (Ibid, p.83)

El "guión" que menciona esta caracterización de la Investigación-Acción en este trabajo es un estudio de casos que incluye cuatro estudiantes de la Asignatura de Matemáticas I, específicamente del curso 2 que imparte la profesora. Según la clasificación de los autores Arnal et al (1992), este trabajo se enmarca en los *estudios de casos múltiples*[5]. Sin embargo, aunque las "contingencias sean mutuamente interdependientes" en esta investigación la ocurrencia de un caso no depende de "la aparición de los otros". Por lo tanto, hay una diferencia entre este punto y la

[3] Llamamos casos a aquellas situaciones o entidades sociales únicas que merecen interés de investigación. En educación, un aula puede considerarse un caso, una determinada forma en que interviene un profesor, un programa de enseñanza, un alumno, una comunidad educativa, en general cualquier aspecto de la existencia humana

[4] Estas funciones incluyen las del profesor, observador, participante, entrevistador, lector, narrador de historias, defensor, consejero, evaluador, consultor, etc.

[5] Cuando los investigadores estudian dos o más sujetos, situaciones o depósitos de datos, están haciendo estudios de casos múltiples. (Ibid, p.209)

caracterización. En relación al planteamiento de Stake sobre "El propósito de la investigación" y las "funciones del profesor" en esta investigación efectivamente son las tareas descritas por él, observar, participar, entrevistar, ilustrar, etc. En este caso, las funciones del investigador y del profesor se concentran en una sola persona.

(5) "La Investigación-Acción interpreta *lo que ocurre* desde el punto de vista de quienes actúan e interactúan en la situación problema, por ejemplo profesores y alumnos, profesores y director. Los hechos se interpretan como acciones y transacciones humanas, en lugar de como procesos naturales sujetos a las leyes de la ciencia natural. Las acciones y transacciones se interpretan por ejemplo, como expresiones de:

a) La comprensión que el sujeto tiene de su situación y las creencias que alberga sobre la misma,
b) Las intenciones y los objetivos del sujeto,
c) Sus elecciones y decisiones,
d) El reconocimiento de determinadas normas, principios y valores para diagnosticar, el establecimiento de objetivos y la selección de cursos de acción.

Lo que ocurre puede ser entendido al relacionarlo con los significados subjetivos que los participantes les asignan. Por tal motivo, las entrevistas y la observación son importantes herramientas de investigación en un contexto de Investigación-Acción". (Ibid, p.25)

Del abanico de posibilidades de "quienes actúan e interactúan en la situación problemática", en este estudio la actuación y la interacción se producirán entre estudiantes, y entre estudiantes y profesora. Analicemos las acciones en términos de este estudio:

a) "La comprensión que tiene cada estudiante de su situación" debe traducirse en términos de su aprendizaje, del que podrá tener una idea clara, al conocer su resultado en las distintas actividades de evaluación planificadas al inicio del desarrollo de la asignatura Matemáticas I. Posteriormente, se evidenciará el aprendizaje construido vía la Prueba de Medición de Estándares. En relación a las "creencias que alberga cada caso", se usarán encuestas diagnósticas y un instrumento de análisis de tales creencias que la profesora ha denominado Encuesta de Validación.

b) En relación a "Las intenciones y los objetivos de cada estudiante", la profesora indagará los intereses de cada estudiante durante la realización del curso.

c) "Sus elecciones y decisiones" serán investigadas en forma análoga al punto b), durante el desarrollo de la asignatura de Matemáticas I.

d) Este punto engloba cuatro acciones, las tres primeras se rigen por los estándares definidos para este curso, de los objetivos y normas establecidos en el programa

de contenidos de la asignatura de Matemáticas I y de las normas curriculares de la carrera de Ingeniería en Alimentos. En cuanto a la "selección de cursos de acción" dependerá de la estrategia que implementará la profesora como parte de su metodología de enseñanza.

La *ocurrencia* en cada caso en "relación con los significados subjetivos de los participantes" será analizada utilizando la Encuesta de Validación que permitirá conocer las creencias de cada caso en estudio. Además, considerando como referencia el rendimiento académico de los casos en la asignatura de Matemáticas I y la Prueba de Medición de Estándares se tendrá una evidencia del aprendizaje construido por cada estudiante, que es parte de la ocurrencia de la situación problemática. Por lo tanto, deducimos que en este estudio están contempladas las expresiones de ocurrencia que se mencionan en esta caracterización.

(6) "Como la Investigación-Acción considera la situación desde el punto de vista de los participantes, describirá y explicará *lo que sucede* con el mismo lenguaje utilizado por ellos, es decir, el lenguaje común que usan las personas para describir y explicar las acciones humanas y situaciones en la vida diaria". [6]

Se puede afirmar que en este estudio esta característica es importante y coincide con el propósito de recopilar la información que aportará cada estudiante desde su punto de vista y en su propio lenguaje. Esta actividad es desarrollada por la profesora como parte de sus funciones.

En este estudio, el rol de los materiales didácticos usados como parte de la estrategia de enseñanza se analizarán y discutirán "desde el punto de vista de los participantes". "El lenguaje común que utilizan los estudiantes" se presenta textualmente en los Anexo 5 y 6 correspondientes a la Prueba de medición de Estándares y a las creencias de ellos respectivamente. En el Capítulo 4: *Análisis y Discusión de los Resultados* se desarrolla, analiza y discute esta situación y aunque la interpretación sea desde el lenguaje de los participantes la explicación se realizará desde el marco de la investigación.

(7) "Como la Investigación-Acción contempla los problemas desde el punto de vista de quienes están implicados en ellos, solo puede ser válida a través del diálogo libre de trabas con ellos. Los relatos de los diálogos de los participantes acerca de las interpretaciones y explicaciones que surgen de la investigación deben formar parte de cualquier informe de Investigación-Acción". (Ibid, p.26)

---

[6] "Por eso, los relatos de la Investigación - Acción pueden ser validados en el diálogo con los participantes". (Ibid, p.25)

El "diálogo de los participantes acerca de las interpretaciones y explicaciones que surgen" en este estudio con respecto a las materias discutidas en las aulas como así mismo de las creencias de los participantes, se realizan a través de todo el desarrollo de la asignatura de Matemáticas I, cuya duración es de un semestre académico.

En relación a los "informes" pertinentes de las interpretaciones y explicaciones que se realizan durante la investigación, estos se basan en las respuestas de los estudiantes y se presentan en el Capítulo 4: *Análisis y Discusión de los Resultados*.

Se percibe que esta característica de la Investigación-Acción es relevante en este estudio, porque alude directamente a las consideraciones finales de este trabajo, elaborar un informe respecto del aprendizaje construido por cada caso y confeccionar un informe en relación a las creencias de ellos respecto al uso de Módulos de Clases y del recurso informático como apoyo en el proceso enseñanza-aprendizaje. Esta caracterización describe un aspecto fundamental de este estudio, que consiste en extraer unidades de información desde las creencias de los participantes para investigar el rol de los recursos didácticos usados en el aprendizaje.

(8) "Como la Investigación-Acción incluye el diálogo libre de trabas entre el *investigador* (se trate de un extraño o de un profesor/investigador) y los participantes debe haber un flujo libre de información entre ellos. Por eso, la Investigación-Acción no puede realizarse adecuadamente si falta la confianza basada en la fidelidad a un marco ético, mutuamente aceptado, que rija la recogida, el uso y la comunicación de los datos". (Ibid, p.26)

Respecto de esta última caracterización uno de los ingredientes fundamentales en toda interacción es la confianza. En este caso específico, donde la enseñanza se realiza en un aula o en el laboratorio computacional y donde el profesor privilegia el trabajo colaborativo, "fluye de una manera natural la interacción entre profesor y estudiantes, y entre los estudiantes".

Por lo tanto, la Investigación-Acción se realiza bajo la suposición de un marco ético mutuo de parte de los estudiantes y la profesora, tanto en la recopilación de los datos, uso y comunicación de los datos provenientes ya sea del Instrumento Secundario, Prueba de Medición de Estándares como de la Encuesta sobre las Creencias de los Estudiantes.

El Instrumento Secundario al que se hace referencia está formado por un conjunto de actividades, cuyas evaluaciones determinan una calificación final que indica el rendimiento obtenido por cada estudiante en el transcurso de un semestre. Estas calificaciones quedan registradas en una planilla de notas en la Secretaría de Estudios de la Facultad. De este modo, los datos recogidos de cada caso son transparentes, fidedignos, comunicados y conocidos por todos los estudiantes que forman parte de la asignatura.

Sin este compromiso de tipo ético entre estudiantes y profesor no se podría impartir ninguna asignatura, cualquiera sea ella, de la malla curricular de los estudiantes. Luego esta caracterización se verifica no solo en este trabajo, sino en cualquier aula de educación básica, media o superior.

La etapa siguiente es exponer el modelo que se usará para llevar a cabo esta investigación. Según la literatura consultada a este respecto, Elliott (2000) comenta el modelo de Investigación - Acción propuesto por Lewin, quien sugiere un modelo disciplinado, cuyas etapas pueden ubicarse en forma paralela con la aplicación del método científico en otras disciplinas. El procedimiento de Lewin establece una espiral de actividades en forma secuencial.

(1) Aclaración y diagnóstico de una situación problemática en la práctica.
(2) Formulación de estrategias de acción para resolver el problema.
(3) Establecimiento y evaluación de las estrategias de acción.
(4) Explicación y diagnóstico posteriores de la situación problemática (y así sucesivamente en la siguiente espiral de reflexión y acción).

Según Elliott (2000) (p.98): "La primera etapa supondrá el desarrollo de teorías explicativas que se centren en las influencias restrictivas de los factores institucionales, sistémicos y sociales sobre la libertad de los profesores para promover los valores educativos en las clases. El proceso de Investigación-Acción puede llevar desde la reflexión sobre las estrategias pedagógicas a la reflexión sobre las estrategias políticas que conduzcan a la modificación del *sistema* de modo que sea posible la acción educativa.

La segunda etapa del proceso de Investigación-Acción equivale a la formulación de las hipótesis científicas. Se requiere un nueva teoría práctica para cambiar la situación, como se comprende ahora, de modo que sea más coherente con los valores del práctico. Esta teoría especificará las hipótesis de acción, es decir, las estrategias que el práctico debe comprobar.

La tercera etapa de la espiral de la Investigación-Acción, el desarrollo y evaluación de las estrategias de acción, es una forma de comprobación de hipótesis.

El resultado puede indicar la necesidad de aclarar más el problema y de la posterior modificación y desarrollo de las hipótesis de acción. Y así, a través de espirales de Investigación-Acción, los prácticos desarrollan sus teorías prácticas mediante un método semejante al empleado por los científicos naturales y comportamentales".

Si se sitúa esta investigación en este modelo, la primera etapa se corresponde con la introducción de este trabajo por una parte, donde se plantea la situación real de la práctica educativa, que nos induce a mejorar dicha práctica y por otra, en la Sección 3.1 de este Capítulo, donde se establecen nuestros objetivos y la pregunta de investigación.

La segunda etapa del modelo se desarrolla en este Capítulo, en las siguientes secciones:

- Sección 3.3. Los casos
- Sección 3.4. Estrategias de Enseñanza
- Sección 3.5. Instrumentos de Obtención de información
- Sección 3.6. Instrumentos de Análisis

La tercera etapa corresponde al Capítulo 4: *Análisis y Discusión de los Resultados*.

Por último, la cuarta etapa de retorno de la espiral en esta investigación corresponde al *Capítulo 5: Conclusiones*.

3.3. Los Casos

La investigación se realizó en uno de los cursos de la Asignatura Matemáticas I, que corresponde según la malla curricular al Primer Año de la carrera de Ingeniería en Alimentos de la Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas de la Universidad de Chile.

De este curso se seleccionó una muestra, basada en el nivel de los conocimientos mínimos que deberían tener los estudiantes al ingresar a la universidad. Esta selección se realizó usando como referente la calificación obtenida en la Prueba de Diagnóstico, que se aplicó a cada estudiante junto a otro instrumento denominado Encuesta de Opinión.[7] El detalle de las respuestas de los estudiantes se presenta en los Anexos 3 y 4.

Para evaluar el aprendizaje durante el curso usé la escala definida por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), según decreto 2088 de 1979.

TABLA 3.1. Escala de las Calificaciones definida por el MINEDUC

1.0	Malo
2.0	Deficiente
3.0	Menos que suficiente
4.0	Suficiente
5.0	Bueno
6.0	Muy Bueno
7.0	Sobresaliente

La muestra seleccionada de los cuatro casos fue de acuerdo a la calificación obtenida en la Primera Prueba de Diagnóstico, según la escala que aparece en la tabla 3.1. En un principio, la selección fue provisoria y ratificada con los resultados obtenidos en una Segunda Prueba

[7] Este instrumento corresponde a una encuesta diagnóstica en que indagamos: antecedentes personales, antecedentes de conocimiento respecto de la Derivada, antecedentes de metodología, entre ellos antecedentes informáticos.

Diagnóstica, realizada después de un reforzamiento intensivo de los tópicos mínimos desarrollados en un mes de clases.

El criterio de selección se basó en la idea de preferir dos estudiantes con nota baja y otros dos con notas más que suficiente. Específicamente, seleccioné a dos estudiantes con calificación [8] 1.5, un tercer estudiante con una calificación [9] 5.0 y un estudiante con calificación[10] 6.5. Es importante destacar en este contexto que en la mayoría de los centros educativos medios y universitarios de Chile la nota mínima de aprobación es[11] 4.0.

Para la selección de los casos se han considerado dos dimensiones, la primera es seleccionar estudiantes representativos de tres niveles de conocimientos, usando como indicador la calificación obtenida en la Primera Prueba Diagnóstica, que de alguna forma orientará sobre el nivel de conocimientos básicos, competencias y destrezas que tiene cada estudiante.

La otra dimensión está relacionada con la disposición y disponibilidad de tiempo que tuvieron los estudiantes en colaborar con esta investigación, puesto que les informé a priori, que se les iba a aplicar dos instrumentos después del término del curso: la Prueba de Medición de Estándares para analizar el aprendizaje y la Encuesta de Validación diseñada para recoger sus creencias.

En la etapa de ingreso a la universidad el único instrumento que se utiliza como indicador de los conocimientos que traen los estudiantes, en la mayoría de los centros de estudios superiores, son las Pruebas o Test de Diagnóstico, que permiten detectar en alguna medida las falencias y los vacíos de contenidos mínimos que tienen al ingresar a la universidad. Este indicador permite que el profesor tenga una idea del nivel de conocimiento que tienen los estudiantes de su curso y conocer la realidad de cada uno para ayudarle en el reforzamiento de los temas no logrados.

Con el fin de guardar la confidencialidad de las respuestas a la Encuestas y a la Prueba de Diagnóstico,[12] que usó como criterio de selección, se ha considerado oportuno asignarles nombres ficticios, de modo que el:

Estudiante 1 será Juan Ignacio

Estudiante 2 será Daniela

Estudiante 3 será Lola

Estudiante 4 será Nancy

---

[8] Entre malo y deficiente.
[9] Bueno.
[10] Entre muy bueno y sobresaliente.
[11] Suficiente o regular.
[12] Indicadores de los rendimientos de los estudiantes

3.3.1. La Encuesta Diagnóstica [13]

Esta encuesta tiene por objetivo recoger algunos antecedentes de los estudiantes, de modo que el profesor se forme una idea de las características del grupo de estudiantes con los que trabajará. Estos antecedentes incluyen los datos personales de los estudiantes, información sobre el conocimiento del concepto en estudio, de las metodologías usadas por los profesores de Enseñanza Media y antecedentes informáticos del estudiante. La encuesta diagnóstica se organizó en cuatro categorías o ítemes, dispuestos de la siguiente manera:

1. Antecedentes Personales

Consiste en una ficha que incluye además de los datos personales, el colegio de procedencia y el puntaje logrado en las pruebas de ingreso a la universidad. [14]

Esta información es relevante para la Dirección de Escuela de Pregrado de la Facultad, puesto que fue el organismo encargado de realizar los estudios comparativos entre los rendimientos de los estudiantes de acuerdo a los colegios de procedencia y los puntajes obtenidos en la PSU, etc.

2. Antecedentes de Conocimientos

Para recopilar esta información se formularon cinco preguntas, tres respecto al conocimiento de la derivada y sus aplicaciones, y dos relacionadas con el concepto de la integral y sus aplicaciones.

3. Antecedentes Metodológicos

Esta categoría de preguntas tiene relación con la experiencia previa que pueda tener el estudiante en actividades que involucren la interacción social y/o trabajos colaborativos como medio de aprendizaje.

4. Antecedentes Informáticos Previos

Este ítem consta de seis preguntas, cuyo propósito es indagar sobre el tipo de experiencia previa que tienen los estudiantes en el ámbito computacional e informático, que hayan adquiridos ya sea en sus colegios o en sus hogares.

Seguidamente presentamos la Encuesta de Opinión Diagnóstica.

[13] O de opinión.

[14] Prueba de Selección Universitaria (PSU).

Las respuestas a la Encuesta Diagnóstica de cada estudiante se pueden consultar en el Anexo 3 de esta tesis, por tanto en esta sección solo presentamos un resumen codificado de sus respuestas.

Usaremos la siguiente codificación:

1: Algún conocimiento de la Derivada

0: Desconocimiento del concepto

Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas
Universidad de Chile

Área de Matemáticas

ENCUESTA DE OPINION

I. ANTECEDENTES PERSONALES

Procura que tus respuestas sean directas y espontáneas, sin preocuparte demasiado por ninguna en particular. Tus respuestas se guardarán en estricta reserva, y te advertimos que no hay respuestas "correctas".

Nombre:……

Edad:……

Sexo:……

Carrera:……

1. Marca con una X la casilla correspondiente a tu respuesta

1.1. Colegio de procedencia año 2003:……..

Particular ☐ Particular Subvencionado ☐ Municipalizado ☐

♦ Si egresaste anteriormente al año 2003, de que centro de estudios superiores procedes:……..

1.2. Puntaje PSU (Matemática):……

1.3. Puntaje Prueba de Ciencias:……

¿Qué módulo electivo de la prueba de Ciencias elegiste?

Biología ☐ Física ☐ Química ☐

II. ANTECEDENTES DE CONOCIMIENTOS

2.1. Durante la Enseñanza Media, estudiaste el concepto Derivada.

Si ☐ No ☐

2.2. Si tu respuesta es afirmativa, ¿conoces algunas aplicaciones de la derivada?.

Si ☐ No ☐

Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es?.....

2.3. ¿Conoces la ecuación que modela el crecimiento de una población de bacterias?

Si ☐ No ☐

Si tu respuesta es afirmativa ¿cuál es?.....

2.4. Durante la Enseñanza Media, estudiaste el concepto de Integral.

Si □ No □

Si tu respuesta es afirmativa, ¿conoces algunas aplicaciones de la Integral.

Si □ No □

Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es?:……..

III. ANTECEDENTES DE LA METODOLOGÍA

En la siguiente sección se trata de conocer tu opinión acerca de las características generales de la metodología en Matemáticas. Marca con una X el casillero correspondiente a los conceptos según tu percepción personal.

Casi Siempre : CS
Con Frecuencia: CF
A Veces : AV
Casi Nunca : CN

	CS	CF	AV	CN
3.1. Tuviste la oportunidad de trabajar en las clases grupales.				
3.2. Piensas que al trabajar en un grupo se benefician todas las personas que lo conforman.				
3.3. Aunque no hayas tenido experiencia, crees que el trabajar en grupo tú aprendizaje sería más eficiente				
3.4. ¿Crees que al trabajar con otras personas, sería para ti más difícil?. ¿Por qué?.				
3.5 ¿Te gusta trabajar con otras personas?				

IV. ANTECEDENTES INFORMATICOS

	CS	CF	AV	CN
4.1. Te brindaron la oportunidad de trabajar directamente con los computadores en tus actividades de aprendizaje.				
4.2. Te permitieron desenvolverte como usuario autónomo en una variada gama de aplicaciones computacionales relacionadas con la asignatura de Matemáticas.				
4.3. Desarrollaste algunos contenidos con apoyo computacional.				
4.4. Te motivaron a realizar exposiciones de temas de interés con herramientas informáticas.				
4.5 ¿Utilizaste algún software específico de Matemáticas?				
4.6. Promovieron la utilización de redes de comunicación para buscar, seleccionar y procesar información desde lugares remotos.				

1. Antecedentes de Conocimientos

La Tabla 3.2 muestra los resultados respecto al grado de conocimiento o desconocimiento del concepto de Derivada, de acuerdo al código establecido.

TABLA 3.2. Antecedentes Previos

Juan Ignacio	**Daniela**	**Lola**	**Nancy**
0	0	0	0

Se observa que ninguno de los estudiantes seleccionados tiene conocimientos previos del concepto de la derivada. Este concepto no forma parte de los contenidos programáticos de los cursos regulares de matemáticas en la Enseñanza Media, pero es tratado en algunos colegios particulares.

Esta situación tiene la ventaja de que el nivel de conocimientos que adquirirán los estudiantes con respecto a la derivada y sus aplicaciones no estará influenciado por conocimientos anteriores sobre el tema, solo intervendrán los conocimientos y destrezas exigidos como contenidos mínimos de matemáticas en los cursos previos al ingreso a la universidad.

2. Antecedentes Metodológicos

Con este conjunto de preguntas pretendemos indagar la experiencia previa que pueda tener el estudiante participando en actividades académicas que involucren la interacción social y/o trabajos colaborativos como medio de aprendizaje.

Al igual que antes se presentan los resultados codificados por pregunta usando la codificación:

- Casi siempre: 4
- Con frecuencia: 3
- A veces: 2
- Casi nunca: 1

En la Tabla 3.3 mostramos un resumen de las respuestas por estudiante respecto de la experiencia interactiva adquirida antes de su ingreso a la universidad.

Las preguntas de esta categoría tienen por objetivo conocer la disposición de los estudiantes para realizar actividades en grupo (sociabilizar) con sus pares en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Resumiendo sus opiniones:

TABLA 3.3. Experiencia Interactiva Previa

Preguntas	Juan Ignacio	Daniela	Lola	Nancy
1	1	3	4	3
2	3	2	4	4
3	4	3	2	3
4	2	1	2	1
5	2	3	4	4

i) Respecto de la pregunta 1, sólo Juan Ignacio no ha trabajado casi nunca en grupo, en cambio los otros tres estudiantes han tenido experiencia previa.
ii) Respecto de la pregunta 2, los cuatro estudiantes opinan que el trabajo grupal beneficia a todos los integrantes, excepto Daniela que declara que a veces.
iii) Respecto de la pregunta 3, la tendencia es que tres estudiantes piensan que el trabajo en grupos es más eficiente que el trabajo individual; Lola en menor grado.
iv) Respecto de la pregunta 4, los cuatro concuerdan que es difícil trabajar con otras personas.
v) Respecto de la pregunta 5, Juan Ignacio afirma que le gusta trabajar solo a veces con otras personas; en general, los otros tres estudiantes prefieren el trabajo en grupos.

Claramente se observa que Daniela y Lola han tenido algún tipo de experiencia previa en trabajos grupales y tienen una actitud favorable para incorporar la interacción en una estrategia metodológica que la utilice como uno de los medios de aprendizaje, en menor grado Juan Ignacio y Nancy.

3. Antecedentes Informáticos Previos

Este item consta de seis preguntas, cuyo propósito es indagar sobre el tipo de experiencia previa que han adquirido los estudiantes en el ámbito computacional e informático, ya sea en sus colegios o en sus hogares. Usaremos la misma codificación anterior para representar la intensidad de sus respuestas.

- Casi siempre: 4
- Con frecuencia: 3
- A veces: 2
- Casi nunca: 1

Estos resultados se muestran en la Tabla 3.4.

TABLA 3.4. Experiencia Informática Previa

Preguntas	Juan Ignacio	Daniela	Lola	Nancy
1	1	1	2	4
2	1	1	1	2
3	1	2	1	2
4	1	1	2	2
5	1	1	1	1
6	2	1	1	2

Podemos observar que:

i) Juan Ignacio casi nunca ha usado el computador como un medio de apoyo al aprendizaje de las matemáticas, tampoco ha trabajado en forma autónoma, no ha sido motivado por sus profesores en la Enseñanza Media, no ha usado software matemáticos, sólo menciona que a veces ha buscado información en la red.

ii) Daniela menciona que solo a veces desarrolló algún contenido con apoyo computacional.

iii) Lola declara que a veces ha usado el computador para aprender matemáticas y a veces ha sido incentivada por sus profesores para usar el ordenador, pero nunca ha trabajado en forma autónoma para aprender matemáticas, ni tampoco como apoyo a otras actividades.

No ha usado software matemático, ni ha realizado búsquedas de información en internet.

iv) La información entregada por Nancy es más variada en el sentido que casi siempre ha usado el computador para aprender matemáticas; a veces en ocasiones trabajó como usuario autónomo desarrollando contenidos con apoyo computacional, ha realizado exposiciones con herramientas informáticas y también ha utilizado redes de comunicación. Sin embargo, casi nunca ha usado algún tipo de software específico de matemáticas.

De la Tabla 3.4 se concluye que ninguno de los cuatro estudiantes conoce algún software matemático de apoyo en la enseñanza de las matemáticas.

Este hecho a la luz de esta investigación podría influir en forma negativa en el momento de realizar las clases con apoyo computacional, situación que la doctorando como profesora de la asignatura deberá manejar con cautela, puesto que un primer comportamiento actitudinal de los estudiantes es mostrar cierta reticencia al trabajo matemático autónomo con un ordenador.

3.3.2. Evaluaciones Diagnósticas

3.3.2.1. *Primera Evaluación Diagnóstica*

De entre los contenidos mínimos obligatorios exigidos por el MINEDUC se seleccionaron aquellos básicos que, generalmente, los estudiantes no logran aprender en forma significativa, sino más bien en forma mecánica, por lo tanto olvidan con facilidad. Se Incluyen indicadores de conocimiento y habilidad de cálculo de los siguientes temas:

(1) Simplificación de fracciones compuestas
(2) Racionalizar el denominador de una fracción irracional
(3) Resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas
(4) Resolver una desigualdad fraccionaria de primer grado
(5) Determinar la ecuación de una recta que pasa por un punto y es paralela a otra recta de ecuación dada
(6) Dado ángulo en radianes, escribirlo en grados
(7) Un problema contextualizado de cálculo de áreas.

La Tabla 3.5 exhibe los resultados de la Prueba de Diagnóstico que permitió seleccionar a los estudiantes que constituyen la muestra que se analizará. Se percibe que Juan Ignacio y Lola evidencian tener los conocimientos mínimos exigidos para abordar con posibilidades de éxito un Primer Curso de Cálculo Diferencial; las otras dos estudiantes obtuvieron calificaciones deficientes. Este hecho podría incidir negativamente en sus procesos de aprendizaje del concepto de la derivada y de sus aplicaciones, producto del vacío de los conocimientos matemáticos mínimos y habilidades necesarias para poseer una base sólida, donde anclar los nuevos conceptos que queremos enseñar.

TABLA 3.5. Calificaciones Primer Diagnóstico

Juan Ignacio	Daniela	Lola	Nancy
5.0	1.5	6.5	1.5

Con el fin de que los estudiantes tengan un nivel adecuado semejante y como una forma de mejorar en parte esta situación, de las horas asignadas al curso, se destinó un mes para realizar actividades de reforzamiento y obtener en lo posible una base común de conocimientos mínimos. Es un hecho la disimilitud que existe en la formación de los estudiantes de los distintos tipos de establecimientos de Enseñanza Media en Chile, lo que implica a su vez distintos niveles en el aprendizaje y en los conocimiento de los contenidos mínimos obligatorios (CMO) exigidos por el Ministerio de Educación de Chile. La prueba que se aplicó es la siguiente:

Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas
Universidad de Chile

Área de Matemáticas

PRUEBA DE DIAGNÓSTICO ASIGNATURA MATEMÁTICAS

OBJETIVO ESPECÍFICO

Evaluar los conocimientos y habilidades de cálculo adquiridos durante la Educación Media que constituyen la base de los temas que serán tratados.

1.- Simplifique:

$$\frac{\frac{x}{x+1}-\frac{x^2}{x^2-1}}{1+\frac{1}{x-1}}$$

2.- Racionalizar el denominador de la expresión:

$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$$

3.- Resolver las siguientes ecuaciones:

i) $4^{4x-3}=8^{2x+5}$ ii) $\log(x^2+4)-\log(x+2)=3+\log(x-2)$

4.- Resuelva la siguiente inecuación.

$$\frac{1}{6-2x}<0$$

5.- Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,-5)$ y es paralela a la recta $6x-3y+4=0$

6.- Halle la medida en grados sexagesimales si

$$\theta=\frac{7\pi}{4}$$

7.- Un terreno rectangular tiene uno de sus lados 5 m. menos que el otro. Si el área del terreno es 150 m^2, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

El desarrollo de las respuestas la Prueba de Diagnóstico de cada estudiante se incluye en el *Anexo 4: Primera Prueba de Diagnóstico*.

3.3.2.2. *Segunda Evaluación Diagnóstica*

Una vez terminada la actividad de reforzamiento, al final de ese mes, se realizó una Segunda Evaluación Diagnóstica. En dicha prueba los estudiantes seleccionados provisoriamente obtuvieron las siguientes calificaciones:

TABLA 3.6. Calificaciones Segundo Diagnóstico

Juan Ignacio	Daniela	Lola	Nancy
6.5	5.0	5.5	3.0

Juan Ignacio y Lola habían obtenido buenas calificaciones en la Primera Prueba Diagnóstica y luego de un mes de reforzamiento en la segunda prueba mantuvieron su buena calificación, con algunas variaciones.

Juan Ignacio subió su calificación original en un punto y cinco décimas (1.5) y Lola bajó su calificación original en 1 punto (1.0). Daniela y Nancy que habían obtenido calificaciones deficientes en la primera prueba, después de este mes de reforzamiento lograron apropiarse de algunos conocimientos y subir su calificación original en la Segunda Prueba Diagnóstica. Este hecho es meritorio para el aprendizaje de los estudiantes en general, no solo para los estudiantes de la muestra que seleccionamos.

No obstante de esta ayuda, Nancy aún tiene algunas dificultades en el aprendizaje y de habilidad de cálculo, lo que permite conjeturar que su aprendizaje anterior fue probablemente de tipo memorístico y, por lo tanto, un mes de clases no fue suficiente para comprender mejor y/o recordar los contenidos mínimos, que debería haber estudiado y aprendido en los cursos de Enseñanza Media.

En todo caso, al comparar las calificaciones de Juan Ignacio y Lola no hay una diferencia significativa entre las calificaciones de ambas evaluaciones. En el caso de Daniela, la diferencia es significativa. Ella transitó de una Calificación Mala (1.5) a una Calificación Buena (5.0) y Nancy de una Calificación Mala (1.5) a una Calificación Menos que Suficiente (3.0).

Sin embargo, en tres de los casos se percibe un progreso. Excepto en el caso de Lola que bajó su calificación pero no significativamente, puesto que se mueve alrededor de Muy Bueno.

El hecho que Daniela y Nancy hayan progresado de diferente forma es un desafío que induce a mantenerlas en la muestra seleccionada e indagar que efecto tendrá este reforzamiento en el aprendizaje construido futuro.

Es interesante investigar el caso de los otros dos estudiantes seleccionados que mantuvieron sus calificaciones Muy Buenas, porque aunque no hay variaciones significativas en el nivel evidenciado, no podríamos conjeturar acerca de sus rendimientos al final del curso a no ser que observemos como evoluciona el aprendizaje construido en los temas que nos interesa estudiar, la Derivada y sus Aplicaciones.

En el transcurso de nuestro estudio percibiremos si el reforzamiento beneficia el aprendizaje de los nuevos conceptos, puesto que solamente se han comparado calificaciones, sin aplicar un modelo cognitivo para indagar la intensidad de sus aprendizajes.

3.4. Estrategias de Enseñanza

En nuestra investigación realizaremos un trabajo similar al desarrollado por Asiala et al (1996) en el sentido de incluir en nuestro estudio un análisis teórico, diseño e implementación instruccional, observaciones y evaluaciones.

El análisis teórico se basa en el modelo cognitivo denominado por Dubinsky Descomposición Genética. En nuestra investigación se realizará la descomposición genética del concepto en estudio, de los módulos de clases y de los laboratorios computacionales, usando el software simbólico matemático MAPLE.

Las observaciones y evaluaciones se realizarán a partir de los datos recogidos mediante instrumentos secundarios y los instrumentos de análisis. Los instrumentos secundarios son aquellos que se usarán para evaluar el rendimiento de los estudiantes en el curso de Matemáticas I, es decir, son las evaluaciones planificadas regularmente en cada asignatura y que forman parte del curriculum diseñado para cada carrera. [15]

En cambio, el Instrumento de Análisis no forma parte de las evaluaciones de la Asignatura Matemáticas I y es este instrumento el que permitirá analizar el aprendizaje construido por cada estudiante del concepto de la Derivada y algunas de sus aplicaciones.

En la sección Metodología de la Enseñanza se describirá la Descomposición Genética del concepto de función, del concepto de la función derivada y sus aplicaciones, y se diseñará una descomposición genética de los materiales que se implementarán como parte de la metodología de enseñanza, los módulos de clases y de las actividades diseñadas para los laboratorios computacionales.

En general, una Descomposición Genética de un concepto se define como el análisis teórico del concepto en función de las construcciones mentales que un estudiante debería realizar para desarrollar la comprensión de éste.

---

[15] En la asignatura de Matemáticas I el Programa comprende:

i) Evaluaciones Formativas.
ii) Evaluaciones de los Talleres Computacionales.
iii) Evaluaciones Acumulativas.
iv) Evaluaciones Finales (Prueba PRE y Examen).

3.4.1. Metodología de la Enseñanza

Como se anticipó uno de los propósitos[16] de la Investigación Acción es mejorar la práctica social y/o educativa, lo que debería producir un cambio de actitud en el estudiante y por lo tanto en su aprendizaje. Bajo este concepto y como una forma de estimular el aprendizaje del estudio de la función derivada, uno de los aspectos fundamentales fue crear entornos interactivos de enseñanza tanto para el aula como para las clases de *trabajo práctico* consistente en laboratorios computacionales.

Como consta, al inicio del curso se realizó un repaso de los temas relevantes estudiados en la Enseñanza Media que duró un mes, con el fin de que los nuevos conceptos tengan una base matemática común. En forma colectiva se realizaron las siguientes actividades en el aula y en las clases con apoyo computacional:

(1) A cada estudiante se le entregó un Módulo de Clases cada 15 días aproximadamente. En la *sección 3.4.3: Descomposición Genética Inicial de los Módulos de Clases y su Descripción* se entrega un detalle de la estructura y los contenidos de cada módulo de clases, pero en resumen estos módulos contienen los temas relevantes que se trataran en clases según el orden establecido en los contenidos programáticos de cada asignatura. Los módulos de clases adicionalmente se subieron a la página web de la profesora: http://www.ciq.uchile.cl/matematica/

(2) A cada estudiante se le asignó un PC en la sala de laboratorio computacional.

(3) A cada estudiante se le entregó por escrito un pequeño manual con las instrucciones más relevantes del software a utilizar MAPLE versión 8.

El trabajo en el aula se sustentó en base a los Módulos de Clases. Como se ha dicho, los módulos se entregaron en forma de documento escrito al inicio de las clases y contienen definiciones, teoremas, problemas ilustrativos y actividades para desarrollar en la sala de clases de forma grupal.

La actividad práctica de laboratorio se desarrolló con apoyo de tecnología (ordenador y software MAPLE versión 8). Estos talleres computacionales constituyen un segundo estímulo de los contenidos estudiados en clases agregando la visualización gráfica.

---

[16] Otros propósitos son:

(1) "Articular de manera permanente la investigación, la acción y la formación.
(2) Acercarse a la realidad: vinculando el cambio y el conocimiento.
(3) Convertir a los prácticos en investigadores".

(Bisquerra et al, 2004) (p.372)

Queda claro que, desde el punto de vista del profesor se pretende tener un estudiante *activo* usando las implementaciones antes expuestas. El diseño de los laboratorios computacionales y de los módulos de clases fueron realizados con ejemplos y ejercicios aplicados extraídos de otras disciplinas que forman parte de su currículo, como Física, Biología, Química, etc., siempre y cuando fue posible hacerlo.

Como se anticipó, ante el hecho que la doctorando participó en el Proyecto MECESUP-UCH0002, otorgado por el Ministerio de Educación Chileno, este proyecto implicó una modificación de los contenidos programáticos de lo que se enseñaba antes del año 2004 en el curso de Matemáticas I. Se construyeron estándares de aprendizaje,[17]que orientaron este trabajo de investigación. Se analizará ahora cómo se relaciona nuestro modelo cognitivo APOS con el material didáctico elaborado y modus operandi.

3.4.2. Descomposición Genética Inicial del Concepto

En todo proceso de aprendizaje nos interesa como profesores que los estudiantes logren en su instrucción idealmente la estructura cognitiva de la fase superior, es decir, de un *esquema* sub-etapa Trans. En nuestro caso, el nivel de aprendizaje Trans de la función derivada y algunas de sus aplicaciones, sobre la cuál mediante acciones, procesos, objetos y otros esquemas, el estudiante pueda evocar para resolver un determinado problema.

Para ello el estudiante debe haber logrado primero el esquema de una función y sus propiedades, que según el orden lógico de los conceptos matemáticos es un aprendizaje previo al del estudio de la derivada.

3.4.2.1. *Esquema de función*

i) "El estudiante debe haber desarrollado previamente la concepción de Proceso y Objeto de una función" (Clark et al, 1997) (p.348).

ii) El estudiante debe haber desarrollado la concepción de Proceso y Objeto de las características cualitativas de una función como dominio, recorrido, asíntotas, monotonía, máximos y mínimos, concavidad y puntos de inflexión.[18]

iii) "El estudiante debe haber desarrollado la concepción de Proceso y Objeto de las operaciones entre funciones, como suma y diferencia, multiplicación, división, composición y descomposición de funciones". (Clark et al, 1997) (p.348) [19]

[17] Es decir se estableció lo que se espera que los estudiantes sepan y sean capaces de hacer.

[18] Usando como soporte el álgebra.

[19] Estos autores proponen la concepción de proceso y objeto solo para la composición y descomposición de funciones, porque el propósito de ellos era el estudio de la construcción de esquema de la regla de la cadena.

3.4.2.2. *Esquema de función derivada*

i) El estudiante debe haber desarrollado previamente la concepción de Proceso y Objeto de la función derivada.

ii) El estudiante debe haber desarrollado la concepción de Proceso y Objeto de la diferenciación (Clark et al, 1997)(p. 348). Desde nuestra perspectiva la concepción de Proceso y Objeto de la función derivada incluye el manejo de la operatoria y demostraciones simples de las propiedades de la función derivada cómo saber demostrar la regla de la derivada de una potencia de grado n, derivada de una suma y diferencia de funciones, derivada de un producto y derivada de un cuociente.

iii) El estudiante debe ser capaz de coordinar el esquema construido sobre funciones con el esquema de diferenciación y definir desde el enfoque de la diferenciación los conceptos de monotonía, valores extremos, concavidad y puntos de inflexión. Esta coordinación le permitirá analizar y realizar un estudio analítico de las funciones vía la diferenciación y revertir el proceso, es decir, conociendo el comportamiento de la función derivada inferir propiedades de la función.

iv) El estudiante reconoce y coordina el esquema de diferenciación para determinar valores extremos y lo aplica en la resolución de problemas de optimización.

v) El estudiante debe haber logrado la concepción de esquema de la Regla de la Cadena.[20]

vi) El estudiante reconoce y modela fenómenos cuya representación matemática es una ecuación diferencial.

Se describirá entonces, en forma más detallada, estos niveles de desarrollo del aprendizaje.

i) **Etapa Intra**: En esta sub-etapa el estudiante tiene una colección de reglas para determinar derivadas y una colección de los conceptos que determinan las características cualitativas de una función y sus propiedades, tiene un algoritmo de resolución de una ecuación diferencial, y reconoce cómo modelar los fenómenos que representan problemas importantes en su currículo, pero aún no es capaz de reconocer las relaciones que existen entre ellos.

ìi) **Etapa Inter**: El estudiante comienza a reconocer que de alguna manera todos los esquemas están relacionados y pueden mirarse como un todo.

[20]En nuestro trabajo no se incluye la construcción de esquema de la regla de la cadena porque ha sido descrito y aplicado por (Clark et al, 1997), cuyo aporte se menciona en el Capítulo anterior que consiste, justamente, en la descripción del desarrollo de **esquema** de la regla de la cadena, los niveles de aprendizaje *Intra, Inter o pre-esquema y Trans*.

iii) **Etapa Trans**: Es la que se caracteriza por la construcción de una estructura subyacente coherente o algunas de las relaciones descubiertas en la etapa de desarrollo Inter. El estudiante construye una estructura subyacente de conocimientos, monotonía, valores extremos, concavidad, puntos de inflexión y reconoce varias instancias del concepto derivada, a saber derivadas de orden superior como ligadas a un proceso. Además construye la estructura subyacente formada por los distintos algoritmos de solución de una ecuación diferencial y los fenómenos que tiene que modelar. Los elementos en el esquema pasan a ser caracterizados por una colección que se describe por un solo proceso.

En el *capítulo 4: Análisis y Discusión de los Resultados* se realizará una descripción detallada de cómo el estudiante irá moviéndose de la acción al proceso, del proceso al objeto y del objeto al esquema del concepto de la función derivada y algunas de sus propiedades, lo que permitirá indagar el nivel del aprendizaje logrado por cada estudiante. Para esto la descomposición genética del material didáctico será de gran utilidad.

En esta sección se analizará el material didáctico desde la perspectiva de la concepción de aprendizaje significativo de **?** y del modelo cognitivo de Dubinsky. En primer lugar, se analizará qué aporta la Teoría del Aprendizaje significativo de Ausubel a esta investigación. Uno de los supuestos de esta teoría es que el estudiante tiene que tener la disposición para un aprendizaje significativo. Esto quiere decir que el estudiante debería relacionar de un modo efectivo y no arbitrario el material entregado con su estructura cognoscitiva, de modo que el material con que aprenda sea *potencialmente significativo*.[21]

Bajo este concepto se han construido los módulos de clases procurando que sean *potencialmente significativo*. Para ello se reforzará la comprensión de los temas tratados en clases de modo que el estudiante tenga un documento escrito de los contenidos con el enfoque expuesto por el profesor. Además, los Módulos de Clases reproducen los temas como fueron discutidos en el aula por estudiantes y profesor, libre de los errores usuales de conceptos que cometen los estudiantes cuando transcriben los conceptos, propiedades y demostraciones desde la pizarra.

El tema del enfoque es importante, puesto que existe una amplia literatura de libros de Cálculo Diferencial e Integral con distintos enfoques. El enfoque dado a la derivada en este curso está orientado a la resolución de problemas contextualizados en el ámbito científico y cuando es posible problemas relacionados con otras asignaturas propias de la carrera de los estudiantes.

Los libros de Cálculo Diferencial tradicionales[22] están orientados al ejercicio abstracto de los conceptos sin un contexto y con muy pocas aplicaciones orientadas a la resolución de problemas

[21] Esto a su vez quiere decir que el material debe relacionarse de forma intencionada, sustancial y con un significado lógico, con las ideas disponibles en la estructura cognitiva del estudiante. (**?**)

[22] De estos libros existen varios aún en nuestras bibliotecas, algunos más orientados a los problemas de economía.

en el ámbito científico. Al reflexionar sobre estas ideas, si los estudiantes tienen la disposición de aprender y los módulos de clases representan el enfoque orientador dado por el profesor, estos deberían constituir un material potencialmente significativo para los estudiantes, según la concepción de **?**.

Por otra parte, la teoría APOS es una importante contribución a la comprensión de la cognición matemática en educación. Como se describe en el marco teórico, las *acciones y procesos* son las acciones o los procesos cognitivos conscientes o inconscientes, no son solo los conscientes matemáticamente, los que posteriormente son encapsulados como *objetos mentales* y que se mueven hacia los *esquemas cognitivos* más sofisticados, indudablemente el resultado deseable es que el estudiante logre un aprendizaje efectivo[23].

[23]Significativo desde la perspectiva de Ausubel.

3.4.3. Descomposición Genética Inicial de los Módulos de Clases y su Descripción

Todos los Módulos de Clases tienen la misma estructura, exceptuando el Primer Módulo que tiene al inicio el problema de entrada al capítulo, además incluyen al término de cada sección actividades ilustrativas y actividades grupales.

El Concepto de Proceso es un nivel más alto de comprensión que la acción y se produce cuando el estudiante logra interiorizar las acciones; el estudiante aplicando el concepto de derivada puede calcular la derivada de algunas funciones elementales como funciones potenciales, polinómicas, inversa proporcional y función raíz cuadrada.

Además, en este nivel puede realizar demostraciones simples usando solo la definición de derivada y propiedades de los límites, determinar la derivada de una función exponencial y logarítmica, la derivada de una suma, diferencia y un producto. Estos conceptos y actividades relacionadas están expuestos en el Módulo 2.

El Concepto de Objeto. Al ir reflexionando sobre las propiedades de la función derivada y realizando acciones sobre ella, el estudiante puede encapsular el proceso y desarrollar la comprensión de objeto de derivada de una función.

El concepto de "encapsular un proceso" es relevante en el sentido que en esta etapa el estudiante debería pasar fácilmente del Objeto al Proceso del cuál proviene y regresar al Objeto, tanto como necesite trabajar con situaciones particulares.

En esta etapa es posible extender el concepto y determinar la derivada de una suma de funciones y diferencia de funciones, producto de funciones polinómicas, funciones con raíces cuadrada, funciones inversa proporcional y demostrar teoremas simples, como la derivada de la función inversa y la derivada de un cociente.

En esta etapa el estudiante debe ser capaz de relacionar en un gráfico la función $f(x)$, su derivada primera $f'(x)$ y su derivada segunda $f''(x)$.

En la mayoría de las actividades realizadas para aprender matemáticas es necesario el paso del desarrollo de un *Proceso* al desarrollo de *Objeto* y viceversa. Al construir mentalmente el objeto el estudiante puede extender el concepto al grupo de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Debería ser capaz de relacionar la derivada con las características cualitativas de una función, conceptos como monotonía, concavidad, que fueron tratadas antes, usando solamente el concepto de variaciones medias.

Además, el estudiante debe ser capaz de determinar la derivada de una función a partir de su gráfico, comprender los conceptos relacionados con la derivada como el concepto de diferencial de

una función y sus aplicaciones al cálculo de aproximaciones. Todos estos conceptos se desarrollan en los módulos 3, 4 y 5.

Con la *concepción de objeto* de la derivada, de las propiedades de la función derivada, demostración de propiedades, el estudiante comprende los conceptos y organiza en su mente un esquema individual para la derivada.

El Concepto de Esquema involucra la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas junto con sus relaciones, que el individuo comprende en relación a la derivada, en este momento ha logrado desarrollar el nivel Intra de un esquema. Esta colección tendrá algún significado si el estudiante es capaz de abordar con éxito cualquier fenómeno cuyo modelo matemático se vincule con el concepto de derivada como la derivada de la función compuesta o regla de la cadena y sus aplicaciones a la derivación implícita y problemas con variables relacionadas. En este momento, el estudiante comienza a reconocer que todos estos conceptos están relacionados, está alcanzando el nivel de Pre-esquema o nivel Inter del modelo cognitivo.

Cuando el estudiante haya construido una estructura subyacente de los conceptos y sus propiedades y ve el concepto de la derivada ligada a ellos está logrando el nivel Trans.

El estudiante debería resolver problemas de optimización y problemas de valor inicial, como por ejemplo modelar fenómenos de crecimiento poblacional, decaimiento radioactivo, ley de enfriamiento de Newton, mezclas y disoluciones, y el modelo de crecimiento poblacional limitado o logístico.

Debido a la importancia de estos problemas en el currículo de nuestros estudiantes se escogió como problema de entrada para el estudio de la *derivada y sus aplicaciones* un "problema de valor inicial".

Estos temas se incluyen en los módulos 6 y 7. Los módulos de clases se construyeron pensando en establecer relaciones entre los conocimientos adquiridos anteriormente por los estudiantes y los conceptos que necesitan aprender.

3.4.3.1. *Descripción de los Módulos de Clases*

En los Módulos de Clases los conceptos nuevos se introducen a partir de un problema de entrada. Este representa el tipo de problemática que el estudiante debe ser capaz de resolver al final del curso, su propósito es mostrar qué conceptos están involucrados y qué conceptos se discutirán y analizarán posteriormente.

La dinámica de la clase se basa en repartir un módulo a cada alumno y formar grupos de trabajo por afinidad, a continuación iniciamos la revisión y discusión de los contenidos.

Según el tema a tratar se escoge un estudiante al azar que actúe como monitor y que comience con la lectura en voz alta de la introducción a un tema o de un concepto para generar el análisis y discusión de los nuevos conceptos. Posteriormente, el profesor hace preguntas para percibir en primer lugar, si se comprendió la nueva notación, su significado y la relación con algún conocimiento previo (etapa de ACCIÓN).

Si hay dificultades en la comprensión de algún concepto, notación o demostración el profesor debe dilucidar cualquier duda en la pizarra hasta asegurar la comprensión del tema por todos los estudiantes del curso. Luego, se discuten los problemas resueltos en conjunto y finalmente los estudiantes realizan las actividades planteadas en el módulo en grupos, de modo de favorecer el trabajo colaborativo y la sociabilización entre ellos. Es decir, queremos mediante la repetición de la acción inducir al estudiante para que desarrolle la etapa de PROCESO.

En sesiones posteriores, cuando los nuevos conceptos han sido internalizados, se lleva a los estudiantes al laboratorio computacional para reactivar nuevamente el estímulo desde esta otra dimensión. [24] El laboratorio computacional constituye un nuevo estimulo para repetir el ciclo (A-P-O) y utilizar las propiedades inherentes al objeto para realizar nuevos manejos a partir de él y facilitar la asimilación del concepto.[25]

Frente a la adquisición de un nuevo concepto, el Primer Módulo de Clases se estructuró considerando:

(1) Un problema de entrada.
(2) Conceptos previos o de despegue.
(3) Concepto nuevo.
(4) Actividades ilustrativas.
(5) Actividades en grupo.

1. El Problema de Entrada

Como anticipamos, este problema tiene algunas características especiales, entre ellas, es el problema que el estudiante debería resolver formalmente al término de la sección o capítulo, es la problemática que se plantea al inicio y que el estudiante eventualmente podría resolver en forma intuitiva a partir de sus conocimientos previos.

Cuando el estudiante adquiera y comprenda los nuevos conceptos que desarrollará clase a clase, con apoyo de los módulos y los laboratorios computacionales, podrá resolver estos problemas formalmente y también más eficazmente.

[24] Construcción de nuevos procesos, con el fin de reflexionar sobre el proceso y el estudiante logre el nivel de OBJETO.
[25] Ayudar al estudiante para que desarrolle una concepción de ESQUEMA.

En el caso de la derivada, se les presenta a los estudiantes uno de los problemas importantes que deben ser capaces de resolver, un problema de valor inicial sobre administración de medicamentos.

"El problema de entrada" se escoge en lo posible desde el ámbito de la problemática del área o carrera del estudiante con el propósito de motivar su interés, planteando situaciones concretas, que motiven el desarrollo de su conocimiento, capacidad[26] y habilidad[27].

Para resolver este tipo de problemas el estudiante deberá lograr un aprendizaje significativo, en otros términos, haber construido un esquema de la derivada y sus aplicaciones.

2. Conocimientos previos de despegue o anclaje del concepto nuevo

De acuerdo con la Descomposición Genética del concepto de derivada, cuyo nivel más básico es la concepción de acción, en el Módulo 1, el concepto de la derivada en un punto emerge a partir del conocimiento previo, que tiene el estudiante sobre las variaciones medias de una función definidas sobre un intervalo cerrado, digamos $[a, a+h]$.[28]

Se presentan actividades que los estudiantes deben realizar en las clases, que consisten en calcular variaciones medias sobre este intervalo de números reales variando el valor de h, que con el fin de precisar ideas, en lo que sigue denotaremos este intervalo cerrado por $[a, a+h]$.

3. Conocimientos nuevos

El primer concepto que se define en cualquier curso de Cálculo es el concepto de derivada en un punto.

Supongamos que queremos definir el concepto de derivada en el punto $x = a$.

Para ello hacemos variar h de modo que cada vez el punto $a+h$ esté cada vez mas cercano a a, de modo que el paso al límite cuando h tiende a cero, sea natural. A su vez relacionamos los cálculos de cada variación media con su representación gráfica, es decir, como pendientes de rectas secantes que pasan por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ de modo que al pasar al límite aparece el concepto de aproximación lineal de modo que gráficamente se obtiene la intersección de la gráfica de la función con la pendiente de la recta tangente en $(a, f(a))$. Reforzamos esta acción graficando las variaciones medias e interpretándolas geométricamente.

[26] Posibilidad de una persona para realizar una acción.
[27] Astucia que tiene una persona para llevar a cabo una acción.
[28] Nivel de Acción de APOS.

Los estudiantes pueden calcular la derivada en un punto como el paso al límite. En esta etapa pueden calcular derivadas en un punto de funciones polinomiales y calcular derivadas numéricas, es decir, calcular la derivada en un punto de una función definida en el conjunto de los números reales, cuya representación es a través de una tabla de observaciones.

Además, el estudiante puede relacionar los conceptos de continuidad en un punto y derivada de una función en un punto. La idea es poner en marcha los fundamentos neurobiológicos, potenciando las conexiones neuronales que permitan construir memorias en el cerebro estables en el tiempo.

3.4.4. Descomposición Genética de los Laboratorios Computacionales y su Descripción

Laboratorio N^{o} 1

En este laboratorio se pretende el logro de los siguientes objetivos:

(1) Que el estudiante conozca los comandos básicos para realizar múltiples cálculos y operatoria básica.
(2) Oportunidad de complementar lo aprendido unido a la práctica, visualizar, internalizar y transformar objetos desde un dominio tangible a otro abstracto.
(3) Reforzar los conceptos teóricos mediante la realización de gráficos, orientación, movimiento y color.
(4) Interacción con su compañero de laboratorio.

Contenidos del Laboratorio N^{o} 1

(1) Uso de los operadores y comandos básicos del álgebra.
(2) Asignaciones.
(3) Sumatorias y productos.
(4) Ecuaciones.
(5) Funciones.
    i) Funciones de bibliotecas.
    ii) Funciones definidas por el usuario.
(6) Gráficos.
    i) Gráficos de funciones.
    ii) Gráficos de figuras planas y puntos.
    iii) Gráficos animados.

El concepto de *Acción* en este caso consistirá en estimular el uso de la tecnología para realizar cálculos específicos simples y reforzar la comprensión de conceptos conocidos y familiares para el

estudiante desde la operatoria de la Aritmética Básica, expresiones algebraicas, resolución de ecuaciones hasta la definición de funciones y su representación gráfica. Desde este dominio llevarlos a uno tecnológico más novedoso.

El concepto de *Proceso*, como ya se dijo, es un nivel más alto de comprensión; el individuo junto con aprender la nueva sintaxis debe interiorizarla para poder expresarla a través del teclado y poder ejecutar correctamente las operaciones, resolución de ecuaciones y construcción de gráficos dados en el laboratorio.

La internalización implica que el estudiante no necesita un estímulo externo para poder ejecutar, resolver y construir gráficos. El Laboratorio N^o 1 debería permitir reforzar el concepto de *proceso*, *objeto* y *esquema* de función para poder conectarla con el *esquema gráfico* desarrollado por el estudiante a través del software. El laboratorio N^o 2 debería permitir la extensión y reforzamiento del concepto de derivada.

Laboratorio N^o 2

Este laboratorio debería reforzar el concepto de la derivada en forma visual. La idea es que el estudiante perciba que este concepto no es estático, sino dinámico.

Contenidos del Laboratorio N^o 2

(1) Aplicaciones geométricas de la derivada en un punto.
(2) Una animación que consiste en el deslizamiento de la recta tangente a lo largo de una curva en distintos puntos de la gráfica, a través del dominio de graficación seleccionado para representar la función, con el propósito de mostrar la idea de movimiento que no es posible realizar en una pizarra en el aula.
(3) Introducir las sentencias que permiten la resolución de problemas relacionados con el cálculo de la derivada de una función.
(4) Problemas que refuercen el concepto y la metodología usada en aula para la resolución de problemas. Trabajo grupal.

El concepto de *Objeto* se logra cuando el estudiante debe encapsular lo aprendido para construir nuevos problemas, trabajar con situaciones particulares. El estudiante debe haber construido mentalmente la concepción de los conceptos y su representación en el computador para aplicarlos en otras actividades, acciones y procesos.

Laboratorio N^{o} 3

Este laboratorio está diseñado con un nivel más alto de comprensión, puesto que su propósito es que el estudiante aplique los conocimientos aprendidos y trabajados en cada laboratorio anterior, de modo que pueda pasar en forma natural del concepto de Objeto a la concepción de Proceso y viceversa.

En este nivel, el estudiante podrá resolver problemas aplicados usando el concepto y propiedades de la función derivada, como por ejemplo problemas en que realice el estudio analítico de la graficación de una función. Es decir, debe ser capaz de analizar, asíntotas, intervalos de monotonía, valores extremos, intervalos de concavidad, puntos de inflexión y graficar finalmente la función. Además debería ser capaz de resolver problemas de razón de cambio simples[29].

Contenidos del Laboratorio N^{o} 3

(1) Comandos e instrucciones necesarias que se requieren para resolver un problema de razón de cambio.

(2) El Problema modelo es resuelto paso a paso, según la metodología tratada en el aula usando los comandos proporcionados por el software.

(3) Problemas propuestos para que los estudiantes resuelvan en forma grupal.

En esta etapa de avance, el concepto de **Esquema** se irá construyendo individualmente en la medida que el estudiante logre darle algún significado a la nueva tecnología y pueda relacionarla con los conceptos matemáticos ya construidos y los que se desarrollarán en los laboratorios siguientes.

Laboratorio N^{o} 4

El Laboratorio N^{o} 4 está orientado a integrar el software con problemas de un nivel de complejidad superior y por tanto de comprensión, que el estudiante ha logrado cuando ha adquirido la concepción de Objeto de la derivada y conceptos afines relacionados con la derivada y sus propiedades, como el concepto de valores extremos para transitar a un desarrollo de Esquema.

El estudiante debe ser capaz, en resumen, de organizar la información, revertir los procesos y resolver el problema. Es importante recordar que en la mayoría de los problemas que se modelan en matemáticas es necesario ir hacia atrás y adelante entre las concepciones de *Proceso y Objeto.*

Además, el estudiante debe ser capaz de extender la potencialidad del software, que incluye desde la situación gráfica del problema en el espacio, la resolución del modelo matemático y la respuesta al problema contextualizado. Los contenidos de este laboratorio son:

[29]Nos referimos a problemas de razón de cambio de una función con una variable real, es decir, sin variables relacionadas.

Contenidos del Laboratorio Nº 4

(1) Reforzar la resolución de problemas de optimización.
(2) Incentivar la creatividad del estudiante mediante situaciones que involucren gráficos en tres dimensiones.

Comentarios

Una primera *Acción* en relación a los laboratorios computacionales será que el estudiante asocie el código simbólico que forman las instrucciones MAPLE con los fenómenos visuales que aparecerán en la pantalla.

Por ejemplo, el estudiante deberá ir de la ecuación o fórmula de la representación de una función matemática a su codificación simbólica. Por lo tanto, realizará actividades asociadas a sus funciones cerebrales izquierdas y desde éstas construcciones a interpretar y visualizar los resultados producidos y/o gráficas producidas por el código, lo que implica que debe realizar actividades cerebrales asociadas al hemisferio derecho y viceversa.

Desde esta perspectiva podemos relacionar nuestro material didáctico con las investigaciones de Flessas (1997), respecto de los estilos cognitivos con la que una persona preferentemente aprende. Se espera que la vinculación de estas actividades con los estilos cognitivos de los estudiantes, en conjunto con el desarrollo de actividades colaborativas, creen un puente de aprendizaje estable en el tiempo.

En nuestro trabajo pretendemos estimular las funciones del dominio cerebral izquierdo, mediante las actividades realizadas en el aula, basadas en los módulos de clases, guías de actividades prácticas y estimular las funciones del dominio cerebral derecho, a través de las actividades realizadas en el laboratorio computacional, con apoyo de la tecnología, a saber el uso del ordenador y del software simbólico MAPLE 8.

Estas actividades que realizamos en un aula interactiva permitirán la visualización espacial de los elementos matemáticos de interés, como el concepto de Derivada y algunas de sus aplicaciones. La idea fundamental es involucrar la actividad de ambos dominios del cerebro para crear retenciones más profundas de las que se podrían crear al usar un solo dominio cerebral, como ocurre habitualmente en la enseñanza tradicional de las matemáticas.

A este respecto varios autores han reflexionado acerca del impacto que tiene el estilo cognitivo sobre la forma en que aprende un estudiante. Un estilo cognitivo es la manera propia que tiene cada persona de percibir, evocar, memorizar y por lo tanto comprender la información percibida a través de diversas modalidades sensoriales. Luria (1973) expone sobre las relaciones entre estilos cognitivos y el funcionamiento cerebral.

Además de los trabajos de Alexander Luria y sus discípulos, Lussier y Flessas (2005) y González y Díaz (2005) han difundido también sus aportes sobre el uso de instrumentos de aprendizaje significativo efectivos como, por ejemplo, los mapas conceptuales que ameritan su éxito debido a que involucran el funcionamiento de ambos dominios cerebrales.

Esto significa que la elaboración de mapas conceptuales involucra entrelazar actividades representacionales espaciales e inteligencia emotiva-intuitiva, asociadas al hemisferio cerebral derecho con actividades de análisis léxico-conceptual y raciocinio abstracto-matemático, las que se asocian al hemisferio cerebral izquierdo.

En primer lugar, el cerebro debe experimentar algo que recibe como un estímulo a través de los sentidos. La información transmitida desde los órganos de los sentidos se mueve a una zona del cerebro llamada *registro sensorial*, que es un lugar para la recepción de los datos.

Aquí la información se mantiene una fracción de segundo, por tanto, el cerebro puede evaluar su importancia. Si se considera importante la información se mantiene y se mueve a la memoria de corto plazo que es *una zona de almacenamiento*, como su nombre lo indica es de *carácter temporal* donde la información se mantiene y es evaluada posteriormente y puede ser retenida unos pocos minutos o unos pocos días más (Walker, 2003).

Si el cerebro decide conservar los datos en forma más permanente son transferidos a la memoria de largo plazo con el fin de mantener la información. El cerebro debe considerar conscientemente lo que es importante y necesario para centrar su atención sobre el tema que quiere recordar al cerrar la mayoría de los otros estímulos. La memoria de largo plazo distribuye y organiza una amplia colección de material y la cantidad de tiempo que la memoria puede almacenar a largo plazo, oscila entre días, meses, años o toda una vida. Es la memoria a largo plazo la que mantiene a una persona con los conocimientos sobre sí mismo y el mundo que le rodea.

La Tabla 3.7 presenta un análisis realizado por Flessas-Lussier sobre las habilidades cognitivas matemáticas según el cuadrante cerebral dominante.

Para nuestro caso particular, *el Aprendizaje de la Derivada y sus Aplicaciones*, hemos diseñado la Tabla 3.8, donde presentamos nuestra descripción de las habilidades cognitivas, sus interrelaciones y su localización en los cuatro cuadrantes del cerebro de este concepto.

Aunque este tema es apasionante no pretendemos desviarnos de lo que nos interesa en forma más específica y por ello haremos un resumen del aporte de estas autoras, que consistió en identificar y definir cuatro estilos cognitivos denominados: secuencial verbal, secuencial no verbal, simultáneo secuencial y simultáneo no verbal (Flessas, 1997).

De acuerdo a esta descripción queda claro que la enseñanza tradicional apunta a desarrollar los estilos cognitivos secuencial verbal y no verbal, es decir el funcionamiento fronto-temporal del

TABLA 3.7. Estilos Cognitivos. Flessas-Lussier

HEMISFERIO IZQUIERDO	HEMISFERIO DERECHO
Estilo Secuencial Verbal	Estilo Secuencial No Verbal
Memorización de tablas.	Precisión en las mediciones.
Secuencias y reversibilidad.	Presentación de los cálculos y operaciones.
Control de algoritmos.	
Resolución de problemas en etapas sucesivas. Operaciones sobre la recta numérica. Operaciones con fracciones. Leyes algebraicas.	
Estilo Simultáneo Verbal	Estilo Simultáneo No Verbal
Resolución de problemas a través de imágenes visuales de la situación. Presentación de los datos de un problema, bajo la forma de esquemas, diagramas o gráficos	Disposición espacial de los cálculos complejos. Multiplicaciones, divisiones. Representación de volúmenes, superficies, rotaciones geométricas. Comprensión por experimentación concreta.

TABLA 3.8. Aprendizaje de la Derivada-Estilos cognitivos

HEMISFERIO IZQUIERDO	HEMISFERIO DERECHO
Estilo Secuencial Verbal	Estilo Secuencial No Verbal
Memorización de los conceptos de derivadas y sus propiedades.	Utilización de sentencias y secuencias en código de comandos MAPLE.
Memorización de tablas de derivadas en etapas sucesivas.	Diagramas de flujos en la resolución de problemas, razón de cambio, optimización, etc.
Resolución lógica de problemas de aplicación de la derivada en etapas sucesivas, razón de cambio, optimización, etc. Algebra de derivadas. Regla de la cadena.	Dado el gráfico de la función derivada determinar el gráfico de la función y viceversa.
Estilo Simultáneo Verbal	Estilo Simultáneo No Verbal
Resolución de problemas a través de la representación visual de imágenes y esquemas. Dado el gráfico de f' deducir el gráfico de f. Representación mental de gráficos o imágenes a partir de enunciados de problemas.	Percepción visual de gráficos asociados a conceptos. Aproximación lineal. Comprensión y creación de gráficos por experimentación concreta.

cerebro. Ellas no sólo presentan estilos cognitivos en el aprendizaje de las matemáticas, sino también en diversas disciplinas tales como Francés, Historia, Música, Artes Plásticas, etc. (Lussier y Flessas, 2005).

Surge entonces la interrogante ¿Cómo se relacionan los estilos cognitivos con el material desarrollado en este trabajo? Desde esta perspectiva creemos que los Módulos de Clases deberían contribuir al desarrollo del:

(1) *Estilo Cognitivo Secuencial Verbal*, al incorporar precisión en los conceptos tratados, ordenamiento lógico de los contenidos e ideas tratadas en el aula, tablas con las derivadas de las funciones elementales, resolución lógica de problemas a través de los procedimientos diseñados para cada problemática, álgebra de derivadas, derivada de la función compuesta, problemas de razón de cambio con variables relacionadas y optimización.

(2) *Estilo Cognitivo Secuencial no Verbal*, a través del ordenamiento lógico en la presentación de los cálculos de derivadas simples, ordenamiento de las etapas en la resolución de problemas que se modelan mediante una derivada y la resolución gráfica de problemas.

(3) *Estilo Cognitivo Simultáneo Verbal*, al interpretar un problema contextualizado (lenguaje común) en lenguaje matemático, representación gráfica de enunciados de problemas en aquellos que es posible, representación gráfica de la derivada de una función en un punto, representación gráfica de la diferencial, de problemas físicos y aplicaciones en general.

(4) *Estilo Cognitivo Simultáneo no Verbal*, al realizar problemas diseñados para una comprensión de los conceptos experimentando en forma concreta en el aula interactiva, al representar problemas de aplicación en el espacio, creatividad de situaciones a partir de la experiencia, en la comprensión de gráficos bidimensionales y tridimensionales.

Si analizamos como se relacionan los estilos cognitivos con los laboratorios computacionales, estos estimularían el desarrollo de las zonas posteriores del cerebro, es decir, las parietales, las actividades diseñadas en estos talleres deberían activar el:

(1) *Estilo Cognitivo Simultáneo Verbal* mediante la resolución de problemas razonados representados mediante tablas, imágenes y gráficos y la experimentación concreta a través de la metáfora concreta del teclado. Es decir, el estudiante debe hacer una representación de un dominio ya conocido para él, abstracto a un dominio blando más concreto y aterrizado.

(2) *Estilo cognitivo simultáneo no verbal*, mediante la representación de figuras planas y sus animaciones, y representaciones espaciales.

Otro elemento que incorporamos como parte de la estrategia de enseñanza en nuestro trabajo es la interacción social y el trabajo colaborativo, de acuerdo al enfoque presentado por Brousseau (1998), en el sentido que es importante incorporar la interacción social y el trabajo colaborativo, como elementos que forman parte de la metodología, como lo es el medio didáctico asociado a las interrelaciones que se producen en una situación didáctica. Debemos recordar que nuestro propósito es la construcción de aprendizaje individual, pero estamos conscientes de la

influencia que provocan las interacciones sociales en el aprendizaje, lo que justifica la metodología que usamos en las clases, teniendo en cuenta que no vamos a realizar un análisis de dichas interacciones.

En resumen, pretendemos crear un entorno educativo para el aprendizaje de la derivada, en el cuál el rol de las interacciones entre estudiantes, profesor, conocimiento y ordenador es relevante.

3.4.4.1. *Descripción de los Laboratorios Computacionales*

(1) De la infraestructura

Hacemos presente que la implementación de los talleres computacionales fue posible debido a nuestra participación en el proyecto MECESUP-UCH0002. De este proyecto logramos equipamiento para una sala de laboratorio con 37 PC de última generación con acceso a internet, más un ordenador de uso del profesor para realizar clases demostrativas, correcciones y talleres guiados proyectando mediante un retroproyector data show.

Comentamos este hecho para describir la dinámica usada en este entorno educativo computacional, que permitirá no solo que los estudiantes puedan experimentar, crear, investigar, sino además la interacción entre estudiantes y la interacción entre estudiantes y profesor.

(2) De la metodología

El profesor entrega un taller a cada alumno en el que se describen las instrucciones que cada estudiante debe realizar para reforzar el aprendizaje de los conocimientos discutidos en el aula. Este taller tiene varios propósitos, entre ellos anclar conocimientos a través de la visualización mediante la pantalla gráfica, desarrollar las facultades de comprensión y creatividad en los estudiantes, reforzar los conceptos discutidos, realizar un nuevo estímulo que reactive su red neuronal de la memoria y así obtener un mejor aprendizaje[30].

El profesor interviene, aclarando, explicando y dando las instrucciones y comandos propios del software para un óptimo aprendizaje. El trabajo realizado por el estudiante le servirá a su vez de problema modelo, puesto que debe familiarizarse con las sentencias, instrucciones y bibliotecas matemáticas que se usarán en las clases sucesivas como base para poder realizar sus trabajos. Por lo tanto, les está permitido que guarden las hojas de cálculos (worksheet). Cada dos talleres, aproximadamente, se realiza un control de laboratorio, cuyo propósito es validar lo aprendido, para ello se procede de la siguiente

[30] **?** lo denomina *aprendizaje significativo*.

manera. Los estudiantes deben desarrollar una pauta en forma individual con evaluación y al término de la sesión del laboratorio deben enviarla al correo electrónico del ayudante de la asignatura para su corrección. Adicionalmente, se les entrega un laboratorio grupal (dos estudiantes por grupo) con evaluación, cuyo objetivo es producir la interacción y generar trabajos colaborativos. Se realizaron seis sesiones prácticas de laboratorio con apoyo del software MAPLE y dos evaluaciones del trabajo con apoyo computacional realizado en forma individual. Las imágenes siguientes muestran una sesión de trabajo.

FIGURA 3.1. Clase de laboratorio computacional

FIGURA 3.2. Estudiantes atendiendo a las explicaciones de la profesora

FIGURA 3.3. Estudiantes consultando los errores cometidos

(3) De las características del software

Se eligió del mercado disponible el software matemático simbólico MAPLE V versión 8, de entre los existentes como Derive o Mathematica, debido a su gran versatilidad y familiar para el estudiante.

La mayoría de los software que existían al momento de la compra estaban más orientados a la realización de cálculos matemáticos, algunos no permitían realizar gráficos en tres dimensiones, no eran simbólicos y no tenían salida al programa editor de latex, ampliamente usado en investigación en el campo científico.

Entre las características más destacables de este software podemos mencionar que:

i) Es un manipulador simbólico,
ii) Posee una gran colección de funciones numéricas,
iii) Tiene capacidad gráfica en 2D y 3D,
iv) Es posible realizar programas en programación avanzada,
v) Tiene una sintaxis similar al FORTRAN, PASCAL o C,
vi) La hoja de cálculo y el editor de texto tiene salidas a LATEX y HTML,
vi) Corre en plataformas UNIX y Windows 95, Windows 98, Windows 2000 y XP.

Este software se adquirió a través del PROYECTO MECESUP-UCH0002 para las cuatro facultades participantes en dicho proyecto, la Facultad de Arquitectura, la Facultad

de Ciencias Químicas y Farmacéuticas, la Facultad de Medicina y la Facultad de Veterinaria con licencia de campus para 1000 estudiantes.

(4) De la estructura y contenido de cada laboratorio

El material se confeccionó en términos de objetivos específicos que están impresos en cada laboratorio.

El *Primer Laboratorio* tiene como finalidad un primer acercamiento entre los conocimientos adquiridos por los estudiantes en la Educación Media y la Informática. Por lo tanto, contiene operaciones elementales, resolución de ecuaciones, graficación de funciones, figuras planas y algunas animaciones a modo de motivación tanto en la parte educativa como una demostración de las potencialidades del software.

El *Segundo Laboratorio* tiene como finalidad introducir en forma gráfica una de las aplicaciones de la derivada en un punto, como la pendiente de la recta tangente en ese punto. Aplica la animación para que el estudiante observe el desplazamiento continuo de la recta tangente a medida que desplazamos el punto donde debe calcular la derivada.

El estudiante debe relacionar el significado geométrico de la derivada con el significado formal y con la sintaxis del software. Además este laboratorio contempla ejercicios para realizar individualmente y trabajo grupal, que deben ser resueltos y discutidos en grupos de a dos integrantes al término de una semana y enviarlo por e-mail para su evaluación.

El *Tercer Laboratorio* está orientado a ilustrar aplicaciones de la derivada, usando MAPLE en particular problemas de variables relacionadas. Está estructurado al igual que los laboratorios anteriores, considerando las bibliotecas necesarias, instrucciones y comandos involucrados, un problema modelo y problemas propuestos que deberán realizar los estudiantes.

El *Cuarto Laboratorio* está orientado a desarrollar en el estudiante habilidades y destrezas cognitivas relacionadas con niveles superiores del conocimiento, además de incluir graficación en tres dimensiones. Como se comentó anteriormente, el propósito es que el estudiante aprenda y estimulemos en él, los modos cognitivos simultáneo verbal y simultáneo no verbal y por otra parte aplicar la derivada en la resolución de problemas de optimización.

Los laboratorios 1, 2 y 3 más las actividades para la evaluación fueron diseñadas y confeccionadas por la investigadora en su rol de profesor. El último laboratorio fue confeccionado por un equipo que formó parte del Proyecto MECESUP UCH0002.

Todos los laboratorios están incluidos en el *Anexo N^o 2: Laboratorios Computacionales* con su correspondiente descripción de los objetivos de cada uno, tal como fueron presentados y han sido

transferidos directamente de la hoja de trabajo que muestra el software MAPLE en la pantalla del ordenador.

Otra de las bondades del entorno computacional es que abre oportunidades a los estudiantes, ya que ellos pueden verificar sus resultados parciales y finales, como es el caso del estudio analítico de una función. En esta problemática, el estudiante puede seguir etapa por etapa si su desarrollo es correcto y comparar su representación gráfica realizada manualmente con la solución gráfica que le entregará el ordenador.

Además, como las actividades prácticas no están rígidamente establecidas el estudiante podrá explorar otros rasgos de la estructura de los objetos, relaciones y registros representacionales que le suministra este micromundo computacional.

La manipulación directa de objetos matemáticos hace posible la experimentación en dominios que anteriormente eran inaccesibles para el estudiante. Además, su conocimiento queda marcado por la relación dialéctica entre percepción y conceptualización durante la interacción con la interfase del sistema.

Dentro de este contexto es importante conocer como información adicional otros antecedentes de nuestro modelo cognitivo antes de la intervención didáctica. Nos referimos a los fundamentos biológicos del modelo discutidos por Tall.

3.5. Instrumentos de Obtención de Información

Recordamos que nuestro estudio se realizó en el curso 2 de la Asignatura Matemáticas I de Primer Año, que fue asignado al investigador en su calidad de profesor. Específicamente, corresponde al curso de la carrera de Ingeniería en Alimentos de la Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas de la Universidad de Chile.

Seleccionamos una muestra que consta de cuatro casos, cuyo criterio de selección fue discutido en la sección 3, de este capítulo.[31] Para la medición o recolección de datos usaremos instrumentos secundarios y dos Instrumentos Principales o de Análisis.

Los instrumentos secundarios son el conjunto de evaluaciones aplicadas durante el transcurso de un semestre que es la duración de la asignatura [32]y cuyo resultado final permite la aprobación o reprobación de la asignatura. Este conjunto de evaluaciones está formado por:

- Evaluaciones formativas (Cuatro)
- Evaluaciones de las actividades desarrolladas en los laboratorios computacionales (Dos)
- Evaluaciones Acumulativas (Dos)
- Prueba Recuperativa
- Examen

Los instrumentos de análisis son:

- Prueba de Medición de Estándares
- Encuesta de Validación

La Prueba de Medición de Estándares (PME) tiene como objetivo evaluar los estándares de aprendizaje establecidos como resultado del proyecto MECESUP UCH-0002 y que fija estándares terminales de aprendizaje para un curso de Cálculo Diferencial e Integral [33], que responden entre otras interrogantes a la pregunta de cuán adecuado es el desempeño del estudiante.[34] (Altimiras et al, 2004). Se definieron cuatro niveles de estándares enumerados del 1 al 4, correspondiéndole a nuestra facultad el nivel 2 debido al carácter de las carreras que se imparten en ella. (Ibid, p.7) [35]

[31] Recordamos que la selección consideró dos criterios, seleccionar alumnos de tres niveles diferentes de conocimientos y disposición de los estudiantes de colaborar en rendir evaluaciones post- asignatura.

[32] El curso completo tiene una duración de un año, dividido en dos semestres. El estudio de la derivada y sus aplicaciones corresponde al segundo semestre.

[33] Su objetivo es conocer el resultado final del curso. No se contempló en este MECESUP estándares para describir el proceso de avance de un curso.

[34] Estos estándares se definieron para cinco facultades de la Universidad de Chile y participaron en el Proyecto académicos de siete facultades.

[35] "Se trata de un curso formal de cálculo de un año de duración. Este curso debe poner énfasis en la contextualización de la matemática. Este curso puede ser terminal para algunas carreras, pero puede ser el primero de una serie de cursos más avanzados de matemáticas".

3.5.1. Definición de los Estándares para un Curso de Cálculo Diferencial

Como se comentó anteriormente en esta tesis, los estándares se definieron dentro del marco del Proyecto MECESUP UCH-0002, *Innovación programática y Metodológica para la Enseñanza de las matemáticas de la Física y la Estadística*. Este proyecto fue financiado en forma conjunta por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) y la Universidad de Chile.

3.5.1.1. *Estándares de Aprendizaje*

Los estándares de Aprendizaje requieren que se explicite lo que se espera que los estudiantes sepan y sean capaces de hacer. Nacen de la necesidad de responder a la pregunta de cuán adecuado es el desempeño del alumno.

Para implementar este trabajo y facilitar la comprensión se diseñaron actividades que contribuyan a que los estudiantes puedan lograr los objetivos planteados y además a transmitir el significado que tiene un estándar, puesto que son las metas que ellos deben alcanzar. Los estándares van acompañados de indicadores de logro que permiten medir si éstos objetivos han sido alcanzados.

Esta definición de estándares además de homogeneizar los contenidos programáticos de las mallas curriculares en matemáticas de los estudiantes, que pertenecen a cinco de las siete facultades participantes, permite que a priori conozcan lo que se espera de ellos y puedan saber en todo momento su nivel de avance y a qué distancia están de satisfacer los propósitos del curso.

Un estándar es una declaración de aprendizaje esperado y uno o más ejemplos de problemas que permitan decidir si éste se ha logrado.

3.5.1.2. *Clasificación de los Estándares*

En nuestros cursos distinguiremos dos tipos de estándares, los de habilidad de pensamiento y los de habilidades operacionales.

1. Estándares referentes a habilidades de pensamiento

Son aquellos que se relacionan con la comprensión más profunda de estructuras cognitivas de los estudiantes, desarrollo de demostraciones, formulación de modelos, etc.

(1) Habilidad de modelar.
(2) Habilidad de razonar.

2. Estándares referentes a habilidades operacionales.

Son aquellos que están asociados a la aplicación de algunas reglas del Cálculo Diferencial e Integral, memorizar ciertos temas, etc.

(1) Habilidad para resolver problemas rutinarios.
(2) Habilidad para usar tecnologías.

3.5.1.3. *Estándares para la Sección de Cálculo Diferencial.*

Como objetivo terminal de este tema esperamos a través de los indicadores logro que el estudiante:

(1) "Comprenda el concepto de derivada y sus interpretaciones." (Altimiras et al, 2004) (p.55)
(2) "Conozca y maneje la definición formal de derivada". (Ibid, p.56)
(3) "Aproxime raíces de ecuaciones usando el método de Newton". (Ibid, p.57)
(4) "Comprensión del teorema: Toda función diferenciable es continua". (Ibid, p.58)
(5) "Use correctamente las reglas de derivación". (Ibid, p.59)
(6) "Comprenda el teorema del valor medio para las funciones diferenciables". (Ibid, p.61)
(7) "Analice límites usando la regla de L'Hopital". (Ibid, p.62)
(8) "Analice funciones mediante el cálculo diferencial". (Ibid, p.63)[36]
(9) "Comprenda y aplique criterios de optimalidad". (Ibid, p.64) [37]
(10) "Sea capaz de modelar problemas con variables relacionadas". (Ibid, p.65)
(11) "Sea capaz de modelar y resolver situaciones concretas mediante ecuaciones diferenciales". (Ibid, p.66)

Las Pruebas de Medición de Estándares (PME) cumplen algunas características de las cuales se mencionan las que son aplicables a nuestro caso. (Altimiras et al, 2004) (p.9 -11) [38]

La PME no tuvo consecuencia para la aprobación de la asignatura de Matemáticas I. La PME se confeccionó en base a los estándares de aprendizaje definidos previamente, los cuales son conocidos por todos los actores.

[36] Se refiere al análisis cualitativo de funciones mediante Cálculo Diferencial.

[37] Este estándar se refiere a la aplicación de los criterios para determinar máximos y mínimos.

[38] Resumiremos estas cuatro características:

- "La PME es una prueba que se toma al final del curso
- La PME no es una prueba parcial ni semestral
- La PME tiene consecuencias para los alumnos
- Las PME se confeccionan en base a los estándares definidos previamente, los cuales son conocidos por todos los actores: profesores, alumnos y autoridades académicas. Desde el momento que un estándar de aprendizaje se ha sido definido como tal, es potencialmente preguntable en la PME".

Esta prueba por su característica Nº 1 es el instrumento que se usará para analizar el aprendizaje construido por cada estudiante aplicando el modelo cognitivo APOS.

Se presenta esta prueba y analizaremos el objetivo de cada indicador de logro mirado desde dos dimensiones; a qué estándar de aprendizaje corresponde el indicador de logro y cómo se relaciona con nuestro modelo cognitivo.

3.5.2. Prueba de Medición de Estándares (PME)

Relación entre la Prueba de Estándares y los Estándares de Aprendizaje

De los 11 estándares de aprendizaje para un curso de cálculo diferencial se escogieron aquellos que miden el aprendizaje de los temas que, a juicio del profesor del curso, son de mayor importancia para los estudiantes en cuánto a utilidad y aplicabilidad, y que, por lo tanto, interesa indagar sobre su aprendizaje.

Hemos seleccionado para nuestro análisis los estándares relacionados con el concepto formal de derivada, cálculo de la derivada de funciones elementales, aplicación de la derivada al análisis cualitativo de una función y modelado y resolución de problemas que se representan mediante una ecuación diferencial. Es decir, aquellos relacionados con el reconocimiento y comprensión del concepto en estudio, operatoria básica y dos aplicaciones importantes que servirán de base para el curso del nivel siguiente, la asignatura de Matemáticas II.

El resultado es la siguiente prueba denominada Prueba de Medición de Estándares:

Las alternativas correctas de la prueba de estándares se presentan en la tabla 3.9:

TABLA 3.9. Instrumento de Análisis. P_i indica el problema número i

Indicadores de logro	Respuestas
Pregunta 1	v)
Pregunta 2	ii)
Pregunta 3	iv)
Pregunta 4	iv)
Pregunta 5	v)
Pregunta 6	abierta
Pregunta 7	i)
Pregunta 8	iii)
Pregunta 9	i)
Pregunta 10 Desarrollo	iii) abierto

UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. CS. QCAS Y FARMACÉUTICAS
Matemáticas I 2004
Prof. María Angélica Vega Urquieta.

NOMBRE:……..

PRUEBA DE MEDICIÓN DE ESTÁNDARES.

1.- La derivada de una función ordenada en el punto x_0 es el número obtenido mediante la expresión:

i) $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

ii) $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0}$

iii) $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h)}{h}$, si existe

iv) $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0}$, si existe

v) $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, si existe

Justifica tu respuesta.

2.- La derivada en el punto x_0 es un número que geométricamente representa:

i) La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$
ii) La pendiente de la recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$
iii) La pendiente de la recta que pasa por el punto $(x_0 + h, f(x_0 + h))$
iv) El valor del área de un rectángulo de altura $f(x_0)$
v) El valor del área bajo la curva $f(x)$ entre los puntos x_0 y $x_0 + h$

Justifica tu respuesta.

3.- Se define la función derivada de la función $f(x)$ que denota $f'(x)$ por

i) $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

ii) $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{x}$

iii) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)}{h}$, si existe

iv) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si existe

Justifica tu respuesta.

4.- $y = \frac{1}{12}x^6$, entonces la función derivada es:

i) $y' = 6x^5$

ii) $y' = \frac{1}{12}\frac{x^7}{7} = \frac{1}{84}x^7$

iii) $y' = \frac{x^6}{72}$

iv) $y' = \frac{1}{2}x^5$

v) $y' = \frac{1}{72}x^5$

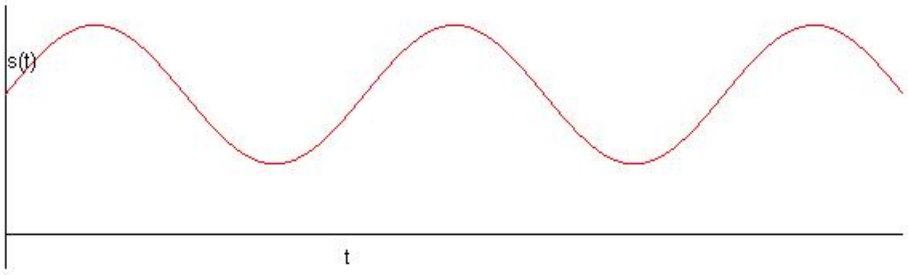
Justifica tu respuesta.

5.- ¿Cuál (Cuáles) de las siguiente(s) informacione(s) es (son) verdadera(s)?,

i) Si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$, $f'(x) > 0$ y la gráfica es cóncava entonces $f'(x)$ es creciente.
ii) Si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$, $f'(x) > 0$ y la gráfica convexa entonces $f'(x)$ es decreciente.
iii) Si $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$, $f'(x) < 0$ y la gráfica es cóncava $\Rightarrow$ $f'(x)$ es creciente.
iv) Si $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$, $f'(x) < 0$ y en la gráfica convexa entonces $f'(x)$ es decreciente.
v) Ninguna de las anteriores.

Justifica tu respuesta.

6.- El siguiente es el gráfico de la posición de un móvil que se mueve en línea recta. ¿Qué sucede con el móvil cuando el gráfico alcanza la cresta de una loma.



Justifica tu respuesta.

7.- Si la derivada de una función $f(x)$ al cruzar el punto $x_0 \in Df$ cambia de positiva a negativa implica que:

i) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo relativo
ii) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo absoluto
iii) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo relativo
iv) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto
v) $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión

Justifica tu respuesta.

8.- Si la derivada de una función $f(x)$ al cruzar el punto $x_0 \in Df$ cambia de negativa a positiva implica que-.

i) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo relativo
ii) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo absoluto
iii) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo relativo
iv) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto
v) $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión.

Justifica tu respuesta.

9.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?.

i) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en x_0
ii) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un máximo local en x_0
iii) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un mínimo local en x_0
iv) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$ entonces f tiene un punto de inflexión en x_0
v) Ninguna de las anteriores.

Justifica tu respuesta.

10.- Un modelo para la propagación de un rumor dice que la razón de propagación es proporcional al producto entre el número de personas que han escuchado el rumor y el número de personas que no lo han escuchado.

En un pueblo de 1500 habitantes, Juanita recibe de su novio un anillo de brillantes y le cuenta a sus amigas más cercanas, de manera que el lunes, 8 personas conocen la noticia. El miércoles de la misma semana 80 personas se han enterado.

La ecuación diferencial que representa el problema es:

i) $\frac{dP}{dt} = k(1500 - P)$

ii) $\frac{dP}{dt} = kP$

iii) $\frac{dP}{dt} = kP(1500 - P)$

iv) $\frac{dP}{dt} = 1500P$

v) $\frac{dP}{dt} = P(1500 - P)$

Determina la solución general de la ecuación diferencial.

- Las preguntas Nº 1 y Nº 2 corresponden a un indicador de logro para medir el aprendizaje del estándar Nº 1: Comprende el concepto de derivada y sus interpretaciones.
- La pregunta Nº 3 corresponde a un indicador de logro para medir el aprendizaje del estándar Nº 2: Conoce la definición formal de derivada.
- La pregunta Nº 4 corresponde a un indicador de logro para la medición del estándar Nº 5: Usa correctamente las reglas de derivación.
- La pregunta Nº 5 corresponde a un indicador de logro para la medición del aprendizaje del estándar Nº 8: Analiza funciones mediante el cálculo diferencial.
- La pregunta Nº 6 corresponde a un indicador de logro para la medición del aprendizaje del estándar Nº 8: Analiza funciones mediante el cálculo diferencial.
- La pregunta Nº 7 corresponde a un indicador de logro para medir el aprendizaje del estándar Nº 9: Comprende y aplica criterios de optimalidad.
- La pregunta Nº 8 corresponde a un indicador de logro para medir el aprendizaje del estándar Nº 9: Comprende y aplica criterios de optimalidad.
- La pregunta Nº 9 corresponde a un indicador de logro para medir el aprendizaje del estándar Nº 9: Comprende y aplica criterios de optimalidad.
- La pregunta Nº 10 corresponde a un indicador de logro para medir el aprendizaje del estándar Nº 11: Es capaz de modelar y resolver situaciones concretas mediante ecuaciones diferenciales.

3.5.2.1. *Relación entre la Prueba de Estándares y el Modelo Cognitivo APOS*

Como comentamos en la sección anterior, la Descomposición Genética de un concepto comienza con una Acción.

I) Los indicadores de logro correspondiente a la pregunta Nº 1 de la prueba de estándares miden el reconocimiento y comprensión del concepto de la derivada en un punto. Este conocimiento es el inicio del estudio de la derivada, es la base donde se sustenta toda la teoría matemática sobre la derivada y sus aplicaciones. Por su simplicidad corresponde a un nivel de aprendizaje de Acción.

   Este indicador de logro evidencia el aprendizaje declarado en el estándar Nº 1: *Comprende el concepto de derivada y sus interpretaciones.*

II) La pregunta Nº 2 también corresponde a la medición del estándar Nº 1. En cuanto al nivel de aprendizaje es uno superior al anterior, puesto que el estudiante debe realizar una conexión con la interpretación geométrica del concepto. Es decir, según nuestro modelo APOS correspondería a una interiorización de la Acción para transitar a un Proceso del concepto.

Para responder ambas preguntas se requiere que previamente el estudiante haya logrado el nivel de Esquema de un límite al infinito, para anclar el concepto de derivada. Por lo tanto, estas preguntas corresponden respectivamente a una Acción y un Proceso del concepto de derivada en un punto. Están involucradas las capacidades de identificar conceptos, notaciones y gráficos.

III) La pregunta N^o 3 es un indicador que mide el estándar N^o 3: *Conoce la definición formal de derivada.* Requiere que el estudiante sea capaz de discriminar entre el concepto de *derivada en un punto* y el concepto de *función derivada*.

Ambos conceptos se definen a partir de un límite similar, pero con un significado muy diferente; por lo tanto el estudiante debe reconocer y comprender el significado de ambos conceptos.

Requiere de la capacidad de transferencia y generalización lo que demanda una mayor capacidad de abstracción. Esta etapa es importante para poder internalizar el concepto de derivada como función y lograr convertir el concepto en un *Proceso* para transitar a un Objeto derivada.

IV) La pregunta N^o 4 mide la operatoria de cálculo más básica de la función derivada, corresponde al estándar N^o 5: *Usa correctamente las reglas de derivación.* El propósito de este tipo de ejercicios es que permiten por repetición, que el estudiante internalice el procedimiento de cálculo y lo extienda al cálculo de derivadas de potencias de exponente entero, racional y decimal, y de allí pueda extenderlo en forma natural a las funciones polinómicas.

Este nivel requiere de habilidad y destreza para la operatoria de cálculo de derivadas, es uno más alto que la pregunta anterior; el estudiante debe tener la comprensión de *Proceso Derivada.* Debe ser capaz de ir de la aplicación de las propiedades de la derivada a la definición del concepto y de éste a las propiedades, lo que Dubinsky denomina encapsular el Proceso, es decir, un *Objeto Derivada*.

Con este indicador verificaremos si los estudiantes son capaces de aplicar y manejar el concepto sin influencias externas, encapsular el *Proceso derivada* para convertirse en *Objeto derivada*.

V) La pregunta N^o 5 mide el estándar de aprendizaje N^o 8: *Analiza funciones mediante el cálculo diferencial.* El estudiante debe haber desarrollado la habilidad de extender el concepto de la derivada de una función, relacionándolo con las características analíticas de las funciones como crecimiento y decrecimiento. Suponemos que en el curso anterior los estudiantes han desarrollado la concepción de *esquema de una función.*

Esta pregunta podría resultar difícil de responder porque el estudiante debe discriminar entre 4 asertos si son falsos o verdaderos para responder la pregunta. Pero, este indicador mezcla propiedades de la primera derivada con propiedades de la segunda derivada desde la perspectiva gráfica. Luego el estudiante tiene que ser capaz de aplicar el concepto matemático a situaciones donde algunos conceptos se relacionan con sus propiedades en forma explícita y otros dados en forma implícita. Se le entregan cinco proposiciones y el estudiante debe discriminar, relacionar derivada con monotonía, la segunda derivada con concavidad y representación gráfica de los conceptos.

En resumen, resolver cuatro problemas que involucran otras estructuras, para cuya solución el estudiante debe ser capaz de transitar por todas las etapas de aprendizaje, reflexionar sobre el Proceso, pensarlo a la inversa, es decir, *Objeto derivada*; luego, relacionar los esquemas de los que dispone[39], es decir ha desarrollado un Pre-esquema[40] del concepto de derivada.

VI) La pregunta N^o 6 es un indicador que mide el estándar de aprendizaje N^o 8: *Analiza funciones mediante el cálculo diferencial.* En esta pregunta se relaciona la geometría del concepto de la derivada de una función con los conceptos de valores extremos locales de una función en un contexto físico.

Aunque este indicador está planteado en forma más simple que la pregunta N^{o}5, el estudiante requiere de las capacidades de relacionar la comprensión gráfica, inferir relaciones entre los elementos del problema además debe relacionar la matemática y el concepto físico.

En resumen al igual que la pregunta anterior, el estudiante debe ser capaz de relacionar tres esquemas, la estructura derivada[41] con el esquema valores extremos locales de una función y el esquema de representaciones gráficas.

VII) Las preguntas N^o 7 y N^o 8 son indicadores de logro del estándar N^o 9: *Comprende y aplica criterios de optimalidad*.

Para responder ambas preguntas el estudiante debe relacionar el criterio de la primera derivada con el concepto de valores extremos de una función, puntos de inflexión e indirectamente con la representación gráfica de una función.

En la pregunta N^o 7 y en la pregunta N^o 8 se trata de identificar la caracterización de un valor máximo o un valor mínimo o un punto de inflexión.

Para desarrollar estos problemas el alumno requiere de las capacidades de análisis y síntesis, discriminar y sacar conclusiones a partir de la información dada. Es decir, el

[39] Esquema de propiedades cualitativas de las funciones, Esquema de graficación y el Esquema de derivada.

[40] Nivel Inter.

[41] Esquema Nivel Inter.

estudiante debe haber desarrollado un nivel de pre-esquema[42] de la derivada, valores extremos, relacionar ambos esquemas y vincularlos con la perspectiva gráfica.

VIII) La pregunta N^o 9 está orientada al reconocimiento y la comprensión de valores extremos locales, puntos de inflexión de una función y relacionar estos conceptos con la función segunda derivada. Es un indicador de logro del estándar N^o 9: *Comprende y aplica criterios de optimalidad*.

El estudiante debe demostrar su capacidad de transferencia y generalización de conceptos, lo que demanda una mayor abstracción y manejo de la información en diversas formas. Es decir, relacionar el pre-esquema de la derivada de una función, con el pre-esquema de las características cualitativas de una función.

En este nivel de dominio de los conceptos, el estudiante posee una sub-estructura en que debe mirar el concepto de la derivada y sus aplicaciones como un todo, en este momento su aprendizaje evoluciona al nivel Trans de un esquema.

IX) La pregunta N^o 10 es un indicador de logro del estándar N^o 11: *Es capaz de modelar y resolver situaciones concretas mediante ecuaciones diferenciales.*

Este estándar requiere que el estudiante tenga habilidades cognitivas de análisis, síntesis y modelación; debe concebir el *esquema de derivada* como *objeto* en el sentido de aplicar *acciones y procesos*. Es decir, la etapa de desarrollo Trans para relacionar la derivada, algoritmos de solución de la fenomenología planteada. El estudiante debe haber logrado formar una estructura subyacente de modelación de fenómenos para relacionarlo con la estructura de derivación e integración de funciones. Es decir, su nivel de aprendizaje es un esquema nivel Trans.

[42] Esquema Nivel Inter - Trans.

3.6. Instrumentos de Análisis

Para el estudio, recolección de la información y aplicación de nuestros Instrumentos de Análisis, extraeremos las creencias y opiniones de los estudiantes según las técnicas de *Análisis de Contenido* de Bardin (1996)(p. 5), quien afirma que la finalidad es: "La identificación y explicación de las representaciones cognoscitivas que otorgan el sentido a todo relato comunicativo". Según el autor, toda comunicación, incluso si se produce cara a cara, siempre considerará objetos de referencia con respecto los cuales, unos actores intercambian datos con otros.

Precisando un poco más las ideas de Bardin (1996), el análisis de contenidos es un *conjunto* de instrumentos metodológicos o técnicas de análisis de comunicaciones, destinado a obtener indicadores,[43] mediante procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes, que permiten inferir sobre los conocimientos relativos a las condiciones de producción/recepción de esos mensajes.

Desde el punto de vista de la interpretación, el análisis de contenido se mueve entre dos ejes, uno el del rigor de la objetividad y el otro el de la fecundidad de la subjetividad, siendo el mayor interés del análisis de contenido, aparte de sus funciones heurísticas y verificativas, la obligación que impone prolongar el tiempo de latencia[44] entre las intuiciones o hipótesis de partida y las interpretaciones definitivas.

Hay tres aspectos relevantes que caracterizan al análisis de contenido: el campo de aplicación, el procedimiento y la finalidad.

Para nuestro Primer Instrumento la Prueba de Medición de Estándares (PME), el marco de la normativa son los 11 estándares ya definidos en la publicación (Altimiras et al, 2004). De ellos seleccionamos los que a juicio del investigador, como profesor son los más representativos desde el punto de vista de la comprensión del concepto y algunas aplicaciones de los que posteriormente mediremos el nivel de aprendizaje de los estudiantes.

Estos estándares seleccionados serán nuestros indicadores de análisis u organizadores y que también según la literatura se denominan categorías. Los indicadores de análisis incluyen tanto a las categorías como a las subcategorías, que son subdivisiones de una categoría cuando esta es muy extensa.

[43] Que pueden ser cuantitativos o no.

[44] Es decir, el tiempo que transcurre entre un estímulo y la respuesta que produce.

3.6.1. Prueba de Medición de Estándares

De los 11 estándares definidos para el curso de Cálculo Diferencial nuestro instrumento de análisis la Prueba de Medición de Estándares evalúa seis. En la Tabla 3.10 se muestran los estándares seleccionados, indicando además cuáles son los indicadores de logro que miden dicho estándar y su relación con el nivel de aprendizaje según el modelo cognitivo APOS.

TABLA 3.10. Instrumento de Análisis. P_i indica el problema i

Estándares u Organizadores e Inidicadores de Logro	Acción	Proceso	Objeto	Esquema
Comprende el Concepto de derivada y sus interpretaciones I. de logro: P1 y P2	P1	P2		
Conoce la definición formal de derivada. I. de logro: P3		P3		
Usa correctamente las reglas de derivación. I. de logro: P4			P4	
Analiza funciones mediante el cálculo diferencial. I. de logro: P5, P6, P7				P5 P6
Comprende y aplica criterios de optimalidad. I. de logro: P8, P9				P7 P8 P9
Es capaz de modelar y resolver situaciones concretas mediante ecuaciones diferenciales. I. de logro: P10				P10

Los resultados obtenidos por los estudiantes de la muestra en la Prueba de Medición de Estándares se presentarán codificados en el *Capítulo 4: Análisis y Discusión de los Resultados*.

1: Logrado

0: No logrado

Esta prueba se aplicó después de ocho meses de la dictación del curso, debido fundamentalmente a que los estudiantes de la carrera de Ingeniería en Alimentos se trasladan físicamente. El traslado demora 30 minutos en locomoción pública, ya que están separados geográficamente el campus Olivos, lugar donde tiene su oficina la doctorando y el campus Vicuña

Mackenna donde se concentra la unidad académica a la que pertenecen estos estudiantes. Este hecho dificulta contactar a los estudiantes, interactuar con ellos y realizar más evaluaciones, ya que depende de sus disponibilidades de tiempo para colaborar en este trabajo optativo. Creemos que ocho meses después fue un plazo prudente para realizar un estudio del conocimiento construido en el transcurso de la asignatura.

La Prueba de Medición de Estándares, como instrumento de análisis, tiene como propósito principal conocer el nivel de la comprensión alcanzada por los estudiantes en el aprendizaje del concepto de la derivada y algunas de sus aplicaciones, usando el modelo cognitivo APOS, propuesto por Dubinsky. Las pruebas de medición de los estándares y sus correspondientes desarrollos y respuestas por cada estudiante se encuentran en el *Anexo 5: Prueba de Medición de Estándares*.

3.6.2. Análisis de Creencias

Otro instrumento que se aplicará y se analizará es la Encuesta de Validación. Para nosotros es de vital importancia porque será un referente sobre el rol de los recursos utilizados como material didáctico en la estrategia de enseñanza.

Al igual que la Prueba de Medición de Estándares, la encuesta se aplicó con posterioridad al término del curso. Se recogerá las creencias y opiniones respecto de sus experiencias con la interacción del material didáctico utilizado los módulos de clases, laboratorios computacionales y algunas opiniones respecto del entorno social que se genera al interactuar con sus pares y profesor. Se adjunta la Encuesta de Validación y las creencias de los estudiantes en el *Anexo 6: Encuesta sobre las Creencias de los Estudiantes*.

Creemos que es importante la opinión y creencias de los estudiantes respecto de su propio aprendizaje, como instrumento de retroalimentación para el profesor, tanto para perfeccionar la estrategia de aprendizaje como para mejorar el material didáctico usado y ensayar la implementación de nuevas "metodologías de enseñanza".

Este instrumento está formado por un total de 21 preguntas, de las cuáles 5 reúnen las creencias de los estudiantes respecto del rol de los módulos de clases en el aprendizaje de la derivada, 8 para recoger las creencias sobre el rol del laboratorio computacional y 8 se proponen para recoger la opinión respecto de la interacción de los estudiantes con el material e implementación ofrecida. En general esta encuesta permitirá dar respuesta a la interrogante:

¿Cuál es la opinión y rol que le atribuyeron los estudiantes al entorno educativo creado y al material diseñado?

Siguiendo con las ideas de Bardin (1996) la concepción del lenguaje es representacional, puesto que se considera que el lenguaje representa o refleja directamente a quien lo utiliza. Luego se puede definir indicadores explícitamente en la comunicación para hacer inferencias sobre el sujeto emisor, en nuestro caso la muestra de los cuatro estudiantes.

Se considera para nuestro estudio una gran categoría, el aprendizaje y como subcategorías los Módulos de Clases y los Laboratorios Computacionales. En psicología social se caracterizan las actitudes por su dirección e intensidad. Estas dos dimensiones se utilizan en el Análisis de Aserción Evaluativa de Osgood para definir y medir actitudes.

En la primera columna se encuentran los organizadores de la información, luego en la segunda las preguntas que permitirán obtener la información acerca de las creencias de los estudiantes.

En la tercera columna está la dirección de la creencia, que es binaria, puesto que la opinión puede ser a favor o en contra, aprobatoria o reprobatoria, buena o mala, etc. En nuestro trabajo codificaremos esta dimensión asignando:

Si: 1

No: 0

En la cuarta columna se agrega un filtro, que incluye todo análisis de contenido, una columna con la palabra *Útil* para indicar en nuestro caso, si la respuesta permite obtener información respecto de lo que se pregunta. Si la unidad de información es coherente y permite recoger una opinión se clasifica, de lo contrario, se descarta. Es decir, no se considerarán las unidades de información en las que el estudiante responda algo que no tiene coherencia con la pregunta.

Esta columna permitirá clasificar las respuestas y se codificará con símbolos literales:

Si la unidad de información clasifica o es útil: C

Si la unidad de información no responde la pregunta: D

En la quinta columna se clasifica la calidad del aporte de la unidad de información y se usa la siguiente codificación:

Si la unidad de información no es un aporte a lo que se pregunta: 0

Si la unidad de información es un aporte indirecto en relación a la pregunta: 1

Si la unidad de información es un aporte directo y real en relación a la pregunta: 2

Para completar la descripción de las columnas de la Tabla 3.11 faltaría precisar cómo se definieron los organizadores.

Para el Análisis de los Módulos de Clases se definieron cinco organizadores en función de la información que interesa recopilar de las creencias de los estudiantes.

El primer organizador tiene como objetivo estructurar la información en relación a la presentación de los Módulos de Clases. Interesa conocer la opinión de los estudiantes para tener una retroalimentación acerca del material y poder realizar un mejoramiento de ellos. Es nuestro interés saber si la estructura del Módulo es la adecuada, si la forma de tratar los temas es comprensible para el estudiante, y por último, si las actividades son consideradas simples, medias o complejas desde la óptica del estudiante.

El segundo organizador es el elemento que tiene relación con los beneficios que podrían proporcionar los módulos de clases a los estudiantes o que importancia le atribuyen.

Bajo el tercer organizador se recopilarán las sugerencias de cómo mejorar los módulos de clases desde la perspectiva del estudiante, considerando que el primer organizador no fue lo suficientemente explícito para investigar la organización del módulo.

El cuarto organizador reúne dos propósitos. Uno sí es posible realizar un cambio en los módulos de clases, no en la forma sino en el fondo de modo que proporcionen un aprendizaje más perdurable en el tiempo. Por otra parte, se manifiesta que se quiere un material que permita o ayude a obtener un aprendizaje de un nivel cognitivo superior. Ausubel le llama aprendizaje significativo y según nuestro modelo cognitivo APOS sería al menos un aprendizaje a nivel de objeto o proceso encapsulado.

El quinto organizador tiene relación con la comprensión de los contenidos escritos. La experiencia me ha demostrado que la mayoría de los estudiantes no entienden los conceptos matemáticos cuando leen desde un documento escrito, sea apunte o texto. Esto los induce a aprender los conceptos de memoria sin un razonamiento que ayude a la comprensión de los mismos. Por lo tanto, este organizador apunta al aprendizaje de los estudiantes en el sentido de indagar a través de la pregunta de obtención de información, si al tener una explicación primero en el aula los estudiantes tienen menos dificultad para aprender al estudiar un texto matemático escrito, no elaborado por ellos.

Se destaca que las preguntas relacionadas con los organizadores descritos, en la encuesta original (Anexo 6) aparecen en otro orden, puesto que en ella se incluyeron preguntas que recogen información sobre las creencias de los estudiantes respecto a la interacción social, que no es parte de este estudio.

En la Tabla 3.11 se presenta un resumen de los elementos que forman el Instrumento de Análisis, elaborado para recoger información respecto de los Módulos de Clases y en la Tabla 3.12 el Instrumento elaborado para obtener la información correspondiente a los Laboratorios Computacionales.

TABLA 3.11. Instrumento de Análisis para los Módulos de Clases (MC).

Organizador	Preguntas para la obtener la Información	Dirección de la Creencia	La Creencia ¿Es útil?	Calidad del aporte
Estructura Tratamiento Actividades	¿Los (MC) están bien estructurados? ¿El tratamiento de los temas es adecuado? ¿Las actividades que incluyen son pertinentes			
Beneficios	¿Los (MC) te reportaron algún beneficio?			
Mejoras del (MC)	¿Quieres sugerir alguna mejora?			
Mejoras orientadas	Sugerencias a los (MC) para un aprendizaje más perdurable			
Comprensión de los conceptos	¿Sirven para comprender los conceptos que no se entendieron en el aula?			

La codificación usada para recopilar la información respecto de los Módulos de Clases es la misma utilizada para los Laboratorios Computacionales.

Para el caso de los Laboratorios Computacionales se definieron ocho organizadores:

El primero de los organizadores se definió con el fin de reunir información sobre posibles dificultades para entender y familiarizarse con la sintaxis del software, aunque MAPLE fue escogido por tener un lenguaje simbólico matemático amigable para el estudiante.

El segundo organizador es importante para esta investigación porque es el elemento que permitirá concentrar la información obtenida de la opinión de los estudiantes, en relación al aporte del software en la comprensión de los temas tratados en el aula de clases.

El tercer organizador reúne la información en relación a sí el estudiante sería capaz de extender la herramienta computacional a otras disciplinas afines.

El cuarto organizador es similar al cuarto organizador de los Módulos de Clases en el sentido de obtener aprendizajes de nivel cognitivo superior a través de la tecnología.

El quinto organizador se definió con el objetivo de que el estudiante pueda sugerir desde su perspectiva como aprender mejor.

A través del sexto organizador se pretende concentrar información respecto de si el estudiante cree que es importante el apoyo computacional en su aprendizaje.

Las preguntas relacionadas con el séptimo organizador tienen por objetivo verificar en esta investigación una de las características atribuida al uso de la tecnología en la enseñanza, que es aprender en forma autodidacta o al menos la incentiva.

El octavo organizador, al igual que el anterior, tiene por fin verificar si el estudiante es capaz de construir nuevo conocimiento por sí solo con el apoyo computacional o al menos lo incentiva.

TABLA 3.12. Instrumento de Análisis para los Laboratorios Computacionales (LC)

Organizadores	Preguntas para obtener Información	Dirección de la Creencia	La Creencia ¿Es útil?	Calidad del aporte
Sintaxis	Dificultad con la sintaxis del software			
Ayuda a la Comprensión	¿Los (LC) ayudan a comprender mejor los temas tratados en el aula?			
Apoyo a otras disciplinas	¿Crees que el apoyo computacional debería usarse en la mayoría de las asignaturas?			
Adquisición conocimientos eficaces	¿Crees que los conocimientos adquiridos vía (LC) sean más perdurables en el tiempo?			
Sugerencias conocimientos más permanentes	¿Sugerencia para que los (LC) permitan un conocimiento más perdurable?			
Importancia actividad	¿Crees que es importante el apoyo computacional?			
Incentivo autodidacta	¿Crees que el ordenador incentiva aprender en forma autodidacta?			
Construcción de conocimiento	¿Percibiste alguna vez que el uso de software permite construir conocimiento?			

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

4.1. Introducción
4.2. Caso 1: Juan Ignacio
  4.2.1. Instrumento de Análisis: Prueba de Estándares
  4.2.2. Análisis de las Creencias
4.3. Caso 2: Daniela
  4.3.1. Instrumento de Análisis: Prueba de Estándares
  4.3.2. Análisis de las Creencias
4.4. Caso 3: Lola
  4.4.1. Instrumento de Análisis: Prueba de Estándares
  4.4.2. Análisis de las Creencias
4.5. Caso 4: Nancy
  4.5.1. Instrumento de Análisis: Prueba de Estándares
  4.5.2. Análisis de las Creencias
4.6. Análisis de la relación entre Rendimiento y Prueba de Medición de Estándares
  4.6.1. Juan Ignacio
  4.6.2. Daniela
  4.6.3. Lola
  4.6.4. Nancy

4.1. Introducción

De acuerdo con nuestro modelo de investigación, la Investigación-Acción nos corresponde desarrollar la tercera etapa: "Establecimiento y evaluación de las estrategias de acción", que se presentan en esta tesis (p. 66).

Consideraremos como una referencia las calificaciones obtenidas en la Segunda Prueba de Diagnóstico por los cuatro casos de la muestra seleccionada, en el sentido que a todos los estudiantes se les hizo un reforzamiento de los conocimientos que aprendieron en Enseñanza Media. Estas se evidencian en la Tabla 4.1

TABLA 4.1. Calificaciones Segundo Diagnóstico

Juan Ignacio	Daniela	Lola	Nancy
6.5	5.0	5.5	3.0

Además, mencionamos que nuestro instrumento secundario, el rendimiento final de los estudiantes en la Asignatura de Matemáticas I, es el resultado de un conjunto de otros instrumentos, donde uno de ellos son las evaluaciones obtenidas por los estudiantes en los laboratorios computacionales. Este resultado será considerado en nuestra investigación como un referente del aprendizaje en el transcurso de un semestre, que es la duración de la asignatura.

Con el fin de conocer cómo está constituido el instrumento secundario, presentaremos resumidamente las características de la asignatura, entre ellas el tipo de evaluación, reglamento de aprobación, etc., es decir, las reglas del juego para aprobar la asignatura de Matemáticas I.

Evaluaciones y Resultados de Rendimiento

El curso N^{o}2 de Matemáticas I es el que se asignó a la profesora/investigadora realizando, para medir el aprendizaje de los estudiantes, las siguientes evaluaciones:

(1) **Evaluaciones Intermedias Formativas**

Estas evaluaciones reflejan un dominio parcial de los contenidos, puesto que cada una de ellas se realiza aproximadamente cada dos o tres semanas de actividades, evaluándose conceptos o aplicaciones puntuales. Por tal motivo, son pocos los estudiantes que obtienen calificaciones deficientes. Además tienen la garantía que pueden faltar a una evaluación sin justificación, la que no es considerada en el promedio final en este tipo de evaluación. Los resultados obtenidos por los estudiantes de nuestro estudio se presentan en la Tabla 4.2

TABLA 4.2. Evaluaciones Intermedias Formativas

Preguntas	C1	C2	C3	C4	Promedio Controles
Juan Ignacio	7	5.5	7	-	6.5
Daniela	4.8	-	7	6.5	6.1
Lola	2.5	4	7	6.8	5.9
Nancy	6.8	4	7	-	5.9

(2) **Evaluaciones Acumulativas.**

El reglamento de calificaciones que rige para la aprobación de las asignaturas en la Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas contempla dos pruebas acumulativas, fijadas la primera en la mitad del semestre y la segunda a fines del semestre. Las ponderaciones de las calificaciones obtenidas en dichas pruebas se fijan en el consejo de cada asignatura.

En nuestro caso, según la cantidad de contenidos que involucra una determinada evaluación, se asigna una ponderación diferente a cada calificación. La Primera Prueba Acumulativa denominada $PA1$ se ponderó con un $30\ \%$ de la nota de presentación a examen y la segunda prueba acumulativa denotada $PA2$ se ponderó con un $40\ \%$, más las calificaciones obtenidas en los laboratorios computacionales, cuyo promedio se ponderó con un $20\ \%$ y el promedio de los controles con un $10\ \%$ de la nota de presentación a examen.

Si un estudiante falta a una de estas pruebas u obtiene una nota inferior a la nota mínima 4.0 en cualesquiera de ellas puede rendir la llamada Prueba Recuperativa Especial (PRE), al término del periodo de clases en una calendarización especial para este fin, pudiendo reemplazar la nota más baja o bien si sus notas en ambas pruebas son mayores o iguales que cuatro y menores que 5.0, la prueba PRE tiene carácter de examen, aprobando la asignatura en esta instancia.

TABLA 4.3. Evaluaciones Acumulativas

	PA1	PA2	PRE
Juan Ignacio	6.4	6.6	
Daniela	2.6	1.8	3.9
Lola	4.1	3.5	5.2
Nancy	4.4	3.2	4.6

Adicionalmente, si el estudiante logra en ambas pruebas notas superiores a 5.0 quedará eximido de rendir otra evaluación, ya sea PRE o examen.

Las evaluaciones obtenidas por los estudiantes se presentan en la Tabla 4.3.

(3) **Evaluaciones de los Laboratorios Computacionales**

Este recurso didáctico permite estimular el hemisferio derecho del cerebro donde se encuentran localizados los estilos cognitivos secuencial y simultáneo no verbal de acuerdo a los estudios ya comentados por Flessas (1997).

Lo interesante de esta experiencia es el estímulo de las distintas capacidades y destrezas que los estudiantes deben manejar en el logro del aprendizaje de la derivada y sus aplicaciones. Las calificaciones obtenidas por los estudiantes seleccionados se presentan en la Tabla 4.4.

TABLA 4.4. Evaluaciones de los laboratorios

	Lab 1	Lab 2	Promedio
Juan Ignacio	7	7	7
Daniela	3.4	5.5	4.5
Lola	7	4	5.5
Nancy	6.3	4.5	5.4

(4) **Calificaciones Finales**

La nota final o semestral del curso se obtiene aplicando la suma ponderada siguiente:

(1) $$(\text{PROM. CONT}) \times 0.10 + (\text{PROM. LAB}) \times 0.20 + \text{PA1} \times 0.30 + \text{PA2} \times 0.40 = \text{N.SEM}$$

La calificación final se obtiene aplicando la fórmula (2).

(2) $$(\text{NOTA SEM}) \times 0.60 + (\text{N. EXAMEN}) \times 0.40 = \text{NOTA FINAL}$$

En la Tabla 4.5 mostramos la nota semestral, la calificación obtenida en el examen y la calificación final de cada estudiante seleccionado para este estudio.

TABLA 4.5. Calificaciones Finales

	Nota Semestral	Examen	Calificación Final
Juan Ignacio	6.0		6.6
Daniela	3.8	4.2	4.0
Lola	5.0		5.0
Nancy	4.6	4.6	4.6

Esta tabla además muestra que finalmente dos estudiantes de los cuatro rindieron el examen de fin de curso, Daniela que estaba reprobando con una nota semestral menos que suficiente y Nancy que rindió el examen con el propósito de mejorar su promedio final. Daniela logró la suficiencia de conocimientos en el examen, Nancy mantuvo su promedio y no logró el propósito de subir su calificación final.

En esta misma tabla se puede observar, de acuerdo a los resultados de las calificaciones finales, que los cuatro estudiantes aprobaron la asignatura de Matemáticas I. Esta información nos permite conjeturar que Daniela necesitó más tiempo que el resto de sus compañeros para desarrollar un nivel de aprendizaje suficiente que le permitiera aprobar la asignatura. Lamentablemente, no consideramos como parte de nuestro estudio el proceso de aprendizaje de estos estudiantes en el transcurso de la asignatura, usando un modelo cognitivo del aprendizaje, por tal motivo, solo usaremos estos resultados como referencia.

Por lo tanto, nuestro instrumento de análisis es la "Prueba de Medición de Estándares", que fue confeccionada considerando los estándares e indicadores de logros seleccionados por la doctorando.

La Tabla 4.10 muestra una visión general de los logros alcanzado por cada estudiante en esta prueba.

TABLA 4.6. Resultados Generales Codificados de la PME

	Juan Ignacio	Daniela	Lola	Nancy
P1	1	0	0	1
P2	0	1	0	1
P3	1	1	1	1
P4	1	1	1	1
P5	1	0	1	0
P6	1	0	0	0
P7	1	1	1	1
P8	1	1	1	1
P9	1	1	1	0
P10	0	0	1	0

El trabajo consiste ahora en analizar sus respuestas y poder indagar cuál es el nivel de aprendizaje del concepto en estudio: La derivada y algunas de sus aplicaciones según el modelo APOS.

4.2. Caso 1: Juan Ignacio

El perfil de este estudiante es de una persona autosuficiente y según la opinión de la profesora, no es un buen referente, puesto que ella supo, en una entrevista posterior a la selección de la muestra para este estudio, que este estudiante había realizado estudios de Ingeniería Civil, antes de ingresar a esta Facultad. Por lo tanto, este estudiante tiene cierto bagaje de conocimientos previos, que podrían influir en su rendimiento, siendo más beneficiado que los otros estudiantes y sus creencias podrían tener un sesgo producto de su experiencia previa.

En todo caso, igualmente se hará el análisis de este caso, puesto que muchas veces la creencia de que los estudiantes que tienen conocimientos previos sobre un tema deberían tener un mejor aprendizaje no siempre es correcta. La experiencia me ha demostrado que existen contraejemplos a esta premisa.

En conclusión, es interesante saber que ocurre en este caso.

4.2.1. Instrumento de Análisis: Prueba de Estándares

En la Tabla 4.7 se muestra un resumen de las respuestas correctas e incorrectas de este estudiante con el fin de tener una visión general de su rendimiento en la PME, según el instrumento de análisis presentado en la *Sección 3.6.1. Prueba de Medición de Estándares*

TABLA 4.7. Análisis de Contenidos de la PME de Juan Ignacio

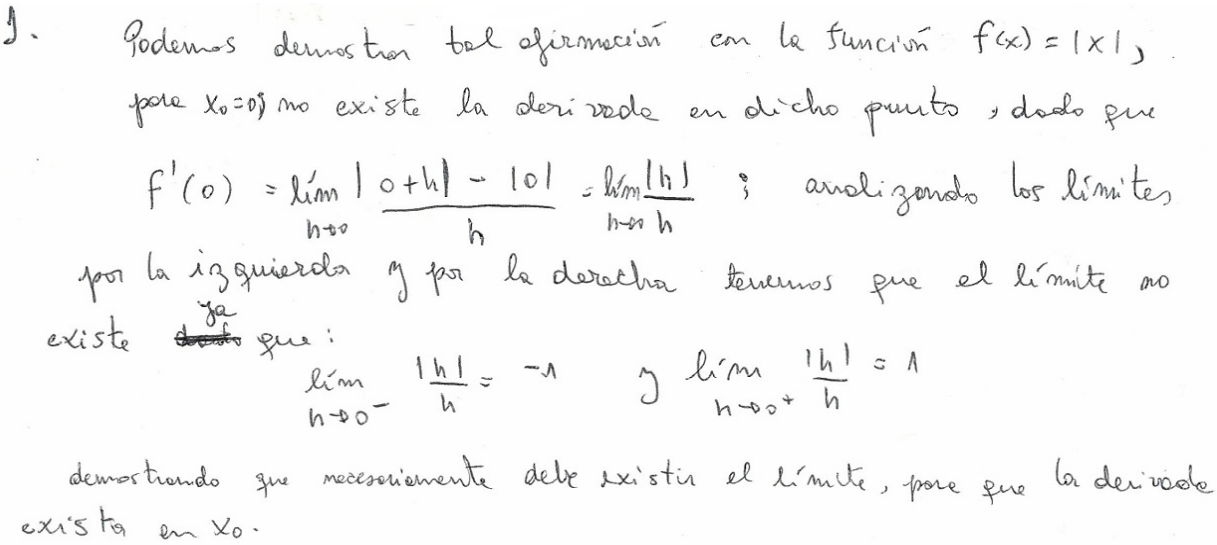
Estándares u Organizadores e Indicadores de Logro	Acción	Proceso	Objeto	Esquema
Comprende el Concepto de derivada y sus interpretaciones. I. de logro: P1 y P2	1 0			
Conoce la definición formal de derivada I. de logro: P3		1		
Usa correctamente las reglas de de derivación. I. de logro: P4			1	
Analiza funciones mediante el cálculo diferencial. I. de logro: P5, P6, P7				1 1 1
Comprende y aplica criterios de optimalidad I. de logro: P8, P9				1 1
Es capaz de modelar y resolver situaciones concretas mediante ecuaciones diferenciales. I. de logro: P10				0

Se examinará el aprendizaje construido aplicando el análisis de contenidos señalado en la Tabla 3.10, donde hemos incluimos los estándares para un curso de Cálculo, indicadores de logro y descomposición genética del instrumento de análisis según APOS. El detalle se puede consultar en el *Anexo 5: Prueba de Medición de Estándares*.

Al examinar, a simple vista, podemos observar el número de respuestas correctas que contesta este estudiante. Responde en forma correcta ocho preguntas, cometiendo un error al marcar la pregunta Nº 2 y de cálculo en la pregunta número Nº 10.

Se analizará ahora el significado preciso de sus respuestas.

i) El indicador Nº1 es de reconocimiento y comprensión del concepto de derivada en un punto a nivel de acción. De acuerdo a la Tabla 4.7 Juan Ignacio marca la alternativa v) que es la respuesta correcta. Juan Ignacio señala:


1. Podemos demostrar tal afirmación con la función $f(x) = |x|$, para $x_0 = 0$ no existe la derivada en dicho punto, dado que

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$; analizando los límites por la izquierda y por la derecha tenemos que el límite no existe ~~ya~~ que:

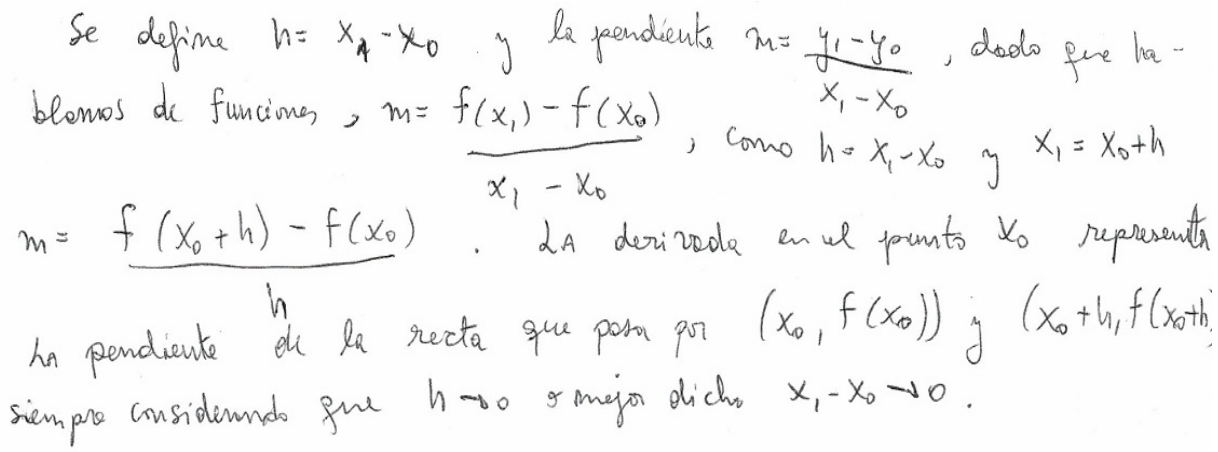
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

demostrando que necesariamente debe existir el límite, para que la derivada exista en x_0.

Al examinar su justificación se puede percibir que este estudiante explica su elección usando el concepto de derivada en un punto, a través de un contraejemplo. Es decir, muestra que maneja el concepto a un nivel de proceso, superior a una acción, porque usa otra capacidad además del reconocimiento y la comprensión, la aplicación de un concepto teórico a la práctica a través de un ejemplo no trivial, verificar que la función valor absoluto en $x_0 = 0$ no es diferenciable.

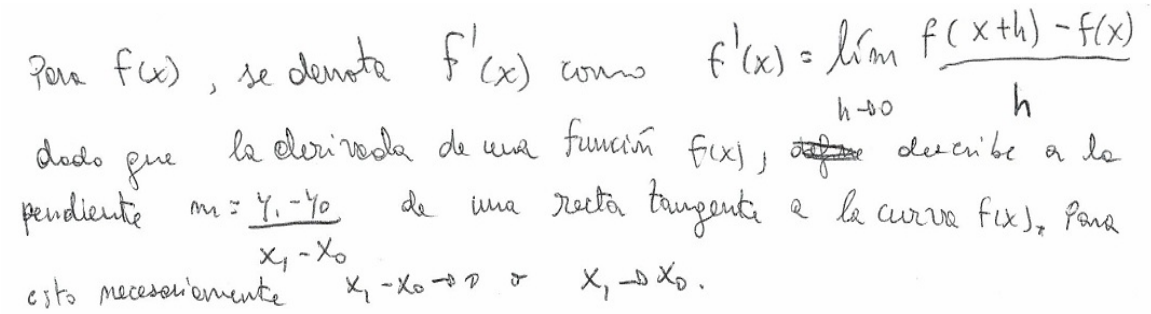
ii) El indicador Nº2 mide el reconocimiento y comprensión del concepto de derivada en un punto, relacionándolo con la interpretación geométrica de la derivada. Como se propuso es más que una simple acción, es un proceso.

Juan Ignacio marcó la alternativa i) que es incorrecta, la alternativa correcta es ii). La explicación de Juan Ignacio es:



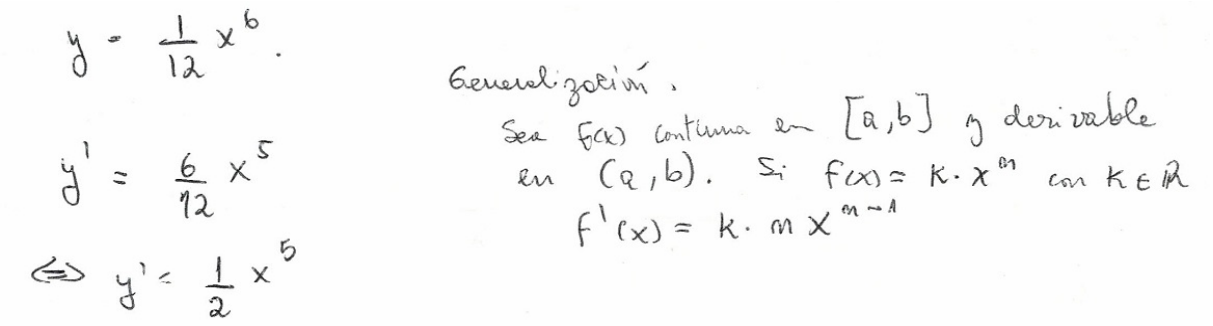
Este argumento corresponde a un nivel de proceso del concepto, determina la pendiente en forma geométrica y luego relata el paso al límite cuando $h \to 0$, muestra evidencia de un claro manejo de los conceptos de nivel de acción y proceso. Sin embargo, marca una alternativa incorrecta.

iii) El indicador Nº3 mide reconocimiento, comprensión del concepto de función derivada. Demanda una mayor capacidad de abstracción, el estudiante, además debe discriminar entre el concepto de derivada en un punto y función derivada. Este indicador lo consideramos a un nivel de aprendizaje de proceso. Juan Ignacio marcó la alternativa correcta, su argumento es.



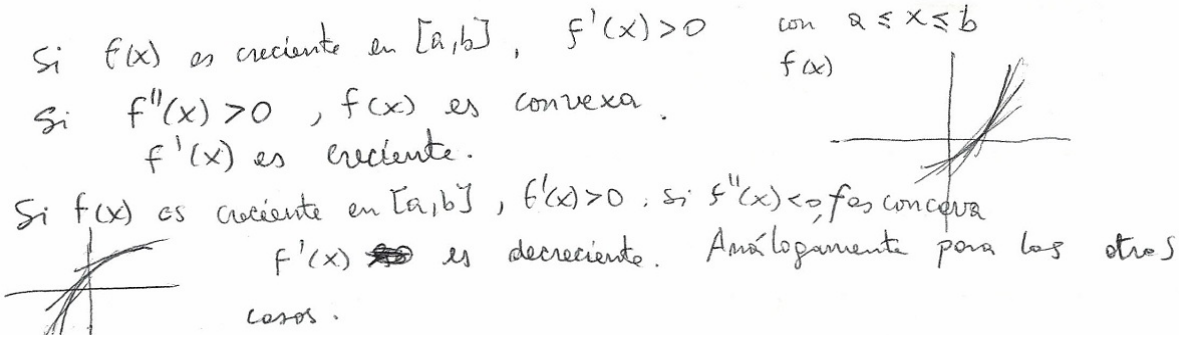
Para explicar su respuesta el estudiante define el concepto de derivada en forma correcta. Luego hace una relación entre la pendiente de una recta y la derivada en un punto. Juan Ignacio quiso explicar que debía ocurrir para que la función derivada representara la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en un punto. Esto último no se pregunta. Este estudiante muestra evidencia que maneja bien las definiciones.

iv) El estudiante marca la alternativa correcta, su desarrollo es:

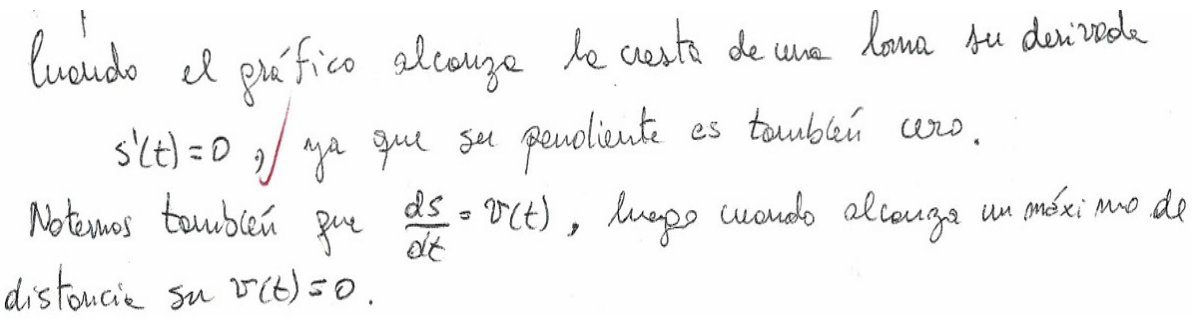


Juan Ignacio aplica la regla de derivación de una potencia en forma correcta, obteniendo de sus cálculos un resultado correcto. Para justificar su respuesta escribe la regla general para derivar una potencia de grado n, haciendo una abstracción de lo concreto a lo general. Este estudiante muestra manejo y destreza en el cálculo de la derivada de una potencia, de donde percibimos un tránsito al nivel de objeto derivada. Adicionalmente, la pregunta N°4 la hemos clasificado en un nivel de aprendizaje de objeto.

v) La pregunta N°5 se clasificó en un nivel de aprendizaje de esquema, puesto que integra y relaciona otros conceptos relacionados con la derivada. Juan Ignacio responde correctamente la pregunta, justifica las dos primeras proposiciones en forma correcta e indica que para justificar las otras dos proposiciones se razona en forma análoga, lo que es lícito para este indicador. Su razonamiento es:

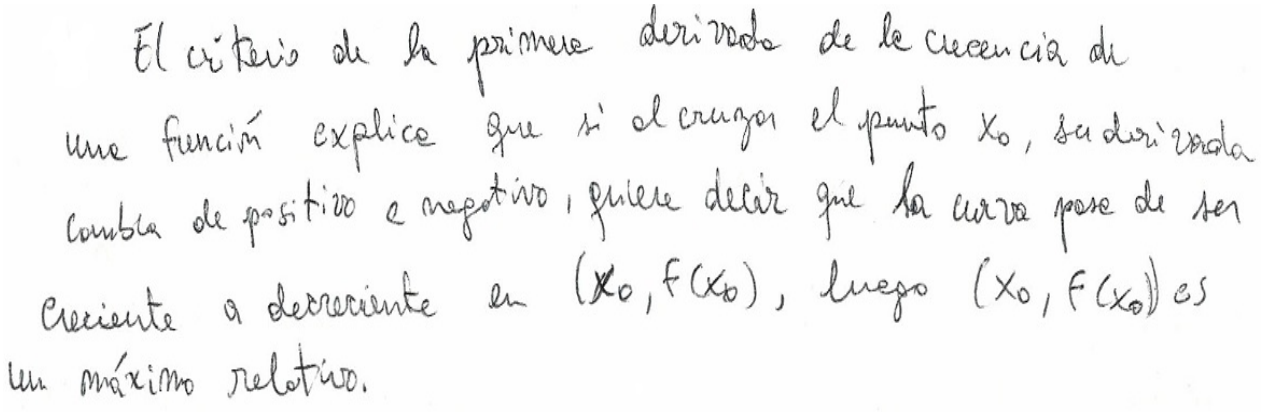


vi) El indicador de logro N°6, es un esquema más simple que el indicador N°5, porque la pregunta es formulada en forma directa y explícita. Se clasificó en un nivel de aprendizaje de esquema, puesto que, el estudiante debe relacionar el esquema de propiedades de las derivadas con el esquema de interpretación gráfica y el significado físico del problema. Su planteamiento es:



Juan Ignacio justificó en forma correcta su respuesta, relacionando la derivada de la función con los conceptos de posición y velocidad, demostrando seguridad en sus conocimientos. Su aprendizaje construido en esta problemática es de nivel de pre-esquema[1] puesto que, coordina más de un esquema.

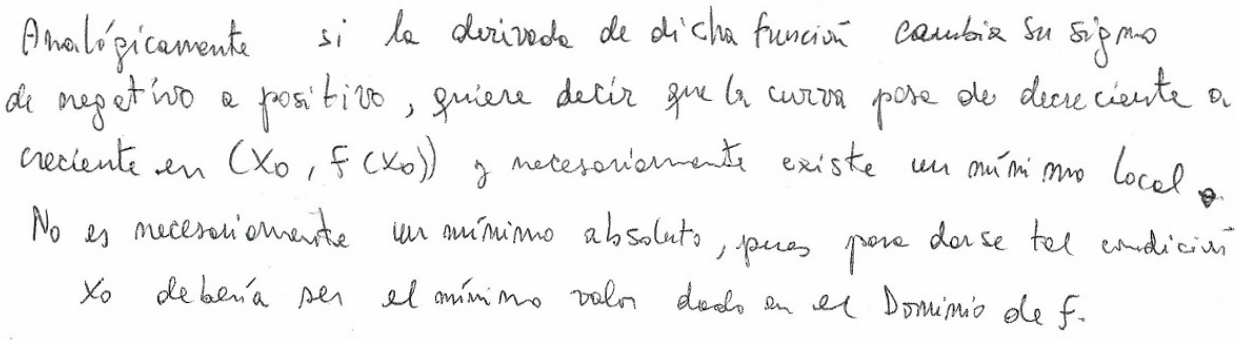
vii) Juan Ignacio respondió la pregunta N°7 en forma correcta, Su argumento es:



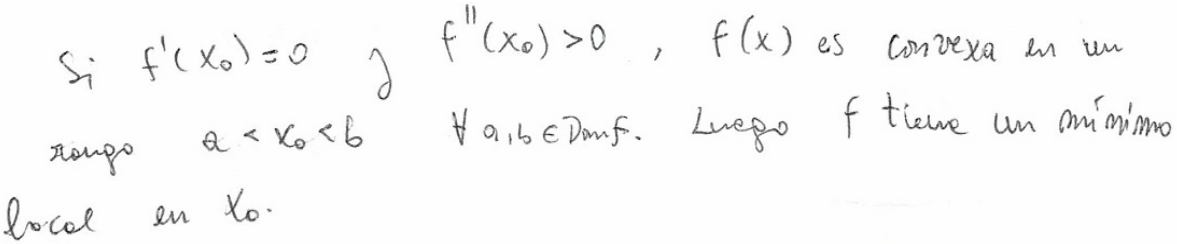
Explica el criterio de la primera derivada para máximos locales.

[1] Pre-esquema es un esquema sub etapa Inter.

viii) Análogamente, respondió la pregunta Nº 8 en forma correcta, explicando el criterio de la primera derivada para mínimos locales, lo que se puede apreciar de su respuesta:



ix) La respuesta al indicador Nº9 también es correcta. Juan Ignacio justificó su respuesta relacionando la segunda derivada con la concavidad de la gráfica de f.



Este estudiante demostró ser capaz de relacionar de manera correcta los esquemas involucrados, propiedades cualitativas de las funciones, relación de la derivada con la gráfica de una función y relación de la función derivada con las propiedades cualitativas de las funciones. Su nivel de aprendizaje es de un esquema de la derivada en relación a las propiedades cualitativas de una función.

x) La pregunta Nº10 envuelve varios esquemas que involucran conocimientos sobre: modelación de fenómenos mediante un ecuación diferencial, su planteamiento y resolución, y métodos para resolver problemas de valor inicial. Juan Ignacio marcó la alternativa del modelo correcto. Su planteamiento, análisis y desarrollo es:

Sea $P(t)$: v.d. describe la cantidad de habitantes de un pueblo.
t : v.i. indica el tiempo transcurrido en días.

NO. $\frac{dP}{dt} = kP(1500-P)$

$P(0) = 8$

$P(2) = 80.$

Por variables separables tenemos que:

$$\frac{dP}{P(1500-P)} = K dt \quad / \int$$

$$\int \frac{dP}{P(1500-P)} = \int K dt$$

trabajando el lado izquierdo de la ecuación mediante fracciones parciales, tenemos

$$\frac{1}{P(1500-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{1500-P} = \frac{A(1500-P) + BP}{P(1500-P)}$$

$\Leftrightarrow$ $A(1500-P) + BP = 1$ si $P=0$

$1500A = 1$

$A = \frac{1}{1500}$

Si $P=1500$

$1500B = 1$

$B = \frac{1}{1500}$

entonces

$$\frac{1}{1500}\int \frac{dP}{P} + \frac{1}{1500}\int \frac{dP}{1500-P} = kt + C$$

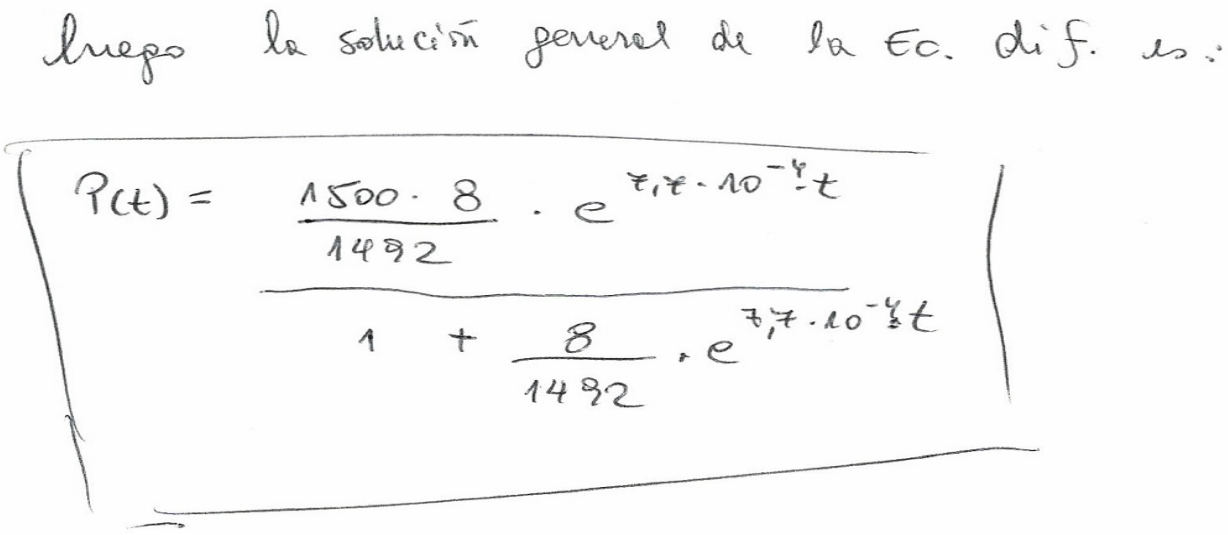
siendo $C_1 = 1500C$

$$\ln|P| - \ln|1500-P| = 1500kt + C_1$$

$$\ln\left|\frac{P}{1500-P}\right| = 1500kt + C_1 \quad / e^{(\,)}$$

$$\left|\frac{P}{1500-P}\right| = e^{1500kt} \cdot C_2$$

siendo $C_2 = e^{C_1}$



Este estudiante reconoce el modelo, determina el valor de las integrales en forma correcta, determina la solución general de la ecuación diferencial, pero se equivocó en un cálculo simple, el cálculo de la constante de la solución general de la ecuación diferencial para determinar la solución particular del problema de valor inicial.

El error de cálculo no implica que el estudiante no demuestre haber alcanzado el nivel de pre-esquema en esta aplicación. Podemos justificar esta afirmación argumentando que el error cometido por Juan Ignacio, no es de concepto, ni de desconocimiento de los esquemas involucrados, ni cometido al relacionar estos esquemas, sino es un error de despeje de Álgebra Básica cometido después de relacionar los esquemas involucrados y resolver la ecuación diferencial.

Informe General de la PME

Juan Ignacio ha evidenciado, a través de sus respuestas a los indicadores de logro consultados mediante preguntas, que ha desarrollado un aprendizaje a nivel de esquema. Al usar la descripción proporcionada por Clark et al (1997) se debe realizar un segundo análisis.

De acuerdo a nuestra descomposición genética, que hemos definido para los conceptos en estudio, sabemos que las preguntas que hemos clasificado a nivel de acción y proceso son desde el N^o 1 al N^o 4 y Juan Ignacio ha mostrado evidencia de logro mediante su justificación matemática a los indicadores de logro correspondientes, a pesar de marcar incorrectamente la respuesta de la pregunta N^{o}2. Conjeturamos que es un error involuntario, puesto que las ideas evidencian conocimiento de los conceptos.

En relación a los indicadores de logro desde el Nº 5 al Nº 6 muestra que coordina en forma correcta todos los esquemas involucrados, lo que nos permite inferir que ha desarrollado un nivel de aprendizaje de esquema-Trans.

El indicador de logro enunciado como problema Nº 10 es un Problema de Valor Inicial tipo para los estudiantes de primer año, un Problema de Crecimiento con restricciones. Juan Ignacio muestra evidencia de coordinar varias competencias involucradas: modelar, resolver ecuaciones diferenciales, reconocer los métodos de integración y aplicar el adecuado, pero cometió un pequeño error de cálculo en la etapa final del problema. La creencia de su profesora es que él tiene las capacidades y destrezas para resolver la Prueba de Estándares completa en forma correcta.

4.2.2. Análisis de las Creencias

Se aplica entonces el cuadro de análisis de contenidos para los módulos de clases y los laboratorios computacionales al caso 1: *Juan Ignacio.*

Se considera como referencia la Tabla 4.8 y se analiza qué podemos inferir de las creencias de Juan Ignacio.

TABLA 4.8. Análisis de Contenidos de los Módulos de Clases (MC), Caso: Juan Ignacio

Organizador	Preguntas para obtener Información	Dirección de la Creencia	La Creencia ¿Es útil?	Calidad del aporte
Estructura Tratamiento Actividades	1. ¿Los (MC) están bien estructurados? ¿El tratamiento de los temas es pertinente? ¿Las actividades que incluyen son pertinentes?	0 0 0	D D D	0 0 0
Beneficios	2. ¿Los (MC) te reportaron algún beneficio?	1	C	2
Mejoras	3. ¿Quieres sugerir alguna mejora de los (MC)?	1	C	2
Mejoras orientadas	4. Sugerencias para obtener mediante los (MC) un aprendizaje más perdurable	1	C	0
Comprensión de los conceptos	5. ¿Sirven para comprender los conceptos que no se entendieron en el aula?	0	C	1

Se percibe que el estudiante proporciona información clasificada a cuatro de las cinco categorías u organizadores. En el análisis se explicará esta consideración.

i) Se descarta la unidad de información correspondiente a la pregunta Nº 1 porque el estudiante no proporciona información respecto de lo consultado, su creencia es su

percepción de lo que sucede en su entorno, observa a algunos de sus compañeros y emite un juicio sobre ellos a priori. Considera que sus compañeros están mal preparados para comprender la materia escrita en los módulos de clases, que por cierto son los conocimientos mínimos que los estudiantes deben adquirir. Por tanto, Juan Ignacio no proporciona su opinión respecto a la información solicitada.

ii) Con respecto a la pregunta N^o 2 *Si los módulos de clases le aportaron algún beneficio*, afirma que: "Sí, para tener los contenidos a su alcance por si olvida algún concepto teórico". La calidad del aporte fue codificado con un 1, porque la intensidad de la información implica un aporte circunstancial y no permanente.

iii) Al examinar sus sugerencias en relación a mejorar los módulos de clases, afirma y sugiere que: "Para los cursos de primer año, los ejemplos fueran con peras y manzanas progresando a expresiones más matemáticas y muuuuuchos más ejemplos".

La información que proporciona este estudiante por una parte es que cree que los módulos de clases deberían contener ejemplos más básicos y su comentario apunta a los conceptos previos al curso de cálculo, puesto que los módulos fueron diseñados de modo que los temas están enlazados y la complejidad aumenta de menor a mayor. Los ejemplos ilustrativos presentados son simples. Los módulos de clases que confeccionamos para este curso son los que incluimos en el *Anexo 1: Módulos de Clases*.

La segunda parte de su unidad de información se refiere a que el módulo debería además asumir la función de una guía de ejercicios, puesto que sugiere incorporar muchos ejemplos.

Como comentario a esta información, en mi condición de profesora del curso, la parte básica como consta en el relato fue reforzada durante un mes de clases al término del cuál realizamos la Segunda Prueba de Diagnóstico. En relación a su segunda sugerencia, durante el curso se entregaron siete guías de ejercicios en los seis cursos, que formaron la asignatura de Matemáticas I, y solamente en dos cursos se entregaron módulos de clases, en el de la investigadora y otra profesora que se sumó a implementar esta estrategia.

Por lo tanto, los muchos problemas que menciona Juan Ignacio están considerados en las guías de ejercicios, que incluyen problemas matemáticos y contextualizados orientados al ámbito científico. Como evidencia de este hecho y del tipo de problemática que nos interesa al grupo de profesores que imparten la asignatura de Matemáticas I, se incluyen cinco de las guías de ejercicios entregadas a los estudiantes. Estas se pueden revisar en el *Anexo 8: Guías de Ejercicios*.

iv) En relación al organizador N^o 4, que involucra una pregunta para que el conocimiento perdure en el tiempo, el estudiante sugiere incluir en los módulos de clases: "Mayor

cantidad de ejemplos e incluir algoritmos más explícitos tipo recetas de cocina". Se percibe que el estudiante cree que las recetas de cocinas "salvan la vida", pero no percibe que es un aprendizaje de tipo mecánico.

Su información se codificó con cero, porque no proporciona un aporte nuevo, repite la misma respuesta que entregó a la pregunta N^{o}3.

v) La última pregunta es acerca si los módulos de clases le ayudaron a la comprensión de los conceptos que no había logrado comprender en clases. Su respuesta es negativa, dice: "A mi personalmente no, entiendo casi todo a la primera, o pregunto hasta entenderlo al profesor encargado".

De la unidad de información proporcionada por el estudiante, se deduce que la percepción que tiene de sí mismo es que reconoce que tiene habilidad y destreza para aprender matemáticas, por lo que no necesita en su caso material de apoyo. Sin embargo, esta respuesta se contrapone con la información que proporcionó para la pregunta N^{o}2, donde afirma que consulta los módulos cuando olvida algún concepto.

Se desprende de sus respuestas que Juan Ignacio usó los módulos para reforzar conceptos, a pesar que prefiere consultar libros de texto.

Se destaca que el propósito de los módulos de clases es servir como un apunte orientador con conceptos, ejercicios resueltos y propuestos, necesarios para apoyar el estudio de las matemáticas de los estudiantes que ingresan a estudiar una carrera científica.

En ningún caso se ha pensado que un módulo cumpla el rol de una guía de ejercicios, que como se ha comentado anteriormente es entregada en forma individual a cada estudiante.

Análogamente se elaboró un análisis de contenidos para los laboratorios computacionales, usando la misma codificación que se usó para analizar las creencias sobre los módulos de clases y que se presentó en la Tabla 4.9.

Al observar esta tabla, se han descartado dos respuestas, las creencias de Juan Ignacio acerca de las unidades de información N^o 4 y N^o 7, debido a que el estudiante no responde respecto del organizador del que queremos recabar información. Por lo tanto, analizaremos sus creencias sobre las unidades de información clasificadas.

i) La primera pregunta pretende recoger información sobre las posibles dificultades que podría tener el estudiante para aprender la simbología del software, el estudiante afirma que:

TABLA 4.9. Análisis de Contenidos de los (LC), Caso: Juan Ignacio

Organizadores	Preguntas para obtener Información	Dirección de la Creencia	La Creencia ¿Es útil?	Calidad del aporte
Sintaxis	1. Dificultad con la sintaxis del software	0	C	2
Ayuda a la Comprensión	2. ¿Los (LC) ayudan a comprender mejor los temas tratados en el aula?	0	C	2
Apoyo a otras disciplinas	3. ¿Crees que el apoyo computacional debería usarse en la mayoría de las asignaturas?	1	C	1
Adquisición conocimientos eficaces	4. ¿Crees que los conocimientos adquiridos vía (LC) sean más perdurables en el tiempo?	0	D	0
Sugerencias conocimientos más permanentes	5. Sugerencias para que los (LC) permitan un conocimiento más perdurable.	1	C	1
Importancia actividad	6. ¿Crees que es importante el apoyo computacional?	1	C	2
Incentivo autodidacta	7. ¿Crees que el ordenador incentiva aprender en forma autodidacta?	0	D	0
Construcción de conocimiento	8. ¿Percibiste alguna vez que el uso de software permite construir conocimiento?	1	C	0

"A mí en particular no, pero sabía programar algunas cosas básicas en JAVA".[2]

De aquí podríamos deducir que este estudiante tiene manejo en algún software computacional, incluso más allá de lo que exigimos a los estudiantes de Primer Año, que tendrán una formación científica y no matemática. Esta respuesta la codificamos con un 2 porque la información que aporta el estudiante es directa.

ii) Respecto de la consulta, si los laboratorios fueron un apoyo y le ayudaron a comprender los temas tratados en el aula, Juan Ignacio cree que: "No, pero es útil a la hora de estudiar para comprobar resultados".

En esta opinión, hay una cierta contradicción, puesto que el estudiante primero niega el carácter de apoyo y luego postula que a la hora de estudiar le permitió comprobar sus resultados. Esto significa que el ordenador para él, desempeñó la función de

[2]JAVA es un lenguaje de programación con el que se puede realizar cualquier tipo de programa. En la actualidad es un lenguaje muy extendido y cada vez cobra más importancia tanto en el ámbito de Internet como en la informática en general. Una de las principales características por las que Java se ha hecho muy famoso es que es un lenguaje independiente de la plataforma. Fue desarrollado por la compañía Sun Microsystems enfocado a cubrir las necesidades tecnológicas de punta.

una herramienta de cálculo, que es uno de los usos que mencionan las referencias bibliográficas consultadas.

iii) Respecto del uso del ordenador en forma más amplia, en la mayoría de las asignaturas, el estudiante piensa que: "En varias asignaturas sería útil, pero programar en C++, Pitón o Perl. Maple es un poco restringido". De su opinión se deduce que le interesa trabajar con el ordenador además de MAPLE con otros lenguajes.

Encuentra el MAPLE restringido, pero no señala porqué, ni en qué aspecto. Hubiese sido interesante saber en qué sentido encuentra restringido el software, puesto que, para los estudiantes de un primer año de universidad la versión usada es suficiente. Estos estudiantes no necesitan de conocimientos más profundos en informática, necesitan solo los expuestos en los laboratorios computacionales, de los cuales se puede percibir el nivel, que está de acuerdo a la profundidad del estudio de la matemática.

En todo caso, este estudiante es un caso especial, no es el tipo frecuente de estudiante. Él tiene conocimientos que ha adquirido antes de ingresar a esta facultad que van más allá de lo que se exige a los alumnos que ingresan a la Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas.

iv) La pregunta N^{o}4 se descartó porque Juan Ignacio no entrega información respecto de lo que se pregunta.

v) La pregunta N^{o}5 es una extensión de la N^{o}4, puesto que, se pide una sugerencia de cómo mejorar el material empleado en este caso los laboratorios, para obtener conocimientos más perdurables en el tiempo. Al respecto sugiere: "Plantear problemas más complejos e ingenieriles, cuya solución se simplifica notablemente si se usa MAPLE".

De las entrevistas esporádicas realizadas informalmente fuera del aula a Juan Ignacio, como su profesora deduzco que su opinión está influenciada por sus estudios anteriores en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Chile. Nuestro curriculum proviene de los estándares construidos como parte del Proyecto MECESUP UCH 0002 para las carreras científicas, excluyendo Ingeniería Civil. Por tanto, los problemas son enfocados más a las Ciencias que a la Ingeniería.

vi) La unidad de información que proporciona respecto de la pregunta N^{o}6, en relación a la importancia del apoyo computacional, afirma que: "Simplifica la vida que el computador realice los cálculos, mientras uno se preocupa de darles sentido a los problemas reales". Cree que es importante el apoyo computacional, enfatiza su respuesta dada a la pregunta N^{o}2, respecto de que mira al ordenador como una herramienta y como manejador de datos a través de programas computacionales.

vii) Nuevamente el estudiante no entrega información coherente con lo que se pregunta, por tanto, se descarta.

viii) En relación a la pregunta N^o 8 Juan Ignacio afirma que el uso de software mediante ordenador permite construir conocimiento. Su respuesta no aporta información a la investigación, por lo tanto la calidad de la información se codificó con cero.

Informe General de las Creencias

En general las sugerencias de Juan Ignacio escapan del curriculum definido para esta asignatura; las sugerencias respecto a los módulos de clases, de agregar más ejercicios, se contrapone con el propósito del módulo de clases, ser un apunte orientador de los temas que se tratan y si recordamos su estructura, tiene ejercicios resueltos, propuestos, actividades para realizar en clases en forma grupal. Enfatizamos que más ejercicios se entregan vía las guías de ejercicios. *Anexo 8: Guías de Ejercicios*

Respecto del rol de los módulos de clases y el apoyo computacional, que era uno de nuestros propósitos al querer indagar sobre sus creencias, las unidades de información entregadas por el estudiante no aportan un testimonio que tenga relación con las preguntas, sino relata sus apreciaciones personales sobre sus compañeros dando cuenta de la realidad de la mayoría de los estudiantes al ingresar a la universidad.

En relación a la sub-categoría *Módulos de Clases*, sus opiniones respecto de las preguntas N^{o}1 y N^{o}2 se deduce que la importancia de los módulos de clases para él son una ayuda memoria. Es decir, tener a su alcance los conceptos cuando los olvida. Su unidad de información respecto a la pregunta N^{o}4 es sorprendente, puesto que sugiere más ejemplos y algoritmos tipo recetas, que desde nuestra perspectiva incentivan a un aprendizaje de tipo mecánico.

Con respecto a este punto Ausubel relaciona el aprendizaje mecánico con el significativo no como una dicotomía, sino como un continuum y *ambos pueden coexistir concomitantemente en una misma tarea de aprendizaje*. En este estudiante se observa un tránsito en su aprendizaje, desde el mecánico combinado con uno de representaciones y de aquí al de conceptos, lo que se aprecia de sus respuestas al enfatizar que prefiere libros que van más allá de los conceptos exigidos en los contenidos, cuya profundidad se entrega a través de los módulos de clases.

De su respuesta a la pregunta N^o 5 se percibe su rapidez de apropiarse de los conceptos y de su perseverancia de preguntar hasta entender. Se puede observar que este estudiante va más allá de la simple asimilación de los conceptos, logrando un aprendizaje más allá de los conceptos lo que se conoce como aprendizaje de proposiciones. Respecto al estilo cognitivo del aprendizaje de

Juan Ignacio, desde la perspectiva de la teoría presentada por Flessas (1997), se puede conjeturar de su información respecto de la pregunta N^{o}5, que su estilo de estudio es secuencial.

Sin embargo, de la sub-categoría *Laboratorios Computacionales* podemos percibir que, este estudiante sugiere en sus respuestas actividades que van más allá de lo exigible a estudiantes de primer año, según el programa de la asignatura. Claramente le gustan los desafíos con apoyo computacional. Es decir, transita del estilo de aprendizaje secuencial (hemisferio izquierdo lóbulo frontal) al estilo simultáneo no verbal (hemisferio derecho lóbulo occipital), pasando por el estilo secuencial no verbal, donde estarían los procesos y secuencias de códigos.

Se observa además que Juan Ignacio se desplaza al estilo simultáneo verbal, donde Flessas y Lussier localizan la resolución de problemas razonados por la representación visual de imágenes y relaciones dadas por esquemas o gráficos.

Algunas de las sugerencias propuestas por Juan Ignacio respecto de los laboratorios computacionales no se pueden implementar en un nivel de Primer Año, puesto que para plantear problemas más complejos con apoyo computacional, se necesita un mayor conocimiento matemático de otras áreas de la matemática, como Cálculo en varias variables, Álgebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales, Análisis Numérico. Además se requeriría agregar al curriculum de los estudiantes un curso de programación, lo que no ha sido considerado por los jefes de las carreras correspondientes.

Finalmente, la creencia de Juan Ignacio en relación al rol del ordenador se refiere solo a una función muy específica, lo ve como un apoyo solo desde la potencialidad de ser un calculador que puede programar y entregar resultados.

4.3. Caso 2: Daniela

El perfil de esta estudiante es una persona más bien tímida, insegura de sus conocimientos, temerosa del ordenador porque nunca había trabajado en forma autónoma. Durante el curso de Matemáticas I su rendimiento fue regular, le cuesta aprender matemáticas; de hecho su aprendizaje se refleja en las calificaciones obtenidas por ella.

Se presenta nuevamente la Tabla que muestra la visión global de los resultados, considerando esta vez los resultados obtenidos por Daniela y se trasladarán sus resultados al instrumento que permite asociar su rendimiento en términos de indicadores logrados y del nivel de aprendizaje según el modelo APOS.

TABLA 4.10. Resultados Generales Codificados de la PME. Caso: Daniela

	Juan Ignacio	Daniela	Lola	Nancy
P1	1	0	0	1
P2	0	1	0	1
P3	1	1	1	1
P4	1	1	1	1
P5	1	0	1	0
P6	1	0	0	0
P7	1	1	1	1
P8	1	1	1	1
P9	1	1	1	0
P10	0	0	1	0

4.3.1. Instrumento de Análisis: Prueba de Estándares

En la Tabla 4.11 resumimos estas tres dimensiones, las respuestas de Daniela que pueden ser correctas (1) o incorrectas (0), los indicadores de logro y el nivel de aprendizaje logrado por ella, según APOS.

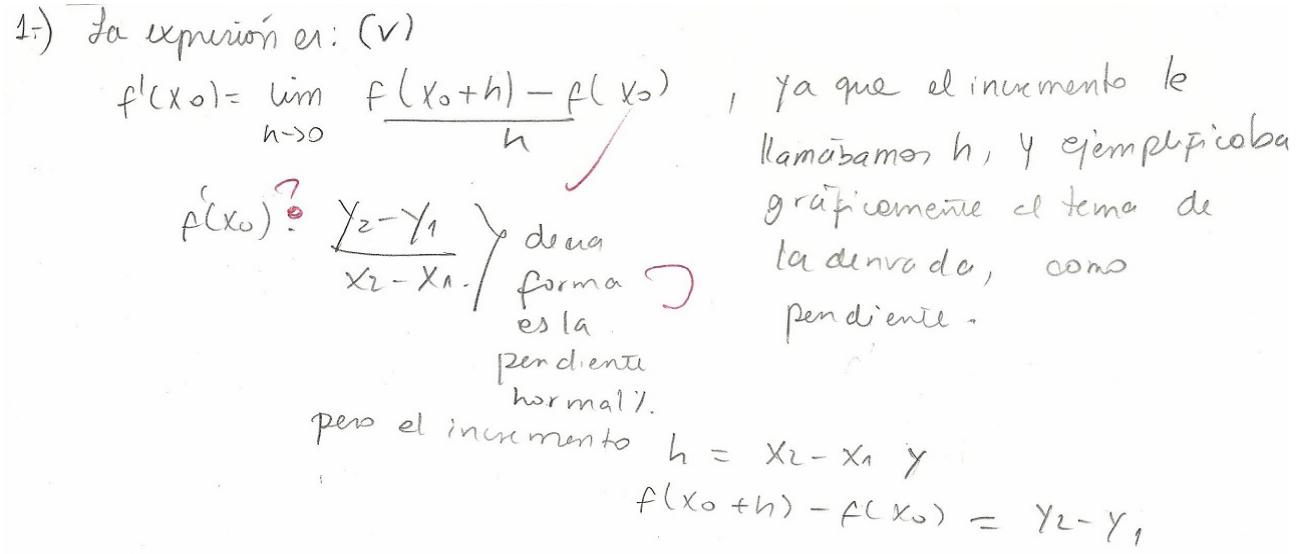
TABLA 4.11. Análisis de Contenidos de la PME de Daniela

Estándares u Organizadores e Inidicadores de Logro	Acción	Proceso	Objeto	Esquema
Comprende el Concepto de derivada y sus interpretaciones I. de logro: P1 y P2	0 1			
Conoce la definición formal de derivada. I. de logro: P3		1		
Usa correctamente las reglas de derivación. I. de logro: P4			1	
Analiza funciones mediante el cálculo diferencial. I. de logro: P5, P6, P7				0 0 1
Comprende y aplica criterios de optimalidad. I. de logro: P8, P9				1 1
Es capaz de modelar y resolver situaciones concretas mediante ecuaciones diferenciales. I. de logro: P10				0

Se observa a simple vista que el número de respuestas marcadas como correctas son seis de un total de diez.

Se analizarán las explicaciones y argumentos matemáticos de Daniela para evidenciar su nivel de aprendizaje.

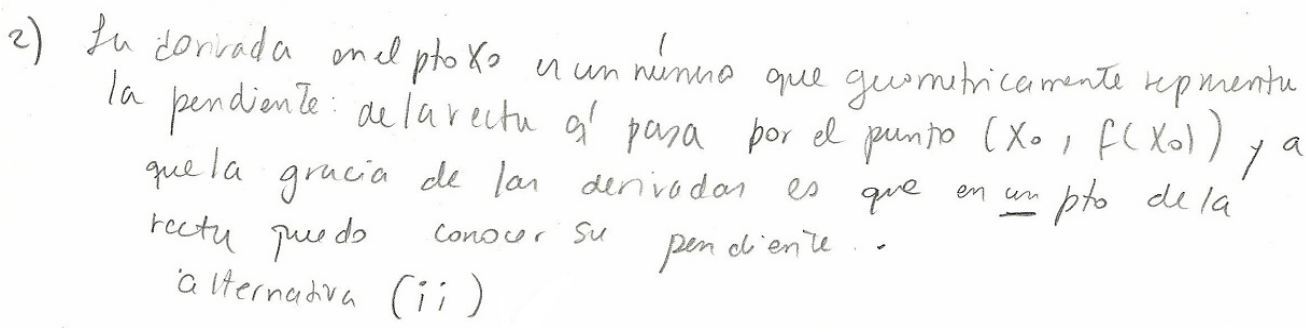
i) Se comentó que el indicador N°1 es de reconocimiento y comprensión del concepto de derivada en un punto a nivel de acción. Al revisar la alternativa escogida es correcta, pero, al examinar en la hoja de respuestas su explicación es incorrecta, puesto que transcribe la definición de la derivada de un función en un punto y la iguala con la notación de la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos de la gráfica de la función, omitiendo el paso al límite, lo que es incorrecto. Aunque la alternativa de la respuesta haya sido señalada como correcta, su justificación es incorrecta, por lo tanto, la pregunta N°1 la hemos considerado mala o incorrecta codificada con 0. Esta conclusión se puede percibir de su respuesta:



Daniela es un ejemplo de los muchos casos en que los estudiantes escriben o responden bien, pero justifican mal. Esto quiere decir que no sabe justificar su respuesta producto de que el concepto no lo comprendió correctamente y lo memorizó sin entenderlo.

Por lo tanto, evidencia que conoce el concepto a nivel de acción, pero falla en su justificación que la basa en su relación con otros esquemas.

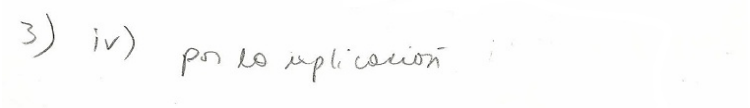
ii) Su respuesta respecto al indicador de logro N°2 es correcta y mide el reconocimiento y la comprensión del concepto de derivada en un punto, relacionándolo con la interpretación geométrica de la derivada. Su argumento es: En su argumentación Daniela muestra



evidencia que puede relacionar el concepto de derivada en un punto con su interpretación geométrica, lo dice en forma explícita enfatizando su idea, pero nada más. Es sorprendente que no cometa errores al relacionar estos dos conceptos, puesto que en la pregunta N°1 intentó plantear esta misma relación y lo hizo de forma incorrecta.

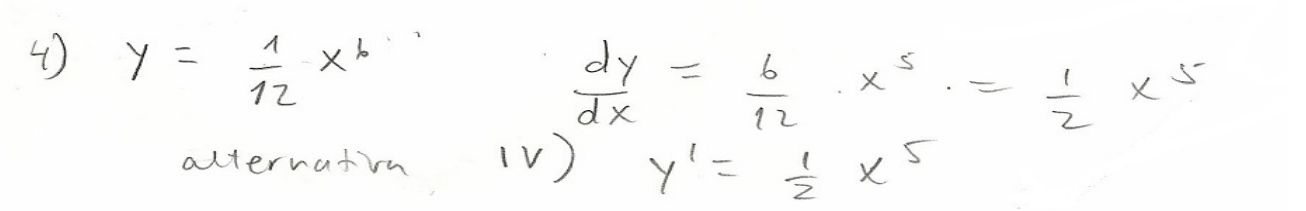
Esta estudiante evidencia un tránsito de la acción del concepto a un nivel de proceso, pero no manifiesta un dominio, lo que se percibe de su respuesta.

iii) Daniela selecciona la alternativa correcta al responder el indicador de logro N°3, pero no logra redactar una justificación, solo dice por aplicación. Escribe:



Esta pregunta es de nivel de proceso, pero ella evidencia que no posee un dominio de cómo explicar su elección, su nivel de proceso es más bien débil.

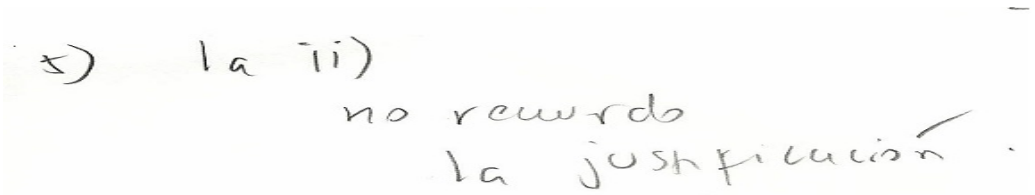
iv) Daniela responde el indicador de logro N°4 en forma correcta, para ello aplica la regla de derivación en forma correcta y obtiene un resultado correcto.



Daniela aplica las propiedades evidenciando su conocimiento y destreza en los cálculos. Este indicador refleja una aplicación simple de las propiedades de la derivada, por tal motivo lo definimos como un aprendizaje a nivel de "objeto derivada". Por lo

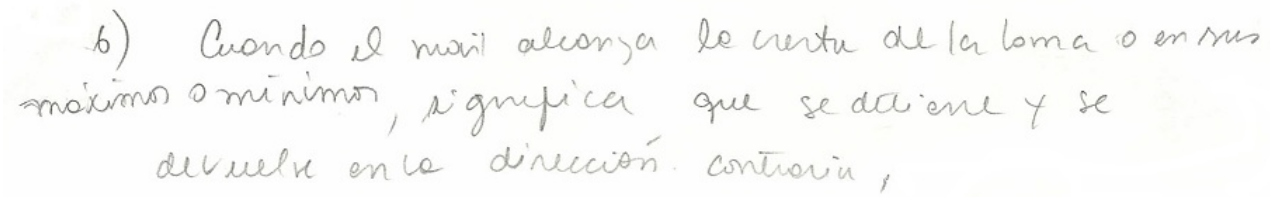
tanto, Daniela evidencia que sabe manejar la operatoria básica del álgebra de derivadas transitando a este nivel.

v) Se clasificó al indicador N^{o}5 en el nivel de pre-esquema puesto que integra y conecta varios conceptos relacionados con la derivada. Daniela responde en forma incorrecta y argumenta que no recuerda la explicación. Su argumento es:



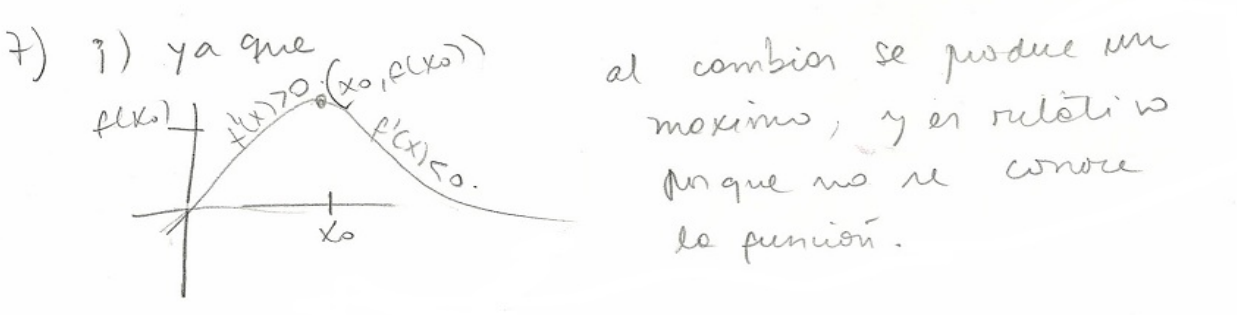
Obviamente no se tiene información del conocimiento de Daniela sobre este indicador de logro, ni tampoco se tiene evidencia de la construcción mental alcanzada por ella en estas propiedades.

vi) Se comentó que el indicador N^{o}6 es un pre-esquema, más simple que el indicador N^{o}5, porque la pregunta está planteada en forma directa y explícita, se relacionan los esquemas de propiedades de las derivadas con el de interpretación gráfica y el significado físico. El argumento de Daniela es:

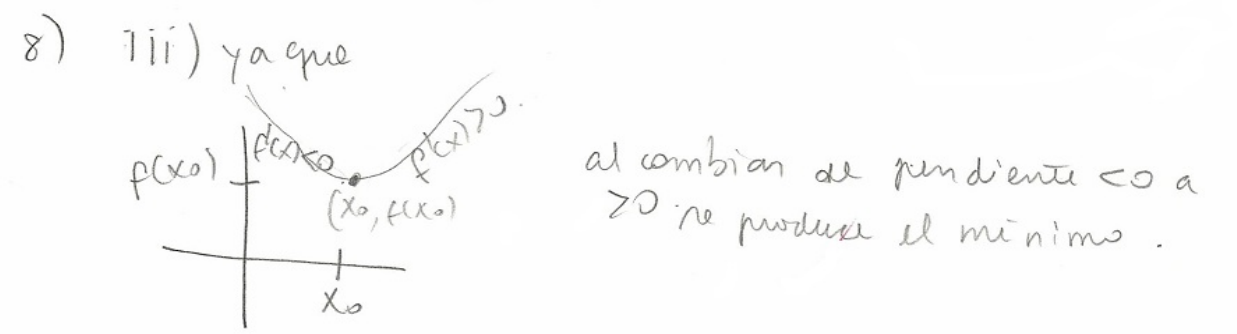


Daniela no responde en forma clara, no indica cuál es la relación entre el problema físico y la derivada. Por tanto, no se puede evidenciar su aprendizaje en este tipo de aplicaciones.

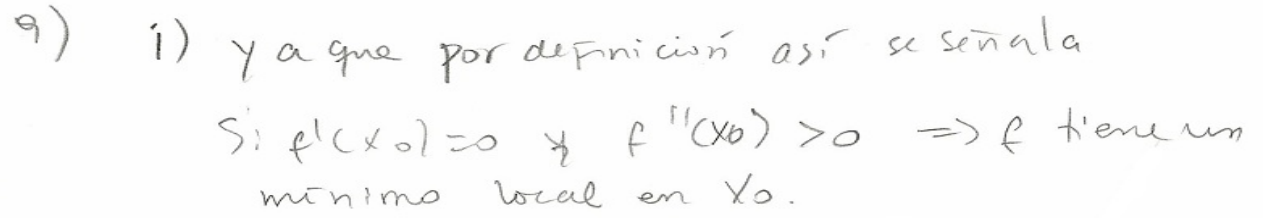
vii) Daniela responde en forma correcta al indicador N^{o}7. Justifica su respuesta desde el punto de vista gráfico, es decir, relaciona la respuesta con la interpretación gráfica de un máximo relativo y su relación con el significado de la primera derivada. Su argumento es el siguiente:



viii) Análogamente responde el indicador de logro N^{o}8 en forma correcta, justifica nuevamente relacionando la proposición dada con la interpretación gráfica de un mínimo relativo y el significado de la primera derivada.

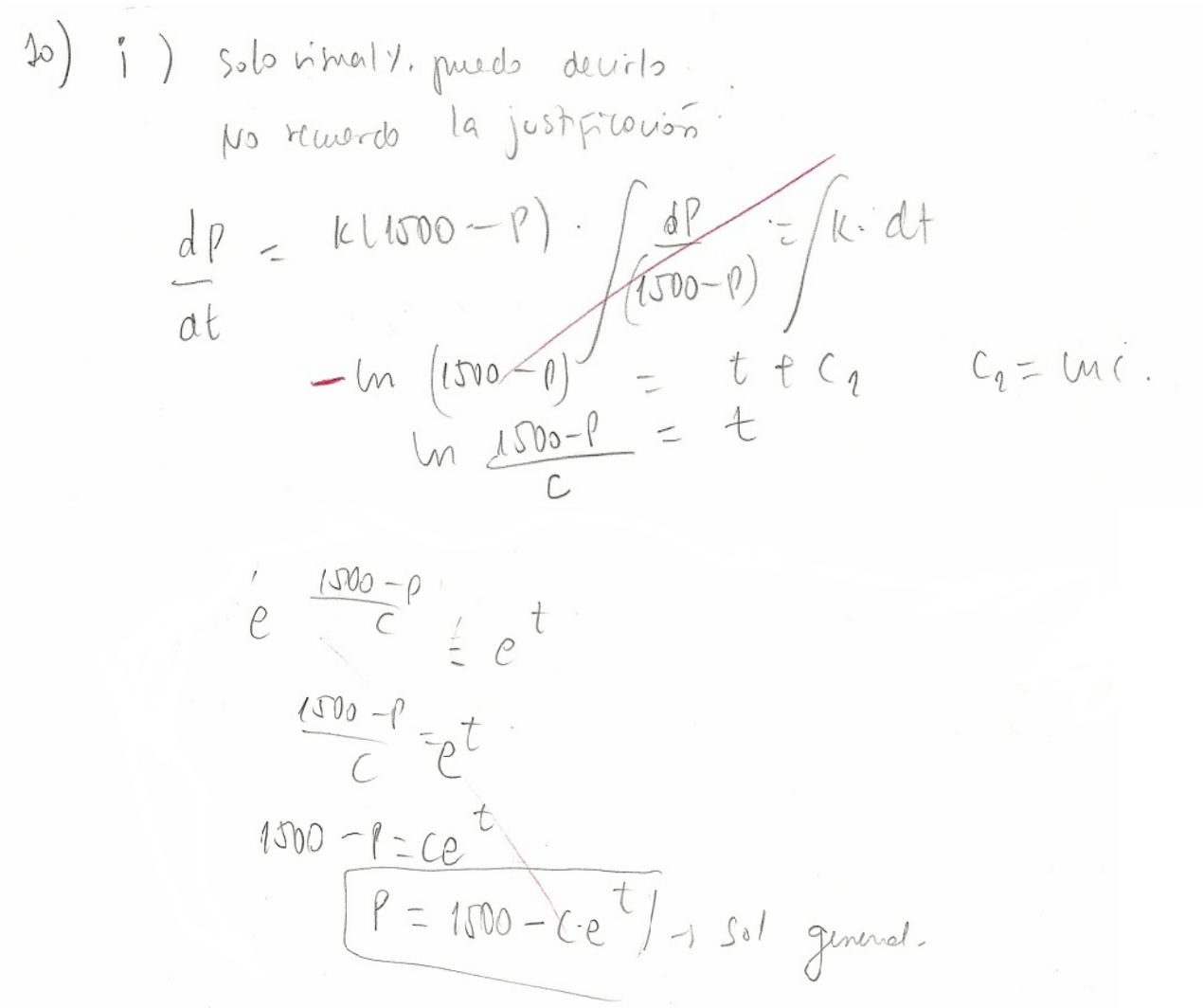


ix) Su respuesta al indicador N^{o}9 es correcta. Daniela justifica su respuesta mediante el criterio de la segunda derivada para valores extremos. Comete un error en lenguaje matemático al decir que su elección es por definición.



Daniela muestra evidencia de haber logrado un aprendizaje a nivel de pre-esquema, al relacionar en forma correcta el esquema de las aplicaciones de la primera y segunda derivada en la determinación de valores extremos relativos con el esquema de interpretación gráfica de estos conceptos.

x) Daniela no reconoce en forma correcta el modelo matemático asociado a los problemas de crecimiento limitado o ecuación logística.



En cuanto a la resolución de la ecuación diferencial que ella seleccionó, que corresponde a otra etapa del problema, comete un error de signo al calcular la integral, pero el algoritmo de solución es correcto. En este tipo de problemática Daniela no muestra evidencia de haber logrado un pre-esquema, puesto que no logra modelar en forma correcta este problema. Es decir, no logra relacionar el esquema de los fenómenos estudiados con el esquema de las ecuaciones diferenciales, sin embargo puede resolver débilmente problemas asociados a otro tipo de fenómenos.

Informe General de la PME

Desde el punto de vista del rendimiento en la Prueba de Medición de Estándares, Daniela justifica en forma correcta 6 preguntas de 10.

Desde el nivel de aprendizaje logrado según APOS se percibe que Daniela evidencia conocimientos de los indicadores de logro N^{o}2, N^{o}3 y N^{o}4. Es decir, de los indicadores que se clasificaron desde el nivel de aprendizaje de acción al nivel de objeto derivada.

Además, muestra evidencia que es capaz de relacionar los esquemas de derivada, con el de propiedades cualitativas de una función y con el de interpretación gráfica, aunque algunas de sus justificaciones son débiles. Este análisis se deduce de sus respuestas a los indicadores de logro N^{o}7, N^{o}8 y N^{o}9.

Según el modelo cognitivo Daniela ha desarrollado un aprendizaje a nivel de un pre-esquema de la derivada y sus aplicaciones solo en el análisis cualitativo de funciones.

4.3.2. Análisis de las Creencias

Para conocer las creencias de Daniela se realizará un análisis de contenidos respecto de los módulos de clases y de los laboratorios computacionales. Se considerará como referencia la Tabla 4.12 y se analizará qué podemos inferir respecto de las creencias de Daniela.

TABLA 4.12. Análisis de Contenidos de los Módulos de Clases. Caso: Daniela

Organizador	Preguntas para obtener Información	Dirección de la Creencia	La Creencia ¿Es útil?	Calidad del aporte
Estructura Tratamiento Actividades	1. ¿Los (MC) están bien estructurados? ¿El tratamiento de los temas es pertinente? ¿Las actividades que incluyen son pertinentes?	1	C	2
Beneficios	2. ¿Los (MC) te reportaron algún beneficio?	1	C	2
Mejoras	3. ¿Quieres sugerir alguna mejora del (MC)?	1	D	0
Mejoras orientadas	4. Sugerencias para obtener mediante los (MC) un aprendizaje más perdurable	0	D	0
Comprensión de los conceptos	5. ¿Sirven para comprender los conceptos que no se entendieron en el aula?	1	C	2

Se puede observar que se han descartado dos unidades de información de las cinco propuestas, se justificará esta decisión durante el análisis.

i) El primer organizador incluye tres aspectos. Daniela se refiere solo a la estructura de los módulos de clases. Con respecto a los módulos de clases, ella expresa en forma directa: "Están bien estructurados para provocar una buena respuesta de parte de los alumnos".

Daniela no se refiere explícitamente al tratamiento de los temas, ni de las actividades propuestas en los (MC). Sin embargo, expresa y reconoce la buena recepción de este material de apoyo por parte de los estudiantes.

ii) Con respecto a la pregunta N^{o}2; *Si los módulos de clases le aportaron algún beneficio*. Afirma que: "Los módulos fueron de gran ayuda en todas las matemáticas, y apoyo fuera de las clases teóricas".

La calidad de esta unidad de información fue codificada con 2, puesto que su opinión es directa y se percibe un apoyo del material más permanente que circunstancial.

iii) La unidad de información que proporcionó como respuesta a la pregunta N^{o}3 se descartó porque la información de Daniela está dirigida a la cantidad y calidad de los alumnos ayudantes y no específicamente a los módulos de clases.

iv) Análogamente se descartó la unidad de información correspondiente a la pregunta N^{o}4. Afirma en forma escéptica que no hay sugerencias que puedan permitir un conocimiento más perdurable.

v) Respecto a la interrogante N^{o}5 ¿los módulos le permitieron entender conceptos que no había logrado comprender en clases? Su respuesta es afirmativa y señala que: "Sin duda los módulos son una ayuda importante para manejar conceptos que quizás en clases no habían quedado suficientemente claros, pero al revisar los módulos se aclaraban muchas dudas". Afirma estar de acuerdo con la metodología que la califica de *correcta*.

De las unidades de información proporcionadas por Daniela se puede inferir que los módulos de clases cumplieron con su objetivo principal, apoyar al estudiante en su aprendizaje.

Daniela le atribuye a los módulos de clases un rol importante en su aprendizaje, sobre todo para reforzar los conceptos que no le quedaron suficientemente claros en las clases presenciales. Más aún muestra complacencia por la estrategia de enseñanza utilizada calificándola de correcta.

Como comentario a sus creencias, en mi condición de profesora del curso, a Daniela le costaba estudiar matemáticas, pero siempre se esforzaba por aprender; por tanto es grato saber que el material tuvo un significado importante como soporte de aprendizaje para un estudiante con dificultad para aprender matemáticas.

Resumiendo es claro que esta estudiante necesita apoyo para estudiar matemáticas y los módulos en parte han solucionado su necesidad fuera del aula. Se observa que no tiene desarrollada una destreza matemática lo que suple con su esfuerzo.

Se realizará el análisis de contenidos para conocer el rol que atribuye Daniela a los laboratorios computacionales, usando la misma codificación que se empleó para los módulos de clases y que se presenta en la Tabla 4.13.

TABLA 4.13. Análisis de Contenidos de los (LC), caso: Daniela

Organizadores	Preguntas para obtener Información	Dirección de la Creencia	La Creencia ¿Es útil?	Calidad del aporte
sintaxis	1. Dificultad con la sintaxis del software	1	C	2
Ayuda a la Comprensión	2. ¿Los (LC) ayudan a comprender mejor los temas tratados en el aula?	0	C	2
Apoyo a otras disciplinas	3. ¿Crees que el apoyo computacional debería usarse en la mayoría de las asignaturas?	0	C	2
Adquisición conocimientos eficaces	4. ¿Crees que los conocimientos adquiridos vía (LC) sean más perdurables en el tiempo?	1	C	1
Sugerencias conocimientos más permanentes	5. Sugerencias para que los (LC) permitan un conocimiento más perdurable.	1	C	1
Importancia actividad	6. ¿Crees que es importante el apoyo computacional?	1	C	2
Incentivo autodidacta	7. ¿Crees que el ordenador incentiva aprender en forma autodidacta?	1	C	2
Construcción de conocimiento	8. ¿Percibiste alguna vez que el uso de software permite construir conocimiento?	0	D	0

Al observar la Tabla 4.13 se puede percibir que se han clasificado 7 unidades de información de las 8 preguntas planteadas para recoger testimonios.

Se examinará que información es posible recabar de sus creencias respecto del apoyo informático.

i) La primera pregunta se refiere a las posibles dificultades que podría tener la estudiante para aprender la simbología del software. Daniela afirma de entrada que no tiene aptitudes en el área computacional; encontró que la cantidad de simbología usada era demasiada.

De aquí conjeturamos que no tiene mucha disposición para el trabajo computacional que se realizará. Su opinión es que para ella es más provechoso estudiar de textos que utilizar el apoyo computacional.

La calidad de su aporte es 2 porque la información es directa. Daniela encuentra que la simbología del lenguaje fue demasiada, influenciada posiblemente por su convencimiento que no tiene aptitudes en el área computacional.

ii) Respecto de si los laboratorios fueron un apoyo que le ayudaron a comprender los temas tratados en el aula declara: "No, personalmente fue más provechoso estudiar de textos que quizás utilizar el apoyo computacional".

Daniela manifiesta que para ella fue más provechoso estudiar vía textos, aunque expresa una duda al decir "quizás", de donde deducimos que no estuvo decidida a utilizar el ordenador por su creencia de sí misma.

En todo caso ella siempre me comentó en conversaciones informales que no tenía aptitudes informáticas.

iii) Respecto del uso del ordenador en forma más amplia, en la mayoría de las asignaturas, Daniela expresa: "Creo que en algunas no es necesario". Sin embargo, afirma que: "En Matemática debería estar sí o sí".

De su opinión se deduce que a pesar de sus declaraciones anteriores, como: demasiada simbología, que le fue más provechoso el estudio del material escrito, declara que el apoyo computacional en Matemática debería estar sí o sí.

Da la impresión que sus creencias son contradictorias, pero en cierto modo sus creencias son reflejo de su autosugestión de no tener aptitud informática.

iv) La pregunta N^{o}4 es respecto a sí los conocimientos adquiridos vía laboratorios computacionales son más perdurables en el tiempo, responde afirmativamente, pero, con cierta duda, sugiere: "Si evalúa alguna manera para hacerlos más aplicables podrían ser más permanente en el tiempo".

El aporte de su creencia fue codificado con 1, porque su respuesta es ambigua, no es directa. No se sabe lo que Daniela llama "aplicables" y de su unidad de información no se deduce qué quiere transmitir.

Al parecer que lo quiere decir es que el profesor podría evaluar estrategias que apunten a la aplicabilidad. Para nosotros la palabra aplicable la asociamos con problemas contextualizados. En todo caso, los problemas contextualizados son los que producen mayores dificultades a los estudiantes, porque generalmente involucran un planteo de un modelo matemático y su resolución.

v) Sus sugerencias respecto de la pregunta N^{o}5, en relación a la importancia del apoyo computacional afirma: "Quizás hacerlos más dinámicos, grupales y aplicables".

La calidad de la sugerencia es dubitativa y un poco ambigua, nuevamente qué es para Daniela dinámico y aplicable, por lo tanto, se codificó con 1.

De la primera parte de la unidad de información que sean más dinámicos, un laboratorio por naturaleza es un trabajo dinámico, donde el estudiante debe trabajar en forma activa, por lo tanto no es posible inferir si es esto a lo que se refiere Daniela. Respecto de su segunda sugerencia, los talleres son una mezcla, las primeras sesiones deben ser individuales, porque se aprende haciendo no mirando, pero posteriormente algunos trabajos son en grupos de dos integrantes. La aplicabilidad que vuelve a enfatizar, ya la discutimos.

vi) En relación a la pregunta N^{o}6 si es importante el apoyo computacional, afirma en forma categórica: "Sin duda, aunque no me fue lo útil que hubiese querido". La declaración es directa por lo que su calidad se codificó con 2. Por un lado reconoce la importancia de los laboratorios y por otro reconoce que hubiese deseado sacar mayor provecho.

De mi experiencia como profesora debo hacer presente que a veces no es fácil cambiar las creencias de los estudiantes. Daniela en un comienzo tenía mucho temor de trabajar como usuario autónomo, lo que fue superando en parte durante el curso, porque en esta encuesta sigue mencionando que no tiene aptitudes informáticas. Es decir aún cree no haber superado esta debilidad. Mi creencia es que Daniela superó sus debilidades y temores de lo contrario no habría sido capaz de manejar la sintaxis del software y realizar los talleres computacionales en los que obtuvo calificaciones aceptables.

vii) En relación a la interrogante N^{o}7: ¿Crees que el ordenador incentiva aprender en forma autodidacta? Daniela afirma que además de ayudar a aprender en forma didacta, es bueno corroborar que lo aprendido es correcto, para no cometer errores. Su respuesta es directa, por tanto se codificó con 2.

Nuevamente su respuesta es sorprendente, porque reconoce que el ordenador le ayudado a aprender en forma autodidacta y como un instrumento para verificar sus cálculos. Sin embargo de la unidad de información que entregó como respuesta a la pregunta N^{o}2 se deduce que prefiere el material escrito. Esta última apreciación es consecuencia de su temor al ordenador.

viii) En relación a la consulta N^{o}8, "Si construyó conocimiento con el uso del software" Daniela señala que no, pero, la descartamos porque no aporta información nueva.

Informe General de las Creencias

Daniela tuvo un rendimiento regular durante el curso de Matemáticas I, que en cierta forma está relacionado con su perfil, era bastante insegura lo que se deduce de sus respuestas. A mi juicio como observadora se puede inferir que los módulos de clases le ayudaron a repasar sus conocimientos fuera del aula y por repetición.

Prefiere que el material escrito se presente en su forma final. Este aprendizaje según **?** es un aprendizaje por recepción y no es potencialmente significativo ni convertido en tal durante el proceso de internalización o toma de conciencia, pero el aprendizaje y el material de los módulos de clases podrían ser significativo en la medida que sea comprendido por la estudiante e interactúe con los subsunsores existentes en su estructura cognitiva (**?**).

Ella afirma *repasar* los contenidos de los módulos entregados, de esta forma ella incentiva la compresión de los contenidos en dichos módulos.

En relación a sus creencias respecto al apoyo computacional, Daniela desde el inicio del curso mostró cierta reticencia para trabajar en un ordenador, según ella debido a su nula experiencia computacional durante su Enseñanza Media. Sin embargo, cree que es importante, pero no pudo sacar más provecho. Esta creencia proviene de su experiencia anterior que contribuye a su inseguridad y poca destreza para asimilar la simbología. No obstante, reconoce abiertamente y percibe la importancia de los laboratorios computacionales más allá de que el ordenador sea un simple verificador de resultados.

Al ordenador lo percibe como un sancionador de los cálculos. Además le gusta trabajar los laboratorios en forma grupal, con lo cuál se siente cómoda, ya que el grupo le brinda seguridad. Esta instancia de interacción social fue implementada en el aula a través de los módulos de clases y en los laboratorios grupales como parte de la estrategia de enseñanza.

Daniela enfatiza en otras secciones de la encuesta relacionadas con la estrategia de enseñanza, que los trabajos computacionales deberían ser de forma grupal, puesto que así los ejercicios en grupos se pueden discutir y analizar de mejor manera, porque se obtienen distintos puntos de vista.

Otra creencia de Daniela relevante para su aprendizaje es que considera que la metodología utilizada es la correcta y que la interacción con sus compañeros y el profesor fue provechosa.

Considera que en esta actividad el profesor es quien interactúa mayormente con sus estudiantes, puesto que, "El profesor muchas veces debió explicar puesto por puesto de trabajo a cada alumno cosas que no habían quedado suficientemente claras". Piensa que la cantidad de

laboratorios es poca, y que le gustaría que todos los trabajos fueran en forma grupal porque para ella sería más provechoso. *Anexo 6:Encuesta sobre las Creencias de los Estudiantes.*

En relación de su aprendizaje construido, según nuestro modelo cognitivo APOS, Daniela logró adquirir conocimientos básicos a nivel de acción, proceso, objeto, pero evidencia inseguridad en sus argumentos. Sin embargo, logra relacionar en forma correcta algunos esquemas, como la derivada con las propiedades cualitativas de una función lo que corresponde a un nivel de pre-esquema.

Otro aspecto sobre el cual podemos inferir información es respecto de estilo cognitivo de aprendizaje, se puede deducir de sus respuestas a las preguntas N^{o}1, N^{o}2 y N^{o}6, que su estilo es predominantemente secuencial con escaso tránsito hacia los estilos simultáneos verbal y no verbal caracterizado por el estímulo a la representación gráfica y resolución de problemas en forma gráfica, actividades realizadas principalmente en las clases de laboratorio con apoyo computacional.

4.4. Caso 3: Lola

Lola es una chica con habilidades matemáticas, comprende fácilmente los nuevos conceptos, lo que se deduce de su participación en las discusiones en el aula con sus compañeros, interviniendo cuando la profesora plantea interrogantes. Tiene además destreza para trabajar con el software en el ordenador y le gusta sociabilizar.

De la Tabla 4.14 se extraerán los resultados codificados de los indicadores de logro alcanzados por Lola en la Prueba de Medición de Estándares. La transferencia de estos datos al instrumento de análisis se exponen en la Tabla 4.15.

TABLA 4.14. Resultados Generales Codificados de la PME. Caso: Lola

	Juan Ignacio	Daniela	Lola	Nancy
P1	1	0	0	1
P2	0	1	0	1
P3	1	1	1	1
P4	1	1	1	1
P5	1	0	0	0
P6	1	0	1	0
P7	1	1	1	1
P8	1	1	1	1
P9	1	1	1	0
P10	0	0	1	0

Se analizará la información cada indicador para investigar el aprendizaje alcanzado por Lola, según el modelo cognitivo APOS.

4.4.1. Instrumento de Análisis: Prueba de Estándares

Como se comentó anteriormente en la Tabla 4.15 se resumen tres dimensiones de las respuestas de los estudiantes su validez, los indicadores de logro y el nivel de aprendizaje logrado en este caso por Lola, según APOS.

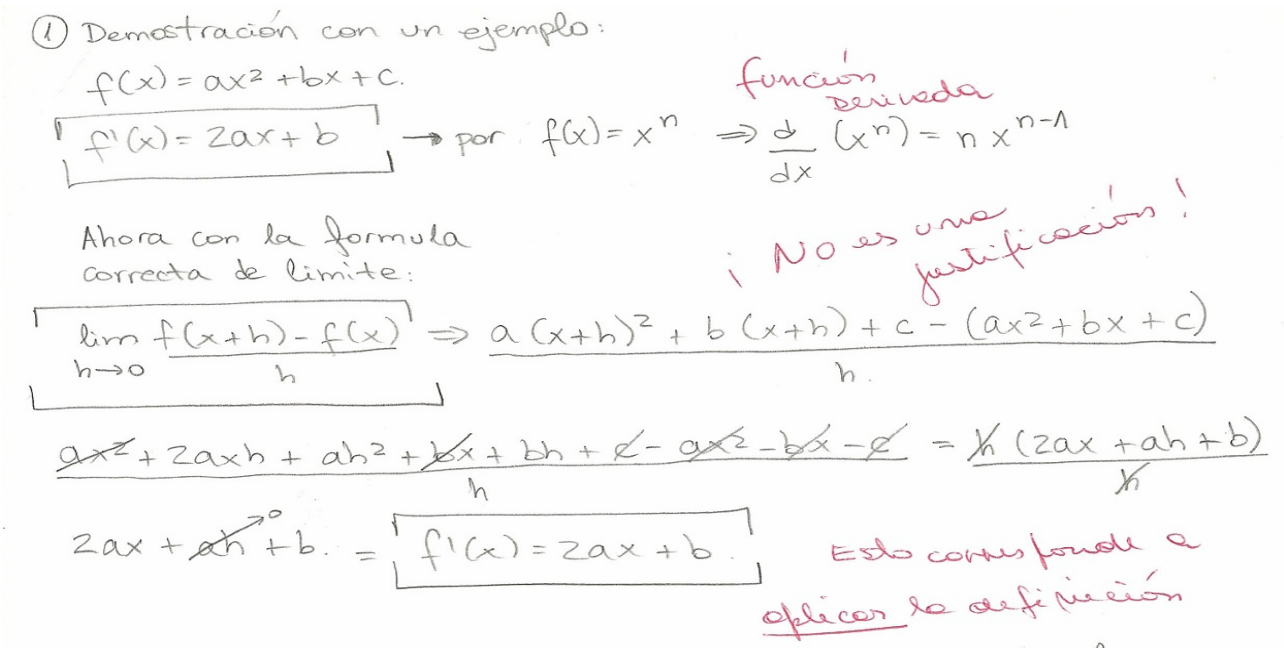
Se observa que el número de respuestas que se consideraron correctas son siete de un total de 10.

Se hace presente que Lola marcó en su prueba ocho alternativas correctas, pero se consideraron solo las siete cuyos argumentos o desarrollos fueron correctos.

TABLA 4.15. Análisis de Contenidos de la PME. Caso: Lola

Estándares u Organizadores e Inidicadores de Logro	Acción	Proceso	Objeto	Esquema
Comprende el Concepto de derivada y sus interpretaciones. I. de logro: P1 y P2	0 0			
Conoce la definición formal de derivada I. de logro: P3		1		
Usa correctamente las reglas de derivación I. de logro: P4			1	
Analiza funciones mediante el cálculo diferencial. I. de logro: P5, P6, P7				1 0 1
Comprende y aplica criterios de optimalidad. I. de logro: P8, P9				1 1
Es capaz de modelar y resolver situaciones concretas mediante ecuaciones diferenciales. I. de logro: P10				1

i) Uno de los indicadores marcados por Lola en forma correcta y justificado en forma incorrecta es el indicador N°1, que corresponde a un reconocimiento y comprensión del concepto de derivada en un punto que clasificamos como acción. Al analizar la explicación a la respuesta, se percibe que confundió la definición de derivada en un punto con la definición de la función derivada. Su argumento es:



Se había comentado la similitud entre ambas definiciones. La idea de este indicador es precisamente indagar si el estudiante es capaz de discriminar entre ambas definiciones, puesto que es el punto de partida de la teoría del Cálculo Diferencial.

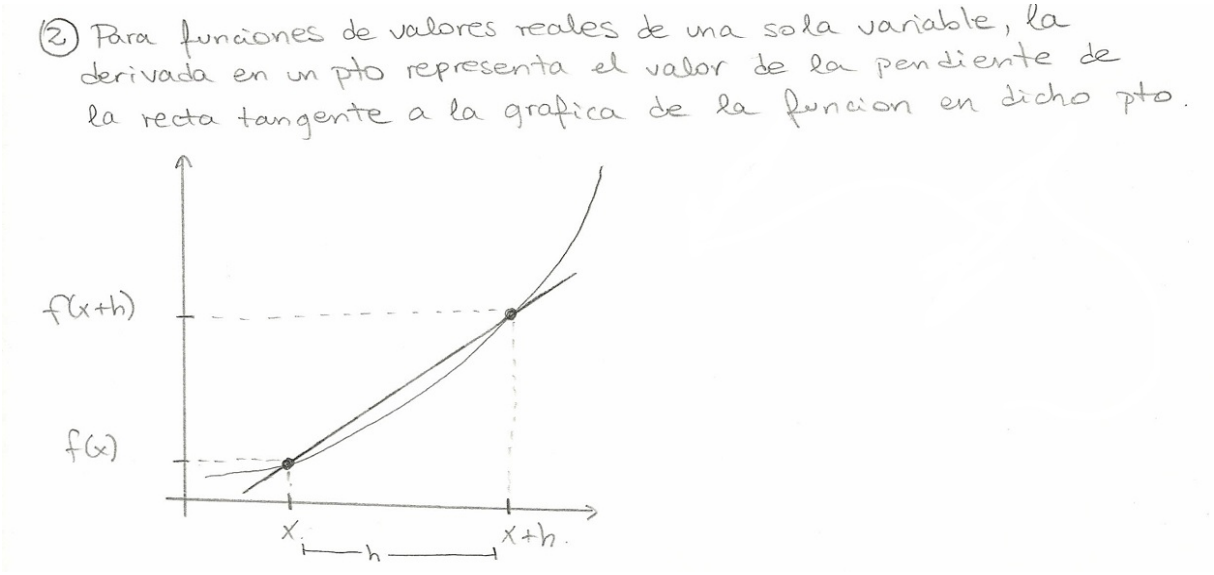
Lola es un segundo ejemplo de los casos en que los estudiantes responden bien, pero justifican mal. En esta situación, consideramos la pregunta como incorrecta.

En todo caso, hay que diferenciar entre no justificar por omisión o desconocimiento del tema y justificar mal por confusión, este último es el caso de Lola. Podemos conjeturar que justificar mal por confusión de conceptos es un problema de la comprensión del concepto mismo, es decir, su significado.

Discriminar entre la evaluación de una función en un punto y la función misma, en el caso de una función elemental, es un aprendizaje de un nivel más simple que en el caso de la función derivada. En el caso de la función derivada agrega complejidad el hecho que la definición es un límite al infinito, donde aparece involucrada la variable independiente y el estudiante debe reconocer y comprender primero el significado de este límite y su interpretación cuando aparece la variable independiente del caso en que aparece un valor específico de la variable independiente.

Del rendimiento de Lola se podría conjeturar que no reflexionó, ni observó lo suficiente lo que se pregunta, puesto que la ilustración que realiza, suponiendo que la pregunta no hubiese sido sobre la derivada en un punto, sino sobre la derivada de una función, su justificación hubiese sido correcta.

ii) Respecto al indicador de logro N°2 su respuesta también es incorrecta. Su justificación es la siguiente:

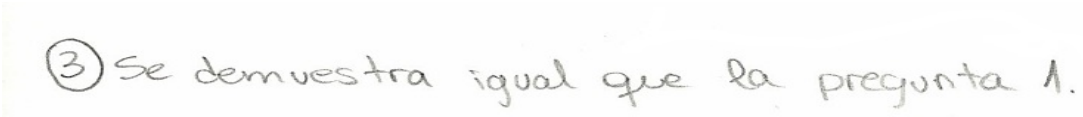


Este indicador mide el reconocimiento y comprensión del concepto de la derivada en un punto y su relación con la interpretación geométrica de la derivada. Lola vuelve a interpretar el concepto en forma errónea. En esta ocasión confunde la representación gráfica de la pendiente de la recta tangente en un punto con la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos.

Claramente evidencia confusión entre el concepto de derivada en un punto y su representación gráfica. Nuevamente muestra un aprendizaje a nivel de acción débil.

iii) Lola selecciona la alternativa correcta al responder el indicador de logro N°3, justifica su respuesta aseverando que se demuestra igual que la pregunta N°1. Y en este caso la justificación de su respuesta al indicador es correcta.

Se ha considerado que este indicador es de nivel de proceso porque el estudiante debería hacer una reflexión para su comprensión, es decir, una construcción interna.

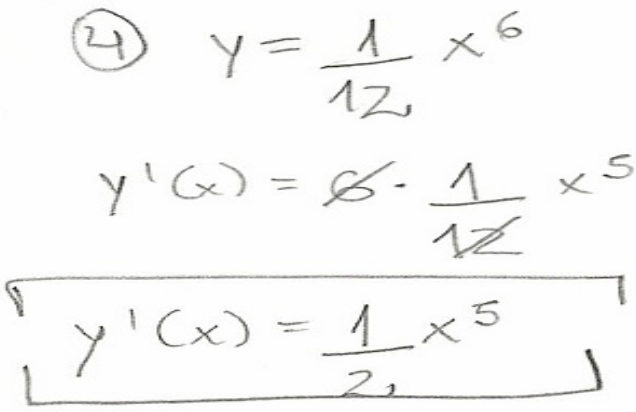


Al analizar su respuesta bastante escueta, indica que la explicación es la que dio en la pregunta N°1. En este caso el desarrollo que hizo para dicha pregunta es una aplicación del concepto de derivada, es el cálculo de la derivada de la forma general de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ usando la definición.

Para realizar esta aplicación el estudiante debe ser capaz de comprender y calcular límites en el infinito, definir el concepto de función derivada mediante un límite de este tipo para luego realizar una aplicación en forma correcta, por tal motivo clasificamos este indicador a nivel de Objeto.

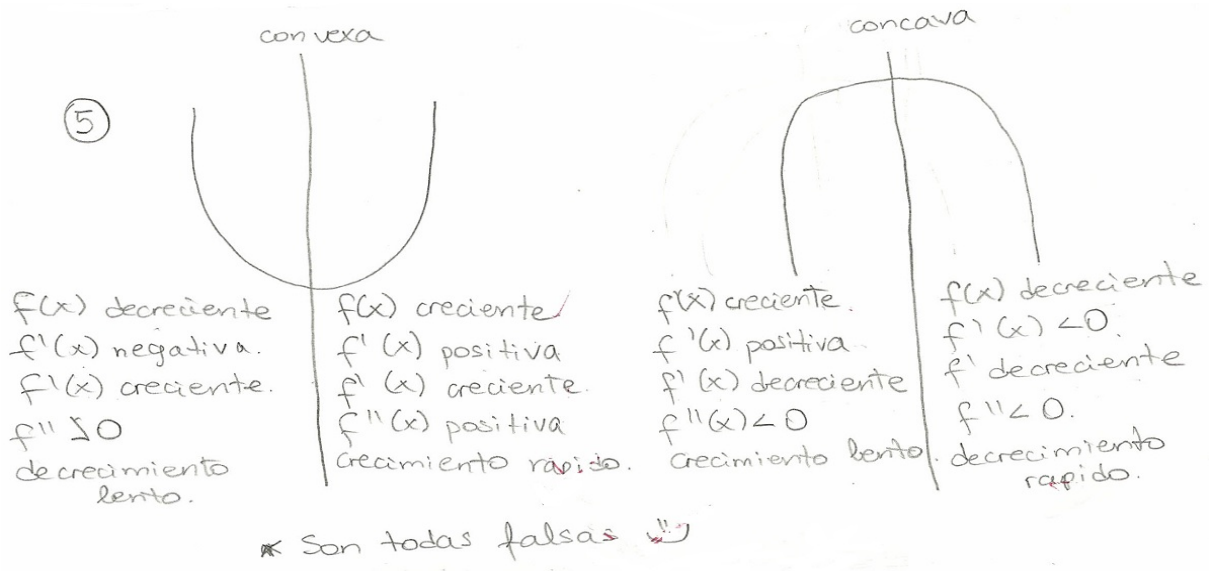
Su desarrollo es una aplicación de la definición de derivada, en la que Lola involucra la alternativa correcta, pero no da una respuesta directa. Notemos que es extraño que Lola confunda los conceptos involucrados en las preguntas N°1 y N°3 que forman parte la teoría del concepto y demuestre capacidades en el manejo de las aplicaciones que corresponden a un nivel superior de aprendizaje.

iv) Lola responde el indicador de logro N°4 en forma correcta, evidenciando que realiza el desarrollo de sus cálculos adecuadamente, demostrando que sabe aplicar las propiedades de la derivada clasificadas como un aprendizaje de nivel de proceso. Exponemos su desarrollo:



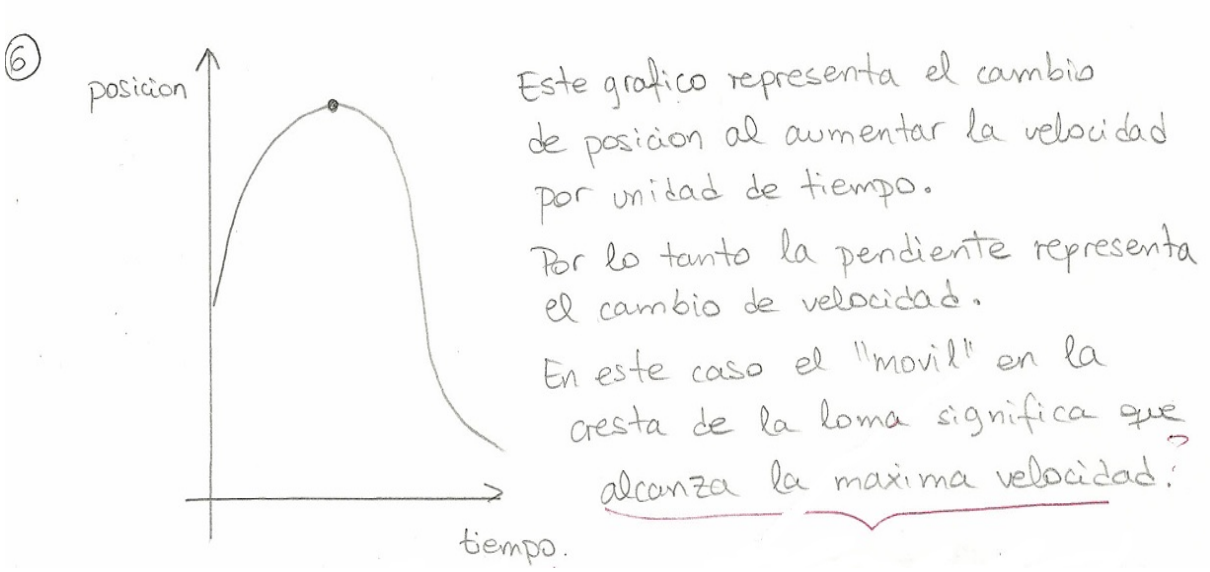
Claramente esta es una aplicación más simple que el cálculo de la derivada de la función cuadrática con la que Lola ilustró su respuesta de la pregunta Nº3.

v) El nivel de aprendizaje que el estudiante debe adquirir para desarrollar el indicador de logro Nº5 es de un esquema sub-etapa Inter, puesto que integra y relaciona varios conceptos relacionados con la derivada. De acuerdo a nuestro modelo APOS, el nivel de "esquema" es superior al nivel de "objeto", de modo que incluye a la concepción de objeto, que se logra cuando el estudiante es capaz de reflexionar sobre un proceso y transformarlo mediante una acción, lo que Dubinsky (1991) denomina *proceso encapsulado*.

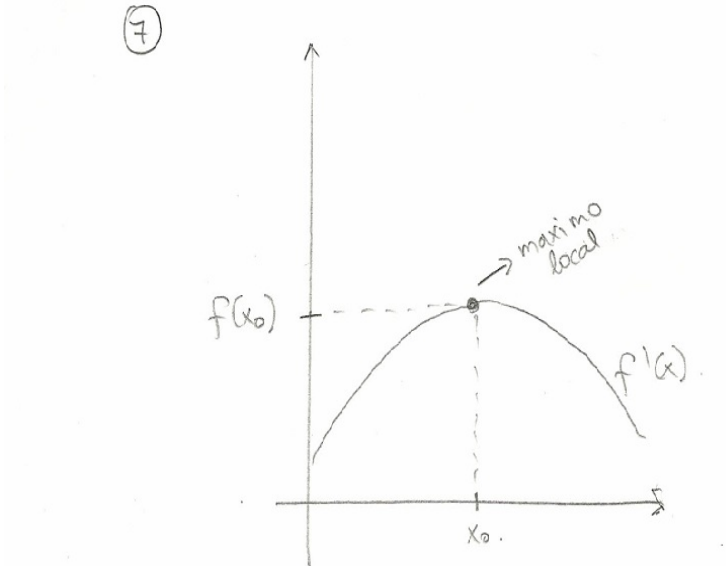


Lola responde en forma correcta y justifica relacionando los conceptos de función creciente con el signo de la función derivada y la forma gráfica de la función, análogamente relaciona función decreciente con el signo de la función derivada y la forma de la gráfica de la función. Lola muestra evidencia de Integrar correctamente estos conceptos.

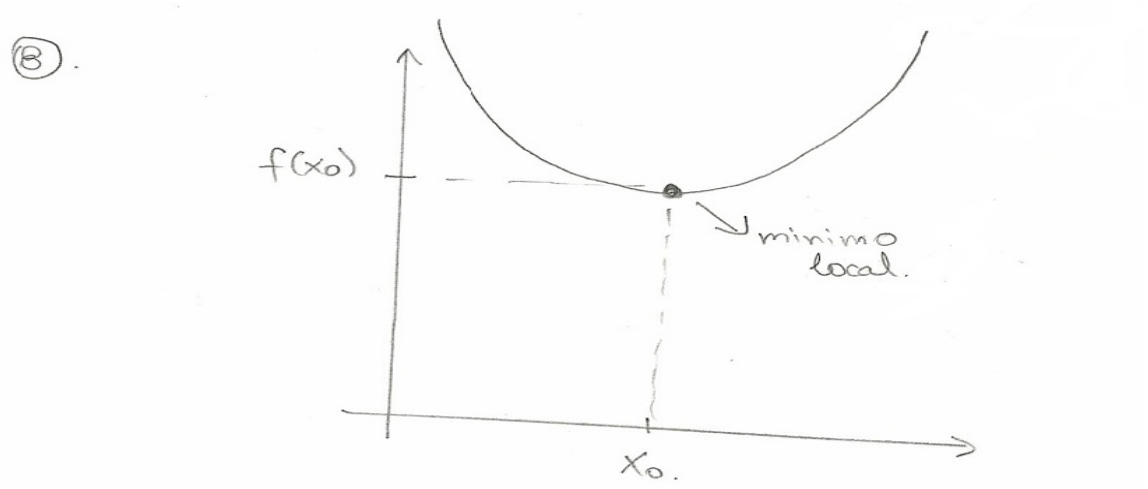
vi) Lola no responde el indicador N^{o}6, sus comentarios no aportan una justificación, aunque relaciona la derivada de la posición con la velocidad pero no aporta una conclusión de su relación que es lo esperado. Examinemos su planteamiento:



vii) Lola responde en forma correcta al indicador N^{o}7 y justifica su respuesta desde el punto de vista gráfico, relaciona el enunciado de la proposición, que corresponde al criterio de la primera derivada para máximos relativos con el concepto de máximo local e ilustra todos los conceptos en un solo gráfico. Lola evidencia su capacidad de relacionar estos esquemas.

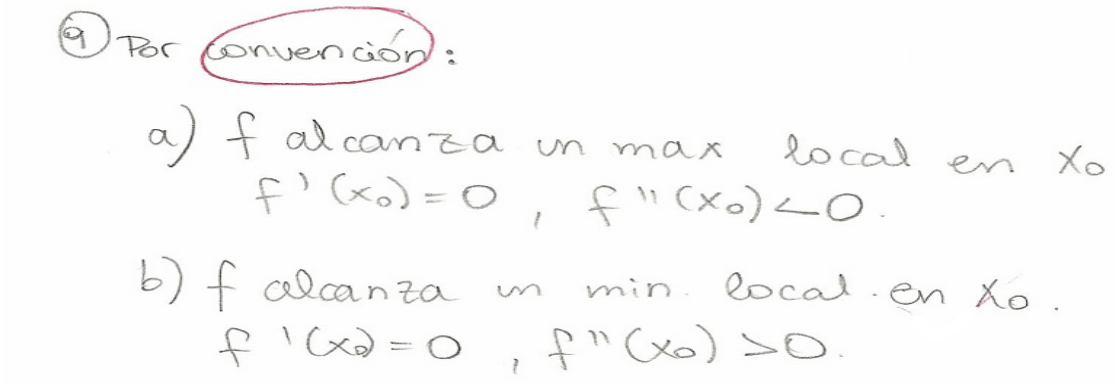


viii) Responde al indicador de logro N°8 en forma correcta, justifica su respuesta en forma análoga, relaciona la proposición dada que corresponde al criterio de la primera derivada para mínimos locales con el concepto gráfico de un mínimo relativo y el significado gráfico del criterio.



Al responder nuevamente en forma correcta, evidencia su capacidad de manejar las dos partes del criterio de la Primera Derivada, la que se refiere a máximos relativos y a mínimos relativos y la relación entre estos conceptos y la interpretación gráfica del concepto.

ix) La respuesta de Lola al indicador N°9 también es correcta. El indicador de logro N°9 comprende un conjunto de proposiciones falsas y una verdadera que corresponde al criterio de la segunda derivada para un mínimo local. Lola debe extraer la información correcta. Ella escribe el criterio en forma correcta para un máximo y para un mínimo.



Comete un error menor en su explicación, olvida que el nombre del teorema que aparece como una alternativa, en la literatura matemática se conoce con el nombre de *Criterio de la Segunda Derivada*, ella justifica diciendo "por convención". Percibimos que Lola muestra evidencia de haber logrado un aprendizaje a nivel de pre-esquema, relaciona en forma correcta el Criterio de la Segunda derivada en la determinación de valores extremos relativos y el esquema de interpretación geométrica de ambos conceptos.

x) En relación al indicador de logro N^{o}10, que corresponde a la modelación y resolución de un Problema de Valor Inicial extraído desde la problemática de crecimiento poblacional y que integra varios esquemas, Lola reconoce correctamente el problema y discrimina de entre cinco alternativas el modelo matemático asociado que corresponde a la ecuación logística. En relación ahora a la resolución de la ecuación diferencial, donde debe integrar además el esquema de "cálculo de integrales indefinidas", llega en forma correcta a la solución general en forma implícita de la ecuación diferencial.

La siguiente etapa es calcular a partir de las condiciones iniciales el valor de la constante de integración. Lola también realiza estos cálculos de forma correcta.

En resumen, podemos aceptar que tiene la capacidad de resolver el problema, aunque le faltó precisar la solución particular del problema, es decir, reemplazar el valor de la constante en la solución general y expresar la solución implícita en forma explícita, donde el estudiante debe manejar la operatoria de resolución de ecuaciones lineales de una variable.

La resolución de ecuaciones lineales es tema del curriculum de un curso de Enseñanza Básica, por lo tanto, si Lola no realizó este despeje no es por desconocimiento, sino porque en muchas ocasiones los libros de textos expresan las soluciones en forma implícitas.

En conclusión, Lola tiene la capacidad y ha evidenciado integrar los esquemas necesarios para resolver problemas aplicados, luego ha logrado la concepción de un pre-esquema en la modelación de problemas de crecimiento de población limitada o con restricciones.

Podemos inferir que a Lola le falta coordinar los esquemas de las matemáticas superiores con el esquema de operatoria básica para evidenciar la etapa Trans, puesto que un estudiante de etapa Trans debe coordinar todos los esquema y objetos matemáticos relacionados con la problemática como una sola estructura.

Todo nuestro análisis se deduce del desarrollo realizado por Lola, que presentamos seguidamente:

(10) L = capacidad de sostenimiento = 1500.

$$\frac{dP}{dt} = KP\left(1 - \frac{P}{L}\right)$$

$$\frac{dP}{dt} = KP\left(\frac{L-P}{L}\right) \Rightarrow \text{Variables separables.}$$

$$\int \frac{dP}{P(L-P)} = \int \frac{K}{L} \cdot dt \rightarrow \text{Fracciones parciales.}$$

$$\frac{1}{P(L-P)} \Rightarrow \frac{A}{P} + \frac{B}{(L-P)}$$

$$A(L-P) + BP = 1.$$

$P = 0$

$A(L-0) + \cancel{0}^{\circ} = 1.$

$$AL = 1$$

$$\boxed{A = \frac{1}{L}}$$

$P = L$

$\cancel{A(L-L)}^{\circ} + BL = 1$

$$BL = 1$$

$$\boxed{B = \frac{1}{L}}$$

$$\frac{\frac{1}{L}}{P} + \frac{\frac{1}{L}}{(L-P)}$$

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{1}{P} + \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{(L-P)}$$

$$\left[\frac{1}{L}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{(L-P)}\right)\right] = \frac{1}{P(L-P)} \rightarrow$$

$$\int \frac{1}{L}\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{L-P}\right)\cdot dP = \int \frac{k}{L}\cdot dt$$

$$\int \left(\frac{1}{P}+\frac{1}{L-P}\right)\cdot dP = dt\int k\,dt$$

$$\ln|P| - \ln|L-P| = kt + C.$$

$$\ln\left|\frac{L-P}{P}\right| = -kt + C$$

$$\left|\frac{L-P}{P}\right| = Ce^{-kt}$$

Calcular C:

$t=0.$

$$C = \frac{L-P_0}{P_0}$$

$$\frac{L-P}{P} = \frac{L}{P} - 1$$

$$\frac{L}{P} = 1 + Ce^{-kt}$$

$$\downarrow$$

$$P = \frac{L}{1+Ce^{-kt}}$$

$$C = \frac{L-P_0}{P_0}.$$

¡ Incompleto !

¡ faltan condiciones iniciales !

Informe General de la PME

El rendimiento de Lola podría haber sido superior, consideramos 7 indicadores correctos de los 10 descartando como correcto el indicador de logro N^{o}1, puesto que, observamos que mezcla los conceptos consultados en los indicadores N^{o}1 y N^{o}3.

Su equívoco se produjo entre indicadores de aprendizaje que definimos a nivel de acción, en un concepto puntual y básico como la definición de la derivada en un punto. Sin embargo, Lola evidencia a través de sus respuestas y los desarrollos de los temas un aprendizaje a nivel de pre-esquema o esquema etapa Inter. Nos referimos al aprendizaje de las aplicaciones de la derivada al análisis cualitativo de funciones y las aplicaciones a la modelación de problemas poblacionales.

4.4.2. Análisis de las Creencias

Se realizará primeramente el análisis de contenidos respecto de los módulos de clases y seguidamente de los laboratorios computacionales, de donde se extraerá información sobre las creencias del caso 3: *Lola.*

TABLA 4.16. Análisis de Contenidos sobre los Módulos de Clases. Caso: Lola

Organizador	Preguntas para obtener Información	Dirección de la Creencia	La Creencia ¿Es útil?	Calidad del aporte
Estructura Tratamiento Actividades	1. ¿Los (MC) están bien estructurados? ¿El tratamiento de los temas es pertinente? ¿Las actividades que incluyen son pertinentes?	1 1 1	C C C	2 2 2
Beneficios	2. ¿Los (MC) te reportaron algún beneficio?	1	C	2
Mejoras	3. ¿Quieres sugerir alguna mejora del (MC)?	1	C	2
Mejoras orientadas	4. Sugerencias para obtener mediante los (MC) un aprendizaje más perdurable	0	C	2
Comprensión de los conceptos	5. ¿Sirven para comprender los conceptos que no se entendieron en el aula?	0	C	2

Al analizar la Tabla 4.16 se puede observar que se han clasificado las cinco unidades de información que proporciona Lola y que la calidad de su aporte es directo.

i) El primer organizador incluye tres sub categorías. Lola se refiere en una frase implícita a las tres.

Con respecto a la estructura a los módulos de clases, ella expresa: "Que tienen un orden lógico" que une "a los temas tratados" y luego afirma "con actividades según el avance de los contenidos que se van desarrollando".

Luego, la creencia de Lola es que los módulos de clases tienen un estructura lógica en el tratamiento de los temas y las actividades se desarrollan de acuerdo al avance de los temas.

Su creencia se correlaciona en forma directa con la estructura que diseñamos para la construcción de los módulos de clases y que describimos en la *Sub-sección 3.4.3: Descomposición Genética Inicial de los Módulos de Clases y su Descripción*.

ii) Con respecto a la pregunta N^{o}2, *Si los módulos de clases le aportaron algún beneficio*, Lola declara que el beneficio para ella es: "El desarrollo de estudio en forma consecuente e identificando los contenidos de cada unidad en forma clara".

De esta unidad de información podemos deducir que Lola menciona dos beneficios: el estudio coherente y que puede identificar los contenidos de cada unidad en forma clara.

iii) Con respecto a la información que proporciona en relación de la pregunta N^{o}3 sugiere que: "A veces, la redacción de las explicaciones no eran muy completas, estaban muy resumidas, a veces costaba entender si uno estudiaba solo de ahí".

El objeto de la encuesta es justamente indagar sobre el rol de los módulos de clases y los laboratorios y recoger las opiniones de los estudiantes para mejorar su la recepción y utilidad.

En este caso la opinión de Lola apunta al carácter del módulo que no es un texto propiamente tal, sino un apunte cuyo fin es orientar a los estudiantes en su estudio y que contiene, y resume el programa de la asignatura. Se presentan en los módulos los contenidos que consideramos importantes y que serán tratados en las clases.

En relación de la otra parte de la unidad de información: "A veces le costaba entender, si solo estudiaba de ahí", pensamos que este hecho se debe a que los estudiantes no están habituados a leer matemáticas y a explicar el significado de los conceptos matemáticos leídos. Esto se evidencia cuando en clases se realiza el ejercicio de que los estudiantes lean y luego expliquen el significado de la definición de algún concepto, la mayoría de los estudiantes evidencian una escasa comprensión en interpretar el significado de la simbología matemática y explicar lo que comprendieron de lo escrito.

Para acoger estas sugerencias tendríamos que editar un texto de Cálculo Diferencial e Integral de edición propia, más completo e incorporar las guías de ejercicios que también están enfocadas al desarrollo de la asignatura. Pero este cambio implicaría modificar el propósito del material, donde uno de los objetivos es que las secciones sean modulares

y dinámicas en el sentido de ser susceptibles al mejoramiento, ya sea en relación a las actividades planteadas o de redacción año a año, si es posible.

iv) La pregunta N^{o}4 relativa a si la estudiante tiene sugerencias que permitan que los módulos logren una mayor retención de los conocimientos contestó que "No".

Además ella señaló antes que los módulos de clases están bien enfocados.

v) Respecto de la pregunta N^{o}5 ¿Los módulos le permitieron entender conceptos que no había logrado comprender en clases?

Su respuesta es negativa y declara que: "Me acuerdo que la derivada la aprendí en la clases, sin el módulo", agrega que el módulo "fue un complemento".

Podemos extraer información tanto de las unidades de información, cuyas respuestas son afirmativas, como de las negativas.

La creencia de Lola en relación a la estructura, tratamiento de los temas y las actividades propuestas es positiva, lo que nos permite pensar que los módulos han sido adecuados. Además, declara que los módulos le han permitido un estudio coherente y explicita sus beneficios y afirma el buen enfoque.

En resumen en el caso de Lola, los módulos de clases han cumplido con algunos de nuestros objetivos definidos a priori, que podemos sintetizar en un apoyo para su aprendizaje.

Se recopilará ahora la información sobre el rol que Lola atribuye a los laboratorios computacionales, usando la misma codificación anterior. Se representa esta información en la Tabla 4.17.

Al observar la Tabla 4.17 se puede apreciar que hemos clasificado las ocho creencias de Lola y que la calidad de la información que ella proporciona ha sido codificada como directa. Es decir, sus unidades de información responden a lo que se pregunta.

i) La primera pregunta apunta a las posibles dificultades que podría tener el estudiante para aprender la simbología del software. Lola afirma que más que la simbología le costó mucho aprender el orden de los códigos que debía ingresar.

Uno de los objetivos de nuestro trabajo es incorporar la tecnología con el fin de estimular más de un dominio cerebral e indagar si es apoyo para el aprendizaje. Para ello, al inicio el estudiante deberá relacionar el código simbólico que está constituido por las instrucciones MAPLE, con fenómenos visuales que aparecerán en la pantalla. Es decir, el estudiante deberá ir de la ecuación o función matemática a su codificación simbólica, que implica actividades asociadas a sus funciones cerebrales que se ubican en el hemisferio izquierdo, y desde éste, interpretar y visualizar los resultados producidos y/o gráficas

TABLA 4.17. Análisis de Contenidos de los (LC) Caso: Lola

Organizadores	Preguntas para obtener Información	Dirección de la Creencia	La Creencia ¿Es útil?	Calidad del aporte
Sintaxis	1. Dificultad con la sintaxis del software	1	C	2
Ayuda a la Comprensión	2. ¿Los (LC) ayudan a comprender mejor los temas tratados en el aula?	1	C	2
Apoyo a otras disciplinas	3. ¿Crees que el apoyo computacional debería usarse en la mayoría de las asignaturas?	1	C	2
Adquisición conocimientos eficaces	4. ¿Crees que los conocimientos adquiridos vía (LC) sean más perdurables en el tiempo?	1	C	2
Sugerencias conocimientos más permanentes	5. Sugerencias para que los (LC) permitan un conocimiento más perdurable.	1	C	2
Importancia actividad	6. ¿Crees que es importante el apoyo computacional?	1	C	2
Incentivo autodidacta	7. ¿Crees que el ordenador incentiva aprender en forma autodidacta?	1	C	2
Construcción de conocimiento	8. ¿Percibiste alguna vez que el uso de software permite construir conocimiento?	1	C	2

producidas por el código, lo que implica actividades cerebrales asociadas al hemisferio derecho y viceversa.

Es natural que sea una dificultad para algunos estudiantes en las primeras sesiones de laboratorio encontrar que el aprendizaje del software no sea fácil, pero luego después de la fase de adiestramiento esta percepción es superada.

ii) Respecto de si los laboratorios fueron un apoyo que le ayudaron a comprender los temas tratados en el aula, Lola afirma que de la derivada no recuerda las actividades que realizamos, pero sí de las actividades de las sumas de Riemann cuando estudiamos la integral.

iii) Respecto al uso del ordenador en forma más amplia, en la mayoría de las asignaturas, Lola expresa: "Incluyendo además de las matemáticas, Estadística, Fisicoquímica, quizás Orgánica II, algo que muestre los mecanismos de reacción en un esquema animado".

Se puede inferir de esta unidad de información que Lola cree que debe incorporarse la tecnología a otras asignaturas relacionadas con el cálculo científico. Sugiere el uso de software que permite la animación de algunas reacciones.

iv) La unidad de información que expone Lola respecto de la pregunta N°4, si los conocimientos adquiridos vía laboratorios computacionales son más perdurables en el tiempo, es afirmativa y enfatiza que: "Siempre uno se acuerda, nunca de todo...pero, sí es útil para comprender".

Su creencia evidencia un recuerdo de las actividades realizadas, pero no de todas lo que es normal, pero además señala la utilidad para facilitar la comprensión.

v) La sugerencia de Lola respecto de la pregunta N°5: ¿Crees que podrías hacer alguna sugerencia que permita que los laboratorios posibiliten un conocimiento más perdurable? afirma que sí y supone que deberían realizarse más clases con apoyo computacional.

Esta sugerencia es difícil de implementar, puesto que los laboratorios computacionales son realizados en horas destinadas a las clases presenciales. Agregar más actividades con apoyo computacional implicaría contar con menos horas de clases destinadas al tratamiento de los contenidos programáticos.

vi) En relación de la consulta realizada en la pregunta N°6, si es importante el apoyo computacional, Lola afirma que el apoyo computacional es una herramienta útil que sirve siempre.

vii) La pregunta N°7 tiene como fin indagar si el ordenador incentiva a aprender en forma autodidacta. Lola afirma que sí porque el aprendizaje es más gráfico.

viii) Al analizar la unidad de información que proporciona Lola a la pregunta N°8, si construyó conocimiento con el uso del software, Lola señala que sí: "En el laboratorio entendí bien que era la sumatoria de Riemann".

Se puede inferir que la construcción realizada en el laboratorio de las sumas de Riemann y su paso al límite para definir la Integral Definida le causó una gran aporte al aprendizaje de este concepto. Lola lo ha mencionado en dos oportunidades.

Informe General de las Creencias

De la información proporcionada por Lola podemos percibir que ella atribuye un rol importante a los módulos al declarar que los módulos tienen *un orden lógico de explicación de los temas tratados, con actividades según el avance de los contenidos que se van desarrollando*.

Además, declara como beneficio de los módulos de clases: "El desarrollo en forma consecuente e identificación de los contenidos en forma clara".

Señala como sugerencia de mejoramiento de los módulos mayor profundidad en las explicaciones, puesto que encontró el desarrollo de los temas muy resumidos, de donde se deduce

que necesita más base para anclar la nueva información. Sin embargo, afirma que los módulos están bien enfocados. La función que desempeñaron los módulos de clases para ella fueron un complemento, porque alude que los conceptos los aprendió directamente en las clases.

Las creencias de Lola son afines y se correlacionan positivamente con la intención de los módulos de clases, ya que sus creencias concuerdan con el propósito con que fueron confeccionados.

Sus creencias respecto al apoyo computacional son variadas. En primer lugar los talleres le ayudaron a comprender mejor los temas tratados en el aula, aunque no recuerda exactamente las actividades realizadas para el aprendizaje de la derivada. Sin embargo, recuerda mucho la actividad de la construcción de las sumas de Riemann en el estudio de la integral definida.

En segundo lugar, cree que debería utilizarse la herramienta computacional en más asignaturas, como por ejemplo en todas aquellas asignaturas del área de matemáticas, Estadística, Fisicoquímica, Orgánica II. Además sugiere usar software con animación en las asignaturas en que se realizan reacciones químicas.

Tercero, en relación de la creencia: "Si los conocimientos adquiridos en el laboratorio podrían ser más permanentes en el tiempo", afirma que sí y aunque no se acuerda de todos los conocimientos desarrollados en los laboratorios, son útiles para la comprensión.

Cuarto, cree que para que los laboratorios permitan un conocimiento más perdurable en el tiempo hay realizar una mayor cantidad de laboratorios.

Por último, cree que el ordenador incentiva a un aprendizaje autodidacta y que ella construyó conocimiento matemático cuando en el laboratorio computacional se reforzó la construcción de la integral de Riemann.

Respecto del estilo cognitivo de aprendizaje de Lola, se puede deducir de sus respuestas que ella transita del estilo secuencial hacia los estilos simultáneos verbal y no verbal caracterizado por el estímulo a la representación gráfica y resolución de los problemas en forma gráfica, actividades realizadas principalmente en las clases de laboratorio con apoyo de software computacional.

4.5. Caso 4: Nancy

Nancy es el prototipo representativo de un gran grupo de estudiantes, no le cuesta aprender matemáticas pero no es sobresaliente, su rendimiento durante el curso de matemáticas I, como lo constataremos, fue más que suficiente y menos que bueno. Participa y sociabiliza con sus compañeros en las discusiones en el aula. No tiene reticencia al trabajo con el ordenador.

Revisamos la Tabla 4.18 de los resultados codificados de los cuatro casos, centrando nuestra atención en Nancy. Se analizará el significado de esta codificación a la luz del Instrumento de Análisis, el modelo cognitivo APOS.

TABLA 4.18. Resultados Generales Codificados de la PME. Caso: Nancy

	Juan Ignacio	Daniela	Lola	Nancy
P1	1	0	0	1
P2	0	1	0	1
P3	1	1	1	1
P4	1	1	1	1
P5	1	0	1	0
P6	1	0	0	0
P7	1	1	1	1
P8	1	1	1	1
P9	1	1	1	0
P10	0	0	1	0

4.5.1. Instrumento de Análisis: Prueba de Medición de Estándares

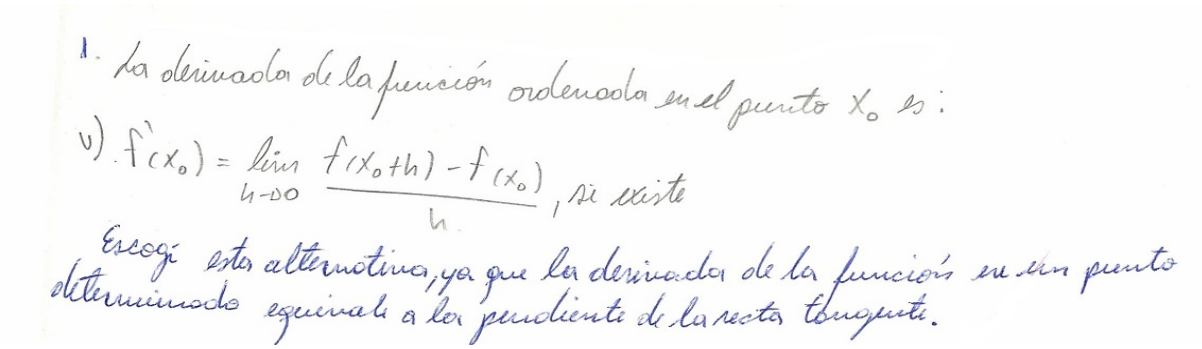
La Tabla 4.19 resume las respuestas de Nancy. Los indicadores de logro que mide esta Prueba y el nivel de aprendizaje logrado por esta estudiante según nuestro modelo APOS.

TABLA 4.19. Análisis de Contenidos de la PME de Nancy

Estándares u Organizadores e Inidicadores de Logro	Acción	Proceso	Objeto	Esquema
Comprende el Concepto de derivada y sus interpretaciones. I. de logro: P1 y P2	1 1			
Conoce la definición formal de derivada. I. de logro: P3		1		
Usa correctamente las reglas de derivación. I. de logro: P4			1	
Analiza funciones mediante el cálculo diferencial. I. de logro: P5, P6, P7				0 0 1
Comprende y aplica criterios de optimalidad. I. de logro: P8, P9				1 0
Es capaz de modelar y resolver situaciones concretas mediante ecuaciones diferenciales. I. de logro: P10				0

Se puede observar que el número de respuestas marcadas como correctas son 6 de un total de 10. Se analizarán las explicaciones y argumentos matemáticos de Nancy para evidenciar su nivel de aprendizaje.

i) Nancy responde en forma correcta la pregunta que representa al indicador de logro N°1 y que corresponde a un nivel básico de reconocimiento y comprensión del concepto de la derivada en un punto. Al revisar su explicación se percibe que su respuesta es muy resumida.

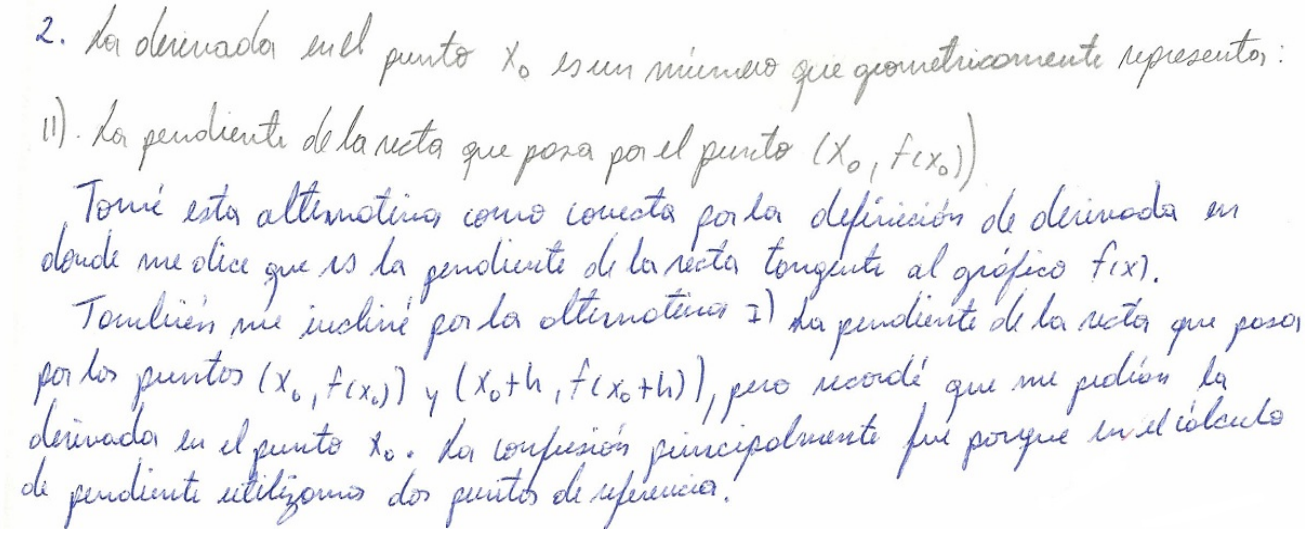

1. La derivada de la función ordenada en el punto x_0 es:

b) $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, si existe

Escogí esta alternativa, ya que la derivada de la función en un punto determinado equivale a la pendiente de la recta tangente.

Nancy escribe la definición de derivada en un punto y la relaciona con la pendiente de la recta tangente de manera correcta. Por lo tanto, evidencia un conocimiento superior a una acción con tránsito hacia un Proceso.

ii) El indicador de logro N°2 relaciona el concepto de derivada en un punto con la interpretación geométrica de la derivada en un punto. Nancy responde la pregunta en forma correcta.


2. La derivada en el punto x_0 es un número que geométricamente representa:

II). La pendiente de la recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$

Tomé esta alternativa como correcta por la definición de derivada en donde me dice que es la pendiente de la recta tangente al gráfico $f(x)$.

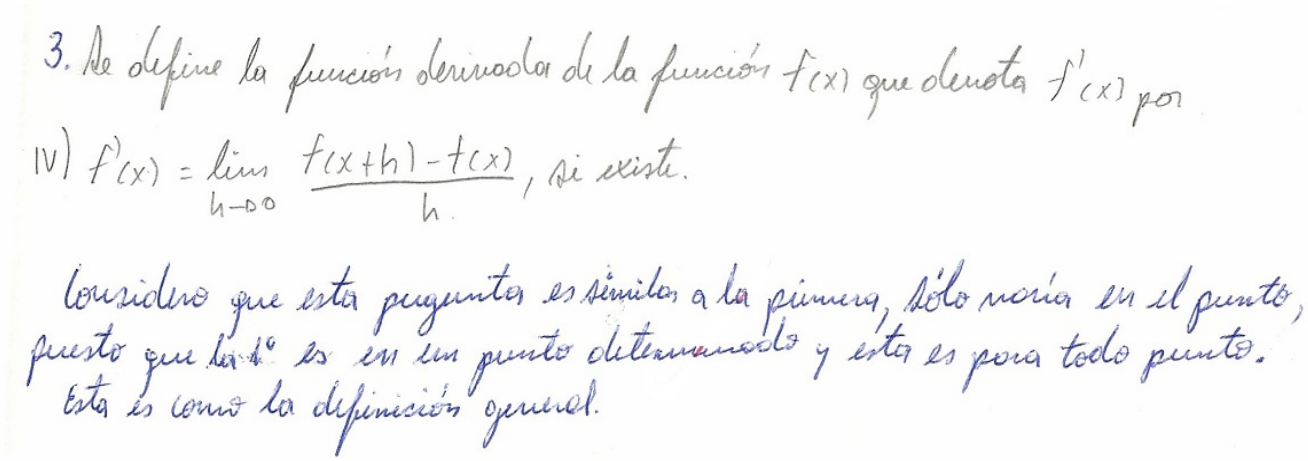
También me incliné por la alternativa I) la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$, pero recordé que me pedían la derivada en el punto x_0. La confusión principalmente fue porque en el cálculo de pendiente utilizamos dos puntos de referencia.

Justifica su elección aplicando la definición de derivada y su interpretación geométrica. Agrega información sobre como discriminó entre la alternativa i) y ii). En su justificación Nancy usa una descripción narrativa sin incorporar la notación matemática. Muestra evidencia de que sabe relacionar el concepto de derivada con su interpretación geométrica en forma verbal.

Esta estudiante evidencia un nivel de acción del concepto con tránsito a un proceso es un poco más que una acción.

iii) Nancy selecciona la alternativa correcta al responder el indicador de logro N°3, justifica su respuesta escribiendo la definición de derivada. Señala que considera que esta definición es similar a la pregunta N°1, pero puntualiza que el indicador N°1 se refiere a la derivada en un punto en cambio la pregunta N°3 corresponde a todo punto. Nancy justifica comparando ambos indicadores en forma correcta.

Nancy muestra evidencia que distingue en forma clara la diferencia entre derivada en un punto y la función derivada. Recordamos que esta diferencia es la que llevó a confundir ambos conceptos en los casos de Daniela y Lola. Revisemos su explicación:

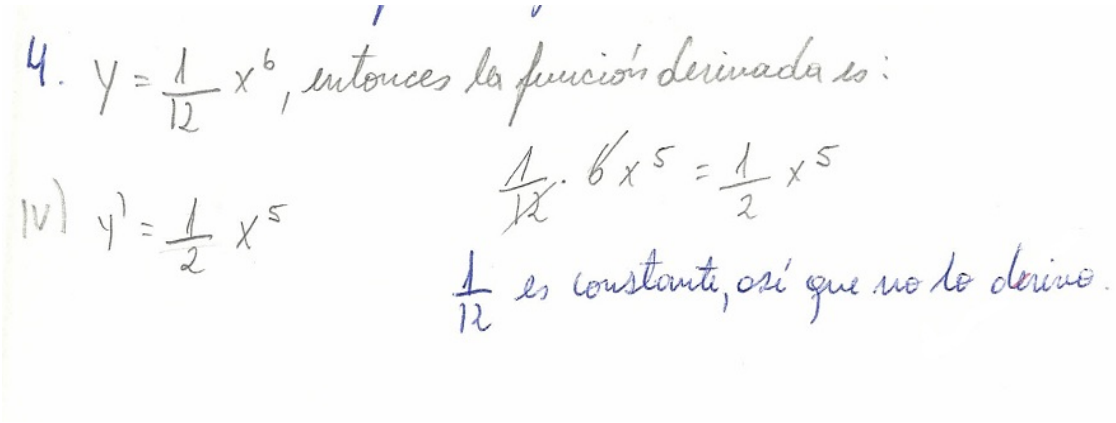

3. Se define la función derivada de la función $f(x)$ que denota $f'(x)$ por

IV) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, si existe.

Considero que esta pregunta es similar a la primera, sólo varía en el punto, puesto que la 1° es en un punto determinado y esta es para todo punto. Esta es como la definición general.

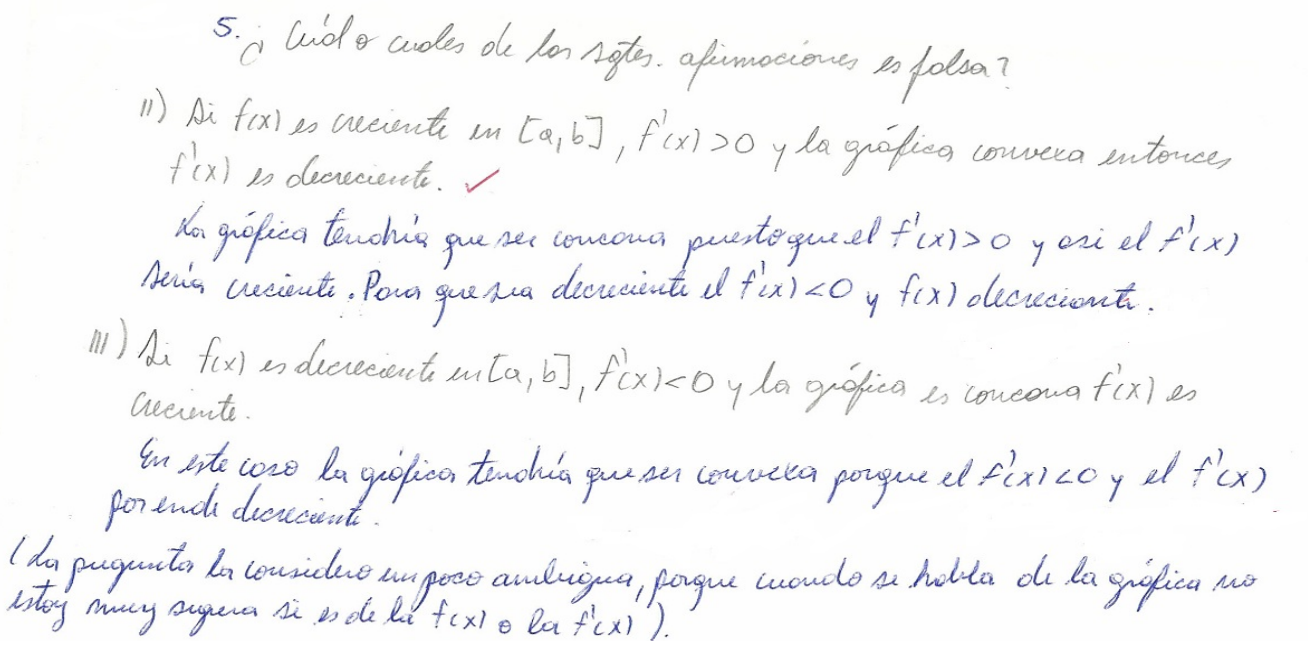
iv) Nancy responde el indicador de logro N°4 en forma correcta. La estudiante aplica las reglas de derivación en forma correcta obteniendo un resultado correcto. Explica que el número $\frac{1}{12}$ no lo deriva por ser constante, evidenciando sus conocimientos al aplicar las reglas básicas de la derivación.

Este indicador refleja una aplicación simple de las propiedades de la derivada, por tal motivo lo definimos como un aprendizaje a nivel de objeto. Nancy demuestra que sabe aplicar las propiedades de la derivada, cuyo aprendizaje fue clasificado a nivel de "objeto derivada".

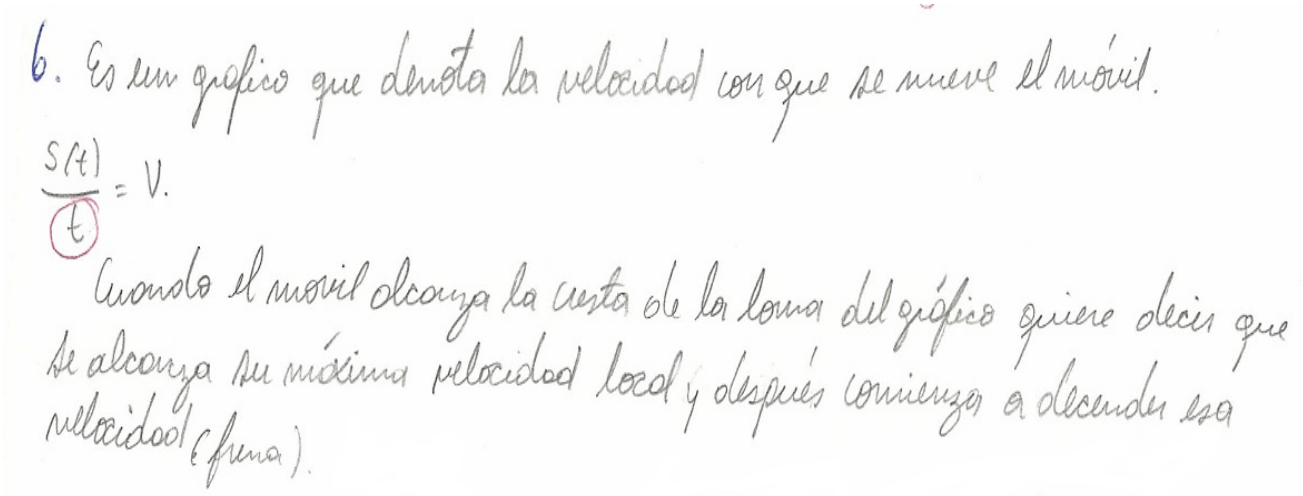


Nancy ha evidenciado hasta este momento haber comprendido el concepto de la derivada y su relación con otros conceptos básicos, además maneja con destreza las propiedades, ha desarrollado un aprendizaje de objeto derivada.

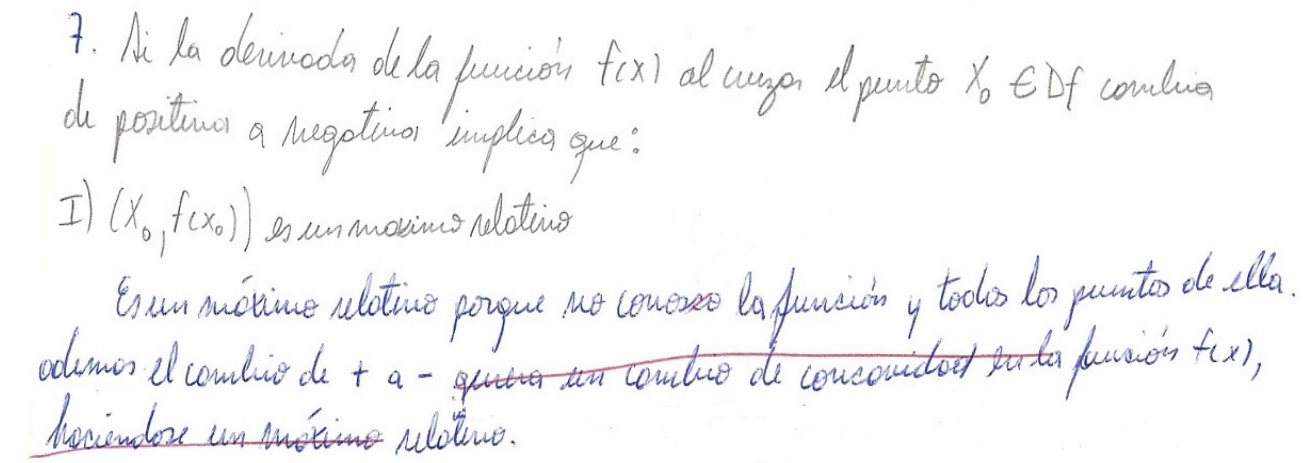
v) Nancy responde el indicador de logro N°5 en forma incorrecta. Marca dos alternativas falsas. Esto nos indica que no recuerda los conceptos involucrados para relacionarlos en forma correcta. Este indicador mide si el estudiante conoce las relaciones que existen entre la monotonía de una función, su derivada y la forma de la gráfica de una función. Nancy no muestra evidencia de este conocimiento, donde el estudiante debe haber desarrollado el concepto a nivel de un esquema. Observemos su respuesta:



vi) En relación al indicador de logro N°6 Nancy no entiende lo que se pregunta, su análisis no aporta información relevante.



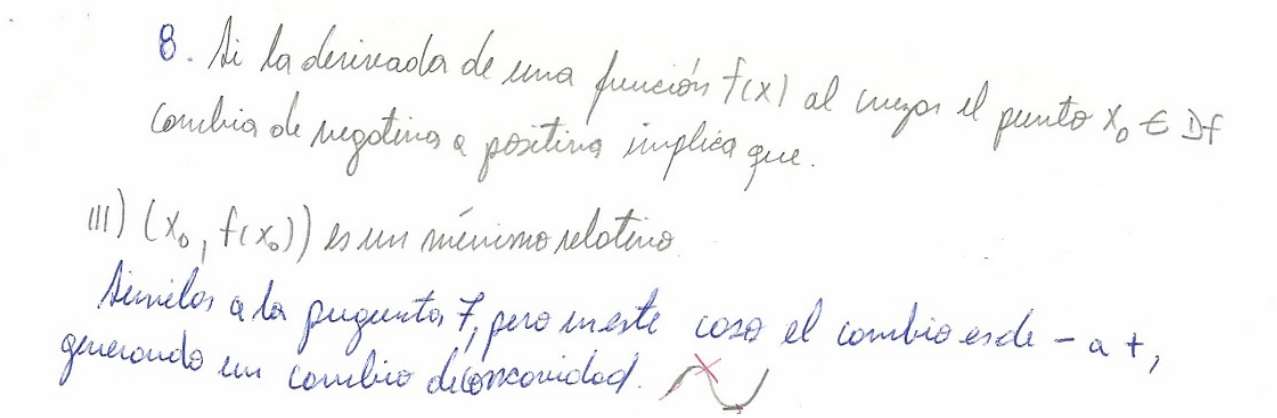
vii) Se indaga mediante el indicador de logro N°7 si la estudiante reconoce el criterio de la primera derivada para máximos relativos. Nancy marca la alternativa correcta y justifica su respuesta repitiendo el enunciado del criterio que corresponde a la alternativa 7 i) de la PME .



Relaciona el enunciado con la concavidad de la función, pero esta última relación no se pregunta y es incorrecta.

La estudiante podría haber complementado más sus respuestas aún cuando no se pregunte, pero ello solo nos evidenciaría un nivel superior de su aprendizaje lo que Nancy no ha evidenciado.

viii) Análogamente, Nancy responde el indicador Nº8 en forma correcta. Su justificación es similar a la pregunta Nº7, repite el criterio de la primera derivada para determinar valores mínimos. Su razonamiento es:

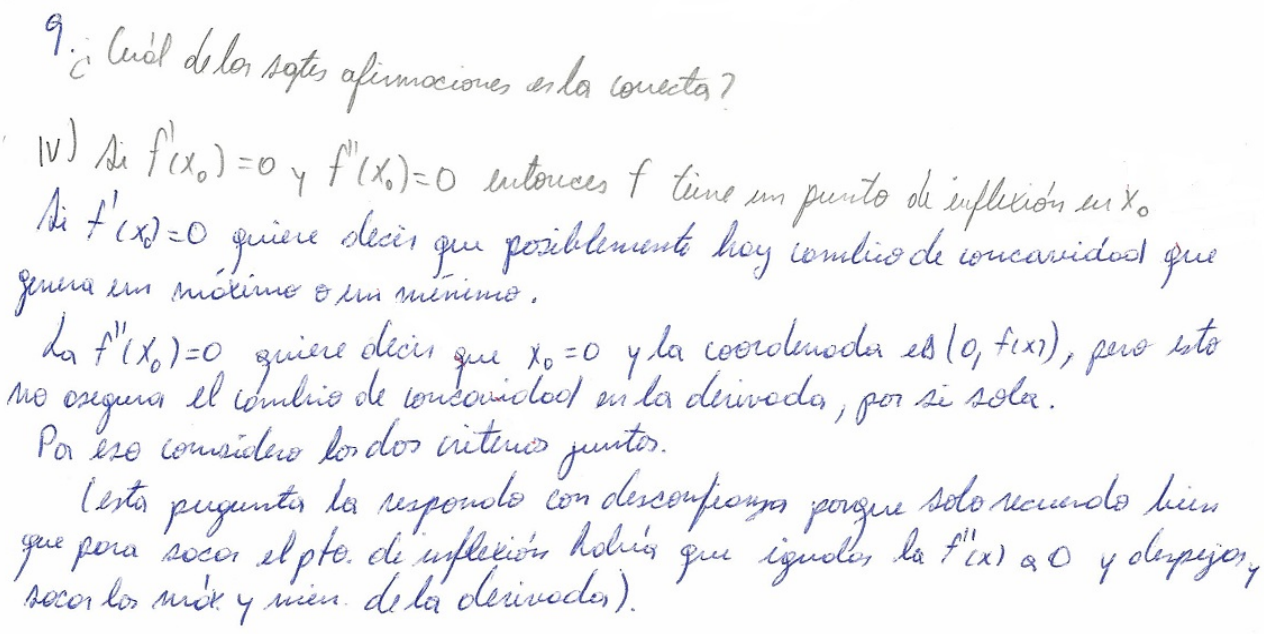

8. Si la derivada de una función $f(x)$ al cruzar el punto $x_0 \in Df$ cambia de negativa a positiva implica que.

III) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo relativo

Similar a la pregunta 7, pero inverso cree el cambio sería de − a +, generando un cambio de concavidad.

Nuevamente relaciona este criterio con la concavidad de una función, pero comete el mismo error.

ix) La respuesta al indicador Nº9 es incorrecta, en su justificación le faltan condiciones para concluir que la alternativa iv) sea un punto de inflexión. Reconoce que no recuerda bien la definición completa y efectivamente le faltan condiciones.


9. ¿Cuál de las sgtes afirmaciones es la correcta?

IV) Si $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0)=0$ entonces f tiene un punto de inflexión en x_0

Si $f'(x_0)=0$ quiere decir que posiblemente hay cambio de concavidad que genera un máximo o un mínimo.

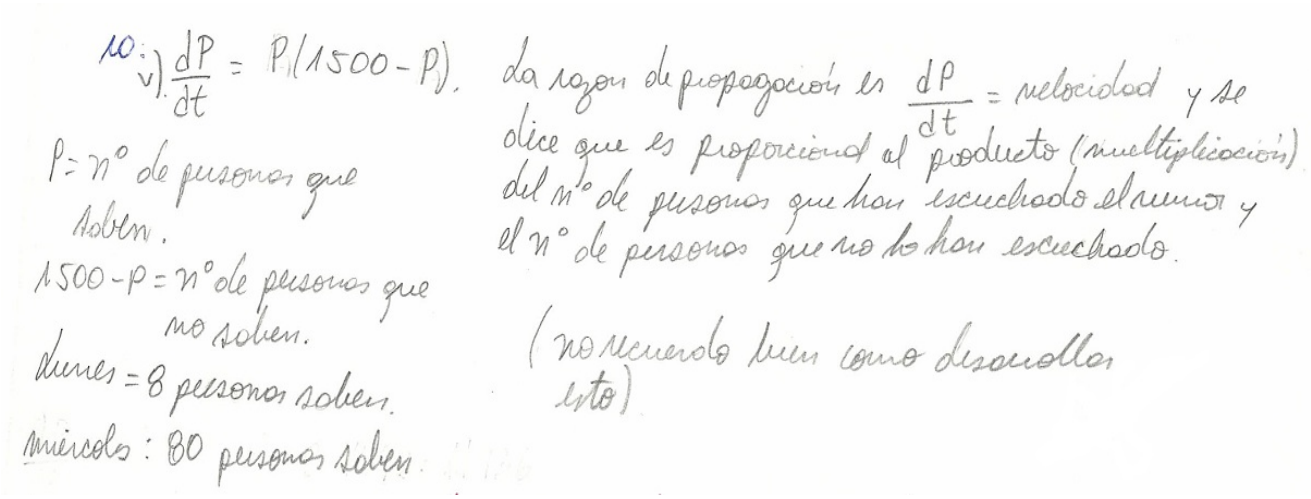
La $f''(x_0)=0$ quiere decir que $x_0=0$ y la coordenada es $(0, f(x))$, pero esto no asegura el cambio de concavidad en la derivada, por sí sola.

Por eso considero los dos criterios juntos.

(esta pregunta la respondo con desconfianza porque solo recuerdo bien que para sacar el pto. de inflexión había que igualar la $f''(x)$ a 0 y despejar, y sacar los máx y mín de la derivada).

Nancy logra relacionar el concepto de derivada solo con las propiedades cualitativas relacionadas con los valores extremos, evidenciando que no ha logrado relacionar con las propiedades cualitativas de una función relacionadas con la concavidad.

x) Nancy no reconoce el modelo matemático asociado a los problemas de crecimiento limitado o ecuación logística, ni tampoco evidencia de relacionar los esquemas involucrados en esta pregunta. Observemos su desarrollo:



Se observa que solo realiza un planteamiento que no corresponde al enunciado. Además no resuelve el modelo que propone.

Informe General de la PME

Desde el punto de vista del rendimiento, Nancy responde seis indicadores de 10. Los cuatro primeros corresponden desde el nivel de acción hasta nivel de objeto y los otros dos relacionados con las aplicaciones de la derivadas al análisis cualitativo de las funciones.

Se percibe que Nancy evidencia con sus respuestas el aprendizaje de los conceptos asociados a los indicadores que según nuestra descomposición genética clasificamos desde el nivel de acción transitando hasta el nivel de objeto. Además muestra evidencia de ser capaz de relacionar el esquema de la derivada con el esquema de valores extremos de una función, relación que se evidencia al responder correctamente los indicadores de logro N°7 y N°8.

Es decir, Nancy ha desarrollado un aprendizaje a un nivel de pre-esquema de la derivada y sus aplicaciones relacionadas con máximos y mínimos relativos solamente. Estos resultados obtenidos por Nancy y la cantidad de preguntas correctas nos permiten conjeturar que más que suficiente, significa alcanzar un nivel de pre-esquema solo en algunos esquemas relacionados

con el concepto de la derivada, para lograr el nivel de esquema completo, el estudiante debería coordinar todos los esquemas involucrados en la Prueba.

4.5.2. Análisis de las Creencias

Se realizará el análisis de contenidos respecto de los módulos de clases y de los laboratorios computacionales de Nancy.

TABLA 4.20. Análisis de Contenidos de los Módulos de Clases. Caso: Nancy

Organizador	Preguntas para obtener Información	Dirección de la Creencia	La Creencia ¿Es útil?	Calidad del aporte
Estructura Tratamiento Actividades	1. ¿Los (MC) están bien estructurados? ¿El tratamiento de los temas es pertinente? ¿Las actividades que incluyen son pertinentes?	1	D	1
Beneficios	2. ¿Los (MC) te reportaron algún beneficio?	1	C	2
Mejoras	3. ¿Quieres sugerir alguna mejora del (MC)?	1	D	0
Mejoras orientadas	4. Sugerencias para obtener mediante los (MC) un aprendizaje más perdurable	1	C	1
Comprensión de los conceptos	5. ¿Sirven para comprender los conceptos que no se entendieron en el aula?	1	C	1

De la Tabla 4.20 se puede observar que se han descartado dos unidades de información de Nancy correspondiente a las preguntas N^o 1 y N^{o}3, debido a que Nancy no aporta información a lo que se pregunta.

i) A través del primer organizador queremos recopilar información sobre tres características de los módulos de clases. Hemos descartado esta unidad de información porque Nancy no aporta información, ni de la estructura, ni del tratamiento de los temas y tampoco de las actividades, aunque afirma que sí a la pregunta.

Su creencia es que los módulos deberían ser más concisos [3] y con más ejemplos. Está última creencia podría ser considerada en una edición futura, aunque se entregan guías de ejercicios como complemento a todos los cursos que forman la asignatura de Matemáticas I. En el *Anexo 8: Guías de Ejercicios*, incluimos cinco guías de ejercicios como referencia, generalmente en un semestre se entregan seis o siete.

[3] Conciso es sinónimo de resumido. No se consulta la extensión de los módulos de clases.

ii) Con respecto a la interrogante N^{o}2: *¿Si los módulos de clases le aportaron algún beneficio?* Afirma con un quizás el ser más autosuficiente, ya que si no puede ir a clases, los módulos le permiten leer y estudiar y estar al día.

De esta creencia de Nancy al referirse al beneficio se puede extraer como información que utiliza los módulos para estudiar y estar al día si falta alguna vez. Ella cree los módulos la hacen más autovalente.

iii) Como se anticipó la unidad de información N^{o}3 se descartó porque Nancy se refiere nuevamente a las guías de ejercicios y no a los módulos de clases. Las guías de ejercicios son confeccionadas por distintos profesores de la asignatura, de los cuáles no todos comparten el incluir los resultados a los ejercicios propuestos.

iv) En relación de la consulta N^{o}4: sugerencias que puedan permitir un conocimiento más perdurable, Nancy se refiere solo a los ejercicios; cree que "Deberían plantearse situaciones del diario vivir y con lo que está estudiando".

Estas sugerencias se implementan en la medida que es posible, en los módulos de clases y en las guías de ejercicios. Hoy en día se incluyen cada vez más ejercicios aplicados a situaciones cotidianas no solo en el material escrito sino también en las clases.

Su información se codificó con 1, ya que no se refiere en forma explícita a los módulos de clases.

v) Por último la pregunta N^{o}5: ¿los módulos le permitieron entender conceptos que no había logrado comprender en clases? Su respuesta es afirmativa y señala que: "Por lo general me ayudaron bastante".

De esta unidad de información podemos conjeturar que los módulos de clases fueron un gran apoyo para Nancy.

De las creencias de Nancy se puede inferir que los módulos de clases cumplieron con su objetivo principal, apoyarla en su aprendizaje. Aunque sus sugerencias y opiniones están dirigidas en forma más específicas a las guías de ejercicios.

Nancy no es una estudiante que tenga dificultades en el estudio de las matemáticas, de hecho si se toma solo como referencia su rendimiento en la asignatura de Matemáticas I, su calificación es más que suficiente y podría haber evidenciado un mejor rendimiento. Por lo tanto, como comentario a sus creencias, se infiere de sus opiniones que los módulos la ayudaron bastante en su aprendizaje y en la comprensión de las materias.

Se examinarán ahora las creencias de Nancy en relación al rol que le atribuye a los laboratorios computacionales. Presentamos las características de sus unidades de información en la Tabla 4.21.

TABLA 4.21. Análisis de Contenidos de los (LC), caso: Nancy

Organizadores	Preguntas para obtener Información	Dirección de la Creencia	La Creencia ¿Es útil?	Calidad del aporte
Sintaxis	1. Dificultad con la sintaxis del software	1	C	2
Ayuda a la Comprensión	2. ¿Los (LC) ayudan a comprender mejor los temas tratados en el aula?	1	C	2
Apoyo a otras disciplinas	3. ¿Crees que el apoyo computacional debería usarse en la mayoría de las asignaturas?	0	D	1
Adquisición conocimientos eficaces	4. ¿Crees que los conocimientos adquiridos vía (LC) sean más perdurables en el tiempo?	0	C	2
Sugerencias conocimientos más permanentes	5. Sugerencias para que los (LC) permitan un conocimiento más perdurable.	1	C	2
Importancia actividad	6. ¿Crees que es importante el apoyo computacional?	1	C	2
Incentivo autodidacta	7. ¿Crees que el ordenador incentiva aprender en forma autodidacta?	1	C	1
Construcción de conocimiento	8. ¿Percibiste alguna vez que el uso de software permite construir conocimiento?	1	C	1

Al observar la Tabla 4.21 se puede apreciar que hemos clasificado siete unidades de las ocho preguntas para recoger información.

Examinemos qué información podemos considerar de sus creencias respecto al apoyo informático.

i) La primera consulta se refiere a las posibles dificultades que podría la estudiante con la sintaxis. Nancy afirma que le ha costado un poco, pero agrega que si el estudiante es constante, se familiariza con el programa. La calidad del aporte es 2, porque la información tiene relación directa con lo que se desea indagar.

ii) Respecto de si los laboratorios fueron un apoyo que le ayudaron a comprender los temas tratados en el aula. Su respuesta es afirmativa "pero solo en algunos temas". Enfatiza su respuesta con la creencia que "lo práctico ayuda a comprender mejor".

Obviamente, en general se refuerzan en el taller computacional los temas que son posibles de experimentar.

iii) La respuesta a la pregunta N^{o}3 fue descartada y tiene relación con el uso del ordenador en forma más amplia, es decir, en la mayoría de las asignaturas. Nancy no sabe responder si en todas las asignaturas, pero reconoce que: "La habilidad computacional es algo que en estos momentos es muy importante".

Nancy no opina respecto de la extensión de la herramienta computacional a otras disciplinas, pero reconoce su importancia.

iv) Con respecto de la pregunta N^{o}4: si los conocimientos adquiridos vía laboratorios computacionales son más perdurables en el tiempo, responde en forma negativa. Ella cree que: "El estudiante (ella) debería ser práctico y metódico, hay muchos comandos que pasado el tiempo se olvidan si no se practican. Si se realizarán los laboratorios en todos los cursos los conocimientos serían más permanentes".

El aporte de su creencia fue codificado con 2 porque su respuesta es directa. Ella además declara dos características que deberían tener los estudiantes para que los conocimientos adquiridos sean permanentes: ser práctico y metódico. Su información respecto a lo consultado es que deberían realizarse laboratorios en todos los cursos de matemáticas.

Como se ha comentado, los casos seleccionados en esta investigación son estudiantes de la carrera de Ingeniería en Alimentos, que tiene en su curriculum cinco cursos de matemáticas. Respecto de su creencia, se puede argumentar que estos estudiantes a lo largo de su curriculum tienen clases con otros profesores que no incorporan la opción de realizar laboratorios computacionales como apoyo a su docencia. Esta situación escapa de la posibilidad de realizar talleres en todas las asignaturas que se imparten en el Área de Matemáticas.

v) Sus sugerencias respecto de la consulta N^{o}5 que tiene relación con la importancia del apoyo computacional, su creencia es afirmativa y nuevamente sugiere que los laboratorios deberían realizarse en todos los cursos de matemáticas y no solo en los dos primeros.

Destacamos que su creencia está basada en su experiencia en los dos primeros cursos de Matemáticas, que realizó con la doctorando como profesor de ambas asignaturas.

Esta encuesta fue aplicada posteriormente al término de la asignatura de Matemáticas I, específicamente cuando estaban terminando Matemáticas II. De allí que Nancy incluye en sus creencias su experiencia en ambos cursos.

vi) La consulta N^{o}6: Si es importante el apoyo computacional. Su respuesta es afirmativa y alude que aunque puede ser complicado al principio, y con esto se refiere a la etapa de

aprender la sintaxis del software, existen ejercicios muy difíciles y tediosos que al resolver con el software, cree que, al final todo es más sencillo.

La declaración es directa por lo que la calidad del aporte se codificó con 2. Se puede percibir la validez de nuestra conjetura anterior en el sentido que Nancy es una estudiante que no tiene mayores dificultades para aprender matemáticas y valora la importancia de la herramienta computacional. En su caso, el ordenador facilita resolver problemas que desde su creencia son difíciles y tediosos.

vii) En relación de la interrogante N^{o}7: ¿Crees que el ordenador incentiva aprender en forma autodidacta? La creencia de Nancy es afirmativa, enfatiza primero que el estudiante "está practicando", de ello se deduce que percibe que los estudiantes aprenden practicando por sí mismo en lugar de mirando.

Por otra parte, sugiere realizar un curso del software primero antes del curso de Matemáticas I. Esta sugerencia es más compleja porque implica incluir un curso nuevo en el Plan de Estudios.

La justificación de esta sugerencia es indirecta, porque al igual que Juan Ignacio, justifica sus respuestas a partir de su percepción respecto de sus compañeros y no del suyo propio.

viii) En relación de la consulta N^{o}8: Si construyó conocimiento con el uso del software, la creencia de Nancy es positiva mencionando que ella personalmente "Sí", pero nuevamente comenta su percepción respecto de sus compañeros, que no son casos de este estudio.

Informe General de las Creencias

En general de las creencias de Nancy en relación de los Módulos de Clases se puede inferir que le ayudaron a comprender los temas tratados en el aula, le reportaron beneficios de tipo práctico y eso le ayuda a comprender mejor. Además le ayudan a ser autovalente, está al día con los temas tratados y declara que en general los módulos le ayudaron bastante.

En relación a sus creencias relacionadas con el apoyo del laboratorio computacional en el aprendizaje, que es tema de nuestro interés, señala que los laboratorios le ayudaron a comprender mejor algunos temas, aunque al comienzo tuvo dificultad con la sintaxis del programa, pero afirma que al ser constante el estudiante se va familiarizando con el programa.

También Nancy cree que lo práctico le ayuda a comprender mejor, lo que indica que tiene habilidades de estilo cognitivo simultáneo verbal y no verbal. Señala que la herramienta

computacional es importante en estos momentos porque ayuda a resolver problemas "difíciles y tediosos".

Finalmente Nancy cree que la herramienta computacional debería estar presente en todos los cursos de matemáticas, porque cree que con ello el conocimiento sería más perdurable en el tiempo, reconoce que incentiva a aprender en forma autodidacta y a construir conocimiento.

Como comentario final a sus sugerencias hacemos presente que las clases de laboratorios computacionales son opciones de cada profesor y su implementación como recurso didáctico depende de la disposición de cada docente de aprender a usar el software, diseñar problemas para los laboratorios computacionales, diseñar una forma de evaluación y estar preparado para responder todas las dudas y consultas acerca del software y de la matemática involucrada, que surgen en forma espontánea en una clase de laboratorio.

En esta estudiante se puede apreciar que ha desarrollado un estilo cognitivo simultáneo verbal y no verbal, es decir la parte posterior de ambos hemisferios cerebrales.

4.6. Análisis de la relación entre Rendimiento y Prueba de Medición de Estándares

En este apartado se analizará como se correlacionan los resultados del rendimiento final obtenido en el curso de Matemáticas I con el resultado obtenido en la Prueba de Medición de Estándares de los cuatro casos en estudio.

4.6.1. Juan Ignacio

Del análisis realizado en la *sección 4.2.1.2. Informe General de la PME* dedujimos que Juan Ignacio no coordinó en forma correcta todos los esquemas, aunque ello no significa que en el desarrollo de su aprendizaje no haya logrado la etapa de esquema, podemos inferir que según el modelo APOS logra el desarrollo de pre-esquema transitando a un nivel superior Trans.

Al correlacionar estos resultados con el rendimiento de Juan Ignacio en el curso de Matemáticas I, podemos observar de la Tabla 4.22, que las calificaciones de este estudiante varían en el intervalo $[6,7]$ es decir, corresponde al intervalo [Muy Bueno, Sobresaliente]. Sus calificaciones durante el curso y la calificación final están sobre Muy Bueno (6.5).

Claramente hay una relación directa entre las calificaciones obtenidas por Juan Ignacio durante el curso de Matemáticas I y las calificaciones obtenidas en la Prueba de Estándares. Además, se puede conjeturar que contestar 8 preguntas correctamente y cometer dos errores

TABLA 4.22. Calificaciones de Juan Ignacio durante el Curso de Matemáticas I.

Estudiante Juan Ignacio	Calificación
Promedio Evaluaciones Formativas	6.5
Promedio Ponderado E. Acumulativas	6.5
Promedio Laboratorios Computacionales	7
Calificación Final	6.6

menores, uno en marcar una alternativa incorrecta y otro de cálculo elemental en la pregunta N^{o}10 debería ser un indicador de un aprendizaje de nivel de pre-esquema.

4.6.2. Daniela

Se comparará el rendimiento obtenido por Daniela en el curso de Matemáticas I con los resultados obtenidos en la Prueba de Estándares, según el modelo cognitivo ella ha desarrollado un aprendizaje a nivel de un pre-esquema de la derivada y sus aplicaciones solo en el análisis cualitativo de funciones, evidenciando que no logró coordinar los esquemas necesarios para resolver problemas aplicados a la modelación de fenómenos mediante ecuaciones diferenciales.

TABLA 4.23. Calificaciones de Daniela durante el Curso de Matemáticas I

Estudiante Daniela	Calificación
Promedio Evaluaciones Formativas	6.1
Promedio Ponderado E. Acumulativas	3.9
Promedio Laboratorios Computacionales	4.5
Calificación Final	4.0

Daniela obtuvo como calificación final un 4.0 en el curso de Matemáticas I. Esta es la nota mínima de aprobación. Del estudio realizado podríamos conjeturar que aprobar una asignatura de matemáticas con nota suficiente, significa que el estudiante logra coordinar solo algunos esquemas

en un determinado tópico matemático. Observamos que existe concordancia entre esta calificación y los conocimientos evidenciados en la Prueba de Medición de Estándares. Es destacable que los conocimientos adquiridos por ella han perdurado en el tiempo de acuerdo al rendimiento evidenciado según el modelo cognitivo, porque Daniela no era una estudiante aventajada y en forma constante declaraba su poca aptitud matemática.

4.6.3. Lola

Analizaremos el nivel de aprendizaje alcanzado por nuestro tercer caso. Compararemos el aprendizaje reflejado en la Prueba de Medición de Estándares con el rendimiento demostrado por Lola durante el curso de Matemáticas I.

TABLA 4.24. Calificaciones de Lola durante el Curso de Matemáticas I

Estudiante Lola	Calificación
Promedio Evaluaciones Formativas	5.9
Promedio Ponderado E. Acumulativas	5.2
Promedio Laboratorios Computacionales	5.5
Calificación Final	5.0

La calificación final de Lola en el curso de Matemáticas I fue un 5.0. En la escala de calificaciones equivale a "Bueno ", por lo tanto, hay una correlación directa que analizaremos, entre esta calificación y el aprendizaje evidenciado mediante su rendimiento en la asignatura de Matemáticas I y el rendimiento mostrado por Lola en la Prueba de Medición de Estándares. De la Tabla 4.24 se observa que todas las calificaciones obtenidas por Lola en las actividades realizadas durante el curso de Matemáticas I están en el intervalo $[5,6]$, esto es entre [Bueno, Muy Bueno].

Se puede inferir que el aprendizaje construido por Lola durante el curso de Matemáticas I ha sido calificado como bueno y corresponde en nuestro modelo cognitivo a un pre-esquema, con debilidad en la comprensión de conceptos teóricos básicos provenientes de las etapas "acción" y "proceso". Se puede conjeturar en este caso esta debilidad le ha impedido transitar a una etapa Trans de aprendizaje del concepto mirado globalmente, como afirma Dubinsky ver el concepto y sus aplicaciones como un todo.

Este hecho influye a su vez en el rendimiento que obtuvo Lola calificado con nota buena pudiendo haber sido 6.0 (Muy Buena) o 7.0 (Sobresaliente), porque ella evidencia que relaciona

con destreza la operatoria básica de la derivada y el concepto de la derivada con los dos esquemas propuestos de aplicaciones, las propiedades cualitativas de una función y el problema aplicado al *Crecimiento restringido de Población* que se modela usando la Ecuación Logística.

4.6.4. Nancy

Examinaremos ahora el nivel de aprendizaje evidenciado en la Prueba de Medición de Estándares con el rendimiento obtenido en el curso de Matemáticas I por Nancy.

TABLA 4.25. Calificaciones de Nancy durante el Curso de Matemáticas I

Estudiante Nancy	Calificación
Promedio Evaluaciones Formativas	5.9
Promedio Ponderado E. Acumulativas	4.6
Promedio Laboratorios Computacionales	5.4
Calificación Final	4.6

Ella obtuvo como calificación final un 4.6 en el curso de Matemáticas I. Esta calificación está en el rango [4.0, 5.0] es decir más que suficiente y menos que bueno. Esta calificación nos indica que el estudiante posee conocimientos un poco más que el mínimo exigido. Qué significa esta calificación en términos del aprendizaje evidenciado por Nancy. Demuestra reconocer y conocer e interpretar las definiciones de los conceptos que definimos a nivel de *acción y proceso*, maneja la operatoria básica de las derivadas. Sin embargo, no logra integrar todos los esquemas relacionados con las propiedades cualitativas de una función y problemas que se modelan mediante una ecuación diferencial.

Se observa que los conocimientos adquiridos por Nancy durante el curso de Matemáticas I han perdurado parte de ellos en el tiempo y se correlacionan con los resultados obtenidos en la Prueba de Medición de Estándares, donde muestra un aprendizaje a nivel de pre-esquema de la derivada y de las aplicaciones que se relacionan solamente con los máximos y mínimos relativos de una función según el criterio de la primera derivada, mostrando debilidad en relacionar la derivada con la concavidad de la gráfica de una función. Además no pudo resolver el modelo que planteó en el problema de modelación de fenómenos poblacionales.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

5.1. Síntesis de los Resultados
  5.1.1. Caso 1: Juan Ignacio
  5.1.2. Caso 2: Daniela
  5.1.3. Caso 3: Lola
  5.1.4. Caso 4: Nancy
5.2. Conclusiones sobre el Aprendizaje Construido a través de PME
5.3. Conclusiones sobre la Estrategia de Enseñanza
  5.3.1. De los módulos de Clases
  5.3.2. De los Laboratorios Computacionales
  5.3.3. Comentarios de las Creencias en relación a la Estrategia de Enseñanza
5.4. Conclusiones Generales
5.5. Proyecciones de la Investigación
  5.5.1. Trascendencia de la Investigación
  5.5.2. Preguntas Abiertas

Este capítulo se ha organizado en cuatro secciones. En la primera se presenta una síntesis de los resultados obtenidos a través de nuestra investigación, en relación al aprendizaje construido, según nuestro modelo cognitivo APOS de los cuatro casos en estudio y de sus creencias respecto de la estrategia de enseñanza usada por la profesora.

En la segunda sección se exponen las conclusiones sobre el aprendizaje construido respecto de la *Derivada y sus aplicaciones*, modelado por APOS usando como instrumento la Prueba de Medición Estándares.

En la tercera sección se exponen las conclusiones respecto de la Estrategia de Enseñanza, que involucra a los Módulos de Clases, los Laboratorios Computacionales y comentamos las creencias de los estudiantes en relación a la estrategia misma.

En la cuarta sección se comentan las proyecciones de nuestra investigación, explicando su trascendencia y las interrogantes que surgen producto de la misma.

5.1. Síntesis de los resultados

El análisis de las respuestas de los estudiantes a las preguntas de la Prueba de Medición de los Estándares para un curso de Cálculo muestran una evidencia del aprendizaje construido, evaluado después de ocho meses, es decir, más de un año si consideramos que el curso duró también un semestre.

Usando como referente la Teoría APOS podemos evidenciar las etapas logradas por cada estudiante. Es claro que los Módulos de Clases y los Laboratorios Computacionales cumplieron distintas funciones para los estudiantes, de acuerdo a sus habilidades personales, subsunsores [1] y experiencia previa.

En este contexto, evidenciaremos la creencias de los estudiantes que aportan información para sacar conclusiones respecto del rol de los materiales didácticos utilizados, puesto que descartamos las creencias que no aportan información relevante.

5.1.1. Caso 1: Juan Ignacio

Este estudiante respondió en forma correcta los indicadores de logro correspondientes a ocho preguntas y las pregunta N^o 2 y la pregunta N^o 10 en forma incompleta.

[1] Estructuras y conocimientos pre-existentes en la estructura cognitiva. Esto implica que las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras (**?**).

De acuerdo a nuestra Descomposición Genética del Concepto, de sus propiedades y de las aplicaciones, las respuestas de Juan Ignacio evidencian que construyó un esquema de la derivada sub-etapa Trans. Relacionó y coordinó correctamente el esquema de las propiedades cualitativas de una función, con el esquema de representación gráfica de los conceptos involucrados y el *objeto derivada* que ha integrado como un todo, llegando al nivel de comprensión Trans en esta aplicación.

Al relacionar el esquema de la derivada con la modelación de fenómenos y la coordinación con otros esquemas para su resolución, el estudiante evidencia que logró un desarrollo de pre-esquema como justificamos en el capítulo anterior.

Concluimos que el conocimiento desarrollado por este estudiante y que ha evidenciado a través de la Prueba de Medición de Estándares, según el modelo APOS es un nivel de Esquema Trans. Los errores cometidos por este estudiante no son de conceptos ni de descoordinación de los diferentes esquemas involucrados, sino de cálculos en la operatoria básica. Esta conclusión no es una sorpresa para la profesora de la asignatura. Este estudiante siempre se destacó por el nivel de comprensión de los conceptos y sus aplicaciones. Su rendimiento en la asignatura de Matemáticas I fue un 6.5, calificación que se correlaciona positivamente con el rendimiento demostrado en la PME. Esta conclusión nos permite conjeturar que el aprendizaje demostrado a través del instrumento secundario durante el curso fue de esquema.

Otra conclusión que podemos verificar es que el nivel de aprendizaje construido de esquema ha perdurado después de ocho meses desde el término del curso. Desde la perspectiva del aspecto constructivo de la abstracción reflexiva, en el caso de Juan Ignacio el problema del Concepto de la Derivada y algunas de sus Aplicaciones ha sido *asimilado* por el esquema. (Dubinsky, 1991)

En relación a las creencias recopiladas de las unidades de información proporcionadas por este estudiante respecto de los Módulos de Clases y de los laboratorios Computacionales, concluimos que:

(1) De los Módulos de Clases, Juan Ignacio declara que los módulos le reportaron el beneficio de tener material de consulta, cuando olvidaba los conceptos teóricos y que además le permitieron una interacción directa con sus compañeros.

(2) De los Laboratorios Computacionales, Juan Ignacio percibe el uso de la tecnología como simplificadora en la etapa de resolución de un problema complejo, también cree que debería utilizarse el apoyo computacional en otras asignaturas.

Otra creencia de Juan Ignacio es la importancia de realizar trabajos computacionales en forma grupal. También cree que los problemas complejos se simplifican con el uso de MAPLE y que el software matemático le permitió construir conocimiento. Sugiere que

deberíamos enseñar otros lenguajes de programación, pero su idea escapa de nuestra función y alcance.

5.1.2. Caso 2: Daniela

Daniela marcó en forma correcta los indicadores de logro correspondientes a las preguntas desde la N°1 a la N°4 y desde las pregunta N°7 a la N°9. Al analizar la justificación de sus respuestas evidenció una confusión en la pregunta N°1 al relacionar el concepto de derivada con su interpretación geométrica. Daniela logra un desarrollo de *objeto derivada* débil, puede manipular la operatoria simple; sin embargo, sus argumentos para justificar sus respuestas a las preguntas N°1, N°2 y N°3 son más bien débiles, no demuestra seguridad en sus respuestas.

No obstante lo anterior es capaz de relacionar el esquema de derivada con algunas propiedades cualitativas de una función, tiene un desarrollo de pre-esquema incompleto de la relación de la derivada con el análisis cualitativo de una función.

Observando el resultado la profesora de Daniela pensó que iba a contestar menos de la mitad de los indicadores de logro de la PME. Le sorprendieron no sólo sus resultados, sino la duración de su aprendizaje en el tiempo.

En conclusión, el aprendizaje construido por Daniela a nivel de pre-esquema es débil en el sentido que maneja algunos conceptos a nivel de Objeto y evidencia una falla en algunos procesos inversos, por tal motivo no logra completar un desarrollo completo a nivel de pre-esquema. Es decir, es capaz de usar los elementos matemáticos en forma aislada.

Comparando el nivel de aprendizaje construido según el modelo cognitivo APOS con el rendimiento obtenido por Daniela, al tomar como referencia su calificación final en la asignatura de Matemáticas I un 4.0, se aprecia una correlación entre los resultados obtenidos mediante el Instrumento Secundario y el Instrumento de Análisis.

Considerando que un 4.0 es una calificación suficiente, podemos inferir en el caso de Daniela que una nota suficiente equivale a un desarrollo del aprendizaje de nivel de pre-esquema débil o incompleto de un concepto y sus relaciones con otros conceptos vinculados.

Desde el punto de vista de la abstracción reflexiva, la estudiante ha *acomodado* su esquema mental existente para manejar el concepto derivada y aplicarlo a algunas propiedades aisladas. (Ibid) Al examinar las creencias de Daniela respecto de la Estrategia de Enseñanza, concluimos que:

(1) De los Módulos de Clases, considera importante el apoyo de los módulos de clases evidenciado por sus declaraciones, cree que los módulos están bien estructurados, fueron de gran ayuda en todos los cursos de Matemáticas, le sirvieron para revisar los conceptos

que no le habían quedado suficientemente claros en clases. Daniela declara que como beneficio los módulos le ayudaron en todas las matemáticas como apoyo en sus estudios fuera del aula.

(2) De los Laboratorios Computacionales, declaró desde el comienzo del curso que no tiene aptitudes en el área computacional, por lo tanto considera que los laboratorios no fueron lo útil que ella hubiese querido. Sin embargo, reconoce que el ordenador ayuda a aprender en forma autodidacta y que le permitió verificar resultados para no cometer errores.

5.1.3. Caso 3: Lola

Lola marcó en forma correcta los indicadores de logro correspondientes a las preguntas de ocho indicadores, pero justificó 7 correctamente. Estos son: N^{o}3, N^{o}4 y la pregunta N^{o}5 y luego desde la pregunta N^{o}7 a la N^{o}10. Al analizar la justificación de sus respuestas muestra evidencia de confundir la definición de derivada en un punto con la definición del concepto de función derivada. Lola evidencia una confusión en los conceptos básicos de la derivada, de donde se deduce que, no comprendió significativamente ambas definiciones o su comprensión fue débil, por lo tanto no perduró en el tiempo.

Es importante que el estudiante desarrolle la etapa de reflexión para evitar la confusión entre los conceptos de derivada en un punto y función derivada. El repetir y reflexionar una acción permite desarrollar el Proceso derivada y es en esta etapa donde Lola demuestra ambiguëdad.

Sin embargo, Lola demuestra manejar la operatoria asociada a la función derivada y las relaciones de este concepto con las propiedades cualitativas de una función lo que permite deducir que ha desarrollado en estos temas un aprendizaje a nivel de pre-esquema.

Adicionalmente, Lola es capaz de modelar correctamente el problema planteado, relacionar con el esquema de integrales y resolver el problema completamente, faltándole únicamente escribir la respuesta en forma formal. Este comentario, tiene el propósito de precisar que es común, que los estudiantes respondan los problemas aplicados en forma incompleta. Claramente, esto demuestra una debilidad en el aprendizaje de un determinado esquema y/o una falta de coordinación de los esquemas involucrados en una aplicación específica.

Por lo tanto, Lola ha evidenciado un desarrollo débil de los conceptos básicos, a pesar que logra un desarrollo de pre-esquema, al relacionar correctamente el concepto de la derivada con los esquemas de las propiedades cualitativas de las funciones y el esquema de modelación y resolución de problemas asociados a la ecuación logística.

También, queda de manifiesto que Lola tiene dificultades para justificar los conceptos teóricos básicos. Sin embargo, este hecho no incide mayormente en evidenciar un aprendizaje de nivel superior, al relacionar el concepto con otros esquemas.

Concluimos que Lola maneja con destreza la operatoria y relaciona correctamente el esquema de Derivada con otros esquemas involucrados como la monotonía de una función, pero el aprendizaje evidenciado es de un pre-esquema. Muestra una falta de reflexión de los conceptos en la etapa de *proceso*. Probablemente esta es la causa de no haber obtenido una calificación Muy Buena o Sobresaliente. Desde la perspectiva de la abstracción reflexiva Lola ha logrado *asimilar* las distintas aplicaciones del concepto, a pesar del conflicto epistemológico detectado.

De sus creencias respecto de la Estrategia de Enseñanza, podemos sintetizar que:

(1) De los Módulos de Clases, cree que estos dan un orden lógico al tratamiento de los temas, las actividades son acorde al desarrollo de los contenidos programáticos y este hecho le reportó beneficios para el desarrollo de su estudio. Considera que son muy resumidos, por lo que le costaba a veces entender, pero cree que están bien enfocados y que para ella fueron un complemento.

    Además, Lola declara que el beneficio de los módulos en su estudio fue la forma de los módulos en identificar los contenidos de cada unidad en forma clara. De esta creencia se desprende que ha desarrollado un estilo cognitivo secuencial, que le ayuda y acomoda en la organización de sus estudios.

    Podemos concluir que en el caso de Lola los módulos de clases cumplieron con nuestro objetivo. Los módulos no pretenden ser un libro de texto para que la persona estudie y no asista a clases, tampoco su rol es el de una guía de ejercicios, sino un material didáctico de apoyo al aprendizaje de los estudiantes.

(2) De los Laboratorios Computacionales, declara que le ayudaron a comprender mejor los temas tratados en clases, también menciona el rol de apoyo en la operatoria. Ella evidencia además el desarrollo de un estilo de aprendizaje cognitivo simultáneo no verbal y verbal, menciona recordar en forma clara las construcciones gráficas que le permitieron aprender y reforzar conceptos. Declara que no es partidaria de los trabajos de laboratorio en forma grupal.

    Concluimos que los laboratorios computacionales no solo ayudaron a Lola en la manipulación de la operatoria, sino en la comprensión de los conceptos desarrollados en las clases.

5.1.4. Caso 4: Nancy

Nancy respondió en forma correcta las preguntas relacionadas con los indicadores de logro desde la pregunta N^{o}1 al N^{o}4 y las preguntas N^{o}7 y N^{o}8, en total seis indicadores de logro.

Nancy justifica sus repuestas haciendo un análisis simple de las definiciones, evidenciando un nivel de aprendizaje sólido hasta la etapa de *Objeto derivada*. En cuánto a relacionar el Objeto derivada con otros esquemas solo logra evidenciar la monotonía y valores extremos de una función mediante el Criterio de la Primera Derivada.

Nancy muestra evidencia que no logra relacionar el esquema de valores extremos de una función con las propiedades relacionadas con la concavidad de la gráfica de una función.

En conclusión, el aprendizaje evidenciado por Nancy de los conceptos teóricos es de nivel de Objeto, pero no logra relacionar en forma completa todos los esquemas involucrados con las propiedades cualitativas de una función. Nancy ha desarrollado un pre-esquema incompleto de las propiedades cualitativas de una función.

La calificación final que obtuvo en la Asignatura de Matemáticas I, un 4.6 corresponde a una calificación más que suficiente, comparada con el rendimiento mostrado en la PME existe concordancia entre el nivel de aprendizaje adquirido en el curso de Matemáticas I con el nivel evidenciado en la PME.

Si consideramos que 5 preguntas de 10 equivale a una calificación suficiente, entonces 6 preguntas de 10 podría considerarse un poco más que suficiente, desde esta perspectiva habría una correspondencia entre ambos instrumentos.

En términos del modelo cognitivo, el caso de Nancy es un aprendizaje fuerte en conceptos y débil en la relación del concepto de derivada con otros conceptos vinculados con ella, logrando un pre-esquema incompleto, puesto que solo puede integrar el concepto de la derivada con los conceptos de valores extremos de una función. Desde la perspectiva de la abstracción reflexiva, no evidencia conflictos epistemológicos entre los conceptos básicos. Sin embargo no logra *asimilar* el problema al esquema existente en su estructura cognitiva para realizar aplicaciones del concepto.

De las creencias de Nancy respecto de la Estrategia de Enseñanza, podemos concluir que:

(1) De los Módulos de Clases, piensa que deberían ser más concisos y tener más ejemplos. Sin embargo, le permitieron ser autosuficiente y estar al día en sus estudios. En general, considera que le ayudaron bastante.

A pesar que se les advierte a los estudiantes cual será el rol de los módulos de clases, algunos insisten en asignarles la función de una guía de ejercicios.

Independientemente del rol que en general le atribuyen los estudiantes a los módulos de clases, Nancy reconoce el apoyo que recibió de parte de éstos en su aprendizaje. Es decir, en este caso, los módulos de clases cumplieron el rol que nos propusimos en esta investigación.

Como beneficio Nancy declara que los módulos le permitieron ser autosuficiente, puesto que si faltaba a alguna clase, ante alguna eventualidad tiene el apoyo de los módulos para estudiar y estar al día.

(2) De los Laboratorios Computacionales, declara que los laboratorios le ayudaron a comprender mejor los temas, porque su creencia es que todo lo práctico ayuda a comprender mejor. Opina que todos los cursos deberían realizarse con apoyo computacional, puesto que todo es más sencillo. Además, cree que el ordenador incentiva a un aprendizaje autodidacta y que el software le permitió construir conocimiento. Manifiesta que el laboratorio es un medio para interactuar con sus compañeros y con el profesor.

En conclusión, Nancy cree que la herramienta computacional es importante.

5.2. Conclusiones Generales sobre el Aprendizaje Construido evidenciado a través de la PME

Uno de nuestros objetivos al realizar esta investigación era conocer qué procesos cognitivos realiza un sujeto para aprender matemáticas, en particular el nivel del aprendizaje logrado de la muestra de cuatro estudiantes de la carrera de Ingeniería en Alimentos. Específicamente, nuestro interés es conocer el nivel de aprendizaje construido al estudiar el concepto de la *Derivada y algunas de sus aplicaciones*, que nos lleva a conocer en forma inmediata, cuáles son las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje de la *Derivada y sus Aplicaciones*.

Se mencionó que Dubinsky (1991) y colaboradores crearon el modelo cognitivo APOS usado en esta investigación. Investigaron y publicaron las capacidades que deben lograr los estudiantes para aprender varios temas y conceptos, en distintas ramas de las matemáticas entre ellas el Cálculo Diferencial y en particular mencionamos el concepto de función y la problemática asociada a este concepto Asiala et al (1996).

Nuestra investigación usa el concepto de *función y sus aplicaciones* como conocimientos previos, es decir, suponemos que los estudiantes ya han aprendido este gran tema para construir el concepto de la función Derivada. Así, como estos autores investigaron las dificultades que se manifiestan cuando los estudiantes deben trabajar con funciones, en nuestro trabajo investigamos las dificultades que se presentan en el estudio de la derivada.

Descubrimos que a nivel de Acción, si el concepto de la derivada en un punto no es comprendido y el estudiante no reflexiona sobre él, tiene dificultades para extenderlo y transitar al nivel de proceso, puesto que no es capaz de relacionar correctamente el significado de la derivada en un punto y realizar la abstracción que relaciona este concepto con la definición de la función derivada. Esta conclusión es corroborada por Artigue (1995), mencionada por Sánchez et al (2008) (p. 268), en la cual señala: "el hecho es que algunos estudiantes son capaces de resolver ejercicios. Sin embargo, tienen dificultades cuando necesitan aplicar el concepto de derivada, ya sea a través de su expresión analítica o en su interpretación gráfica".

Además, verificamos que tienen dificultades para interpretar geométricamente el concepto. Nuestra conclusión a este respecto es que los estudiantes lograron el nivel de proceso en su oportunidad, de lo contrario no podrían haber avanzado al nivel de aprendizaje de *objeto* y posteriormente a Esquema. Por lo tanto, lo que ha perdurado en su mente a través del tiempo son las propiedades de la operatoria y la interpretación gráfica del concepto, es decir, el concepto operacional y visual por sobre el concepto formal.

Esta conclusión se ilustra con el hecho de que los cuatro estudiantes fueron capaces de responder correctamente las preguntas N^{o}3 y N^{o}4, que clasificamos a nivel de *proceso* y *objeto* respectivamente al aplicar el Modelo APOS. Se menciona que un estudiante que ha logrado el nivel de proceso de un concepto puede reflexionar sobre el proceso de transformación, describirlo e incluso revertir los pasos sin un estímulo externo. (Asiala et al, 1996)

De estos indicadores el N^{o}3 es una abstracción teórica del concepto de derivada y su aplicación implica el dominio y la destreza de calcular límites al infinito, y comprender que se obtiene una función definida mediante un límite. Concluimos que los cuatro estudiantes lograron estas competencias.

El indicador N^{o}4 mide la habilidad en la operatoria de cálculo de derivadas, que se clasificó a nivel de *objeto*. El estudiante debe ser capaz de ir del concepto a la aplicación o propiedades y en algunas situaciones de las propiedades al concepto. Es decir, verificamos si los estudiantes son capaces de aplicar y manejar el concepto sin influencias externas.

Concluimos que a pesar que dos de los estudiantes respondieron en forma incorrecta el concepto de *derivada en un punto* y dos justificaron erróneamente la interpretación gráfica de este concepto, este hecho no fue un obstáculo para que los cuatro respondieran correctamente esta pregunta de nivel superior.

Se ha verificado a través del indicador N^{o}5, que en aquellas preguntas en que el estudiante debe discriminar entre proposiciones falsas y verdaderas, les crea dificultades de comprensión.

Este indicador relaciona la monotonía con la función derivada y con el tipo de concavidad de la gráfica de la función. Este indicador fue contestado solo por un estudiante.

Se detectó que la dificultad se produjo por la forma en que presentaron las proposiciones que forman la pregunta. Es falso suponer o concluir que el estudiante no sea capaz de relacionar el esquema de la derivada con los esquemas de monotonía de una función y las características de la gráfica de una curva, porque los indicadores de logro siguientes demuestran lo contrario.

Se plantea en el problema N^{o}6 la relación entre los conceptos posición y rapidez de cambio (velocidad) en forma gráfica. El estudiante debe saber que la velocidad es la derivada de la posición. Es una aplicación simple de la Física, que respondieron dos estudiantes.

Los indicadores N^{o}7 y N^{o}8 integran el esquema de la derivada con el de las propiedades cualitativas de las funciones. En estas preguntas se plantea el criterio de la primera derivada y su relación con los valores extremos de una función. Los cuatro estudiantes respondieron justificando correctamente las preguntas. Por tanto, son capaces de relacionar e integrar algunos esquemas, evidenciando un aprendizaje a nivel de pre-esquema de la derivada y de su aplicación en el análisis cualitativo de una función.

El indicador N^{o}9 es otra aplicación al análisis cualitativo, que relaciona la segunda derivada con valores extremos y punto de inflexión. Tres estudiantes coordinaron correctamente estos esquemas.

El indicador N^{o}10 es la modelación de un problema de crecimiento poblacional limitado. Se comentó en la *Sección 3.5.2: Prueba de Medición de Estándares*, que este tipo de problemática integra varios esquemas tanto del Cálculo Diferencial como del Cálculo Integral. Concluimos que dos estudiantes logran un aprendizaje de Esquema, si obviamos que uno de ellos cometió un pequeño error en los cálculos de la contante de integración. Los otros dos no evidenciaron este nivel de aprendizaje o al menos demuestran haber olvidado la metodología de solución.

5.3. Conclusiones sobre la Estrategia de Enseñanza

5.3.1. De los Módulos de Clases

Podemos destacar primeramente las ventajas de los Módulos de Clases de acuerdo a las creencias de los estudiantes.

Los cuatro estudiantes mencionan que los Módulos de Clases les aportaron beneficios. Tres de ellos señalan que los Módulos de Clases les ayudaron a entender conceptos que no lograron comprender en las clases de teoría.

Uno de ellos es un caso diferente de los otros tres, puesto que antes había estudiado Cálculo Diferencial en un Primer Año de Ingeniería Plan Común. Sus creencias están influenciadas por sus estudios anteriores, por lo que no aportó información que podría haber sido relevante.

Como limitaciones de este material podemos considerar el hecho que los contenidos expuestos en los Módulos de Clases son solo los necesarios de acuerdo a los contenidos programáticos de la asignatura de Matemáticas I.

Según las creencias de los estudiantes, los módulos deberían contener más ejercicios propuestos e incluir en ellas un solucionario. Esto significa cambiar el propósito de los Módulos de Clases, cuyo objetivo fundamental es servir de apoyo, un apunte orientador de los temas que se estudiarán, enfoque y tipo de problemática.

Por último, como desventaja podemos señalar que algunos estudiantes no poseen la preparación para comprender los conceptos que se entregan por escrito.

Uno de los casos declara que sus compañeros no entendían los conceptos matemáticos escritos en los Módulos de Clases; aunque es claro que los estudiantes no están acostumbrados a comprender la notación y simbología matemática, produciéndose un problema de comprensión. Por tal motivo, el apoyo del profesor es importante y también la estrategia usada para desarrollar las clases, enfatizando que es también una dificultad la ausencia reiterada de un estudiante a clases.

5.3.2. De los Laboratorios Computacionales

(1) Los laboratorios computacionales cumplieron distintos roles de acuerdo a las distintas habilidades, destrezas y experiencia que poseen los estudiantes.

Las ventajas proporcionadas por los Laboratorios Computacionales son de carácter subjetivo, dependen del nivel de preparación y destreza de los estudiantes.

i) A Juan Ignacio el apoyo computacional le estimula la creatividad, el querer diseñar programas computacionales que realicen algunos cálculos y actividades matemáticas. Este estudiante siempre quería ir más allá de lo exigido en los laboratorios.

ii) Daniela afirma que no tiene habilidades computacionales. Sin embargo, declara que los laboratorios computacionales realizados incentivan el autoaprendizaje. Además ve al ordenador como verificador de resultados, calculador rápido y considera que es la base para discutir problemas en forma grupal.

iii) Lola opina que los laboratorios incentivan el aprendizaje gráfico y para construir conocimiento.

iv) A Nancy le ayuda en el aprendizaje gráfico, encuentra que lo práctico ayuda a comprender mejor e incentivan a aprender en forma autodidacta.

Todas estas declaraciones de los estudiantes evidencian la importancia de los Laboratorios Computacionales.

Nuestros resultados nos indican que hay una coincidencia con lo que señala Dubinsky (1991) respecto a que las actividades computacionales son una fuente importante de experiencias para los estudiantes que les ayuda a fomentar la *Abstracción Reflexiva*. En este sentido, el software empleado es amigable para los estudiantes y las instrucciones MAPLE han sido incorporadas en los laboratorios computacionales en forma progresiva, de modo de evitar el uso de distracciones de programación. Hemos utilizado construcciones relacionadas con las ideas matemáticas. Nuestro objetivo es que el resultado del trabajo computacional de los estudiantes les ayude a interiorizar las acciones y encapsular el proceso resultante.

(2) Otra ventaja que hemos señalado es que los laboratorios computacionales estimulan el tránsito entre los estilos cognitivos, fundamentalmente del estilo cognitivo simultáneo verbal al no verbal, puesto que transitan de la resolución de problemas a partir de enunciados simples, esquemas, etc., a la percepción visual de gráficos asociados a conceptos, experimentando en forma concreta mediante el ordenador.

Además, el software utilizado permite relacionar diferentes esquemas. Esto le permite al estudiante transitar a un nivel de *esquema Trans*. Es decir, estimula el desarrollo de la comprensión al relacionar al menos tres esquemas, el código computacional del software, la graficación y los conceptos matemáticos.

(3) Respecto de las limitaciones de este instrumento de aprendizaje podríamos mencionar una limitación de infraestructura determinada por el número de ordenadores, que algunas veces es menor que el número de estudiantes.

(4) Otra limitación señalada en las encuestas por los estudiantes es que el número de sesiones de laboratorio es insuficiente. Esto es producto de que en el programa de las asignaturas no hay horas de clases destinadas a laboratorios computacionales. Por lo tanto, en la medida que el tiempo lo permite es posible que el profesor realice estas actividades. En este curso se realizaron seis sesiones prácticas y dos evaluaciones.

Esta actividad es opcional de cada profesor. En la actualidad se realiza solamente en cuatro cursos, dos de Matemáticas I, Matemáticas III y Ecuaciones Diferenciales.

Como desventaja de esta actividad podemos mencionar el hecho que los estudiantes tienen que aprender el software sobre la marcha, porque no es posible destinar sesiones solo para enseñar su uso. Se estudia la sintaxis en conjunto con la operatoria matemática básica.

(5) Otra dimensión que es importante señalar en la metodología es el trabajo grupal. Si analizamos las creencias de los estudiantes a este respecto podemos argumentar que:

i) El trabajo grupal beneficia a todos los integrantes del grupo.

ii) La creencia de los estudiantes es que el trabajo en grupos es más eficiente que el individual. Esto es porque señalan que todos los integrantes de un grupo avanzan en conjunto en un tiempo prudente en comparación con el estudio individual. En el sentido que si un estudiante tiene una duda, que es la base para otro conocimiento, no puede avanzar.

Es decir, de aquí podemos concluir que los laboratorios computacionales han permitido trabajar la dimensión social al integrar nuevas tecnologías. En cierta medida hemos interconectado las características de la herramienta, sus potencialidades y restricciones, y la actividad del estudiante, incluido su conocimiento formando un método de trabajo.

Esta actividad que hemos experimentado, según el trabajo de Codes y Sierra (2005)(p.4) es postulada por Trouche (2205) como la genésis del paradigma instrumental. Por otro lado, nuestra descomposición genética de los laboratorios computacionales utilizando el modelo de Dubinsky está cimentada en los trabajos de Piaget que forman el punto de partida de las investigaciones bajo el paradigma constructivista, que postula que el conocimiento de un individuo se construye con la encapsulación de proceso y acciones en objetos matemáticos. (Ibid) De acuerdo a lo anterior, nuestro trabajo en cierta medida mezcla el enfoque instrumental con el constructivista.

(6) Al revisar nuestro estudio señalamos que el Tratamiento de Instrucción que usamos cumple en alguna medida con las ideas de Idoneidad Didáctica de un Proceso de Instrucción señaladas por Godino y Batanero (1994) y mencionadas en el Capítulo 2, Sección 2.1.1.

i) *Idoneidad Epistémica* al introducir la enseñanza de las propiedades del concepto derivada, tanto en el aula como en el material de enseñanza (estos materiales son un resumen de lo tratado en el aula) que hemos diseñado, comenzamos con el aprendizaje de ejercicios rutinarios y aplicación de algoritmos sencillos a modo de Acción (baja idoneidad) progresando a la demostración de propiedades y justificación de los algoritmos (alta idoneidad). Esto se puede verificar en el diseño de los Módulos de Clases. (Anexo 1) Por ejemplo, comenzamos con variaciones medias, para posteriormente ilustramos el paso al límite, ejercitando solo variaciones medias en intervalos cada vez más pequeños definimos el concepto de derivada, demostrando posteriormente las propiedades relacionadas con el Álgebra de Derivadas

ii) *Idoneidad Cognitiva* se puede apreciar en los Módulo de Clases y Laboratorios Computacionales, que comenzamos con ejercicios simples, aumentando en forma progresiva la complejidad. Por ejemplo, comenzamos calculando la derivada de la función potencia de exponente positivo, negativo, raíces y así sucesivamente el cálculo de la derivada de funciones polinómicas, racionales, etc.

iii) *Idoneidad Mediacional* corresponde al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales. En nuestro caso se evidencia por el uso del recurso informático, que nos permite potencialmente una mayor idoneidad mediacional en nuestro proceso de instrucción.

iv) *Idoneidad Emocional* es el grado de interés del alumnado por el proceso de estudio, dependiendo de la institución y del estudiante. En las sub-secciones 5.3.1 y 5.3.2 hemos presentado las conclusiones de las creencias de los estudiantes respecto del material diseñado. En la Sección 5.3.3 comentamos las creencias de los estudiantes respecto de la estrategia de enseñanza. De ellas deducimos un alto interés de los estudiantes tanto por el material de enseñanza como por la estrategia implementada. La existencia de la componente institucional se hace presente a través del curriculum diseñado bajo el Proyecto MECESUP UCH002, del que ya hemos hablado en el Capítulo 1.

v) *Idoneidad Ecológica* es el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro. Nuestro proyecto educativo se ajusta a las necesidades de las carreras de la Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas, más aún el curriculum en el área de las Matemáticas, Física y Estadísticas que fueron diseñados en el Proyecto antes mencionado por un grupo de docentes que fijaron los estándares de calidad que los estudiantes deben alcanzar.

Por lo tanto, podemos concluir que nuestro Diseño de Instrucción cumple con la articulación y coherencia sistémica propuesta por Díaz-Godino (2003).

5.3.3. Comentarios de las Creencias en relación a la Estrategia de Enseñanza

Analizaremos en forma global las creencias de los estudiantes en términos de sus coincidencias y discrepancias, concluimos que:

1) De los Módulos de Clases.

Los cuatro estudiantes declaran que los módulos les reportaron beneficios, traducidos en tener la materia al alcance de la mano para estudiar, estar al día en los contenidos, apoyo en todas las asignaturas de matemáticas, ser más autosuficiente y desarrollar el estudio en forma consecuente.

Solo uno discrepa con los otros tres casos, en relación a la pregunta si los módulos le permitieron entender conceptos que no habían comprendido en clases, los otros tres casos manifiestan que los módulos son una ayuda importante. Ya sea para aclarar dudas, como un complemento y en general les ayudaron bastante.

En relación a las sugerencias, los cuatro estudiantes en mayor o menor grado piensan que hay que incluir más ejercicios, y que están bien enfocados. Hay discrepancia respecto a la extensión. Uno de ellos los encuentra muy resumidos y otro opina que deberían ser más concisos.

Independientemente de las sugerencias y discrepancias respecto de los Módulos de Clases, les reportaron beneficios a los estudiantes y les sirvió de apoyo en su aprendizaje, es decir, cumplieron su objetivo.

De las sugerencias de los estudiantes para mejorar su diseño, estos se pueden complementar con guías más detalladas de ejercicios que la doctorando ha diseñado, incluyendo ejercicios resueltos sobre modelación de fenómenos mediante Problemas de Valor Inicial, como crecimiento poblacional, decaimiento radiactivo, etc.

Hacemos presente una vez más que los módulos de clases son apuntes entregados por escrito a los estudiantes y también vía web, con la orientación y enfoque tanto teórico como de la ejercitación y laboratorios acerca de los temas que se estudiarán durante el curso, pero no constituye un libro de texto, que es un material formal, amplio en el sentido que incluye conceptos que no son parte de los planes de estudios de estos estudiantes.

2) De los Laboratorios Computacionales.

A este respecto los cuatro estudiantes coinciden solamente en que creen que es importante el apoyo computacional.

Tres estudiantes creen que el ordenador incentiva a aprender en forma autodidacta y los tres coinciden en que los laboratorios computacionales permitirían un conocimiento más perdurable, si se realizaran en todas las asignaturas de matemáticas y en mayor cantidad. Uno de ellos sugiere además hacer los laboratorios en forma grupal y dinámica.

En relación a la creencia de si los laboratorios permiten conocimientos más perdurables dos responden en forma afirmativa.

En cuanto a si el software permite construir conocimiento dos de ellos responden afirmativamente y uno de ellos precisa el impacto que le produjo el laboratorio sobre la construcción de la Integral de Riemann.

Como un ingrediente importante para algunos estudiantes, además de la importancia asignada a los Módulos de Clases y a los Laboratorios Computacionales, la experiencia de este trabajo indica que la interacción social como metodología de apoyo al aprendizaje es relevante para los

estudiantes que presentan algún tipo de dificultad al momento de estudiar matemática, como el caso de Daniela, quien reconoce que la ayuda del grupo fue fundamental para su aprendizaje.

Nuestra metodología es la sugerida por otros autores mencionados en (Sánchez et al, 2008), quienes argumentan que la introducción al cálculo diferencial a través de la variación del movimiento debería desarrollarse en un contexto numérico, y el aspecto gráfico se complementaría con el uso de la tecnología, como la calculadora gráfica.

En este artículo se menciona en este sentido que Harel et al (2006) afirman que una de las formas de instrucción que enriquece el *concepto de imagen* de los alumnos es ayudarlos a adquirir la habilidad para visualizar los conceptos matemáticos.

5.4. Conclusiones Generales

(1) Una conclusión global es que a pesar de las falencias en la comprensión de algunos conceptos básicos teóricos a nivel de acción, los estudiantes logran consolidar aprendizajes de nivel superior y son capaces de relacionar conceptos e integrar el concepto derivada con algunos otros esquemas. Esta conclusión coincide con la de Artigue (1995).

(2) Las conclusiones referentes al nivel del aprendizaje construido por cada estudiante evidencian que coordinan al menos uno de los esquemas involucrados, alcanzando un aprendizaje a nivel de pre-esquema, aunque no todos en la misma dimensión. Nuestra apreciación y resultados son coincidentes con los de Sánchez et al (2008)(p.287) en el sentido que el "desarrollo de *esquema de derivada* no es algo que esté vinculado a conocer muchos elementos constitutivos del concepto, sino ser capaces de coordinarlos al resolver problemas". Piaget aclara esta última idea expresando que las operaciones cognitivas se deducen a partir de las operaciones iniciales, o coordinando dichas operaciones para construir sistemas cognitivos más complejos.

(3) Otra conclusión, que constituye una característica importante en el desarrollo de la comprensión y en la que coincidimos con Sánchez et al (2008) es que la idea de síntesis de la información gráfica y analítica se produce en el nivel Trans.

(4) Concluimos al igual que Parraguez (2009), que observamos la característica de no linealidad del aprendizaje en cada estudiante de la muestra, al apreciar cómo la concepción de la derivada puede mostrar una concepción específica para explicar la monotonía y, si agregamos otros elementos como por ejemplo de concavidad de una función, que está relacionada específicamente con la forma de la gráfica de una curva, se percibe que estos conceptos son relacionados e integrados como parte de la concepción

de derivada. Aún más, dos estudiantes de la muestra han evidenciado que la resolución de problemas de valor inicial ha sido *asimilado* por la concepción de esquema derivada. (Dubinsky, 1991)

(5) Podemos comentar que nuestros resultados difieren de los observados por Azcarate (1991) en el sentido de que su estudio reveló que esos alumnos tendían a usar un solo lenguaje, ya sea verbal, simbólico o gráfico, costándoles pasar de uno a otro.

En nuestro caso, los estudiantes que evidenciaron dificultad en la definición de derivada en un punto, también tuvieron dificultad en la representación gráfica, es decir la etapa de acción en ambas representaciones no fue internalizada. Sin embargo, los estudiantes que evidenciaron una internalización del concepto en forma simbólica, además relacionaron en forma correcta la interpretación gráfica, operacional y funcional. Observamos en los argumentos usados por los estudiantes que incluían la representación geométrica de los enunciados en aquellas respuestas relacionadas con las propiedades cualitativas de una función, como monotonía, valores extremos y concavidad. Debemos hacer presente además que los estudiantes de su investigación eran de segundo de BUP, en cambio los de la nuestra eran alumnos que ingresan a la universidad, lo que puede incidir en la diferencia de las observaciones.

(6) Se advierte que hay una correlación entre los resultados obtenidos mediante el Instrumento Secundario constituido por el conjunto de evaluaciones, que se aplicaron en el desarrollo de la asignatura de Matemáticas I y el Instrumento de Análisis, la Prueba de Medición de Estándares. Esta correlación se observa al comparar las calificaciones obtenidas en ambos instrumentos.

(7) Los aprendizajes adquiridos durante el curso de Matemáticas I han perdurado en el tiempo, aunque no con la misma intensidad pero significativamente. Se podría pensar, que el material didáctico escrito ha sido de gran apoyo en el aprendizaje de la Derivada y sus aplicaciones. Resultados similares obtuvo Trigueros (2005) en su investigación usando APOS.

(8) Compartimos la propuesta de Codes y Sierra (2005) respecto del entorno computacional como una herramienta de apoyo en el aprendizaje de los estudiantes, y pensamos que es una de las variables que ha incidido en obtener un aprendizaje de mayor intensidad que ha perdurado en el tiempo.

5.5. Proyecciones de la Investigación

5.5.1. Trascendencia de la Investigación

En esta misma línea se podría realizar una investigación más fina en el sentido de profundizar en el proceso del aprendizaje construido por los estudiantes clase a clase y en particular indagar, cómo y en qué medida influye el ordenador en el estímulo de su estilo cognitivo dominante en cada estudiante, de acuerdo a las investigaciones de Flessas (1997). Obviamente nuestros resultados pueden ser mejorados aplicando nuevamente el ciclo propuesto por Asiala et al (1996). (Análisis Teórico - Observaciones y evaluación - Diseño e implementación).

Considerando que la derivada representa una mayor complejidad al estudiante que ingresa a un primer curso de Cálculo Diferencial, se podrían abordar otras aplicaciones de la función derivada con el fin de precisar aún más la comprensión de este concepto importante en varias áreas del saber.

Tomando en consideración las creencias de los estudiantes se podrían implementar módulos de clases en Cálculo Integral, más completos, es decir, más cercano a un texto enfocado siempre al quehacer científico de las carreras que se imparten en la Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas y recoger información de las creencias de los estudiantes en relación al material e implementar además laboratorios computacionales en estos temas. Como Metodología de Enseñanza podría ser aplicada a otras disciplinas afines como Física, Química, Cálculo Numérico.

Una proyección de nuestro trabajo es enfocarlo desde el punto de vista de la Ciencia Cognitiva e investigar no sólo los estímulos de entrada y salida, sino monitorear los procesos internos de adquisición y organización del conocimiento y su evolución.

Otra proyección es que creemos que aún falta mucho por hacer en el campo de la Didáctica de la Matemática y mucho por conocer sobre el conocimiento y aprendizaje matemático y mucho por analizar en cuanto a la comprensión de los estudiantes de aquellos conceptos que forman parte del Pensamiento Avanzado en Matemáticas.

Nuestra confianza es que este trabajo nos oriente en futuros desafíos y nos permita realizar un aprovechamiento de la experiencia ganada y del saber de los investigadores con mayor experiencia y creadores de otras teorías distintas a APOS. Es nuestro deseo que parte de la creatividad de los investigadores en Didáctica de la Matemática se pudiera abocar también al diseño de nuevas estrategias para enfrentar con mayor éxito el Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.

5.5.2. Preguntas Abiertas

Ante los resultados de nuestra Investigación surgen varias interrogantes:

(1) ¿Será que la Metodología de Enseñanza incluyendo los recursos didácticos empleados, fueran los que permitieron que los estudiantes después de más de 1 año, mantuvieran el nivel de aprendizaje construido salvo pequeñas variaciones?
(2) El rendimiento obtenido al aprobar la asignatura de Matemáticas I es muy similar al aprendizaje construido según el modelo APOS. ¿Hay correlación entre las calificaciones finales obtenidas por un estudiante y el nivel de aprendizaje construido?
(3) ¿Cuál será a largo plazo la curva de olvido del aprendizaje construido? Por ejemplo 2 años plazo.
(4) ¿Qué afecta al aprendizaje construido y cuál es el nivel del aprendizaje de un estudiante que ha cursado anteriormente una carrera en el área de Ingeniería Civil? Es decir, ha estudiado asignaturas de matemáticas en su currículo anterior. Sin embargo, obtiene un mal rendimiento o un rendimiento apenas suficiente en la nueva carrera, donde la matemática tiene un enfoque diferente, incluso menos fuerte.
(5) ¿Están preparados los profesores para enfrentar los cambios que involucran aplicar e introducir nuevas tecnologías en el aula?

Referencias

Altimiras, L., Dartnell, P., Felmer, P., Galaz, M.,Humeres, M.E., Vega, M.A., Yañez, M.F. (2004). *Estándares para un curso de Cálculo Diferencial e Integral*. Naval Editora e Imprenta.

Aneshkumar M. (2010). *An APOS Analysis of Students' Understanding of the Concept of a Limit of a Function*. Phythagoras, 71, 41-52 (July 2010).

Arnal, J., Del Rincón, D., Latorre, A. (1992). *Investigación Educativa: Fundamentos y Metodologías*. Editorial Labor, S.A. Escoles Pies, Barcelona.

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En P.Gómez(Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas. (p. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Asiala, M., Brown, A., De vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. and Thomas, K. (1996). *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Ausubel, D., Novak, J.D., Hanesian, H. (1978). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. 2ª Ed. Trillas México (trd versión en inglés del 1978).

Azcarate, C. (1991). *La velocidad: Introducción al concepto de derivada*. Tesis Doctoral. Ed. Autónoma de Barcelona.

Balacheff, N. (1983). *Didactique et Intelligence Artificielle* . Recherches en Didactique des Mathematiques, 14, vol 1-2, p. 9- 42.

Balacheff, N., Kaput, J. (1996). *Computer-Based Enviroments in Mathematics* . An International Handbook of Mathematical Education, Bishop, A. et Al (eds), Kluwer,p. 469-501, Academic Publishers.

Balling, N. (2004). *Proyecto de tesis: Researcher And Teacher In Interaction: The Graphic Calculator In The Teaching Of Mathematics In Denmark*.

Barbosa K. (2003). *La enseñanza de las inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOS.* Relime, Vol 6, Num. 3, p. 199-219.

Bardin L. (1996). *El Análisis de Contenido.* Akal Ediciones. Madrid. (Primera edición 1986)

Becerra R., Moya, A. (2008). *Una perspectiva crítica de la evaluación en matemática en la educación superior.* Revista Universitaria de Educación, Vol. 9, Num. 1, p. 35-69. Venezuela.

Beth, E.W., Piaget, J. (1980). *Epistemología Matemática y Psicología: relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Editorial Crítica. Grijalbo. Barcelona.

Borba, M., Scheffer, N. (2003). *Sensors, body, technology and multiple representations*. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th PME International Conference, 1, 121-128.

Bisquerra, R., Dorio, I., Gómez, J., Latorre, A., Martínez, F., Massot, I., Sabariego, M., Sans, A., Torrado, M., Vilà, R. (2004).*Metodología de la investigación educativa*. Editorial La Muralla, S.A.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*, éditions La Pensée Sauvage.

Buchberger, B. (2003).*The white-Box and Black-Box. Usage of Mathematical Software Systems.*. Simposio "Matemáticas y nuevas tecnologías: ¿Qué aprender, cómo enseñar? Universidad Complutense de Madrid, Fundación Ramón Areces.

Casas, L. (2002). *El estudio de la estructura cognitiva de alumnos a través de Redes Asociativas Pathfinder. Aplicaciones y posibilidades en Geometría.* Tesis Doctoral. Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Extremadura.

Casas, L., Luengo, R. (2003). *Redes Asociativas Pathfinder y Teoría de los Conceptos Nucleares. Aportaciones a la Investigación en Didáctica de las Matemáticas.* http://www.dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=2258650...0 http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/CasasLuengo03.pdf

Cifarelli, G. (1998). *The development of mental representations as a problem solving activity.* Journal for the middle grades-Level 1.Dubuque, Iowa: Kendall/Hunt.

Codes, M., Sierra , M. (2005). *Entorno computacional y Educación Matemática: una revisión del estado actual*. Ed. Actas IX SIMPOSIO SEIEM, Córdoba. Grupo de Investigación: Didáctica del Análisis.

Cottrill, J. (1999). *Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University.

Clark et al, (1997). *Constructing a schema: The case of the chain rule*. Journal of Mathematical Behavior, 16 (4),p. 345-364.

Clark, J.M., Paivio, A. (1991). *Dual coding theory and education.* Educational Psychology Review, 71, 64-73.

Díaz-Godino, J. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática.* (Trabajo presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Edita: Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada (España).

Díaz-Godino, J. (2010). *Marcos Teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.* ED: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (Disponible en,

http://www.ugr.es/local/jgodino).

Dubinsky, E., et al (1988). *The student's Construction of Quantification*. For the Learning of Mathematics, 8, p. 44-45.

Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. En D. Tall, Advanced Mathematical Thinking (p. 95-123) Dordrecht: Kluwer, A. P.

Dubinsky, E. (1991). *Using a Theory of Learning in College Mathematics Courses*. TALUM Newsletter, 12.

Dubinsky, E., McDonald,M. (1994). *A theory and practice of learning college mathematics, in (A.Schoenfeld, ed) mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale:Erlbaum, p. 221-243.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, J., Zazkis, R. (1994). *On learning fundamental concepts of group theory*. Educational Studies in Mathematics,27 , p. 267-305.

Dubinsky, E. (1995). *ISETL: A Programming Language for Learning Mathematics*. Comm. In Pure and Appl. Math 48, p. 1-25.

Dubinsky, E. (1996). *El Aprendizaje de los Conceptos Abstractos de la Matemática Avanzada*. En Memorias de la Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre la Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, Puerto Rico.

Dubinsky, E., McDonald, M. (2001). *APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research*. In D. Holton et al (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* , p. 273-280, Netherlands: KLuwer Academic Publishers.

Elliott, J. (2000). *La Investigación- Acción en Educación*. Ediciones Morata, S.L. Madrid.

Fennell, F., Rowan, T. (2001).*Representation: An important process for teaching and learning mathematics.* Teaching Children Mathematics, 7(5), 288-292.

Flessas, J. (1997). *L'impact du style cognitive sur les apprentissages*. Revue d' Education et Francophonie, Vol XXV N^{o} 2.

Ferrara, F., Pratt, D., Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of Algebra and calculus. Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future, Sense Publishers, p. 237-273.

Furinghetti, F., Pehkonen, E. (2002). *Rethinking Characterizations of Beliefs.* Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?. Mathematics Education Library, Vol. 31, p.39-57. Kluwer Academic Publisher. Netherlands, Dordrecht.

Godino, J. D, Batanero, C. (1994). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. Recherches en Didactique des Mathématiques , 14 (3), 325-355.

Godino, J. D, Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Goldin, G., Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F.R. Curcio (Eds.), The roles of representations in school mathematics (p.1-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gómez-Chacón, I.M., Op'T Eynde, P., De Corte, E. (2006). *Creencias de los Estudiantes de Matemáticas. La Influencia del Contexto de la Clase*. Enseñanza de las Ciencias, 24(3), 309-324.

Gómez, P., Fernández, F. (1997). *Graphing calculators use in pre-calculus and achievement in calculus*. In E. Pehkonen (Ed.), Proceedings of the 21th PME International Conference, 3, 1-8.

Goos, M. (2010). *A sociocultural Framework for Understanding Technology Integration in Secondary School Mathematics*. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España. PNA. Vol 5 (1), p. 1-10.

González, D., Díaz, T. (2005). La importancia de promover en el aula estrategias de aprendizaje para elevar el nivel académico en los estudiantes de Psicología. Revista Iberoamericana de Educación. [Documento en Línea].

Guttenberger, E. W. (1992). *The learning of trigonometric function in a graphical computer environment*. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), Proceedings of the 16th PME International Conference, 3, 106-113.

Hannula, M. (2002). *Attitude Towards Mathematics: Emotions, Expectations and values.* Educational Studies in Mathematics. Vol. 49, p.25-46. Kluwer Academic Publisher. Netherlands, Dordrecht.

Harel, G., Seden, A., Selden, J. (2006). *Advanced mathematical thinking.* In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of Mathematics education: past, present and future*. (p. 147-172). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Hegedus, S.J., Kaput, J. (2003). *The effect of SimCalc connected classrooms on student's algebraic thinking*. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th PME International Conference, 3, 47-54.

Hitt, F. (2001). *El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación matemática*. Revista de Educación Matemática , p.165-177.

Hoyles, C., Lagrenge, J., Son, L.H., Sinclair, N. (2006). *Mathematics Education and Digital Technologies: Rethinking the terrain*. 17 th ICMI Study Conference. (p. 3-8) http://icmistudy17.didirem.math.jussieu.fr/doku.php

Hubel, D., Wiesel, T.N. (1959). *Receptive fields of single neurons in the cat's striate cortex*. Journal of Physiology, 148,p.574-579.

Kapetanas, E., Zachariades, T. (2007). *Student's Beliefs and Attitudes about Studying and Learning Mathematics*. In Woo, J. H, Lew, H. C. Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.) Proceedings of the 31st

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, p. 97-104. Seoul:PME.

Kaput, J. *Technology and mathematics education.* In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (p. 515-556). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. (1994). *Democratizing access to calculus: New routes to old roots*. In A. Schoenfeld (Ed.), Mathematical thinking and problem solving, (p. 77-156). Hillsdale, NJ, USA: LawrenceErlbaum.

Kaput, J., Hegedus, S.J. (2002). *Exploiting classroom connectivity by aggregating student constructions to create new learning opportunities*. In A.D. Cockburn & E.Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th PME International Conference, 3, 177-184.

Karp, K. S. (1991). *Elementary School Teachers Attitudes Towards Mathematics: The Impact on Students Autonomous Learning Skills*. School science and Mathematics, Vol 91(6), (p. 265-270).

Kemmis, A., McTaggart, T. (1988). *Cómo planificar la investigación acción*. Laertes: Barcelona.

Kloosterman, P. (2002). *Beliefs about Mathematicas and Mathematics Learning in the Secondary School: Measurement and Implications for Motivation*. Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?. Mathematics Education Library, Vol. 31. p. 247-269. Kluwer Academic Publisher. Netherlands, Dordrecht.

Lagrange, J.B. (1999). *Learning pre-calculus with complex calculators: Mediation and instrumental genesis*. In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd PME International Conference, 3, 193-200.

Lakoff, G., Johnson, M. (1999). *Philosophy in the Flesh*. New York: Basic Books.

Lamon, S. (2001). *Presenting and representating from fractions to rational numbers.* In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), The Roles of Representation in School Mathematics, 2001 Yearbook (p. 146-165). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Leder, G., Pehkonen, E., Törner, G. (2002). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?*. Mathematics Education Library, Vol. 31. Kluwer Academic Publisher. Netherlands, Dordrecht.

Lester, F., Jr. (2002). *Implications of Research on Student's Beliefs for Classroom Practice.* Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?. Mathematics Education Library, Vol. 31, p.345-353. Kluwer Academic Publisher. Netherlands, Dordrecht.

López, S., Garrido-Latorre, F., Hernández-Ávila,M. (2000). *Reseña Histórica de la Epidemiología*. Salud Pública de México, 42 (2), 133-143.

Luria, A. (1973). *The working brain. An introduction to neuropsychology*. Penguin Books, p. 398, New York.

Lussier, F., Flessas, J. (2005). *Neuropsychologie de l'enfant. Troubles développementaux et de l'apprentissage,* .,Dunod Paris.

Mato, M.D., De la Torre, E. (2010). *Evaluación de las Actitudes hacia las Matemáticas y el Rendimiento Académico*. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España. PNA. Vol 5 (1), p. 25-36.

Meel, D. (2003). *Models and theories of mathematical undestanding: Comparing Pirie and Kirien's Model of the growth of mathematical undersatanding and APOS theory*. Relime Vol. 6, Núm 3, Julio p. 221-271.

Montecinos, O., López , M., Hernandez-Suárez, C. (2007). *Modelos Matemáticos para Enfermedades Infecciosas*. Salud Pública de México. Vol. 49, N^{o} 3, p. 218-226.

Moreira, L. (2002). *Mathematics education and critical consciousness*. In A.D. Cockburn & E. Nardi (Eds.). Proceedings of the 26 th PME International Conference, 3, 369-376.

Moreno, L. (2003). *Tecnologías de Información y comunicaciones para Enseñanza Básica y Media*. CINVESTAV- IPN, México, . www.eduteka.org/ediciones/articulo 18-8a.htm.

Murillo, J. (2003). *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geometría en la E.S.O.*. Memoria Doctoral.

Nemirovsky, R. (2003). *Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics*. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th PME International Conference, 1, 105-113.

Op't Eynde, P., De Corte, E., Verschaffel, L. (2002). *Framing Student's Mathematics-Related Beliefs. A quest for Conceptual Clarity and a Comprenhensive Categorization* .Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?. Mathematics Education Library, Vol. 31, p.13-37. Kluwer Academic Publisher. Netherlands, Dordrecht.

Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial*. Tesis Doctoral. Instituto Politécnica Nacional (Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada). México, D. F.

Perry, J.A., Atkins, S.L.(2002). It's not just notations: Valuing children's representations. Teaching Children Mathematics, 9(4), 196-201.

Piaget, J. (1971). *Psychology and Epistemology*. (Trad. de A. Rosen). Nueva York. Grossman (edición original: 1970).

Piaget, J. (1972). *The Principles of Genetic Epistemology*. (Trad. de W. Mays), Londres. Routledge and Kegan Paul (edición original: 1970).

Piaget, J. (1974). *The Equilibration of Cognitive Structures*. (T. Brown and K.J. Thampy, trans.rad.), Cambridge: Harvard University Press, 1985. (Original published 1975)

Piaget, J. (1978). *La evolución intelectual entre la adolescencia y la edad adulta*. En J. Delval comp. Lecturas de Psicología del niño, V 2.

Piaget, J., Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. (H. Feider, Trans.). New York: Columbia University Press. (Original work published 1983).

Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo*. (Trad. Eduardo Bustos). Siglo XXI de España Editores S.A. Madrid.

Ponce, S., Martínez, G., Zuriaga, F. (2008). *Creencias y Estereotipos: La dimensión Afectiva y su Influencia en Matemática*.VI Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería. Libro digital VI CAEDI. Disponible en: www.caedi.org.ar/pcdi/PaginaTrabajosPorTitulo/7-564.PDF

Rasmussen, C., Nemirovsky, R. (2003). *Becoming friends with acceleration : The role of tools and bodily activity in mathematical learning*. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th PME International Conference, 1, 127-134.

Relich, J., Way, J. (1994).*Measuring Pre-service Teachers Attitudes to Mathematics: Further developments of a questionnaire*. En J.P. Da Ponte y J. F. Matos (Eds.), Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (p. 105-112). Lisboa, Portugal: PME Benchmark.

Rieber, L.P. (1994).*Computers, Graphics and Learning*. Madison, WI: WCB Brown & Benchmark.

Rico, L. (2001). *Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática*, p. 178- 193, Revista de Educación Matemática.

Sánchez-Matamoros, G. M. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de la universidad sobre la noción matemática de la derivada (desarrollo del concepto)*. Tesis Doctoral. Ed. Universidad de Sevilla.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., Llinares,S. (2008). *La Comprensión de la Derivada como objeto de Investigación en Didáctica de la Matemática*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 11/ número 002, p. 267-296. México.

Sánchez, G., Vega, M.A. (1998). *Una experiencia en un curso de Verano o una historia con un final casi feliz*. XII Congreso Chileno de Educación en ingeniería. Universidad Federico Santa María, Valparaíso Octubre.

Schoenfeld, A.H. (1994). *A Discourse on Methods*. Journal for Research in Mathematics Education, 25 (6), p. 697-710.

Schoenfeld, A.H. (1998). *Toward a theory of teaching-in-context*. Issues in Education, 4(1), p. 1-94.

Schoenfeld, A.H. (2000). *Purposes and methods of research in mathematics education*. Notices of the American Mathematical Society, 47(6), p. 641-649.

Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objetcs as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics,22, p. 1-36.

Sfard, A. (1994). *Reification as a birth of a metaphor. For the Learning of Mathematics*. 14(1), 44-55.

Schwarz, B., Bruckheimer, M. (1988). *Representations of functions and analogies*. In A.D. Borbás (Ed.) Proceedings of the 12 th PME International Conference, 2, 552-559

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudios de casos*. Madrid: Morata.

Stenhouse, L. (1979). *Lección Inaugural en la Universidad de East Anglia: Research as a basic fot Teaching*.

Suh, J., Moyer-Packkenham, P. (2007). *The application of dual coding theory in multi-representation virtual mathematics enviroments*. In Woo, J. H, Lew, H. C. Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.) Proceedings of the 31st PME International Conference Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, p. 209-216. Seoul

Tall, D., Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with special references to limit and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169. Research Centre: University of Warwick.ac.uk.

Tall, D. (1989). *Concept images, generic organizers, computer & curriculum change*. For the Learning of Mathematics, 9(3), 37- 42.

Tall, D. (1999). *Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Research Centre: University of Warwick.ac.uk.

Tall, D., Sheath, M. (1983). *Visualizing higher level mathematical concepts using computer graphics*. In R.Hershkowitz (Ed.) Proceedings of the 7 th PME International Conference, 357-362.

Trigueros, M. (2005). *La noción de Esquema en la Investigación Matemática Educativa a Nivel Superior*. Educación Matemática, Vol. 17, N° 001, p. 5 - 36.

Vega, M.A., Alcarraz, R., Fuentes, I., Galvez, A. (1997). *Una experiencia innovadora en la enseñanza de la matemática en la Facultad de Cs. Químicas y Farmacéuticas de la Universidad de Chile* . IX Jornadas Nacionales de Educación Matemática y en el Seminario Internacional de Formación de Profesores , La Serena.

Verillon, P., Rabardel, P. (1995). *Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity*.European Journal of Psychology of Education, X(1), 77-101.

Vigotsky, Ls. (1992). *Educational Psycology*. Traducción de Robert Silverman, St. Lucie Press, Florida.

Walker, P., Wood, E. (2003). *The Brain and Nervous System*. Farmington Hills: Lucent Books.

Yackel, E., Rasmussen, C. (2002). *Beliefs and Norms in Mathematics Classroom*. Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?. Mathematics Education Library, Vol. 31, p.313-344. Kluwer Academic Publisher. Netherlands, Dordrecht.

ANEXOS

ANEXO 1: MÓDULOS DE CLASES

UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CS. QUIMICAS Y FARMACEUTICAS.

MODULO N° 1

Profesores : María Angélica Vega U.-María Francisca Y.

El propósito de estos módulos es entregar los conceptos teóricos necesarios y las aplicaciones en forma dirigida, de modo que el estudiante pueda participar en forma activa, en el proceso enseñanza - aprendizaje, elaborando su propio material de estudio. El logro deseable es que el estudiante aprenda a aprender.

Introducción al concepto derivada de una función e interpretación. Uno de los problemas simple de la Física conocido por todos son los problemas relativos a velocidad. Frente a este problema podemos plantearnos varias interrogantes, por ejemplo ¿Cómo podemos medir la velocidad de un objeto en movimiento en un instante dado de tiempo?. O más básico aún ¿ Qué significa velocidad? La definición de este concepto tiene grandes implicaciones, no sólo para el problema de la velocidad, sino también para medir cualquier rapidez de cambio. Esta discusión nos lleva al concepto de derivada que es la base de nuestro estudio.

La derivada tiene diversas interpretaciones. Geométricamente, la derivada puede interpretarse como la pendiente de una cierta curva y numéricamente como una rapidez de cambio. Ya que el concepto de derivada puede emplearse en diversas áreas para conocer la forma en que una variable cambia respecto de otra, desde por ejemplo las fluctuaciones de las tasas de interés hasta la rapidez con que se mueren los peces o se mueven las moléculas, es que este concepto se aplica en todas las ciencias.

Problema de entrada El warfarin es un fármaco usado como anticoagulante, al dejar de administrarlo los restos del remedio en el cuerpo del paciente disminuyen a una tasa proporcional a la cantidad restante presente . Es conocido que la vida media de una dosis de warfarin es 37 horas, el médico desea saber ¿Qué cantidad de medicamento hay en el torrente sanguíneo a las 10 horas después de ser administrado y cuántas horas tardará en reducirse la cantidad restante del fármaco en un $5\ \%$?

Objetivos.

1) Conoce la idea de derivada como una razón o tasa de cambio.
2) Traduce un enunciado reconociendo las variables que se relacionan.
3) Traduce del lenguaje natural al matemático enunciados que involucran razones de cambio.
4) Usa el teorema de la generación de propiedades de la funciones exponencial y logarítmica para modelar el problema.
5) Resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias.

Conceptos conocidos que utilizaremos para definir el concepto de derivada

Velocidad media y velocidad instantánea Supongamos el siguiente problema:

PROBLEMA 5.1. *Un tenista le da un raquetazo a una pelota verticalmente hacia arriba. La altura de la bola está dada en función del tiempo, mediante la ecuación:*

$$s = 30t - 5t^2$$

Calcular la velocidad instantánea que lleva a los 2 *segundos después del golpe.*

Sol:

(1) *Calcularemos la velocidad media en los siguientes intervalos:*
   i) $v_m[2,\ 2.1] =$
   ii) $v_m[2,\ 2.01] =$
   iii) $v_m[2,\ 2.001] =$
   iv) $v_m[2,\ 1.9] =$
   v) $v_m[2,\ 1.99] =$
   vi) $v_m[2,\ 1.999] =$

(2) *¿ Cuánto vale*

$$\lim_{h\to 0} v_m[2,\ 2+h] =$$

(3) *¿ Cuánto vale la velocidad de la pelota a los 2 segundos de ser golpeada ?*

(4) *¿ Cómo es el signo de la velocidad ? ¿ Qué significado tiene ?*

DEFINICIÓN 5.5.1. *El límite de las velocidades medias cuando el intervalo tiende a cero se llama* **velocidad instantánea**.

Derivada de una función en un punto. Generalicemos el concepto de velocidad a cualquier función. Supongamos ahora que se tiene una función f y queremos determinar con qué rapidez cambia $f(x)$ con respecto a $f(a)$ cuando variamos $x = a$. Recordemos que la variación media de f o razón de cambio promedio de $f(x)$ con respecto a $f(a)$ cuando aumentamos a en h unidades es la variación media de $f(x)$ en el intervalo $[a, a+h]$, definida por

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Análogamente al concepto de velocidad instantánea se define el concepto de razón de cambio instantánea o simplemente razón de cambio.

DEFINICIÓN 5.5.2. *La razón de cambio instantánea de f en a es el valor del límite al que se acercan las variaciones medias de f con respecto a $f(a)$ cuando h tiende a cero, es decir:*

$$\textit{Razón de cambio de } f \textit{ en } a = lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Cuando este límite existe, llamaremos a este número **derivada de f en** a *y lo denotaremos* $f'(a)$.

OBSERVACIÓN 5.5.1. *Para calcular la derivada en ejemplos concretos, se recomienda seguir las siguientes etapas.*

1) *Calcular* $f(a+h)$
2) *Formar* $f(a+h)-f(a)$
3) *Calcular* $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
4) *Calcular el límite :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

EJEMPLO 5.5.1. *Calcular* $f'(3)$ *si* $f(x) = 2x^2+5x-3$

Solución.

1) *Calculamos* $f(3+h) = 2(3+h)^2+5(3+h)-3 = 2(9+6h+h^2)+15+5h-3 = 2h^2+17h+30$
2) *Determinamos* $f(3+h)-f(3) = (2h^2+17h+30)-30 = 2h^2+17h$
3) *Calculamos* $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{2h^2+17h}{h} = 2h+17$
4) *Calcular el límite :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = lim_{h\to 0}(2h+17) = 17$$

ACTIVIDADES 5.5.1. i) *Calcular* $f'(4)$ *si* $f(x)=\sqrt{x}$.

ii) *Calcular* $f'(2)$ *si* $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

iii) *Calcular* $f'(2)$ *si* $f(x)=x^3-4x^2+5x$.

iv) *La recta tangente a una cierta función en* $x=0$ *es* $y=5x-2$. *¿ Cuánto vale* $f'(0)$*? Si en* $x=3$ *la recta tangente es* $y=-2x+3$ *¿Cuánto vale* $f'(3)$*?*

v) *El radio de una esfera en función del volumen está dada por:*

$$r(V)=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$$

Se requiere saber en cuánto aumenta aproximadamente el volumen si el radio aumenta de 2 *a* 2.05. *Use la derivada* $r'(2)$ *para calcular el aumento de volumen.*

Interpretación geométrica y práctica de la derivada. Supongamos que se tiene un alambre de 10 cm de longitud y lo calentamos en su extremo izquierdo durante algunos minutos. Inmediatamente después se mide la temperatura en cada punto del alambre, obteniéndose que la temperatura $T(s)$ del alambre a una distancia s del extremo izquierdo del mismo viene dada por :

$$T(s)=100-s^2.$$

Nos interesa saber con qué rapidez se está difundiendo el calor a través del alambre a una distancia de 3 cm.

a) Calcular $T'(3)$

b) Calcula la pendiente de las siguientes rectas secantes.
   - La recta L_1 que pasa por los puntos, $(3,T(3))$ y $(4,T(4))$.
   - La recta L_2 que pasa por los puntos, $(3,T(3))$ y $(3.5,T(3.5))$.
   - La recta L_3 que pasa por los puntos, $(3,T(3))$ y $(3.1,T(3.1))$.

c) Haz el gráfico de la función $T(s)$ y sobre el dibuja las rectas L_1 , L_2 y L_3. Para ello se debe elegir una escala adecuada que permita marcar los puntos dados con precisión. ¿ Hacia qué recta se acercan las secantes ?

d) Sobre el gráfico anterior traza lo mejor posible la recta tangente a la grafica de $T(s)$ en el punto $(3,T(3))$. Calcula su pendiente y compárala con el valor de $T'(3)$

e) ¿ Qué se puede concluir de la comparación ?

f) Determina la función lineal $y(s)$ cuyo gráfico es la recta tangente. Calcula $y(3.1)$ y compáralo con $T(3.1)$. ¿ Cuál es el error absoluto? (Si x representa un número real y $\bar{x}$ una aproximación de x, el error absoluto se define como : $|x-\bar{x}|$.)

g) Calcula $y(3.01)$ y compáralo con $T(3.01)$.¿ Cuál es el error absoluto? ¿ Qué puedes concluir ?

Comentarios.

1. De esta actividad se observa que la pendiente de la recta tangente es el límite de la sucesión de pendientes de las rectas secantes. Por lo tanto $T'(3)$ es la pendiente de la recta tangente a $T(s)$ en el punto $(3, T(3)$.

2. Dado que $y(3+h)$ es aproximadamente igual a $T(3+h)$ cuando h es lo suficientemente pequeño, podemos afirmar que el aumento o disminución de temperatura respecto de $T(3)$ cuando nos desplazamos h unidades respecto de $s=3$, viene dada por $T'(3)\cdot h$, es decir

$$T(3+h)-T(3)\approx T'(3)\cdot h$$

3. En este caso $T'(3)=-6°C/cm$, por lo tanto si nos desplazamos 0.05 unidades a la derecha del 3 el cambio que experimenta la temperatura es $-6\cdot 0.05=-0.3$, es decir disminuye de $91°C$ a $90.7°C$ aproximadamente. Nótese que el signo negativo indica una disminución.

4. Análogamente si nos desplazamos 0.03 unidades a la derecha del 3 el cambio que experimenta la temperatura es $-6\cdot -0.03 = 0.18$, es decir aumenta de $91°C$ a $91.18°C$ aproximadamente. Nótese que el signo positivo indica un aumento.

Relación entre la derivada de una función en un punto con continuidad en el punto. Investigaremos la derivada de la función $f(x)=|x|$ en $x=0$. Para ello, realice las siguientes actividades:

i) Verifique si $f(x)$ es continua en $x=0$.
ii) ¿ Existe $f'(0)$.? Justifíque su respuesta.
iii) Haga un gráfico de $f(x)$
iv) ¿ Cuál es la relación entre derivada en un punto y continuidad en un punto?

ACTIVIDADES 5.5.2.

(1) *Considere la función* $f(x)=|x-3|+5$
   i) *Verifique si* $f(x)=|x-3|+5$ *es continua en* $x=3$.
   ii) *¿ Existe* $f'(3)$ *.? Justifíque su respuesta.*
   iii) *Haga un gráfico de* $f(x)$
   iv) *¿ Qué se puede concluir ?*
(2) *Sea* $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$*. Determine si* $f(x)$ *es diferenciable en* $x=0$

OBSERVACIÓN 5.5.2.

De estas actividades, deducimos que :

i) *La continuidad no es una condición que asegura la diferenciabilidad.*
ii) *Observa que en el ejemplo 1,* $f(x)$ *no es diferenciable en* $x = 3$*, lo es representado en el gráfico de* f *en el punto* $(3, f(3))$ *por una esquina.*
iii) *Observa que en el ejemplo 3,* $f(x)$ *no es diferenciable en* $x = 0$ *lo que se aprecia en su gráfico mediante una recta tangente vertical en* $(0, f(0))$*. (Ver figura 1)*
iv) *Si una función es diferenciable en un punto* x_0 *entonces es continua en* x_0*. Esto significa que la continuidad es una condición necesaria pero no suficiente para la diferenciabilidad.*

Derivada Numérica o derivada de una función dada mediante una tabla. Enfrentaremos ahora el problema de aproximar numéricamente la derivada de una función en un punto cuando la función viene dada mediante observaciones obtenidas experimentalmente. Para ello realizaremos la siguiente actividad.

PROBLEMA 5.2. *Se inyectó un medicamento en el torrente sanguineo a un paciente y se ha medido cada* 0.1 *minuto la concentración en* mg/cc *de este medicamento en la sangre del paciente. Los datos obtenidos son los siguientes:*

t (min)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
C(t)(mg/cc)	0.84	0.89	0.94	0.98	1.00	1.00	0.97	0.90	0.79	0.63	0.4

(1) *¿ Cuál es la razón de cambio promedio en el intervalo* $[0.3, 0.6]$
(2) *¿ Basándose en el dato anterior y suponiendo que no se tiene otro dato, que se podría conjeturar acerca del valor de la concetración en* $t = 0.4$ *¿Qué diferencia hay entre la conjetura de 2) y el dato de la tabla.*

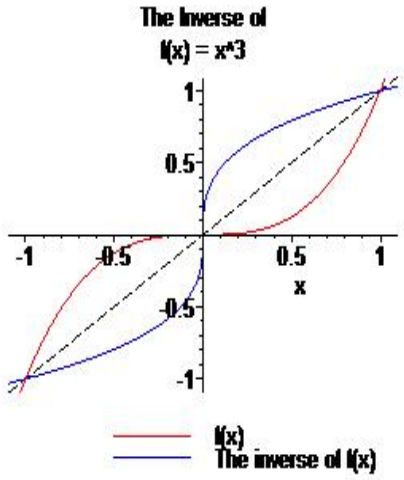


FIGURA 5.1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(3) *En forma análoga a ii) conjeturar un valor para* $C(0.4)$ *usando la razón de cambio promedio en el intervalo* $[0.3, 0.5]$ *. determinar la diferencia entre el dato de la tabla y la conjetura.*
(4) *A la vista de los resultados, qué se podría concluir acerca de cuál es la razón de cambio promedio más confiable para poder predecir el valor de la tabla.*

En la práctica, estamos interesados en saber cuál es el valor de la concentración a los 0.35 *minutos ¿ Cuál razón de cambio usaría s? ¿ Y a los* 0.58 *?*

De acuerdo a los resultados de esta experiencia, deducimos que la mejor aproximación de la derivada de la concentración en un punto de la tabla es la razón de cambio promedio entre el punto en cuestión y el punto más cercano de la tabla a él. Formalmente:

DEFINICIÓN 5.5.3. *Sea f una función continua en un intervalo* $[a,b]$ *y los* n *puntos* $(x_i, f(x_i)$ *para* $i = 1, ..n$*. Se definen:*

i) **Derivada numérica progresiva de f en el punto** x_i *a:*

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

ii) **Derivada numérica regresiva de f en el punto** x_i *a:*

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

iii) **Derivada numérica centrada de f en el punto** x_i *a:*

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

♢

UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CS. QUIMICAS Y FARMACEUTICAS.

MODULO N° 2

Profesor : María Angélica Vega U.

Definición de la función derivada La derivada de una función en un punto indica la rapidez con que cambia la función en ese punto.

DEFINICIÓN 5.5.4. *Diremos que una función $g(x)$ es la función derivada de $f(x)$ en un intervalo (a,b) sí y sólo si $g(x) = f'(x)$ para todo $x \in (a,b)$ y tal que*

$$g(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si existe el límite.

DEFINICIÓN 5.5.5. *Diremos que una función f es diferenciable en un intervalo, si existe su derivada para todo punto del intervalo.*

ACTIVIDADES 5.5.3. *Hallar una fórmula para la derivada de las funciones:*

i) $f(x) = x$
ii) $f(x) = x^2$
iii) $f(x) = x^n$
iv) $f(x) = \sqrt{x}$
v) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Análogamente se puede definir la segunda derivada de una función.

DEFINICIÓN 5.5.6. *Diremos que una función $h(x)$ es la función derivada de $f'(x)$ en un intervalo (a,b) sí y sólo si $h(x) = f''(x)$ para todo $x \in (a,b)$ y tal que*

$$g(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Si existe el límite.

Derivadas de algunas funciones importantes.

TEOREMA 5.5.1. *Derivada de una función Polinomial. Si* $f(x) = x^n$ *entonces*

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x^n] = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

Dem. *Para ello recuerda que los polinomios son funciones continuas en* $\mathbb{R}$ *y que*

$$(x+a)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} x^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}a + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k}a^k + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} a^n$$

Conclusión. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

TEOREMA 5.5.2. *Derivada de una potencia con exponente negativo. Análogamente se demuestra que*

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} = -nx^{-n-1}$$

Dem. *Ejercicio*

TEOREMA 5.5.3. *Derivada de la función exponencial.*

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^x = (lna)a^x.}$$

y en particular,

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x.}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^{kx} = ke^{kx}.}$$

En general, una función exponencial $f(x) = Ma^x$, tiene la propiedad que, la derivada de la función es proporcional a ella misma, es decir:

$$\frac{df}{dx} = kf$$

Algebra de Derivadas

Derivada de sumas, restas, productos y cuocientes de funciones.

TEOREMA 5.5.4. *Sean* u *y* v *dos funciones diferenciables.* $k \in \mathbb{R}$ *entonces se satisfacen las siguientes proposiciones:*

i) *Derivada de una constante por una función*

$$\frac{d}{dx}[ku] = k\frac{du}{dx}(x) \Leftrightarrow [ku(x)]' = ku'(x)$$

ii) *Derivada de una suma (o diferencia) de dos funciones.*

$$\frac{d}{dx}[u(x)\pm v(x)] = \frac{du}{dx}(x)\pm\frac{dv}{dx}(x) \Leftrightarrow [u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$$

iii) *Derivada de un producto de dos funciones*

$$\frac{d}{dx}[u(x)\cdot v(x)] = \frac{du}{dx}(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot\frac{dv}{dx}(x)$$

o equivalentemente,

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Dem.

i) *Se deduce directamente de la definición y propiedades de los límites.*

i) *Se deduce directamente de la definición y propiedad del límite de una suma.*

iii) *Sea* $f(x) = u(x)v(x)$ *entonces*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

Sumando y restando $u(x)\cdot v(x+h)$ *se obtiene*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-v(x)]u(x+h) + [u(x+h)-v(x)]\Delta v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[v(x+h)-v(x)]}{h}u(x+h) + \lim_{h\to 0}v(x)\frac{[u(x+h)-u(x)]}{h}$$

$$= v'(x)u(x) + u'(x)v(x)$$

ACTIVIDADES 5.5.4. *Practica la regla del producto encontrando la función derivada de las siguientes funciones:*

1) $f(x) = x^2e^x$
2) $f(x) = (3x^2+5x)e^{-3x}$
3) $g(x) = \dfrac{x^3e^{2x} - a^x}{x^2}$ *(Nota que* $g(x) = (x^3e^{2x} - a^x)x^-2$
4) $f(x) = (3x+8)(2x-5)$*, calcula* $f'(x)$ *y* $f''(x)$
5) *La carga Q de un capacitor que se empieza a descargar en el tiempo* $t = 0$ *está dada por*

$$Q(t) = \begin{cases} C & si,\ t \le 0 \\ Ce^{\frac{-t}{RC}} & si\ ,\ t > 0. \end{cases}$$

en donde R y C son constantes positivas dependiendo del circuito, la corriente I que circula en el circuito está dada por $I(t) = \dfrac{dQ}{dt}$.

♢

UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CS. QUIMICAS Y FARMACEUTICAS.

MODULO N° 3

Profesor : María Angélica Vega U.

Derivada de una composición o Regla de la cadena. El propósito de esta sección es analizar la diferenciabilidad de una función que es **composición de otras funciones.**

Estamos interesados en estudiar, las diferentes aplicaciones de la derivada de una función compuesta.

Introducción. Tenemos un alambre que se calienta en algún punto de él. Supongamos que a x cm del extremo izquierdo, la temperatura es x^2 grados Celsius.

Un insecto avanza paso a paso sobre el alambre a una velocidad constante de $2\ \frac{cm}{min}$ y advierte que la temperatura aumente a medida que avanza.
¿ Con qué rapidez está incrementádose la temperatura con respecto al tiempo, cuando el insecto se encuentra a $3\ cm$ del extremo frío? **Solución.** i) Análisis de los datos y definición de variables.

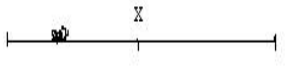


FIGURA 5.2. Situación del insecto.

- Sea $T(x)$: Temperatura a x cm del origen, definida por $T(x) = x^2$.
- $v(t)$: velocidad a la que se mueve el insecto a los t minutos.
- $x(t)$: Distancia con respecto al tiempo.

ii) Planteamiento.

La temperatura en función del tiempo es entonces : $T(x(t)) = (T \circ x)(t)$, luego se pide :

$$\frac{d(T \circ x)}{dt} \quad \text{cuando} \quad x(t_0) = 3$$

i) Calcula la razón de cambio de la temperatura a los $3\ cm$.

Si interpretas el resultado, a los $3\ cm$ por cada cm que avance el insecto, la temperatura aumenta 6° C respecto a la temperatura que tiene (a los 3 cm)

ii) Además del hecho que $v = 2\ \left[\frac{cm}{min}\right]$, se deduce que por cada minuto que pasa, el insecto avanza $2\ cm$, luego si pasa $1\ min$ avanza $2\ cm$ y como por cada cm sube la temperatura 6°, entonces por $2\ cm$ sube 12°, luego la razón de cambio es $12\ \left[\frac{^\circ C}{min}\right]$.

Así, se observa que :

$$\frac{dT}{dx}(x(t_0)) \quad = \frac{dT}{dx}(3)) = 6$$

$$\frac{dx}{dt}(t_0) \qquad\qquad = 2$$

y

$$\frac{dT}{dx}(x(t_0)) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) = 6 \cdot 2 = 12$$

luego podemos conjeturar que:

$$\frac{d(T \circ x)}{dt}(t_0) = \frac{dT}{dx}(x(t_0)) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0)$$

TEOREMA 5.5.5. **Regla de la Cadena.** *Si f es una función diferenciable en x_0 y g diferenciable en $g(x_0)$, entonces*

$$(f \circ g)' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Dem

$$(f \circ g)'(x_0) \quad = \lim_{x \to x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - (f(g(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - (f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Luego, tenemos que calcular:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - (f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} = ...$$

Como g es diferenciable en $x = x_0$, entonces g es continua en $x = x_0$, por tanto $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Además, f es diferenciable en $g(x_0)$ y $g(x)$ tiende a $g(x_0)$ cuando x tiende a x_0, luego podemos afirmar que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - (f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} = f'(g(x_0)).$$

por definición de derivada.

Además,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

por definición de derivada. Por lo tanto,

$$\boxed{(f\circ g)'(x_0) \quad = \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x))-(f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).}$$

ACTIVIDADES 5.5.5. *Use la regla de la cadena para determinar la derivada de las siguientes funciones*

1) $y = \dfrac{1}{(x^2-3x)^2}$. , $y = e^{\frac{-3}{x}}$.
2) $y = e^{\frac{-3}{x}}$. , $y = (3x+1)^{100}$

EJERCICIOS PROPUESTOS 5.5.1.

Use regla de la cadena para determinar la derivada de las siguientes funciones.

(1) $s(t) = \dfrac{1}{t^2+3t-1}$, $g(t) = \sqrt{\dfrac{1}{t^2-2}}$
(2) $f(t) = \left(\dfrac{1}{t-3}\right)^2$, $y = e^{-2x+x2}$
(3) $y = e^{\sqrt{x}}$, $y = (e^{-x}+e^{x})^3$
(4) $y = \dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$, $y = \dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}$

Aplicación: Efecto Doppler. La frecuencia F de la sirena de un coche bomba, oída por un observador en reposo, esta dada por :

$$F = \frac{132400}{331 \pm v}.$$

donde $\pm v$ representa la velocidad del coche, el signo es negativo si el coche se acerca al observador y positivo si se aleja. Use la regla de la cadena para hallar la razón de cambio de F respecto de v cuando,

a) *el coche de bomberos se acerca a* $30\ m/s$. *Resp.* 1461
b) *Cuando se aleja a* $30\ m/s$. *Resp.* -1016

Derivada de la inversa de una función. En esta sección usaremos la regla de la cadena para calcular la derivada de la inversa de una función diferenciable f, en aquellos puntos donde exista, a partir de la función derivada de f.

ACTIVIDADES 5.5.6.

1) *Consideremos la función $f : R^+ \to R^+$ definida por $f(x) = x^2$ y su inversa $f^{-1} : R^+ \to R^+$ definida por $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}}$.*
   i) *Grafica en un mismo par de ejes coordenados ambas funciones.*

ii) *Dibuja en este mismo par de ejes el gráfico de la aproximación afín de* f *y de* f^{-1} *en* $x = 2$ *y en* $x = 4$.

iii) *¿ Qué relaci'on existe entre las pendientes* m *y* m' *de las aproximaciones afines respectivas?.*

iv) *> Se cumple que* $m \cdot m' = 1$ *para las pendientes* m *y* m' *de las aproximaciones afín de* f *en* x_0 *y de* f^{-1} *en* $f(x_0)$ *respectivamente?*

v) *Como ya sabes* $(f^{-1}(x))^2 = x$. *Demuestra, aplicando la regla de la cadena que efectivamente*

$$2(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$$

para todo x *en* R^+ *tal que* $(f^{-1}(x))$ *sea distinto de cero y que por lo tanto*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

para todo $x \in R^+ - \{0\}$

2) *Considera ahora la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = (2x-1)^3$ *y su inversa* $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

i) *Análogamente al ítem anterior grafica ambas funciones.*

ii) *¿ Existe la derivada de* f^{-1} *en* $x = \frac{1}{2}$ *?*

iii) *> Podrías conjeturar cual es la derivada de* f^{-1} *en* $x = 1$ *con sólo conocer la derivada de* f *?*

iv) *Calcula la función inversa de* f *y verifica tu conjetura.*

3) *Según los ejemplos anteriores la relación entre* $f'(x)$ *y* $(f^{-1})'(x)$ *sería la siguiente:*

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$$

Demuestra que la relación anterior es válida para todos aquellos puntos x *del dominio de* f^{-1} *para los cuales* $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ *y por lo tanto*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

4) *Para las siguientes funciones determina el dominio y el recorrido para los cuales* f *posee una función inversa* f^{-1}*.Calcula la función derivada de* f^{-1} *e indica su dominio de definición.*

i) $f(x) = e^x$

ii) $f(x) = sen(x)$

iii) $f(x) = cos(x)$

iv) $f(x) = \tan(x)$

EJERCICIOS PROPUESTOS 5.5.2.

Halla la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$

2) $f(z) = (\ln z)^{-1}$

3) $f(t) = \arctan(3t - 4)$

4) $g(t) = \arcsin(t^2)$

La derivada de una función dada mediante un gráfico.

Relaciones entre f y f' 1) $y = f(x)$ cóncava en $[a, b]$. Observando las gráficas, recordamos

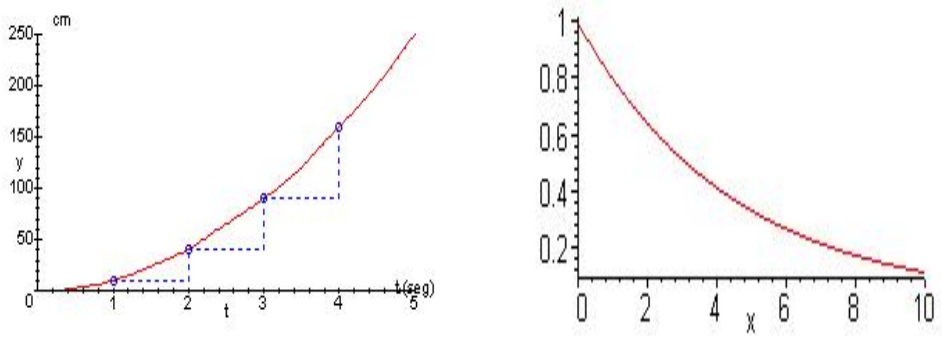


FIGURA 5.3. $i)$ f creciente ii) f decreciente

dos propiedades importantes:

(1) $y'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ creciente
(2) $y'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ decreciente

2) $y = f(x)$ convexa en $[a, b]$. Observando las gráficas, recordamos dos propiedades importantes:

(1) $y'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ decreciente
(2) $y'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ creciente

Relaciones entre f' y f'' y el gráfico de f. 1) $y = f(x)$ cóncava en $[a, b]$. Observando las gráficas, tenemos:

(1) $y'(x)$ creciente por valores $(+) \Rightarrow y''(x) > 0$
(2) $y'(x)$ creciente por valores $(-) \Rightarrow y''(x) > 0$

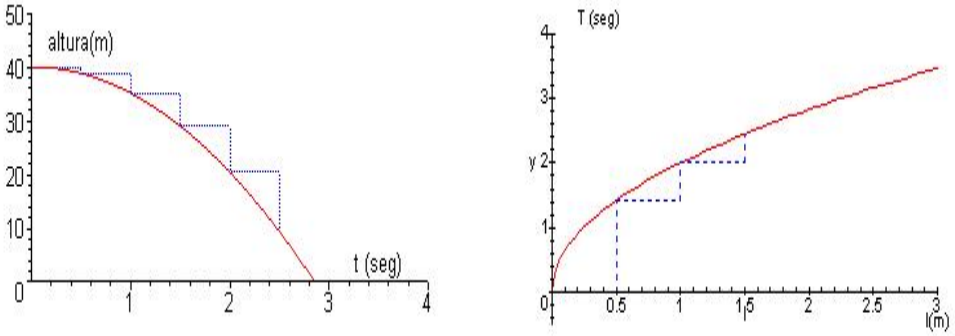


FIGURA 5.4. $i)$ f decreciente $ii)$ f creciente

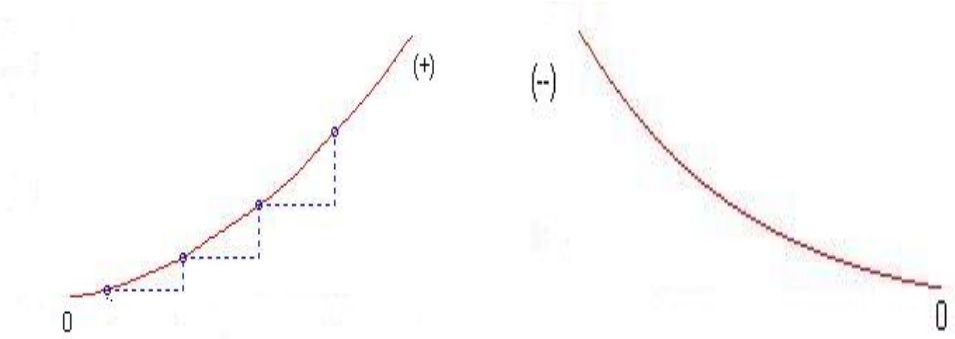


FIGURA 5.5. $i)$ f creciente ii) f decreciente

Conclusión. $y'(x)$ creciente $\Rightarrow y''(x) > 0$. y la gráfica de $y(x)$ cóncava

2) $y = f(x)$ convexa en $[a,b]$. Observando las gráficas, tenemos:

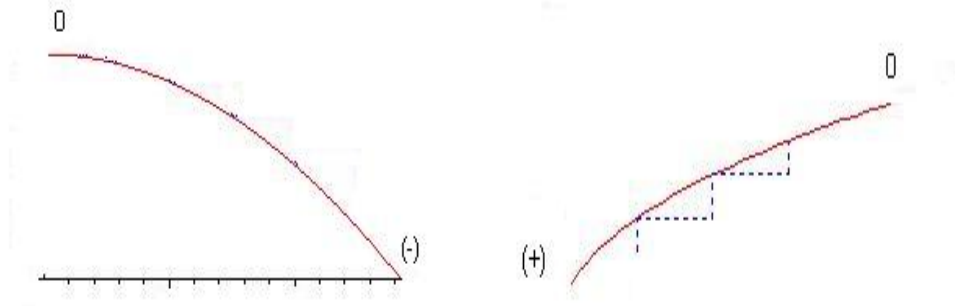


FIGURA 5.6. $i)$ f decreciente $ii)$ f creciente

(1) $y'(x)$ decreciente por valores $(-) \Rightarrow y''(x) < 0$
(2) $y'(x)$ decreciente por valores $(+) \Rightarrow y''(x) < 0$

Conclusión. $y'(x)$ decreciente $\Rightarrow y''(x) < 0$. y la gráfica de f convexa.

DEFINICIÓN 5.5.7. *Diremos que* $c, f(c))$ *es un* **punto de inflexión** *si* $f(x)$ *cambia de concavidad, es decir* $f''(c) = 0$ *y* $f'(c)$ *es un valor extremo (valor máximo o mínimo.)*

PROBLEMA 5.3. *Dado el gráfico de* f *obtener el gráfico de* f'.

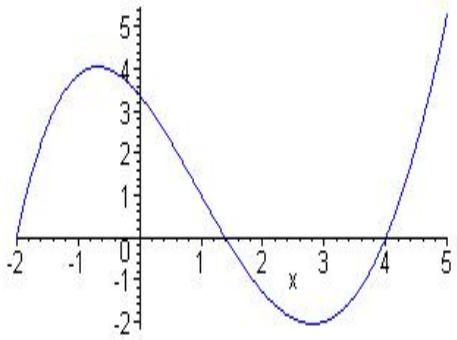


FIGURA 5.7. Gráfico de f

Sol. *La idea es determinar las características de la derivada a partir de* f. *En efecto,*

i) *Determinamos intervalos de monotonía de* f.
   - f *es creciente en* $(-2, -\frac{1}{2}) \bigcup (3,5) \Rightarrow f'(x) > 0$. *Luego, concluimos que el gráfico de* $f'(x)$ *está sobre el eje* X *entre* $(-2, -\frac{1}{2})$ *y entre* $(3,5)$.
   - f *es decreciente en* $(-\frac{1}{2}, 3) \Rightarrow f'(x) < 0$. *Es decir entre* $-\frac{1}{2}$ *y* 3, $f'(x)$ *está debajo del eje* X.

ii) $f'(-\frac{1}{2}) = 0\,, \quad f'(3) = 0$

iii) *Puntos donde* $f'(x)$ *tiene máximos o mínimos son los puntos de inflexión, es decir en* $x = 1$. *Como* $f'(x) < 0$ *en* $(-\frac{1}{2}, 3)$ *en* $x = 1$ *tiene un mínimo.*

De aquí el gráfico de $f'(x)$ *es aproximadamente:*

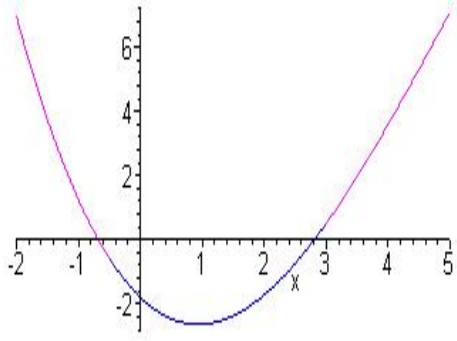


FIGURA 5.8. Gráfico de f'

Juntemos los dos gráficos resultantes. $f(x)$ en color azul y $f'(x)$ en color rojo .

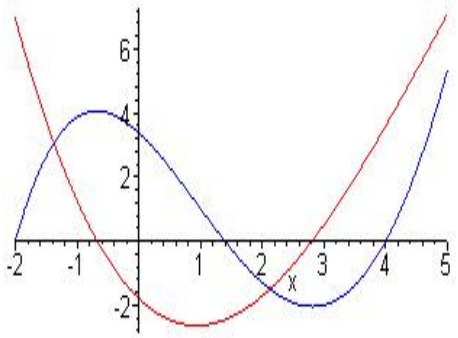


FIGURA 5.9. Gráfico de f y f'

ACTIVIDADES 5.5.7. *Dado el gráfico de las siguientes funciones, esbozar la gráfica de lafunción derivada.*

Derivada de un cuociente de funciones Queremos hallar la función derivada de una función f que es cuociente de dos funciones diferenciables, es decir

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

El propósito es calcular la derivada de f en aquellos puntos donde ella exista usando las funciones derivadas de h y g. Recuerda que $f(x)$ no está definida en aquellos puntos donde $g(x) = 0$. Usando la regla de la cadena y del producto, se puede calcular la función derivada de $f(x)$. Calcúlala tu mismo siguiendo los siguientes pasos:

a) Observa que $f(x) = h(x)g(x)^{-1}$. Luego, si h y g son diferenciables en x y $g(x) \neq 0$, usando la regla de la cadena y la regla del producto demuestra que

$$f'(x) = h'(x)g(x)^{-1} - h(x)g(x)^{-2}g'(x)$$

b) Desarrollando la expresión anterior para $f'(x)$ se obtiene que

$$f'(x) = \frac{h'(x)g(x) - h(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Comprueba este hecho.

EJERCICIOS PROPUESTOS 5.5.3.

(1) *Calcula la derivada de*

a) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x^3+4}$

b) $g(s) = \dfrac{s^{\frac{1}{7}} - s^{\frac{2}{7}}}{s^{\frac{3}{7}} + s^{\frac{4}{7}}}$

(2) *Supongamos que* $f(x)$ *es diferenciable y* $f(x) \neq 0$. *Encuentra una expresión para la derivada de las siguiente función*

$$y = \frac{x^2 + 4f(x)}{f(x)}$$

$\diamondsuit$

UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CS. QUIMICAS Y FARMACEUTICAS.

MODULO N° 4

Prof: María Angélica Vega U.

Monotonía y Concavidad

Monotonía de una función Supongamos que f es una función diferenciable en (a,b), de modo que conocemos las variaciones medias instantáneas en cada punto del intervalo.

Recuerda que si una función en un intervalo es creciente (decreciente) entonces la variación media en ese intervalo es positiva (negativa), pero la proposición inversa no es verdadera. Recuerda además que dijimos que si podíamos probar que para cualquier par de puntos del intervalo la variacion media entre esos dos puntos es positiva(negativa) entonces f es creciente (decreciente). Lo que demostraremos ahora es que si la función derivada en un intervalo abierto es positiva (negativa) entonces todas las variaciones medias son positivas (negativas)en el intervalo y por lo tanto la función es creciente (decreciente) en el intervalo.

TEOREMA 5.5.6. *Sea f diferenciable en (a,b), entonces*

i) *f es creciente en (a,b) sí y sólo si $f'(t)$ es positiva para todo $t \in (a,b)$.*
ii) *f es decreciente en (a,b) sí y sólo si $f'(t)$ es negativa para todo $t \in (a,b)$.*

Demostración.

i) Sea $\Phi(h) = \dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$, observa que $\Phi(h)$ es la variación media de f ya sea en el intervalo $[t+h,h]$ ó en $[t,t+h]$ dependiendo si h es negativo ó positivo respectivamente.

Como $\lim_{h\to 0}\Phi(h) = f'(t)$ y $f'(t) > 0$,sabemos que para $\varepsilon = \dfrac{f'(t)}{2}$ podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que si $-\delta < h < \delta$ entonces:

$$f'(t) - \varepsilon < \Phi(h) < f'(t) + \varepsilon$$

Por lo tanto:

$$\Phi(h) > f'(t) - \varepsilon = \frac{f'(t)}{2} > 0$$

Si $t_1 = t+h$, se tiene que $\Phi(t_1 - t)$ es positivo para todo t tal que $-\delta < (t_1 - t) < \delta$.

Por lo tanto, existe el entorno $I = (-\delta + t, t + \delta)$ *tal que para todo* $t_1 \in I$ *se verifica que* $\Phi(t_1 - t) > 0$*, es decir*

$$\frac{f(t_1 - t + t) - f(t)}{(t_1 - t)} = \frac{f(t_1) - f(t)}{(t_1 - t)}.$$

Es decir en el entorno I *todas las variaciones medias de* f *alrededor de* t *son positivas, luego las variaciones medias de* f *en* I *son positivas y por lo tanto* f *es creciente en* t*, para cada* $t \in (a,b)$*.*

Demuestra que si f *es creciente en* (a,b) *entonces* f‘(t) *es positiva en* (a,b)*.*

Análogamente se demuestra ii) (Ejercicio).

ACTIVIDADES 5.5.8. *Volviendo al problema de la piedra, encuentra los intervalos de tiempo donde la piedra sube y donde baja, y el instante en que alcanza su altura máxima .*

Puntos críticos de una función ¿Qué se puede decir de $f(t)$ alrededor de $t = a$ cuando $f'(a) = 0$?

DEFINICIÓN 5.5.8. *Diremos que* $t = a$ *es un* **punto crítico de** f *sí y sólo si* $f'(a) = 0$ *ó* $f'(a)$ *no existe.*

Es claro que si $f'(a) = 0$ entonces la recta tangente al gráfico de f en $(a, f(a))$ es paralela al eje de la variable independiente t.

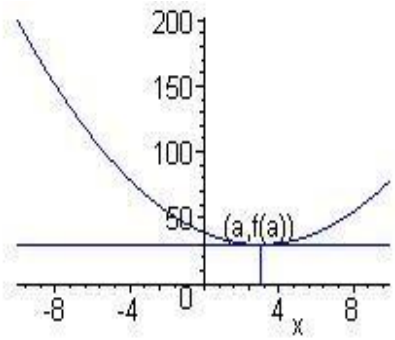


FIGURA 5.10. $f'(2) = 0$

Dado que $f(t) - f(a) \approx f'(a)(t - a)$ cuando t está cerca de a tenemos que $f(t) - f(a)$ es aproximadamente nulo. Esto quiere decir que a medida que t se aproxima a $t = a$, $f(t)$ no varía mucho respecto de $f(a)$ (casi permanece igual).

En las siguientes actividades mostraremos tres casos en que $f'(a) = 0$, pero el comportamiento alrededor de $t = a$ es distinto.

ACTIVIDADES 5.5.9.

(1) *Sea* $f(t) = -t^2$
- *Calcula* $f'(t)$ *y verifica que* f *es diferenciable en* $\mathbb{R}$.
- *Verifica que* $f'(t) > 0$, $t \in (-\infty, 0)$
- *Verifica que* $f'(t) < 0$, $t \in (0, +\infty)$.
- *Verifica que* $f'(0) = 0$

De estos cálculos se puede concluir que $f(t)$ *es creciente en el intervalo* $(-\infty, 0)$ *y que es decreciente en* $(0, +\infty)$ *y que por lo tanto alrededor de* $t = 0$ *se tiene que* $y(t) < y(0)$. *Representa esto gráficamente.*

Conclusión. *De lo anterior se deduce que* $(0, y(0))$ *es un máximo local y global.*

(2) *Sea* $y(t) = t^2 + 2$.
- *Calcula* $y'(t)$.
- *Verifica que* $y'(t) < 0$, $t \in (-\infty, 0)$
- *Verifica que* $y'(t) > 0$, $t \in (0, +\infty)$.
- *Verifica que* $y'(0) = 0$

Análogamente al caso anterior podemos concluir que:

$y(t)$ *es ..... en el intervalo* $(-\infty, 0)$ *, es ..... en el intervalo* $(0, +\infty)$ *y que por lo tanto alrededor de* $t = 0$ *se tiene que* $y(t)...y(0)$.

Conclusión. *De lo anterior se deduce que* $(0, y(0))$ *es un ..... local y global.*

(3) *Sea* $f(t) = t^3$
- *Calcula* $f'(t)$ *y verifica que* f *es diferenciable en* $\mathbb{R}$.
- *Verifica que* $f'(t) > 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$
- *Verifica que* $f(t) < f(0)$ *para* $t < 0$ *y* $f(t) > f(0)$ *para* $t > 0$.
- *Grafica* $f'(t)$ *y verifica que* $f'(t)$ *es decreciente para* $t < 0$, *creciente para* $t > 0$ *y que* $f'(0)$ *es máximo local para* $f'(t)$.

  ¿Cómo es $f(t)$ *en torno a* $t = 0$*?*

Conclusión. *Tenemos que* $f'(t)$ *es positiva y decreciente en* $(-\infty, 0)$ *es decir las pendientes de las rectas tangentes van disminuyendo a medida que nos acercamos al cero por la izquierda y* $f'(t)$ *es positiva y creciente en* $(0, +\infty)$*, es decir las pendientes de las rectas tangentes van aumentando a medida que nos alejamos del cero.*

De aquí podemos conjeturar que a la izquierda de $t = 0$*, los valores de* $f(t)$ *crecen lentamente acercándose a* $f(0)$ *y a la derecha de* $t = 0$ *aumentan rápidamente, alejándose de* $f(0)$. *Es decir en* $(0, f(0))$ *hay un cambio de tendencia de crecimiento lento a crecimiento rápido , es decir* $(0, f(0))$ *es un punto de inflexión. Representa ésto gráficamente.*

Completa el siguiente cuadro

t			
$f(t)$			
$f'(t)$			

(4) *Construye una tabla análoga a la anterior para cada uno de los gráficos siguientes de $f(t)$, indicando el tipo de monotonía de $f(t)$ y el signo de $f'(t)$.*

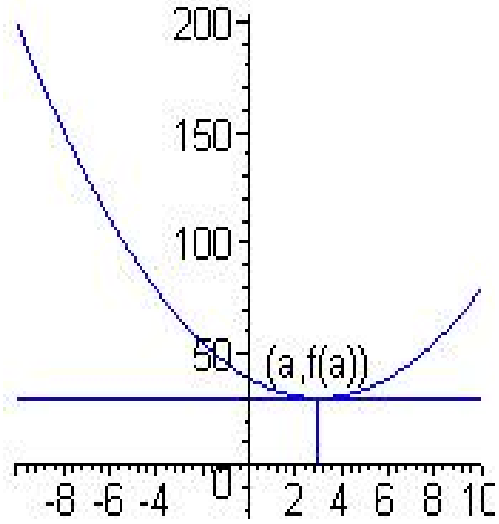


FIGURA 5.11. $f'(a) = 0$

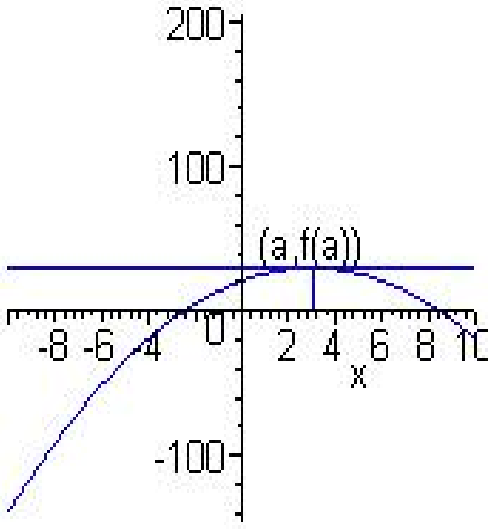


FIGURA 5.12. $f'(a) = 0$

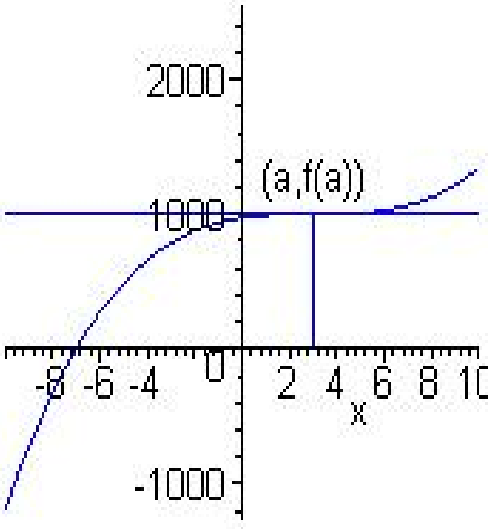


FIGURA 5.13. $f'(a) = 0$

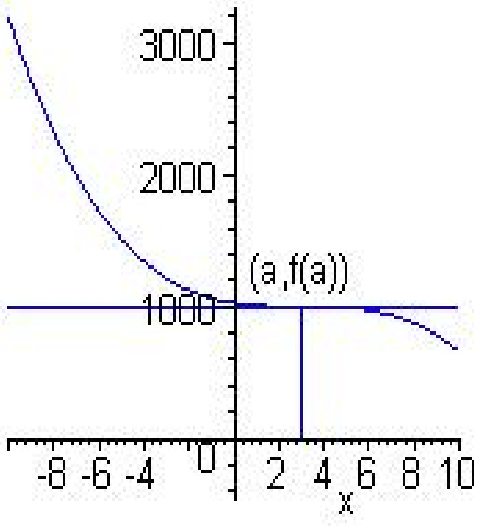


FIGURA 5.14. $f'(a) = 0$

Queda claro a partir de estos ejemplos que la condición $f'(a) = 0$, no implica que el punto $(a, f(a))$ sea un extremo global, podría ser también un punto de inflexión. Pero si $(a, f(a))$ es un extremo local entonces $f'(a) = 0$ pues en ambos casos las pendientes cambian de positivas a negativas o viceversa..

Esto se expresa en el siguiente teorema.

TEOREMA 5.5.7. *Si f es diferenciable en el punto $x = c$ y f tiene un extremo local en dicho punto entonces $f'(c) = 0$*

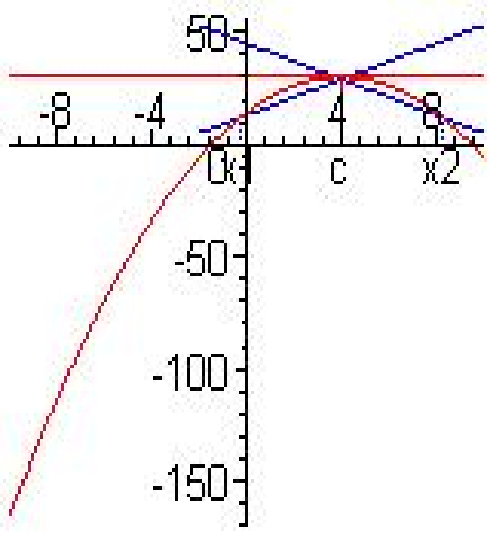


FIGURA 5.15. $f'(a) = 0$

Demostración. *Supongamos que el punto $(c, f(c))$ es un máximo local, luego existe un entorno $I = (-\delta + c, c + \delta)$ tal que*

$$f(x) < f(c) \quad \textit{para todo} \quad x \in I.$$

Supongamos que $x < c$ entonces $x - c < 0$ por lo tanto las variaciones medias de f son positivas para todo $x < c$, luego $\lim_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$.

Por otro lado si $x > c$ entonces $x - c > 0$ y por lo tanto las variaciones medias de f son negativas para todo $x \in I$, luego

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Como $f'(c) = \lim_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ entonces $0 \leq f'(c) \leq 0$. Por lo tanto $f'(c) = 0$.

OBSERVACIÓN 5.5.3. *Este teorema nos indica que si f es diferenciable en un punto $x = c$ y $f'(c) \neq 0$ entonces $(c, f(c))$ no es un extremo local de f. Pero el hecho que $f'(c) = 0$ no implica que sea un extremo local. Más aún , puede ocurrir que $(c, f(c))$ sea extremo local y $f'(c)$ no exista.*

ACTIVIDADES 5.5.10.

En relación a la observación anterior analiza el siguiente problema:

Considera la función $f(x) = |x^2 - 4|$

i) *Grafica $f(x)$.*
ii) *Verifica que $(0,4)$, $(-2,0)$ y $(2,0)$ son extremos locales.*
iii) *¿ Qué sucede con $f'(0)$, $f'(-2)$ y $f'(2)$.*

Concavidad y convexidad El hecho que una función sea creciente en un intervalo no nos dice específicamente cómo crece, por lo tanto el conocer los intervalos donde la función es creciente o decreciente no es suficiente para contestar preguntas de este tipo.

Recordemos que cuando la gráfica de una función en un intervalo es cóncava la función crece rápidamente o decrece lentamente. >Podremos apreciar esto a través de la derivada?

En el ejemplo de la piedra observamos que a la izquierda y a la derecha del punto máximo las pendientes son decrecientes. En el caso de $y(t) = t^3$, a la izquierda de $t = 0$ las pendientes son decrecientes y la curva es convexa y a la derecha de $t = 0$ las pendientes son crecientes y la curva es cóncava. Al parecer la concavidad o convexidad está relacionada con la monotonía de la función derivada $f'(x)$.

ACTIVIDADES 5.5.11.

(1) *Observemos el gráfico de una función que en un intervalo crece rápido y otra función en que decrece lento.*
¿ Cómo son las pendientes de las rectas tangentes en cada punto $t \in (a,b)$? Observa que en el gráfico 16 a medida que t crece las pendientes son positivas y crecientes (cada vez más inclinadas respecto de la anterior) y en el caso del grafico 17 las pendientes son negativas y crecientes (cada vez menos inclinada que la anterior). Esto nos indica que una gráfica es cóncava cuando las pendientes son crecientes es decir la función derivada es creciente.
(2) *Análogamente, observemos la gráfica de una función que en un intervalo es convexa. Recordemos que esto significa que f crece lentamente o decrece rápidamente.*

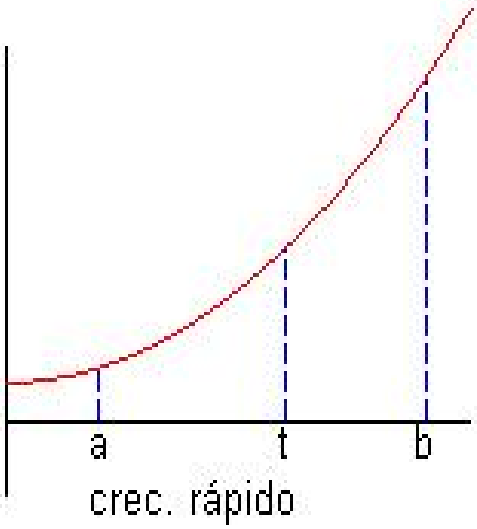


FIGURA 5.16. f convexa

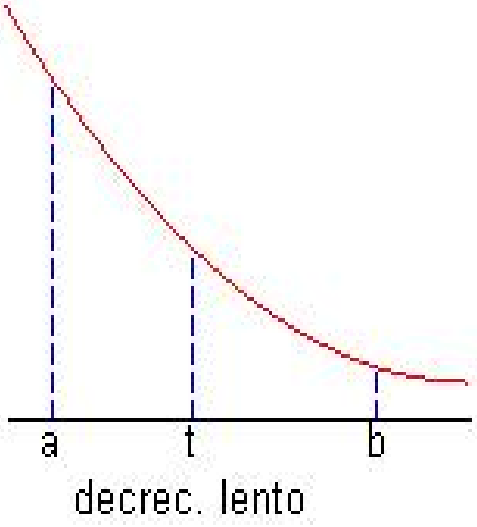


FIGURA 5.17. f convexa

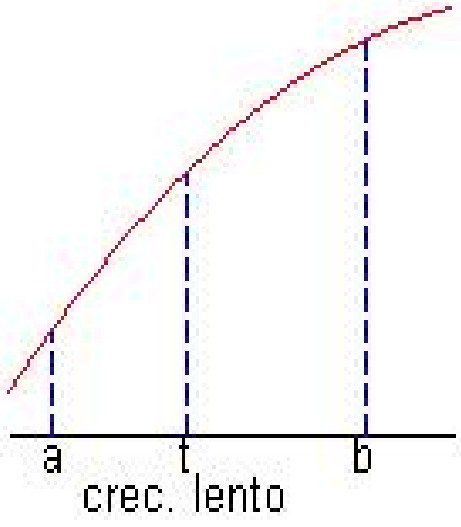


FIGURA 5.18. f cóncava

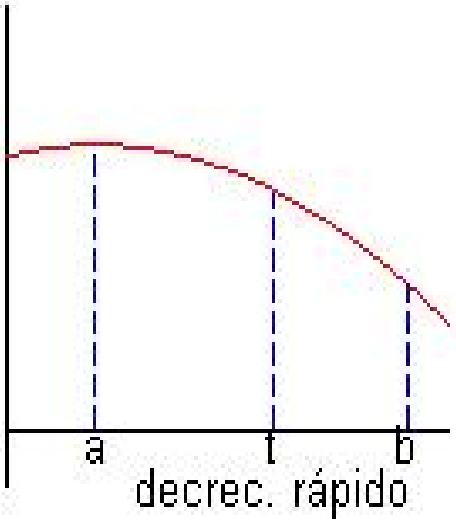


FIGURA 5.19. f cóncava

Observando estos gráficos puedes verificar que las pendientes de las rectas tangentes en cada punto $t \in (a,b)$.

En la figura 18 *son*————————*y*————————*.y en*

la figura 19 *son*————————*y*————————*.*

Luego en una gráfica convexa las pendientes de las rectas tangentes son decrecientes, es decir su función derivada es decreciente.

(3) *Apliquemos al ejemplo planteado al comienzo de la sección 2.2, referente a la caída libre de la piedra, tenemos que* $h'(t) = -5t + 2$.

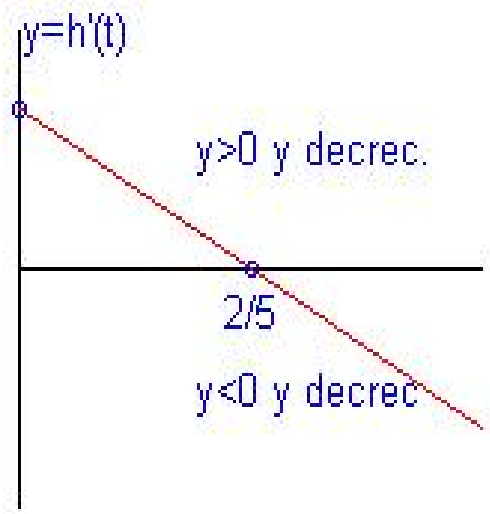


FIGURA 5.20. $h'(t)$

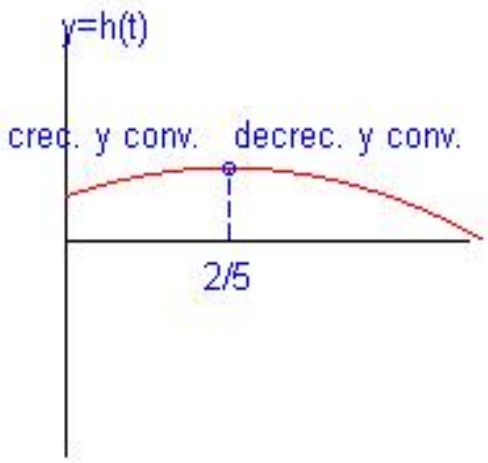


FIGURA 5.21. $h(t)$

Analiza y completa según el gráfico de $h'(t)$:

- *Sabemos que $h'(t)$ es ..... en todo $\mathbb{R}$, luego $h(t)$ es ..... en todo su dominio.*
- *Además para $0 < t < \frac{2}{5}$ la derivada es ..... y para $t > \frac{2}{5}$ es ..... Luego $h(t)$ es ..... en $0 < t < \frac{2}{5}$ y ..... para $t > \frac{2}{5}$.*
- *Luego $h(t)$ ..... para $0 < t < \frac{2}{5}$ y ..... para $t > \frac{2}{5}$. Esto indica que en $\left(\frac{2}{5}, h\left(\frac{2}{5}\right)\right)$ se produce un máximo local.*

EJERCICIOS PROPUESTOS 5.5.4.

(1) *Sea $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$*

- *i) Grafica $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x-2)(x+1)$*
- *ii) Verifica y completa:*

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$		0			0	
$f(x)$						

- *iii) Determina los intervalos donde $f(x)$ es creciente o decreciente, donde es cóncava o convexa, extremos locales si los tiene y puntos de inflexión.*
- *iv) Calcula $f(-1)$, $f(2)$ y $f(0)$ calcula aproximadamente las raíces de $f(x)$ y en un mismo par de ejes gráfica $f'(x)$ y $f(x)$.*

(2) *Esboza un posible gráfico para la altura de la piedra a partir del gráfico de $h'(t)$.*

i) *¿Cuántos posibles gráficos puedes hacer?*
ii) *¿Cuál sería tu conjetura para la fórmula de* $h(t)$*?*
iii) *Por la forma de la gráfica, parecida a una parábola, se podría conjeturar que* $h(t) = a\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+b$ *, es decir una función cuadrática con un mínimo global en* $t=\frac{2}{5}$*. Calcula, si es que existen, los valores de* a *y* b *de modo que* $h'(t) = -5t+2$ *y* $h(0) = 15$*.*

Segunda derivada de una función Supongamos que $f(x)$ es dos veces diferenciable es decir su función derivada $f'(x)$ también es diferenciable. En este caso diremos que $g(x) = f''(x)$ es la función derivada de $f'(x)$ y la segunda derivada de $f(x)$.

¿Qué aporta la segunda derivada de f?

La segunda derivada de f nos ayuda a determinar en primer lugar los intervalos donde $f'(x)$ es creciente o decreciente, pues según el teorema la derivada de $f'(x)$ es positiva (negativa) sí y sólo si $f'(x)$ es creciente (decreciente) . Por lo tanto nos permite identificar la forma en que $f(x)$ crece o decrece, a saber

i) $f''(x) > 0$ en (a,b) sí y sólo si $y = f(x)$ es cóncava en (a,b).
ii) $f''(x) < 0$ en (a,b) sí y sólo si $y = f(x)$ es convexa en (a,b).
iii) $f(x)$ crece rápido en (a,b) sí y sólo si $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ en (a,b).
iv) $f(x)$ crece lento en (a,b) sí y sólo si $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ en (a,b).
v) $f(x)$ decrece rápido en (a,b) sí y sólo si $f''(x) < 0$ y $f''(x) < 0$ en (a,b).
vi) $f(x)$ decrece lento en (a,b) sí y sólo si $f''(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ en (a,b).

Puntos de inflexión. Como un punto de inflexión se produce cuando el gráfico de $f(x)$ cambia de cóncavo a convexo o viceversa tenemos que:

Si x_0 es punto de inflexión, a la izquierda de x_0, $f''(x)$ es positiva y a la derecha de x_0 es negativa o viceversa. Como $f''(x)$ es continua, necesariamente $f''(x_0)$ debe anularse en el punto de inflexión.

Pero $f''(x_0) = 0$ no es una condición suficiente para que x_0 sea un punto de inflexión.

Por ejemplo, para $f(x) = x^4$, se tiene que su segunda derivada $f''(x) = 12x^2$ se anula en $x = 0$ pero $f''(x)$ es positiva para todo número real x,luego $(0, f(0))$ es un extremo global.

Luego $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión sí y sólo si $f''(x_0) = 0$ y verificar que alrededor de x_0 se produce un cambio de signo en $f''(x_0)$.

Criterio de la segunda derivada para extremos locales y puntos de inflexión.

Escribe un resumen de las condiciones necesarias y suficientes para que una función dos veces diferenciable posea un extremo global o un punto de inflexión.

UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CS. QUIMICAS Y FARMACEUTICAS.

MODULO N° 5

Prof: María Angélica Vega U.

Aplicaciones de la Derivada: Linealidad local, Incrementos y Diferenciales

Aproximación lineal o linealidad local Las gráficas de la mayoría de las funciones tienen la propiedad que, cerca de cualquier punto $\mathbf{a}$, parecen una línea recta cuya pendiente es la derivada de la función en el punto, es decir, $\mathbf{f'}(\mathbf{a})$. De modo que si queremos estudiar una función muy complicada sobre un pequeño intervalo, con esta propiedad podemos determinar en forma aproximada el valor de la función para valores de la variable independiente que están en este pequeño intervalo.

Esta propiedad de las funciones se llama **aproximación lineal o linealidad local**, el término local se debe a que la propiedad se cumple sólo en una pequeña región del dominio de la función.

Si denotamos por $(a, f(a))$ al punto de la gráfica de f(x), la ecuación de la recta tangente en el punto es :

$$\begin{array}{ll} f(x)-f(a) & f'(a)(x-a) \quad \text{de aquí,} \\ f(x) & f(a)+f'(a)(x-a) \end{array} \tag{3}$$

Observemos que de esta relación, podemos obtener la fórmula de la derivada numérica en el punto a, en término de diferencias progresivas antes vista.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{4}$$

ACTIVIDADES 5.5.12.

1.) Sabiendo que $\sqrt{(}x)$ es aproximadamente lineal cerca de $x=4$ con pendiente $\frac{1}{4}$, Calcular $\sqrt{(}4.0036)$ y $\sqrt{(}4.007)$. La aproximación lineal puede utilizarse para interpolar y extrapolar valores, dada una tabla de valores.

Se llama interpolar, al cálculo aproximado de un valor desconocido (valor de la función) , cuya preimagen está entre dos valores dados y extrapolar al cálculo de un valor cuya preimagen está fuera del dominio de los valores dados. Estas ideas se puede entender mejor realizando el siguiente ejercicio:

2.) Dada la tabla de $\sqrt{(}x)$

Tabla 1.

x	$f(x)=\sqrt{(}x)$
4	2.000000
4.001	2.000250
4.002	2.000500
4.003	2.000750
4.004	2.001000
4.005	2.001249

calcular aproximadamente el valor de $x=4.0045$,$x=4.0037$ *y* $x=4.006$

Dada la siguiente información de $f(x)$*:*

Tabla 2.

x	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0
$f(x)$	10.3	8.2	6.5	5.2	4.1	3.2

a) *Calcule* $f'(7.0$, $f'(8.5)$ *y* $f'(6.75)$
b) *Calcule la rapidez de cambio de* f' *en* $x=7$
c) *Halle, aproximadamente, una ecuación de la línea tangente a la gráfica de f en* $x=7$.
d) *Calcule* $f(6.8)$.

Incrementos y Diferenciales Recordemos que si consideramos dos puntos x y $x+\Delta x$ denotamos por

$$\Delta x=(x+h)-x=h$$
$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y\,,$$

de modo que Δx es el **incremento** de la variable x y Δy es el **incremento** de la variable dependiente.

DEFINICIÓN 5.5.9. *Sea* $y=f(x)$ *una función derivable y* a *un punto del dominio* f*. Se llama* **diferencial de** f *en* a *a la expresión:*

$$df=dy=f'(a)\Delta x=f'(a)dx$$

Graficamente:

NOTA 5.5.1. *Nótese que* $dx=\Delta x$*. Por esta razón se acostumbra escribir* Δx *como* dx*. Los símbolos* dy *y* dx *tienen así significado individual. Tiene sentido dividir ambos miembros de la ecuación.*

$$dy=f'(x)dx$$

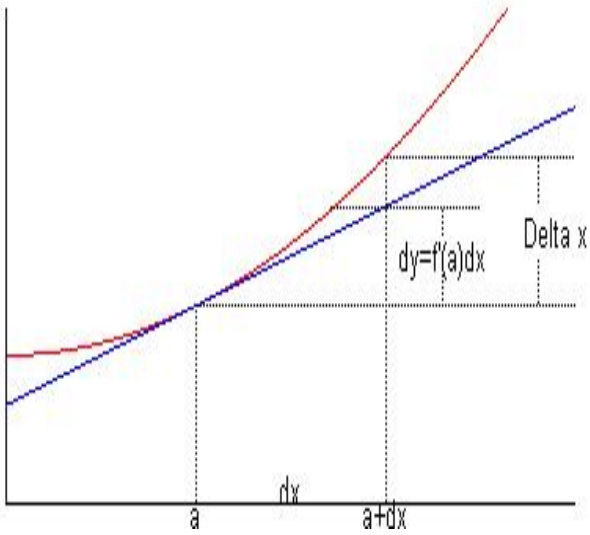


FIGURA 5.22. Diferencial

por dx y se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

De aquí se origina el símbolo $\frac{dy}{dx}$ para la derivada. Su uso se remonta a la época de Leibniz, al final del siglo XVII, cuando dx denotaba un número infinitamente pequeño.

ACTIVIDADES 5.5.13.

(1) *Calcular $f(a+\Delta x)$ y df en el caso en que $f(x) = x^3$, $a = 1$ y $\Delta x = 0.1$*
(2) *Calcular df y Δf para $f(x) = \sqrt{(x)}$, $a = 9$ y $\Delta x = 0.3$*

Respuesta. $df = 0.05$ *y* $\Delta f = 0.04959$

♢

Uso de la diferencial Como vimos antes,

(5) $$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

es una buena aproximación de $f(x_0 + \Delta x)$ cuando Δx es pequeño. El siguiente ejemplo, muestra el uso de la fórmula anterior.

EJEMPLO 5.5.2. *Utilizar la fórmula de aproximación para estimar $\sqrt[3]{(29)}$.*

Solución. *La función $f(x)$ se escoge en relación a la aproximación que se desea calcular. En este caso $f(x) = \sqrt[3]{(x)}$. Se conoce el valor exacto de $\sqrt[3]{(27)}$, donde $x_0 = 27$ que es un valor*

cercano a 29*. Luego usando* (5)

$$\sqrt[3]{(29)} = \sqrt[3]{(27+2)} \approx \sqrt[3]{(27)} + f'(27)(29-27)$$

Como

$$f(x) = x^{(\frac{1}{3})} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{(\frac{-2}{3})}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(29)} &\approx 3 + \frac{2}{3 \cdot (27)^{(\frac{2}{3})}} \\ &\approx 3 + \frac{2}{27} \approx 3 + 0.0741 = 3.0741.\end{aligned}$$

Compáralo con el valor que entrega la calculadora.

ACTIVIDADES 5.5.14.

- *Usando diferencial, estimar el valor de* $\sqrt{26.1}$*. > Cuál es la función involucrada ?*
- *El lado de un cubo se mide con un error a lo sumo de* 1%*. ¿ Qué porcentaje de error se obtiene al calcular el volumen del cubo ? Respuesta.* 3%

Derivada de las funciones trigonométricas. Para calcular la función derivada de las funciones trigonométricas sólo necesitamos calcular la derivada de $f(x) = \text{sen}(x)$,puesto que las otras funciones se expresan en términos de esta última.

Derivada de la función trigonométrica $f(x) = \textbf{sen}(x)$.

Antes de calcular explícitamente la derivada de esta función haremos algunas predicciones acerca de qué tipo de función debiera ser $f'(x)$.

ACTIVIDADES 5.5.15.

(1) *Grafica la función* $f(x) = sen(x)$ *en Maple.*
(2) *Observando tu gráfico contesta las siguientes preguntas:*
   a) *¿ Ves algún punto donde* $f(x) = sen(x)$ *no sea diferenciable?*
   b) *¿ Será también una función periódica?*
   c) *¿ En qué puntos la función derivada es igual a cero?*
   d) *Calcula aproximadamente, usando el gráfico, la derivada de la función* $f(x) = sen(x)$ *en los siguientes valores* $x = 0$,
   $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{3}$ *y* $x = \frac{\pi}{2}$*. Con estos datos puedes conocer aproximadamente la derivada en* $x = \frac{4\pi}{6}, x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{6}$ *y* $x = \pi$.
   e) *Calcula aproximadamente algunos valores de* $f'(x)$ *en el intervalo* $[\pi, 2\pi]$*y con los datos anteriores esboza un gráfico .*
   f) *¿Te atreverías a predecir cuál es la derivada de* $f(x) = sen(x)$*?*

(3) *Veamos cómo estuvieron las predicciones, calculemos*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

para ello comprueba que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}(\frac{sen(x)(cos(h)-1)}{h} + \frac{cos(x)sen(h)}{h})$$

y demuestra usando propiedades de los límites que

$$f'(x) = cos(x)$$

Conclusión. *La función derivada de $f(x) = sen(x)$ es la función trigonométrica $g(x) = cos(x)$, es decir*

$$\frac{dsen(x)}{dx} = cos(x).$$

(4) *¿Cuál es la función derivada de $g(x) = Asen(\omega(x+h))+k$? Indica sus características y grafícala. ¿ Cuándo es máxima la razón de cambio de y con respecto a x?¿Cuándo es mínima?*

(5) **Derivada de $g(x) = \cos(x)$** Para calcular la derivada de esta función, recuerda que $\cos(x) = \text{sen}(x+\frac{\pi}{2})$. Verifica que

$$\frac{d\cos(x)}{dx} = -\text{sen}(x)$$

(6) Calcula la derivada de $g(x) = A\cos\omega(x+h)+k$.

(7) Derivada de $h(x) = \tan(x)$

i) Demuestra que $h'(x) = 1+\tan^2(x)$. Recuerda que

$$\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

ii) Verifica que

$$h'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Una ecuación diferencial para las funciones trigonométricas $sen(x)$ y $cos(x)$. >De qué ecuación diferencial será solución $y(x) = A\text{sen}(\omega(x+h))$? Al calcular la segunda derivada de $y(x)$ obtendrás que $y''(x) = -\omega^2 A\cos(\omega(x+h))$. Compruébalo. Por lo tanto, $y''(x) = -\omega^2 y(x)$

1) Verifica que $y(x) = A\cos(\omega(x+h))$ también es solución de la ecuación diferencial $y''(x) = -\omega^2 y(x)$.

2) Demuestra que $y(x) = A\text{sen}\sqrt{k}x + B\cos(\sqrt{k}x)$ es solución de

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -ky$$

siendo k positivo.

EJERCICIOS PROPUESTOS 5.5.5.

(1) *Calcula la derivada de las siguientes funciones e indica su máximo dominio.*
   a) $f(x) = 3\sin(x^2)$
   b) $g(t) = \sqrt{cos(t)}$
   c) $f(s) = 3\tan^2(s)$
   d) $g(x) = sec(x^2+2)$
(2) *Grafica* $s(t) = cos^2(t)$

$\diamondsuit$

UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CS. QUIMICAS Y FARMACEUTICAS.

MODULO N° 6

Matemáticas II

Prof: María Angélica Vega U.

Aplicaciones de la Derivada: Valores Extremos

Puntos críticos de una función ¿Qué se puede decir de $f(t)$ alrededor de $t = p$ cuando $f'(p) = 0$?

DEFINICIÓN 5.5.10. *Diremos que un punto $p \in Dom\, f$ es un* **número crítico de** *f sí y sólo si $f'(p) = 0$ ó $f'(p)$ no existe.*

NOTA 5.5.2.

(1) *El punto $(p, f(p))$ en la gráfica de f se llama* **punto crítico**.
(2) *El punto $f(p)$ se llama* **valor crítico** *de f.*
(3) *Es claro que si $f'(p) = 0$ entonces la recta tangente al gráfico de f en $(p, f(p))$ es paralela al eje de la variable independiente.*

Máximos y mínimos locales Recordemos que si p es un número crítico de una función f:

- f tiene un **mínimo local** en p, si $f(p) \leq f(x)\,, \quad \forall x \in (p-\delta, p+\delta)$.
- f tiene un **máximo local** en p, si $f(p) \geq f(x)\,, \quad \forall x \in (p-\delta, p+\delta)$.

¿**Cómo saber qué puntos críticos son máximos locales y cuáles son mínimos locales**? Existen dos criterios :

TEOREMA 5.5.8. **Criterio de la primera derivada** *Sea p es un número crítico en el dominio de f, si f' cambia de signo en p, entonces f tiene un valor extremo en p.*

i) *Si f' es negativa a la izquierda de p y positiva a la derecha de p, entonces f tiene un mínimo local en p.*
ii) *Si f' es positiva a la izquierda de p y negativa a la derecha de p, entonces f tiene un máximo local en p.*

ACTIVIDADES 5.5.16.

(1) *Dadas $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$ y $g(x) = x^3$ determine:*
   i) *Los números críticos de f.*
   ii) *Use el criterio de la primera derivada para determinar los valores extremos de f.*
   iii) *Esboce la gráfica de f, usando ii).*

(2) *Calcular los valores extremos locales de la función f dada por $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 8)$. Trazar la gráfica de f.*

Máximos y mínimos globales Los máximos y mínimos locales son los puntos donde una función alcanza valores extremos localmente, determinaremos ahora donde una función alcanza estos valores absolutamente.

- f tiene un **mínimo global** en p, si $f(p) \leq f(x)$, $\quad \forall x \in Dom_f$.
- f tiene un **máximo global** en p, si $f(p) \geq f(x)$, $\quad \forall x \in Dom_f$.

Máximos y mínimos globales en un intervalo cerrado

TEOREMA 5.5.9. **Teorema del Valor Extremo.**

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f tiene un máximo y un mínimo en ese intervalo.

Los máximos y mínimos globales de f se pueden presentar en un máximo o un mínimo local o en uno de los extremos del intervalo cerrado. Observemos esta idea en la figura.

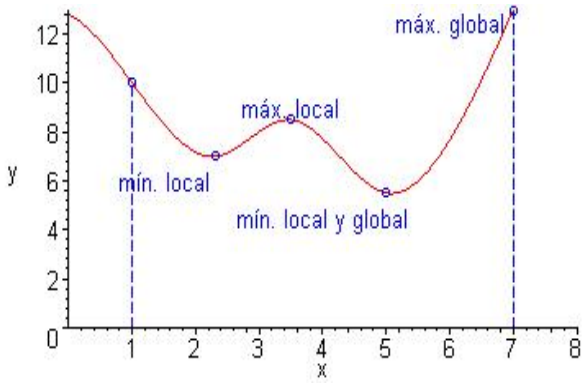


FIGURA 5.23. Máximos y mínimos globales en $[a,b] = [1,7]$

Procedimiento para determinar Máximos y mínimos globales de f en $[a,b]$

i) Encontrar todos los números críticos de f.
ii) Calcular los valores $f(x_0)$ para cada número crítico x_0.
iii) Calcular $f(a)$ y $f(b)$.
iv) El máximo y mínimo abasoluto de f en $[a,b]$ son el mayor y el menor valor de la función respectivamente entre los valores extremos locales y los valores de la función en los extremos del intervalo.

PROBLEMA 5.4. *Sea $f(x)=x^3-12x$, determina los valores extremos globales de f en $[-3,5]$. Esboza su grafica.*

ACTIVIDADES 5.5.17. *Ilustre el teorema del valor extremo graficando $f(x)=x^2+1$. Determine los valores extremos (máximo y mínimo) de $f(x)$, en el intervalo $[-1,2]$ y en el intervalo $(-1,2)$. Considere además la función*

$$g(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$$

Determine sus valores extremos en el intervalo $[-1,2]$.

TEOREMA 5.5.10. **Teorema de Rolle.**

Sea f continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b). Si

$$f(a)=f(b)$$

entonces existe al menos un número $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$

En otras palabras, si f continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a)=f(b)$, entonces f tiene algún número crítico en el intervalo (a,b).

ACTIVIDADES 5.5.18. *Hallar todos los números c en el intervalo $(-2,2)$ tales que $f'(c)=0$, donde $f(x)=x^4-2x^2$*

TEOREMA 5.5.11. **Teorema del Valor Medio. (T.V.M.)**

Si f continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b), entonces existe al menos un número $\xi\in(a,b)$ tal que,

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

El Teorema del Valor Medio, es importante en la interpretación de la derivada. Geométricamente, garantiza la existencia de una recta tangente que es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$

ACTIVIDADES 5.5.19. **Aplicaciones del T.V.M.**

(1) *Dada $f(x)=5-\frac{4}{x}$, hallar todos los c en $(1,4)$ que satisfacen el Teorema del Valor Medio.*

(2) *Dos coches patrullas equipados con radar están situados a* $8\ Kms$ *de distancia en una autopista. Un camión pasa junto al primer coche, que mide una velocidad de* $90\ Kms/h$*. Cuatro minutos más tarde, al pasar junto al otro radiopatrullas, la velocidad es de* $80\ Kms/h$*. Probar que en algún momento de esos cuatro minuto ha superado los* $100\ Kms/h$*.*

TEOREMA 5.5.12. **Concavidad y criterio de la segunda derivada**

Supongamos que $f(x)$ *es dos veces diferenciable es decir su función derivada* $f'(x)$ *también es diferenciable. En este caso diremos que* $g(x) = f''(x)$ *es la función derivada de* $f'(x)$ *y la segunda derivada de* $f(x)$.

¿Qué aporta la segunda derivada de f?

Recordamos que el signo de la segunda derivada indica si la gráfica de f es convexa o cóncava, es decir

(1) Si $f'' > 0$ en un intervalo, la gráfica es convexa en el intervalo.
(2) Si $f'' < 0$ en un intervalo, la gráfica es cóncava en el intervalo.
(3) $f(x)$ crece rápido en (a,b) sí y sólo si $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ en (a,b).
(4) $f(x)$ crece lento en (a,b) sí y sólo si $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ en (a,b).
(5) $f(x)$ decrece rápido en (a,b) sí y sólo si $f''(x) < 0$ y $f''(x) < 0$ en (a,b).
(6) $f(x)$ decrece lento en (a,b) sí y sólo si $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ en (a,b).

DEFINICIÓN 5.5.11. *Un punto* $(x_0, f(x_0))$ *de la gráfica de* f *es un* **punto de inflexión** *si* f'' *existe en un intervalo abierto* (a,b) *que contiene a* c *y* f'' *canbia de signo en* c.

OBSERVACIÓN 5.5.4. *Si* x_0 *es punto de inflexión, a la izquierda de* x_0*,* $f''(x)$ *es positiva y a la derecha de* x_0 *es negativa o viceversa. Como* $f''(x)$ *es continua, necesariamente* $f''(x_0)$ *debe anularse en el punto de inflexión. Pero* $f''(x_0) = 0$ *no es una condición suficiente para que* x_0 *sea un punto de inflexión.*

Por ejemplo, para $f(x) = x^4$ *, se tiene que su segunda derivada* $f''(x) = 12x^2$ *se anula en* $x = 0$ *pero* $f''(x)$ *es positiva para todo número real* x*,luego* $(0, f(0))$ *es un extremo global .*

Luego $(x_0, f(x_0))$ *es un punto de inflexión sí y sólo si* $f''(x_0) = 0$ *y verificar que alrededor de* x_0 *se produce un cambio de signo en* $f''(x_0)$.

TEOREMA 5.5.13. **Criterio de la segunda derivada** *Sea* f *una función derivable en un intervalo abierto que contiene a* x_0*, tal que* $f'(x_0) = 0$.

i) *Si* $f''(x_0) < 0$*, entonces* f *tiene un máximo local en* x_0.
ii) *Si* $f''(x_0) > 0$*, entonces* f *tiene un mínimo local en* x_0.

EJEMPLO 5.5.3. *Sea* $f(x) = 12 + 2x^2 - x^4$*. Use el criterio de la segunda derivada para calcular los máximos y mínimos locales de* f*, determinar puntos de inflexión, determinar los intervalos de concavidad y esbozar la gráfica.*

ACTIVIDADES 5.5.20.

i) *Hallar los puntos de inflexión de* $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$.
ii) *Sea* $f(x) = x^5 - 5x^3$. *Use el criterio de la segunda derivada para calcular los máximos y mínimos locales de* f, *determinar puntos de inflexión, determinar los intervalos de concavidad y esbozar la gráfica.*

Método Analítico de Graficación Consiste en realizar un estudio analítico del comportamiento de una función. Para ello es necesario determinar:

(1) Dominio y recorrido de f.
(2) Asíntotas verticales y horizontales. (límites infinitos y límites al infinito)
(3) Puntos críticos e intervalos de monotonía. (Intervalos donde f es creciente y decrecientes.)
(4) Valores extremos.
(5) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad.
(6) Esbozo del gráfico.

ACTIVIDADES 5.5.21. *Estudiar el comportamiento de las siguientes funciones usando el método analítico de graficación.*

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
(2) $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 1}6$
(3) $f(x) = 1 - x^{1/3}$

$\diamondsuit$

UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CS. QUIMICAS Y FARMACEUTICAS.

MODULO N° 7

Prof: María Angélica Vega U.

Problemas de Optimización. Son problemas contextualizados que para encontrar la solución hay que modelarlo y aplicar los métodos para calcular valores extremos.

Estrategia de solución

(1) Definir variables, datos y gráfico de la situción si es posible.
(2) Determinar la función que se va a optimizar y escribir la condicción de restricción del problema si la hay.
(3) Encontrar los números críticos e investigar si corresponden a máximos y mínimos.
(4) Verificar si hay máximos y mínimos en los extremos del dominio.
(5) Interpretación de los resultados y respuesta.

PROBLEMA 5.5. *Sea desea construir una caja sin tapa con base rectangular de cartón de* $16\ cm$ *de ancho y* $21\ cm$*, recortando un cuadrado en cada esquina, doblando los lados hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para el cuál se obtiene una caja de volumen máximo.*

Solución.

Paso 1. Asignación de variables y datos. Gráfico de la situación si es posible.

Sean

- x : *longitud del lado del cuadrado que recortaremos.*
- $V(x,y,z)$: *Volumen de la caja de dimensiones x, y, z.*

Paso 2. Determinar la función que hay que optimizar y la condición de restricción (si la hay)

Es decir hay que analizar si la función que se va a optimizar tiene más de una variable independiente, en cuyo caso hay que expresar la función en términos de una sola variable, usando la condición de restricción antes de pasar al siguiente paso.

La función que hay que maximizar es el volumen de la caja,

$$V(x,y,z) = xyz$$

por lo tanto, expresamos V como función de x*, en este caso expresamos el alto, ancho y largo en términos de* x*.*

$$V(x) = x(16-2x)(21-2x) = 2(168x - 37x^2 + 2x^3.$$

Paso 3. Números críticos y aplicación la metodología para encontrar valores extremos.

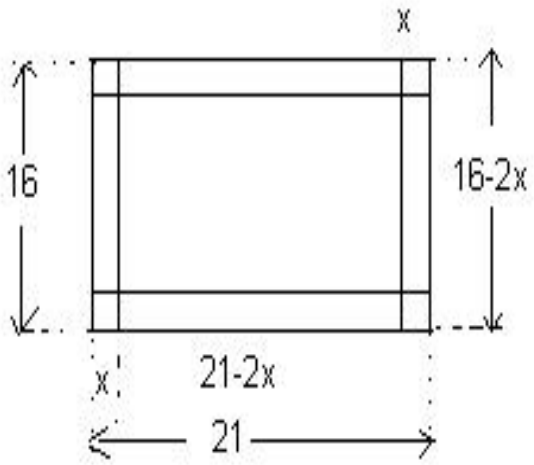


FIGURA 5.24. Máximos y mínimos globales en $[a,b]=[1,7]$

Derivando con respecto a x*,*

$$\frac{dV}{dx} = 2(168x-74x+6x^2) = 4(3x^2-37x+84)$$

$$= 4(3x-28)(x-3)$$

Luego los números críticos son, $x=\frac{28}{3}$ *y* $x=3$*. Analizamos el dominio de* f*.* $Dom\, V=[0,8]$*, luego* $x=\frac{28}{3}$ *está fuera del dominio de* V *y el único número crítico es* $x=3$*. Usamos el criterio de la segunda derivada para determinar el tipo de valor extremo.*

$$V''(x) = 2(12x-74) = 4(6x-37)$$

y

$$V''(3) = -76 < 0.$$

Luego V *tiene un máximo local en* $x=3$

Paso 4. Verificar si hay valores extremos en la frontera o extremos del intervalo.

El dominio es el intervalo $[0,8]$ *y* $V=0$ *para* $x=0$ *y* $x=8$*, por lo tanto el valor máximo de* V *no se alcanza en la frontera del dominio.*

Paso 5. Interpretación de los resultados y respuesta al problema.

Para obtener un caja de volumen máximo debe recortarse un cuadrado de $3\,cm$ *de lado en cada esquina de la caja de cartón.*

NOTA 5.5.3. *En general, en los casos que resulten más de un valor crítico, habría que aplicar el criterio de la segunda derivada para determinar donde se produce el valor extremo deseado.*

PROBLEMA 5.6. *De todos los recipientes cilíndricos que encierran un volumen de* $100\ pulg^3$ *¿ Cuáles son las dimensiones del que requiere menor cantidad de material ?*

Solución.

Paso 1. Asignación de variables y datos. Gráfico de la situación si es posible.

Sean

- r : *Radio del cilíndro.*
- h : *Altura del cilíndro.*
- V : *Volumen del cilíndro.*
- S : *Superficie del cilíndro.*

Paso 2. Determinar la función que hay que optimizar y la condición de restricción (si la hay).

La condición de restricción es el volumen y expresamos esta condición:

$$V = \pi r^2 h \Leftrightarrow \pi r^2 h = 100 \Rightarrow h = \frac{100}{\pi r^2}$$

La función que hay que minimizar es el área de la superficie del cilíndro

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Observamos que en la función aparecen dos variables independientes, usamos la condición de restricción para expresar la función en términos de una variable independiente. Reemplazando h *obtenemos:*

$$S = 2\pi r^2 + \frac{200}{r}$$

Paso 3. Aplicar la metodología para encontrar valores extremos.

Derivamos S*, con respecto a* r*.*

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{200}{r^2}$$

igualamos a cero

$$\frac{4\pi r^3 - 200}{r^2} = 0$$

$$4\pi r^3 - 200 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi r^3 = 200 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \approx 2.51$$

Tenemos dos números críticos, $r = 0$ *y* $r \approx 2.51$ *, pero* $r = 0$ *no puede ser valor extremo porque* $S(0)$ *no está definida. Usamos el criterio de la segunda derivada para determinar el tipo de valor extremo.*

$$S''(r) = 4\pi + \frac{400}{r^3}$$

y

$$S''(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}) = 12\pi > 0.$$

Luego S *tiene un mínimo local en* $r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$

Paso 4. Verificar si hay valores extremos en la frontera o extremos del intervalo.

El dominio es el intervalo $(0,\infty)$ *por lo tanto no pueden haber valores extremos en la frontera del dominio.*

Paso 5. Interpretación de los resultados y respuesta al problema.

De las consideraciones anteriores el mínimo se alcanza en $r=\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$ *y la altura es*

$$h=\frac{100}{\pi\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}}=2\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\approx 5.03$$

Por tanto, las dimensiones que requieren menor cantidad de material son $r=2.51\ pulg$ *y* $h=5.03\ pulg$.

ACTIVIDADES 5.5.22.

1) *Se desea construir una caja abierta a partir de una pieza cuadrada de cartón de* $18\ pulgadas$ *de lado, de la cual se quita un pequeño cuadrado de cada esquina y luego se pliegan para formar los lados. ¿ Cuáles son las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de esta manera?*
2) *¿Cuáles son las dimensiones de una lata de aluminio con capacidad de* $350\ ml$ *de bebida que utilice el mínimo material ?*
3) *Se desea fabricar una clata de conserva cilíndrica (con tapa) de 1 litro de capacidad . ¿ Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo metal posible ?*
4) *La ley de Poiselle establece que la velocidad de circulación de la sangre está dada a* r *cm del eje central de una arteria de radio* R *es:*

$$S(r)=c(R^2-r^2)$$

donde c *es una constante positiva. ¿ Dónde es mayor la velocidad de la sangre ?*
5) *Un ganadero desea cerrar un prado rectangular adyacente a un río . El prado debe tener* $180000\,m^2$ *para proporcionar suficiente pasto. ¿Qué dimensiones debe tener para que requiera la menor cantidad de valla posible, teniendo en cuenta que no se cerrará el lado adyacente al río?*
6) *Una ventana normanda está formada por un semicírculo unido a una ventana ordinaria rectangular. Hallar las dimensiones de una ventana normanda de área máxima que tenga un perímetro total de 16 pies.*

♣

NOTA 5.5.4. *La bibliografía consultada en la elaboración de este material es :*

- *Cálculo con Geometría Analítica. Earl Swokowski. Grupo Editorial Iberoamericana*
- *Cálculo. Deborah Hughes -Hallett.Andrew M Gleason et al. Ed. CECSA.*

♢

ANEXO 2: LABORATORIOS COMPUTACIONALES

- Laboratorio N^o 1: Comandos y Operaciones Básicas
- Laboratorio N^o 2: Interpretación de la Derivada como Pendiente de la Recta Tangente en un punto
- Laboratorio N^o 3: Aplicaciones de la Derivada a : Problemas de Razón de Cambio, Variables Relacionadas
- Laboratorio N^o 4: Problemas de Maximización y Minimización

Laboratorio Nº 1

Comandos y Operaciones Básicas

Este Laboratorio tiene por objetivo mostrar al estudiante como integrar los conceptos básicos que conoce con un software computacional:

1. Operaciones aritméticas.

1.1 Uso de los operadores y comandos básicos del álgebra.

Comando: restart: # Limpia las memorias y errores cometidos en el modo de ejecución.
Comando: simplify(expresion); # Se usa para simplificar expresiones algebraicas.
Comando: expand(expresion); # Se usa para expandir una expresión algebraica.
Comando: factor(expresion); # Se usa para factorizar una expresión algebraica.
Comando: evalf(expresion numérica); # Se usa para transformar un número (racional, irracional) en su representación decimal.

Ejemplos.

> x+y;# suma

$$x + y$$

> (a+b)^2;#exponenciación

$$(a + b)^2$$

>(x^3-y^3)/(x-y);

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y}$$

> simplify(%);

$$x^2 + y\,x + y^2$$

> (x+y)*(x-y);#producto

$$(x + y)\,(x - y)$$

> expand(%);

$$x^2 - y^2$$

> factor(%);

$$(x + y)\,(x - y)$$

> 3*Pi;

$$3\,\pi$$

> evalf(%);

$$9.424777962$$

2 Asignaciones.

Una asignación es dar un nombre a una expresión.
Sintáxis : Nombre : = expresion ;
Comando: Digits: = n ; # Se usa para ampliar la cantidad de dígitos de un número decimal.
Comando: subs(x=a, expresión); # Se usa para sustituir el valor de x por a en expresión.
> Digits:=20;

$$Digits := 20$$

- A1:= (x+y)^3;
- $$A1 := (x+y)^3$$
- subs(x=2,A1);
- $$(2+y)^3$$
- subs(y=3,A1);
- $$(x+3)^3$$

> subs({x=2,y=3},A1);

$$125$$

3 Sumatorias y Productos.

Comando: Sum(expresion subindicada, indice=inf..sup) ; # Se usa para escribir en forma simbólica una sumatoria.
Comando: sum(expresion subindicada, indice=inf..sup) ; # Se usa para obtener la suma de una sumatoria.
Comando: Product(expresion subindicada, indice=inf..sup) ; # Se usa para escribir en forma simbólica un producto.
Comando: product(expresion subindicada, indice=inf..sup) ; # Se usa para obtener la suma de una sumatoria.

Ejemplo 3.1.

> Sum(i^3,i=1..n);# suma de los n primeros cubos

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

> sum(i^3,i=1..n);

$$\frac{(n+1)^4}{4} - \frac{(n+1)^3}{2} + \frac{(n+1)^2}{4}$$

> Sum(i^3,i=1..10)=sum(i^3,i=1..10);

$$\sum_{i=1}^{10} i^3 = 3025$$

Ejemplo 3.2. Otra forma de obtener el valor de la suma es usando el comando:
Comando: value(%) ; # Se usa para obtener el valor numérico de una expresión simbólica o instrucción inerte.

> Sum(i^2,i=1..100);

$$\sum_{i=1}^{100} i^2$$

> value(%);

$$338350$$

Ejemplo 3.3. Determinar el producto y aplicar los comandos aprendidos para expresar su valor decimal.

> Product(((k^2+3*k-11)/(k+3)),k=0..10);

$$\prod_{k=0}^{10} \frac{k^2+3k-11}{k+3}$$

> value(%);

$$\frac{-7781706512657}{40435200}$$

> **evalf(%);**

-192448.81965854008389

4. Ecuaciones.

Comando: solve(expresion,variable) ; **# Se usa para obtener resolver una ecuación o un sistema de ecs.**

Comando: fsolve(expresion,variable,parámetros) ; **# Resuelve una ecuación o un sistema, usando aritmética de punto flotante.** Los parámetros que controlan las soluciones son opcionales.

Ejemplo 4.1. Resolver : $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

> **ec:=x^3-x^2-x+1=0;ec:=x^3-x^2-x+1=0;**

$$ec := x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$
$$ec := x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

> **solve(ec,x);**

-1, 1, 1

Ejemplo 4.2. Resolver : $23\,x^5 + 105\,x^4 - 10\,x^2 + 17\,x = 0$

> **solve(23*x^5 + 105*x^4 - 10*x^2 + 17*x,x);**

$$0, \text{RootOf}(23\,_Z^4 + 105\,_Z^3 - 10\,_Z + 17, index = 1),$$
$$\text{RootOf}(23\,_Z^4 + 105\,_Z^3 - 10\,_Z + 17, index = 2),$$
$$\text{RootOf}(23\,_Z^4 + 105\,_Z^3 - 10\,_Z + 17, index = 3),$$
$$\text{RootOf}(23\,_Z^4 + 105\,_Z^3 - 10\,_Z + 17, index = 4)$$

> **evalf(%);**

$$0., 0.30406645428490687970 + 0.40406190575175854716\,I,$$
$$-0.63718131853104998515, -4.5361689813431116003,$$
$$0.30406645428490687970 - 0.40406190575175854716\,I$$

- En general, las soluciones explícitas en términos de radicales para ecuaciones polinómicas de grado mayor que 4 no existen. En estos casos, Maple proporciona soluciones implícitas y aquellas que no son racionales en términos de **RootOf**s.

Ejemplo 4.3. Resolver el sistema:

$$x + y + z = 1$$
$$3\,x + y = 3$$
$$x - 2\,y - z = 0$$

> **sis := {x+y+z=1, 3*x+y=3, x-2*y-z=0};**

$$sis := \{x + y + z = 1, 3\,x + y = 3, x - 2\,y - z = 0\}$$

> **sols := solve(sis);**

> **sols[1];sols[2];sols[3];**

$$sols := \{x = \frac{4}{5}, z = \frac{-2}{5}, y = \frac{3}{5}\}$$
$$x = \frac{4}{5} \qquad y = \frac{3}{5}$$
$$z = \frac{-2}{5}$$

Ejemplo 4.4. Encontrar los ceros de las funciones:

i) f = $\tan(\sin(x))$
ii) g = $23\,x^5 + 105\,x^4 - 10\,x^2 + 17\,x$

Solución.

i) resolvemos la ecuación trigonométrica:

```
> fsolve( tan(sin(x))=1, x );
```

0.90333911076651284736

ii) Ceros reales del polinomio:

```
> poli := 23*x^5 + 105*x^4 - 10*x^2 + 17*x:

> fsolve( poli, x);#ceros reales
```

-4.5361689813431116003, -0.63718131853104998515, 0.

```
> fsolve( poli, x, -1..1 );# ceros reales en el intervalo [-1..1]
```

-0.63718131853104998515, 0.

```
> fsolve( poli, x, maxsols=3 );#el mismo efecto que el comando penúltimo
```

-4.5361689813431116003, -0.63718131853104998515, 0.

5. Funciones.

5.1 Funciones de bibliotecas.
Son las funciones que traen su nombre preasignado en la biblioteca del MAPLE.

Algunas de ellas:

1) Función seno.

```
> sin(x);#función seno
```

$\sin(x)$

```
> sin(Pi/4);#seno evaluado en Pi/4
```

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

```
> evalf(%);
```

0.70710678118654752440

2) Función e^x

```
> exp(x);#función exponencial base e.
```

e^x

> exp(2);

$$e^2$$

> evalf(%);

$$7.3890560989306502272$$

3) Función logaritmica.

3.1 logaritmo natural.

> ln(x);#función logaritmo natural

$$\ln(x)$$

> ln(3); evalf(%);

$$\ln(3)$$

$$1.0986122886681096914$$

3.2 logaritmo común

> log10(10000);

$$\frac{\ln(10000)}{\ln(10)}$$

> evalf(log10(10000));

$$4.0000000000000000000$$

3.3 logaritmo general

> log[2](exp(1));

$$\frac{1}{\ln(2)}$$

> evalf(%);

$$1.4426950408889634074$$

5.2 Funciones definidas por el usuario

5.2.1 Alternativa 1. Como una fórmula.

> f:=5*x^3*exp(-x^2);#definición de función como una fómula.

$$f := 5\,x^3\,e^{(-x^2)}$$

Para evaluar en un punto cualquiera, digamos x=3. usamos el comando subs

> subs(x=3,f);evalf(%);

$$135\,e^{(-9)}$$

$$0.016660323551701739182$$

5.2.2 Alternativa 2. Como un operador.

> g:=x->5*x^3*exp(-x^2);

$$g := x \to 5\,x^3\,e^{(-x^2)}$$

> **g(3);evalf(%);**

$$135\ e^{(-9)}$$

$$0.016660323551701739182$$

Observación: Veremos el uso de la instrucción **unapply**

Ejemplo 5.3. Escribir la funciones

i) f(x) = x^2 + sen(x) + 1

ii) g(x) = x^2 + y^3 +1
como expresión y luego trans formar en operadores.
Solución:
i) Escribimos:

> **f := x^2 + sin(x) + 1;**

$$f := x^2 + \sin(x) + 1$$

> **f(3);**

$$x(3)^2 + \sin(x)(3) + 1$$

> **F := unapply(f,x);**

$$F := x \to x^2 + \sin(x) + 1$$

> **F(Pi/6);evalf(%);**

$$\frac{\pi^2}{36} + \frac{3}{2}$$

$$1.7741556778080377394$$

ii) Para la función de dos variables

> **g := x^2 + y^3 + 1;**

$$g := x^2 + y^3 + 1$$

> **G := unapply(g,x);**

$$G := x \to x^2 + y^3 + 1$$

> **G(2);**

$$5 + y^3$$

> **H := unapply(g,x,y);**

$$H := (x, y) \to x^2 + y^3 + 1$$

> **H(2,3);**

$$32$$

Otra forma:

> **L := unapply(g,[x,y]);**

$$L := (x, y) \rightarrow x^2 + y^3 + 1$$

> L(2,3);

$$32$$

Ejemplo 5.4. Si f(x) = sen(x) y g(x) = cos(x) entonces la composición es

> (sin@cos)(x);

$$\sin(\cos(x))$$

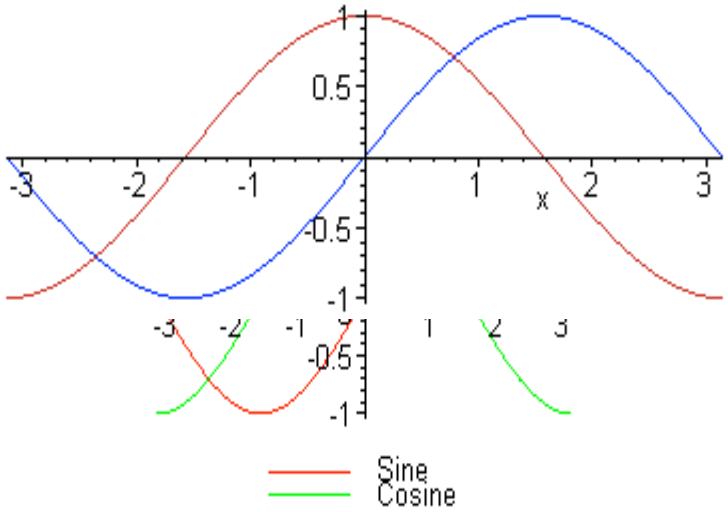
6. Gráficos

6.1 Gráficos de funciones.

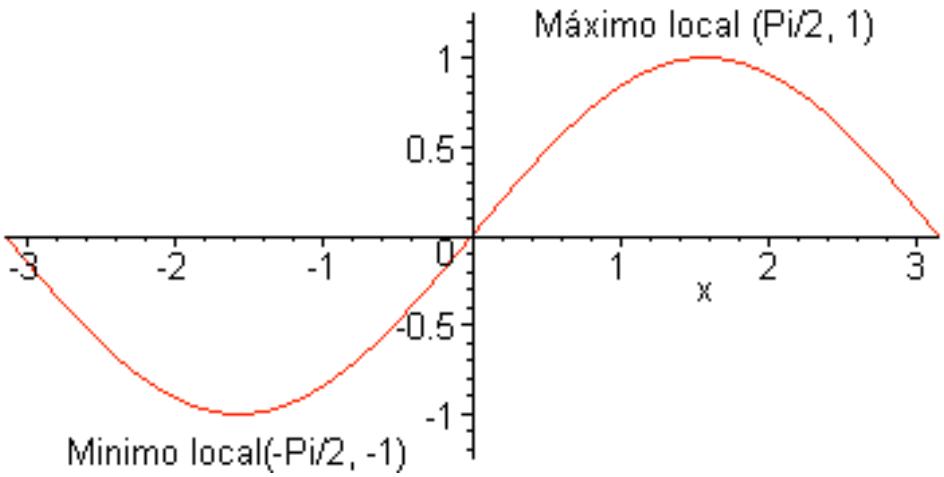
Comandos:
plot(nombre de función ,x = -a..a,y = -b .. b,color = nombre de color);
#para graficar una o dos funciones.
display{{nombre-1,nombre-2,..}); #para graficar más de dos funciones

Ejemplo 6.1.1. Gráficos de seno y coseno

> plot([sin(x),cos(x)],x=-Pi..Pi,color=[blue,orange]);



> plot([s =["Sine",



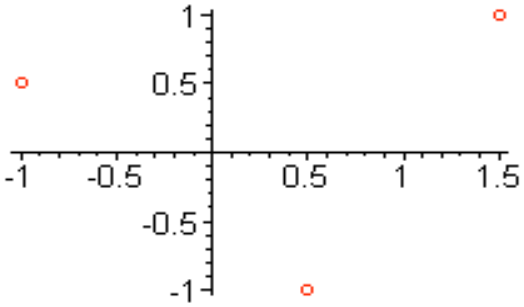
6.2. Gráficos de Figuras Planas y Puntos.

Ejemplo 6.2.1. Dados los puntos A = (-1, 1/2), B = (1/2, -1) y C = (3/2, 1)

i) Representar dichos puntos en un sistema de ejes coordenados.
ii) Dibujar el triángulo delimitado por ellos.
iii) Colorear la región del plano delimitada por dicho triángulo.
iv) Añadir letras a los vértices.
v) Poner título al dibujo

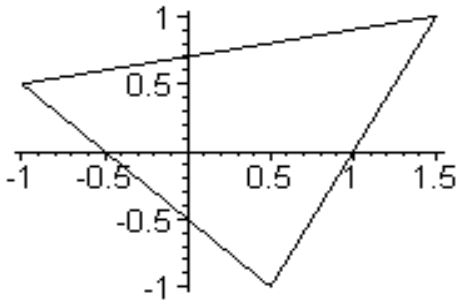
Solución: i) Puntos en el plano.

```
> restart:
> plot([[-1,1/2],[1/2,-1],[3/2,1]],style=point,color=red,symbol=circle);
```



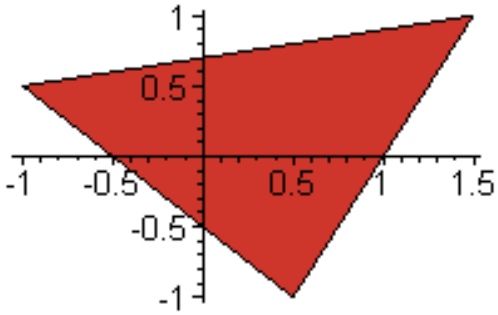
ii) Triángulo formado por los puntos, sin colorear el interior.

```
> with(plots):
> polygonplot([[-1,1/2],[1/2,-1],[3/2,1]]);#contorno del triángulo
```



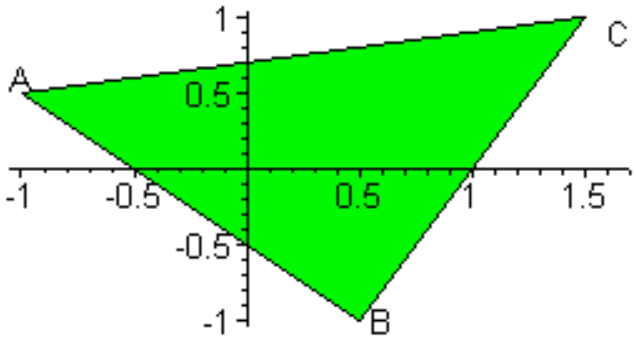
iii) Triángulo coloreado.

```
> polygonplot([[-1,1/2],[1/2,-1],[3/2,1]], color=orange);
```



iv) **Demos nombre a la estructura gráfica anterior para referencia posterior.**

```
> T:=polygonplot([[-1,1/2],[1/2,-1],[3/2,1]], color=green):
> t:=textplot({[-1,0.6,'A'],[0.6,-1.0,'B'],[1.65,0.9,'C']}):
> display({T,t});
```



6.3. Gráficos animados

Comando : animate(F, x, t,...); #crea una animación de gráficos de funciones en 2D.

Parámetros

F : nombre de función.
x : dominio de graicación.
t - rango del parámetro de cada marco de imagen.

Descripción

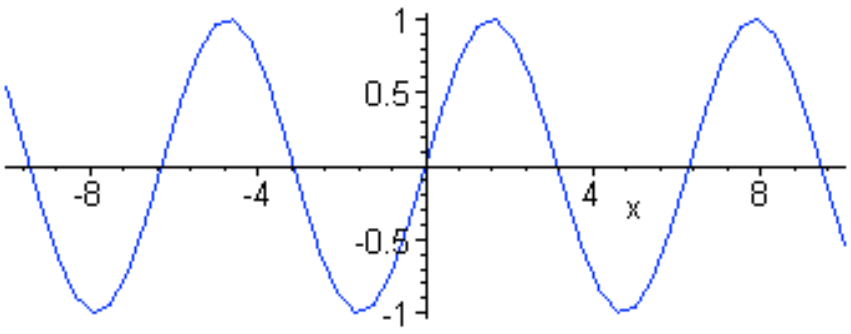
- Una instrucción animate produce una estructura de datos gráficos.
- La variable independiente x y el rango de cada marco definen los ejes sobre los cuales las funciones serán dibujadas.
- Los otros argumento se deben interpretar como opciones de graficos, que se escriben como una ecuación en la forma **option = value**. En particualr la opción **frames** nos permite especificar el número de marcos que se desplegarán en la pantalla, por defecto son 16.

6.4.1 Gráficos animados en coordenadas rectangulares.

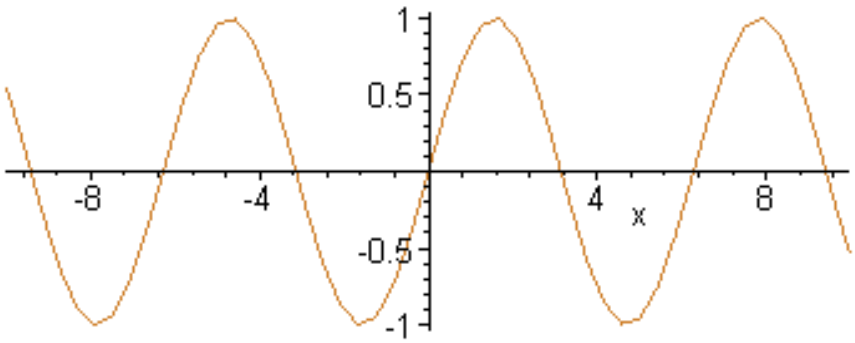
```
> restart:with(plots):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

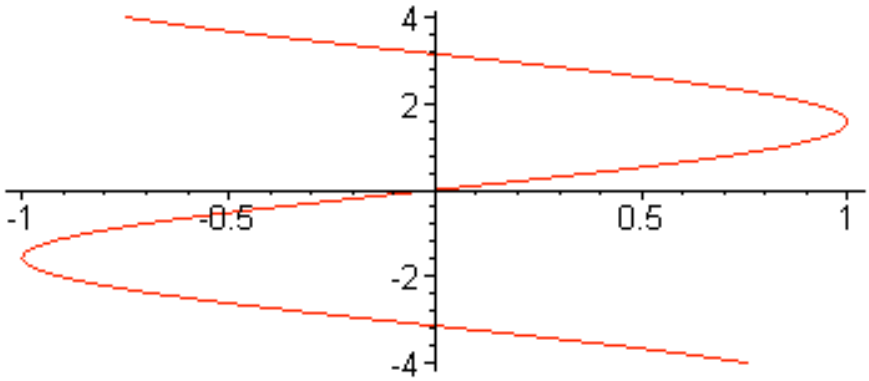
- `animate( sin(x*t),x=-10..10,t=1..2,color=blue);`



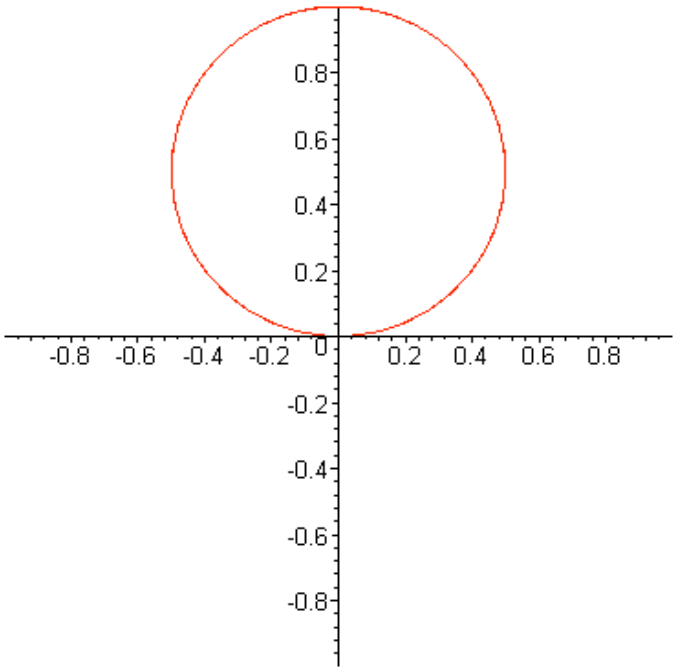
> animate(sin(x*t),x=-10..10,t=1..10,frames=50,color=gold);



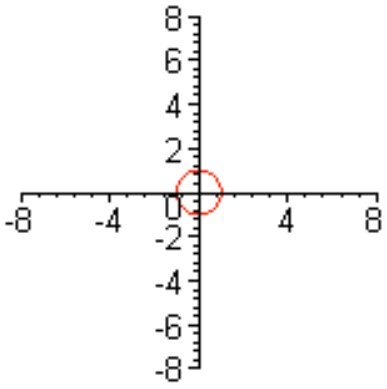
> animate([sin(x*t),x,x=-4..4],t=1..4,numpoints=100,frames=100);



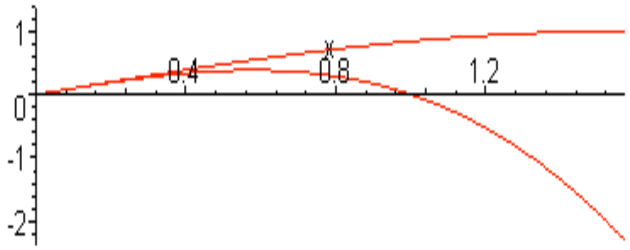
>animate([sin(x*t),x,x=-4..4],t=1..4,coords=polar,numpoints=100,frames=100);



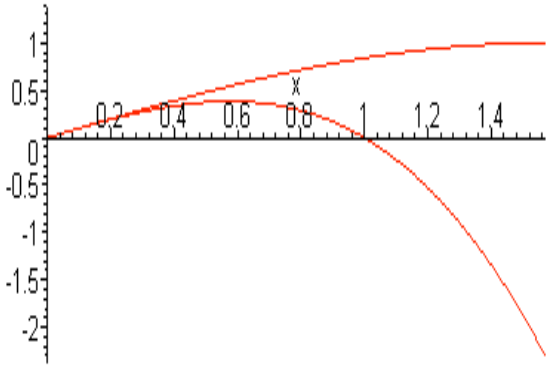
```
> animate(sin(5*x*t),x=-3..3,t=0..1,view=0..1);

>animate([u*sin(t),u*cos(t),t=-Pi..Pi],u=1..8,view=[-8..8,-
        8..8],scaling=constrained);
```




```
> animate( {x-x^3/u,sin(u*x)}, x=0..Pi/2,u=1..16 );
```




```
> animate( {x-x^3/u,sin(u*x)}, x=0..Pi/2,u=1..16 ,color= red);
```



Laboratorio Nº 2

Interpretación de derivada como pendiente de la recta tangente en un punto.

Este laboratorio tiene los siguientes objetivos:

1) Apoyar computacionalmente una de las aplicaciones geométrica de la derivada en un punto, como la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función.

2) Mostrar a través de una animación de cómo va variando la recta tangente si variamos el punto sobre la gráfica. El propósito es mostrar a través de la pantalla la idea de movimiento que no es posible realizar en el aula.

3) Mostrar a través de un ejemplo ilustrativo, cómo integrar los comandos MAPLE, con la metodología de resolución del problema.

4) Ejemplos propuestos a desarrollar por los estudiantes para reforzar el concepto. Pueden trabajarlos en grupo de dos estudiantes.

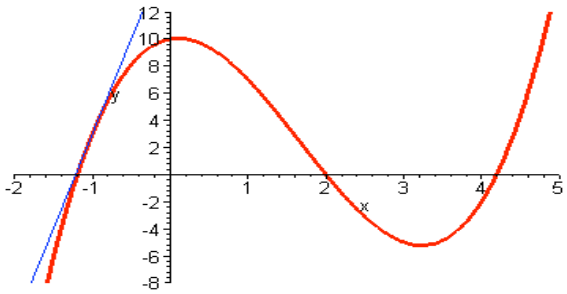
COMANDOS DE INICIO DE TODO PROGRAMA:

1) Animación de la recta tangente.

```
> f:=x->x^3-5*x^2+x+10;
```

$$f := x \to x^3 - 5\,x^2 + x + 10$$

```
> T := (x,a) -> f(a) + (x - a) * D(f)(a) :

> display(plot(f(x), x=-2..5, y=-8..12, thickness = 3, color = red),
      animate(T(x,t), x=-2..5, t=-1..5, view=-8..12, color = blue, frames=60));
```



2) Problema Ilustrativo.
Encontrar la ecuación de la recta tangente en x = 2 a la función f(x) dada y graficar en un mismo gráfico la función y la recta tangente.

f(x) = $3\,x - x^2$

Solución :
i) Definición de la función:

```
> f := x -> 3*x - x^2;
```

$$f := x \to 3\,x - x^2$$

ii) Operaror Diferencial D

> **D(f);**

$$x \to 3 - 2x$$

iii) Definición de la derivada

> **df:= x -> 3 - 2*x;**

$$df := x \to 3 - 2x$$

iv) Valor de la función en x = 2

> **f(2);**

$$2$$

v) Valor de la pendiente de la recta tangente en x = 2

> **df(2);**

$$-1$$

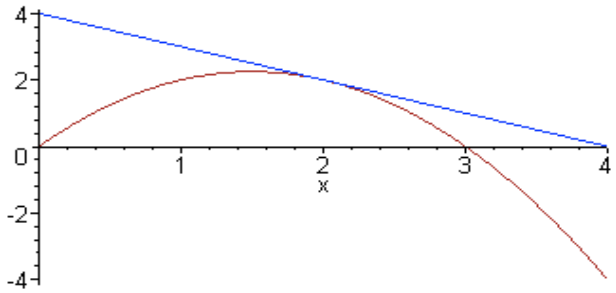
Luego la recta tangente que pasa por el punto (2,2) tiene pendiente -1.

vi) Gráfico de la función la la recta en un mismo gráfico.

> **tl:= x -> 2 -(x - 2);#Ecuación de la recta**

$$tl := x \to 4 - x$$

> **plot({f(x), tl(x)}, x = 0..4, color=[blue,brown]);#gráfico de f y t1**



3) Problemas propuestos al estudiante.

3.1) Encontrar la recta tangente en el punto indicado para cada función dada.

a) x = 1, g(x) = $x^3 - \sqrt{x}$

b) x = π /6, h(x) = $1 + 3\cos(x)$

c) x = 0, f(x) = $\dfrac{3 + x}{1 - x^2}$

3.2) Encuentre la derivada de cada función definida a tramos.

i) g (x) = -2 para x > 0
= 3 - x para x <= 0

ii) f(x) = x^2 para x < 1
= $2x - 1$ for x >= 1

iii) f(x) = x^3 para x < -1
= $1 + 2x^2$ para -1 <= x < 2

= $4x + 1$ para x >= 2

Solución a) En estos problemas en que las funciones son definidas a tramos se ilustrará el procedimiento y comando usado para el problema i).

- Comando que limpia memorias

```
> restart:#comando que limpia memorias
```

- Sentencia para definir funciones a tramos.

```
> g:= x -> piecewise(x > 0, -2, 3 - x);#sentencia que define función
```

$$g := x \rightarrow \text{piecewise}(0 < x, -2, 3 - x)$$

- Operador Diferencial.

```
> D(g);
```

$$x \rightarrow \text{piecewise}(x < 0, -1, x = 0, \mathit{undefined}, 0 < x, 0)$$

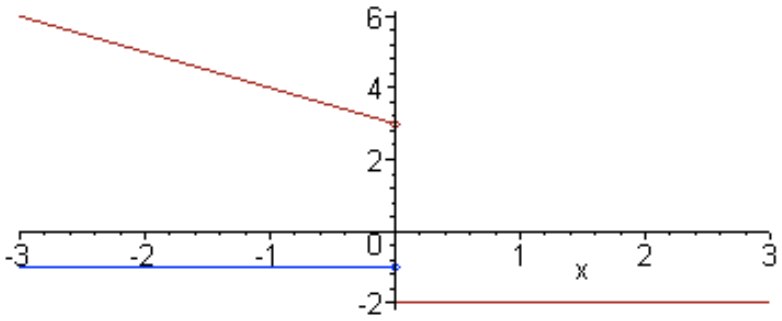
- Asignación de nombre a la función derivada.

```
> dg:= x -> piecewise(x > 0, 0, -1);
```

$$dg := x \rightarrow \text{piecewise}(0 < x, 0, -1)$$

- Comando para graficar en un mismo gráfico.

```
> plot({g(x),dg(x)}, x = -3..3, discont=true, color=[blue, brown]);
```



- **Conclusión : Del grafico , podemos observar que g(x), tiene derivada en cada punto excepto en x = 0.**

Laboratotio Nº 3

Aplicaciones de la derivada a :

Problemas de razón de cambio, variables relacionadas .

Este laboratorio, se ha estructurado de la siguiente forma:
1) Comandos e instrucciones que se requieren para resolver este tipo de problemas.
2) Problema Modelo.
3) Problemas propuestos para los estudiantes.

1.-Comandos, instrucciones

Instrucciones necesarias :

*** Diff(f,x) : escribe la notación que usa Maple V para representar la derivada de la función " f " con respecto a la variable " x ".**
*** diff(f,x) : determina la derivada de la función " f " con respecto a la variable " x ".**
*** diff(f,x,x) o diff(f,x$2) : determina la segunda derivada de la función " f " con respecto a " x ".**
*** diff(f,x,x,x) o diff(f,x$3) : determina la tercera derivada de " f " con respecto a " x " .**

1) Para trabajar algunos conceptos de Cálculo se requiere la biblioteca para estudiantes que trae MapleV , luego escribimos :

```
> restart:
> with(student):
```

2) Describimos dos formas de determinar la derivada de una función, para ello trabajaremos con un ejemplo concreto.

2.1. Sea f(x) la función

```
> fx:=3*x^3-4*x^2+5*x-6;
```

$$fx := 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

su derivada que llamaremos fp es :

```
> fp:=diff(fx,x);
```

$$fp := 9x^2 - 8x + 5$$

si deseamos evaluar la función y su derivada en x=2, debemos escribir :

```
> subs(x=2,fx);subs(x=2,fp);
```

$$12$$

$$25$$

Si queremos averiguar como denota la derivada Maple V, tipeamos :

```
> Diff(fx,x);
```

$$\frac{d}{dx}(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6)$$

A continuación se describe otra forma de realizar este mismo cálculo.

> **gx:=x->3*x^3-4*x^2+5*x-6;**

$$gx := x \to 3\,x^3 - 4\,x^2 + 5\,x - 6$$

> **gp:=diff(gx(x),x);**

$$gp := 9\,x^2 - 8\,x + 5$$

> **gx(2);subs(x=2,gp);**

$$12$$

$$25$$

Para ilustrar el uso de estos comandos y otros ya vistos en laboratorios anteriores, en la resolución de problemas de razón de cambio, se usará como modelo un ejemplo resuelto en el texto, Swokowski pág. 148.

2.- Problema Resuelto.

Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular recto invertido, de 12 pie de alto y 6 pie de radio de la base . Si se suministra agua al tanque a razón de 10 galones por minuto (gal/min), ¿Cuál será la razón de cambio del nivel del agua cuando la profundidad es de 3 pie (1 gal= 0.1337 pie cúbico).

Representamos por :
r =r(t) : radio del cono en el instánte t.
h =h(t) : altura del cono en el instánte t.
r=6 y h= 12 son los valores del radio y la altura del depósito cónico.
V = V(t) Volumen cónico de agua en el instante t.

Paso 2 : Razones de cambio conocidas y razones de cambio requeridas.

> **Diff(V,x):=10*0.1337;**

$$\frac{\partial}{\partial x} V := 1.3370$$

> **Diff(h,x)(h=3)=x;**

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)(h = 3) = x$$

Paso 3 : Ecuación que relaciona las variables.

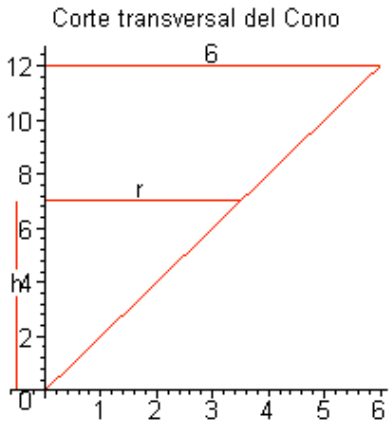
Es la fórmula del volumen de agua que corresponde a una profundidad h .

> **V=(Pi*r^2*h)/3;**

$$V = \frac{\pi\, r^2\, h}{3}$$

Como V esta definido en términos de variables h y r , debemos buscar una relación entre r y h de modo de escribir una en función de la otra y así expresar V en términos de una de ellas.
Un corte transversal de la figura permite relacionar triangulos semejantes.
Las instrucciones que vienen a continuación permiten graficar dicho corte.

```
> with(plots):
> p:=plot([[0,0],[0,12],[6,12],[4,8],[0,0],[0,7],[3.5,7]],title="Corte transversal del Cono"):
> p1:=plot([[-0.5,0],[-0.5,3.5]]):
> p2:=plot([[-0.5,4.5],[-0.5,7]]):
> t1 := textplot([3,12.5,`6`]):

> t2 := textplot([1.7,7.5,`r`]):

> t3 := textplot([-0.5,4,`h`]):

> display({p,p1,p2,t1,t2,t3});
```



De la figura deducimos

```
> r/h=6/12;
```

$$\frac{r}{h}=\frac{1}{2}$$

o bien despejando.

```
> r:=h/2;
```

$$r := \frac{h}{2}$$

reemplazamos r en la fórmula del volumen

```
> V:=(Pi*r^2*h)/3;
```

$$V := \frac{\pi h^3}{12}$$

Paso 4 : Derivamos implícitamente con respecto a t .

Usamos la regla de la cadena. Observése que haremos un cambio de variables en lugar de V usaremos Vol.

```
> Diff(Vol,t)=Diff(V,h)*Diff(h,t);
```

$$\frac{\partial}{\partial t} Vol = \left(\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} h\right)$$

luego

> **Diff(Vol,t)=diff(V,h)*Diff(h,t);**

$$\frac{\partial}{\partial t} Vol = \frac{1}{4}\pi h^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} h\right)$$

Como la razón de cambio del volumen respecto del tiempo es 13.370 (pie cubico/min)

> **Diff(h,t):=1.3370/diff(V,h);**

$$\frac{\partial}{\partial t} h := \frac{5.3480}{\pi h^2}$$

Paso 5 : Reemplazo de los datos conocidos en el instánte en que h=3 pie.

> **val:=subs(h=3,%);**
>
>

$$val := \frac{0.5942222222}{\pi}$$

> **Diff(h,t):=evalf(val);**

$$\frac{\partial}{\partial t} h := 0.1891468079$$

Respuesta: La razón de cambio del nivel agua cuando la profundidad es de 3 pie es 0.1891 (pie cúbico / min).

Problemas Propuestos :

I. Razón de cambio.

1. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 120 m/seg. Su altura sobre el suelo, t segundos después está dada por .

$$s(t) = -4.9\, t^2 + 120\, t$$

i) Calcular el tiempo en el que proyectil llegará al suelo de regreso y su velocidad en ese momento.

ii) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil? ¿Cuál es la aceleración en cualquier instante?

2.-Suponga que el pulso de un individuo (en latidos/min) a los t segundos de haber comenzado a correr, está dado por , para .

$$0 \le t, t \le 7$$

$$P(t) = 56 + 2\, t^2 - t$$

Calcule la razón de cambio de P(t) con respecto a t en
i) t=2

ii) t=5

3.- Una población de mosca crece en un recipiente grande. El número de moscas P (en cientos) a las t semanas está dado por .

$$P(t) = 12\ t^2 - t^4 + 5$$

i) ¿Cuándo deja de crecer la población?
ii) ¿ En qué intervalos de tiempo es positiva o negativa la razón de crecimiento de la población?

4.- La relación entre la temperatura F en la escala Fahrenheit y la temperatura C en la escala Celsius está dada por . ¿Cuál es la razón de cambio de F con respecto a C?

$$C = \frac{5\,(F - 32)}{9}$$

5.- Sea C la función costo de un producto farmacéutico.
i) Calcule el costo de producción de 100 unidades
ii) Encuentre las funciones de costo medio y marginal , obteniendo sus valores en x=100.
para las funciones

a) $C(x) = 800 + .4e\text{-}1\ x + .2e\text{-}3\ x^2$

b) $C(x) = 250 + 100\ x + .1e\text{-}2\ x$

II Razón de cambio con variables relacionadas.

1.- El área de un triángulo equilátero disminuye a razón de 4 cm^2/min. Calcule la rapidez de variación de la longitud de sus lados en el momento que el área del triángulo es de 200 cm^2.

2.- El gas contenido en un globo esférico escapa a razón de 10 lt/hr. ¿ A razón de cuántos cm/hr disminuye el radio del globo en el momento en que el volumen es de 400 lts?

3.-Se lanza una piedra a un lago y produce ondas circulares cuyos radios crecen a razón de 0.5 m/seg. ¿A razón de cuántos m/seg aumenta el perímetro de una onda cuando su radio mide 4 m ?

4.-La arena que escurre por un agujero de un recipiente forma un montículo cónico cuya altura es igual al radio de su base. Cuando la altura del montículo es de 25 cm, aumenta a razón de 15 cm/min . Calcule el volumen de arena que sale del agujero por minuto cuando la altura es de 35 cm.

5.- Una barra de metal tiene la forma de un cilindro circular recto. Cuando se calienta, su longitud y su diámetro aumentan a razón de 0.005 cm/min y 0.002 cm/min, respectivamente. ¿ A razón de cuántos centímetros cúbicos por minuto aumenta el volumen de la barra en el momento en que mide 40 cm de largo y 3 cm de diámetro ?

Laboratorio Nº 4

Problemas de Maximización y Minimización

Este Laboratorio tiene por objetivos:

1) Mostrar que los problemas de optimización pueden resolverse con apoyo computacional. Se ilustra la metodología con un ejemplo clásico.

2) Los comandos que se utilizan, ya han sido usado antes.

3) Reforzar la resolución de problemas de optimización en el aula.

4) Incentivar la creatividad en la graficación de situaciones usando software.

```
> restart: with(plots): with(plottools):
```

Ejemplo 1

Una ventana de tipo Norman consiste en un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de una ventana Norman es de 3.5 metros, determine cuánto debe medir el radio del semicírculo y la altura del rectángulo de modo que la ventana admita la mayor cantidad de luz.

El siguiente es un ejemplo de ventana de tipo Norman:

```
>v1:=polygonplot([[0,0],[1,0],[1,3/2],[0,3/2]],color=COLOR(RGB,0.95,0.95,0.95)):
> v2:=arc([1/2,3/2],1/2,0..Pi):
> display(v1,v2,axes=none,scaling=constrained);
```

Para maximizar la cantidad de luz que entra por la ventana debemos maximizar su área.

Denotemos por r el radio del semicírculo, a el largo de la base del rectángulo y b su altura. El radio del semicírculo debe ser la mitad de la base del rectángulo y por lo tanto:

$$r = \frac{a}{2}$$

El perímetro de la ventana es $P = a + 2\,b + \pi\,r$ **, y reemplazando lo anterior,** $P = a + 2\,b + \frac{\pi\,a}{2}$ **Como el perímetro debe ser 32, se tiene lo siguiente:**

```
> solve(a+2*b+Pi*a/2=32,b);
```

$$-\frac{1}{2}\,a - \frac{1}{4}\,\pi\,a + 16$$

Es decir,

$$b = -\frac{a}{2} - \frac{\pi a}{4} + 16$$

El área de la ventana es $A=ab+\pi a^2/8$. **Reemplazando los valores para b y r en función de a podemos definir una función que a cada valor de a le asocia el área de la ventana:**

```
> area:=a->a*(-a/2-Pi*a/4+16)+Pi*(a/2)^2/2;
```

Para maximizar el área, debemos encontrar los puntos críticos de la función *area*:

```
> sol:=solve(D(area)(a)=0,a);
```

$$sol := \frac{64}{4+\pi}$$

Debemos chequear que la solución corresponde realmente a un máximo:

```
> D(D(area))(sol);
```

$$-1 - \frac{\pi}{4}$$

Como la segunda derivada es negativa en la solución, se concluye que el punto es un máximo. Luego la solución es:

```
> a:=sol; b:=simplify(-a/2-Pi*a/4+16); r:=a/2;
```

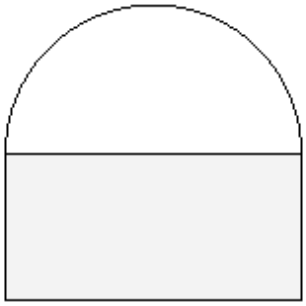
$$a := \frac{64}{4+\pi}$$

$$area := a \to a\left(-\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\pi a + 16\right) + \frac{1}{8}\pi a^2$$

$$b := \frac{32}{4+\pi}$$

Grafiquemos la ventana resultante:

```
>
        v1:=polygonplot([[0,0],[a,0],[a,b],[0,b]],color=COLOR(RGB,0.95,0.9
        5,0.95)):
> v2:=arc([r,b],r,0..Pi):
> display(v1,v2,axes=none,scaling=constrained)
```



Ejemplo 2

Considere un cilindro circular inscrito en una esfera de radio r***. Encuentre la superficie máxima que puede tener uno de estos cilindros.***

El siguiente es un diagrama de la situación:

```
> restart:with(plots):
> r:=1: h:=1.2*r:
cyl:=cylinder([0,0,-h/2],sqrt(r^2-h^2/4),h,shading=xyz,style=patchnogrid):
ball:=sphere([0,0,0],r,color=gray):
display([cyl,ball],scaling=constrained,style=wireframe,orientation=[45,74])
    ;
```

Para resolver el problema, definamos las siguientes variables:

r = radio de la esfera
a = radio de la base del cilindro
b = la mitad de la altura del cilindro
SA = superficie del cilindro.

El radio r está fijo en el problema. Debemos buscar los valores de a y b que maximicen la superficie del cilindro, pero que al mismo tiempo satisfagan que el cilindro quede inscrito en la esfera.

La superficie del cilindro queda dada por

SA = 2 (área de la base) + (área del manto) = $2\,\pi\,a^2 + 2\,\pi\,a\,2\,b$ = $2\,\pi\,a^2 + 4\,\pi\,a\,b$

Por otro lado se puede establecer la siguiente relación entre a y b, que

asegura que el cilindro quede inscrito en la esfera (ver la figura a continuación):

$$a^2 + b^2 = r^2$$

```
> r:=1: h:=1.2*r:
cyl:=cylinder([0,0,-h/2],sqrt(r^2-h^2/4),h,shading=z,style=line):
rad:=line([0,0,0],[3^(-1/2),3^(-1/2),3^(-1/2)],color=black,thickness=3):
alt:=line([0,0,0],[0,0,h/2],color=black,thickness=3):
bas:=line([0,0,h/2],[3^(-1/2),3^(-1/2),h/2],color=black,thickness=3):
t1:=textplot3d([-1/8,0,h/4,"b"],color=black):
t2:=textplot3d([1/4,1/4,1/8,"r"],color=black):
t3:=textplot3d([0,1/2,h/2,"a"],color=black):
display(cyl,rad,alt,bas,t1,t2,t3,scaling=constrained,style=wireframe,orient
    ation=[-30,80]);
```

Así, usando, $a^2 = r^2 - b^2$ obtenemos

.

$$\mathrm{SA}(b) = 2\,\pi(r^2 - b^2) + 4\,\pi\sqrt{r^2 - b^2}\,b$$

Recordemos que en nuestro problema el radio r está fijo, por lo que la superficie sólo depende de b. Queremos encontrar un máximo para SA. Definamos la fórmula para SA:

```
> unassign('r'):
SA:=2*Pi*(r^2-b^2)+4*Pi*sqrt(r^2-b^2)*b;
```

$$SA := 2\,\pi\,(r^2 - b^2) + 4\,\pi\sqrt{r^2 - b^2}\,b$$

La derivada de SA es:

> **diff(SA,b);**

$$-4\,\pi\,b - \frac{4\,\pi\,b^2}{\sqrt{r^2-b^2}} + 4\,\pi\,\sqrt{r^2-b^2}$$

Esta expresión se puede simplificar:

> **dSA:=simplify(diff(SA,b));**

$$dSA := \frac{4\,\pi\,(-b\,\sqrt{r^2-b^2} - 2\,b^2 + r^2)}{\sqrt{r^2-b^2}}$$

El problema de maximización se resuelve encontrando el valor para b que hace cero a la expresión anterior. Luego basta con encontrar el valor de b que hace cero al numerador de la expresión.

> **solns:=solve(numer(dSA)=0,b);**

$$solns := \frac{\sqrt{50-10\,\sqrt{5}}\;r}{10}, -\frac{\sqrt{50-10\,\sqrt{5}}\;r}{10}, -\frac{\sqrt{50+10\,\sqrt{5}}\;r}{10}, \frac{\sqrt{50+10\,\sqrt{5}}\;r}{10}$$

Debemos ahora chequear cuál es la solución correcta. Evidentemente no nos interesan soluciones negativas. Al resolver la ecuación, Maple elevó al cuadrado (debido a la raíz que aparece en el numerador), por lo que hay que chequear si las soluciones que entrega realmente satisfacen la ecuación. Probemos con la solución :

$$\frac{\sqrt{50+10\,\sqrt{5}}\;r}{10}$$

> **sol:=evalf(1/10*(50+10*5^(1/2))^(1/2)*r):**
simplify((subs(b=sol,numer(dSA))),symbolic);

$$-11.23970356\,r^2$$

Claramente esta solución no anula el numerador. Probemos con la solución :

$$\frac{\sqrt{50-10\,\sqrt{5}}\;r}{10}$$

> **sol:=evalf(1/10*(50-10*5^(1/2))^(1/2)*r):**
simplify((subs(b=sol,numer(dSA))),symbolic);

$$-0.1256637062\;10^{-8}\,r^2$$

En este caso el valor que se obtiene es casi cero (no es exacto debido a errores en las aproximaciones numéricas). Concluimos que ésta es la solución que buscamos:

> **sol:=1/10*(50-10*5^(1/2))^(1/2)*r;**

$$sol := \frac{\sqrt{50-10\,\sqrt{5}}\;r}{10}$$

Debemos ahora chequear que nuestra solución corresponda realmente a un máximo. Para ello debemos examinar SA":

```
> d2SA:=simplify(diff(SA,b,b));
```

$$d2SA := -\frac{4\,\pi\,(\sqrt{r^2-b^2}\,r^2-\sqrt{r^2-b^2}\,b^2-2\,b^3+3\,b\,r^2)}{(r^2-b^2)^{(3/2)}}$$

```
> solf:=evalf(sol):
simplify(subs(b=solf,d2SA),symbolic);
```

$$-38.83222080$$

Vemos que SA" es negativo en la solución, y luego SA tiene un máximo allí. Una aproximación numérica de la solución es:

```
> solf;
```

$$0.5257311122\,r$$

Reemplazando la solución en la expresión para la superficie se obtiene la superficie máxima:

```
> simplify(subs(b=sol,SA),symbolic);
```

$$\pi\,r^2+\frac{\pi\,r^2\sqrt{5}}{5}+\frac{\pi\sqrt{5}\,\sqrt{2}\,r^2\sqrt{5+\sqrt{5}}\,\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{25}$$

La superficie máxima es aproximadamente:

```
> evalf(%);
```

$$10.16640738\,r^2$$

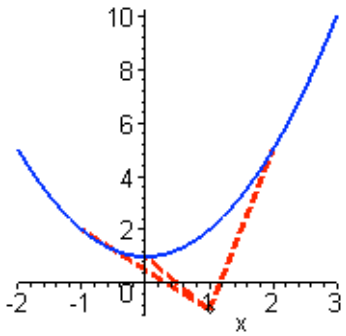
Gráficamente, el cilindro inscrito a la esfera con superficie máxima es:

Ejercicio 1.

Encuentre la distancia mínima de un punto en la curva $y=x^2+1$ *al punto* $(1,-1)$. *¿Hay algún punto donde la distancia sea máxima? De ser así, encuéntrelo.*

Este es un diagrama de la situación:

```
> with(plots): with(plottools):
> f2:=x->x^2+1:
> a2:=plot(f2(x),x=-2..3,color=blue,thickness=2):
> b2:=line([1,-1],[0,f2(0)],color=red,linestyle=3,thickness=3):
> c2:=line([1,-1],[2,f2(2)],color=red,linestyle=3,thickness=3):
> d2:=line([1,-1],[-1,f2(-1)],color=red,linestyle=3,thickness=3):
> p2:=pointplot([1,-1]):
> display(a2,b2,c2,d2,p2);
```



¿Existe un punto cuya distancia a $(1, -1)$ sea máxima?
Para buscar el punto a distancia mínima se sugiere lo siguiente.
Los puntos que están sobre la parábola son de la forma $(x, x^2 + 1)$. Defina una función que represente, para cada x, la distancia entre (1,-1) y el punto correspondiente a x. Puede ser más cómodo trabajar con el cuadrado de la distancia (¿por qué se puede hacer esto?). Luego resuelva la ecuación que permite buscar el mínimo. Finalmente justifique por qué el punto encontrado corresponde al mínimo.

Indicación:
Una función se define de la siguiente forma:
> **fEj:=x->x^2;**

$$fEj := x \to x^2$$

Su derivada se obtiene así:
> **dfEj:=D(fEj);**

$$dfEj := x \to 2\,x$$

Las funciones se utilizan de la forma usual:
> **fEj(x);**

$$x^2$$

> **fEj(1);**

$$1$$

> **dfEj(1);**

$$2$$

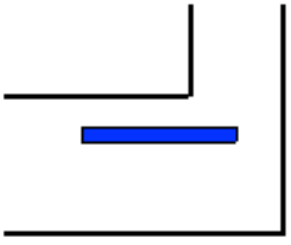
Para resolver una ecuación se ejecuta:
> **solve(x=x^2+3*x,x);**
>
$$0, -2$$

A continuación resuelva el problema.

Ejemplo 3

Una tubería de acero está siendo trasladada a lo largo de un pasillo de 9 metros de ancho. Al final del pasillo hay una esquina en ángulo recto que da a un pasillo más angosto, de 6 metros de ancho. ¿Cuál es el largo de la tubería más larga que puede pasarse por la esquina horizontalmente

La siguiente figura mues

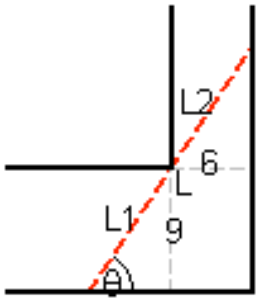


> **L1:=line([0,0],[18,0],tl**
L2:=line([0,9],[12,9],thi
L3:=line([12,9],[12,15],t
L4:=line([18,0],[18,15],t
bar:=rectangle([5,6],[15
display([L1,L2,L3,L4,ba **ained);**

Aunque éste sea un problema de maximización, lo resolveremos encontrando un mínimo.
Denotemos por θ al ángulo que forma la tubería con respecto al eje horizontal. Para hacer pasar la tubería por la esquina, se debe hacer pasar θ de 0 a $\pi/2$.
Denotemos por $L(\theta)$ al largo del segmento que va desde la pared inferior a la pared de la derecha, pasando por la esquina con ángulo θ (ver la figura a continuación).

> **L1:=line([0,0],[18,0],thickness=2): L2:=line([0,9],[12,9],thickness=2):**
L3:=line([12,9],[12,21],thickness=2): L4:=line([18,0],[18,21],thickness=2):

```
lr1:=line([12,0],[12,9],linestyle=3,color=gray):
lr2:=line([12,9],[18,9],linestyle=3,color=gray):
seg:=line([6,0],[18,18],color=red,linestyle=3,thickness=2):
t1:=textplot([[13,8,"L"],[8.5,5.5,"L1"],[14,14,"L2"],
                        [12.5,4.5,"9"],[15,9.5,"6"]]):
t2:=textplot([7,0.8,"q"],align=RIGHT,font=[SYMBOL]):
an:=arc([6,0],3.2,0..1):
display(L1,L2,L3,L4,lr1,lr2,t1,t2,an,seg,axes=none,scaling=constrained);
```



Para, $\theta = 0$ L se hace infinito, y lo mismo pasa para $\theta = \pi / 2$. Buscaremos aquél ángulo que haga a L mínimo. Una tubería de ése largo pasará justo por la esquina, y será la tubería más larga que puede pasar por allí.

A continuación deduciremos una forma explícita para la función $L(\theta)$ Para ello conviene separar el segmento en rojo en dos partes. La primera va desde la pared inferior hasta la esquina, y su largo cumple

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{L1}{9}$$

La segunda va desde la esquina a la pared de la derecha y su largo cumple

$$\cos(\theta) = \frac{L2}{6}$$

Despejando y sumando se obtiene:

$$L = \frac{9}{\operatorname{sen}(\theta)} + \frac{6}{\cos(\theta)} = 9\,\operatorname{cosec}(\theta) + 6\,\sec(\theta)$$

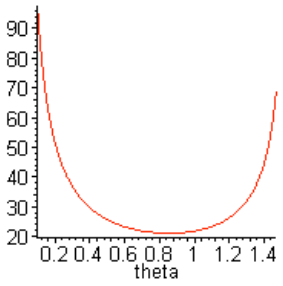
Definamos la función correspondiente:

> **L:=theta->9*csc(theta)+6*sec(theta);**

$$L := \theta \rightarrow 9\csc(\theta) + 6\sec(\theta)$$

Grafiquemos la función L para ver cómo se ve (recordemos que L no está definida en 0 ni en $\pi / 2$, por lo que la graficamos fuera de esos puntos):

> **plot(L(theta),theta=0.1..Pi/2-0.1);**



D(L) nos entrega la derivada de L:

```
> D(L);
```

$$\theta \rightarrow -9\csc(\theta)\cot(\theta) + 6\sec(\theta)\tan(\theta)$$

Para encontrar un mínimo, resolvemos la ecuación $D(L)(\theta) = 0$. Como la ecuación no tiene soluciones "simples", conviene resolverla numéricamente. Para ello usamos el comando *fsolve*. Además le decimos a Maple que busque soluciones entre 0 y $\pi/2$.

```
> sol:=fsolve(D(L)(theta)=0,theta=0..Pi/2);
```

$$sol := 0.8527708776$$

En el gráfico se aprecia que $.8527708776$ es un punto de mínimo, pero chequeémoslo mediante la segunda derivada, que debiera ser positiva en el punto correspondiente a la solución:

```
> D(D(L))(sol);
```

$$63.21134143$$

Finalmente, el largo que buscamos es: $L(.8527708776)$

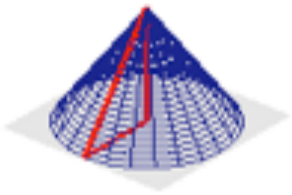
```
> L(sol);
```

$$21.07044714$$

Luego la tubería más larga que puede pasar por la esquina es una de (aproximadamente) 21.07044714 metros de largo.

Ejercicio 2

Un cono se forma de la revolución de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 3 centímetros (como en la figura a continuación).



```
> c:=cone([0,0,4],sqrt(8),-4,color=navy):
t:=pointplot3d([[0,0,0],[sqrt(8),0,0],[0,0,4],[0,0,0]],connect=true,
    color=red,thickness=3):
ground:=plot3d(0,x=-3..3,y=-
    3..3,color=COLOR(RGB,0.9,0.9,0.9),grid=[5,10],style=patchnogrid):
display([c,t,ground],scaling=constrained,style=wireframe,orientation=[40,
    60]);
```

¿Cuál es el volumen del cono más grande que puede ser formado de esta manera?

Se sugiere proceder de la siguiente manera.

Sea a el largo de la base del triángulo, y b su altura.

1. Encuentre una expresión para el volumen del cono en términos de a y b. Recuerde que el volumen de un cono está dado por

.

$$\frac{\pi\, radio^2\, altura}{3}$$

2. Encuentre una relación entre a y b, sabiendo que la hipotenusa del triángulo mide 3 cms.
3. Defina una función V, que dado a, entregue el volumen del cono.
4. Grafique la función V para tener una idea de lo que está manipulando.
5. Resuelva la ecuación que permite encontrar los puntos críticos de V.
6. Elija, de entre las soluciones, la que tenga sentido y parezca corresponder a un mínimo, y compruebe que ese punto es un mínimo.
7. Obtenga, a partir de la solución, el volumen del cono más grande posible.
8. (Bonus) Grafique el cono de volumen máximo. (Puede basarse en como se graficó el cono al comienzo).

Referencias

Los ejemplos y ejercicios están basados en ejemplos que aparecen en tres actividades para Maple sobre maximización y minimización, disponibles en http://www.mapleapps.com.

ANEXO 3: ENCUESTA DE DIAGNÓSTICO

1. Encuesta de Diagnóstico de Juan Ignacio.
2. Encuesta de Diagnóstico de Daniela
3. Encuesta de Diagnóstico de Lola
4. Encuesta de Diagnóstico de Nancy

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas
Área de Matemáticas

ENCUESTA DE OPINION

I. ANTECEDENTES PERSONALES

Procura que tus respuestas sean directas y espontáneas, sin preocuparte demasiado por ninguna en particular. Tus respuestas se guardarán en estricta reserva, y te advertimos que no hay respuestas "correctas".

Nombre Juan Ignacio

Edad: 22

Sexo: M

Carrera: I. A.

1. Marca con una X la casilla correspondiente a tu respuesta

1.1. Colegio de procedencia año 2003: 1999 Liceo de APLICACION

Particular ☐ Particular Subvencionado ☐ Municipalizado ☒

• Si egresaste anteriormente al año 2003, de que centro de estudios superiores procedes: U.CHILE FCFM

1.2 Puntaje PSU (Matemática): 750 +-

1.3 Puntaje Prueba de Ciencias: 593

- ¿Qué módulo electivo de la prueba de Ciencias elegiste?

  Biología ☐ Física ☒ Química ☐

II. ANTECEDENTES DE CONOCIMIENTOS

2.1 Durante la Enseñanza Media, estudiastes el concepto de Derivada

Si ☐ No ☒

2.2 Si tu respuesta es afirmativa, ¿conoces algunas aplicaciones de la derivada?

Si ☐ No ☐

Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es?:

2.3 ¿Conoces la ecuación que modela el crecimiento de una población de bacterias?

Si ☐ No ☑

Si tu respuesta es afirmativa ¿cuál es?:.....

2.4 Durante la Enseñanza Media, estudiastes el concepto de Integral

Si ☐ No ☒

Si tu respuesta es afirmativa, ¿conoces algunas aplicaciones de la Integral?

Si ☐ No ☒

Si tu respuesta es afirmativa ¿cuál es?:.....

III. ANTECEDENTES DE LA METODOLOGÍA

En la siguiente sección se trata de conocer tu opinión acerca de las características generales de la metodología en Matemáticas. Marca con una X el casillero correspondiente a los conceptos según tu percepción personal.

Casi Siempre : CS
Con Frecuencia : CF
A Veces : AV
Casi Nunca : CN

	CS	CF	AV	CN
3.1 Tuvistes la oportunidad de trabajar en las clases grupalmente.				X
3.2 Piensas que al trabajar en un grupo se benefician todas las personas que lo conforman.		X		
3.3 Aunque no hayas tenido la experiencia, crées que el trabajar en grupo tú aprendizaje sería mas eficiente	X			
3.4 ¿Crées que al trabajar con otras personas, sería para ti mas difícil?. ¿Porqué?. DEPENDE de lo encontrado q' nosotros.			X	
3.5 ¿Te gusta trabajar con otras personas?.			X	

IV. ANTECEDENTES INFORMATICOS

	CS	CF	AV	CN
4.1 Te brindaron la oportunidad de trabajar directamente con los computadores en tus actividades de aprendizaje.				X
4.2 Te permitieron desenvolverte como usuario autónomo en una variada gama de aplicaciones computacionales relacionadas con la asignatura de Matemáticas.				X
4.3 Desarrollaste algunos contenidos con apoyo computacional.				X
4.4 Te motivaron a realizar exposiciones de temas de interés con herramientas informáticas.				X
4.5 Utilizastes algún software específico de Matemáticas.				X
4.6 Promovieron la utilización de redes de comunicación para buscar, seleccionar y procesar información desde lugares remotos.			X	

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas
Área de Matemáticas

Daniela

ENCUESTA DE OPINION

I. ANTECEDENTES PERSONALES

Procura que tus respuestas sean directas y espontáneas, sin preocuparte demasiado por ninguna en particular. Tus respuestas se guardarán en estricta reserva, y te advertimos que no hay respuestas "correctas"

Nombre: Daniela

Edad: 19 AÑOS

Sexo: FEMENINO

Carrera: QUIM. EN ALIMENTOS

1. Marca con una X la casilla correspondiente a tu respuesta

1.1. Colegio de procedencia año 2003: SAN PATRICIO SCHOOL

Particular ☐ Particular Subvencionado ☒ Municipalizado ☐

• Si egresaste anteriormente al año 2003, de que centro de estudios superiores procedes:.....

1.2 Puntaje PSU (Matemática): 614

1.3 Puntaje Prueba de Ciencias: 594

- ¿Qué módulo electivo de la prueba de Ciencias elegiste?

Biología ☒ Física ☐ Química ☐

II. ANTECEDENTES DE CONOCIMIENTOS

2.1 Durante la Enseñanza Media, estudiastes el concepto de Derivada

Si ☐ No ☒

2.2 Si tu respuesta es afirmativa, ¿conoces algunas aplicaciones de la derivada?

Si ☐ No ☐

Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es?:.....

2.3 ¿Conoces la ecuación que modela el crecimiento de una población de bacterias?

Si ☐ No ☐

Si tu respuesta es afirmativa ¿cuál es?:.....

2.4 Durante la Enseñanza Media, estudiastes el concepto de Integral

Si ☐ No ☒

Si tu respuesta es afirmativa, ¿conoces algunas aplicaciones de la Integral?

Si ☐ No ☐

Si tu respuesta es afirmativa ¿cuál es?:.....

III. ANTECEDENTES DE LA METODOLOGÍA

En la siguiente sección se trata de conocer tu opinión acerca de las características generales de la metodología en Matemáticas. Marca con una X el casillero correspondiente a los conceptos según tu percepción personal.

Casi Siempre : CS
Con Frecuencia : CF
A Veces : AV
Casi Nunca : CN

	CS	CF	AV	CN
3.1 Tuvistes la oportunidad de trabajar en las clases grupalmente.		X		
3.2 Piensas que al trabajar en un grupo se benefician todas las personas que lo conforman.			X	
3.3 Aunque no hayas tenido la experiencia, crées que el trabajar en grupo tú aprendizaje seria mas eficiente.		X		
3.4 ¿Crées que al trabajar con otras personas, seria para ti mas difícil?. ¿Porqué?.				X
3.5 ¿Te gusta trabajar con otras personas?.		X		

IV. ANTECEDENTES INFORMATICOS

	CS	CF	AV	CN
4.1 Te brindaron la oportunidad de trabajar directamente con los computadores en tus actividades de aprendizaje.				X
4.2 Te permitieron desenvolverte como usuario autónomo en una variada gama de aplicaciones computacionales relacionadas con la asignatura de Matemáticas.				X
4.3 Desarrollaste algunos contenidos con apoyo computacional.			X	
4.4 Te motivaron a realizar exposiciones de temas de interés con herramientas informáticas.				X
4.5 Utilizastes algún software específico de Matemáticas.				X
4.6 Promovieron la utilización de redes de comunicación para buscar, seleccionar y procesar información desde lugares remotos.				X

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas
Área de Matemáticas

Lola

ENCUESTA DE OPINION

I. ANTECEDENTES PERSONALES

Procura que tus respuestas sean directas y espontáneas, sin preocuparte demasiado por ninguna en particular. Tus respuestas se guardarán en estricta reserva y te advertimos que no hay respuestas "correctas"

Nombre: Lola

Edad: 17

Sexo: FEMENINO

Carrera: INGENIERÍA EN ALIMENTOS

1. Marca con una X la casilla correspondiente a tu respuesta

1.1. Colegio de procedencia año 2003: ALCANTARA CORDILLERA

Particular ☐ Particular Subvencionado ☒ Municipalizado ☐

• Si egresaste anteriormente al año 2003, de que centro de estudios superiores procedes:.....

1.2 Puntaje PSU (Matemática): 635

1.3 Puntaje Prueba de Ciencias: 606

- ¿Qué módulo electivo de la prueba de Ciencias elegiste?

  Biología ☐ Física ☐ Química ☒

II. ANTECEDENTES DE CONOCIMIENTOS

2.1 Durante la Enseñanza Media, estudiastes el concepto de Derivada

Si ☐ No ☒

2.2 Si tu respuesta es afirmativa, ¿conoces algunas aplicaciones de la derivada?

Si ☐ No ☐

Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es?.....

2.3 ¿Conoces la ecuación que modela el crecimiento de una población de bacterias?

Si ☐ No ☒

Si tu respuesta es afirmativa ¿cuál es?: EXPONENCIAL ... PERO FORMULA NO SE ...

2.4 Durante la Enseñanza Media, estudiastes el concepto de Integral

Si ☐ No ☒

Si tu respuesta es afirmativa, ¿conoces algunas aplicaciones de la Integral?

Si ☐ No ☐

Si tu respuesta es afirmativa ¿cuál es?:.....

III. ANTECEDENTES DE LA METODOLOGÍA

En la siguiente sección se trata de conocer tu opinión acerca de las características generales de la metodología en Matemáticas. Marca con una X el casillero correspondiente a los conceptos según tu percepción personal.

Casi Siempre : CS
Con Frecuencia : CF
A Veces : AV
Casi Nunca : CN

	CS	CF	AV	CN
3.1 Tuvistes la oportunidad de trabajar en las clases grupalmente.	X			
3.2 Piensas que al trabajar en un grupo se benefician todas las personas que lo conforman.	X			
3.3 Aunque no hayas tenido la experiencia, crées que el trabajar en grupo tú aprendizaje sería mas eficiente.			X	
3.4 ¿Crées que al trabajar con otras personas, sería para ti mas difícil?. ¿Porqué?. derrepente entorpecen, el procedimiento y se hace más extenso el trabajo.			X	
3.5 ¿Te gusta trabajar con otras personas?.	X			

IV. ANTECEDENTES INFORMATICOS

	CS	CF	AV	CN
4.1 Te brindaron la oportunidad de trabajar directamente con los computadores en tus actividades de aprendizaje.			X	
4.2 Te permitieron desenvolverte como usuario autónomo en una variada gama de aplicaciones computacionales relacionadas con la asignatura de Matemáticas.				X
4.3 Desarrollaste algunos contenidos con apoyo computacional.				X
4.4 Te motivaron a realizar exposiciones de temas de interés con herramientas informáticas.			X	
4.5 Utilizastes algún software específico de Matemáticas.				X (NUNCA)
4.6 Promovieron la utilización de redes de comunicación para buscar, seleccionar y procesar información desde lugares remotos.				X (NUNCA)

ANEXO 4: PRIMERA PRUEBA DE DIAGNÓSTICO

1. Primera Prueba de Diagnóstico
2. Primera Prueba de Diagnóstico de Juan Ignacio.
3. Primera Prueba de Diagnóstico de Daniela
4. Primera Prueba de Diagnóstico de Lola
5. Primera Prueba de Diagnóstico de Nancy

ENCUESTA DE OPINION

I. ANTECEDENTES PERSONALES

Procura que tus respuestas sean directas y espontáneas, sin preocuparte demasiado por ninguna en particular. Tus respuestas se guardarán en estricta reserva, y te advertimos que no hay respuestas "correctas".

Nombre:……

Edad:……

Sexo:……

Carrera:……

1. Marca con una X la casilla correspondiente a tu respuesta

1.1. Colegio de procedencia año 2003:……..

Particular ☐ Particular Subvencionado ☐ Municipalizado ☐

♦ Si egresaste anteriormente al año 2003, de que centro de estudios superiores procedes:……..

1.2. Puntaje PSU (Matemática):……

1.3. Puntaje Prueba de Ciencias:……

¿Qué módulo electivo de la prueba de Ciencias elegiste?

Biología ☐ Física ☐ Química ☐

II. ANTECEDENTES DE CONOCIMIENTOS

2.1. Durante la Enseñanza Media, estudiaste el concepto Derivada.

Si ☐ No ☐

2.2. Si tu respuesta es afirmativa, ¿conoces algunas aplicaciones de la derivada?.

Si ☐ No ☐

Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es?.....

2.3. ¿Conoces la ecuación que modela el crecimiento de una población de bacterias?

Si ☐ No ☐

Si tu respuesta es afirmativa ¿cuál es?.....

2.4. Durante la Enseñanza Media, estudiaste el concepto de Integral.

Si □ No □

Si tu respuesta es afirmativa, ¿conoces algunas aplicaciones de la Integral.

Si □ No □

Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es?:…….

III. ANTECEDENTES DE LA METODOLOGÍA

En la siguiente sección se trata de conocer tu opinión acerca de las características generales de la metodología en Matemáticas. Marca con una X el casillero correspondiente a los conceptos según tu percepción personal.

Casi Siempre : CS
Con Frecuencia: CF
A Veces : AV
Casi Nunca : CN

	CS	CF	AV	CN
3.1. Tuviste la oportunidad de trabajar en las clases grupales.				
3.2. Piensas que al trabajar en un grupo se benefician todas las personas que lo conforman.				
3.3. Aunque no hayas tenido experiencia, crees que el trabajar en grupo tú aprendizaje sería más eficiente				
3.4. ¿Crees que al trabajar con otras personas, sería para ti más difícil?. ¿Por qué?.				
3.5 ¿Te gusta trabajar con otras personas?				

IV. ANTECEDENTES INFORMATICOS

	CS	CF	AV	CN
4.1. Te brindaron la oportunidad de trabajar directamente con los computadores en tus actividades de aprendizaje.				
4.2. Te permitieron desenvolverte como usuario autónomo en una variada gama de aplicaciones computacionales relacionadas con la asignatura de Matemáticas.				
4.3. Desarrollaste algunos contenidos con apoyo computacional.				
4.4. Te motivaron a realizar exposiciones de temas de interés con herramientas informáticas.				
4.5 ¿Utilizaste algún software específico de Matemáticas?				
4.6. Promovieron la utilización de redes de comunicación para buscar, seleccionar y procesar información desde lugares remotos.				

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas
Area de Matemáticas

Juan Ignacio

PRUEBA DE DIAGNÓSTICO ASIGNATURA MATEMÁTICAS

OBJETIVO ESPECÍFICO

Evaluar los conocimientos y habilidades de cálculo adquiridos durante la educación Media que constituyen la base de los temas que serán tratados.

Simplifique:

$$\frac{\frac{x}{x+1}-\frac{x^2}{x^2-1}}{1-\frac{1}{x-1}}$$

2.- Racionalizar el denominador de la expresión:

$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$$

3.- Resolver las siguientes ecuaciones:

i) $4^{4x-3} = 8^{2x+5}$ ii) $\log(x^2+4) - \log(x+2) = 3 + \log(x-2)$

4.- Resuelva la siguiente inecuación.

$$\frac{1}{6-2x} < 0$$

5.- Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, -5) y es paralela a la recta $6x - 3y + 4 = 0$

6.- Halle la medida en grados sexagesimales si

$$\theta = \frac{7\pi}{4}$$

7.- Un terreno rectangular tiene uno de sus lados 5 m. menos que el otro. Si el área del terreno es 150 m^2 ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

Juan Ignacio

1) i) $\dfrac{\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x^2}{x^2-1}}{1+\dfrac{1}{x-1}} =$

ii) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x^2}{(x+1)(x-1)}$

$\dfrac{x(x-1) - x^2}{(x^2-1)} = \dfrac{x^2 - x - x^2}{(x^2-1)} = \dfrac{-x}{(x^2-1)}$

iii) $1 + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1}{x-1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1+1}{x-1} = \dfrac{x}{x-1}$

$\dfrac{\dfrac{-x}{x^2-1}}{\dfrac{x}{x-1}} = \dfrac{-x}{(x+1)(x-1)} \cdot \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{-1}{(x+1)}$

SOL) $\dfrac{-1}{(x+1)}$ ✓ 1

2) $\dfrac{h}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}} = \dfrac{h}{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})} \cdot \dfrac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \dfrac{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}^2 - \sqrt{x}^2)}$

$= \dfrac{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{x+h-x} = \sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ ✓ 1

3) i) $4^{4x-3} = 8^{2x+5}$

$(2^2)^{4x-3} = (2^3)^{2x+5}$

$2^{8x-6} = 2^{6x+15}$

$\Rightarrow 8x - 6 = 6x + 15$

$2x = 21$

$x = \dfrac{21}{2}$ ✓ 0,5

ii) $\log(x^2+4) - \log(x+2) = 3 + \log(x-2)$

$\log(x^2+4) - \log(x+2) - \log(x-2) = 3$

$\log(x^2+4) - (\log((x+2)\cdot(x-2))) = 3$

$\log\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right) = 3\log 10$

$\log\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right) = \log 10^3$ ✓ 0,5

$\dfrac{x^2+4}{x^2-4} = 10^3$

$x^2 + 4 = 1000(x^2-4)$

$x^2 + 4 = 1000x^2 - 4000$

$999x^2 - 4004 = 0$

$x = \sqrt{\dfrac{4004}{999}} = \dfrac{\sqrt{4}\sqrt{1001}}{\sqrt{9}\sqrt{111}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{1001}{111}}$

$x_1 = 2,007$

$x_2 = -2,007$

4) $\frac{1}{6-2x} < 0 \quad 1 > 0 \Rightarrow \quad 6-2x < 0$

$+2x < +6$

$>$

$2x > 6$

$x > \frac{6}{2}$

$x > 3$

1

5) $6x - 3y + 4 = 0$

Recta PARALELA $\Rightarrow$ $6x - 3y + C = 0$ → coef de y

$6 \cdot 3 - 3 \cdot (-5) + C = 0$

$18 + 15 + C = 0$

$33 + C = 0$

$C = -33 \quad \Rightarrow \quad L_1 \equiv 6x - 3y - 33 = 0$

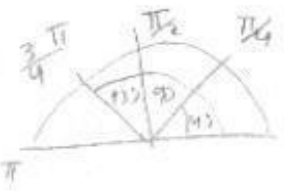
6) $\theta = \frac{7\pi}{4}$

$\theta = \frac{4\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi$

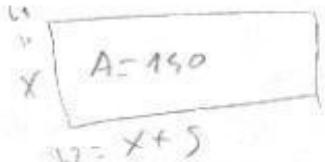
$= \pi + \frac{3}{4}\pi$

$= 180° + 135°$

$\theta = 315°$



7)



$\Rightarrow \quad x \cdot (x+5) = 150 \quad \Rightarrow$ LADOS

$x^2 + 5x - 150 = 0$

$L_1 = 10$

$L_2 = 15$

$(x + 15)(x - 10) = 0$

$x_1 = -15$ NO TIENE SENTIDO

$x = 10$

1

$\log(x^2+4) - \log(x+2) - \log(x-2) = 3$

$\log \frac{x^2+4}{x^2-4} = 1000$

$\frac{x^2+2x+4-2x}{(x+2)(x-2)}$

$\frac{x^2+2x+4}{} \quad \frac{-2x}{x \quad 4}$

$\frac{x+2}{(x-2)} - \frac{2x}{x^2-4}$

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas
Área de Matemáticas

Daniela

PRUEBA DE DIAGNÓSTICO ASIGNATURA MATEMÁTICAS

OBJETIVO ESPECÍFICO

Evaluar los conocimientos y habilidades de cálculo adquiridos durante la educación Media que constituyen la base de los temas que serán tratados.

Simplifique:

$$\frac{\frac{x}{x+1}-\frac{x^2}{x^2-1}}{1+\frac{1}{x-1}}$$

2.- Racionalizar el denominador de la expresión:

$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$$

3.- Resolver las siguientes ecuaciones:

i) $4^{4x-3} = 8^{2x+5}$ ii) $\log(x^2-4) - \log(x+2) = 3 + \log(x-2)$

4.- Resuelva la siguiente inecuación.

$$\frac{1}{6-2x} < 0$$

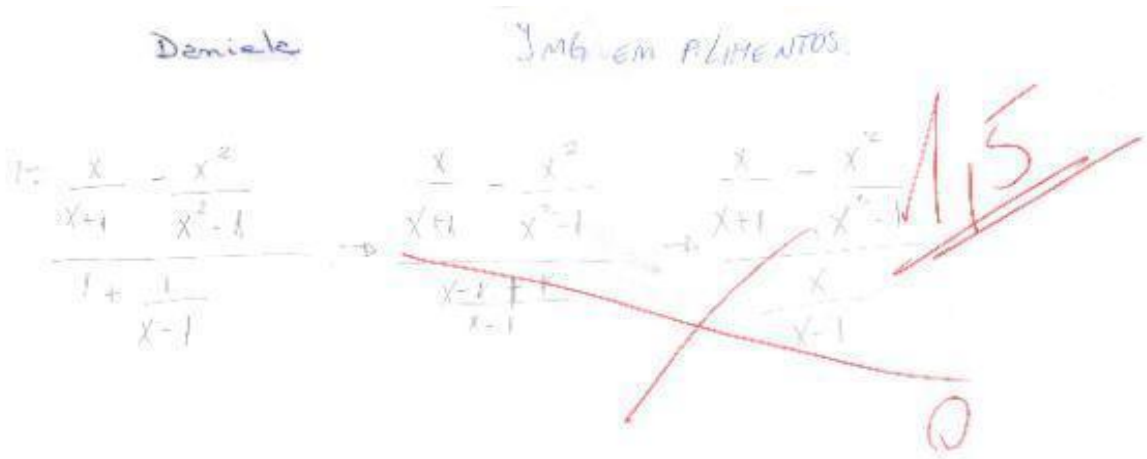
5.- Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, -5) y es paralela a la recta $6x - 3y - 4 = 0$

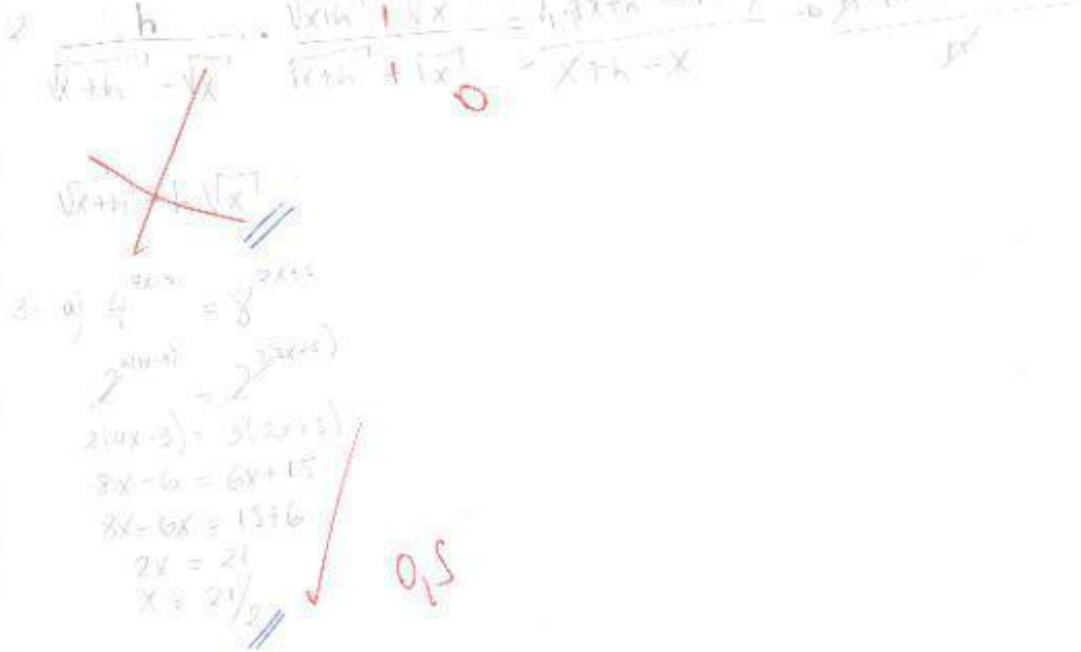
6.- Halle la medida en grados sexagesimales si

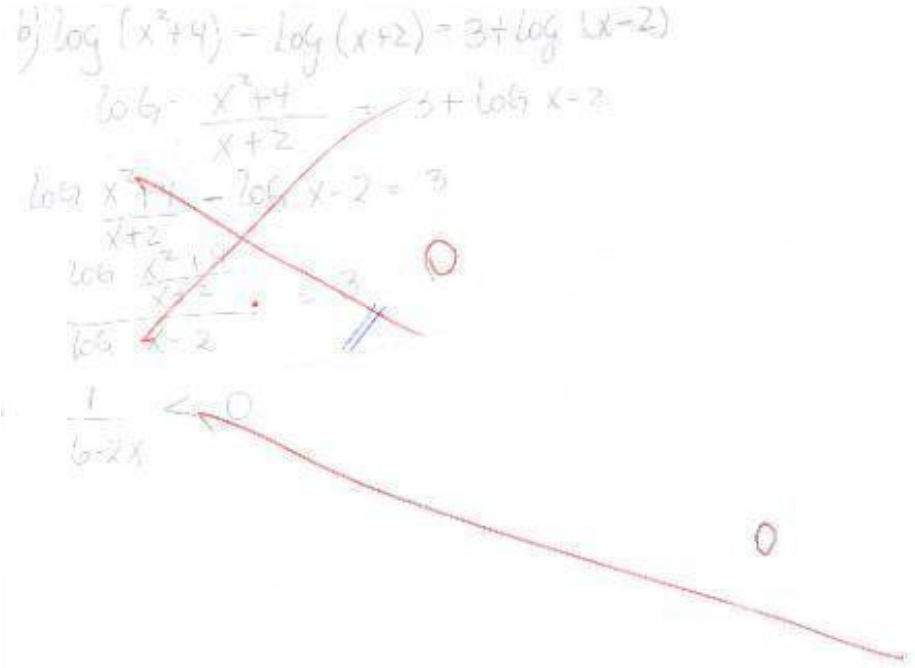
$$\theta = \frac{7\pi}{4}$$

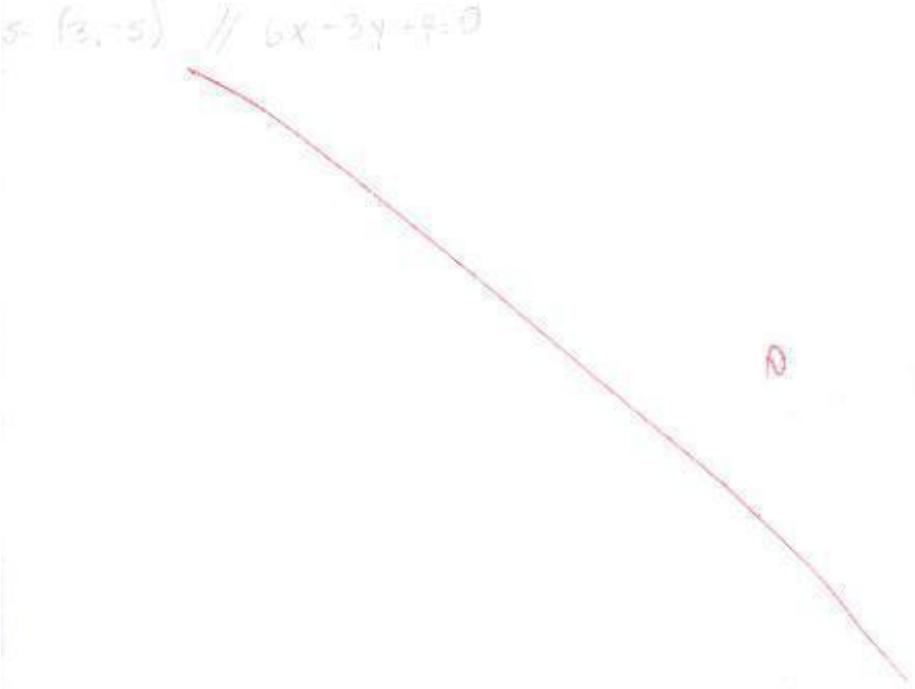
7.- Un terreno rectangular tiene uno de sus lados 5 m. menos que el otro. Si el área del terreno es 150 m^2 ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

Daniele









Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas
Área de Matemáticas

Lola

PRUEBA DE DIAGNÓSTICO ASIGNATURA MATEMÁTICAS

OBJETIVO ESPECÍFICO

Evaluar los conocimientos y habilidades de cálculo adquiridos durante la educación Media que constituyen la base de los temas que serán tratados.

Simplifique:

$$\frac{\frac{x}{x+1}-\frac{x^2}{x^2-1}}{1+\frac{1}{x-1}}$$

2.- Racionalizar el denominador de la expresión:

$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$$

3.- Resolver las siguientes ecuaciones:

i) $4^{4x+3} = 8^{2x+5}$ ii) $\log(x^2+4) - \log(x+2) = 3 + \log(x-2)$

4.- Resuelva la siguiente inecuación.

$$\frac{1}{6-2x} < 0$$

5.- Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, -5) y es paralela a la recta $6x - 3y + 4 = 0$

6.- Halle la medida en grados sexagesimales si

$$\theta = \frac{7\pi}{4}$$

7.- Un terreno rectangular tiene uno de sus lados 5 m. menos que el otro. Si el área del terreno es 150 m^2 ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

PRUEBA DE DIAGNÓSTICO
MATEMÁTICAS

Lola
INE Alimento
1er Año

65

1: SIMPLIFIQUE:

a) $\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2-1}$

$\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}$

$\frac{x(x-1) - x^2}{(x+1)(x-1)}$

$\frac{x^2 - x - x^2}{(x+1)(x-1)}$

b) $1 + \frac{1}{x-1}$

$\frac{(x-1)+1}{x-1}$

$\frac{x}{(x-1)}$

$\frac{a}{b} \cdot \left[\frac{\frac{-x}{(x+1)(x-1)}}{\frac{x}{x-1}}\right] = \frac{-x(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$

$= \frac{-1}{x+1}$ A

R: El resultado de la simplificación del Ejercicio es $\frac{-1}{x+1}$

2 RACIONALIZAR:

$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} / \cdot \frac{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$\frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \cdot \frac{h\sqrt{x+h}+h\sqrt{x}}{x+h-x} = \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h}$

$= \sqrt{x+h}+\sqrt{x}$

R: La racionalización de $\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$ es $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$

3° RESOLVER :

i) $4^{4x-3} = 8^{2x+5}$

$(2^2)^{4x-3} = (2^3)^{2x+5}$

$2^{8x-6} = 2^{6x+15}$

$8x - 6 = 6x + 15$

$2x = 21$

$x = \frac{21}{2}$

$x = 10,5$

0,5

R: el valor de x resuelto en la ec. exp. es $\frac{21}{2}$.

ii) $\log(x^2+4) - \log(x+2) = 3 + \log(x-2)$

$\log(x^2+4) - 3 = \log(x-2) + \log(x+2)$

$\log(x^2+4) - 3 = \log(x-2)\cdot(x+2)$

$\log(x^2+4) - 3 = \log(x^2-4)$

$-3 = \log(x^2-4) - \log(x^2+4)$

4- Resolver

$\frac{1}{6-2x} < 0$

$6 - 2x \neq 0$

$6 \neq 2x$

$3 \neq x$

Caso 1: $6 - 2x < 0$

$6 < 2x$

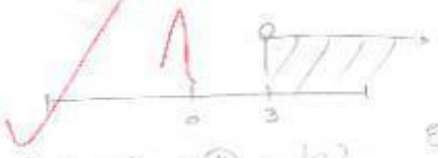
$3 < x$

Caso 2: $6 - 2x > 0$

$6 > 2x$

$3 > x$

No vale.



Solución: $\mathbb{R} - \{3\}$

$:]3, \infty[$

El valor $x < 3$ no satisface la solución del problema

5- HALLAR EC. RECTA:

$P_1 (3, -5)$

$L_1 \parallel L_2$

$L_2 : 6x - 3y + 4 = 0$

$6x + 4 = 3y$

$\frac{6x + 4}{3} = y$

$2x + \frac{4}{3} = y$

$m_2 = 2$

$m_1 = m_2$

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$

$\frac{y + 5}{x - 3} = \frac{2}{1}$

$y + 5 = 2x - 6$

$y = 2x - 6 - 5$

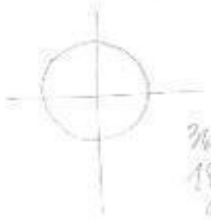
Ec p: $y = 2x - 11$

Ec gral: $0 = 2x - 11 - y$

R La recta paralela a $6x - 3y + 4 = 0$ corresponde a $y = 2x - 11$.

6- HALLE LA MEDIDA EN GRADOS SEXAGESIMALES

$\theta = \frac{7\pi}{4}$



$360° \rightarrow 2\pi$

$180° \rightarrow \pi$

$90° \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$\frac{7\pi}{4} \longrightarrow x$

$\pi \longrightarrow 180°$

$\frac{\frac{7\pi}{4} \cdot 180°}{\pi} = x$

$\frac{315\,\pi}{\pi} = x$

$315 = x$

R: La medida del ángulo θ correspondiente a $\frac{7\pi}{4}$, en grados sexagesimales es $315°$.

7-

$(x-5)\cdot x = 150$

$x^2 - 5x = 150$

$x^2 - 5x - 150 = 0$

$(x-15)(x+10) = 0$

$x - 15 = 0 \quad x = 15$

$x + 10 = 0 \quad x = -10 \longrightarrow$ No

R: Las dimensiones del terreno son: Largo 15 mts y ancho 10 mts. La 2ª Solución ($x = -10$) no satisface... ya que hablamos de un valor negativo inaplicable a dimensiones de terreno.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas
Área de Matemáticas

Nancy

PRUEBA DE DIAGNÓSTICO ASIGNATURA MATEMÁTICAS

OBJETIVO ESPECÍFICO

Evaluar los conocimientos y habilidades de cálculo adquiridos durante la educación Media que constituyen la base de los temas que serán tratados.

Simplifique:

$$\frac{\frac{x}{x+1}-\frac{x^2}{x^2-1}}{1+\frac{1}{x-1}}$$

2.- Racionalizar el denominador de la expresión:

$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$$

3.- Resolver las siguientes ecuaciones:

i) $4^{4x-3} = 8^{2x+5}$ ii) $\log(x^2+4) - \log(x+2) = 3 - \log(x-2)$

4.- Resuelva la siguiente inecuación.

$$\frac{1}{6-2x} < 0$$

5.- Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, -5) y es paralela a la recta $6x - 3y + 4 = 0$

6.- Halle la medida en grados sexagesimales si

$$\theta = \frac{7\pi}{4}$$

7.- Un terreno rectangular tiene uno de sus lados 5 m. menos que el otro. Si el área del terreno es 150 m^2 ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

Nancy

1. $\dfrac{\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x^2}{x^2-1}}{1 + \dfrac{1}{x-1}} = \dfrac{\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)}}{1 + \dfrac{1}{x-1}} = \dfrac{x(x-1) - x^2}{(x-1)(x+1)} \cdot \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{x^2 - x - x^2}{x}$

$= \dfrac{-x}{x}$ 0

1,5

2. $\dfrac{h}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}$

0

3.

a) $4^{4x-3} = 8^{2x+5}$

$2^{8x-6} = 2^{6x+15}$

$8x - 6 = 6x + 15$

$2x = 21$

$x = \dfrac{21}{2}$

0,5

ii) $\log(x^2+4) - \log(x+2) = 3 + \log(x-2)$

$\log \frac{(x^2+4)}{(x+2)} = \log 1000(x-2)$

$\frac{x^2+4}{x+2} = 1000x - 2000$

$x^2+4 = (1000x - 2000)(x+2)$

$x^2+4 = 1000x^2 - 4000$

$999x^2 = 3996$

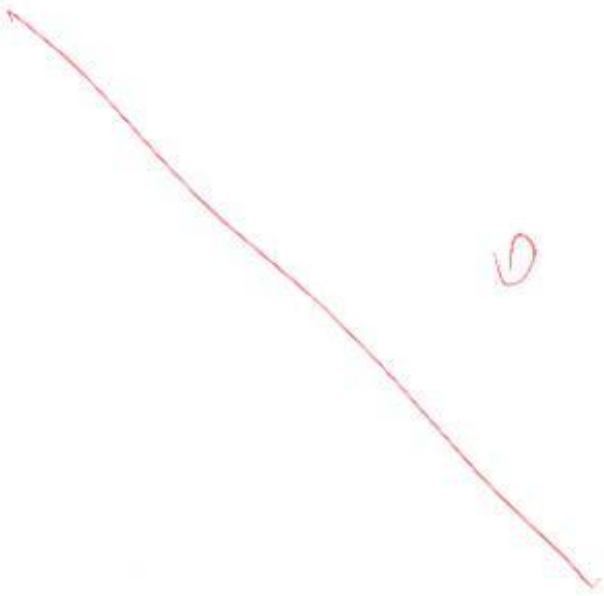
$x^2 = \frac{3996}{999}$

$x^2 = 3$ /√

$x = \sqrt{3}$

0

4. $\frac{1}{6-2x} < 0$



0

5. (3, -5)

$6x - 3y + 4 = 0$

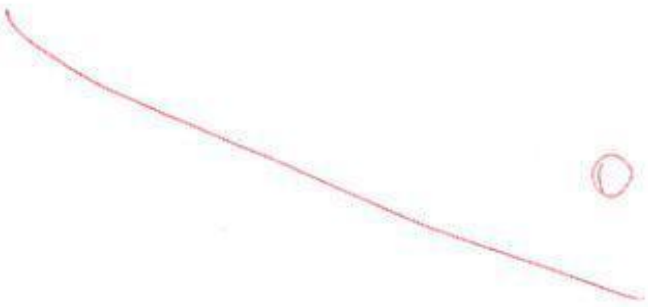
$y = \frac{6x+4}{3}$

$-30 = -8\frac{6}{3} + m$

$y = \frac{6}{3}x - 30$

6.

$\theta = \frac{7\pi}{4}$



7.

$x \cdot (x-5) = 150$

$x^2 - 5x = 150$

$x^2 - 5x - 150 = 0$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 600}}{2}$

$x = \frac{5 \pm 25}{2}$

$x_1 = \frac{5+25}{2}$ $\quad x_2 = \frac{5-25}{2}$

$x_1 = \frac{30}{2}$ $\quad x_2 = 10$

$\boxed{x_1 = 15}$

$L = 15$

$A = 15 - 5$

$A = 10$

Las dimensiones del rectangulo son 15 m de largo y 10 m de ancho

El resultado x_2 no sirve para este caso, ya que las dimensiones no son negativas.

ANEXO 5: PRUEBA DE MEDICIÓN DE ESTÁNDARES

5.1. Prueba de Medición de Estándares Juan Ignacio.

5.2. Prueba de Medición de Estándares Daniela.

5.3. Prueba de Medición de Estándares Lola.

5.4. Prueba de Medición de Estándares Nancy

UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. CS. QCAS Y FARMACÉUTICAS
Matemáticas I 2004
Prof. María Angélica Vega Urquieta.

8/10

NOMBRE:.. Juan Ignacio .....

PRUEBA DE MEDICIÓN DE ESTÁNDARES.

1.- La derivada de una función ordenada en el punto x_0 es el número obtenido mediante la expresión:

i) $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

ii) $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0}$

iii) $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)}{h}$, si existe

iv) $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0}$, si existe

(v) $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, si existe ✓

Justifica tu respuesta.

2.- La derivada en el punto x_0 es un número que geométricamente representa:

X

(i) La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$

ii) La pendiente de la recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$

iii) La pendiente de la recta que pasa por el punto $(x_0+h, f(x_0+h))$

iv) El valor del área de un rectángulo de altura $f(x_0)$

v) El valor del área bajo la curva $f(x)$ entre los puntos x_0 y x_0+h

Justifica tu respuesta.

3.- Se define la función derivada de la función $f(x)$ que denota $f'(x)$ por

i) $f'(x) = \dfrac{f(x+h-f(x)}{h}$

ii) $f'(x) = \dfrac{f(x+h-f(x)}{x}$

iii) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)}{h}$, si existe

(iv) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si existe ✓

Justifica tu respuesta.

4.- $y=\frac{1}{12}x^6$, entonces la función derivada es:

i) $y'=6x^5$

ii) $y'=\frac{1}{12}\frac{x^7}{7}=\frac{1}{84}x^7$

iii) $y'=\frac{x^6}{72}$

iv) $y'=\frac{1}{2}x^5$

v) $y'=\frac{1}{72}x^5$

Justifica tu respuesta.

5.- ¿Cuál (Cuáles) de las siguiente(s) informacione(s) es (son) verdadera(s)?,

i) Si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$, $f'(x)>0$ y la gráfica es cóncava entonces $f'(x)$ es creciente.

ii) Si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$, $f'(x)>0$ y la gráfica convexa entonces $f'(x)$ es decreciente.

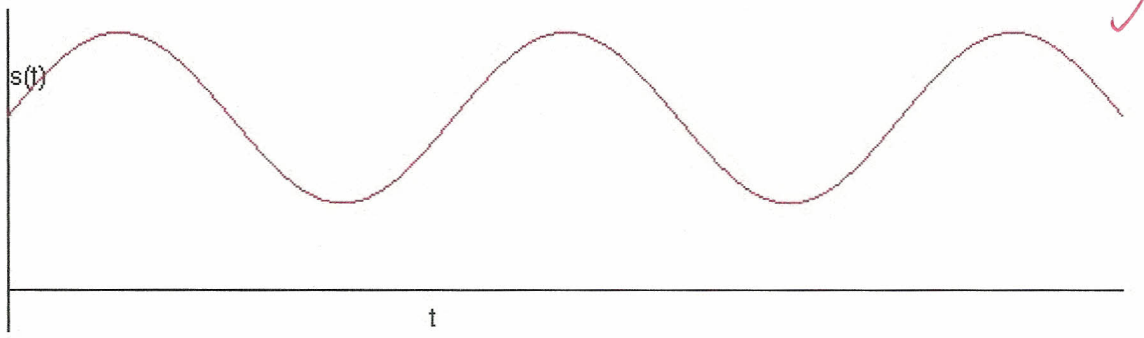
iii) Si $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$, $f'(x)<0$ y la gráfica es cóncava $\Rightarrow$ $f'(x)$ es creciente.

iv) Si $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$, $f'(x)<0$ y en la gráfica convexa entonces $f'(x)$ es decreciente.

v) Ninguna de las anteriores.

Justifica tu respuesta.

6.- El siguiente es el gráfico de la posición de un móvil que se mueve en línea recta. ¿Qué sucede con el móvil cuando el gráfico alcanza la cresta de una loma.



Justifica tu respuesta.

7.- Si la derivada de una función $f(x)$ al cruzar el punto $x_0 \in Df$ cambia de positiva a negativa implica que:

i) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo relativo

ii) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo absoluto

iii) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo relativo

iv) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto

v) $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión

Justifica tu respuesta.

8.- Si la derivada de una función $f(x)$ al cruzar el punto $x_0 \in Df$ cambia de negativa a positiva implica que-.

i) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo relativo
ii) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo absoluto
iii) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo relativo
iv) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto
v) $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión.

Justifica tu respuesta.

9.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?.

i) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en x_0
ii) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un máximo local en x_0
iii) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un mínimo local en x_0
iv) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$ entonces f tiene un punto de inflexión en x_0
v) Ninguna de las anteriores.

Justifica tu respuesta.

10.- Un modelo para la propagación de un rumor dice que la razón de propagación es proporcional al producto entre el núme de personas que han escuchado el rumor y el número de personas que no lo han escuchado.

En un pueblo de 1500 habitantes, Juanita recibe de su novio un anillo de brillantes y le cuenta a sus amigas más cercanas, d manera que el lunes, 8 personas conocen la noticia. El miércoles de la misma semana 80 personas se han enterado.

La ecuación diferencial que representa el problema es:

i) $\frac{dP}{dt} = k(1500 - P)$

ii) $\frac{dP}{dt} = kP$

iii) $\frac{dP}{dt} = kP(1500 - P)$

iv) $\frac{dP}{dt} = 1500P$

v) $\frac{dP}{dt} = P(1500 - P)$

Determina la solución general de la ecuación diferencial.

Juan Ignacio,.

1. Podemos demostrar tal afirmación con la función $f(x) = |x|$, para $x_0 = 0$; no existe la derivada en dicho punto, dado que

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$; analizando los límites por la izquierda y por la derecha tenemos que el límite no existe ~~dado~~ ya que:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

demostrando que necesariamente debe existir el límite, para que la derivada exista en x_0.

2. Se define $h = x_1 - x_0$ y la pendiente $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, dado que hablamos de funciones, $m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, como $h = x_1 - x_0$ y $x_1 = x_0 + h$

$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. La derivada en el punto x_0 representa la pendiente de la recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ siempre considerando que $h \to 0$ o mejor dicho $x_1 - x_0 \to 0$.

3. Para $f(x)$, se denota $f'(x)$ como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Dado que la derivada de una función $f(x)$, ~~define~~ describe a la pendiente $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ de una recta tangente a la curva $f(x)$. Para esto necesariamente $x_1 - x_0 \to 0$ o $x_1 \to x_0$.

4. $y = \frac{1}{12} x^6$.

$y' = \frac{6}{12} x^5$

$\Leftrightarrow y' = \frac{1}{2} x^5$

Generalización.

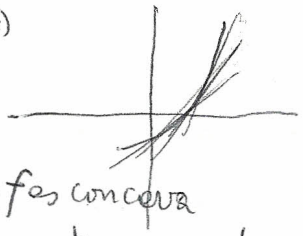
Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(x) = k \cdot x^n$ con $k \in \mathbb{R}$

$f'(x) = k \cdot n x^{n-1}$

5. Si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$, $f'(x) > 0$ con $a \leq x \leq b$

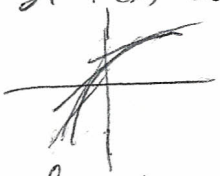
Si $f''(x) > 0$, $f(x)$ es convexa.

$f'(x)$ es creciente.



Si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$, $f'(x) > 0$; si $f''(x) < 0$, f es concava

$f'(x)$ es decreciente. Análogamente para los otros casos.



6. Cuando el gráfico alcanza la cresta de una loma su derivada $s'(t) = 0$, ya que su pendiente es también cero.

Notemos también que $\frac{ds}{dt} = v(t)$, luego cuando alcanza un máximo de distancia su $v(t) = 0$.

7. El criterio de la primera derivada de la crecencia de una función explica que si al cruzar el punto x_0, su derivada cambia de positivo a negativo, quiere decir que la curva pase de ser creciente a decreciente en $(x_0, f(x_0))$, luego $(x_0, f(x_0))$ es un máximo relativo.

8. Análógicamente si la derivada de dicha función cambia su signo de negativo a positivo, quiere decir que la curva pase de decreciente a creciente en $(x_0, f(x_0))$ y necesariamente existe un mínimo local.

No es necesariamente un mínimo absoluto, pues para darse tal condición x_0 debería ser el mínimo valor dado en el Dominio de f.

ahora bien, podemos atribuir el signo del valor absoluto a una nueva cte.

$$\frac{P}{1500-P} = C_3 e^{1500kt} \qquad \text{siendo } C_3 = \pm e^{C_1}$$

$$\Leftrightarrow P = C_3 \cdot e^{1500kt}(1500 - P)$$

$$P = 1500 \cdot C_3 \cdot e^{1500kt} - P C_3 \cdot e^{1500kt}$$

$$P(t) = \frac{1500\, C_3 \cdot e^{1500kt}}{1 + C_3 \cdot e^{1500kt}}$$

para $P(0) = 8 = \frac{1500\, C_3 \cdot e^{1500k \cdot 0}}{1 + C_3 \cdot e^{1500k \cdot 0}} = \frac{1500 \cdot C_3}{1 + C_3 \cdot}$

$$\Leftrightarrow 8 + 8C_3 = 1500 C_3$$

$$8 = 1492 C_3 \Rightarrow \boxed{C_3 = \frac{8}{1492}}$$

para $P(2) = 80 = \frac{\frac{1500 \cdot 8}{1492} \cdot e^{3000k}}{1 + \frac{8}{1492} \cdot e^{3000k}}$

$$\Leftrightarrow 80 = \frac{\frac{1500 \cdot 8 \cdot e^{3000k}}{1492}}{1492 + 8 \cdot e^{3000k}} \Rightarrow 80(1492 + 8e^{3000k}) = 12000 \cdot e^{3000k}$$

$$\frac{1492}{1492}$$

$$\Rightarrow 119360 + 160e^{3000k} = 12000 \cdot e^{3000k}$$

$$\Leftrightarrow 119360 = 11840\, e^{3000k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{119360}{11840} = e^{3000k} \qquad /\ln(\,)$$

$$\ln\left(\frac{373}{37}\right) = 3000k \Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{373}{37}\right)}{3000} \approx 7{,}4 \cdot 10^{-4}$$

9. Si $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0)>0$, $f(x)$ es convexa en un rango $a<x_0<b$ $\forall a,b \in Dom f$. Luego f tiene un mínimo local en x_0.

10. $\frac{dP}{dt} = kP(1500-P)$

$P(0) = 8$

$P(2) = 80$.

Sea $P(t)$: v.d. describe la cantidad de habitantes de un pueblo.
t : v.i. indica el tiempo transcurrido en días.

Por variables separables tenemos que:

$$\frac{dP}{P(1500-P)} = k\,dt \quad / \int$$

$$\int \frac{dP}{P(1500-P)} = \int k\,dt$$

trabajando el lado izquierdo de la ecuación mediante fracciones parciales, tenemos

$$\frac{1}{P(1500-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{1500-P} = \frac{A(1500-P)+BP}{P(1500-P)}$$

$\Leftrightarrow$ $A(1500-P)+BP = 1$

si $P=0$: $1500A = 1$, $A = \frac{1}{1500}$

si $P=1500$: $1500B = 1$, $B = \frac{1}{1500}$

entonces

$$\frac{1}{1500}\int \frac{dP}{P} + \frac{1}{1500}\int \frac{dP}{1500-P} = kt + C$$

siendo $C_1 = 1500C$

$$\ln|P| - \ln|1500-P| = 1500kt + C_1$$

$$\ln\left|\frac{P}{1500-P}\right| = 1500kt + C_1 \quad / e^{(\,)}$$

siendo $C_2 = e^{C_1}$

$$\left|\frac{P}{1500-P}\right| = e^{1500kt}\cdot C_2$$

Luego la solución general de la Ec. dif. es:

$$P(t) = \frac{\frac{1500 \cdot 8}{1492} \cdot e^{7{,}7 \cdot 10^{-4} t}}{1 + \frac{8}{1492} \cdot e^{7{,}7 \cdot 10^{-4} t}}$$

UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. CS. QCAS Y FARMACÉUTICAS
Matemáticas I 2004
Prof. María Angélica Vega Urquieta.

7
10

NOMBRE Daniela .....

PRUEBA DE MEDICIÓN DE ESTÁNDARES.

1.- La derivada de una función ~~cualquiera~~ en el punto x_0 es el número obtenido mediante la expresión:

i) $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

ii) $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0}$

iii) $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)}{h}$, si existe

iv) $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0}$, si existe

v) $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, si existe ✓

Justifica tu respuesta.

2.- La derivada en el punto x_0 es un número que geométricamente representa:

i) La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$

ii) La pendiente de la recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$

iii) La pendiente de la recta que pasa por el punto $(x_0+h, f(x_0+h))$ ✓

iv) El valor del área de un rectángulo de altura $f(x_0)$

v) El valor del área bajo la curva $f(x)$ entre los puntos x_0 y x_0+h

Justifica tu respuesta.

3.- Se define la función derivada de la función $f(x)$ que denota $f'(x)$ por

i) $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

ii) $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{x}$

iii) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)}{h}$, si existe ✓

iv) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si existe

Justifica tu respuesta.

4.- $y = \frac{1}{12}x^6$, entonces la función derivada es:

i) $y' = 6x^5$

ii) $y' = \frac{1}{12}\frac{x^7}{7} = \frac{1}{84}x^7$

iii) $y' = \frac{x^6}{72}$

iv) $y' = \frac{1}{2}x^5$

v) $y' = \frac{1}{72}x^5$

Justifica tu respuesta.

5.- ¿Cuál (Cuáles) de las siguiente(s) informacione(s) es (son) verdadera(s)?,

i) Si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$, $f'(x) > 0$ y la gráfica es cóncava entonces $f'(x)$ es creciente.

ii) Si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$, $f'(x) > 0$ y la gráfica convexa entonces $f'(x)$ es decreciente.

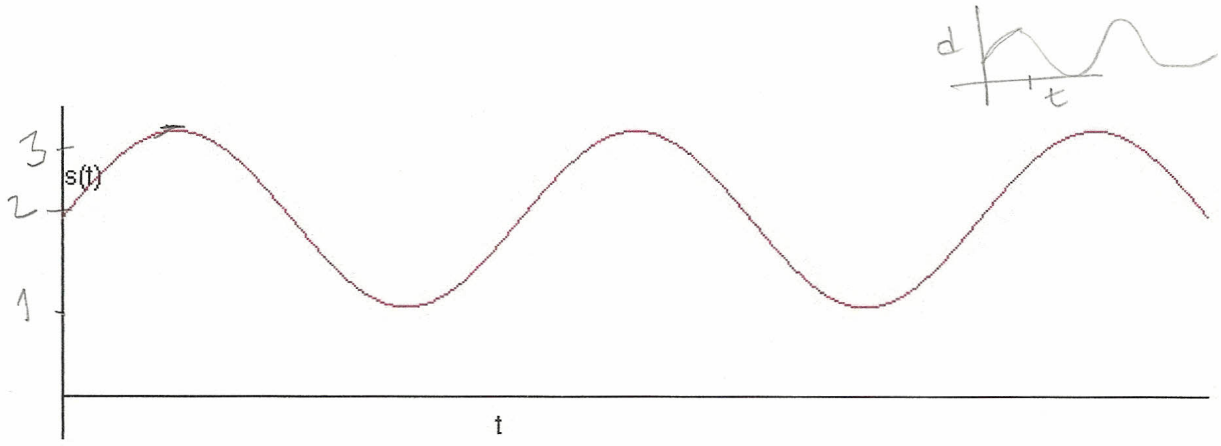
iii) Si $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$, $f'(x) < 0$ y la gráfica es cóncava $\Rightarrow$ $f'(x)$ es creciente.

iv) Si $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$, $f'(x) < 0$ y en la gráfica convexa entonces $f'(x)$ es decreciente.

v) Ninguna de las anteriores.

Justifica tu respuesta.

6.- El siguiente es el gráfico de la posición de un móvil que se mueve en línea recta. ¿Qué sucede con el móvil cuando el gráfico alcanza la cresta de una loma.



Justifica tu respuesta.

7.- Si la derivada de una función $f(x)$ al cruzar el punto $x_0 \in Df$ cambia de positiva a negativa implica que:

i) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo relativo

ii) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo absoluto

iii) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo relativo

iv) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto

v) $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión

Justifica tu respuesta.

8.- Si la derivada de una función $f(x)$ al cruzar el punto $x_0 \in Df$ cambia de negativa a positiva implica que-.

i) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo relativo
ii) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo absoluto
iii) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo relativo
iv) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto
v) $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión.

Justifica tu respuesta.

9.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?.

i) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en x_0
ii) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un máximo local en x_0
iii) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un mínimo local en x_0
iv) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$ entonces f tiene un punto de inflexión en x_0
v) Ninguna de las anteriores.

Justifica tu respuesta.

10.- Un modelo para la propagación de un rumor dice que la razón de propagación es proporcional al producto entre el número de personas que han escuchado el rumor y el número de personas que no lo han escuchado.

En un pueblo de 1500 habitantes, Juanita recibe de su novio un anillo de brillantes y le cuenta a sus amigas más cercanas, de manera que el lunes, 8 personas conocen la noticia. El miércoles de la misma semana 80 personas se han enterado.

La ecuación diferencial que representa el problema es:

i) $\frac{dP}{dt} = k(1500 - P)$

ii) $\frac{dP}{dt} = kP$

iii) $\frac{dP}{dt} = kP(1500 - P)$

iv) $\frac{dP}{dt} = 1500P$

v) $\frac{dP}{dt} = P(1500 - P)$

Determina la solución general de la ecuación diferencial.

Daniela

HOJA DE RESPUESTOS

1-) La expresión es: (v)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

, ya que el incremento le llamábamos h, y ejemplificaba gráficamente el tema de la derivada, como pendiente.

$f'(x_0)$? $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ } de esa forma es la pendiente normal.

pero el incremento $h = x_2 - x_1$ y

$f(x_0 + h) - f(x_0) = y_2 - y_1$

2) La derivada en el pto x_0 es un número que geométricamente representa la pendiente de la recta q' pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y a que la gracia de las derivadas es que en un pto de la recta puedo conocer su pendiente.

alternativa (ii) ✓

3) iv) por la explicación

4) $y = \frac{1}{12} x^6$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{6}{12} \cdot x^5 = \frac{1}{2} x^5$

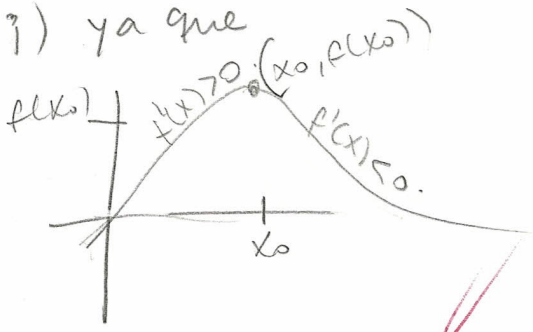
alternativa iv) $y' = \frac{1}{2} x^5$ ✓

5) la ii)

no recuerdo la justificación ?

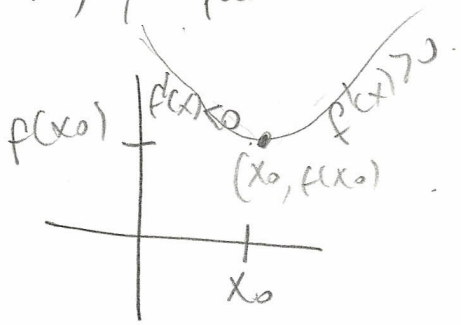
6) Cuando el móvil alcanza la cresta de la loma o en sus máximos o mínimos, significa que se detiene y se devuelve en la dirección contraria.

7) i) ya que



al cambiar se produce un máximo, y es relativo porque no se conoce la función..

8) iii) ya que



al cambiar de pendiente <0 a >0 se produce el mínimo.

9) i) ya que por definición así se señala

Si $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0)>0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo local en x_0.

10) i) Solo sinaly. puedo decirlo

No recuerdo la justificación

$$\frac{dP}{dt} = k(1500-P) \cdot \int \frac{dP}{(1500-P)} = \int k \cdot dt$$

$$-\ln(1500-P) = t + C_1 \qquad C_1 = \ln C.$$

$$\ln \frac{1500-P}{C} = t$$

$$e^{\frac{1500-P}{C}} = e^{t}$$

$$\frac{1500-P}{C} = e^{t}$$

$$1500 - P = Ce^{t}$$

$$\boxed{P = 1500 - C \cdot e^{t}} \rightarrow \text{Sol general.}$$

UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. CS. QCAS Y FARMACÉUTICAS
Matemáticas I 2004
Prof. María Angélica Vega Urquieta.

7/10

NOMBRE: Lola

PRUEBA DE MEDICIÓN DE ESTÁNDARES.

1.- La derivada de una función ordenada en el punto x_0 es el número obtenido mediante la expresión:

i) $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ✗

ii) $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0}$ ✗

iii) $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)}{h}$, si existe ✗

iv) $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0}$, si existe ✗

(v) $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, si existe ✓

Justifica tu respuesta.

¡ Justificación Incorrecta !

2.- La derivada en el punto x_0 es un número que geométricamente representa:

(i) La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ ✓

ii) La pendiente de la recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ ✗

iii) La pendiente de la recta que pasa por el punto $(x_0+h, f(x_0+h))$ ✗

iv) El valor del área de un rectángulo de altura $f(x_0)$ ✗

v) El valor del área bajo la curva $f(x)$ entre los puntos x_0 y x_0+h ✗

Justifica tu respuesta.

3.- Se define la función derivada de la función $f(x)$ que denota $f'(x)$ por

i) $f'(x) = \dfrac{f(x+h-f(x)}{h}$ ✗

ii) $f'(x) = \dfrac{f(x+h-f(x)}{x}$ ✗

iii) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)}{h}$, si existe ✗

(iv) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si existe ✓

Justifica tu respuesta.

4.- $y=\frac{1}{12}x^6$, entonces la función derivada es:

i) $y'=6x^5$

ii) $y'=\frac{1}{12}\frac{x^7}{7}=\frac{1}{84}x^7$

iii) $y'=\frac{x^6}{72}$

(iv) $y'=\frac{1}{2}x^5$

v) $y'=\frac{1}{72}x^5$

Justifica tu respuesta.

5.- ¿Cuál (Cuáles) de las siguiente(s) informacione(s) es (son) verdadera(s)?,

i) Si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$, $f'(x)>0$ y la gráfica es cóncava entonces $f'(x)$ es creciente. X (decreciente)

ii) Si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$, $f'(x)>0$ y la gráfica convexa entonces $f'(x)$ es decreciente. X (creciente)

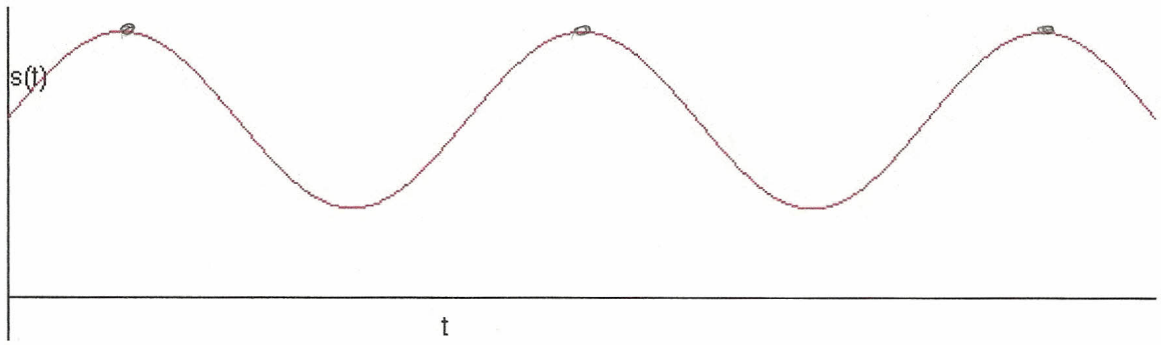
iii) Si $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$, $f'(x)<0$ y la gráfica es cóncava $\Rightarrow$ $f'(x)$ es creciente. X (decreciente)

iv) Si $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$, $f'(x)<0$ y en la gráfica convexa entonces $f'(x)$ es decreciente. X (Creciemte)

(v) Ninguna de las anteriores.

Justifica tu respuesta.

6.- El siguiente es el gráfico de la posición de un móvil que se mueve en línea recta. ¿Qué sucede con el móvil cuando el gráfico alcanza la cresta de una loma.



Justifica tu respuesta.

7.- Si la derivada de una función $f(x)$ al cruzar el punto $x_0 \in Df$ cambia de positiva a negativa implica que:

(i) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo relativo

ii) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo absoluto

iii) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo relativo

iv) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto

v) $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión

Justifica tu respuesta.

8.- Si la derivada de una función $f(x)$ al cruzar el punto $x_0 \in Df$ cambia de negativa a positiva implica que-.

i) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo relativo
ii) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo absoluto
iii) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo relativo
iv) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto
v) $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión.

Justifica tu respuesta.

9.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?.

i) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en x_0
ii) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un máximo local en x_0
iii) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un mínimo local en x_0
iv) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$ entonces f tiene un punto de inflexión en x_0
v) Ninguna de las anteriores.

Justifica tu respuesta.

10.- Un modelo para la propagación de un rumor dice que la razón de propagación es proporcional al producto entre el número de personas que han escuchado el rumor y el número de personas que no lo han escuchado.

En un pueblo de 1500 habitantes, Juanita recibe de su novio un anillo de brillantes y le cuenta a sus amigas más cercanas, de manera que el lunes, 8 personas conocen la noticia. El miércoles de la misma semana 80 personas se han enterado.

La ecuación diferencial que representa el problema es:

i) $\frac{dP}{dt} = k(1500 - P)$

ii) $\frac{dP}{dt} = kP$

iii) $\frac{dP}{dt} = kP(1500 - P)$

iv) $\frac{dP}{dt} = 1500P$

v) $\frac{dP}{dt} = P(1500 - P)$

Determina la solución general de la ecuación diferencial.

Lola

① Demostración con un ejemplo:

$f(x) = ax^2 + bx + c.$

$\boxed{f'(x) = 2ax + b}$ → por $f(x) = x^n \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$

función derivada

Ahora con la formula correcta de limite:

¡No es una justificación!

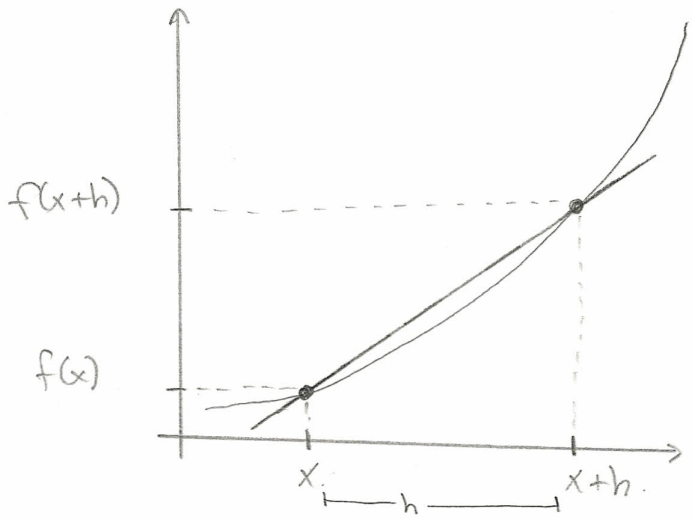
$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \Rightarrow \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h}$$

$$\frac{ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h} = \frac{h(2ax + ah + b)}{h}$$

$$2ax + \cancel{ah}^{\to 0} + b. = \boxed{f'(x) = 2ax + b}$$

Esto corresponde a aplicar la definición

② Para funciones de valores reales de una sola variable, la derivada en un pto representa el valor de la pendiente de la recta tangente a la grafica de la funcion en dicho pto.



?

③ Se demuestra igual que la pregunta 1. (Es una aplicación no demostración!)

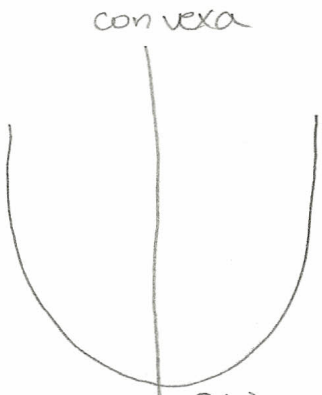
Lo de la pregunta ① sería acá tomado como ejemplo ilustrativo.

④ $y = \frac{1}{12} x^6$

$y'(x) = 6 \cdot \frac{1}{12} x^5$

$y'(x) = \frac{1}{2} x^5$

⑤



f(x) decreciente
f'(x) negativa.
f'(x) creciente.
f'' > 0
decrecimiento lento.

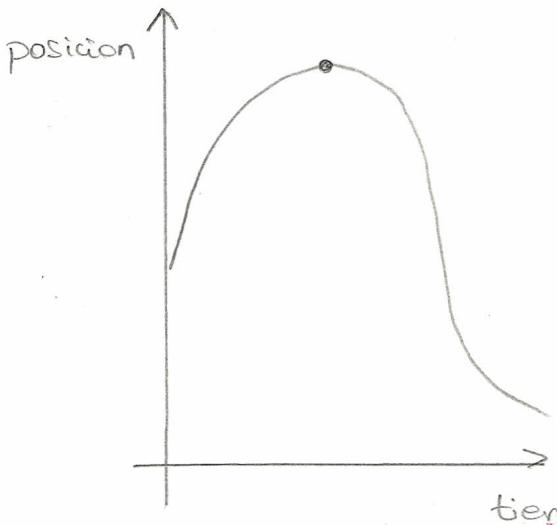
f(x) creciente
f'(x) positiva
f'(x) creciente.
f''(x) positiva
crecimiento rapido.

f(x) creciente.
f'(x) positiva.
f'(x) decreciente
f''(x) < 0
crecimiento lento.

f(x) decreciente
f'(x) < 0.
f' decreciente
f'' < 0.
decrecimiento rapido.

* Son todas falsas

⑥



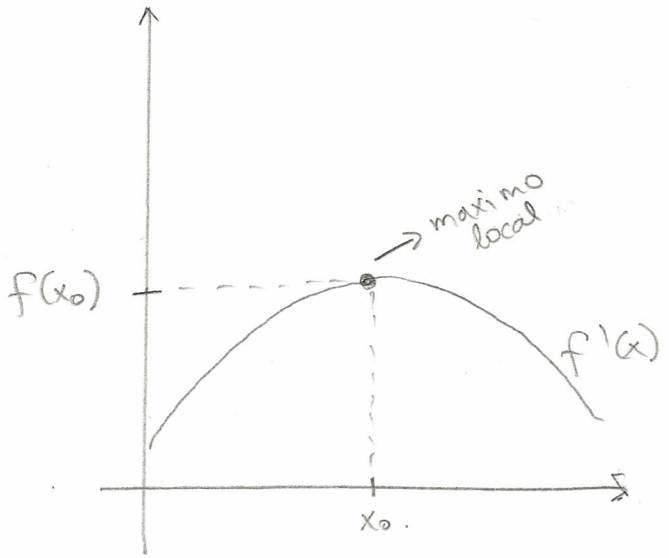
Este grafico representa el cambio de posicion al aumentar la velocidad por unidad de tiempo.

Por lo tanto la pendiente representa el cambio de velocidad.

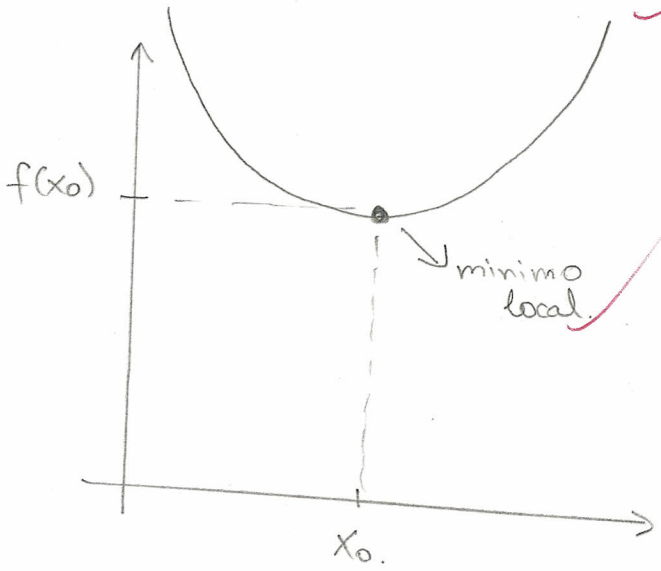
En este caso el "movil" en la cresta de la loma significa que alcanza la maxima velocidad.

la gráfica corresponde a la posición
no es la gráfica de la razón de cambio

(7)



(8).



(9) Por convención:

a) f alcanza un max local en x_0
$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$.

b) f alcanza un min. local en x_0.
$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$.

Criterio segunda derivada

UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. CS. QCAS Y FARMACÉUTICAS
Matemáticas I 2004
Prof. María Angélica Vega Urquieta.

6/10

NOMBRE: Nancy .....

PRUEBA DE MEDICIÓN DE ESTÁNDARES.

1.- La derivada de una función ordenada en el punto x_0 es el número obtenido mediante la expresión:

i) $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

ii) $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0}$

iii) $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)}{h}$, si existe

iv) $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0}$, si existe

(v) $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, si existe

Justifica tu respuesta.

2.- La derivada en el punto x_0 es un número que geométricamente representa:

i) La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$

(ii) La pendiente de la recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ → la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x)$

iii) La pendiente de la recta que pasa por el punto $(x_0+h, f(x_0+h))$

iv) El valor del área de un rectángulo de altura $f(x_0)$

v) El valor del área bajo la curva $f(x)$ entre los puntos x_0 y x_0+h

Justifica tu respuesta.

3.- Se define la función derivada de la función $f(x)$ que denota $f'(x)$ por

i) $f'(x) = \dfrac{f(x+h-f(x)}{h}$

ii) $f'(x) = \dfrac{f(x+h-f(x)}{x}$

iii) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)}{h}$, si existe

(iv) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si existe

Justifica tu respuesta.

4.- $y=\frac{1}{12}x^6$, entonces la función derivada es:

i) $y'=6x^5$

ii) $y'=\frac{1}{12}\frac{x^7}{7}=\frac{1}{84}x^7$

iii) $y'=\frac{x^6}{72}$

iv) $y'=\frac{1}{2}x^5$

v) $y'=\frac{1}{72}x^5$

Justifica tu respuesta.

5.- ¿Cuál (Cuáles) de las siguiente(s) informacione(s) es (son) verdadera(s)?,

i) Si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$, $f'(x)>0$ y la gráfica es cóncava entonces $f'(x)$ es creciente.

ii) Si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$, $f'(x)>0$ y la gráfica convexa entonces $f'(x)$ es decreciente.

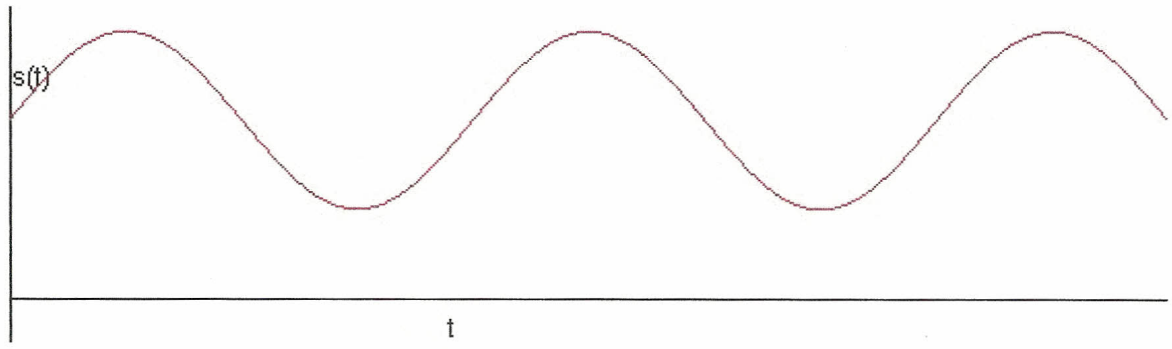
iii) Si $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$, $f'(x)<0$ y la gráfica es cóncava $\Rightarrow$ $f'(x)$ es creciente.

iv) Si $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$, $f'(x)<0$ y en la gráfica convexa entonces $f'(x)$ es decreciente.

v) Ninguna de las anteriores.

Justifica tu respuesta.

6.- El siguiente es el gráfico de la posición de un móvil que se mueve en línea recta. ¿Qué sucede con el móvil cuando el gráfico alcanza la cresta de una loma.



Justifica tu respuesta.

7.- Si la derivada de una función $f(x)$ al cruzar el punto $x_0 \in Df$ cambia de positiva a negativa implica que:

i) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo relativo

ii) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo absoluto

iii) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo relativo

iv) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto

v) $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión

Justifica tu respuesta.

8.- Si la derivada de una función $f(x)$ al cruzar el punto $x_0 \in Df$ cambia de negativa a positiva implica que-.

i) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo relativo
ii) $(x_0, f(x_0))$ es un máximo absoluto
iii) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo relativo
iv) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto
v) $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión.

Justifica tu respuesta.

9.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?.

i) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en x_0
ii) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un máximo local en x_0
iii) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un mínimo local en x_0
iv) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$ entonces f tiene un punto de inflexión en x_0
v) Ninguna de las anteriores.

Justifica tu respuesta.

10.- Un modelo para la propagación de un rumor dice que la razón de propagación es proporcional al producto entre el número de personas que han escuchado el rumor y el número de personas que no lo han escuchado.

En un pueblo de 1500 habitantes, Juanita recibe de su novio un anillo de brillantes y le cuenta a sus amigas más cercanas, de manera que el lunes, 8 personas conocen la noticia. El miércoles de la misma semana 80 personas se han enterado.

La ecuación diferencial que representa el problema es:

i) $\frac{dP}{dt} = k(1500 - P)$

ii) $\frac{dP}{dt} = kP$

iii) $\frac{dP}{dt} = kP(1500 - P)$

iv) $\frac{dP}{dt} = 1500P$

v) $\frac{dP}{dt} = P(1500 - P)$

Determina la solución general de la ecuación diferencial.

Nancy

1. La derivada de la función ordenada en el punto x_0 es:

V) $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, si existe

Escogí esta alternativa, ya que la derivada de la función en un punto determinado equivale a la pendiente de la recta tangente. ✓

2. La derivada en el punto x_0 es un número que geométricamente representa:

II). La pendiente de la recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$

Tomé esta alternativa como correcta por la definición de derivada en donde me dice que es la pendiente de la recta tangente al gráfico $f(x)$.
También me incliné por la alternativa I) la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$, pero recordé que me pedían la derivada en el punto x_0. La confusión principalmente fue porque en el cálculo de pendiente utilizamos dos puntos de referencia. ✓

3. Se define la función derivada de la función $f(x)$ que denota $f'(x)$ por

IV) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si existe.

Considero que esta pregunta es similar a la primera, sólo varía en el punto, puesto que la 1° es en un punto determinado y esta es para todo punto. ✓
Esta es como la definición general.

4. $y = \frac{1}{12} x^6$, entonces la función derivada es:

IV) $y' = \frac{1}{2} x^5$

$\frac{1}{12} \cdot 6x^5 = \frac{1}{2} x^5$

$\frac{1}{12}$ es constante, así que no lo derivo. ✓

5. ¿Cuál o cuales de las sgtes. afirmaciones es falsa?

II) Si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$, $f'(x)>0$ y la gráfica convexa entonces $f'(x)$ es decreciente. ✓

La gráfica tendría que ser concava puesto que el $f'(x)>0$ y así el $f'(x)$ sería creciente. Para que sea decreciente el $f'(x)<0$ y $f(x)$ decreciente.

Incompleto

III) Si $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$, $f'(x)<0$ y la gráfica es concava $f(x)$ es creciente.

En este caso la gráfica tendría que ser convexa porque el $f'(x)<0$ y el $f'(x)$ por ende decreciente.

Incompleto

falta analizar i) ii)

(La pregunta la considero un poco ambigua, porque cuando se habla de la gráfica no estoy muy segura si es de la $f(x)$ o la $f'(x)$).

7. Si la derivada de la función $f(x)$ al cruzar el punto $x_0 \in Df$ cambia de positiva a negativa implica que:

I) $(x_0, f(x_0))$ es un maximo relativo

NO

Es un máximo relativo porque no conoce la función y todos los puntos de ella. odemos el cambio de + a - ~~quiere un cambio de concavidad en la función $f(x)$,~~ haciendose un ~~máximo~~ relativo.

no necesario, solo es con la segunda derivada.

6. Es un grafico que denota la velocidad con que se mueve el móvil.

$\frac{S(t)}{t} = V.$

Cuando el movil alcanza la cuesta de la loma del gráfico quiere decir que se alcanza su máxima velocidad local y después comienza a decender esa velocidad (funa). Luego

¡ no hay conclusión !

8. Si la derivada de una función $f(x)$ al cruzar el punto $x_0 \in Df$ cambia de negativa a positiva implica que.

III) $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo relativo ✓ Criterio Primera Derivada

Similar a la pregunta 7, pero inverso cree el cambio es de $-$ a $+$, generando un cambio de concavidad. ✗ no

9. ¿Cuál de las sgtes afirmaciones es la correcta?

IV) Si $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0)=0$ entonces f tiene un punto de inflexión en x_0 ¡NO es suficiente!

Si $f'(x_0)=0$ quiere decir que posiblemente hay cambio de concavidad que genera un máximo o un mínimo.

La $f''(x_0)=0$ quiere decir que $x_0=0$ y la coordenada es $(0, f(x))$, pero esto no asegura el cambio de concavidad en la derivada, por sí sola.

Por eso considero los dos criterios juntos.

(esta pregunta la respondo con desconfianza porque solo recuerdo bien que para sacar el pto. de inflexión había que igualar la $f''(x)$ a 0 y despejar, y sacar los máx y mín de la derivada).

10: v) $\frac{dP}{dt} = P(1500-P)$. La razón de propagación es $\frac{dP}{dt}$ = velocidad y se dice que es proporcional al producto (multiplicación) del n° de personas que han escuchado el rumor y el n° de personas que no lo han escuchado.

(no recuerdo bien como desarrollar esto) ✗

P = n° de personas que saben.

$1500-P$ = n° de personas que no saben.

Lunes = 8 personas saben.

Miércoles: 80 personas saben.

No es el modelo

ANEXO 6: ENCUESTA SOBRE LAS CREENCIAS DE LOS ESTUDIANTES

1. Encuesta de validación
2. Encuesta de Validación de Juan Ignacio.
3. Encuesta de Validación de Daniela.
4. Encuesta de Validación de Lola.
5. Encuesta de Validación de Nancy.

Anexo 6

Encuesta de Validación

I) De los Módulos de clases.

1) ¿Piensas que la forma en que están estructurado y tratado los temas y las actividades pertinentes, en los **módulos de clases** haya contribuido a un mejor aprendizaje?

	Explica brevemente tu respuesta
Si	
No	

2) ¿Crees que los módulos de clases te reportaron algún beneficio?

	¿Cuáles?
Si	
No	

3) ¿Te gustaría sugerir alguna mejora?

	¿Cuáles?
Si	
No	

4) Crees que podrías hacer alguna sugerencia a los módulos, para que estos permitieran un conocimiento más perdurable en el tiempo?

	Explica brevemente
Si	
No	

5) ¿Los módulos de clases te permitieron entender conceptos que no habías logrado realmente comprender antes?

	Explica brevemente
Si	
No	

II) De los laboratorios Computacionales.

1) Tuviste alguna dificultad para aprender la simbología del software matemático MAPLE?

	Explica brevemente, si la respuesta es afirmativa
Si	
No	

2) ¿Crees que el apoyo computacional te ayudó a comprender mejor los temas tratados en el aula?

	Explica brevemente.
Si	
No	

3) ¿Crees que debería usarse apoyo computacional en la mayoría de tus asignaturas?

	Explica brevemente porqué.
Si	
No	

4) ¿Crees que los conocimientos adquiridos en el laboratorio sean más permanentes en el tiempo?

	Explica brevemente porqué.
Si	
No	

5) ¿Crees que podrías hacer alguna sugerencia que permita que estos laboratorios permitan un conocimiento más perdurable?

	Explica brevemente, ¿cuáles?
Si	
No	

6) Crees que es importante el apoyo computacional?

	Explica brevemente porqué.
Si	
No	

7) ¿Crees que el ordenador incentiva a aprender en forma autodidacta?

	Explica brevemente, porqué
Si	
No	

III

8) ¿Percibiste alguna vez si con el uso del software matemático estabas construyendo conocimiento?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	
No	

IV) De la Interacción Social

1. ¿Crees que aprendes mejor si estudias en grupo?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	
No	

2. ¿Realizaste fuera del aula algunas de las actividades libres de los módulos de clases en forma grupal?

	¿Porqué ?
Si	
No	

3. ¿Crees que este método de usar módulos de clases, permite una interacción más directa con tus compañeros?

	Explica brevemente
Si	
No	

4. ¿Crees que este método facilita la interacción con tu profesor?

	Explica brevemente
Si	
No	

5)¿Crees que aprendes mejor si los trabajos de laboratorios son grupales?

	Explica brevemente, porqué.
Si	
No	

6) ¿Crees que el laboratorio permite una interacción con tus compañeros?

	Explica brevemente porqué.
Si	
No	

7)¿Crees que el laboratorio permite una interacción más directa con tu profesor?

	Explica brevemente porqué.
Si	
No	

8)Crees que aprendes mejor si los trabajos de laboratorio computacionales son en forma grupal?

	Explica brevemente porqué.
Si	
No	

Encuesta de Validación

Nombre: Juan Ignacio

I) De los Módulos de clases.

1) ¿Piensas que la forma en que están estructurado y tratado los temas y las actividades pertinentes, en los **módulos de clases** haya contribuido a un mejor aprendizaje?

	Explica brevemente tu respuesta
Si	
No	Debido a la baja preparación en matemática, la mayoría de los alumnos no comprenden los módulos, en mi caso particular me sirven como recordatorio, pero para el proceso de aprendizaje prefiero un libro con mas y variados ejemplos.

2) ¿Crees que los módulos de clases te reportaron algún beneficio?

	¿Cuáles ?
Si	Tener la materia a mano si es que se me olvida algo teórico
No	

3) ¿Te gustaría sugerir alguna mejora?

	¿Cuáles ?
Si	Por lo menos que en los primeros años los ejemplos fueran de peras y manzanas, progresando a expresiones mas matematicas. Muuuuuuchos mas ejemplos.
No	

4) Crees que podrías hacer alguna sugerencia a los módulos, para que estos permitieran un conocimiento más perdurable en el tiempo?

	Explica brevemente
Si	Insisto con la mayor cantidad de ejemplos, y tal ves explicar con algoritmos mas explícitos (recetas de cocina)
No	

5) ¿Los módulos de clases te permitieron entender conceptos y / o procesos que no habías logrado realmente comprender antes?

	Explica brevemente
Si	
No	A mi personalmente no, entiendo casi todo a la primera, o pregunto hasta entenderlo al profesor encargado.

II) De los laboratorios Computacionales.

1) Tuviste alguna dificultad para aprender la simbología del software matemático MAPLE?

	Explica brevemente, si la respuesta es afirmativa
Si	
No	Yo en particular no, pero sabia programar algunas cosas básicas en java,

2) ¿Crees que el apoyo computacional te ayudó a comprender mejor los temas tratados en el aula?

	Explica brevemente.
Si	
No	No, pero es útil a la hora de estudiar para comprobar resultados.

3) ¿Crees que debería usarse apoyo computacional en la mayoría de tus asignaturas?

	Explica brevemente porqué.
Si	En varias asignaturas seria útil, pero programar en en C++, Pitón o Perl. Maple es un poco restringido.
No	

4) ¿Crees que los conocimientos adquiridos en el laboratorio sean más permanentes en el tiempo?

	Explica brevemente porqué.
Si	
No	Mas que las clases teóricas no. Los alumnos no usan maple para nada. Yo si, pero soy especial.

5) ¿Crees que podrías hacer alguna sugerencia que permita que estos laboratorios permitan un conocimiento más perdurable?

	Explica brevemente, ¿cuáles?
Si	Plantear problemas mas complejos e ingieneriles que se simplifiquen notoriamente si se usa maple.
No	

6) ¿Crees que es importante el apoyo computacional?

	Explica brevemente porqué.
Si	Simplifica la vida que el computador realice los calculos, mientras uno se preocupa de darles sentido en los problemas reales.
No	

7) ¿Crees que el ordenador incentiva a aprender en forma autodidacta?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	
No	Si no te gusta programar, usar maple es una tortura.

8) ¿Percibiste alguna vez si con el uso del software matemático estabas construyendo conocimiento?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	Si, pero ver discovery channel construye conocimiento.
No	

III) De la Interacción Social.

1. ¿Crees que aprendes mejor si estudias en grupo?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	Si, cuando explico o me preguntan aprendo mas.
No	

2) ¿Realizaste fuera del aula algunas de las actividades libres de los módulos de clases en forma grupal?

	¿Porqué ?
Si	Alguna vez estudiando para algún control.
No	

3) ¿Crees que este método de usar módulos de clases, permite una interacción más directa con tus compañeros?

	Explica brevemente
Si	al no entender el modulo, los compañeros nos preguntamos los unos a los otros: ¿entendiste algo?, ¿que querrá decir?
No	

4) ¿Crees que este método facilita la interacción con tu profesor?

	Explica brevemente
Si	
No	El profesor tiende a decepcionarse de que la gente no lee o no entiende el modulo.

5) ¿Crees que aprendes mejor si los trabajos de laboratorios son grupales?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	
No	No, los haría el tipo que sabe programar, o sea yo.

6) ¿Crees que el laboratorio permite una interacción con tus compañeros?

	Explica brevemente porqué.
Si	
No	No nos dejan hablar entre los compañeros.

Encuesta de Validación

Nombre: Daniela

I) De los Módulos de clases.

1) ¿Piensas que la forma en que están estructurado y tratado los temas y las actividades pertinentes, en los **módulos de clases** haya contribuido a un mejor aprendizaje?

	Explica brevemente tu respuesta
Si	Creo que el ramo está bien estructurado para provocar una buena respuesta de parte de los alumnos.
No	

2) ¿Crees que los módulos de clases te reportaron algún beneficio?

	¿Cuáles ?
Si	Personalmente los módulos fueron de gran ayuda en todas las Matemáticas, a modo de apoyo fuera de las clases teóricas.
No	

3) ¿Te gustaría sugerir alguna mejora?

	¿Cuáles ?
Si	Quizás contemplar más ayudantías o ayudantes que se comprometan con lo que hacen, debo reconocer que algunos ayudantes eran excelentes, pero otros dejaban mucho que desear.
No	

4) Crees que podrías hacer alguna sugerencia a los módulos, para que estos permitieran un conocimiento más perdurable en el tiempo?

	Explica brevemente
Si	
No	Considero que no hay sugerencias que puedan hacer que el conocimiento perdure mas en el tiempo.

5) ¿Los módulos de clases te permitieron entender conceptos que no habías logrado realmente comprender antes?

	Explica brevemente
Si	Sin duda los módulos son una ayuda importante para manejar conceptos que quizás en clases no habían quedado suficientemente claros, pero al revisar los módulos se aclaraban muchas dudas.
No	

II) De los laboratorios Computacionales.

1) Tuviste alguna dificultad para aprender la simbología del software matemático MAPLE?

	Explica brevemente, si la respuesta es afirmativa
Si	La verdad no se si es por un problema personal, me refiero a que la verdad no tengo muchas aptitudes en el área computacional, o quizás porque las simbologías eran demasiadas.
No	

2) ¿Crees que el apoyo computacional te ayudó a comprender mejor los temas tratados en el aula?

	Explica brevemente.
Si	
No	Personalmente fue más provechoso estudiar de textos que quizás utilizar el apoyo computacional.

3) ¿Crees que debería usarse apoyo computacional en la mayoría de tus asignaturas?

	Explica brevemente porqué.
Si	
No	Creo que en algunas no es necesario, debería evaluarse minuciosamente algunos ramos en los que debería incluirse este apoyo, en Matemática debería estar si o si, quizás enfocado de una manera distinta para que sea mas útil.

4) ¿Crees que los conocimientos adquiridos en el laboratorio sean más permanentes en el tiempo?

	Explica brevemente porqué.
Si	Quizás si se evalúa alguna manera de hacerlos mas aplicables podrían ser mas permanentes en el tiempo.
No	

5) ¿Crees que podrías hacer alguna sugerencia que permita que estos laboratorios permitan un conocimiento más perdurable?

	Explica brevemente, ¿cuáles?
Si	Quizás hacerlos mas dinámicos, grupales y aplicables.
No	

6) ¿Crees que es importante el apoyo computacional?

	Explica brevemente porqué.
Si	Sin duda, aunque no me fue lo útil que hubiese querido.
No	

7) ¿Crees que el ordenador incentiva a aprender en forma autodidacta?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	Si bien ayuda a aprender en forma autodidacta, es bueno también confirmar que lo aprendido es correcto y así no cometer errores.
No	

8) ¿Percibiste alguna vez si con el uso del software matemático estabas construyendo conocimiento?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	
No	La verdad era aplicable para sacar valores de manera rápida y fácil, pero sin duda alguna de forma manual el aprendizaje es más rápido y efectivo.

III) De la Interacción Social.

1. ¿Crees que aprendes mejor si estudias en grupo?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	Dependiendo del ramo, en el área Matemática sin duda creo que se aprende mas en grupo y discutiendo diversos métodos para un mismo ejercicio.
No	

2) Realizaste fuera del aula algunas de las actividades libres del módulo en forma grupal?

	¿Porqué ?
Si	Para repasar conceptos que no me habían quedado claros y estudiar en forma grupal.
No	

3) ¿Crees que este método de usar módulos de clases permite una interacción más directa con tus compañeros?

	Explica brevemente
Si	
No	Con los compañeros no mucho, ya que las clases teóricas pocas veces consideraron el trabajo grupal en clases, por lo que la interacción con los compañeros era más bien escasa.

4) ¿Crees que este método de usar módulos de clases, facilita la interacción con tu profesor?

	Explica brevemente
Si	Considero que la interacción con el Profesor es la adecuada y la metodología utilizada es la correcta.
No	

5) ¿Crees que aprendes mejor si los trabajos de laboratorios son grupales?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	Sin duda, los laboratorios si bien son importantes, durante las escasas horas de clases es poco lo que se aplica, en cambio en grupo creo que seria mucho más provechoso el trabajo en los laboratorios.
No	

Encuesta de Validación

Nombre: Lola

I) De los Módulos de clases.

1) ¿Piensas que la forma en que están estructurado y tratado los temas y las actividades pertinentes, en los **módulos de clases** haya contribuido a un mejor aprendizaje?

	Explica brevemente tu respuesta
Si	Ya que da un orden lógico de explicación a los temas tratados, con actividades según el avance de los contenidos que se van desarrollando.
No	

2) ¿Crees que los módulos de clases te reportaron algún beneficio?

	¿Cuáles ?
Si	El desarrollo del estudio en forma consecuente e identificando los contenidos de cada unidad en forma clara.
No	

3) ¿Te gustaría sugerir alguna mejora?

	¿Cuáles ?
Si	A veces, la redacción de las explicaciones no eran muy completas, estaban muy resumidas, a veces costaba entender si uno estudiaba sólo de ahí.
No	

4) Crees que podrías hacer alguna sugerencia a los módulos, para que estos permitieran un conocimiento más perdurable en el tiempo?

	Explica brevemente
Si	
No	Creo que están bien enfocados.

5) ¿Los módulos de clases te permitieron entender conceptos que no habías logrado realmente comprender antes?

	Explica brevemente
Si	
No	Me acuerdo que la derivada la aprendí en la clase, sin el módulo. Éste fue un complemento.

II) De los laboratorios Computacionales.

1) Tuviste alguna dificultad para aprender la simbología del software matemático MAPLE?

	Explica brevemente, si la respuesta es afirmativa
Si	Más que costarme la simbología me costó mucho aprender el orden de códigos que había que ingresar.
No	

2) ¿Crees que el apoyo computacional te ayudó a comprender mejor los temas tratados en el aula?

	Explica brevemente.
Si	Me acuerdo mucho de la sumatoria de Riemann. (aunque es de integral). De derivada, en realidad no me acuerdo que hicimos en Maple… yo sólo supongo que si utilizamos Maple para hacerlas.
No	

3) ¿Crees que debería usarse apoyo computacional en la mayoría de tus asignaturas?

	Explica brevemente porqué.
Si	Incluyendo además de Mates, Estadística, Fisicoquímica I… quizás Orgánica II, algo que muestre los mecanismos de reacción en un esquema animado…
No	

4) ¿Crees que los conocimientos adquiridos en el laboratorio sean más permanentes en el tiempo?

	Explica brevemente porqué.
Si	Siempre uno se acuerda, nunca de todo… pero si es útil para comprender.
No	

5) ¿Crees que podrías hacer alguna sugerencia que permita que estos laboratorios permitan un conocimiento más perdurable?

	Explica brevemente, ¿cuáles?
Si	¿Hacer más laboratorios? Supongo que eso.
No	

6) ¿Crees que es importante el apoyo computacional?

	Explica brevemente porqué.
Si	Simplemente porque es una herramienta útil, que sirve siempre… es como aprender a sumar.
No	

7) ¿Crees que el ordenador incentiva a aprender en forma autodidacta?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	El aprendizaje es más gráfico.
No	

8) ¿Percibiste alguna vez si con el uso del software matemático estabas construyendo conocimiento?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	Jajaja!! En el lab entendí bien que era la sumatoria de Riemann. ☺
No	

III) De la Interacción Social.

1) ¿Crees que aprendes mejor si estudias en grupo?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	Creo que es un aspecto personal. A mi me sirve trabajar en grupo. A todos no. Soy partidaria de actividades en grupo como personales ambas con igual importancia.
No	

2) ¿Realizaste fuera del aula algunas de las actividades libres en forma grupal?

	¿Porqué ?
Si	Porque tenía que estudiar para el ramo.
No	

3) ¿Crees que este método de usar módulos de clases, permite una interacción más directa con tus compañeros?

	Explica brevemente
Si	Porque, unifica los tipos de ejercicios que uno desarrolla, por tanto se genera empatía frente a los compañeros y uno se dedica a que todos los comprendan en forma íntegra.
No	

4) ¿Crees que este método facilita la interacción con tu profesor?

	Explica brevemente
Si	
No	Porque, es más fácil poder estudiar sin necesidad de acudir a las clases y compatibilizando los módulos con los libros disponibles en la biblioteca.

5) ¿Crees que aprendes mejor si los trabajos de laboratorios son grupales?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	
No	Definitivamente no, ya dije… en grupos siempre uno hace todo (o casi todo).

Encuesta de Validación

Nombre: Nancy

I) De los Módulos de clases.

1) ¿Piensas que la forma en que están estructurado y tratado los temas y las actividades pertinentes, en los **módulos de clases** haya contribuido a un mejor aprendizaje?

	Explica brevemente tu respuesta
Si	Pero creo que deberían ser aún mas concisos o con más ejemplos.
No	

2) ¿Crees que los módulos de clases te reportaron algún beneficio?

	¿Cuáles ?
Si	El ser quizás más autosuficiente ya que si no puedes ir a clases, lees y estudias los módulos te coloca mas al día.
No	

3) ¿Te gustaría sugerir alguna mejora?

	¿Cuáles ?
Si	Una ayuda de cómo comenzar a resolver los problemas de las guías y que traigan el resultado.
No	

4) Crees que podrías hacer alguna sugerencia a los módulos, para que estos permitieran un conocimiento más perdurable en el tiempo?

	Explica brevemente
Si	Llevarlos a situaciones del diario vivir o relacionados con lo que realmente se está estudiando.
No	

5) ¿Los módulos de clases te permitieron entender conceptos que no habías logrado realmente comprender antes?

	Explica brevemente
Si	Por lo general me ayudaron bastante.
No	

II) De los laboratorios Computacionales.

1) Tuviste alguna dificultad para aprender la simbología del software matemático MAPLE?

	Explica brevemente, si la respuesta es afirmativa
Si	Un poco, pero después uno se va familiarizando con el programa si es constante.
No	

2) ¿Crees que el apoyo computacional te ayudó a comprender mejor los temas tratados en el aula?

	Explica brevemente.
Si	Pero sólo algunos temas. Siempre todo lo que se hace mas practico ayuda a comprender mejor.
No	

3) ¿Crees que debería usarse apoyo computacional en la mayoría de tus asignaturas?

	Explica brevemente porqué.
Si	
No	No sé si en todas, pero la habilidad computacional es algo que en estos momentos es muy importante.

4) ¿Crees que los conocimientos adquiridos en el laboratorio sean más permanentes en el tiempo?

	Explica brevemente porqué.
Si	
No	Para ser así uno debe ser práctico y metódico. Hay mucho comandos que pasado el tiempo uno los olvida si no practica. Si se realizara en todos los cursos serían conocimientos permanentes.

5) ¿Crees que podrías hacer alguna sugerencia que permita que estos laboratorios permitan un conocimiento más perdurable?

	Explica brevemente, ¿cuáles?
Si	Que se realizara en todos los cursos matemáticos y no solo en los dos primeros.
No	

6) ¿Crees que es importante el apoyo computacional?

	Explica brevemente porqué.
Si	Porque a pesar de que puede ser complicado al principio, existen ejercicios muy difíciles y tediosos de resolver sin maple y con la ayuda de este problema al final todo es más sencillo.
No	

7) ¿Crees que el ordenador incentiva a aprender en forma autodidacta?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	Porque uno está practicando. Pero creo que se debería hacer primero un curso de maple solo, para aprender los comandos, etc. Ya que a veces se preocupan más de aprender esas cosas antes de darse cuenta el problema que realmente están solucionando.
No	

8) ¿Percibiste alguna vez si con el uso del software matemático estabas construyendo conocimiento?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	Personalmente sí, pero como mencione anteriormente puede existir gente que este mas preocupada de que función es cada cosa mas que aprender realmente.
No	

III) De la Interacción Social.

1. ¿Crees que aprendes mejor si estudias en grupo?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	Dependiendo del curso si, si son cursos como matemáticos con ejercicios si.
No	

2) ¿Realizaste fuera del aula algunas de las actividades libres en forma grupal?

	¿Porqué ?
Si	Por que, personalmente, al trabajar en grupo puedes resolver en conjunto problemas que se presenten de una formas mas sencilla.
No	

3) ¿Crees que este método permite una interacción más directa con tus compañeros?

	Explica brevemente
Si	Porque ayuda a la relación con quienes estas tomando el curso y a formar un grupo de estudio.
No	

4) ¿Crees que este método facilita la interacción con tu profesor?

	Explica brevemente
Si	Ya que es mas fácil dirigir las preguntas que se tengan .
No	

5) ¿Crees que aprendes mejor si los trabajos de laboratorios son grupales?

	Explica brevemente, ¿porqué?
Si	
No	Porque como mencioné antes se presta para que solo algunos trabajen y los demás no.

ANEXO 7: PRUEBAS ACUMULATIVAS

UNIVERSIDAD DE CHILE FACULTAD DE CIENCIAS QUIMICAS Y FARMACEUTICAS

AREA DE MATEMATICAS (MATEMATICA I) Otoño 2004

.....

PRUEBA A1

1.- El costo (en dólares) de eliminar x % de la polución del agua en cierto riachuelo está dado por

$C(x) = \frac{75.000x}{100-x}$

a) ¿Cuál es el dominio de la función?

b) ¿Para qué valores de x tiene $C(x)$ una interpretación práctica en este contexto?

c) ¿Cuál es el costo de eliminar la mitad de la polución?

d) ¿Qué porcentaje de la polución se puede eliminar con US $20.000?

2.- a) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{2x-3}$ y $, g(x) = x^2 + 3$. Determina $(f \circ g)(x)$

b)

i) Dada $f(x) = 11 - (x-7)^2, x \leq 7$. Determina $f^{-1}(x)$, si existe.

ii) A partir de la gráfica de f, grafica f^{-1}

3.- La empresa acuícola RIO SUR se dedica a el cultivo de salmones. Estos peces emigran desde las partes bajas de un río (B) hacia las partes altas de éste (A) con el fin de desovar. Esta emigración se hace con ganancia de peso de cada pez, pero hay una pérdida en el número de ejemplares.

Los salmones cuando están en (B) pesan en promedio 2.5 kg. Por cada kilómetro que suben en el río , ganan 200 grs. de peso, pero mueren 30 ejemplares.
Si RIO SUR pone en (B) 4500 salmones,

(i) Expresa la cantidad total de kilos de salmones como función de la cantidad de kilómetros que recorren estos peces , río arriba a partir de (B).

(ii) ¿ A cuántos kilómetros de (B) , la cantidad de kilos de salmones es máxima ?

4.- Elegir entre (a) y (b). Contesta sólon (a) o sólo (b).

a) Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |4-x| + \frac{1}{2}$

i) ¿Es el recorrido de f acotado superiormente?. Si lo es , encuentra el conjunto de sus cotas superiores

ii) ¿Es el recorrido de f acotado inferiormente?. Si lo es, encuentra el conjunto de sus cotas inferiores.

b) Resuelve la siguiente inecuación

$$\frac{x^2-1}{1-2x} \geq -1$$

5.- Una población P que crece en un ambiente confinado sigue muchas veces una curva de crecimiento logístico, como la gráfica mostrada

a) Describir la forma en que la población cambia con el tiempo.

a-1) Cuando crece y cuando decrece. ¿ por qué ? Justifica tu respuesta.

a-2) ¿ Qué tipo de crecimiento y/o decrecimiento experimenta la población, uniforme, rápido o lento. Justifica tu respuesta.

b) ¿Cuál es la interpretación práctica de t_0 y L ? Justifica bien tu respuesta.

UNIVERSIDAD DE CHILE FACULTAD DE CIENCIAS QUIMICAS Y FARMACEUTICAS
AREA DE MATEMATICAS (MATEMÁTICA I)

PRUEBA A2 *Fecha : 100604*

NOTA: De estas 5 preguntas debes contestar solamente 4

1.- a) Sea $f(x) = \frac{x^2-x}{2x^2-x-1}$.

Determina los valores de x donde f es discontinua y clasifica las discontinuidades en evitables e infinitas. Se dice que una ***discontinuidad es evitable****, si los límites laterales por la izquierda y derecha existen pero son distintos. Y diremos que la* ***discontinuidad es infinita o inevitable****, si los límites laterales son infinitos positivos o negativos.*

b) Sea $f(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}}$

Determina las asíntotas verticales y horizontales de G_f*, si es que existen.*

2.- La población P de Nicaragua en millones era de 3,6 en 1990 y creció a razón de 3,4 % por año. Si el tiempo se mide en años desde 1990
a) Expresa P como función del tiempo t
b) ¿Cuántos años deben transcurrir para que la población sea de 12 millones ?
c) ¿Qué población habrá en el año 2010 ?

3.- a) Usando la definición de derivada, determina $f'(2)$ *si* $f(x) = 11 - \sqrt{43-7x}$

b) Usando propiedades sobre derivadas determina $f'(x)$ *si*

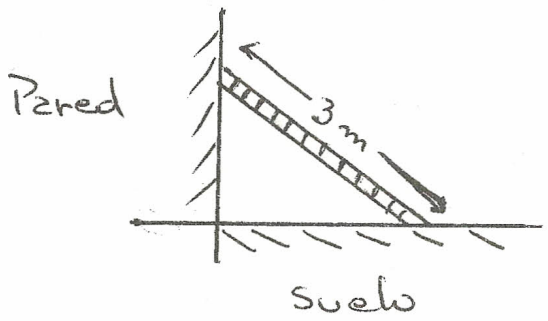
$$f(x) = e^{16x^3 + \frac{16}{x^3}} + log_3\left(\frac{4x^2-5}{16x}\right)$$

4.- Dadas $f(x) = Ln(x^2+1)$ $\qquad f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

$$f''(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

Determina:
a) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento
b) Extremos relativos, si es que existen
c) Concavidades
d) Puntos de inflexión, si es que existen

5.- Una escalera de 3 metros de largo está apoyada en una pared. La base de la escalera comienza a alejarse de la pared con una velocidad de $1\frac{m}{s}$*, entonces el extremo superior de la escalera desciende resbalando por la pared. Cuando este último se encuentra a 1 metro sobre el suelo, ¿a qué velocidad desciende?.*



UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. CS. QCAS Y FARMACEUTICAS
Matemáticas I Otoño

PRUEBA PRE

NOMBRE:..... NOTA:.....

Problema 1.

a) Si un objeto con peso W Newton, se arrastra sobre una superficie horizontal mediante una cuerda atada al objeto, la cual forma un ángulo θ con la horizontal, entonces la magnitud de la fuerza aplicada a través de la cuerda, está dada por $F(\theta) = \frac{\mu W}{\mu sen(\theta)+cos(\theta)}$, donde μ es el coeficiente de fricción entre el objeto y la superficie.

i) Indique, en el contexto del problema, cuál es el dominio de la función $F(\theta)$.
ii) Si $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$, determine el ángulo θ en radianes, para el cual F(θ) es mínima.
iii) Justifique, mediante una tabla de signos para $F'(\theta)$, que el ángulo encontrado en ii) corresponde a un mínimo absoluto, ó bién usando el criterio de la segunda derivada.

Problema 2

Una botella de jugo que está a $0°C$, se deja en una habitación donde la temperatura ambiente es constantemente igual a $28°C$. A los 15 minutos la temperatura de la botella es $10°C$. Suponiendo que la temperatura de la botella de jugo varía según la ley de enfriamiento de Newton.

i) ¿Cuál es la ecuación que modela la temperatura T de la botella de jugo?.
ii) Resuelva el modelo matemático.
iii) Determine cuando la temperatura de la botella será de $15°C$.
iv) ¿Qué temperatura tendrá la botella al término de media hora?.

Problema 3

i) Determine el valor de $\int_0^{\pi} sen\,(\theta)\,[cos\,(\theta)+5]^7\,d\theta$.

ii) Determine si $\int_1^{\infty} \frac{x}{4+x^2}dx$ converge o diverge, si converge indique a qué valor real.

iii) Halle la derivada de la función $f(x) = \frac{x\,cos\,(x^2)}{\sqrt{sen\,(x^2)}}$ y encuentre $f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$

Problema 4

i) Determine el área de la región limitada por eje y, $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$, $y = (x-3)^2$ aproxime los resultados a 2 decimales.

ii) Haga girar la región obtenida en torno al eje X y determine el volumen del sólido de revolución generado.

UNIVERSID AD DE CHILE
FAC. CS. QCAS Y FARMACEUTICAS
Matemáticas I
Lunes 20 de diciembre de 2004

NOMBRE:.....NOTA:.....

PRUEBA

De los cuatro primeros problemas deberás elegir tres y entre el problema cinco y seis debes elegir uno.

1.- La tasa de inmigración neta en Fiji es de n personas al año. La tasa de crecimiento natural (nacimientos menos defunciones) es de 1.5% anual. La población en el año 2004 es de 785 mil personas.
Determine el valor de n si se supone que la población en el año 2020 llegará a dos millones de personas.

2.- La densidad de autos (en autos por milla) en un tramo de 20 millas de la Pennsylvania Turnpike se puede calcular en forma aproximada mediante la ecuación

$$p(x) = 300\left(2 + sen\left(4\sqrt{x + 0.15}\right)\right).$$

en donde x es la distancia en millas desde la caseta de pago de Breezewood.

a) Traza una gráfica de esta función para $0 \leq x \leq 20$.
b) Halla el número total de autos en el tramo de 20 millas.

3.- Bajo ciertas condiciones, cuando el aire se dilata, la presión p y el volumen V satisfacen la relación $pV^{1.4} = cte$. Supongamos que en algún instante t_0 la presión es 50 lb/pulg^2 y el volumen es 32 pulg^3 y decrece a razón de 4 pulg^3/seg.

a) ¿Cuál es la rapidez de cambio de presión en el instante t_0?.
b) Estima la variación de presión y volumen si a partir del instante t_0 ha transcurrido $\frac{1}{4}$ de segundo?

4.- Calcula.

i) $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 4x + 9}\, dx.$

ii) $\int t\, cos\,(2\pi\, t)\, dt.$

5.- La razón a la que se propaga una epidemia en un colegio, es proporcional al número de estudiantes que ha sido infectado y al número de estudiantes que no han sido infectados.
El colegio tiene 2000 estudiantes, 500 tenían la enfermedad inicialmente y 855 estudiantes habían sido infectados al final de la primera semana.

Expresa el número de estudiantes que han sido infectados como función del tiempo (en semanas).

6.- Una epidemia se propaga entre los estudiantes de un colegio. La dirección del colegio tiene la siguiente estadística sobre los alumnos contagiados.

t (días)	0	3	9	12	15	21	27	23
Población infectada	500	640	969	1141	1304	1578	1764	1874

Ajusta una curva logística cuya ecuación diferencial es $\frac{dP}{dt} = k \cdot P(L - P)$, usando el método delineado a continuación.

i) Construye la tabla de la tasa de variación media (ó derivada numérica). Usala para estimar el punto de inflexión y con ello el valor de L.

ii) Usa las primeras dos partes de la tabla de datos y el valor de L estimado en (i) para obtener la función $P = \frac{L}{1 + Ae^{-kt}}$ que modela la propagación de la epidemia. (Nota: $A = \frac{L - P_0}{P_0}$.).

ANEXO 8: GUÍAS DE EJERCICIOS

1. Guía Nº1: Desigualdades

2. Guía Nº2:

(1) Sistemas de Ecuaciones
(2) Ecuaciones
(3) Funciones Exponenciales y Logaritmicas
(4) Modelación de Problemas Contextualizados, cuyo Modelo Matemático es una Función

3. Guía Nº3:

(1) Funciones y Función Derivada
(2) Problemas de Razón de Cambio
(3) Teorema de L'Hôpital
(4) Cálculo de Derivadas
(5) Problemas de Variables Relacionadas
(6) Modelación de Problemas mediante un Problema de Valor Inicial

4. Guía Nº4:

(1) Límite de Funciones
(2) Funciones Continuas

5. Guía Nº5:

Parte 1: Razón de Cambio Media e Instantánea

Parte 2:

(1) Reglas de Derivación
(2) Regla de la Cadena
(3) Razón de Cambio, Variables Relacionadas
(4) Monotonía y Concavidad
(5) Optimización

GUÍA Nº 1

1.- Resuelve las siguientes desigualdades lineales

a) $x+5>2$ *b)* $3x \geq 5$ *c)* $4x+1<2x+3$
d) $3x-5>7x+12$ *e)* $-3x+1<2x+5$ *f)* $11x-7 \leq 4x+2$

2.- Resuelve las siguientes desigualdades no lineales

a) $x^2-5x+6<0$ *b)* $x^2-3x-4>0$ *c)* $2x^2-x-10>0$
d) $3x^2-7x+4<0$ *e)* $3x^2-7x+6<0$ *f)* $x^2-4x+5>0$
g) $(x+1)(x^2-5x+6) \geq 0$ *h)* $(x-2)(3x^2-7x+6) \leq 0$
i) $\frac{3x-2}{x+3} \geq 1$ *j)* $\frac{x-1}{3x-2} - \frac{x+5}{9x^2-4} \leq 0$ *d)* $(x^2+x-6)(2x^2+5x-25)>0$

3.- Demuestra que:

a) Si a y b son dos números reales distintos cualesquiera,entonces hay un número real entre a y b.
b) Si $0<a<b$, *entonces* $0<\sqrt{a}<\sqrt{b}$

4.- Encuentra el mínimo número M *con la propiedad de que para todo* $x \in \mathbb{R}$*:*

a) $2x-x^2 \leq M$ *b)* $1+6x-x^2 \leq M$ *c)* $-19+12x-2x^2 \leq M$

5.- Encuentra el número m *máximo con la propiedad de que para todo* $x \in \mathbb{R}$*:*

a) $m \leq x^2-4x+4$ *b)* $m \leq x^2-4x+29$ *c)* $m \leq x^2+4x+6$

6.- En cada caso encuentra el subconjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ *que satisfacen la condición*

a) $x<x^2-12<4x$ *b)* $\frac{2x+5}{x-2} \geq 0$
c) $|x+1|+5x<|3x-2|$ *d)* $(x-5)^4+|3x-\pi|<-25|7x-8|$

7.- Si a, δ, ϵ *son números positivos, x, y, b son números reales cualesquiera, tales que* $|x-a|<\delta$ *y* $|y-b|<\epsilon$, *entonces prueba que se tiene:*

a) $|(x+y)-(a+b)|<\delta+\epsilon$ *b)* $|xy-ab|<\delta|y|+a\epsilon$
c) $|x^2-a^2|<\delta^2+2a\delta$

8.- Para cada una de las siguientes afirmaciones, determina si es verdadera o falsa

a) $|x+a|+|a-x|$ *es una constante, no depende del valor de x*
b) Si $x>0$, *entonces* $x+\frac{1}{x} \geq 2$
c) Si $x<y$, *entonces* $x^2<y^2$*.(Si tu respuesta es " falso ", agrega condiciones para asegurar la veracidad de la afirmación).*

9.- Demuestra que

a) Si $x \in [2,4]$, *entonces* $2x+3 \in [7,11]$ *b) Si* $x \in]2,4[$, *entonces* $\frac{1}{2x+3} \in]\frac{1}{11}, \frac{1}{7}[$
c) Si $x-5 \in [-2,2]$, *entonces* $x \in [3,7]$ *d) Si* $2x-6 \in]-4,4[$, *entonces* $x \in]1,5[$
e) $(x-x_0) \in [-a,a]$ *si y sólo si* $x \in [x_0-a, x_0+a]$

10.- Prueba que:

a) Si a es un número real cualquiera, entonces $|a|=|-a|$
b) Para todo número real a se cumple: $a \leq |a|$ *y* $-a \leq |a|$

c) Si a y b (b $\neq 0$) son dos números reales cualesquiera, entonces $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

d) Si a y b son dos números reales cualesquiera, entonces $|a-b| \leq |a| + |b|$

e) $|a| = |b|$ *si y sólo si* $(a = b \text{ o } a = -b)$

11.- Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $|x| = 4$ *b)* $|x+3| = 7$ *c)* $|x+3| = |2x+1|$

d) $|3x+1| + x = 7$ *e)* $|2x+3| = 2x+3$ *f)* $|x-2| = |2x+3|$

g) $|x^2-4| = -2x+4$ *h)* $|x^2+2| = 2x+1\, i)\, |3x-5| + x - 7 = 0$

12.- Resuelve las siguientes desigualdades

a) $|x| \leq 4$ *b)* $|x+3| > 7$ *c)* $|x+3| < 7$

d) $|3x-1| < 4$ *e)* $|2x+5| > 3$ *f)* $|x+3| \leq 5$

g) $|3+2x| \leq 2$ *h)* $|5x-3| > 7$ *i)* $|3-x| \geq 1$

j) $|x-2| \leq 2x$ *k)* $|4+x| > 3$ *l)* $|2x+1| \geq 2+x$

m) $|x+5| < 2x-3$ *n)* $|4x-3| < x+2$ *o)* $|x^2-4| < -2x+4$

p) $|x+5| > 2x-3$ *n)* $|4x-3| > x+2$ *o)* $|x^2-4| > -2x+4$

13.- Demuestra que:

a) $|x-a| \leq r \iff x \in [a-r,\, a+r]$, *donde* $r > 0$

b) $|x-3| < 1$ *implica* $6 < x+4 < 8$ *c)* $|x-3| < 1$ *implica* $\frac{1}{8} < \frac{1}{x+4} < \frac{1}{6}$

d) $|x-1| < 2$ *implica* $0 \leq |2x-3| < 5$ *e)* $|x-4| < 1$ *implica* $\frac{1}{3} < \frac{1}{x-2} < 1$

14.- ¿Es el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / |x+3| - |2x-1| > 3\}$ *acotado ?*

15.- ¿Es cierto que el conjunto $A = \left\{ \frac{n-3}{2n+5} / n \in \mathbb{N} \right\}$ *es acotado ?*

16.-¿Es cierto que el conjunto $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} / n \in \mathbb{N} \right\}$ *es acotado ? ¿Podrias encontrar su supremo y su ínfimo ? ¿A tiene máximo y mínimo ?*

17.- ¿Es cierto que todo conjunto finito tiene máximo y tiene mínimo ?

18.- ¿Es cierto que todo subconjunto de $\mathbb{N}$ *tiene un menor elemento ?*

19.- Si $A \subseteq B$ *y B es acotado superiormente, ¿Es cierto que* $Sup(A) \leq Sup(B)$ *?*

20.- Si $A \subseteq B$ *y A es acotado inferiormente, ¿Es cierto que* $Inf\,(A) \leq Inf\,(B)$ *?*

21.- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ *es acotado superiormente, define* $C = \{c / \text{es cota superior de } A\}$ *el cual es un conjunto acotado inferiormente (¿ Porqué ?). ¿Es cierto que* $Inf\,(C) = Sup(A)$ *?*

22.- Si A, $B \subseteq \mathbb{R}$ *, tales que* $a \leq b \,\forall\, a \in A, b \in B$. *¿Es cierto que* $Sup(A) \leq b \,\forall\, b \in B$ *?*

23.- Usa la Propiedad Arquimedeana para mostrar que $A = \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \right\}$ *tiene a 0 como mínimo.*

24.- ¿Es cierto que todo conjunto de números racionales acotado superiormente tiene su supremo en $\mathbb{Q}$*?.*

25.- Para $A \subseteq \mathbb{R}$, *define* $-A = \{-a/a \in A\}$. *¿Es cierto que* A *es acotado superiormente si y solamente si* $-A$ *es acotado inferiormente? ¿Es cierto que Inf* $(-A) = -Sup(A)$?

26.- Para $A, B \subseteq \mathbb{R}$, *define* $A + B = \{a + b/a \in A, b \in B\}$. *¿Es cierto que* A *y* B *son acotados superiormente si y solamente si* $A + B$ *lo es? ¿Es cierto que* $Sup(A + B) = Sup(A) + Sup(B)$?. *Si tu respuesta es negativa agrega condiciones para asegurar la igualdad.*

27.- Sea $x \in \mathbb{R}$, *fijo. Define* $A_x = \{k \in \mathbb{Z}/k \leq x\}$ *el cual es acotado superiormente. (¿Porqué?). Denota el supremo de* A_x *por* $Sup(A_x) = [x]$. *A ese número le llamamos la* ***parte entera de x.***

a) Muestra que $[x] \in \mathbb{Z}$

b) Muestra que si $x \in \mathbb{Z}$, *entonces* $[x] = x$

c) ¿Es cierto que $[x + z] = [x] + [z]$ *?*

d) ¿Es cierto que cualquier número entero se puede escribir de la forma $(-1)^n \left[\frac{n}{2}\right]$, *para un único* $n \in \mathbb{N}$ *?*

e) ¿Es cierto que $[n + x] = n + [x]$, *para cualquier valor de* $n \in \mathbb{N}$ *y de* $x \in \mathbb{R}$ *?*

UNIVERSIDAD DE CHILE FACULTAD DE CIENCIAS QUIMICAS Y FARMACEUTICAS
AREA DE MATEMATICAS
MATEMATICA I OTOÑO 2004

GUÍA Nº 2

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $49^{x-1} = \frac{1}{2401}$ *b)* $(2^{3-x})^{2-x} = 1$ *c)* $4^x + 6 \cdot 2^x = 16$

d) $2^x = \frac{5^{2x} \cdot 7^{1-x}}{6^{x-2}}$ *e)* $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ *f)* $4^{log_4 5} + 3^{log_3 6} = 2^{log_2 x}$

g) $b + log(10^{-2}) = log\left(\frac{1+ax}{1-ax}\right)$ *h)* $\frac{1}{5-log(x)} = 1 - \frac{1}{1+log(x)}$

2.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

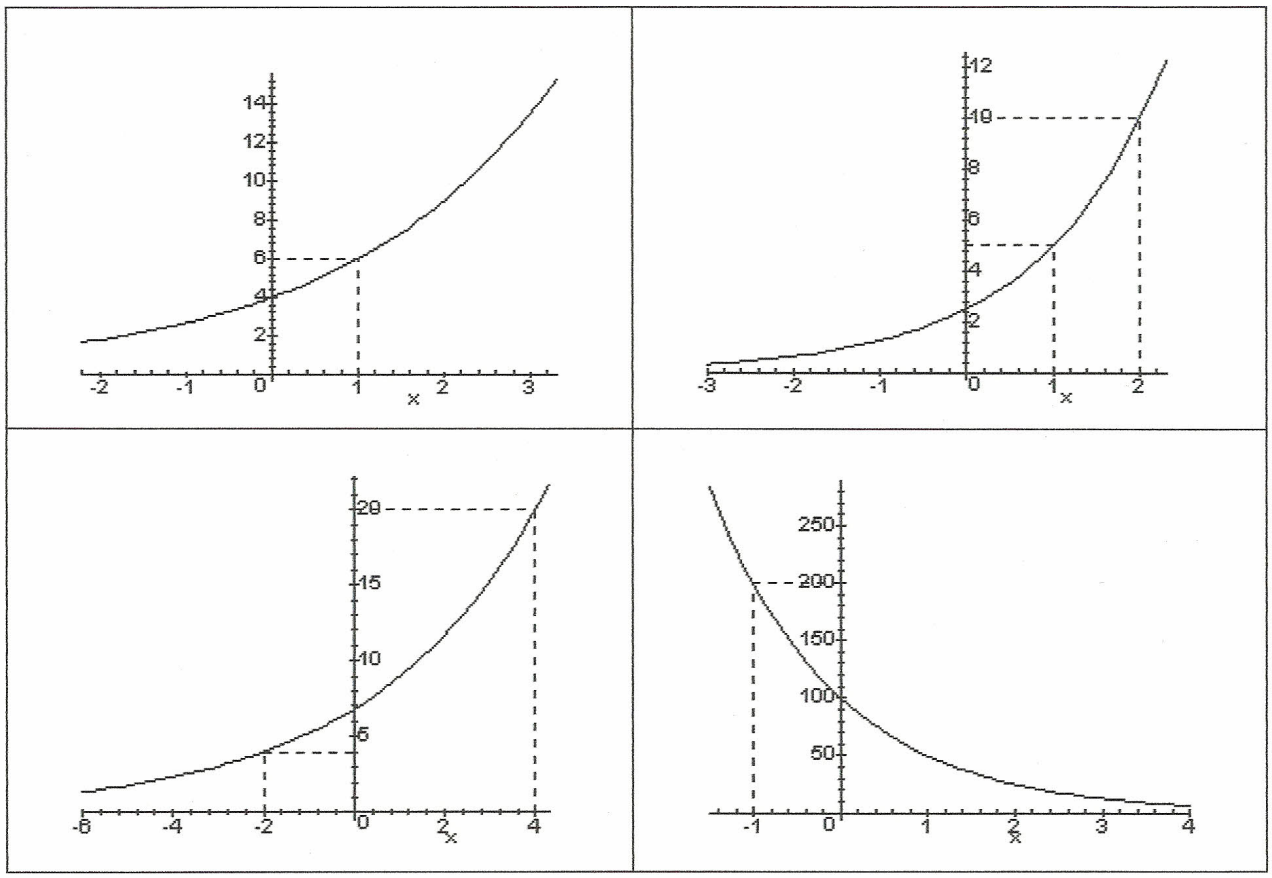
a) $\begin{aligned} 2^{x+y} &= 6^y \\ 3^x &= 3 \cdot 2^{y+1} \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} x - y &= 15 \\ log(x) - log\left(\frac{1}{y}\right) &= 2 \end{aligned}$ *c)* $\begin{aligned} log(x) - log(y) &= 1 \\ log(x) + log(y) &= 3 \end{aligned}$

3.- Demuestra que:

a) $log_a(b) \cdot log_b(c) \cdot log_c(d) = log_a(d)$ *b) Si* $a \cdot k \cdot b = 1$, *entonces* $log_a(k \cdot b) \cdot log_b(k \cdot a) = 1$

c) Si $log_b(c) \cdot log_c(p \cdot a) = 1$, *entonces* $log\left(\frac{b}{p}\right) = log(a)$

4.- Cada gráfica corresponde a una función del tipo $f(x) = k \cdot a^x$. *Calcula k y a, en cada caso .*



1

5.- De la función f (x) = $k \cdot a^x$ *conocemos* $f(0) = 5$ *y* $f(3) = 100$ *¿Cuánto valen k y a ?*

6.- *Si* $f(x) = e^{kx}$ *y* $f(3) = 2$, *determina* $f(9)$.

7.- *En un mismo sistema de coordenadas grafica las funciones* $y = 3^x$, $y = 4^x$

8.- *En un mismo sistema de coordenadas grafica las funciones* $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

9.- *Representa gráficamente las siguientes funciones*

a) $y = e^{-x}$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ c) $y = 2 + e^x$ d) $y = 2 - 3e^x$

e) $y = Ln(1 - x)$ f) $y = log_2 x$ g) $y = 1 - Ln(x + 1)$ h) $y = 3 + Ln(x - 2)$

10.- *En cierto cultivo, inicialmente había 500 amebas que se duplican por bipartición cada día. ¿Cuántas amebas hay después de 30 días?*

11.- *Disponemos de una muestra de 50 gramos de talio radiactivo, cuya vida media es de 3 minutos. ¿Cuánto talio quedará después de media hora? ¿Después de cuánto tiempo habrá desaparecido un 35% de la cantidad inicial?*

12.- *El período de semidesintegración del radio es de 1620 años. Escribe una función exponencial que modela la evolución de un gramo de radio, tomando como unidad de tiempo 1000 años y como origen del tiempo el año 1900. ¿Qué cantidad de radio quedará en los años 2010, 3000 y 4000? ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para tener 0,005gr?*

13.- *El indicador radiactivo* ^{51}Cr, *que tiene una semivida de 27,8 días, se usa en pruebas para localizar la posición de la placenta en mujeres embarazadas. El indicador se pide a un laboratorio y la entrega de un pedido tarda 2 días. ¿Cuántas unidades se deben solicitar para hacer una de estas pruebas se se necesitan 35 unidades en el momenteo de la prueba?*

14.- *Una Coca Cola se saca de un refrigerador, cuya temperatura es de 10° C y se deja en una sala donde la temperatura ambiente es de 30° C. Según la Ley de Enfriamiento de Newton (en este caso ley de calentamiento), la temperatura de la Coca Cola después de t minutos está dada por una función de la forma* $T(t) = 30 - A \cdot e^{kt}$. *Si a los 20 minutos la temperatura de la bebida es de 15° C, ¿cuál será la temperatura a los 40 minutos?, ¿ a los cuántos minutos la temperatura será de 21° C ? ¿cuál será la temperatura en el largo plazo?. Grafica la función* $T(t)$.

15.- *Usando la definición de derivada en un punto, determina:*

a) $f'(-1)$, *si* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ b) $f'(\frac{3}{4})$, *si* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

16.- *Di si son derivables y/o continuas las siguientes funciones en los valores de x que se indican. Determina el valor de la derivada o valor las derivadas laterales*

a) $f(x) = |x^2 - 25|$ $x = -5$; b) $f(x) = (x-3)^{\frac{2}{3}}$ $x = 3$

c) $f(x) = \sqrt{x-1}$ $x = 1$ e) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & si\ x \leq 1 \\ (x-1)^2 & si\ x > 1 \end{cases}$ $x = 1$

17.- *Calcula m, n* $\in \mathbb{R}$ *para que la funcion f sea derivable en x = 1 si*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & si\ x \leq 1 \\ -x^2 + nx & si\ x > 1 \end{cases}$$

18.- Dibuja una curva suave tal que:
i) su pendiente en todas partes sea positiva y gradualmente creciente
ii) su pendiente en todas partes sea negativa y gradualmente decreciente (es decir, se hace cada vez más negativa)
iii) su pendiente sea negativa y gradualmente creciente para $x < 0$, y positiva y gradualmente decreciente para $x>0$

19- Dibuja, en cada caso, una posible gráfica de $y = f(x)$ dada la siguiente información

a) $f'(x) < 0\, si\, x < -1\ y\ 0 < x < 1,\ f'(x) > 0\, si\, -1 < x < 0\ y\ x > 1,$
$f'(-1) = f'(0) = f'(1) = 0$

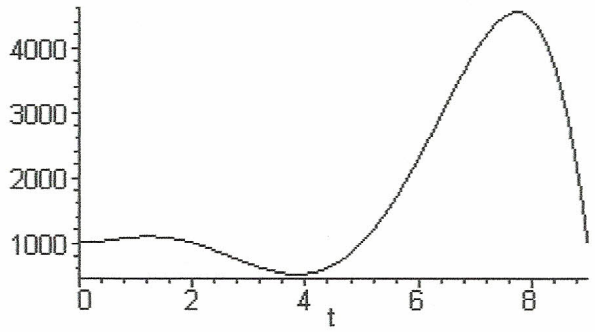
b) $f'(x) > 0\, si\, x < -2\ y\ x > 2,\ f'(x) < 0\, si\, -2 < x < 2,\ f'(-2) = f'(2) = 0$

c) $f(2) = f(4) = 0$, $f(3)$ *está definido,* $f'(x) < 0$ *si* $x < 3$, $f'(3)$ *no está definida,* $f'(x) > 0$ *si* $x > 3$ *y* $f''(x) < 0$ *si* $x \neq 3$

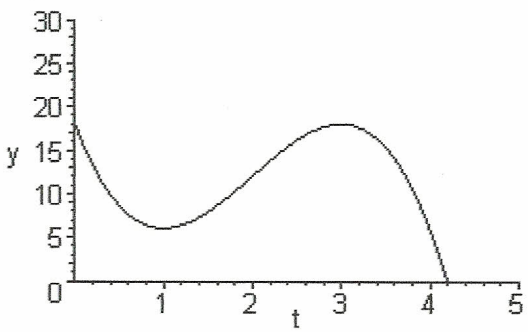
20.- Para dar lentamente un antibiótico a un paciente, el medicamento se aplica con inyección intramuscular. La cantidad de medicamento en el torrente sanguíneo empieza de cero, aumenta a un máximo y luego decrece hasta cero.
a) Dibuja una posible gráfica de la cantidad de medicamento en el torrente sanguíneo como función del tiempo. Marca como t_0 el tiempo en que el medicamento esté al máximo
b) Describe verbalmente la forma en que cambia la rapidez con que el medicamento entra o sale de la sangre. Traza una gráfica de esta rapidez en función del tiempo, marca t_0 en el eje del tiempo.

21.- Considera la gráfica de la función f (t) de la siguiente figura

i)



ii)



a) Si f (t) representa la posición de una partícula en el tiempo t, indica los puntos donde la partícula tiene velocidad cero.
b) Si en cambio, f (t) representa la velocidad de una partícula en el tiempo t, ¿Cuál es el significado de los puntos indicados en la respuesta de la parte (a)?

22.- Sea h (x) la elevación sobre el nivel del mar (en metros) del río Maipo a x kilómetros de su nacimiento. ¿Cuál es la unidad de h '(x)?. ¿Qué puedes decir sobre el signo de h '(x)?

23.- Sea h (t) la estatura (en metros) de Amelia Earhart (una de las primeras aviadoras), t años después de su nacimiento. ¿Cuál es la unidad de h '(t)? ¿Qué puedes decir sobre el signo de h '(10)? ¿Qué puedes decir sobre el signo de h '(30)?($0 \leq t \leq 39$, la edad a la que desapareció el avión de esta aviadora)

24.- La temperatura t en grados Farenheit de un trozo de carne frío puesto al horno caliente está dada por: $T = f(t)$, en donde t es el tiempo en minutos desde que la carne se puso al horno.
(i) ¿ Cuál es el signo de $f'(t)$? ¿ Por qué ?
(ii) ¿ Cuál es la unidad de $f'(20)$? . ¿ Cuál es el significado práctico del enunciado $f'(2) = 3$?

25.- Sea $P(t)$ la reserva mundial total de petróleo en el año t (incluída lo que aún no se ha descubierto). Como P se mide en barriles, ¿ qué significa $\frac{dP}{dt}$? , ¿cuál es su signo ?.

26.- ¿Qué información nos entrega el enunciado " la segunda derivada de f es positiva en un intervalo", sobre el comportamiento de la primera derivada de f en ese mismo intervalo ?

27.- ¿Qué información nos entrega el enunciado " la segunda derivada de f es positiva en un intervalo", sobre el comportamiento de f en ese mismo intervalo ?

28.- Pocos segundos después de fecundarse un huevo, entra en él una pequeña cantidad de iones de sodio. A los 60 segundos, el contenido de sodio en el huevo comienza a aumentar con velocidad decreciente, alcanzando su valor máximo (0,026 moles por litro) a los 150 segundos, este valor se mantiene constante hasta los 10 minutos en que comienza a descender con rapidez creciente, llegando a anularse a los 20 minutos.

Representa gráficamente el contenido de sodio en el huevo, según transcurre el tiempo desde la fecundación.

29.- Determina $f'(x)$. Simplifica lo más posible los resultados

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ *b)* $f(x) = \frac{x^3+3x+2}{x^2-1}$ *c)* $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$

d) $f(x) = (2x-7)^3$ *e)* $f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^4}$ *f)* $f(x) = \frac{1}{x(x^2+2x+2)}$

g) $f(x) = \sqrt{\frac{t+1}{1-t}}$ *h)* $f(x) = \sqrt[3]{2x^3 - \frac{3}{x}}$ *i)* $f(x) = \left(\frac{2x-3}{4-x^2}\right)^{\frac{3}{4}}$

30.- La efectividad de un analgésico t horas después de llegar a la sangre está dada por.

$$E = \frac{1}{27}(9t + 3t^2 - t^3), \quad 0 \leq t < 4.5$$

Determina la razón de cambio de E con respecto a t cuando: $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$

31.- Determina el o los puntos donde la gráfica de la función tiene tangente horizontal

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ *b)* $f(t) = \frac{t^2-t+1}{t^2+1}$

32.- En una reacción química la cantidad Q (en gramos) de una sustancia producida en t horas viene dada por : $Q = 16t - 4t^2$ *, para* $0 < t \leq 2$.

Hallar el ritmo de producción de la sustancia cuando : a) $t = \frac{1}{2}$ *b)* $t = 1$ *c)* $t = 2$
(indica la unidad y la interpretación)

33.- Un nadador que salta desde el tablón lleva una altura s (en pies) que depende del tiempo

transcurrido (en segundos). Si $s(t) = -16t^2 + 5t + h$ *,¿cuál es la velocidad del nadador al entrar en el agua si la altura del tablón es 40 pies ? ¿cuál es la velocidad del nadador al entrar en el agua si la altura del tablón es 50 pies ? ¿cuál es la velocidad del nadador al entrar en el agua si la altura del tablón es 60 pies ?.*

34.- Se lanza una piedra desde el suelo hacia arriba y su altura en cualquier instante t está dada por: $s(t) = -16t^2 + 48t$ *, donde s se mide en pies y t en segundos.*
a) Determina las expresiones para la velocidad y la aceleración de la piedra.
b) Calcula el instante en que la piedra está a máxima altura (usa derivadas).
c) Calcula la altura máxima alcanzada.

35.- Una población P de 500 bacterias se introduce en un cultivo y crece en número de acuerdo con la expresión $P(t) = 500(1 + \frac{4t}{50+t^2})$ *, donde t se mide en horas . Determina el ritmo al que está creciendo la población cuando* $t = 2$.

36.- La velocidad de una partícula en movimiento rectilíneo viene dada por : $v(t) = \frac{760t}{4t^2+25}$ *, para t de 0 a 4 seg. Calcula la aceleración que lleva la partícula a los dos segundos. ¿ Qué información sobre la posición de la partícula puedes obtener con los calculos que hiciste?*

37.- (Efecto Doppler) La frecuencia F de la sirena de un carro de bomberos , oída por una persona que se encuentra en la puerta de su casa está dada por $F = \frac{132400}{331 \pm v}$ *, donde* $\pm v$ *representa la velocidad del carro-bomba. Determinar la razón de cambio de F con respecto a v si: (i) el carro-bomba se acerca a una velocidad de 30* $\frac{m}{seg}$*, (ii) el carro-bomba se aleja a una velocidad de 30* $\frac{m}{seg}$

38.- Un cohete se desplaza según la función posición s (t) = $2000t^2 + 100t$*, donde la distancia se mide en Km y el tiempo en horas*
a) Determina la función velocidad y la función aceleración
b) ¿Cuánto vale la velocidad inicial? ¿ y la aceleración inicial?
c) Cuándo la velocidad es creciente? ¿ y cuándo es decreciente?

39.- En cierto instante dos partículas cuyas trayectorias están dadas respectivamente por las ecuaciones

$s_1(t) = t^3 - 45t + 100$ *y* $s_2(t) = 3t^2 + 60t - 439$

están en el mismo lugar y con la misma velocidad. Determina:
a) Posición, velocidad y aceleración, de cada una de ellas, en dicho instante.
b) Camino recorrido por cada partícula hasta ese instante.

40.- Una enfermedad se propaga de modo que después de t semanas, el número de personas infectadas está dado por: $N(t) = 5175 - t^3(t - 8)$ $\quad 0 \leq t \leq 8$
¿A qué razón se propaga la epidemia después de 3 semanas?

41.- El volumen (en litros) de 3 gramos de CO_2 *a* $27°C$ *está dado en términos de su presión (en atmósferas) por la fórmula* $V = \frac{1.68}{p}$ *¿Cuál es tasa de variación de V con respecto a p cuando* $p = 2$*?*

42.- Cuando una bola de nieve con un radio inicial de 12cm se derrite, su radio decrece en forma constante. Comienza a derretirse cuando $t = 12$ y termina por desaparecer después de 12 horas.
a)¿Cuál es la tasa de variación del volumen cuando $t = 6$?
b)¿Cuál es la tasa de variación media del volumen desde $t = 3$ hasta $t = 9$?

43.-La población (en miles) de la ciudad Metrópolis está dada por:
$P(t) = 100(1 + 0.04t + 0.03t^2)$ *donde t está en años y $t = 0$ corresponde a 1980. ¿Cuál fue la tasa de variación de P en 1986? ¿Cuál fue la tasa de variación promedio de P entre 1983 y 1988?*

44.- El volumen en cm^3 de una muestra de agua varía a medida que cambia su temperatura. Para T entre 0°C y 30°C, la relación está dada en forma casi exacta por la fórmula:

$$V = V_0(1 - (6.427 \times 10^{-5})T + (8.505 \times 10^{-6})T^2 - (6.790 \times 10^{-8})T^3)$$

donde V_0 es el volumen de la muestra de agua (no hielo) a 0°C. Si V_0=$10^5 cm^3$ encuentra el volumen y la tasa de variación del volumen respecto a la temperatura cuando $T = 20°C$.

45.- Usa la fórmula del ejercicio 45) para responder a las preguntas siguientes: Si $1000cm^3$ de agua a 0°C se calientan, ¿Empiezan por contraerse o por expandirse? ¿Cuál es la razón (en $\frac{cm^3}{C}$) de expansión o contracción inicial?

46.- Sabemos que el peso de un objeto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la tierra. Si un alpinista pesa 80kg al nivel del mar (6378 km desde el centro de la tierra) y comienza a subir una montaña, ¿A qué razón, en gramos por kilómetro (vertical) disminuye su peso cuando comienza el ascenso?

47.- Demuestra que ninguna recta puede ser tangente a la parábola $y = x^2$ en dos puntos diferentes.

48.- Encuentra una ecuación para la recta que pasa por el punto $(1, 5)$ y que es tangente a la curva $y = x^3$. Sugerencia: Denote por (a, a^3) el punto de tangencia y encuentre al tanteo una solución de la ecuación cúbica resultante)

49.- Encuentra dos rectas que pasen por el punto $(2, 8)$ que sean tangentes a la curva $y = x^3$.

50.- El aire se escapa de un globo esférico a razón de $300\pi cm^3$ por segundo. ¿Cuál es el radio del globo cuando el radio decrece a una razón de 3cm/s?

51.- Una bola de nieve esférica se derrite de manera que la razón de cambio de su volumen es proporcional a su superficie. A las 10A.M. su volumen es de $500cm^3$ y a las 11A.M. su volumen es de $250cm^3$. ¿A qué hora termina de derretirse la bola de nieve?

52.- Un estudio ambiental de cierta comunidad suburbana señala que el nivel medio diario de monóxido de carbono en el aire será C (p) = $\sqrt{0,5p^2 + 17}$ partes por millón cuando la población sea p miles. Se estima que dentro de t años la población será p (t) = $3,1 + 0,1t^2$ miles. ¿A qué tasa cambiará el nivel de monóxido de carbono con respecto al tiempo dentro de 3 años?

53.- Supón que la longitud L (en cm) de una barra de acero depende de la temperatura, H° C, que

a su vez depende del tiempo t medido en horas. Si la longitud aumenta 2 cm por cada grado que aumente la temperatura, y ésta aumenta 3° C por hora, ¿ con qué rapidez cambia la longitud de la barra?

54.- Una carretera de 50 km. de largo comunica dos ciudades A y B . Usa el teorema del Valor Medio para demostrar que no se puede viajar en automóvil de A a B exactamente en una hora sin que el velocímetro marque 50 $\frac{km}{h}$ *al menos una vez.*

55.- Sea T la temperatura (en ° F) al tiempo t (en horas). Si la temperatura disminuye, entonces $\frac{dT}{dt}$ *es la tasa (o rapidez) de enfriamiento. La mayor variación de temperatura durante un periodo de 12 horas que se ha registrado documentalmente en Estados Unidos, ocurrió en el estado de Montana en 1916, cuando la temperatura bajó de 44° F a* $-56°$ *F. Usando el teorema del Valor Medio, demuestra que la rapidez de enfriamiento excedió* $-8\ \frac{F}{h}$ *en algún momento durante el periodo del cambio.*

56.- La carga eléctrica Q de un capacitor (o condensador) aumenta de 2 mC (milicoulombs) a 10 mC en 15 ms (milisegundos). Usa el teoreema dem Valor Medio para demostrar que la corriente $I = \frac{dQ}{dt}$ *pasa de 0,5 A (ampere) en algún momento durante este pequeño intervalo de tiempo (Nota:* $1\,A = 1\frac{C}{s}$).

57.- Dadas f (x), f '(x) y f ''(x). Determina:
i) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento
ii) Extremos relativos (si es que existen)
iii) Concavidades
iv) Puntos de inflexión (si es que existen)

a) $f(x) = (2x-1)^{\frac{1}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = \frac{2(3x+2)}{3(2x-1)^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}}}$$

$$f''(x) = \frac{-98}{9(2x-1)^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}}$$

b) $f(x) = \frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{-2(x+2)}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(5x^2+20x+11)}{9(x+1)^{\frac{5}{3}}(x-1)^3}$$

58.- Una curva tiene por ecuación $f(x) = x^3 - 4x + 1$.
a) Determina la ecuación de la recta normal a la curva en el punto P(2,1)
b) ¿Cuál es la menor pendiente en la curva? ¿En qué punto tiene la curva esta pendiente?
c) Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva en los puntos donde la pendiente de la curva es 8.

59.- Determina el valor de a y b para que $f(x) = x^3 + ax + b$ *tenga un máximo local igual a 35 en* $x = -2$. *¿Tiene mínimo local la función encontrada? ¿ y tiene puntos de inflexión?, en caso afirmativo, determínalos.*

60.- Demuestra que el polinomio cúbico $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *tiene exactamente un punto de inflexión* $P_0(x_0, y_0)$, *donde* $x_0 = \frac{-b}{3a}$ *e* $y_0 = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$

61.- La reacción R del cuerpo humano a una dosis de medicina puede representarse a veces por una ecuación de la forma: $R = \frac{C}{2}M^2 - \frac{M^3}{3}$

donde C es una constante positiva y M es la cantidad de medicina absorbida en al sangre. Si la reacción es un cambio en la presión sanguínea, R se mide en milímetros de mercurio. Si la reacción es un cambio de temperatura, R se mide en grados, y así en general.

a) Determina $\frac{dR}{dM}$ *.Esta derivada se llama sensibilidad del cuerpo a la medicina.*

b) Halla la cantidad de medicamento a la que el cuerpo es más sensible.

62.- El dueño de un manantial de agua mineral llega a la conclusión de que si el precio al que vende la botella es $x, sus beneficios serán $y = -x^4 + 10x^2 - 21$ *miles de pesos al día.*

a) ¿Qué precio debe poner para tener beneficio máximo?

b) ¿Cuál será este beneficio?.

63.- La concentración C de un fármaco en el flujo sanguíneo t horas después de ser inyectado por vía intramuscular está dada por: $C(t) = \frac{3t}{27 + t^3}, t \geq 0$

¿En qué instante la concentración es máxima?

64.- Al estornudar, la tráquea se contrae, lo cual afecta a la velocidad v del aire que pasa por ella. Supón que la velocidad del aire durante un estornudo está dada por

$$v(r) = k(R - r) \cdot r^2, \qquad 0 \leq r < R$$

donde k es una constante positiva, R el radio normal de la tráquea y r el radio durante el estornudo. ¿Qué radio produce la máxima velocidad del aire?

65.- En un período de dos horas tras la ingestión de un fármaco, su concentración C en la sangre está dada por

$$C(t) = 0{,}29483\,t + 0{,}04253\,t^2 - 0{,}00035\,t^3$$

donde C se mide en milígramos por litro y t en minutos. Determina:

a) Intervalos donde la concentración es creciente e intervalos donde la concentración es decreciente

b) Dónde le crecimiento es creciente y dónde es decreciente

c) Dónde le decrecimiento es creciente y dónde es decreciente

66.- En fisicoquímica está demostrado que la presión P de un gas está relacionada con el volumen V y la temperatura T por la eecuación de Van Der Waals

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT$$

donde a, b, n y R son constantes. La temperatura crítica T_c *del gas es la temperatura más alta a la que las fases gaseosa y líquida pueden existir como fases separadas. Cuando* $T = T_c$*, la presión está dada como una función del volumen solamente.*

El volumen crítico V_c *es el volumen que satisface* $P'(V_c) = 0$ *y* $P''(V_c) = 0$*. Demuestra que* $V_c = 3b$

UNIVERSIDAD DE CHILE FACULTAD DE CIENCIAS QUIMICAS Y FARMACEUTICAS
AREA DE MATEMATICAS
MATEMATICA I OTOÑO 2004

GUÍA Nº 3

1.- Las siguientes funciones son biyectivas de Domf en Recf , determina:
i) $f^{-1}(x)$ ii) $D_x(f^{-1})$ usando la derivada de la función inversa
iii) $\frac{df}{dx} en\ x\ =\ c\ \ y\ \ \frac{df^{-1}}{dx}\ en\ x\ =\ f(c)$, y demuestra que en esos puntos $\frac{df^{-1}}{dx}=\frac{1}{\frac{df(f^{-1}(x))}{dx}}$

a) $f(x) = \frac{1}{5}x + 5$; c= -1; b) $f(x) = 2x^2$, $x \leq 0$; c = -5

2.-Dadas las funciones $f(x) = \frac{x^3}{4}$ y $g(x) = \sqrt[3]{4x}$
a) Demuestra que f(x) y g(x) son inversas
b) Determina las pendientes de las rectas tangentes a las gráficas de f y g en los puntos P(2,2) y Q(-2,-2)

3.- Supón que la función derivable y = f(x) tiene inversa, y que la gráfica de f pasa por el punto P(2,4), donde su pendiente es $\frac{1}{3}$. Determina la ecuación de la recta tangente a gráfica de f^{-1} en el punto donde x = 4.

4.- Demuestra que la gráfica de la inversa de f (x) = mx+b, con m y b constantes y $m \neq 0$, es una recta con pendiente $\frac{1}{m}$ y ordenada en el origen $-\frac{b}{m}$.

5.- Determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de:
a) $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$, en el punto P(1,-2)
b) $(1 + xy)^3 = 2x^2 - 9$, en el punto $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-3\sqrt{2}\right)$

6.- En una arteria atascada por un coágulo se inserta un diminuto globo esférico y se infla a una tasa de $0{,}002\pi\ \frac{mm^3}{min}$.¿Con qué rapidez varía el el radio del globo cuando el radio es de 0,005 mm?

7.- En un proceso químico adiabático no hay cambio neto (ganancia o pérdida) de calor. Supón que un tanque de oxígeno se somete a dicho proceso. Si la presión del oxígeno es P y su volumen es V, entonces $P \cdot V^{1,4} = C$, donde C es una constante. A determinado tiempo, V = 5 m^3, P = 0,6 $\frac{kg}{m^2}$ y P crece a razón de 0,23 $\frac{kg}{m^2}$ por segundo. ¿Cómo está cambiando el volumen en ese instante?

8.- Una barra de metal tiene forma de un cilindro circular recto. Cuando se calienta, su longitud y su diámetro aumentan a razón de 0,005 $\frac{cm}{min}$ y 0,002 $\frac{cm}{min}$, respectivamente. ¿Cómo está cambiando el volumen de la barra en el momento en que mide 40 cm de largo y 3 cm de diámetro?

9.-Del filtro cónico de una cafetera cae café a razón de 10 $\frac{pulg^3}{min}$. El radio de la base y la altura del filtro es 6 pulgadas y el radio de la jarra es de 6 pulgadas. ¿Con qué rapidez se eleva el nivel de café en la jarra cuando el café tiene 5 pulgadas de profundidad en el cono?¿Cómo varía el nivel de café del cono en ese instante?

10.- Usando L'Hôpital, determina los siguientes límites si existen

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^3-3x^2-x+2}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2}$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{x+1-e^x}{x^2}$

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{Ln(x)}{x^2}$ e) $\lim_{x\to 2}\frac{Ln(x-1)}{x-2}$ f) $\lim_{x\to\infty}\frac{xLn(x)}{x+Ln(x)}$

i) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{Ln(x)}$ j) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$ k) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{Ln(x)}\right)$

11.- Desde un globo de aire caliente se deja caer un cuerpo de masa m. Si la fuerza resistente debida al aire es directamente proporcinal a la velocidad $v(t)$ del objeto al tiempo t, entonces

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

donde k es una constante y g es la aceleración de gravedad. Demuestra que $\lim_{k \to 0^+} v(t) = -gt$

12.- Los registros de salud pública indican que t semanas después del brote de cierta clase de gripe, aproximadamente $Q(t) = \frac{80}{4+76\,e^{-1.2t}}$ miles de personas habían contraído la enfermedad. ¿ A que ritmo se propaga la enfermedad al final de la segunda semana ?.

13.- Con una tasa de inflación del 7% anual, los precios P están descritos por:

$$P(t) = P_0(1.07)^t$$

donde P_0 es el precio en pesos cuando $t = 0$ y t es el tiempo en años ¿ Con que rapidez sube el precio de los artículos cuando $t = 10$?.

14.- La intensidad de la luz, I, después de pasar por un medio transparente de espesor t está dada por $I = I_0 e^{kt}$, donde I_0 es la intensidad inicial. Si un rayo de luz pierde 3 % de su intensidad al pasar a través de una lente ¿ Qué porcentaje de la intensidad inicial conservará después de atravesar 4 lentes?

15.- Los siguientes datos fueron reunidos por un investigador durante los primeros 10 minutos de un experimento destinado a estudiar el aumento de bacterias:

Número de minutos	0	10
Número de bacterias	5.000	8.000

Suponiendo que el número de bacterias crece exponencialmente, ¿cuántas bacterias habrá a los 30 minutos ?

16.- El producto interno bruto (PIB) de cierto país fue de US$ 100.000 millones en 1980 y de US$ 165.000 millones en 1990 . Suponiendo que el PIB crece exponencialmente, ¿ cuál fue el PIB en el año 2000 ?

17.- El periodo de semidesintegración del radio es 1620 años. Escribe la función exponencial que modela la evolución 1 gramo de radio, tomando como unidad de tiempo 1000 años y como origen del tiempo el año 1900.

a) ¿Cuándo quedará 0.8 grs de radio?

b) ¿Cuándo había 1.5 grs de radio?

18.- Los veterinarios anestesian animales con pentobarbital sódico. Para anestesiar a un perro se requieren 30 mg por cada kilogramo de su peso. El citado pentobarbital se elimina exponencialmente de la sangre. En cuatro horas la cantidad baja a la mitad . Calcula el tamaño de

una dosis única para anestesiar durante 45 minutos a un perro que pesa 20 kg.

19.- El número de bacterias en cierto cultivo crece de 5.000 a 15.000 en 10 horas. Suponiendo que la tasa o rapidez de crecimiento es proporcional al número de bacterias, encuentra la función para el número de bacterias en el cultivo al tiempo t . Calcula el número de bacterias en el cultivo al cabo de 72 horas.

20.- El isotopo de polonio ^{210}Po tiene una semivida de 140 días aproximadamente. Si una muestra pesa inicialmente 20 mg , ¿cuánto quedará después de t días ?. Aproximadamente ¿cuánto quedará después de dos semanas ?

21.- Si la temperatura es constante , entonces la razón de cambio de la presión atmosférica p respecto a la altura h es proporcional a p . Suponiendo que $p = 762$ mm Hg al nivel del mar y $p = 737$ mm Hg a 300 m de altitud, calcula la presión a una altitud de 1500 m.

22.- El número de bacterias en cierto cultivo crece de 5.000 a 15.000 en 10 horas. Suponiendo que la tasa o rapidez de crecimiento es proporcional al número de bacterias, encuentre una fórmula para el número de

bacterias en el cultivo al tiempo t. Calcule el número de bacterias al cabo de 20 horas. ¿Cuándo llegará a 50.000 el número de bacterias?

23.- La razón a la que decrece la concentración de una droga en el torrente sanguíneo es proporcional a la concentración de la droga en cualquier instante. Si inicialmente la concentración era 57 microgramos por litro ($\frac{\mu g}{l}$) y a las 2 horas es de 23 $\frac{\mu g}{l}$. ¿Cuál es la concentración a las 5 horas?.¿Cuánto tiempo se necesita para que la concetración inicial se reduzca en un 30 %?

24.- Una placa de metal se enfría de 80ºC a 65ºC en 20 minutos al estar rodeada de aire a una temperatura de 15ºC . Usa la ley de Newton para estimar la temperatura al cabo de una hora de enfriamiento. ¿Cuándo llegará la temperatura 40ºC?

25.- Un termómetro exterior registra una temperatura de 4ºC. Cinco minutos después de introducirlo en una habitación donde la temperatura es de 20ºC, el termómetro marca 15ºC. ¿Cuándo marcará 18ºC?

26.- La rapidez con la que la sal se disuelve en el agua es directamente proporcional a la cantidad de sal no disuelta. En un recipiente con agua se ponen 5Kg de sal y en 20 minutos se disuelven 2 kg. ¿Cuánto tiempo tardará en disolverse 1 kg más?

27.- La edad de los especímenes geológicos se determina con el método del carbono 14. Ese método de datación se basa en el hecho de que el CO_2 de la atmósfera contiene cierta cantidad del isótopo inestable carbono 14 (^{14}C). Las plantas absorben carbono de la atmósfera y cuando mueren la cantidad de ^{14}C que han acumulado comienza a decrecer (o decaer) con una semivida de 5700 años aproximadamente. Midiendo la cantidad de ^{14}C que queda en un especímen, puede estimarse la fecha en que el organismo murió. Calcule aproximadamente la edad de un hueso fósil que presenta 20% del ^{14}C que contiene un hueso actual.

28.- Otro método de datación se basa en la cantidad de tritio que se encuentra en un material comparado con la cantidad del mismo elemento que se encuentra en una pieza similar nueva. El isótopo ^3_1H (tritio) del hidrógeno, que es radiactivo y tiene una semivida de 12.3 años, es producido

en la atmósfera por los rayos cósmicos y traído a la Tierra por la lluvia. Los muros de madera de una casa vieja contienen 10% del ^3_1H que tienen los de una casa nueva. Calcule la edad de la casa vieja

29.- Determina la derivada de las siguientes funciones

a) f(x) $= Ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ b) f(t) $= \frac{Ln(t)}{t^2}$ c) f(x) $= Ln(Ln(x^2))$

d) f(x) $= Ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$ e) f(t) $= \frac{-\sqrt{t^2+1}}{t} + Ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$

30.- Determina $\frac{dy}{dx}$ mediante derivación implícita

a) $y = x \cdot Ln(y)$ b) $y = Ln(x) \cdot Ln(y)$ c) $x \cdot y + x^2 Ln^2(y) = 4$

31.- La temperatura de ebullición del agua a una presión p (en libras por pulgada cuadrada) está dada por

$$T = 87{,}97 + 34{,}96\, Ln(p) + 7{,}91\sqrt{p}$$

a) Determina el ritmo de cambio de la temperatura con respecto a la presión cuando p = 10 y p=70.

b) Determina $\lim_{p\to\infty} T'(p)$ e interpreta el resultado en el contexto del problema.

32.- Una persona camina por un muelle recto tirando un bote por medio de una cuerda de 10 m. El camino del bote se llama tractriz y su ecuación es

$$y = 10\, Ln\left(\frac{10+\sqrt{100-x^2}}{x}\right) - \sqrt{100-x^2}$$

a) ¿Cuál es la pendiente de esa curva cuando x = 5 y cuando x = 9?

b) ¿Qué ocurre con la pendiente cuando x $\to$ 10?

33.- Determina los extremos relativos y puntos de inflexión de la gráfica de las siguientes funciones

a) $f(x) = \text{x Ln}(x)$ b) $f(x) = x^2 Ln(x)$

c) $f(x) = \frac{x}{Ln(x)}$ d) $f(x) = \frac{Ln(x)}{x}$

34.- El efecto de la temperatura T (en grados Kelvin) en la velocidad de reacción v de una reacción química está dada por la función $v = K[C]^n$, donde $[C]$ es la concentración del reactante y n es el orden de reacción. K es la constante específica de velocidad y está dada por la ecuación de Arrhenius

$$K = Ae^{\frac{-E_0}{RT}}$$

donde R es la constante de los gases (R $\approx$ 8,31451). Las cantidades A y E_0 se establecen una vez que se especifica la reacción. (A, E_0 y T son positivas)

a) Sean K_1 y K_2 las constantes de la velocidad de reacción asociadas a las temperaturas T_1 y T_2 respectivamente, demuestra que: $\text{Ln}\left(\frac{K_1}{K_2}\right) = \frac{E_0}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$

b) Determina si K es una función creciente o decreciente

c) De acuerdo a lo que obtienes en (b), al aumentar la temperatura ¿aumenta o disminuye la velocidad de reacción?

35.- La concentración y (t) de una droga inyectada intramuscularmente en el cuerpo está dada por

$$\text{y (t)} = \frac{c}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}),$$

donde a, b y c son constantes positivas y t es el número de horas transcurridas después de la inyección. Demuestra que:

a) La concentración es máxima cuando t = M, donde M = $\frac{Ln(b)-Ln(a)}{b-a}$

b) La función $y(t)$ tiene un único punto de inflexión en t = T, donde T = 2M.(este se considera el instante en que comienza a disminuir el efecto de la droga)

36.- Una epidemia se propaga en una comunidad de manera que t semanas después de su brote, el número de residentes que han sido infectados está dado por por una función de la forma $f(t) = \frac{A}{1+Ce^{-kt}}$, donde A es el número total de residentes propensos a contraer la enfermedad. Demuestra que la epidemia se propaga con mayor rapidez cuando se infecta la mitad de los residentes propensos a contraer la enfermedad.

37.- La capacidad aeróbica de una persona de x años es:

$$\text{A}(x) = 110\left(\frac{Ln(x)-2}{x}\right), \text{ para x } \geq 10$$

¿A qué edad se maximiza la capacidad aeróbica?

38.-Una empresa estima que cuando se emplean x miles de personas, la utilidad será

$$\text{P(x)} = Ln\left(\frac{x}{25}\right) - 12x^2 \text{millones de dólares}$$

¿Qué nivel de empleo maximiza la utilidad? ¿Cuál es la máxima utilidad?

39.- La ley de Poiseville establece que la velocidad de la sangre que está a r cm del eje central de una arteria de radio R es S(r) = c(R^2 - r), donde c es una constante positiva. ¿Dónde es mayor la velocidad de la sangre?.

40.- Se construye un triángulo T de tal modo que uno de sus lados coincide con el diámetro de la circunsferencia circunscrita a T, el radio de ella es 4 cm, ¿cuáles son las dimensiones del triángulo de área máxima?

41.- Se estima que el costo de construcción de un edificio de oficina de n pisos de altura es

C(n) = $2n^2$-500n + 600 miles de dólares. ¿Cuántos pisos debería tener el edificio para minimizar el costo medio por piso?

42.- De acuerdo al trabajo de Tucker y Schmidt - Koening, la energía gastada por cierta especie de perico está dada por:

$$E(v) = \frac{1}{v}[0,074(v - 35)^2 + 32]$$

donde v es la velocidad del ave $\left(en\ \frac{km}{h}\right)^1$. ¿Qué velocidad minimiza la energía gastada?

43.- Un problema fundamental en cristalografía es la determinación de la **fracción de empaque** de una celosía de cristal, que es la fracción de espacio ocupado por los átomos de la celosía, suponiendo que los átomos son esferas sólidas. Cuando la celosía contiene exactamente dos clases

diferentes de átomos, puede demostrarse que la fracción de empaque está dada por la fórmula.

$$f(x) = \frac{k(1+c^2x^3)}{(1-x)^3}$$

donde x = $\frac{r}{R}$, es la razón de los radios r y R, de las dos clases de átomos de la celosía y c y K son constantes positivas.

a) La función f(x) tiene exactamente un valor crítico. Encontrarlo y decidir si es máximo o mínimo.
b) Los números c y K y el dominio de f dependen de la estructura de la molécula en la celosía. Para sal gema ordinaria: c = 1, K = $\frac{2\pi}{3}$, y el dominio es $\left(\sqrt{2}-1\right) \leq x \leq 1$. Hallar los valores máximos y mínimos de f.
c) Repetir el ejercicio del literal b) para la cristobalita β para la que c = $\sqrt{2}$, K = $\frac{\sqrt{3}\pi}{16}$, y el dominio es 0 $\leq x \leq 1$.

44.- Los agricultores pueden obtener US$2 por arroba de papas el primero de julio; después el precio cae 2 centavos por arroba cada día. El primero de julio un agricultor tiene 80 arrobas de papas en el campo y estima que la producción está creciendo a una tasa de 1 arroba por día, ¿cuándo deberaía cosechar las papas para maximizar los ingresos?.

45.- ¿Qué número excede su cuadrado en la cantidad máxima?.

46.- Si no se tiene en cuenta la resistencia del aire, puede demostrarse que la corriente del agua emitida por una manguera de bomberos alcanzará una altura.

$$y = -16(1 + m^2)\left(\frac{x}{v}\right)^2 + mx$$

sobre un punto localizado horizontalmente a x pies de la boquilla, donde m es la pendiente de la boquilla y v la velocidad de la corriente de agua cuando sale de la boquilla. Supóngase que v es constante.

a) Si m también es constante, determinar el punto x donde se alcanza la altura máxima.
b) Si m es variable, hallar la pendiente que permite a un bombero apagar un incendio desde la distancia máxima.
c) Supóngase que el bombero está a x_0 pies de la base de un edificio. Si m puede variar, ¿cuál es el punto más alto del edificio que el bombero puede alcanzar con el agua de la manguera?.

47.- La producción Y(N) de un cultivo en la agricultura es función de los niveles de Nitrógeno N en el sol. Se conoce que

$$Y(N) = \frac{N}{1+N^2},\ N > 0.$$

Se necesita encontrar el nivel de Nitrógeno para el cual la producción es máxima.

48.- El estudio de el uso de dos antibióticos, A y B, muestra que el comportamiento de las concentraciones (en $\frac{mg}{lt}$), a medida que transcurre el tiempo (medido en horas) están dadas por:

$$C_A = 0,2t \cdot e^{-\frac{t}{2}} \qquad C_B = \frac{0,15t}{t^2+0,81}$$

a) ¿Cuál de los medicamentos alcanza una concentración máxima mayor?

b) ¿Qué significdo tiene, en el problema el hecho que $C_A{}'(3) \approx -0,022$?
c) ¿Qué significdo tiene, en el problema el hecho que $C_A{}''(3) \approx -0,011$?

UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. CS. QCAS Y FARMACEUTICAS
Matemáticas I Otoño

GUÍA N°4

1. LÍMITE DE FUNCIONES

1. Dibuja el gráfico de una función que satisfaga:

i) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 7$ ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = -7$

iii) $\lim_{x\to 4} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to-3} f(x) = \infty$

2. Usa tablas para conjeturar el valor de los límites cuando $x\to-\infty$ y cuando $x\to\infty$ de las siguientes funciones.

i) $f(x) = x + \sqrt{x}\,, x > 0$ ii) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\,, x \neq 0$ iii) $f(x) = x - \sqrt{x}\,, x > 0$

iv) $f(x) = \sqrt[3]{2 - x^2}\,, x \in \mathbb{R}$

3. Usa las propiedades de límites , para determinar $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
Además determina asíntotas horizontales de la gráfica de f , si es que existen.

(i) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4$ (ii) $f(x) = 1 - x + 2x^2 - 3x^3$

(iii) $f(x) = (1 - 2x)(x + 5)$ (iv) $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{2x^2+5x+1}$ (v) $f(x) = \frac{1-3x^3}{2x^3-6x+2}$

(vi) $f(x) = \frac{2x+1}{3x^2+2x-7}$ (vii) $f(x) = \frac{x^2+x-5}{1-2x-3x^3}$ (viii) $f(x) = \frac{3x^2-2x+3}{2x-9}$

(ix) $f(x) = \frac{9x^2+2x+7}{3-4x} + \frac{4x+2}{3-2x}$ (x) $f(x) = \frac{4x+1}{10-3x} + \frac{3x^2-2x+4}{5-3x-7x^2}$

(xi) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

4. El efecto de una droga en la reducción del dolor puede medirse empleando la función

$$p(x) = \frac{100x^2}{x^2+0.5x+0.03}$$

donde $p(x)$ es el porcentaje de alivio del dolor que se espera cuando se utilicen x unidades de la droga. ¿Cuántas unidades de droga se necesitarían para aliviar completamente el dolor?.

5. En un colegio , el porcentaje de estudiantes que sufre mononucleosis t días después del primer caso reportado está dado por

$$p(t) = \frac{100t}{2t^2+32}$$

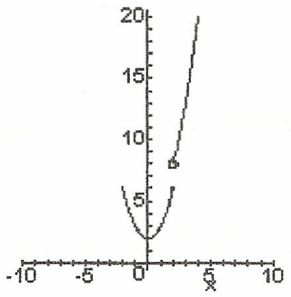
¿Qué porcentaje de estudiantes sufrirá mononucleosis en el largo plazo?.

6. Los biomatemáticos han propuesto muchas funciones diferentes para describir el efecto de la luz sobre la intensidad con que se produce la fotosíntesis. Para que la función sea realista debe mostrar el **efecto de fotoinhibición**, es decir, la rapidez de producción P de la fotosíntesis debe tender a cero cuando la intensidad luminosa I alcanza altos niveles. ¿ Cuál de las fórmulas siguientes , en las que a y b son constantes , puede servir para modelar P en función de la intensidad? Justifica tu respuesta.

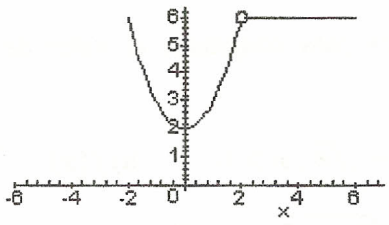
(i) $P = \frac{aI}{b+I}$ (ii) $P = \frac{aI}{b+I^2}$

7. Utiliza las gráficas para hallar los límites indicados , si es que existen.

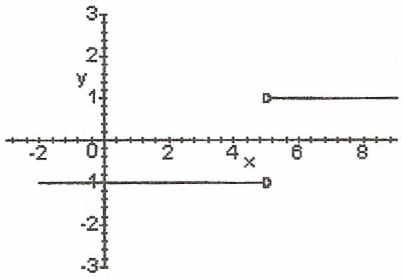
(i) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ $\lim_{x\to 2^+} f(x)$



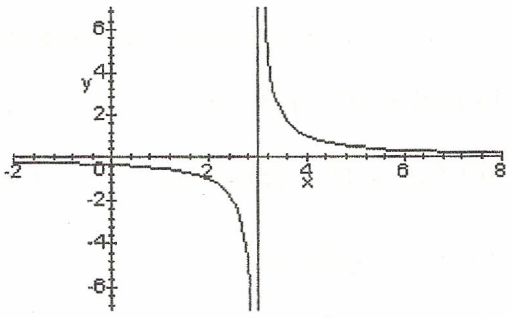
(ii) $\lim_{x\to 2} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$



(iii) $\lim_{x\to 5} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$



(iv) $\lim_{x\to 3} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$



8. Dibuja la gráfica de una función $y = f(x)$ que sea negativa ($f(x) < 0$) para x < 3 , que sea positiva ($f(x) > 0$) para x > 3 y no exista el $\lim_{x\to 3} f(x)$.

9. Dibuja la gráfica de una función $y = f(x)$ que sea negativa ($f(x) < 0$) para x < 3 , que sea positiva ($f(x) > 0$) para x > 3 y exista el $\lim_{x\to 3} f(x)$. ¿Cuánto debe valer ese límite ?

10. Esboza la gráfica de una función $y = f(x)$ de la que conoces los siguientes límites:

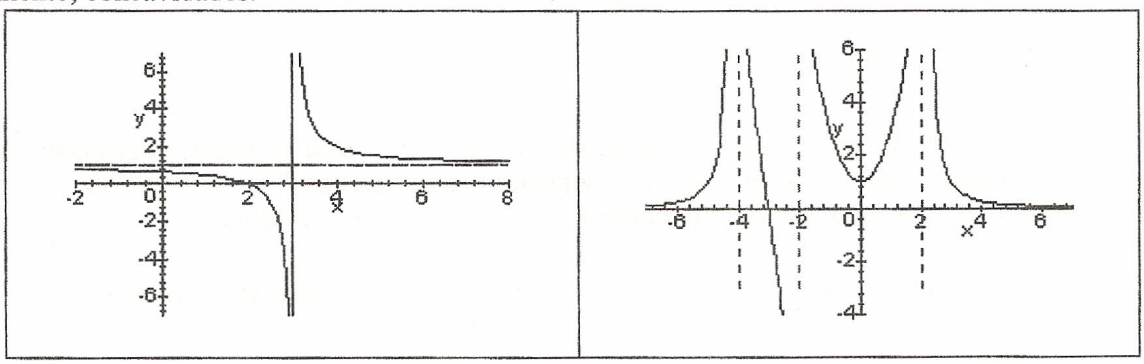
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$ $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$

$\lim_{x\to 3} f(x) = 0$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$

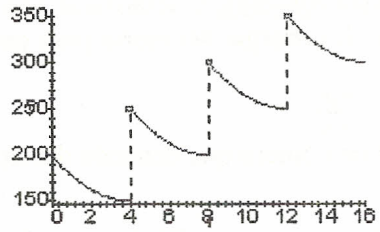
11. Esboza la gráfica de una función $y = f(x)$ de la que conoces los siguientes datos:
Es creciente en $(-\infty, 2)$ y decreciente en $(2, +\infty)$ Corta a los ejes en los puntos $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(4, 0)$. Cuando x tiende a infinito , entonces f(x) tiende a menos infinito.

12. Esboza la gráfica de una función $y = f(x)$ que tiene dos asíntotas verticales : en $x = -1$ y en $x = 2$. Además la gráfica tiene una asíntota horizontal en $y = 1$, corta a los ejes en los puntos $(0, -2)$ y $(4, 0)$ y es siempre creciente.

13. Interpreta las siguientes gráficas : dominio, asíntotas , límites , intersecciones con los ejes, crecimiento, decrecimiento, concavidades.



14. Un paciente recibe una dosis inicial de 200 mg (miligramos) de cierto medicamento. Posteriormente se le administran dosis de 100 mg cada 4 horas . La figura muestra la cantidad $y(t)$ del medicamento en la sangre a las t horas. Calcula e interpreta $\lim_{t\to 8^-} y(t)$ y $\lim_{t\to 8^+} y(t)$



16. Usando un poco de álgebra y propiedades de límites, determine:

i) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$ ii) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

iv) $\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{1-x}-2}{x+3}$ v) $\lim_{x\to 3} \frac{(1/(x+1))-(1/4)}{x-3}$ vi) $\lim_{x\to 4} \frac{(x/(x+1))-(4/5)}{x-4}$

vii) $\lim_{x\to -1} \frac{3x+3}{|x+1|}$ viii) $\lim_{x\to -2} 3x^3 - 2x + 7$ ix) $\lim_{t\to -3} (3t+4)(7t-9)$

x) $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4}$ xi) $\lim_{x\to -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1}$ xii) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

xiii) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^3-8}$ xiv) $\lim_{s\to 4} \frac{6s-1}{2s-9}$ xv) $\lim_{x\to 1} (\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1})$

xvi) $\lim_{x\to 3} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2} & si\ x \leq 3 \\ \frac{12-2x}{3} & si\ x > 3 \end{cases}$

xvii) $\lim_{x\to 1} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2+1\,, & x < 1 \\ x+1\ \ , & x \geq 1 \end{cases}$

17. Dadas las siguientes funciones:

i) $f(x) = \frac{1}{x}\,,\ x \neq 0$ ii) $h(x) = \sqrt[3]{x}\,,\quad x \in \mathbb{R}$

iii) $g(x) = \sqrt{x}\ ,\ x \geq 0$

Determine $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

18. La ley de Charles para los gases afirma que si la presión permanece constante , entonces la relación entre el volumen V que ocupa un gas y su temperatura T (en grados C) está dada por
$V = V_0(1 + \frac{1}{273}T)$. La temperatura $T = -273$ es el cero absoluto.

(i) Calcula $\lim_{T\to -273^+} V$ (ii) ¿ Por qué se necesita un límite por la derecha ?

19.El costo en dólares de eliminar el x% de la polución del agua en el río Loa está dado por

$$C(x) = \frac{75.000x}{100-x} \quad \text{para } 0 \leq x < 100$$

(i) Determina el costo de eliminar la mitad de la polución.
(ii) ¿ Qué porcentaje de la polución puede eliminarse con US$ 20.000 ?
(iii) Evalúa $\lim_{x\to 100^-} C(x)$. Interpreta el resultado.

20. Un pez nada contra la corriente a una velocidad constante v relativa al agua, que a su vez tiene una velocidad constante v_a ($v_a < v$) en relación con el suelo. La energía necesaria para que el pez viaje hasta un punto está dada por

$$E(v) = \frac{Cv^k}{v-v_a}$$

donde C > 0 es una constante física y k > 0 es un número que depende del tipo de pez.
(i) Calcula $\lim_{v\to v_a} E(v)$. Interpreta el resultado.
(ii) ¿ Qué ocurre con la energía si v aumenta arbitrariamente a $E(v)$ a medida que v aumenta arbitrariamen ?
Interpreta el resultado.

2. FUNCIONES CONTINUAS

21. Prueba que las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ y $g(x) = x$, se cortan en algún punto y localízalo aproximadamente.

22. La función $y = x^{-1}$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[-1, +1]$ y sin embargo no se anula en él, ¿contradice ésto el teorema de Bolzano?.

23. Muestre que existe $c \in [-1, 0]$, tal que $c^4 - 1 = \frac{2c+1}{c^4+1}$

24. Explique porque la función es discontinua en el punto x_0 que se indica.(grafíque):

$i)\ f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{si } x\le 2\\ x^2-2x, & \text{si } x>2\end{cases}\quad x_0=2\quad ii)\ f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2x-8}{x-4}, & \text{si } x\neq 4\\ 3 & ,\text{si } x=4\end{cases}\quad x_0=4$

25. ¿Es continua $f(x)$ en todo $\mathbb{R}$ si:

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{si } x<3\\ 5-x, & \text{si } x\ge 3\end{cases}$$

26. Determine los puntos donde la función es discontinua.

$$i)\ f(x)=\begin{cases}2x+1, & si\ x\le -1\\ 3x, & si\ -1<x<1\\ 2x-1 & si\ x\ge 1\end{cases}\qquad ii)\ f(x)=\begin{cases}(x-1)^3, & \text{si } x<0\\ (x+1)^3, & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

27. Para que valor de c, las siguientes funciones son continua en todo $\mathbb{R}$.

$$i)\ f(x)=\begin{cases}cx+1, & \text{si } x\le 3\\ cx^2-1\ , & \text{si } x>3\end{cases}\qquad ii)\ g(x)=\begin{cases}x^2-c^2, & \text{si } x<4\\ cx+20, & \text{si } x\ge 4\end{cases}$$

$$iii)\ f(x)=\begin{cases}cx+5 & \text{si } x<1\\ x^2-3x+4 & \text{si } x\ge 1\end{cases}\qquad iv)\ f(x)=\begin{cases}1-3x & \text{si } x<4\\ cx^2+2x-3 & \text{si } x\ge 4\end{cases}$$

28. Determine el límite de $f(x)$ cuando x tiende a cero si:

(i) $f(x)=\frac{|x|}{x}$ (ii) $f(x)=\frac{1}{x}$ (iii) $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2}$ (iv) $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-x}$

29. Determine el valor de a para que las siguientes funciones, sean continuas.

i) $f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{x^2-x-2} & , \quad x\neq 2\\ a & x=2\end{cases}$

ii) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{1-x} & x\neq 1\\ a & x=1\end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{2} & si\ x\le 3\\ \frac{12-2x}{3} & si\ x>3\end{cases}$

iv) $f(x)=\begin{cases}\frac{x-10}{|x-10|}\ ; & x\neq 10\\ a & x=10\end{cases}$

v) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3+64}{x+4}\ ; & x<-4\\ ax^2+10 & x\ge -4\end{cases}$

30. Un meteorólogo encuentra que la temperatura T (en ° F) durante un frío día de invierno estuvo dada por:

$$T(t) = 0,05t(t-12)(t-24)$$

donde t es el tiempo (en horas) y $t = 0$ corresponde a las 6 A.M.
a) Determina cuándo la temperatura estuvo bajo 0° y cuándo estuvo sobre 0°.
b) Demuestra que la temperatura fue de 32° F en algún momento entre las 12 A.M. y la 1 P.M.

31. La temperatura T (en ° C) a la que el agua hierve está dada aproximadamente por la fórmula

$$T(h) = 100,862 - 0,0415\sqrt{h + 431,03}$$

donde h es la altura sobre el nivel del mar (en metros). Demuestra que entre los 4000 y los 4500 metros sobre el nivel del mar hay una altura a la cual el agua hierve a 98° C.

32. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 AM y toma su sendero usual hasta la cima de la montaña, a la que llega a las 7:00 PM. A la mañana siguiente, parte a las 7:00 AM de la cima, toma el mismo sendero de regreso y llega al monasterio a las 7:00 PM. Aplique el teorema del valor intermedio para demostrar que existe un punto en el sendero que el monje cruzará exactamente en el mismo momento del día, en ambos días.

UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. CS. QCAS Y FARMACEUTICAS
Matemáticas I Otoño

GUÍA Nº5

Razón de Cambio Media e Instantánea.

1. Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = x^2 - 1$ en los puntos donde $x = -2, -1, 0, 1, 2$ (véase el ejemplo 2).

2 Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ en los puntos donde $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

3. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = 1/(x + 1)$ y luego encuentre la ecuación de la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (véase el ejemplo 3).

4. Encuentre una ecuación de la recta tangente a $y = 1/(x - 1)$ en $(0, -1)$.

5. Un experimento sugiere que un cuerpo que cae descenderá aproximadamente $16t^2$ pies en t segundos.

(a) ¿Cuánto caerá entre $t = 0$ y $t = 1$?
(b) ¿Cuánto caerá entre $t = 1$ y $t = 2$?
(c) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \le t \le 3$?
(d) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $3 \le t \le 3.01$?
(e) Encuentre su velocidad instantánea en $t = 3$ (véase el ejemplo 4).

6. Un objeto viaja a lo largo de una recta de modo que su posición s es $s = t^2 + 1$ metros después de t segundos.

(a) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \le t \le 3$?
(b) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \le t \le 2.003$?
(c) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \le t \le 2 + h$?
(d) Determine su velocidad instantánea en $t = 2$.

7. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su distancia dirigida —medida desde el origen— después de t segundos es $\sqrt{2t + 1}$ pies.

(a) Encuentre su velocidad instantánea en $t = \alpha, \alpha > 0$.
(b) ¿Cuándo alcanzará una velocidad de $\frac{1}{2}$ pie por segundo? (Véase el ejemplo 5).

8. Si una partícula se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su distancia dirigida —medida desde el origen— después de t segundos es $(-t^2 + 4t)$ pies, ¿cuándo la partícula está momentáneamente detenida? (Es decir, ¿en qué momento su velocidad instantánea es cero?).

9. Cierto cultivo de bacteria crece de modo que tiene una masa de $\frac{1}{2}t^2 + 1$ gramos después de t horas.

(a) ¿Cuánto creció durante el intervalo $2 \le t \le 2.01$?
(b) ¿Cuál fue la tasa promedio de crecimiento durante el intervalo $2 \le t \le 2.01$?
(c) ¿Cuál fue su tasa instantánea de crecimiento en $t = 2$?

10. Un negocio está prosperando de tal manera que su ganancia total (acumulada) después de t años es $1000t^2$ dólares.

(a) ¿Cuál fue su ganancia durante el tercer año (entre $t = 2$ y $t = 3$)?
(b) ¿Cuál fue su tasa promedio de ganancia durante la primera mitad del tercer año, entre $t = 2$ y $t = 2.5$? (La tasa será en dólares por año).
(c) ¿Cuál fue la tasa instantánea de ganancia en $t = 2$?

19. Un alambre de 8 centímetros de largo es tal que la masa entre su extremo izquierdo y un punto x centímetros a la derecha es de x^3 gramos véase Figura 1

Figura 1

(a) ¿Cuál es la densidad promedio de los dos centímetros centrales, es decir, del centímetro 3 al 5 de este alambre? *Observación:* la densidad promedio es igual a masa/longitud.
(b) ¿Cuál es la densidad real en el punto que se encuentra a 3 centímetros del extremo izquierdo?

11. Suponga que el ingreso $I(n)$ en dólares por producir n computadoras está dado por $I(n) = 0.4n - 0.001n^2$. Encuentre las tasas instantáneas de cambio del ingreso cuando $n = 10$ y $n = 100$. (La tasa instantánea de cambio del ingreso con respecto a la cantidad de producto fabricado se denomina *ingreso marginal*.)

12. La razón (tasa) de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se llama **aceleración**. Suponga que la velocidad de una partícula en el instante t está dada por $v(t) = 2t^2$. Encuentre la aceleración instantánea cuando $t = 1$ segundo.

13. Una ciudad es azotada por una epidemia de gripe asiática. Las autoridades estiman que t días después del inicio de la epidemia, el número de personas enfermas con la gripe está dado por $p(t) = 120t^2 - 2t^3$, cuando $0 \le t \le 40$. ¿A qué tasa se expande la gripe en el instante $t = 10$; $t = 20$; $t = 40$?

14. La gráfica de la **Figura 2** muestra la cantidad de agua en un tanque de la ciudad durante un día que no se bombeó el vital líquido a ese recipiente. ¿Cuál fue la tasa promedio de uso de agua durante el día? ¿Qué tan rápido estaba siendo usada el agua a las 8 A.M.?

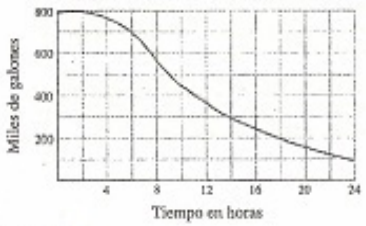


Figura 2

15. Unos pasajeros abordan un elevador en la planta baja (es decir, el piso cero) y lo dejan en el séptimo piso, que se encuentra 80 pies por arriba de la planta baja. La posición del elevador, s como función del tiempo t (medido en segundos), se muestra en la Figura 3.

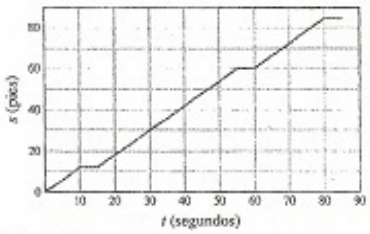


Figura 3

a) ¿Cuál fue la velocidad promedio del elevador desde el instante que inició a moverse hasta que llegó al séptimo piso?

b) Aproximadamente, ¿cuál fue la velocidad promedio del elevador en el instante $t = 20$?

c) ¿Cuántas paradas hizo el elevador entre la planta baja y el séptimo piso (exceptuando la planta baja y el séptimo piso)? ¿En qué pisos cree usted que el elevador se detuvo?

16. La figura 4 muestra la temperatura máxima normal para San Luis, Missouri, como una función del tiempo (medido en días desde el 1 de enero).

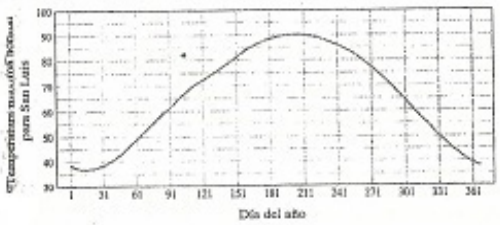


Figura 4

a) En forma aproximada, ¿cuál es la tasa de cambio de la temperatura máxima normal el 2 de marzo (es decir, en el día número 61)? ¿Cuáles son las unidades de esta tasa de cambio?

b) Aproximadamente, ¿cuál es la tasa de cambio en la temperatura máxima normal el 10 de julio (es decir, en el día 191)?

c) ¿En cuáles meses hay un momento en que la tasa de cambio es igual a cero?

d) ¿En qué meses el valor absoluto de la tasa de cambio es la máxima?

17. Si un punto se mueve a lo largo de una recta, de modo que su distancia s (en pies) desde 0 está dada por $s = t + t\cos^2 t$ a los t segundos, encuentre su velocidad instantánea en $t = 3$.

18. Si un punto se mueve a lo largo de una recta, de modo que su distancia s (en metros) desde 0 está dada por $s = (t+1)^3/(t+2)$ a los t minutos, encuentre su velocidad instantánea en $t = 1.6$.

19. La figura 5 muestra la población, en millones, de un país en desarrollo para los años de 1900 a 1999. Aproximadamente, ¿cuál es la tasa de cambio de la población en 1930? ¿Y en 1990? Con frecuencia, el crecimiento porcentual es una medida más apropiada del crecimiento poblacional. Ésta es la tasa de crecimiento dividida entre el tamaño de la población en ese instante. Para esta población, ¿cuál fue el crecimiento porcentual aproximado en 1930? ¿Y en 1990?

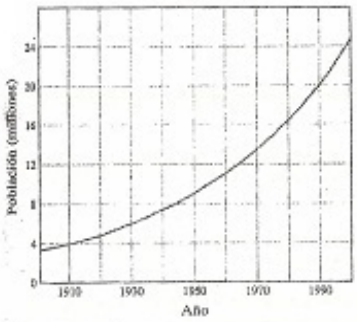


Figura 5

20. Las figuras 6a y 6b muestran la posición s como una función del tiempo t para dos partículas que se mueven a lo largo de una recta. Para cada partícula, ¿la velocidad aumenta o disminuye? Explique.

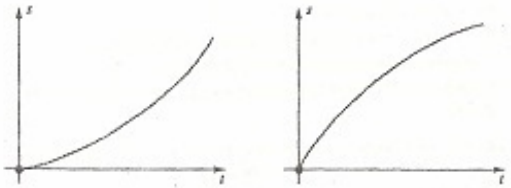


Figura 6

21. La tasa de cambio de la carga eléctrica con respecto al tiempo se denomina **corriente.** Suponga que $\frac{1}{3}t^3 + t$ coulombs de carga fluye a través de una alambre en t segundos. Encuentre la corriente, en amperes (coulombs por segundo) después de 3 segundos. ¿Cuándo se fundirá un fusible de 20 amperes en la línea?

22. Debido a un derrame, el radio de una mancha circular de aceite está creciendo a una velocidad constante de 2 kilómetros por día. ¿A qué velocidad está creciendo el área del derrame 3 días después de que comenzó?

23. El radio de un balón esférico está aumentando a una velocidad de 0.25 pulgadas por segundo. Si el radio es de 0 en el instante $t = 0$, encuentre la tasa de cambio del volumen en el instante $t = 3$.

24. *Utilice una calculadora gráfica (GC) o un* CAS *(sistema de álgebra computacional) para resolver los problemas del 31 al 34.*

25. Dibuje la gráfica de $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Después encuentre la pendiente de la recta tangente en

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 3.2

26. Dibuje la gráfica de $y = f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 2x$. Después encuentre la pendiente de la recta tangente en

(a) $\pi/3$ (b) 2.8 (c) π (d) 4.2

ANEXO 8: GUÍAS DE EJERCICIOS

Parte 2:

(1) Reglas de Derivación
(2) Regla de la Cadena
(3) Razón de Cambio, Variables Relacionadas
(4) Monotonía y Concavidad
(5) Optimización

Regla de Derivación

1. Derive la función

a) $G(s) = (s^2 + s + 1)(s^2 + 2)$

b) $g(x) = (1 + \sqrt{x})(x - x^3)$

c) $H(x) = (x^3 - x + 1)(x^{-2} + 2x^{-3})$

d) $y = \dfrac{3t-7}{t^2+5t-4}$

e) $h(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$

f) $f(u) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

g) $y = \dfrac{4t+5}{2-3t}$

h) $y = \dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$

i) $y = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

j) $y = (r^2 - 2r)e^r$

k) $y = \dfrac{u^2-u-2}{u+1}$

l) $y = \dfrac{1}{x^4+x^2+1}$

m) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + \sqrt[3]{x}}$

n) $f(x) = \dfrac{x}{x + \frac{c}{x}}$

ñ) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

o) $f(x) = \sqrt{cx - B}$ c, B ctes

p) $g(a) = \dfrac{a}{B+ca^2}$, B, c ctes

q) $H(t) = B(A + Dt^2)$ B, A, D ctes

r) $y = \dfrac{B}{1+Ax}$, B, A ctes

2.- Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores de

a) $(fg)'(5)$ b) $(f/g)'(5)$ c) $(g/f)'(5)$

3.- Si $f(3) = 4$, $g(3) = 2$, $f'(3) = -6$, y $g'(3) = 5$, halle los números siguientes:

a) $(f + g)'(3)$

b) $(fg)'(3)$

c) $(f/g)'(3)$

d) $\left(\dfrac{f}{f-g}\right)'(3)$

4.- Si $h(2) = 4$ y $h'(2) = -3$, encuentre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\Big|_{x=2}$$

5.- Si f es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 f(x)$ b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ d) $y = \dfrac{1 + x f(x)}{\sqrt{x}}$

Regla de la Cadena

6.- Halle la derivada de la función

1. $F(x) = (x^3 + 4x)^7$
2. $F(x) = (x^2 - x + 1)^3$
3. $G(x) = (3x - 2)^{10}(5x^2 - x + 1)^{12}$
4. $g(t) = (6t^2 + 5)^3(t^3 - 7)^4$
5. $y = (2x - 5)^4(8x^2 - 5)^{-3}$
6. $y = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$
7. $F(y) = \left(\dfrac{y-6}{y+7}\right)^3$
8. $s(t) = \sqrt[4]{\dfrac{t^3+1}{t^3-1}}$
9. $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2z-1}}$
10. $f(x) = \dfrac{Bx}{\sqrt{A - Dx}}$, A, B, D ctes
11. $y = \sqrt{x + A\sqrt{x}}$, A cte
12. $y = \sqrt{\dfrac{x}{a} + \sqrt{\dfrac{x}{b} + \sqrt{\dfrac{x}{c}}}}$, a, b, c ctes

7.- Suponga que $F(x) = f(g(x))$ y $g(3) = 6$, $g(3) = 4$, $f'(3) = 2$, y $f'(6) = 7$. Halle $F'(3)$.

8.- Suponga que $w = u \circ v$ y $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $u'(0) = 3$, $u'(2) = 4$, $v'(0) = 5$, y $v'(2) = 6$. Halle $w'(0)$.

9.- Se da una tabla de valores para f, g, f', y g' halle

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

a) Si $h(x) = f(g(x))$, halle $h'(1)$.

b) Si $H(x) = g(f(x))$, halle $H'(1)$.

10.- Sean f y g las funciones del ejercicio 9.

a) Si $F(x) = f(f(x))$, halle $F'(2)$.

b) Si $G(x) = g(g(x))$, halle $G'(3)$.

11.- Suponga que f es diferenciable en $\mathbb{R}$ y α es un número real. Sean $F(x) = f(x^\alpha)$ y $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encuentre expresiones para

a) $F'(x)$ b) $G'(x)$

Cálculo de Derivadas en Forma Numérica.

1.- Halle el promedio de velocidad en el intervalo $0 \leq t \leq 0.2$ y estime la velocidad en $t = 0.2$ de un automóvil cuya posición s está dada por

$t(seg)$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$s(pies)$	0	0.5	1.8	3.8	6.5	9.6

2.- Dados los valores numéricos mostrados, halle valores aproximados para la derivada de $f(x)$ en cada uno de los valores de x dados. ¿En dónde es positiva la rapidez de cambio de $f(x)$? ¿en dónde parece ser mayor la rapidez de cambio de $f(x)$?.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	18	13	10	9	9	11	15	21	30

Ejemplos de Funciones que no Poseen Derivadas en un Punto y Relación con las Funciones Contínuas.

1.- Di si son derivables y o contínuas las funciones siguientes en los puntos que se indican. Da el valor de la derivada o, en caso negativo, di cuánto valen las derivadas laterales.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < 3 \\ x^2 - x + 3, & x \geq 2 \end{cases}$ $en\ x_0 = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ 2x - 2, & x > 1 \end{cases}$ $en\ x_0 = 1$

c) $f(x) = |x|\ en\ x_0 = 0$

d) $f(x) = |x+3|\ en\ x_0 = -3$

e) $f(x) = |x| + 5\ en\ x_0 = 0$ y $x_0 = -5$

f) $f(x) = |x+3| + 5 \ en \ x = -3$

g) $f(x) = \begin{cases} -x+2, & x < 4 \\ x^2 - 14, & x \geq 4 \end{cases} \quad en \ x_0 = 4$

2.- Calcula m y n para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m, & x \leq 1 \\ -x^2 + nx, & x > 1 \end{cases}$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

3.- Halle las constantes a y b en función de c para que exista $f'(c)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq c \\ ax + b, & x > c \end{cases}$$

Razón de Cambio Relacionadas.

1. Cada arista de un cubo variable está aumentando a razón de 3 pulgadas por segundo. ¿Qué tan rápido está aumentando el volumen del cubo cuando una arista es de 12 pulgadas de longitud?

2. Suponga que una pompa de jabón mantiene su forma esférica conforme se expande, ¿qué tan rápido aumenta el radio cuando éste es de 3 pulgadas, si se sopla aire a la burbuja a una razón de 3 pulgadas cúbicas por segundo?

3. Un aeroplano que vuela horizontalmente a una altitud de una milla pasa directamente sobre un observador. Si la velocidad constante del aeroplano es de 400 millas por hora, ¿qué tan rápido aumenta su distancia respecto del observador 45 segundos más tarde? *Sugerencia:* observe que en 45 segundos $\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{80} \text{ hora}\right)$, el aeroplano ha recorrido 5 millas.

4. Un estudiante utiliza un popote para beber de un vaso cónico de papel, cuyo eje es vertical, a razón de 3 centímetros cúbicos por segundo. Si la altura del vaso es de 10 centímetros y el diámetro de su abertura es de 6 centímetros, ¿qué tan rápido está bajando el nivel del líquido cuando la profundidad del líquido es de 5 centímetros?

5. Un aeroplano que vuela hacia el oeste a 300 millas por hora pasa por arriba de la torre de control al mediodía, y un segundo aeroplano que vuela hacia el norte, a la misma altitud pero a 400 millas por hora, pasa por la torre una hora después. ¿Qué tan rápido está cambiando la distancia entre los aeroplanos a las 2:00 p. m.? *Sugerencia:* véase el ejemplo 3.

6. Una mujer en un muelle jala una cuerda atada a la proa de un pequeño bote. Si las manos de la mujer están 10 pies por encima del punto en donde la cuerda está sujeta al bote, y si ella está recobrando la cuerda a razón de 2 pies por segundo, ¿qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando falta por recogerse 25 pies de cuerda?

7. Una escalera de 20 pies está recargada contra un edificio. Si la parte inferior de la escalera se desliza a lo largo del pavimento alejándose directamente del edificio a una velocidad de 1 pie por segundo, ¿qué tan rápido está descendiendo el extremo superior de la escalera, cuando el pie de la escalera está a 5 pies de la pared?

8. Supongamos que un derrame de petróleo se está limpiando por medio de bacterias esparcidas en él, las cuales lo consumen a una razón de 4 pies cúbicos por hora. El derrame de petróleo está modelado por la forma de un cilindro muy delgado cuya altura es el grosor de la capa de petróleo. Cuando el grosor de la capa es de 0.001 pie, el cilindro tiene 500 pies de diámetro. Si la altura disminuye 0.0005 pie por hora, ¿a qué razón cambia el área de la capa?

9. De un tubo sale arena a razón de 16 pies cúbicos por segundo. Si al caer la arena se forma un montón cónico en el piso, cuya altura siempre es $\frac{1}{4}$ del diámetro de la base, ¿qué tan rápido aumenta la altura cuando el montón es de 4 pies de altura? *Sugerencia:* refiérase a la figura 9 y utilice el hecho de que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

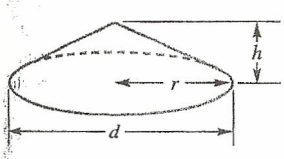


Figura 9

10. Un niño está volando una cometa. Si la cometa está a 90 pies del nivel de la mano del niño y el viento sopla en dirección horizontal a 5 pies por segundo, ¿con que rapidez el niño suelta cordel, cuando ya ha soltado 150 pies de cordel? (Suponga que el cordel permanece en línea recta desde la mano hasta la cometa, en verdad una suposición poco realista).

11. Una alberca es de 40 pies de largo, 20 pies de ancho, 8 pies de profundidad en el extremo más hondo y 3 pies en el extremo menos profundo; el fondo es rectangular (véase la figura 10). Si la alberca se llena al bombear agua a una razón de 40 pies cúbicos por minuto, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando la profundidad es de 3 pies en el extremo más hondo?

Figura 10

12. Una partícula P se mueve a lo largo de la gráfica de $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $x \geq 2$, de modo que la abscisa de P está aumentando a razón de 5 unidades por segundo. ¿Qué tan rápido está aumentando la ordenada (coordenada y) cuando $x = 3$?

13. Un disco metálico se dilata con el calor. Si su radio aumenta razón de 0.02 pulgadas por segundo, ¿con qué rapidez aumenta el área de una de sus caras cuando su radio es de 8.1 pulgadas?

14. Dos barcos parten desde el mismo puerto en una isla, uno va en dirección norte a 24 nudos (24 millas náuticas por hora) y el otro con rumbo este a 30 nudos. El barco con dirección norte salió a las 11:00 a. m. y el otro dejó el puerto a las 11:00 A. M. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia entre ellos a las 2:00 P. M.? *Sugerencia:* sea $t = 0$ a las 11:00 A. M.

15. La luz de un faro, que se encuentra 1 kilómetro alejado de una playa recta, gira a 2 revoluciones por minuto. ¿Con qué rapidez se mueve el rayo de luz a lo largo de la playa cuando pasa por el punto que se encuentra a $\frac{1}{2}$ kilómetro del punto que está enfrente del faro?

16. Una aficionada a la aviación observa un aeroplano que vuela una altura constante de 4000 pies hacia un punto que se encuentra directamente sobre de ella. Ella observa que cuando el ángulo de elevación es $\frac{1}{2}$ radián, éste aumenta a una velocidad de $\frac{1}{10}$ radián por segundo. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano?

17. Chris, que mide 6 pies de estatura, camina alejándose de un poste de luz, de 30 pies de altura, a una velocidad de 2 pies por segundo

(a) ¿A qué rapidez aumenta la longitud de su sombra cuando Chris está a 24 pies del poste? ¿A 30 pies?

(b) ¿A qué velocidad se mueve el extremo de la sombra?

(c) Para seguir el extremo de su sombra, ¿a qué velocidad angular debe levantar sus ojos Chris cuando su sombra es de 6 pies de largo?

18. El vértice del ángulo, θ, opuesto a la base de un triángulo isósceles, con lados iguales de longitud 100 centímetros, aumenta a razón de $\frac{1}{10}$ de radián por minuto. ¿Con qué rapidez aumenta el área del triángulo cuando el ángulo del vértice mide $\pi/6$ radianes? *Sugerencia:* $A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$.

19. Un largo paso a desnivel de una autopista pasa por encima de una vía de ferrocarril que está a 100 pies por debajo y forma un ángulo recto con él. Si un automóvil que viaja a 45 millas por hora (66 pies por segundo) está directamente por arriba de la parte delantera de un tren que va a 60 millas por hora (88 pies por segundo), ¿qué tan rápido se están separando 10 segundos después?

20. Se bombea agua a una razón constante de 2 litros por minuto (1 litro = 1000 centímetros cúbicos) a un tanque con forma de cono circular recto truncado. El tanque tiene una altura de 80 centímetros y los radios inferior y superior miden 20 y 40 centímetros, respectivamente (véase la figura 11). ¿A qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando la profundidad del líquido es de 30 centímetros? *Nota:* el volumen, V, de un cono circular recto truncado de altura h y radios inferior y superior a y b es $V = \frac{1}{3}\pi h \cdot (a^2 + ab + b^2)$.

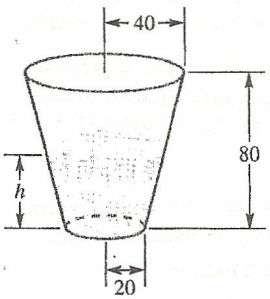


Figura 11

21. Del fondo de un depósito semiesférico, de radio 8 pies, está saliendo agua a razón de 2 pies cúbicos por hora. El depósito estaba lleno en cierto momento. ¿A qué velocidad cambia el nivel del agua cuando su altura es de 3 pies? *Nota:* el volumen de un casquete de altura h en un hemisferio de radio r es $\pi h^2[r - (h/3)]$. (Véase la figura 12).

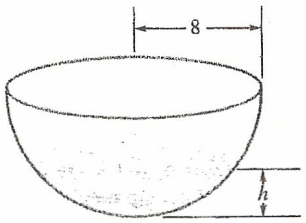


Figura 12

22. Las manecillas de un reloj son de 5 pulgadas (el minutero) y de 4 pulgadas (el horario). ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los extremos de las manecillas a las 3:00?

Monotonía y Concavidad

En los problemas del 1 al 10 utilice el teorema de monotonía para encontrar en dónde la función dada es creciente y en dónde es decreciente.

1. $f(x) = 3x + 3$
2. $g(x) = (x + 1)(x - 2)$
3. $h(t) = t^2 + 2t - 3$
4. $f(x) = x^3 - 1$
5. $G(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
6. $f(t) = t^3 + 3t^2 - 12$
7. $h(z) = \frac{z^4}{4} - \frac{4z^3}{6}$
8. $f(x) = \frac{x - 1}{x^2}$
9. $H(t) = \operatorname{sen} t, 0 \le t \le 2\pi$
10. $R(\theta) = \cos^2 \theta, 0 \le \theta \le 2\pi$

En los problemas del 11 al 18 utilice el teorema de la concavidad para determinar en dónde la función dada es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. También encuentre todos los puntos de inflexión.

11. $f(x) = (x - 1)^2$
12. $G(w) = w^2 - 1$
13. $T(t) = 3t^3 - 18t$
14. $f(z) = z^2 - \frac{1}{z^2}$
15. $q(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 3x + 1$
16. $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2$
17. $F(x) = 2x^2 + \cos^2 x$
18. $G(x) = 24x^2 + 12 \operatorname{sen}^2 x$

En los problemas del 19 al 28 determine en dónde la gráfica de la función dada es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Después dibuje la gráfica (véase el ejemplo 4).

19. $f(x) = x^3 - 12x + 1$
20. $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$
21. $g(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$
22. $F(x) = x^6 - 3x^4$
23. $G(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$
24. $H(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$
25. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ en $[0, \pi]$
26. $g(x) = x\sqrt{x - 2}$
27. $f(x) = x^{2/3}(1 - x)$
28. $g(x) = 8x^{1/3} + x^{4/3}$

En los problemas del 29 al 34 dibuje la gráfica de una función continua f en $[0, 6]$ que satisface todas las condiciones que se establecen.

29. $f(0) = 1; f(6) = 3$; creciente y cóncava hacia abajo en $(0, 6)$

30. $f(0) = 8; f(6) = -2$, decreciente en el intervalo $(0, 6)$; punto de inflexión en la pareja ordenada $(2, 3)$, cóncava hacia arriba en el intervalo $(2, 6)$.

31. $f(0) = 3; f(3) = 0; f(6) = 4;$
$f'(x) < 0$ en $(0, 3); f'(x) > 0$ en $(3, 6);$
$f''(x) > 0$ en $(0, 5); f''(x) < 0$ en $(5, 6)$

32. $f(0) = 3; f(2) = 2; f(6) = 0;$
$f'(x) < 0$ en $(0, 2) \cup (2, 6); f'(2) = 0;$
$f''(x) < 0$ en $(0, 1) \cup (2, 6); f''(x) > 0$ en $(1, 2)$

33. $f(0) = f(4) = 1; f(2) = 2; f(6) = 0;$
$f'(x) > 0$ en $(0, 2); f'(x) < 0$ en $(2, 4) \cup (4, 6);$
$f'(2) = f'(4) = 0; f''(x) > 0$ en $(0, 1) \cup (3, 4);$
$f''(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (4, 6)$

34. $f(0) = f(3) = 3; f(2) = 4; f(4) = 2; f(6) = 0;$
$f'(x) > 0$ en $(0, 2); f'(x) < 0$ en $(2, 4) \cup (4, 5);$
$f'(2) = f'(4) = 0; f'(x) = -1$ en $(5, 6);$
$f''(x) < 0$ en $(0, 3) \cup (4, 5); f''(x) > 0$ en $(3, 4)$

35. Demuestre que una función cuadrática no tiene puntos de inflexión.

36. Demuestre que una función cúbica tiene exactamente un punto de inflexión.

37. Demuestre que, si $f'(x)$ existe y es continua en un intervalo I, si $f'(x) \neq 0$ en todos los puntos interiores de I, entonces f es creciente en todo el intervalo I o es decreciente en todo el intervalo I. *Sugerencia:* use el teorema del valor intermedio para demostrar que no pueden existir dos puntos x_1 y x_2 de I en donde f' tiene signos opuestos.

38. Suponga que f es una función cuya derivada es $f'(x) = (x^2 - x + 1)/(x^2 + 1)$. Utilice el problema 37 para demostrar que f es creciente en todas partes.

39. Utilice el teorema de monotonía para demostrar cada proposición, si $0 < x < y$.

(a) $x^2 < y^2$ (b) $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ (c) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

40. ¿Qué condiciones sobre a, b y c harán que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ siempre sea creciente?

41. Determine a y b de modo que $f(x) = a\sqrt{x} + b/\sqrt{x}$ tenga a $(4, 13)$ como un punto de inflexión.

42. Suponga que la función cúbica $f(x)$ tiene tres ceros reales, r_1, r_2 y r_3. Demuestre que su punto de inflexión tiene abscisa $(r_1 + r_2 + r_3)/3$. *Sugerencia:* $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$.

43. Suponga que $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ para toda x. ¿Qué otras condiciones sencillas (si existen) se necesitan para garantizar que:

(a) $f(x) + g(x)$ sea creciente para toda x;
(b) $f(x) \cdot g(x)$ sea creciente para toda x;
(c) $f(g(x))$ sea creciente para toda x?

44. Suponga que $f''(x) > 0$ y $g''(x) > 0$ para toda x. ¿Qué otras condiciones sencillas (si las hay) se necesitan para garantizar que:

(a) $f(x) + g(x)$ sea cóncava hacia arriba para toda x;
(b) $f(x) \cdot g(x)$ sea cóncava hacia arriba para toda x;
(c) $f(g(x))$ sea cóncava hacia arriba para toda x?

GC *Utilice una calculadora gráfica o una computadora para resolver los problemas del 45 al 48.*

45. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos(x/2)$ en el intervalo $I = (-2, 7)$.

(a) Dibuje la gráfica de f en I.
(b) Utilice esta gráfica para estimar en donde $f'(x) < 0$ en I.
(c) Utilice esta gráfica para estimar en donde $f''(x) < 0$ en I.
(d) Dibuje la gráfica de f' para confirmar su respuesta a la parte (b).
(e) Dibuje la gráfica de f'' para confirmar su respuesta a la parte (c).

46. Repita el problema 45 para $f(x) = x \cos^2(x/3)$ en $(0, 10)$.

47. Sea $f'(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ en $I = [-2, 4]$. En el intervalo I, ¿en dónde es creciente f?

48. Sea $f''(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 4$ en $I = [-2, 3]$. En el intervalo I, ¿en dónde es cóncava hacia abajo f?

49. Traduzca cada uno de los siguientes enunciados al lenguaje de derivadas de distancia con respecto al tiempo. Para cada parte, haga un bosquejo de una gráfica de la posición del automóvil, s, contra el tiempo, t, e indique la concavidad.

(a) La velocidad del automóvil es proporcional a la distancia que ha recorrido.

(b) El automóvil está aumentando su velocidad.

(c) Yo no dije que el automóvil estaba deteniéndose, dije que su tasa de aumento de velocidad estaba disminuyendo.

(d) La velocidad del automóvil está aumentando 10 millas por hora cada minuto.

(e) El automóvil está deteniéndose muy lentamente hasta detenerse.

(f) El automóvil siempre recorre la misma distancia en intervalos iguales de tiempo.

50. Traduzca cada uno de los siguientes enunciados al lenguaje de derivadas, haga un bosquejo de la función apropiada e indique la concavidad.

(a) Se está evaporando agua del tanque a una tasa constante.

(b) Se vierte agua al interior del tanque a una razón de 3 galones por minuto, pero también sale $\frac{1}{2}$ galón por minuto.

(c) Como el agua se vierte al tanque cónico a una tasa constante, el nivel del agua se eleva a una tasa cada vez más lenta.

(d) La inflación se mantuvo estable este año, pero se espera que se eleve cada vez más rápido el año entrante.

(e) En la actualidad el precio del petróleo está bajando, pero se espera que esta tendencia sea lenta y luego se revierta en 2 años.

(f) La temperatura de David está subiendo, pero parece que la penicilina está surtiendo efecto.

51. Traduzca cada uno de los siguientes enunciados al lenguaje matemático, haga un bosquejo de la función apropiada e indique la concavidad.

(a) El costo de un automóvil continúa en aumento y a una tasa cada vez más rápida.

(b) Durante los últimos dos años, Estados Unidos ha continuado la reducción de su consumo de petróleo, pero a una tasa cada vez más lenta.

(c) La población mundial continúa creciendo, pero a una tasa cada vez más lenta.

(d) El ángulo que la torre inclinada de Pisa forma con la vertical aumenta rápidamente.

(e) Las utilidades de la compañía Upper Midwest crecen despacio.

(f) La compañía XYZ ha perdido dinero, pero pronto esta situación se revertirá.

52. Traduzca cada enunciado de la siguiente columna de un periódico en un enunciado sobre derivadas.

(a) En Estados Unidos, la razón R de deuda gubernamental al ingreso nacional permaneció sin cambio, alrededor de 28% hasta 1981, pero

(b) entonces comenzó a aumentar de manera cada vez más abrupta hasta llegar a 36% durante 1983.

53. Se vierte café en el vaso mostrado en la figura 20 a razón de 2 pulgadas cúbicas por segundo. El diámetro superior es de 3.5 pulgadas, el diámetro inferior es de 3 pulgadas y la altura del vaso es de 5 pulgadas. Este vaso se llena con casi 23 onzas. Determine la altura h del café como función del tiempo t y dibuje la gráfica de $h(t)$ desde el instante $t = 0$ hasta el momento en que el vaso esté lleno.

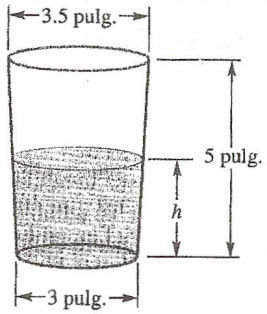


Figura 20

Optimización

1. Encuentre dos números cuyo producto sea −16 y cuya suma de sus cuadrados sea mínima.

2. ¿Para qué número la raíz cuadrada principal excede en la mayor cantidad posible a ocho veces el número?

3. ¿Para qué número la raíz cuarta principal excede en la mayor cantidad posible al doble del número?

4. Encuentre dos números cuyo producto sea −12 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

5. Encuentre los puntos sobre la parábola $y = x^2$ que estén más cerca al punto $(0, 5)$. *Sugerencia:* minimice el cuadrado de la distancia entre (x, y) y $(0, 5)$.

6. Encuentre los puntos sobre la parábola $x = 2y^2$ que estén más cerca al punto $(10, 0)$. *Sugerencia:* minimice el cuadrado de la distancia entre (x, y) y $(10, 0)$.

7. ¿Qué número excede a su cuadrado en la mayor cantidad? Comience por convencerse de que este número está en el intervalo $[0, 1]$.

8. Muestre que para un rectángulo de perímetro dado K, aquel de área máxima es un cuadrado.

9. Determine el volumen de la mayor caja abierta que pueda fabricarse con una pieza de cartón de 24 pulgadas cuadradas, recortando cuadrados iguales a partir de las esquinas y doblando hacia arriba los lados (véase el ejemplo 1).

10. Un granjero tiene 80 pies de malla de alambre con la cual planea encerrar un corral rectangular a un lado de su establo de 100 pies de largo, como se muestra en la figura 18 (el lado a lo largo del establo no necesita valla). ¿Cuáles son las dimensiones del corral que tiene área máxima?

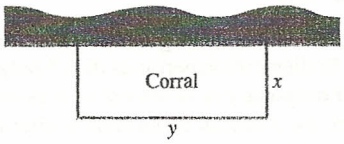


Figura 18

11. El granjero del problema 10 decide hacer tres corrales idénticos con sus 80 pies de malla de alambre, como se muestra en la figura 19. ¿Qué dimensiones del área total encerrada hacen el área de los corrales tan grande como sea posible?

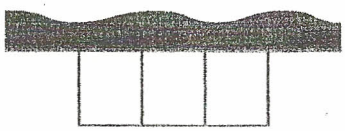


Figura 19

12. Suponga que el granjero del problema 10 tiene 180 pies de cerca de alambre y quiere que el corral quede contiguo a todo el lado del establo de 100 pies, como se muestra en la figura 20. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para tener área máxima? Observe que en este caso $0 \le x \le 40$.

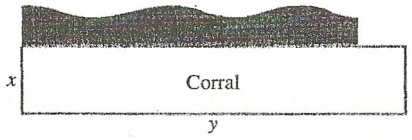


Figura 20

13. Un granjero desea cercar dos corrales rectangulares idénticos, cada uno con un área de 900 pies cuadrados, como se muestra en la figura 21. ¿Cuáles son los valores de x y y, de modo que se requiera la menor cantidad de valla?

Figura 21

Figura 22

14. Un granjero desea cercar tres corrales rectangulares adyacentes idénticos (véase la figura 22), cada uno con un área de 300 pies cuadrados. ¿Cuáles deben ser el ancho y el largo de cada corral, de modo que se ocupe la menor cantidad de valla?

15. En el problema 14, suponga que la cerca exterior de los corrales requiere una valla más firme que cuesta \$3 por pie, pero que las dos particiones internas necesitan una cerca que cuesta sólo \$2 por pie. ¿Qué dimensiones de x y y producirán el costo más económico para los corrales?

16. Resuelva el problema 14, suponiendo que el área de cada corral es de 900 pies cuadrados. Estudie la solución de éste y del problema 14; además, haga una conjetura acerca de la razón x/y en todos los problemas de este tipo. Demuestre su conjetura.

17. Determine los puntos P y Q en la curva $y = x^2/4, 0 \le x \le 2\sqrt{3}$, que están más cerca y más lejos del punto $(0, 4)$. *Sugerencia:* el álgebra es más sencilla si considera el cuadrado de la distancia requerida en lugar de la distancia misma.

18. Un cono circular recto será inscrito en otro cono circular recto de volumen dado, con los mismos ejes y con el vértice del cono interior tocando la base del cono exterior. ¿Cuál debe ser la razón entre sus alturas para que el cono inscrito tenga volumen máximo?

19. Una pequeña isla está a 2 millas del punto más cercano, P, de una playa rectilínea de un gran lago. Si una mujer en la isla puede remar en una lancha a 3 millas por hora y caminar 4 millas por hora, ¿en dónde debe desembarcar en el bote para llegar, en el menor tiempo, a un pueblo que está a 10 millas, medidas sobre la playa, del punto P?

20. En el problema 19 suponga que, cuando llegue a la playa, la mujer será recogida por un automóvil que promedia 50 millas por hora. Entonces, ¿en dónde debe desembarcar?

21. En el problema 19, suponga que la mujer utiliza una lancha de motor, que viaja a 20 millas por hora. Entonces, ¿en dónde debe desembarcar?

22. Una central eléctrica está situada en una ribera de un río rectilíneo que tiene w pies de ancho. Una fábrica está situada en la ribera opuesta del río, L pies río abajo del punto A, que está enfrente a la central eléctrica. ¿Cuál es la ruta más económica para conectar un cable de la central a la fábrica, si cuesta a dólares por pie tender el cable bajo el agua y b dólares por pie en tierra $(a > b)$?

23. A las 7:00 a. m., un barco estaba a 60 millas al este de un segundo barco. Si el primer barco navega hacia el oeste a 20 millas por hora y el segundo navega con rumbo sureste a 30 millas por hora, ¿cuándo estarán más cerca uno del otro?

24. Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a la elipse $x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el primer cuadrante y que forma con los ejes de coordenadas el triángulo con menor área posible (a y b son constantes positivas).

25. Encuentre el volumen máximo que puede tener un cilindro circular recto, si está inscrito en una esfera de radio r.

26. Demuestre que el rectángulo con perímetro máximo que puede inscribirse en un círculo es un cuadrado.

27. ¿Cuáles son las dimensiones de un cilindro circular recto, con mayor área de superficie, que puede inscribirse en una esfera de radio r?

28. La iluminación en un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto a la fuente luminosa y directamente proporcional a la intensidad de la fuente. Si dos fuentes luminosas están separadas s pies y sus intensidades son I_1 e I_2, respectivamente, ¿en qué punto entre ellas la suma de sus iluminaciones será mínima?

29. Un alambre de 100 centímetros de largo se corta en dos pedazos; uno se dobla para formar un cuadrado y el otro se dobla para formar un triángulo equilátero. ¿En dónde debe hacerse el corte si (a) la suma de las dos áreas debe ser mínima; (b) máxima? (Cabe la posibilidad de no cortar).

30. Una caja cerrada en forma de paralelepípedo rectangular con base cuadrada tiene un volumen dado. Si el material utilizado para el fondo cuesta 20% más por pulgada cuadrada que el material para los lados y el material de la tapa cuesta 50% más por pulgada cuadrada que cada lado, encuentre las proporciones más económicas para la caja.

31. Un observatorio debe tener la forma de un cilindro circular recto, coronado por un domo semiesférico. Si el domo semiesférico cuesta el doble por pie cuadrado que las paredes cilíndricas, ¿cuáles son las proporciones más económicas para un volumen dado?

32. Una masa conectada a un resorte se mueve a lo largo del eje x, de modo que su abscisa en el instante t es

$$x = \operatorname{sen} 2t + \sqrt{3} \cos 2t$$

¿Cuál es la mayor distancia del origen que alcanza la masa?

33. Una jardinera tendrá la forma de un sector circular (una región en forma de rebanada de pastel) de radio r y ángulo en el vértice de θ. Encuentre r y θ, si su área, A, es constante y el perímetro es mínimo.

34. Una barda de h pies de altura corre paralela a un edificio alto y a w pies de él (véase la figura 23). Encuentre la longitud de la escalera más corta que llegue del suelo hasta la pared del edificio, pasando por encima de la barda.

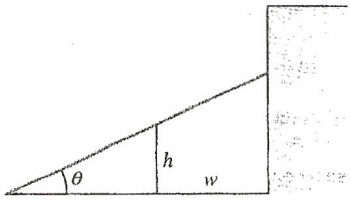


Figura 23

35. Un rectángulo tiene dos vértices sobre el eje x y los otros dos en la parábola $y = 12 - x^2$, con $y \geq 0$ (véase la figura 24). ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de este tipo con área máxima?

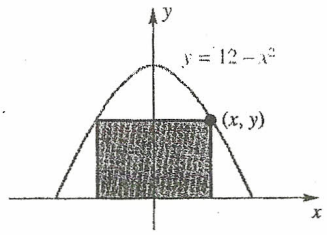


Figura 24

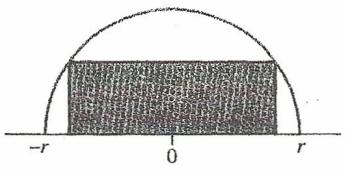


Figura 25

36. Un rectángulo se inscribirá en un semicírculo de radio r, como se muestra en la figura 25. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo, si su área debe maximizarse?

37. De todos los cilindros circulares rectos con un área de superficie dada, determine aquel con el volumen máximo. *Observación:* los extremos de los cilindros son cerrados.

38. Determine las dimensiones del rectángulo con mayor área que puede inscribirse en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

39. De todos los rectángulos con una diagonal dada, determine aquel con el área máxima.

ANEXO 9: TABLAS DE DESERCIÓN

ÍNDICE DEL ANEXO

1. Tablas de Deserción de los Estudiantes 1994 - 1997
2. Tablas de Deserción Década 1998 - 2008

Tablas de Deserción Periodo 1994 - 1997

INFORMACIÓN DE ESTUDIANTES

AÑO	CARRERA	TOTAL ING.	ELIM.	RENUN.	TITULADOS	SIN INFOR.	
1994	Q.F.	105	28	16	60	1	
	B.Q.	36	3	5	25	3	
	Q.	8	3	2	2	1	
	I.A.	33	6	3	21	3	

AÑO	CARRERA	TOTAL ING.	ELIM.	RENUN.	TITULADOS	SIN INFOR.	
1995	Q.F.	127	25	21	78	3	
	B.Q.	45	8	14	20	2	1 Fallecido
	Q.	17	6	6	4	1	
	I.A.	42	6	4	32	0	

AÑO	CARRERA	TOTAL ING.	ELIM.	RENUN.	TITULADOS	SIN INFOR.
1996	Q.F.	135	27	25	81	2
	B.Q.	52	10	12	30	0
	Q.	35	23	6	6	0
	I.A.	44	10	7	24	3

AÑO	CARRERA	TOTAL ING.	ELIM.	RENUN.	TITULADOS	SIN INFOR.	
1997	Q.F.	133	33	25	72	3	
	B.Q.	47	10	10	25	2	
	Q.	36	13	5	17	1	
	I.A.	55	11	12	29	2	1 Fallecido

Tablas de Deserción Década 1998 - 2008

TABLA I. RETENCION PORCENTUAL DE ALUMNOS PROMEDIO EN PERIODO 1998 – 2008:

Carrera	Al 2 año	Al 3 año	Al 4 año
Química y Farmacia	92%	80%	78%
Bioquímica	89%	78%	73%
Química	86%	76%	58%
Ing. en Alimentos	90%	79%	74%

Representa un promedio de retención de alumnos cuando comienza el segundo, tercer y cuarto año de cada carrera. En la carrera de Química en los años 2000 y 2004 la retención al comenzar el 3 año ha sido cercana al 50%.

Índice de Autores

Altimiras et al, 118, 120, 129
Aneshkumar, M, 15
Aneshkumar, M., 40, 42
Arnal et al, 78
Artigue, M., 218
Asiala et al, 27–29, 31, 33, 44, 49, 210, 211, 220
Ausubel, 100, 168, 204
Ausubel, D., 155, 168
Azcárate, C., 42, 44

Balacheff, N. y Kaput, J., 63
Barbosa, K, 14
Barbosa, K., 8, 29–31, 34
Bardin, 129
Becerra, R y Moya, A., 56
Beth, E.W., y Piaget, J., 26
Bisquerra et al, 78
Borba, M. y Scheffer, N., 58
Brousseau, 112

Casas L., 14
Casas y Luengo, 14
Cifarelli, G., 62
Clark, 98, 99
Clark et al, 34, 37, 38, 149
Clark, D., 28
Clark, J.M. y Paivio, A., 62
Codes M. y Sierra M., 53, 54

Diaz-Godino, 14
Dubinsky, 52, 100, 126
Dubinsky, D., 33
Dubinsky, E, 13
Dubinsky, E., 27, 30–32, 45, 47, 50, 174, 205, 210
Dubinsky, E. y Mc Donald, M., 48

Elliot, J, 15
Elliott J., 76, 82

Fennell, F. y Rowan, T., 62
Ferrara et al, 55–57, 59–61, 63
Flessas, 109, 110, 140
Flessas y Lussier, 110
Flessas, J., 156, 220
Furinghetti, F. y Pehkonen, E., 66, 67

Gómez, P. y Fernández, F., 59
Gómez- Chacón et al, 66
Gómez-Chacón et al, 15, 65
Goldin, G. y Shteingold, N., 62
González y Díaz, 110
Goos, M., 63, 64
Guttenberger, E.W., 58

Hannula, M., 70
Hart, H., 67, 68
Hegedus, S.J. y Kaput, J., 57
Hoyles et al, 14, 63

Kapetanas y Zachariades, 15
Kapetanas, E. y Zachariades, T., 70
Kaput, J., 60, 62
Kaput, J. y Hegedus, S.J., 57
Kloosterman, P., 66, 69

Lagrange, J.B., 59
Lamon, S., 62
Leder, G. et al, 65
Lesh, R., Landau, M. y Hamilton, E., 63
Lester, F., 69
Lester, F., Garofalo, J. y Kroll, D., 67, 68
Lopez, S., 12
Luria, 109
Lussier y Flessas, 110, 111

Mato, M.D. y De la Torre, E., 71
Mc Dowell, J., 68

Mc Leod, D.B., 70
Meel, D., 32–34, 45, 47, 48
Montecinos, O., 12
Moreira, L., 56
Muis, 65
Murillo, J., 11

Nemirovsky, R., 58

Op't Eynde, P. et al, 65

Parraguez, M, 14
Pehkonen, E., 67
Perry, J.A. y Atkins, S.L., 62
Piaget y García, 52
Piaget, J., 20, 28, 44, 46

Rasmussen, C. y Nemirovsky, R., 58
Regna, S. y Dalla, L., 70
Relich, J. y Way, J., 71
Rieber, L.P., 62
Rokeach, M., 66

Sánchez et al, 218
Sánchez-Matamoros, G.M., 14
Saari, D.G., 67
Sanchez, G., 11
Schoenfeld, A.H., 10, 67, 68, 70
Schwarz, B. y Bruckheimer, M., 58
Sfard, A., 13, 45
Stake, 78
Suh, J. y Moyer-Packkenham, P., 62

Tall, 50, 51
Tall y Vinner, 13, 45
Tall, D., 16, 44, 60
Thompson, A.G., 67, 68
Trigueros, M, 14
Trigueros, M., 34, 36, 219

Vega, M.A., 11
Verillon,P. y Rabardel, P., 59

Walker, 110

Yackel y Rasmussen, 15
Yackel, E. y Ramussen, C., 19, 69
Yackel, E. y Rasmussen, C., 72

Índice de Conceptos

Applet, 62
Aprendizaje Significativo, 101
Asimilación y acomodación, 32

Concepción, 21, 67
Concepción Estructural, 45
Concepción Operacional, 45
Concepto, 21
Condensación, 46
Configuración Didáctica, 23
Conflicto Semiótico, 23
Creencia, 66

Descomposición Genética, 33, 96
Descripción del Modelo APOS, 27
Dualidad extensivo-intensivo, 24

Encapsular un Proceso, 102
Esquema, 37, 103
Esquema según Piaget, J., 28
Expresión-contenido, 24

Folding back, 47
Función Semiótica, 22

Imagen del concepto evocado, 44
Interiorización, 46
Invetigación-Acción, 76

Laboratorio Computacional, 75

Módulo de Clases, 75

Objeto, 102
Objeto matemático, 21
Objetos Personales, 22

Práctica Matemática, 21
Proceso, 102

Reificación, 46
Representaciones internas, 21

Significados Implementados, 22
Significados Institucionales, 22
Subsunsor, 204