# Universidad de Huelva


## Departamento de Ingeniería Minera, Mecánica y Energética

# Modelado computacional para el análisis dinámico, mediante método matricial, de sistemas multicuerpo de seis elementos

**Memoria para optar al grado de doctor**
**presentada por:**


**Juan Carlos Fortes Garrido**


Fecha de lectura: 25 de septiembre de 2008

Bajo la dirección del doctor:

Ricardo Arribas de Paz

**Huelva, 2009**


**ISBN: 978-84-92679-87-4**
**D.L.: H 11-2009**

Universidad de Huelva

ESCUELA POLITECNICA SUPERIOR

# MODELADO COMPUTACIONAL PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO, MEDIANTE MÉTODO MATRICIAL, DE SISTEMAS MULTICUERPO DE SEIS ELEMENTOS

**Tesis Doctoral de**
**Juan Carlos Fortes Garrido**

**Dirigida por**
**Dr. Ricardo Arribas de Paz**

UNIVERSIDAD DE HUELVA

2008

# Índice

# Índice

## Capítulo 1. Introducción, Objetivos y Antecedentes


1.1 Prefacio 2
1.2 Objetivos y principales aportaciones de la Tesis 3
1.3 Metodología 6
1.4 Organización de la Tesis Doctoral 6
1.5 Estado de la cuestión 8
1.6 Formulación simbólica versus formulación numérica. Elección del método 10
1.7 Breve bosquejo histórico sobre la dinámica 11
1.7.1 La Antigüedad 13
1.7.2 La Edad Media 15
1.7.3 El Renacimiento 15
1.7.4 El Siglo XVII 17
1.7.5 El Siglo XVIII 18
1.7.6 El Siglo XIX 18
1.7.6.1 Escuela Francesa 19
1.7.6.2 Escuela Alemana 19
1.7.6.3 Escuela Inglesa 20
1.7.6.4 Otras Escuelas 20
1.7.7 El Siglo XX 21
1.7.7.1 Breve historia del diseño de mecanismos con métodos Computacionales 22

# Capítulo 2. Base Cinemática.


2.1 Introducción 28
2.2 Tipos de coordenadas 29
2.3 Sistemas de coordenadas 30
2.4 Coordenadas cartesianas 31
2.5 Posición 32
2.6 Pares o juntas 37
2.7 Sistema Multicuerpo de seis elementos 39
2.8 Grados de libertad 43
2.9 Velocidad 46
2.10 Derivación de vectores en coordenadas cartesianas 47
2.11 Movimiento cualquiera de un eslabón 47
2.11.1 Movimiento plano cualquiera 48
2.12 Ecuaciones cinemáticas 48
2.13 Planteamiento de las ecuaciones geométricas 50
2.14 Planteamiento de ecuaciones no holónomas 52
2.15 Formulación de las ecuaciones en función del tipo de coordenadas 52
2.15.1 Ejemplos 54


# Capítulo 3. Base Dinámica.


3.1 Introducción 64
3.2 Planteamiento de las ecuaciones dinámicas 65
3.3 Tipos de análisis en dinámica 66
3.4 Análisis estático 73
3.4.1 Análisis por métodos vectoriales 74
3.4.2 Análisis mediante el principio de los trabajos virtuales 80
3.4.3 Análisis mediante el principio de las potencias virtuales 84
3.4.4 Análisis estático con rozamiento 88

3.5 Análisis dinámico inverso o cinetoestático 89
3.5.1 Fuerzas de inercia en los mecanismos 89
3.5.2 Centro de percusión 91
3.5.3 Análisis cinetoestático por métodos vectoriales 93
3.5.4 Análisis cinetoestático por trabajos o potencias virtuales 96
3.6 Análisis dinámico directo 96
3.6.1 Análisis dinámico directo por métodos vectoriales 97
3.6.2 Energía cinética de un mecanismo 198
3.6.3 Análisis dinámico directo mediante la ecuación de Eksergian 100
3.6.4 Análisis dinámico directo mediante las ecuaciones de Lagrange 104

# Capítulo 4. Determinación de Fuerzas en Sistemas Multicuerpo.

4.1 Introducción 110
4.2 Diagrama de cuerpo libre o aislado 111
4.3 Métodos de estudio 115
4.4 Análisis de esfuerzos dinámicos 117
4.5 Análisis de fuerzas en Sistemas Multicuerpo 120
4.6 Método de superposición 122
4.7 Método matricial 131
4.8 Análisis de fuerzas en eslabonamientos con más de cuatro barras 138
4.9 Elección del método de resolución 139

# Capítulo 5. El Programa DAMSFORT.

5.1 Introducción 142
5.2 Implementación 143
5.3 Descripción del programa 153
5.4 Estructura del programa DAMSFORT 156
5.5 Funcionamiento del programa 159
5.5.1 Pantalla inicial 160
5.5.2 Tipo de mecanismo 161
5.5.3 Uniones entre eslabones 166
5.5.4 Propiedades geométricas del mecanismo 169
5.5.5 Propiedades cinemáticas del mecanismo 170
5.5.6 Propiedades dinámicas del mecanismo 171
5.5.7 Resultados 172
5.5.8 Menú de salida 173
5.6 Validación del método 174

# Capítulo 6. Conclusiones y Líneas Futuras de Investigación

6.1 Conclusiones 204
6.2 Líneas futuras de investigación 207

# Bibliografía

B.1 Referencias bibliográficas 210
B.2 Bases de datos generales consultadas 224

# Anexo. Código Fuente del Programa DAMSFORT

El código fuente del programa está accesible en la dirección
http://www.uhu.es/jcarlos.fortes/Damsfort

# CAPÍTULO 1

# Introducción, Objetivos y Antecedentes

## 1.1 Prefacio

Un Sistema Multicuerpo ([Hus90]; [Sha98]; [Rah98]) es un modelo mecánico de un conjunto de cuerpos, también denominados elementos o eslabones, que pueden a su vez ser rígidos o flexibles, interconectados de tal modo que existe movimiento relativo entre ellos. Se trata pues de un término muy general que engloba a una gran cantidad de sistemas, entre los que pueden citarse los mecanismos, las máquinas, los vehículos de todo tipo y los robots.

La Dinámica de Sistemas Multicuerpo es la teoría que permite el análisis cinemático y dinámico de mecanismos generales.

La optimización dinámica de Sistemas Multicuerpo es un campo que ha despertado gran interés en la comunidad científica debido a la complejidad del problema y a la enorme cantidad de aplicaciones de desarrollo tecnológico que posee en los problemas de transmisión de fuerza y energía, diseño de mecanismos, máquinas y motores. Sin embargo, pese a la cantidad de recursos implicados, se trata de una disciplina en un estado de desarrollo incipiente, con multitud de metodologías desarrolladas para aplicaciones particulares pero con una carencia importante de métodos generales aptos para cualquier formulación del problema. Esta herramienta permite predecir el comportamiento cinemático y dinámico del sistema en las fases más tempranas del diseño. Es también una herramienta útil para estudiar la influencia de los distintos parámetros del diseño en el comportamiento del sistema.

Las técnicas de Dinámica de Sistemas Multicuerpo (DSM) permiten la simulación de cualquier sistema o subsistema mecánico, y con ello su análisis, diseño y mejora. Resulta claro por tanto el interés industrial, económico y científico de la DSM y prueba de ello es el gran número de Universidades e Instituciones Científicas que investigan directamente en DSM o bien utilizan las técnicas que provee dicha teoría en sus investigaciones.

La DSM es una herramienta de utilidad en numerosas disciplinas:

- Encuentra una de sus aplicaciones más clásicas en la Teoría de Máquinas y Mecanismos, convirtiéndose en una herramienta idónea para el análisis y diseño de éstos.
- Incluso la Robótica, desde una perspectiva mecanicista, puede considerarse una de las disciplinas que forman parte de la Teoría de Máquinas.
- La Teoría de Control, en el contexto de las máquinas, encuentra como compañera ideal la DSM ayudándole a sintetizar los modelos del sistema o subsistemas mecánicos.
- Los denominados sistemas de Realidad Virtual se sirven de la DSM para poder interactuar con los elementos del mundo virtual de forma realista.
- La Bio-Mecánica y un largo etcétera de aplicaciones,...

Si se considera que los sólidos constituyentes del sistema mecánico son flexibles, la teoría de la DSM comienza a confundirse con la teoría de la Elasticidad, siendo difícil aclarar donde termina una y donde comienza la otra [GJB94] [Guy65].

## 1.2 Objetivos y principales aportaciones de la Tesis

En este trabajo se propone el estudio de los métodos de análisis cinemático de mecanismos y de las formulaciones de análisis dinámico de Sistemas Multicuerpo aparecidas en las últimas décadas. Además se diseña un nuevo modelado computacional aplicable a sistemas de seis elementos y un grado de libertad, que son la base de muchas de las máquinas y mecanismos que hoy se emplean con profusión en la industria. Esta propuesta lleva implícitos la consecución de los siguientes objetivos:

- Recopilación de los trabajos publicados hasta la fecha acerca del análisis dinámico de Sistemas Multicuerpo. En concreto aquellos que tratan de la creación de modelados computacionales para su resolución.

- Creación e implementación del código necesario para diseñar un algoritmo que determine el momento de entrada y las fuerzas de reacción en las juntas, mediante un análisis dinámico del mecanismo.
- Desarrollar un modelado computacional cómodo y amigable para la resolución de los problemas dinámicos de Sistemas Multicuerpo de seis elementos.
- La incorporación de este método permitirá controlar simultáneamente los parámetros de posición, cinemáticos y dinámicos del sistema desde las fases más tempranas del diseño, permitiendo mejorar considerablemente el control sobre el comportamiento del sistema y reducir sensiblemente el tiempo de diseño del mismo.
- Disponer de un software que facilite, a los diseñadores y estudiantes de teoría de mecanismos, máquinas y elementos de máquinas, el estudio, análisis, comprensión y diseño de los mismos, con unos conocimientos básicos de mecanismos.
- Profundizar en el estudio de la Dinámica de Sistemas Multicuerpo.

La consecución de estos objetivos constituyó el trabajo de esta Tesis Doctoral que ha permitido obtener las aportaciones que se relacionan más abajo, a la vez que se abren distintas líneas de trabajo, según queda expuesto en el capítulo de conclusiones y líneas futuras de investigación.

La principal aportación de esta Tesis ha sido la formulación, estudio y desarrollo de un modelado computacional para el análisis dinámico de cualquier Sistema Multicuerpo plano de seis elementos y un grado de libertad que se expone en el capítulo cinco. Este trabajo trata sobre la creación y el análisis automatizado de las ecuaciones dinámicas de Sistemas Multicuerpo complejos basándose en la utilización de un sistema de formulación numérica del movimiento, accesible desde un lenguaje de programación convencional.

En este programa, se aborda el análisis dinámico considerando las restricciones de posición, cinemáticas y dinámicas a las que se encuentre sometido el sistema que se quiere analizar y que puede ser aplicado sobre cualquier mecanismo constituido por elementos rígidos, independientemente de la dimensión de su movimiento, de su

configuración topológica y de los pares cinemáticos que otorguen movimiento relativo a sus eslabones. Dicho programa reproduce fielmente los cálculos necesarios para su análisis, pero de una forma más ágil y dinámica.

El método numérico utilizado se basa en el análisis de fuerzas mediante método matricial [Sim02] en el cual, para obtener las fuerzas actuantes sobre las juntas de los eslabones, se debe de construir el sistema matricial a partir del diagrama de cuerpo libre de cada eslabón. El código de este programa puede ser empleado y modificado, para satisfacer las necesidades particulares que puedan presentarse dentro del diseño y análisis de máquinas y mecanismos. El programa se ejecuta bajo una máquina virtual llamada framework, siendo muy sencilla su portación a ambientes Windows debido a que fue codificado en lenguaje .NET. El código fuente del programa es exportable a otros sistemas operativos como LINUX, FORTRAN, MS-DOS, etc.

Esta aplicación se ilustra mediante el estudio y análisis, de diversos ejemplos de mecanismos de las citadas características.

Como resultado de la investigación desarrollada para la elaboración de esta tesis han surgido diversos artículos y estancias en universidades, de entre las que citamos las siguientes:

- Artículo presentado en el congreso internacional CIBEM VI en Coimbra, Portugal, año 2003 “Uso de MAPLE para el análisis cinemático de mecanismos planos”.
- Artículo presentado al XVII congreso nacional de Ingeniería Mecánica. “Análisis dinámico de Sistemas Multicuerpo de seis elementos mediante métodos computacionales”
- Estancia en la Universidad Politécnica de Graz, Austria, junio de 2007, departamento de Ingeniería Mecánica.
- Estancia en la IUT de Nîmes, perteneciente a la Universidad de Montpellier, Francia, marzo de 2007.

## 1.3 Metodología

Para conseguir los objetivos descritos anteriormente, la tesis se ha desarrollado según la metodología siguiente:

- Revisión bibliográfica de trabajos publicados hasta la fecha referentes al estudio de Sistemas Multicuerpo, en concreto aquellos que tratan sobre el análisis dinámico mediante métodos computacionales.
- Analizar las distintas formulaciones sobre análisis dinámico y delimitación del problema.
- Estudio y análisis de los métodos y planteamiento de objetivos.
- Selección del método de solución aplicable de entre todos los posibles, en el caso concreto de este trabajo. Formulación del algoritmo matemático aplicable.
- Creación del código fuente.
- Implementación de la aplicación, análisis de la estructura interna y comprobación experimental.
- Conclusiones y trabajo futuro.

## 1.4 Organización de la Tesis Doctoral

La presente Tesis Doctoral se enmarca dentro del campo del estudio Dinámico de Sistemas Multicuerpo, aunque hemos restringido el análisis a los sistemas de seis eslabones. La Tesis está estructurada en cinco capítulos y un anexo donde se incluye el código fuente del programa creado.

En la primera parte de la tesis, y tratando de hacer que el material presentado sea en cierta medida autocontenido, se presenta la teoría de la DSM desde el punto de vista de la Mecánica Clásica y del Sólido Rígido. Así en el primer capítulo se hace un repaso de la Dinámica desde la Antigüedad hasta nuestros días, haciendo especial énfasis en los métodos computacionales para el estudio de los Sistemas Multicuerpo,

el planteamiento de las ecuaciones dinámicas y la comparación entre la formulación simbólica y la numérica, cuya elección ha sido clave para la elaboración del contenido de esta tesis doctoral.

En el segundo capítulo se hace una introducción a la teoría básica de la Dinámica de Sistemas Multicuerpo relevante para el desarrollo e implementación posterior del programa que persigue esta Tesis Doctoral. Se analizan todos los aspectos de la Cinemática de Sistemas Multicuerpo, comenzando por la posición y el desplazamiento, se tratan los aspectos relativos al planteamiento de ecuaciones cinemáticas y se justifica la elección del tipo de coordenadas que vamos a utilizar ilustrándolo con los ejemplos del estudio de un mecanismo.

En el capítulo 3 se realiza un exhaustivo repaso de los diferentes métodos de Análisis Dinámico, ya que el diseño de cualquier Sistema Multicuerpo va a estar fuertemente influenciado por las solicitaciones dinámicas durante su funcionamiento, y es por eso que vamos describiendo los diferentes tipos y, con objeto de hacer más accesibles las diferentes ideas introducidas, se van presentando ejemplos de cada uno de los métodos reseñados.

En el capítulo 4 se hace un estudio más centrado en dos de los métodos de análisis dinámico de los componentes de los Sistemas Multicuerpo, haciendo comparación entre ellos y las ventajas que suponen uno u otro mediante la resolución de casos prácticos y se presentan los antecedentes al método elegido para la optimización del algoritmo de programación que se ha formulado.

En el capítulo 5 se detalla como se ha realizado la implementación del modelado computacional y se presenta el programa que el autor ha elaborado, que es la aportación principal de esta Tesis; se hace también, una validación de los resultados mediante la resolución de varios ejemplos, con el fin de ilustrar las características y la potencia del método, así como de evaluar su robustez y convergencia.

Por último, en el capítulo 6 se recogen las conclusiones y las aportaciones

fundamentales de este trabajo, así como las principales líneas futuras de investigación que basadas en el trabajo, sugiere el autor.

El código fuente que se ha creado e implementado para la formulación del modelado computacional que se presenta en esta Tesis Doctoral puede solicitarse al autor a través de la página http://www.uhu.es/jcarlos.fortes

## 1.5 Estado de la cuestión

A mediados del siglo XX los avances logrados en el campo de la optimización matemática permiten la aplicación de la metodología científica a una serie de problemas que hasta la fecha, y salvo honrosas excepciones que pasaron, sin embargo, inadvertidas, se habían tratado de una forma intuitiva muy alejada del obligado rigor que el tema merecía. Kantorovitch desarrolló un primer método de programación lineal. Su revolucionario trabajo, pese a publicarse en ruso en 1939, pasó inadvertido en occidente hasta su traducción al inglés, en 1960. Otros trabajos tempranos fueros los de Karush (1939) y John (1948), que sólo fueron reconocidos cuando perdieron gran parte del impacto que hubieran merecido en su día. La verdadera eclosión de los métodos matemáticos aplicados a problemas de optimización de Sistemas Multicuerpo tuvo lugar en 1947, cuando Dantzing, resumiendo el trabajo de sus predecesores, desarrolló el método simplex para la resolución de problemas lineales. A partir del trabajo de Dantzing proliferaron las contribuciones teóricas y las aplicaciones de los problemas de optimización lineal, debido también en gran parte al desarrollo acelerado que las computadoras sufrieron en esa época.

Mediado el siglo Kuhn y Tucker (1951) publicaron su trabajo, orientado a la resolución de problemas no lineales, en el cual llegaron a conclusiones semejantes a las que Karush y John habían obtenido años atrás. Sus resultados fueron fundamentales para la resolución de problemas de optimización no lineales, y hoy se consideran de gran importancia teórica, tanto en matemáticas como en otras disciplinas.

En la actualidad son multitud los campos de aplicación de las técnicas matemáticas de optimización, que van desde una vasta gama de aplicaciones ingenieriles, como el lanzamiento de satélites espaciales o el diseño de estructuras, elementos mecánicos y circuitos electrónicos, hasta aplicaciones económicas como el control de la producción, la asignación óptima de los recursos o las estrategias de inversión.

El software comercial de análisis cinemático y dinámico de los Sistemas Multicuerpo disponible hoy día en el mercado, es capaz de generar y resolver las ecuaciones del movimiento de forma automática. Se trata de una herramienta imprescindible para el diseño de los Sistemas Multicuerpo en campos tan diversos como la industria del automóvil [SiB02], la industria aeroespacial, la robótica o la biomecánica. En la actualidad existe una gran cantidad de software de análisis de Sistemas Multicuerpo en el mercado.

Los programas computacionales pueden dividirse, según el tipo de código que incorporen, en numéricos y en simbólicos [SaF03], aunque estos a su vez pueden subdividirse en semi-simbólicos, totalmente simbólicos, y además pueden ser implementados con otros programas como Maple, Matlab,…

En la actualidad existen multitud de códigos computacionales para el análisis dinámico de mecanismos, ya sean éstos de carácter comercial, docente o investigador. A modo de ejemplo vamos a citar algunos de éstos, pero sin pretender hacer una lista exhaustiva. Como ejemplos de códigos simbólicos podemos destacar ADAMS [Ada04], MBSYMBA [Mbs03] DADS [Dad04] y SIM-PACK [Sim04]. Como códigos semi-simbólicos diseñados para el tratamiento de problemas de la Dinámica Vehicular podrían citarse a NEWEUL [New04], [PoS93], basado en el formalismo de Newton-Euler, y CARSIM [Car04], [Say90]. Ambos códigos permiten tratar de forma eficiente las restricciones de tipo no holónomo, linealizar las ecuaciones de movimiento, e incluso optimizar parámetros dinámicos. Sin embargo, el sistema de álgebra simbólica en el que se basan tiene ciertas limitaciones y la posibilidad de manipular expresiones simbólicas en línea de comandos es escasa o

nula. En algunos casos esta limitación se resuelve exportando un código legible por MAPLE [Map04].

Como programas basados en códigos numéricos podemos citar FOURBAR y DINAFOUR [Nor03], FORTRAN [NAG95], NASTRAN [Nas04], WINMEC [WiM06], WORKING MODEL [WoM06], ROBOTRAN [Rob04], LAPACK [LAP07], etc. Dentro del análisis cinemático, la mayoría de los autores resuelven el problema a través de diversas técnicas de programación matemática no lineal con restricciones [Sto85], aunque recientemente han surgido planteamientos alternativos basados en técnicas metaheurísticas, como los algoritmos genéticos [CSP02] [GuD05] o las redes neuronales [Tor97]. En análisis dinámico el número de trabajos publicados es mucho menor puesto que la aparición de las ecuaciones algebraico-diferenciales que controlan el comportamiento dinámico del mecanismo complica sensiblemente el problema.

## 1.6 Formulación simbólica versus formulación numérica. Elección del método.

Las herramientas basadas en formulación simbólica no procesan números, sino nombres de variables y expresiones analíticas que las relacionan [Gil05]. La formulación simbólica está constituida por una serie de expresiones matemáticas que modelan el comportamiento cinemático y dinámico del sistema. Están disponibles en herramientas de matemática simbólica como MAPLE, MATHEMATICA [Mth04] o MATLAB [Mat04], y pueden a su vez incorporarse como bibliotecas en otros programas. La formulación simbólica [RFM03], aplicada a los Sistemas Multicuerpo, presenta las siguientes ventajas:

- Elimina muchas operaciones innecesarias.

- Permite ver explícitamente la influencia de cada variable en el comportamiento del sistema.

La formulación simbólica resulta ventajosa cuando todos los posibles movimientos del sistema están contenidos en unas ecuaciones de movimiento únicas. Esto no ocurre en el caso de que haya cambios cualitativos en la configuración cinemática del sistema durante el movimiento y resulta inviable, si durante el funcionamiento se producen modificaciones como consecuencia de impactos o rozamientos [ChH01].

La formulación numérica plantea las ecuaciones del movimiento numéricamente, sin generar nuevas expresiones analíticas, lo que la convierte en un método más eficiente porque es más sencilla de utilizar y permite construir herramientas de propósito general para el análisis cinemático y dinámico de Sistemas Multicuerpo de todo tipo. Las principales ventajas asociadas a la formulación numérica en el ámbito de los Sistemas Multicuerpo son las siguientes:

- Es más flexible, puesto que su formulación es menos específica.

- Genera problemas de menor tamaño, puesto que los algoritmos para el tratamiento simbólico de las variables son mucho más largos y complejos que los algoritmos de manipulación de matrices o de resolución de sistemas de ecuaciones.

- Es más eficiente y sencilla de utilizar.

Los últimos avances en métodos numéricos, entre ellos el uso de técnicas de matrices dispersas [DER97], que eliminan las operaciones que involucran a términos nulos, o la utilización de formulaciones dinámicas avanzadas, aumentan día a día la eficiencia de las formulaciones numéricas.

La elección entre las dos formulaciones no es obvia y depende de cada caso concreto, puesto que no se puede afirmar con rotundidad que uno de los planteamientos sea mejor, en general, que el otro [Pag94].

## 1.7 Breve bosquejo histórico sobre la dinámica

La forma de proceder del entendimiento humano, que pasa de lo sensible a lo inmaterial y de lo particular a lo universal, tiene una excepcional confirmación en la génesis y desarrollo de la Cinemática y Dinámica de mecanismos.

Ante la realidad evidente del movimiento físico o local de los cuerpos naturales, cabe plantearse dos primeros interrogantes necesarios: "*¿Qué es el movimiento?*", y *"¿Cómo se puede medir?*". A la primera pregunta se ha respondido afirmando que el movimiento de un cuerpo es su cambio de posición con respecto a un sistema de referencia absoluto, cambio que está parametrizado por el tiempo. Por su parte, la segunda plantea el problema básico de las ciencias experimentales: el problema de la medida.

Aceptando que se ha superado dentro de ciertos límites, por imprecisos que estos sean, este problema, y que se es capaz de cuantificar de alguna manera el movimiento, el científico da un paso más al inquirir: "¿por qué se produce el movimiento?". Cuestión que le llevará a un proceso analítico que conduce al establecimiento de unas ciertas causas del movimiento (fuerzas, inercias,...).

Para la Dinámica Teórica este proceso finaliza cuando, avanzando un estadio más, se obtienen unas leyes mediante las que se relacionan, de un modo universal, las causas del movimiento con esas magnitudes que lo cuantifican, y se llevan esas leyes a sus últimas consecuencias.

Este proceso es necesario y aún imprescindible, para quien cultive la disciplina de la Dinámica; sin embargo, no basta. Evidentemente, debe conocer sus fundamentos científicos, y desde esta perspectiva se asimilan los mecanismos teóricos, pero a partir de ellos ha de ser capaz de idear, y aún realizar, un "ingenio" que verifique una determinada operación mecánica preestablecida.

Se ha cerrado el ciclo: de la consideración científica de lo concreto, se establece una ley de comportamiento físico y apoyándose en ella se construye un ente concreto para realizar una función determinada.

No obstante, este paso inverso, desde la ley hasta el ente concreto, no es tan controvertible como a primera vista pudiera parecer. En efecto, el proceso de abstracción, que concluye en la ley mecánica, prescinde de un sin número de datos y circunstancias físicas para centrarse en los aspectos sustanciales del fenómeno. Por esta razón, el mundo real difiere del mundo cuyo comportamiento viene establecido por las leyes y por los modelos matemáticos consonantes con las leyes, y esta divergencia convenientemente cuantificada, es un índice significativo de la fiabilidad de éste. Dicho de otro modo: La ley representa un modelo matemático de la realidad y, como modelo, entraña una disparidad entre sus predicciones y las medidas experimentales; si esta disparidad fuera relativamente pequeña, el modelo es adecuado, en caso contrario, inaceptable.

Por ello, al presentar a continuación la historia de la formación y desarrollo de la Cinemática y Dinámica, se constatan sucesivamente según un orden cronológico, aquellas realizaciones prácticas mecánicas de interés que han supuesto un hito histórico y el progreso ininterrumpido de la abstracción mecánica constatable por el desarrollo coherente de la teoría.

## 1.7.1 La Antigüedad

Ya en el 260 a. de C. parece que existía en China el llamado "carro que mira hacia el Sur" [Str82], un ingenioso mecanismo montado en un carro que, merced a un tren epicicloidal de engranajes, mantenía el brazo de una figura humana apuntando siempre hacia el Sur, independientemente de en qué dirección se moviera el carro, y era utilizado como brújula por los viajeros que atravesaban el desierto de Gobi.

En poemas de la literatura hindú, compuestos hacia el año 1700 a. de C. [Bau07], se mencionan carros y ruedas, lo que nos permite suponer que ya entonces había mecanismos suficientemente conocidos.

Homero, cuya existencia se sitúa hacia el siglo X a. de C., se refirió a una manivela en la Ilíada y en la Odisea, así como a un dispositivo para taladrar en la Odisea.

Fueron los sabios griegos quienes se preguntaron por primera vez por la naturaleza del movimiento. Sus observaciones trascienden generalmente la contingencia de lo fenoménico para intentar profundizar en aquello que permanece como substrato de todo movimiento.

Aristóteles (384-322 a. de C.) a lo largo de sus obras, trató aspectos puramente mecánicos como la composición geométrica de fuerzas y la caída libre de los cuerpos, a la que dio una respuesta errónea, probablemente porque no llegó a captar el concepto de "movimiento en el vacío", ni tuvo la oportunidad de realizar una rigurosa experimentación.

Arquímedes (287-212 a. de C.) tiene indudablemente una trascendencia superior, y en él ven algunos al verdadero iniciador de la Mecánica como ciencia. Definió el centro de gravedad de un sistema material, estableció las leyes de la palanca, "dadme un punto de apoyo y moveré la Tierra", enunció el principio que lleva su nombre en Mecánica de Fluidos y desarrolló numerosos ingenios bélicos para la defensa de Siracusa (Sicilia) de donde era originario y en donde residía.

Ctesebio (285 a. de C.), un genio de la intuición técnica, desarrolló numerosos inventos, tales como un fusil de aire comprimido, un instrumento musical de aire alimentado por un fuelle, una bomba aspirante-impelente y un dispositivo para regular la posición de un espejo de salón.

Unos cien años más tarde, la influencia de la cultura helena traspasa las fronteras de Grecia y aparece en la ciudad de Alejandría una floreciente pléyade de sabios, que subsiste durante varios siglos. Herón de Alejandría (siglo I d. De C.) fue el primero

que empleó el vapor de agua como generador de potencia y escribió 3 libros en los que describe muchas máquinas, tales como la prensa de tornillo y un sofisticado odómetro que permitía medir fracciones de milla.

El mundo romano apenas se manifestó en el campo de las matemáticas y de las ciencias de la naturaleza.

## 1.7.2 La Edad Media

El periodo que abarca el final del imperio romano y toda la Edad Media, es decir algo más de 10 siglos, es un tiempo de una cierta decadencia técnica y científico-experimental. Se reprodujeron y mejoraron ligeramente los ingenios existentes, pero con una casi total carencia de creatividad mecánica.

## 1.7.3 El Renacimiento

Fue un momento histórico de resurgimiento en todas las áreas del saber humano, caracterizado por la aparición de grandes genios, algunos de los cuales centraron su atención en los problemas mecánicos. Una de las personalidades más destacadas fue, sin duda, Leonardo da Vinci (1452-1519), en cuyos famosos diseños de máquinas se han inspirado tantos otros autores posteriormente. En sus apuntes se encuentran diseños de grúas (con poleas, engranajes), ingenios voladores, dispositivos para respirar bajo el agua, mecanismos de transformación del movimiento (rotación en translación alternativa,...), odómetros, etc.

Gerolamo Cardano (1501-1576) inventó la junta de transmisión que lleva su nombre, y estudió la trayectoria de un punto de una circunferencia que rueda por el interior de otra circunferencia de diámetro doble.

La Estática, prácticamente olvidada desde Arquímedes, experimentó un notable desarrollo merced a los trabajos de Simón Stevin (1548-1620) que publicó a principios del siglo XVII su obra "Hypomnemata Mathematica" en la que trata del

equilibrio en un plano inclinado y de las poleas, empleando con soltura y seguridad la composición de fuerzas por el método del paralelogramo.

La máxima figura de la época renacentista fue, sin lugar a dudas, el italiano Galileo Galilei (1564-1642) filósofo, matemático y físico que ejerció sus tareas docentes en Pisa, Padua y, más tarde, en Florencia. Vehemente defensor de la teoría heliocéntrica, se le puede considerar como el iniciador de la Dinámica. Estudió la caída libre de los cuerpos, separando los aspectos cinemático y dinámico. No pretendió explicar el movimiento, sino describirlo: " Una vez que se conoce con exactitud como caen los cuerpos, entonces se puede probar a establecer las leyes profundas que lo rigen". Oponiéndose a la teoría aristotélica afirmó que los cuerpos caen en el vacío con la misma velocidad.

Galileo no fue solamente un hábil experimentador, sino que mostró también un agudo ingenio inductivo. Por razonamientos teóricos fue capaz de formular las leyes del movimiento uniformemente acelerado, y dedujo la trayectoria parabólica de un proyectil lanzado horizontalmente y sometido a la acción de la gravedad. Conoció la fuerza centrífuga y enunció la ley del sincronismo del péndulo, estableciendo que el periodo del movimiento era proporcional a la raíz cuadrada de su longitud e independiente de su masa. En sus trabajos de Estática, empleó la construcción del paralelogramo para la composición de fuerzas y definió una nueva magnitud: el momento de una fuerza.

Los trabajos de Galileo fueron continuados por una pléyade de discípulos, en su mayoría italianos, entre quienes merece destacar a Evangelista Torricelli que abordó también el estudio de la caída de los cuerpos. Fue el primero en afirmar que la Mecánica es una rama de las Matemáticas en la que aparecen unas magnitudes nuevas, tales como la fuerza, y un concepto también nuevo, el movimiento. En su obra se produjo, de hecho, la emancipación del movimiento y de las fuerzas dentro de una Mecánica racional.

En el año 1561, nació en Londres F. Bacon, creador del empirismo inglés. De raíz plenamente filosófica su obra tiene unas indudables repercusiones en el desarrollo de las ciencias físico-naturales.

## 1.7.4 El Siglo XVII

En él la Mecánica alcanza una cierta madurez como ciencia, lográndose al fin proporcionar una cierta unidad a los conocimientos desarrollados hasta entonces. Es la época de los grandes sabios: Descartes, Pascal y Mariot en Francia, Huygens en Holanda, Boyle, Hooke y Newton en Inglaterra,...

René Descartes (1596-1650) formuló correctamente la ley de la inercia, aunque no llegó a captar bien el concepto de aceleración. Sus seguidores sostuvieron una controversia con Leibnitz (1646-1716) acerca de la "eficacia" del movimiento. Para los cartesianos la eficacia era proporcional a la velocidad; mientras que para Leibnitz lo era a su cuadrado. Analizando con detenimiento se observa que este desacuerdo es tan sólo una discrepancia de puntos de vista sobre un mismo hecho. Para Descartes la eficacia se contaba por el tiempo, y para Leibnitz por el espacio... y ambos tienen razón. Sin embargo, esta disputa constituye el primer momento histórico en que se presentan dos concepciones radicales de la Mecánica: la Mecánica vectorial y la Mecánica variacional.

Christian Huygens (1629-1695) describió los relojes de péndulo de su época e inventó el péndulo cicloidal, cuyo periodo es independiente de la amplitud del movimiento (tautocronismo). Estableció la reciprocidad entre los centros de suspensión y oscilación (teorema de Huygens), y parece que fue también precursor de la ecuación de Euler-Savary.

Probablemente el científico más importante de la época fue Isaac Newton (1642-1727). En él finaliza una época y con él se inicia otra. Sistematizó todos los conocimientos inconexos anteriores dándoles una estructura lógica definitiva. En su obra "Principia Matemática Philosophiae Naturae" estableció las tres leyes

fundamentales de la Dinámica. Matizó de forma definitiva la diferencia entre masa y peso, y enunció la Ley de la Gravitación Universal, basándose en la descripción que había hecho Johannes Kepler (1571-1630) del movimiento planetario.

Jean Bernoulli (1661-1748) intervino activamente en el desarrollo de la Mecánica de Fluidos y reconoció el principio de los trabajos virtuales como un principio general de la Estática. También desarrolló el concepto de centro instantáneo de rotación en el movimiento plano.

## 1.7.5 El Siglo XVIII

A lo largo de este siglo se va perfilando la Cinemática como ciencia, si bien no se consolidará como tal hasta el siglo siguiente. Jacob Leupold (1674-1727), hizo una auténtica recopilación de los inventos mecánicos de siglos precedentes, proporcionando la primera definición de máquina: “sistema artificial capaz de producir un movimiento ventajoso y de mover los cuerpos con ahorro de tiempo y de fuerza".

Leonhard Euler (1707-1783), discípulo de Jean Bernoulli, estableció que el movimiento plano de un sólido indeformable puede describirse como la composición de una traslación y una rotación alrededor de un punto. Este principio, extendido a la velocidad y aceleración, constituye el origen del análisis gráfico de mecanismos. James Watt (1736-1819) dedicó un gran esfuerzo a la síntesis de movimientos, abordando el problema de la trayectoria de un punto del acoplador del cuadrilátero articulado y logrando generar un movimiento rectilíneo aproximado. Estos estudios le permitieron perfeccionar la máquina de vapor, a la que dotó de un mecanismo capaz de transmitir la fuerza en ambos sentidos.

## 1.7.6 El Siglo XIX

Durante este siglo, los conocimientos que constituyen hoy la Mecánica de Máquinas se fueron consolidando y madurando. La Geometría y el Análisis Matemático

contribuyeron notablemente a este progreso, motivado por el rápido crecimiento tecnológico. Los estudiosos del siglo en esta área pueden agruparse principalmente en las tres grandes escuelas: la Francesa, la Alemana y la Inglesa.

### 1.7.6.1 Escuela Francesa

André Marie Ampère (1775-1836) reconoció la posibilidad de estudiar el movimiento de los mecanismos con independencia de las fuerzas que lo producen, y acuñó el término "cinemática", traducción del vocablo griego que significa movimiento. A partir de este momento, la Cinemática comenzó a ser considerada como ciencia.

Gustave Gaspard de Coriolis (1792-1843), ingeniero de profesión y director de l'Ecole Polytechnique (París), definió la componente de la aceleración que lleva su nombre y fue un precursor de la Mecánica Aplicada moderna. Michel Chasles (1793-1880) y Louis Poinsot (1777-1859) generalizaron respectivamente los conceptos de centro instantáneo de rotación - ya introducido por Jean Bernoulli - y de eje instantáneo de rotación.

### 1.7.6.2 Escuela Alemana

La Cinemática moderna comenzó con Franz Reuleaux (1829-1905), profesor de Cinemática en el Politécnico de Zurich y en Berlín, a la vez que director de la Real Academia de la Industria de Alemania. Fue el primero en analizar los Mecanismos de modo sistemático y profundo, definiendo los conceptos de elemento, par, cadena cinemática, equivalencia cinemática e inversión. Clasificó los pares en "superiores" (contacto puntual o a lo largo de la línea) e "inferiores" y apuntó la idea de la expansión de los pares de revolución. Redujo toda máquina a una combinación de componentes: barras, ruedas, levas, etc.

R. Mehmke y Karl Friedrich Möhr (1806-1879) introdujeron en Alemania los métodos gráficos para el análisis de mecanismos, tales como el cinema de velocidades.

Sigfrid Aronhold (1819) enunció, con anticipación a Kennedy, el "teorema de los tres centros", si bien ambos desarrollaron el trabajo por separado.

Martín Grübler (1851-1935), profesor en las Universidades de Zurich, Riga, Berlín y Dresde, estableció el "criterio de movilidad" para mecanismos planos y espaciales

### 1.7.6.3 Escuela Inglesa

Robert Willis (1800-1875), ingeniero y antropólogo, fue profesor de la Universidad de Cambridge, y propuso un criterio de clasificación de los mecanismos en base a la relación de transmisión del movimiento entre los elementos de entrada y salida.

Samuel Roberts (1827-1893), abogado estudioso de las matemáticas, demostró la existencia de tres tipos diferentes de cuadriláteros articulados capaces de trazar idénticas curvas de acoplador.

Alexander Blake William Kennedy (1847-1928), profesor del University College (Londres), formuló el algoritmo gráfico para la determinación del polo del movimiento relativo entre dos elementos de un Mecanismo y tradujo al inglés la obra de F. Reuleaux contribuyendo a su difusión.

Robert Henry Smith (1825-1916), profesor de Mecánica Aplicada, desarrolló su actividad docente en Japón. Introdujo el empleo de métodos gráficos para el análisis de velocidades en los mecanismos, técnica que se generalizaría a partir de 1930.

### 1.7.6.4 Otras Escuelas

Giuseppe Antonio Borgnis (1780), profesor de Mecánica en la Universidad de Pavía, sugirió la división de los componentes de las máquinas en seis tipos: receptores,

comunicadores, modificadores, soportes, reguladores y operadores. Esta clasificación fue simplificada por De Coriolis que redujo las partes de una máquina a tres: elementos receptores de la acción externa, elementos transmisores del movimiento y elementos conducidos.

Pafnutij Chebyshev (1821-1894), profesor de matemáticas en la Universidad de San Petesburgo y creador de la Escuela Rusa de Cinemática, se dedicó al dimensionamiento del cuadrilátero articulado capaz de generar trayectorias rectas y circulares con error mínimo, utilizando para ello los polinomios que llevan su nombre.

### 1.7.7 El Siglo XX

El comienzo del siglo se encuentra dominado por las Escuelas Alemana y Rusa. La primera - fundada por Burmester - se polarizó hacia los problemas de síntesis dimensional, sobre todo en su aplicación a los mecanismos planos. En Rusia, los discípulos de Chebyshev prosiguieron sus trabajos en las técnicas de ajustes y aproximación de curvas, desarrollando métodos especiales y nuevas herramientas matemáticas.

Terminada la guerra, surge con gran ímpetu la Escuela Americana (A. Svoboda, J.A. Hrones y G.L. Nelson) donde pronto se empezó a utilizar profusamente el computador, promoviendo el desarrollo de nuevos métodos algebraicos y numéricos, mucho más generales que los métodos gráficos previamente utilizados.

Hoy en día, un gran porcentaje de los métodos en uso están orientados al computador y la investigación se dirige, no sólo hacia la mejora de los propios métodos, sino también hacia un mejor aprovechamiento de las capacidades informáticas. Una de las capacidades más interesantes es la de resolver problemas de modo interactivo, lo cual tiene enormes posibilidades tanto en el campo del diseño como en el de la enseñanza.

La Dinámica, por su parte, estudia el movimiento junto con las fuerzas motoras que lo producen y las reacciones que se originan. Aborda problemas de potencia motriz, rendimiento, reacciones en apoyos, tensiones y deformaciones elásticas, vibraciones, fallos por choque o fatiga, problemas tribológicos, etc. La dificultad que presenta la resolución de un problema dinámico suele ser, en general, muy superior a la de uno cinemático, debido principalmente al distinto papel que juega la variable tiempo y a los efectos no lineales que aparecen.

De forma análoga a lo que sucede en Cinemática, también en Dinámica existe un enfoque tradicional gráfico o grafoanalítico y un enfoque moderno analítico y orientado al computador. Aquí, sin embargo, las diferencias no son tan acusadas ya que las evaluaciones dinámicas del movimiento siempre se plantean a partir de los mismos principios generales: Ecuaciones de Lagrange, Leyes de Newton, Teorema de los Trabajos Virtuales, Principio de Superposición,…

Hoy en día, existen programas de computador capaces de efectuar análisis cinemáticos y dinámicos de sistemas mecánicos complejos. Estos programas realizan auténticas simulaciones, de las que pueden obtenerse tanto resultados numéricos (tablas, gráficas,...), como gráficos, visualizando de manera realista el movimiento del sistema en la propia pantalla del computador. Es importante constatar cómo el usuario de estos programas debe poseer unos sólidos conocimientos teóricos, que le permitan definir correctamente el modelo más apropiado para su problema, detectar los posibles errores en dicho modelo e interpretar correctamente los resultados obtenidos.

### 1.7.7.1 Breve historia del diseño de mecanismos con métodos computacionales.

Muchos de los principios básicos del estudio y análisis de Sistemas Multicuerpo presentados en este trabajo se conocen desde hace más de 100 años. Muchas de esas técnicas, que tienden a ser de naturaleza gráfica, pueden hacerse más útiles al diseñador mecánico haciendo que la computadora lleve a cabo las porciones

repetidas de las construcciones, con mucha mayor precisión que la que es posible alcanzar manualmente. El diseñador puede entonces concentrarse en los aspectos más creativos del proceso de diseño, abstrayendo el modelo analizable y experimentando con varios diseños en forma interactiva con la computadora. Así, aunque la labor monótona se delega a la computadora, la creatividad innata del diseñador permanece en el "circuito".

La aplicación de la computadora a los problemas de mecanismos y Sistemas Multicuerpo ha tenido una historia relativamente corta. La evolución comenzó con los códigos de análisis en unidades centrales (*mainframes*) y ha progresado a métodos de diseño y análisis, amigables para el usuario, sobre computadoras personales o portátiles.

1. ***Década de los 50.*** La década de los 50 vio la primera introducción y disponibilidad de las computadoras digitales en la industria y programas de ingeniería en las universidades. Varios programas fueron desarrollados por Al Hall y otros en la Universidad de Purdue, por el grupo de C.W. McLarnan en la Universidad del Estado de Ohio, por J.E Shigley y otros en Michigan por el grupo de F.Freudenstein en Columbia y por J.Denavit y R.Hartenberg en Northwestern. Freudenstein revisó los programas de computadora desarrollados para el diseño de mecanismos antes de 1961. En 1951, Kemler y Howe presentaron "tal vez la primera referencia publicada sobre aplicaciones de la computadora en el diseño de mecanismos, la cual ilustra cálculos de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en mecanismos de retorno rápido". Una de las contribuciones tempranas que usó la computadora para síntesis de eslabonamientos fue la de Freudenstein y Sandor, que adaptó las técnicas con base gráfica sugeridas por Burmester en 1876 y las reformuló para solución por computadora. Las ecuaciones resultantes de síntesis compleja fueron resueltas en modo de lote en una IBM 650. Este trabajo fue la

base técnica para los códigos KINSYN y LINCAGES que surgieron en los años 70.

2. ***Década de los 60.*** Las computadoras se volvieron más accesibles a los investigadores universitarios en los primeros años de la década de los 60. Muchos investigadores empezaron a utilizar la fuerza de la computadora para resolver ecuaciones cuyas resoluciones resultaban demasiado tediosas por técnicas gráficas, por regla de cálculo o por calculadoras electromecánicas de escritorio. Hacia finales de los 60, se empezaron a resolver problemas de síntesis en modo de lote con la computadora, con técnicas de punto de precisión o tipo optimización. El área del análisis dinámico de mecanismos de cuerpo rígido y del balanceo de eslabonamientos comenzó a emerger con base en la potencia de las computadoras digitales. Aunque se tuvieron algunos éxitos inicialmente con las computadoras híbridas (analógicas combinadas con digitales) en la resolución de ecuaciones diferenciales de movimiento, los métodos numéricos de integración, como el de Runge-kutta, ocasionó que los dispositivos analógicos fuesen eliminados poco a poco.
3. ***Década de los 70.*** En los primeros años de la década de los 70 se tuvo un aumento repentino en las aplicaciones de las computadoras. Códigos como el IMP, desarrollado por P. Sheth y J. Uicker en la universidad de Wisconsin, y el DRAM y ADAMS, desarrollado en la Universidad de Michigan por D. Smith, N. Orlandea y M. Chace, tuvieron sus raíces en esta década. La computación cambió lentamente del modo de lote al modo interactivo, lo que constituyó un paso importante en hacer las técnicas más útiles a los diseñadores. Además, las gráficas por computadora aplicadas al diseño de mecanismos recibieron su bautizo en los primeros años de la década de los 70 por Kaufman. KINSYN I fue un programa diseñado especialmente en el M.I.T y debe ser reconocido como el principal hito en el diseño cinemático. La computadora digital por sí misma nos trasladó a la

mitad del camino hacia el diseño útil de mecanismos ayudado por computadora. Las gráficas por computadora para entradas, salidas, así como para mejorar la interacción en la toma de decisiones sobre diseños fue el segundo ingrediente requerido. Hacia finales de la década de los 70 se dispuso de otros paquetes de software para síntesis y análisis.

4. ***Década de los 80.*** En los años 80 se tuvo un aumento extraordinario en la actividad alrededor de mecanismos por varias razones. Los años 80 vieron también el principio de la integración del análisis, síntesis y dinámica de los mecanismos con otras áreas de diseño ayudado por computadora, como el dibujo, los elementos finitos y la simulación.
5. ***Década de los 90 y siguientes.*** La integración de la computadora en el diseño de mecanismos se ve muy estimulante. El diseñador de mecanismos tiene a su disposición un impresionante conjunto de herramientas para el análisis y diseño óptimo de mecanismos [CrA04]. Varias áreas específicas tendrán una actividad incrementada. Entre éstas se cuentan, (1) el uso de modeladores sólidos para la exhibición y análisis de mecanismos en dos y tres dimensiones; (2) la integración del software para el análisis y síntesis de mecanismos en otras fases del diseño y manufactura ayudado por computadora; (3) muchas más aplicaciones a necesidades específicas de la industria; (4) más análisis y diseño ayudado por computadora para elementos de máquinas (engranajes, levas, indexadores, etc.); (5) mejoras técnicas para el análisis y simulación de problemas más complejos incluidos, holguras, deflexiones de eslabones, fricción, amortiguamiento, etc; (6) el desarrollo de técnicas del tipo síntesis ayudadas por computadora, para diseñadores, útiles en las etapas de técnicas de sistemas expertos e inteligencia artificial; (7) el uso de sofisticadas intefaces gráficas que conducirán a un software muy cómodo para el usuario; (8) un aumento en el desarrollo del software para el diseño de mecanismos en computadoras portátiles y (9) el uso de supercomputadoras que

permitan la optimización, el procesamiento en paralelo y la simulación en gran escala del diseño.

# CAPÍTULO 2

# Base

# Cinemática

## 2.1 Introducción

En este capítulo y en el que sigue, se va a hacer una introducción a la teoría básica de la Dinámica de Sistemas Multicuerpo relevante para el desarrollo e implementación posterior del programa que persigue esta Tesis Doctoral

En particular, en este capítulo será introducida la parte Cinemática de dicha teoría, mientras que el tratamiento de los aspectos dinámicos se pospone al capítulo siguiente. En ambos capítulos se plantearán varios ejemplos que tratarán de hacer más claras las ideas teóricas introducidas.

No es la misión principal de esta Tesis hacer una somera descripción de todos los métodos cinemáticos, pero, se deja constancia de los métodos más importantes para el análisis cinemático de mecanismos, desde los más antiguos de la Mecánica Clásica, hasta los más modernos. En la lectura de este capítulo el lector observará cómo se plantean las ecuaciones de la Cinemática, a partir de relaciones entre magnitudes vectoriales de naturaleza cartesiana. Una vez desarrolladas, las ecuaciones anteriores se expresarán de forma analítica o matricial. Esta separación de los mundos cartesiano y analítico debe fomentar al máximo la simplificación del planteamiento de expresiones que involucren magnitudes de dicha naturaleza. La preferencia por lo cartesiano en el planteamiento de las ecuaciones de la mecánica, no sólo presente en la cinemática, sino también en la dinámica, no es un hecho casual, sino que, en opinión del autor, se debe a la forma natural de razonar de los humanos, ya que está claro que comprendemos mejor el significado de las ecuaciones cuando éstas expresan relaciones de tipo cartesiano.

En este capítulo de teoría, el lector encontrará los diferentes elementos de naturaleza cartesiana (punto, base y referencia) [Ros02], relacionados en las expresiones cinemáticas mediante los operadores Vector de posición, Velocidad, Velocidad Angular, etc.

Por último se presentará la expresión matricial que adoptan los diferentes tipos de ecuaciones cinemáticas. Las matrices obtenidas, pondrán de manifiesto cuáles deben ser las estructuras de datos que darán soporte al planteamiento matricial de las ecuaciones.

## 2.2 Tipos de coordenadas

Quizá, todavía a día de hoy, una de las características que identifican la DSM es la gran variedad de tipo de coordenadas, (absolutas, relativas, naturales) utilizadas en el planteamiento de las ecuaciones dinámicas. De hecho, al entrar en este mundo, las primeras cuestiones que se plantean son:

¿Por qué tantos tipos de coordenadas? y ¿Cuáles son las mejores?, cuestiones que, lejos de tener una respuesta sencilla, siguen suscitando hoy en día algunas controversias en la comunidad científica.

Una forma sencilla de evitar conflictos es reconocer que, en gran medida, dicha variedad atiende a una cuestión de preferencias, aunque evidentemente pueden encontrarse otras justificaciones:

- La forma de razonar de los humanos está más próxima a un tipo de coordenadas que a otros. Por ejemplo, para el que escribe es difícil visualizar la orientación de un cuerpo cuando se observan las posiciones de varios de sus puntos, mientras que resulta más sencillo si se utiliza un ángulo para caracterizar dicha orientación.
- La inconveniencia numérica (o limitación real como en el caso de los ángulos de Euler) que presentan algunas coordenadas frente a las ventajas de otras …

En última instancia, para un determinado problema, una vez fijado el método de integración y el formalismo empleado para plantear el problema dinámico, siempre

existe un conjunto de coordenadas que permite una solución más rápida del problema [Jim95], [Rod04] y [Cua97].

## 2.3 Sistemas de coordenadas

Para poder definir las posiciones y los desplazamientos de los diferentes puntos de un mecanismo es necesario utilizar algún sistema de coordenadas [GaV04]. En lo que sigue se definen tres sistemas de coordenadas que se usan en Mecánica: coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Para cada uno de estos sistemas de coordenadas tridimensionales se define tres coordenadas escalares que son (*x, y, z)* en cartesianas, (*ρ, φ, z*) en cilíndricas y (*r, θ, Φ*) en esféricas y además se define vectores unitarios asociados a esas coordenadas espaciales: $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$, $(\hat{\rho},\hat{\varphi},\hat{k})$ y $(\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi})$. Estos vectores unitarios apuntan en una dirección que, en general, depende del punto que se está describiendo. Sólo en coordenadas cartesianas esto no ocurre así.

Aunque existen diferentes sistemas de coordenadas como las cilíndricas y esféricas, en este trabajo se emplearán las coordenadas cartesianas, que se basan en los ejes mutuamente perpendiculares *X, Y,* y *Z*. Estos ejes tienen asociados unos vectores unitarios, como ya dijimos antes. Los ejes y los vectores unitarios asociados se suponen fijos al sistema de referencia en el cual se describe el movimiento, entonces los vectores de posición velocidad y aceleración son:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{i} + z(t)\,\hat{k}$$
$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\hat{i} + \dot{y}(t)\,\hat{i} + \dot{z}(t)\,\hat{k}$$
$$\vec{\alpha}(t) = \ddot{x}(t)\,\hat{i} + \ddot{y}(t)\,\hat{i} + \ddot{z}(t)\,\hat{k}$$

| Coordenadas | vectores |
|---|---|
| $x,\ y, z$ | $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ |

Las coordenadas *(x(t), y(t), z(t))* de un punto móvil dependen del tiempo pero los vectores unitarios son constantes.

## 2.4 Coordenadas cartesianas.

En el apartado 2.2 ya se hacía referencia a la gran variedad de tipo de coordenadas que se utilizan en el planteamiento de las ecuaciones dinámicas y a las posibles razones para justificar la elección de uno u otro tipo. En esta Tesis se utilizan las coordenadas cartesianas porque permiten, a juicio del autor, una solución más rápida del problema tal como queda justificado al final del presente apartado.

También llamadas coordenadas de punto de referencia, las coordenadas cartesianas se formulan para evitar los inconvenientes asociados al uso de coordenadas relativas [Nik88]. En general se define la posición de un eslabón mediante las coordenadas cartesianas de un punto del mismo, al que se llama punto de referencia y que suele coincidir con el centro de masa del eslabón, y una serie de parámetros que definen la orientación del eslabón. En el caso particular de sistemas planos, son necesarias tres coordenadas cartesianas para definir absolutamente la posición de un elemento del sistema: se define la posición del punto de referencia mediante dos coordenadas cartesianas, y la orientación del elemento mediante un ángulo. El cuadrilátero articulado de la figura 2.1 se caracteriza entonces por seis coordenadas, que coinciden con las coordenadas de los centros de masas de las barras, y los tres ángulos que forman las barras con la dirección horizontal. Las ventajas más importantes derivadas de la utilización de coordenadas cartesianas son las siguientes:

• Se maneja directamente la información sobre la posición, velocidad y aceleración absoluta de cada elemento, por lo que desaparece el trabajo extra de preproceso y postproceso que implicaba la utilización de las coordenadas relativas.

• Las matrices que aparecen en las ecuaciones del movimiento tienen muy pocos términos no nulos, por lo que puede adoptarse una formulación adecuada a este tipo de matrices, que resulta particularmente eficiente.

• Las restricciones se establecen a escala local, dado que las ecuaciones de restricción que introduce un par cinemático sólo implican a las coordenadas de los

dos elementos conectados. Este hecho hace posible que las ecuaciones de restricción sean independientes de la complejidad del sistema.

Por otro lado, el principal inconveniente del uso de coordenadas cartesianas es el elevado número de coordenadas que son necesarias para definir la posición del sistema, lo que incide negativamente en el coste computacional.

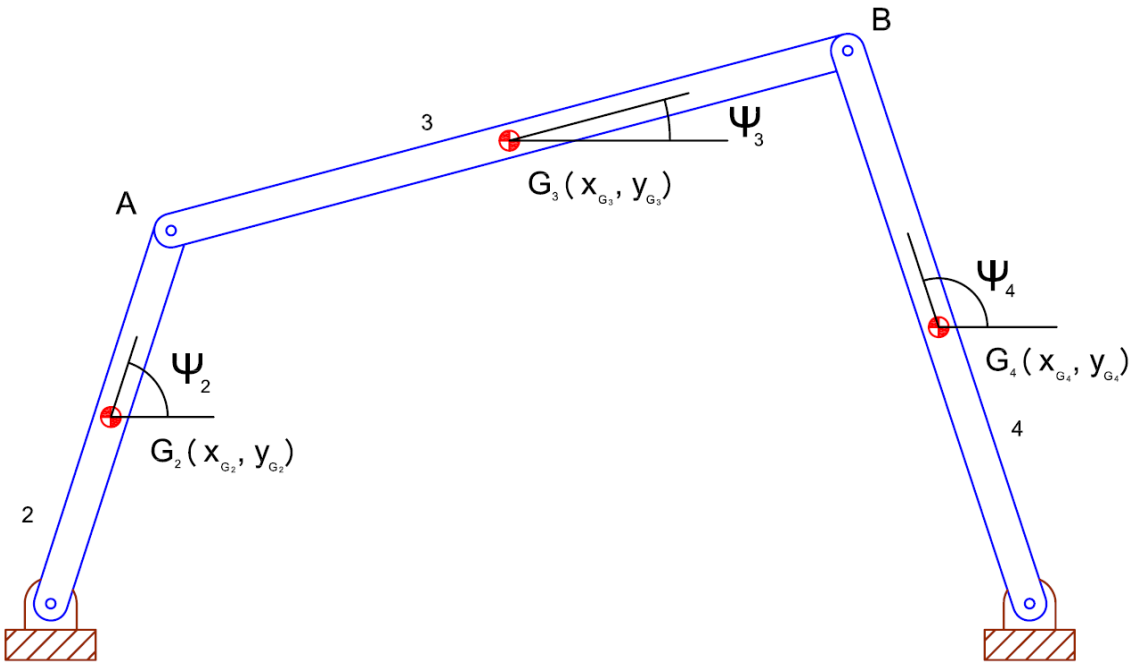



Figura 2.1 Coordenadas cartesianas para el cuadrilátero articulado.

## 2.5 Posición

La realización del análisis cinemático constituye la fase previa y fundamental al acometer el proceso de análisis y/o diseño de un mecanismo. Dentro de este análisis cinemático el primer paso que se debe resolver es el análisis de la posición. Sin embargo, a juicio del autor, resulta llamativo el escaso número de métodos para la resolución del problema de posición desde un enfoque de tipo general [Wal96], y es por lo que, la clasificación que aquí se presenta, está basada en el tipo de planteamiento. Según esto pueden clasificarse en métodos gráficos, analíticos y de computación matricial.

De acuerdo con esta clasificación en primer lugar se encuentran los métodos gráficos, o desde un enfoque más amplio y actual, los métodos grafo-analíticos. Dentro de ellos se pueden establecer a su vez tres subgrupos. Los dos primeros se encuadran en lo que podría denominar métodos gráficos clásicos. Cabe distinguir por tanto, en primer lugar, los métodos de descomposición diádica o métodos de intersecciones, [Koz81], [Hai67]. En el segundo subgrupo están los procedimientos de interpolación gráfica o falsas posiciones [Koz81] [Hai67] [Erd97]. Los métodos gráficos clásicos se apoyan en la existencia de un lazo cuadrilátero en el mecanismo cosa que sucede en la mayoría de los mecanismos sencillos. En los métodos que forman el tercer subgrupo, el problema de posición se aborda desde un enfoque geométrico mientras que la resolución del problema se realiza mediante procesos analíticos. Son los métodos que utilizan el enfoque modular [Man68] [KiC84] [Inn97], que consiste en descomponer el mecanismo en bloques de elementos más simples para con posterioridad ensamblar sus resultados. La dificultad fundamental de los métodos modulares consiste en que cuanta más generalidad pretende darse, los módulos de mecanismos crecen en complejidad.

Los métodos analíticos se caracterizan por realizar un planteamiento analítico, independientemente de cual sea el procedimiento de resolución (en muchos casos numéricos). Estos métodos toman como punto de partida las ecuaciones del cierre de los lazos independientes del mecanismo. En este sentidos son métodos particulares que se concretan en programas de propósito particular. Una vez planteadas las ecuaciones del problema de posición del mecanismo, hay tres maneras de resolver estos sistemas de ecuaciones no lineales [NiR99]: por métodos de continuación polinomial, por métodos de eliminación y las Bases de Gröbner [Buc85].

Los métodos de continuación polinomial son conocidos como métodos homotópicos. El procedimiento de continuación polinomial es un método de carácter puramente numérico [WaS96] [WMS90]. Debido a que las ecuaciones de cierre de los lazos del mecanismo son polinómicas en senos y cosenos, el método de continuación es capaz de encontrar todas las posibles soluciones sin necesidad de partir de una solución

aproximada cercana a la posición solución. Esto supone una ventaja a destacar con respecto a los tradicionales métodos basados en el algoritmo Newton-Raphson. Otra ventaja fundamental es la capacidad del método para resolver sistemas de ecuaciones de muy grandes dimensiones. El coste computacional es la desventaja fundamental de estos métodos que no los hacen aptos para aplicaciones en las que se necesita controlar la posición de un mecanismo en tiempo real. Para la obtención de soluciones en forma cerrada, (solución analítica), existen dos posibilidades: los denominados métodos de eliminación y las Bases de Gröbner [DAK98]. Los métodos de eliminación utilizan una formulación algebraica que permite la eliminación de un gran número de variables convirtiendo un sistema de ecuaciones multivariante en una única ecuación univariante [Sal85]. Habitualmente la ecuación resultante es compleja, y debe ser resuelta mediante procedimientos numéricos o mediante la resolución de un problema de valores y vectores propios a partir del determinante resultante [RaR95]. Estos métodos resuelven totalmente el problema de posición obteniendo todas las soluciones reales, complejas y en el infinito.

Dentro de los métodos de eliminación se pueden distinguir tres tipos: métodos de eliminación simultánea [Wam00], de eliminación sucesiva [NiR99] [DAK00] y de eliminación repetida [DAK01]. Los métodos de eliminación poseen una eficiencia computacional mayor que los de continuación polinomial y las Bases de Gröbner. La dificultad de los métodos de eliminación está en encontrar, para cada caso, una estrategia adecuada para la eliminación de las variables. Presentan asimismo el inconveniente de que no pueden evitar introducir soluciones ajenas al problema debido a las manipulaciones analíticas realizadas. Las Bases de Gröbner [Buc85] [DAK98], constituyen un procedimiento algebraico iterativo de eliminación de variables. A pesar de su alto coste computacional, esta técnica resulta muy útil a la hora de confirmar el número de soluciones de un determinado problema de posición o como ayuda para determinar su polinomio característico. Asimismo, la utilización de las Bases de Gröbner ha demostrado ser muy eficiente en combinación con los métodos de eliminación basados en matrices resultantes [DAK98].

Por último se encuentran los métodos generales de computación matricial. Por tales se entienden, aquellos procedimientos que dan lugar a programas de computador basados en algoritmos sistemáticos de análisis [Erd97], que permiten el análisis cinemático completo, de forma automatizada para mecanismos con cualquier grado de complejidad y cualquier número de elementos. Dentro de los métodos de computación matricial existen dos enfoques: el más extendido, basados en sistemas multicuerpo, y otro más particular desarrollado a partir del Método de los Elementos Finitos [AJH96].

En los métodos multicuerpo, a la hora de modelizar el mecanismo, hay que seleccionar un conjunto de coordenadas que definan unívocamente la posición de los elementos del mecanismo. Para ello, existen distintos tipos de coordenadas donde las más importantes son: coordinadas relativas [Sui72], coordenadas cartesianas [Hau89] y coordenadas naturales [GSA81]. Una valoración comparativa de la utilización de los distintos tipos de coordenadas puede verse en las referencias [NiK88] y [NiR00]. A partir de estas coordenadas, las restricciones que se formulan para obtener el sistema de ecuaciones del problema de posición son: restricciones de lazo, restricciones de par y restricciones de elemento, respectivamente. Para la resolución de dicho sistema, la primera fase consiste en el ensamblado del mecanismo, es decir, la obtención de una de las soluciones del problema de posición inicial. Para ello, se hace necesaria la asistencia de un método computacional estable para obtener una buena estimación de dicha posición. Esto puede conseguirse minimizando el desequilibrio de las ecuaciones de restricción [Hau89]. Una vez se ha ensamblado el mecanismo, se realiza un chequeo para comprobar la existencia de restricciones redundantes en el modelo que haya podido incluir involuntariamente el usuario cuando se modelizan mecanismos complejos o con geometrías particulares. Posteriormente se eliminan de las ecuaciones de restricción dependientes. Para ello, puede utilizarse la eliminación gaussiana con pivotamiento total. Otra alternativa es trabajar directamente con un procedimiento de resolución que trate con sistemas de ecuaciones redundantes. Un método eficiente para resolver este problema es utilizar la formulación de mínimos cuadrados en la iteración.

Una vez eliminadas las restricciones redundantes se puede finalmente realizar el análisis de desplazamientos finitos obteniendo la simulación del movimiento del mecanismo. En la resolución de este problema se parte del conocimiento de una posición previa del mecanismo cercana a la posición a calcular.

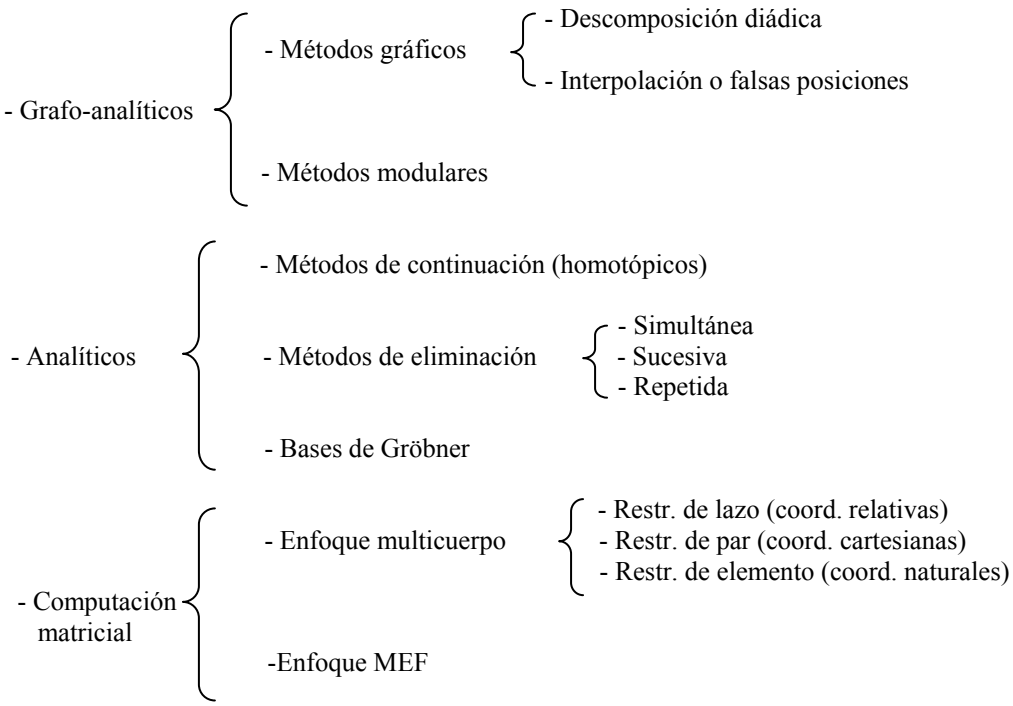


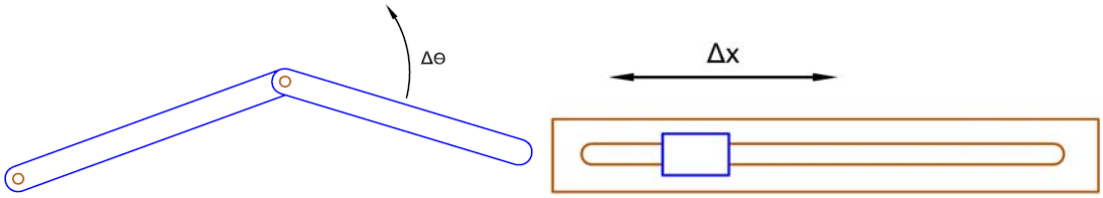

Fig. 2.2. Métodos de resolución del problema de posición.

Generalmente, a partir de esta posición puede obtenerse una buena estimación de partida con la que el método de Newton-Raphson pueda alcanzar la convergencia cuadrática del error [BuD98] y sea realmente eficaz. En el análisis de desplazamientos finitos, con el objeto de asegurar la convergencia del método, frecuentemente la estimación de partida es previamente mejorada a partir de los datos del análisis de velocidades y aceleraciones obtenidos para dicha posición [Hau89] [HPA02]. Como resumen de lo presentado en esta introducción, en la Fig. 2.2 se propone una clasificación de los métodos de resolución del problema de posición.

## 2.6 Pares o juntas

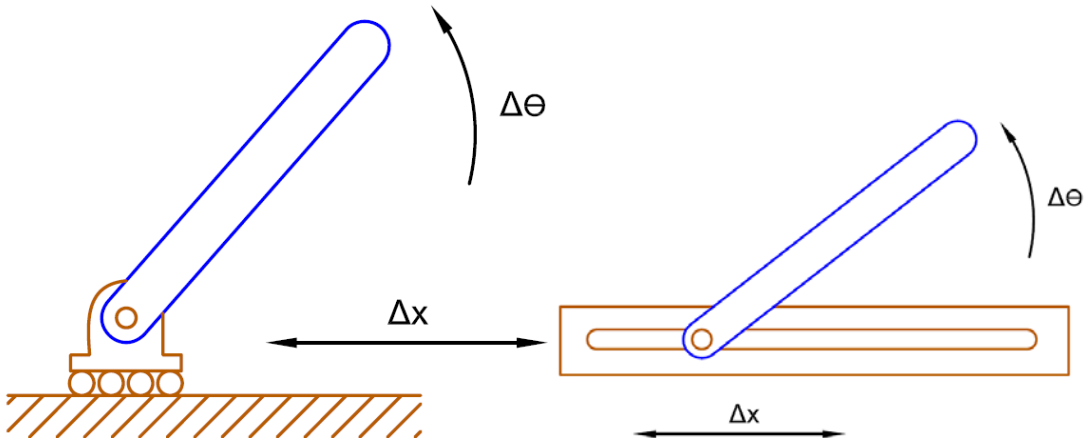
Una junta o un par, es la conexión que existe entre dos o más eslabones, la cual se encuentra en los nodos de los eslabones y permite algún movimiento o movimiento potencial, entre los eslabones conectados [Nor03]. Las juntas o pares cinemáticos pueden ser clasificadas de la siguiente forma:

1. Por el número de grados de libertad permitidos en la junta.
2. Por el tipo de contacto que existe entre los elementos: de línea, de punto o de superficie.
3. Por el tipo de cierre de la junta en junta de fuerza o de forma.
4. Por el número de eslabones que están conectados.



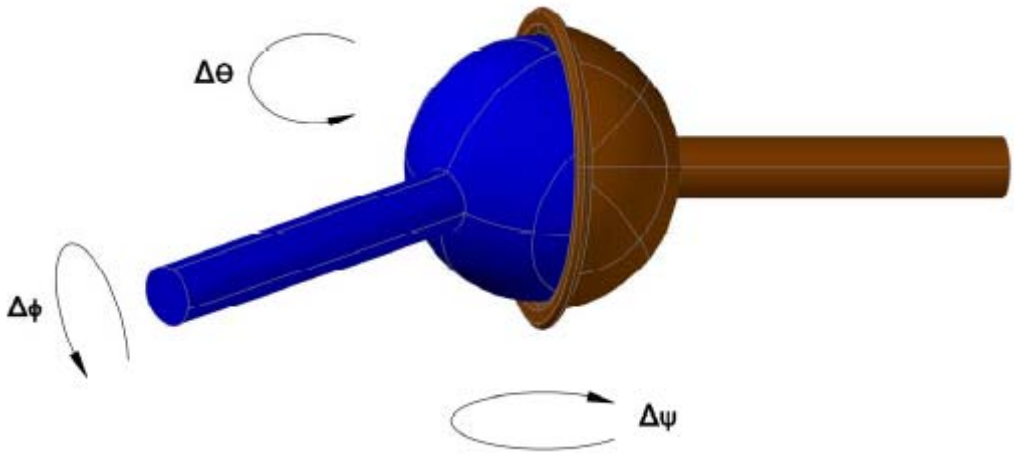

Junta de pasador para rotación  Junta de corredera para translación

a) Juntas con un GDL




Eslabón apoyado contra un plano  Eslabón con pasador de ranura

b) Semijuntas con dos GDL




c) Junta de rótula o de bola con tres GDL

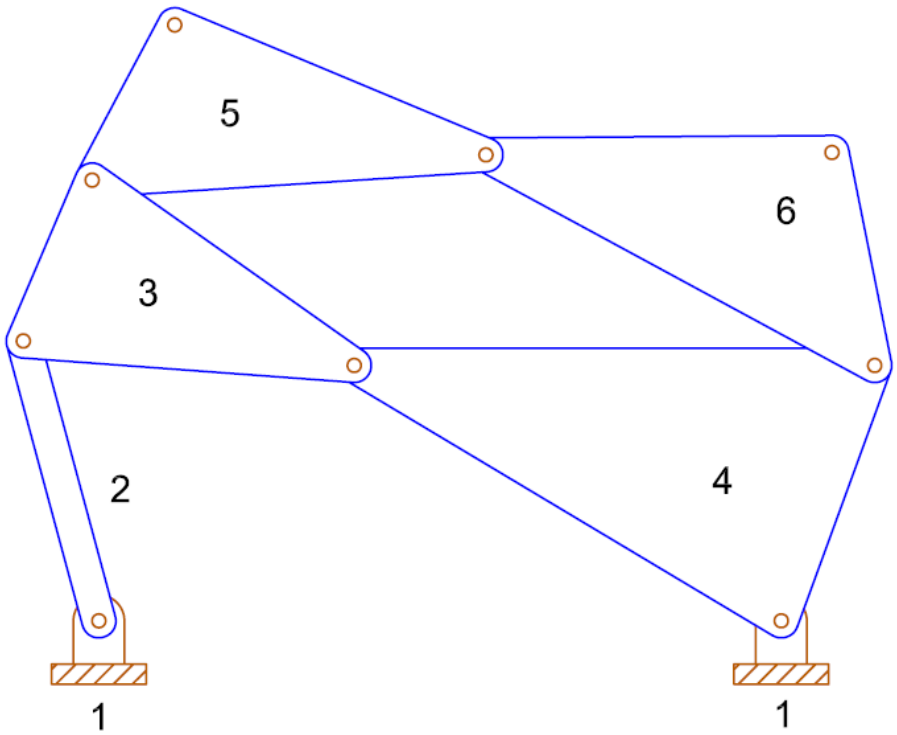
Figura 2.3 Ejemplos típicos de juntas

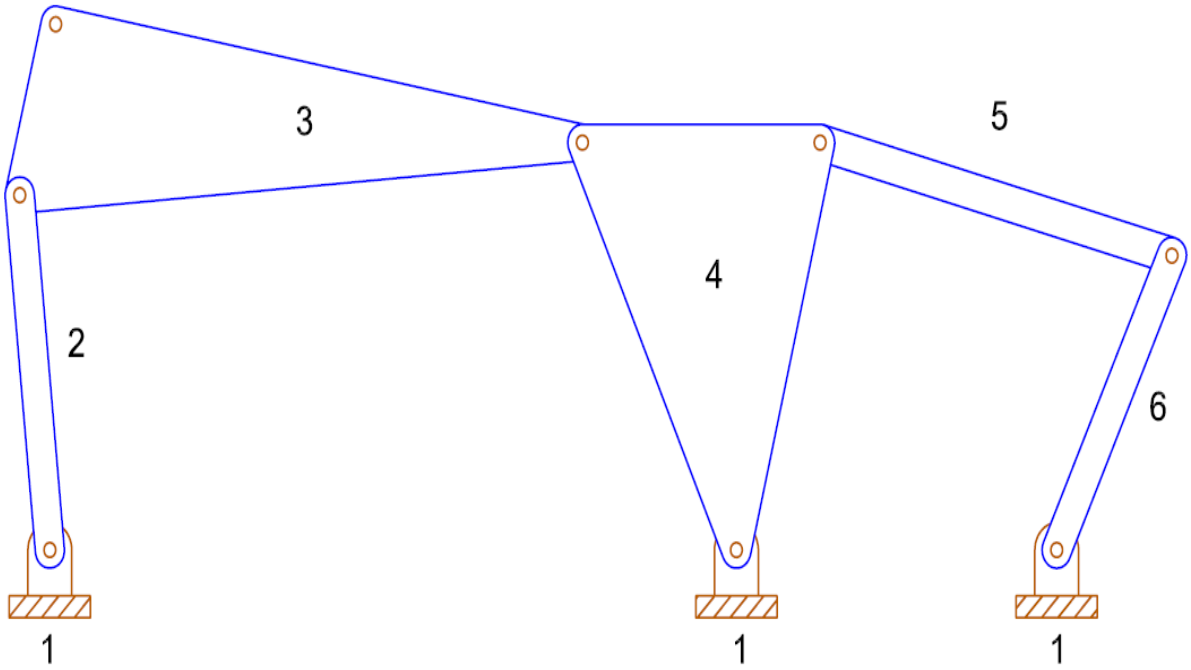
En la figura 2.3 se muestran algunos ejemplos de juntas con uno o dos grados de libertad (GDL), que se hallan comúnmente en mecanismos planos (o planares); en la figura 2.3 a) se muestran juntas con un grado de libertad, juntas de pasador rotacional y junta de translación de corredera. A ambas uniones se les llama juntas completas o bien pares inferiores. La junta de pasador tiene un GDL rotacional y la junta de corredera un GDL traslacional entre los eslabones conectados. El movimiento de la fuerza o del tornillo en relación de uno con otro, resulta en movimiento helicoidal. Si el ángulo de hélice es de cero grados, la tuerca gira sin avanzar y se tiene así la junta de pasador. Si el ángulo de hélice es de 90º, la tuerca se trasladará a lo largo del eje del tornillo y se tiene así la junta de corredera. El término "par inferior" fue creado por Reuleaux para describir juntas con contacto de superficie, como el de un pasador dentro de un agujero. Este investigador acuñó la designación de "par superior" para las juntas con contacto de punto de línea. Pero si hay holgura o espacio libre entre el pasador y su agujero (como debe ser para que exista el movimiento), el contacto de superficie en la junta del pasador es realmente contacto de línea, el pasador toca solo una porción reducida del hueco. En la figura 2.3 b) se muestran ejemplos de juntas con dos grados de libertad las cuales permiten simultáneamente dos movimientos relativos independientes, el de traslación y el de rotación, entre los eslabones conectados; a esta clase de juntas se les conoce con el nombre de semijuntas, y

algunas veces se les denomina también juntas de rodamiento y deslizamiento debido a que permite ambas formas de movimiento. En la figura 2.3 c) se muestra un ejemplo de una junta con tres grados de libertad, la cual permite tres movimientos angulares independientes entre los dos eslabones conectados. Una junta con más de un GDL es llamada un par superior; las juntas completas y las semijuntas se utilizan en mecanismos planares y espaciales

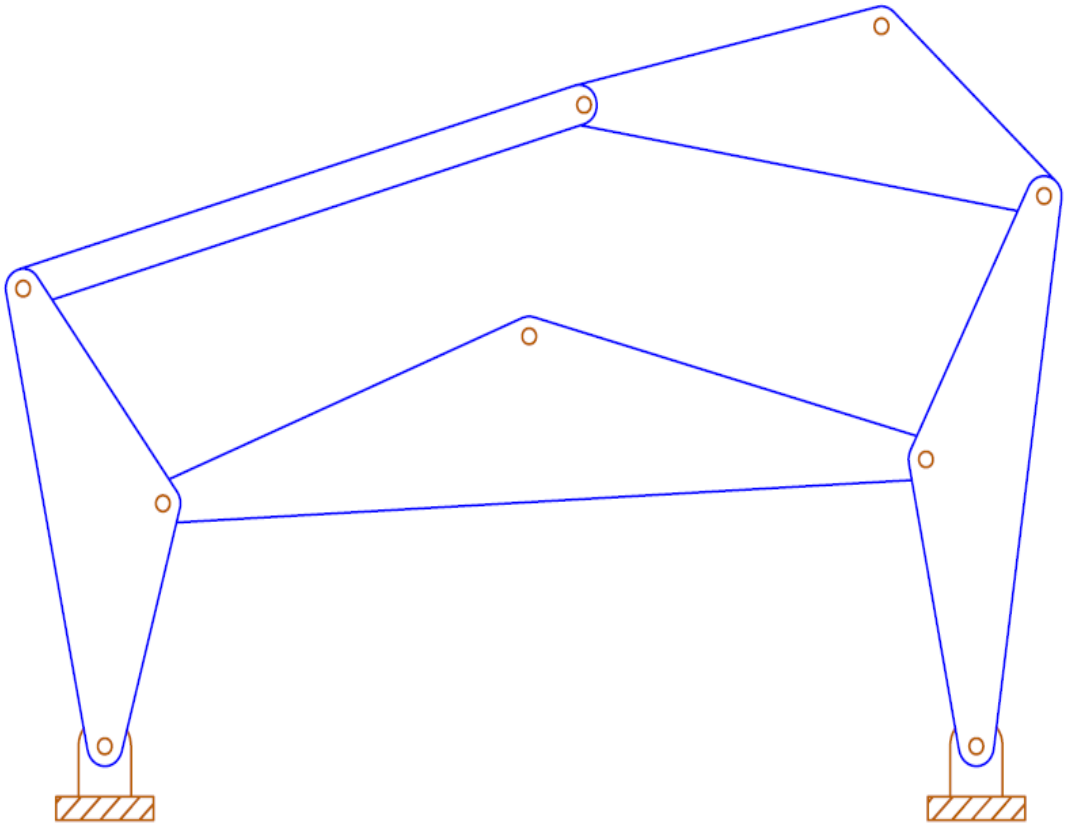
## 2.7 Sistema Multicuerpo de seis elementos.

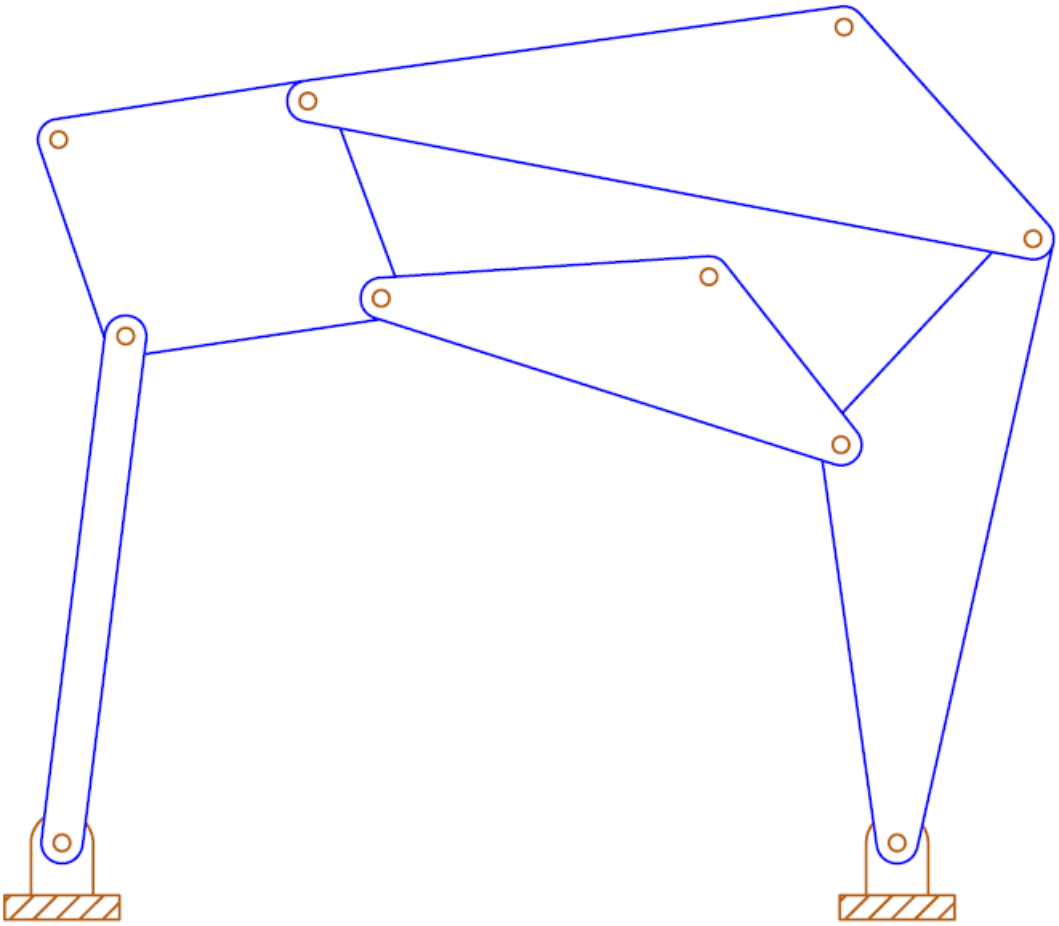
Si un Sistema Multicuerpo de cuatro eslabones no proporciona el tipo de movimiento requerido para una aplicación en particular, usualmente se considera como siguiente posibilidad, uno de los dos tipos de eslabonamientos de seis barras de un solo grado de libertad, como son la cadena de Watt o la cadena de Stephenson [SMS02], las cuales se muestran en la figura 2.4. Estas clasificaciones dependen de la colocación de los eslabones ternarios, así en la cadena de Watt, los eslabones ternarios son adyacentes, mientras que en la cadena de Stephenson, los eslabones ternarios están separados.






Eslabonamientos de Watt

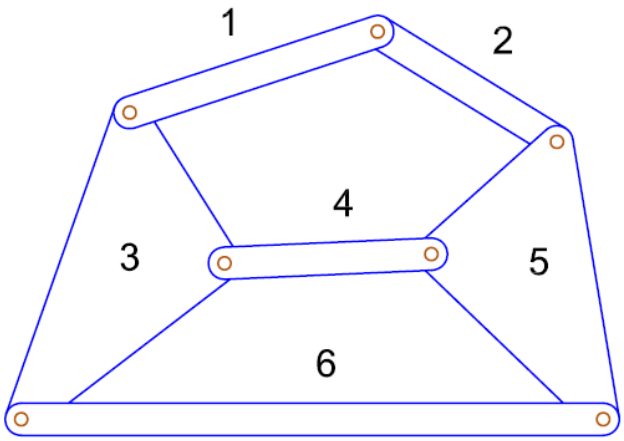


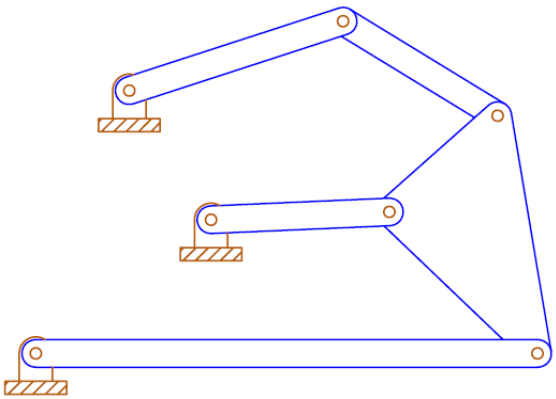


Eslabonamientos de Stphenson

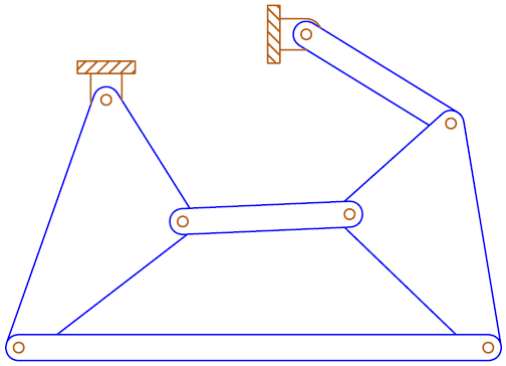
Figura 2.4 Mecanismos de seis eslabones

De la misma manera, la cadena cinemática de la figura 2.5 (cadena de Stephenson), presenta tres inversiones, y la de la figura 2.6 (de Watt) presenta 2 inversiones.

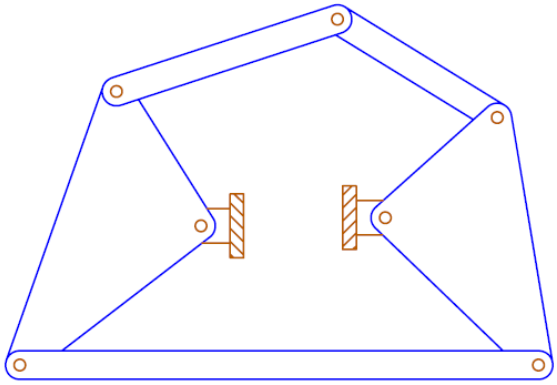


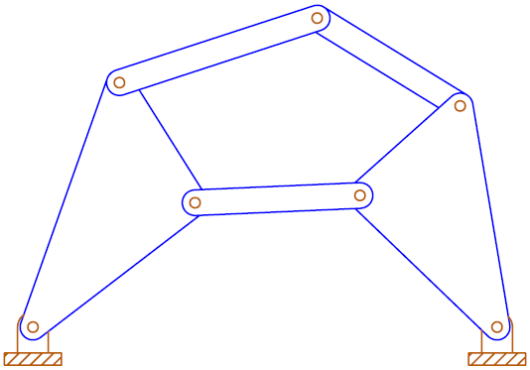


Fijando 3 ó 5



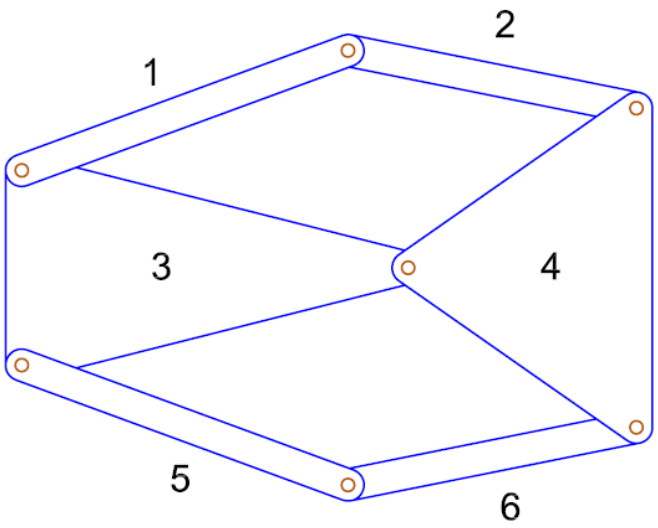
Fijando 1 ó 2

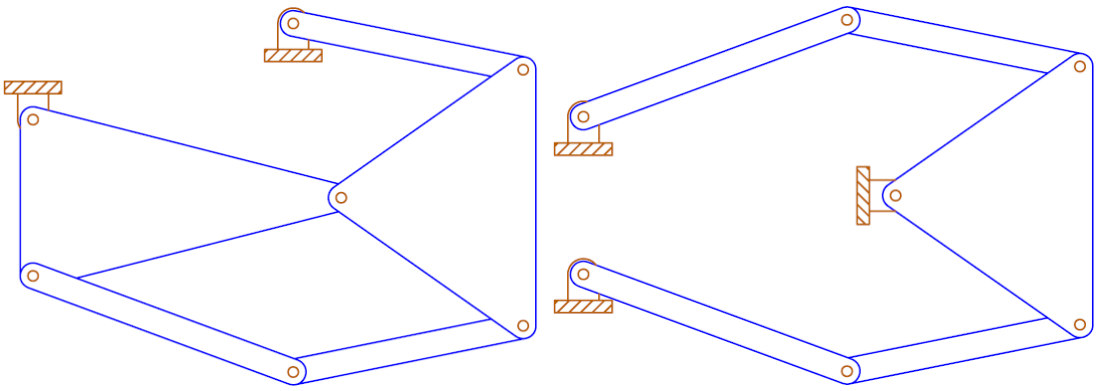




Fijando 4 ó 6

Fig. 2.5 Inversiones de la cadena cinemática de Stephenson





Fijando 1, 2, 5 ó 6 Fijando 3 ó 4

Fig. 2.6 Inversiones de la cadena cinemática de Watt.

## 2.8 Grados de libertad.

Cuando se tiene un Sistema Multicuerpo, éste se puede clasificar de acuerdo con el número de Grados De Libertad (GDL) que posee. El GDL de un mecanismo es el número de parámetros independientes que se necesitan para definir su posición en el espacio en cualquier instante.

Se tiene un eslabón como el que se muestra en la figura 2.7, el cual está colocado sobre un plano que tiene un sistema de coordenadas *x, y*; si el eslabón permanece en el plano se requieren tres parámetros para definir completamente su posición: dos coordenadas lineales (*x, y*) para definir la posición de cualquier punto del eslabón, y una coordenada angular ( θ ) para definir el ángulo que forma con respecto al eje *x*. Obsérvese que este sistema tiene tres GDL, ya que el eslabón no se encuentra fijo. Los parámetros particulares elegidos para definir su posición no son los únicos que se podrían haber utilizado en un conjunto alterno como pueden ser dos longitudes y un ángulo.

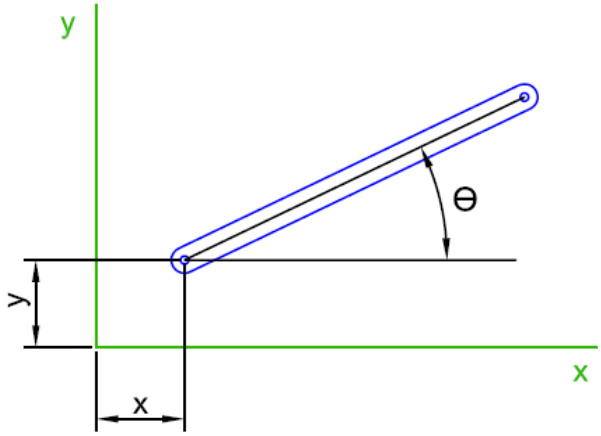
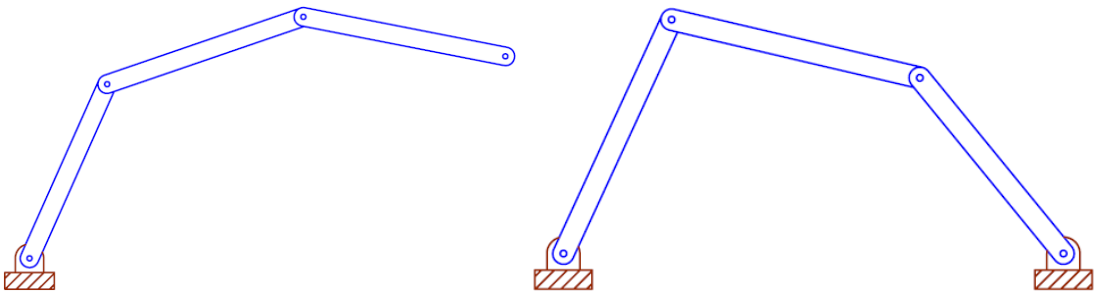



Fig. 2.7 Parámetros de un eslabón en el plano.

Por lo tanto, el GDL de un sistema depende del tipo de unión que presenten los eslabones, los cuales pueden conformar una cadena de tipo abierta o cerrada, como se muestra en la figura 2.8. Un sistema cerrado no tendrá nodos con apertura por lo que puede tener uno o más GDL mientras que una cadena abierta con más de un eslabón tendrá siempre más de un grado de libertad.

Para determinar el GDL en un mecanismo se debe tener en cuenta el número de eslabones que lo conforman, así como también el tipo de unión y la clase de juntas con las que están unidos los eslabones.



a) Cadena de eslabones abierta b) Cadena de eslabones cerrada

Figura 2.8 Tipos de cadena.

Como ya sabemos, un eslabón cualquiera en un plano tiene tres GDL y por consiguiente, un sistema de L eslabones no conectados en el mismo plano tendrá 3 x L GDL. Cuando un eslabón cualquiera se fija o se sujeta al marco de referencia o bastidor, sus tres GDL quedarán eliminados. Todo esto se puede expresar por medio de la ecuación de Gruebler:

$$GDL = 3L - 2J - 3G \qquad \textbf{(2.1)}$$

donde:

GDL = número de grados de libertad
L = número de eslabones
J = número de juntas
G = número de eslabones fijos

Si se presenta más de un eslabón fijo el efecto neto será crear un eslabón fijo mayor, ya que sólo hay un plano de sujeción. Por tanto G siempre va a ser igual a uno, y si sustituimos en la ecuación de Gruebler, se puede escribir como:

$$GDL = 3(L - 1) - 2J \qquad \textbf{(2.2)}$$

En la cual se deben incluir todas las juntas que actúen en el mecanismo para ambos casos y si se trata de un par superior, se considerará como la mitad de una junta o sea ½ J, ya que solo elimina un GDL. Al incluir esta condición se obtiene:

$$GDL = 3(L - 1) - 2J_1 - J_2 \qquad \textbf{(2.3)}$$

donde:

GDL = número de grados de libertad

L = número de eslabones

$J_1$ = número de juntas completas o pares inferiores

$J_2$ = número de semijuntas o pares superiores

## 2.9 Velocidad

En la figura 2.9 se aprecia un punto "$P$" cuya posición viene definida por el vector "$R_P$". Al cabo de un determinado espacio de tiempo "$\Delta t$" el punto "$P$" pasa a ocupar la posición "$P'$" cuya posición vendrá definida por el vector "$R'_P$". El punto "$P$" ha sufrido un desplazamiento "$\Delta R_P$" que vendrá definido por:

$$\Delta \vec{R}_P = \vec{R}'_P - \vec{R}_P \qquad \textbf{(2.4)}$$

La velocidad media durante el desplazamiento citado será:

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta \vec{R}_P}{\Delta_t} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Y la velocidad instantánea en el punto "**P**" será:

$$\vec{V}_P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{R}_P}{\Delta t} = \frac{d\vec{R}_P}{dt} \qquad \textbf{(2.6)}$$

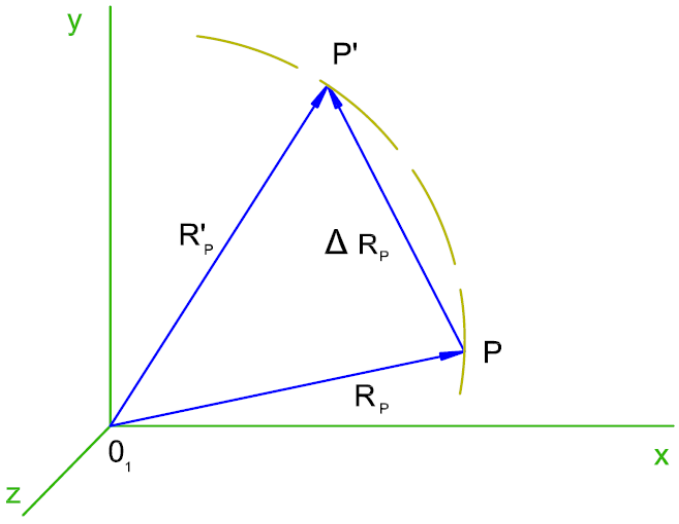



Fig. 2.9 Desplazamiento de un punto

## 2.10 Derivación de vectores en coordenadas cartesianas

Si se tiene por ejemplo el vector de posición de un punto "$\vec{R}_P$" expresado por medio de sus componentes en coordenadas cartesianas:

$$R_P = R_P^X i + R_P^Y j + R_P^Z K \qquad \textbf{(2.7)}$$

La derivada respecto del tiempo de ese vector será el vector velocidad:

$$\vec{V}_P = \frac{d\vec{R}_P}{dt} \qquad \textbf{(2.8)}$$

La componente "$X$" del vector velocidad será la derivada de la componente "$X$" el vector de posición; la componente "$Y$" de la velocidad será la derivada de la componente "$Y$" del vector de posición, y la componente "$Z$" de la velocidad será la derivada de la componente "$Z$" del vector de posición.

$$\vec{V}_P = V_P^X \vec{i} + V_P^Y \vec{j} + V_P^Z \vec{k} = \frac{dR_P^X}{dt}\vec{i} + \frac{dR_P^Y}{dt}\vec{j} + \frac{dR_P^Z}{dt}\vec{k} \qquad \textbf{(2.9)}$$

Si se deriva de nuevo con respecto al tiempo, con procedimientos análogos a los anteriores, se pueden obtener las expresiones para el análisis de la aceleración.

## 2.11 Movimiento cualquiera de un eslabón

Como ya sabemos el movimiento cualquiera de un eslabón se puede considerar como compuesto de otros dos, una translación y una rotación, y que la diferencia de desplazamientos entre dos puntos del eslabón se debía precisamente al giro del eslabón. Por tanto, la relación entre las velocidades de dos puntos será:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_Q + \vec{V}_{PQ} \qquad \textbf{(2.10)}$$

La velocidad "$\vec{V}_{PQ}$" es debida al giro y su valor será:

$$\vec{V}_{PQ} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}_{PQ} \qquad \textbf{(2.11)}$$

## 2.11.1 Movimiento plano cualquiera

En un sólido rígido con movimiento plano cualquiera, como los vectores "$\vec{\omega}$" y "$\vec{R}_{PQ}$" son perpendiculares, resultará que el módulo de la velocidad del punto "$P$" respecto del punto "$Q$" será:

$$\left|\vec{V}_{PQ}\right| = \left|\vec{\omega}\right| \cdot \left|\vec{R}_{PQ}\right| \qquad \textbf{(2.12)}$$

La dirección de "$\vec{V}_{PQ}$" será perpendicular a "$\vec{\omega}$" y por tanto estará contenida en el plano del movimiento, y perpendicular a "$\vec{R}_{PQ}$". El sentido de "$\vec{V}_{PQ}$" será coherente con el sentido de "$\vec{\omega}$" al igual que en el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo.

## 2.12 Ecuaciones cinemáticas

Habitualmente, el planteamiento de las ecuaciones de un sistema mecánico conlleva la introducción de un conjunto de p coordenadas generalizadas $q_j$, j = 1… p, en general dependientes:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ . \\ . \\ q_p \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.13)}$$

cuyo objeto es describir, en cada instante de tiempo, la posición del sistema mecánico.

Las coordenadas generalizadas, q, se relacionan mediante un conjunto de g ecuaciones geométricas o ecuaciones para las coordenadas generalizadas (problema de posición). Dichas relaciones, en general no lineales, quedan recogidas en el vector

$\Phi$ de tal forma que:

$$\Phi(q,t) = \begin{bmatrix} \Phi_1(q,t) \\ . \\ . \\ \Phi_g(q,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(2.14)}$$

Las velocidades generalizadas $\dot{q}$, estarán relacionadas por las derivadas de las ecuaciones anteriores y por un conjunto de r relaciones no holónomas

$$A(q,t)\dot{q} + b(q,t) = 0 \qquad \textbf{(2.15)}$$

que dan lugar al sistema de c = g + r ecuaciones para las velocidades generalizadas (problema de velocidad)

$$\Phi_v(q,t)\ \dot{q} + b_v(q,t) = 0 \qquad \textbf{(2.16)}$$

donde

$$\Phi_v = \begin{bmatrix} \Phi_q \\ A \end{bmatrix} \text{ y } \ b_v = \begin{bmatrix} \Phi_t \\ b \end{bmatrix}$$

con

- $\Phi_q$ es el jacobiano del problema de posición que se obtiene al derivar la expresión 2.14 respecto al tiempo

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial q}\ \dot{q} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi_q(q,t)\dot{q} + \Phi_t(q,t)$$

- $\Phi_v$ representa el jacobiano del problema de velocidad.
- $b_v$ es el término independiente del problema de velocidad.

Las aceleraciones generalizadas $\ddot{q}$, están relacionadas por las ecuaciones para las aceleraciones generalizadas, derivadas éstas de las ecuaciones para velocidades, según

$$\Phi_v\ (q,t)\ \ddot{q} + \Phi_v\ (q,\dot{q},t)\ \dot{q} + \dot{b}_v\ (q,\dot{q},t) = 0 \qquad \textbf{(2.17)}$$

donde

- $\Phi_v$ es la derivada del jacobiano del problema de velocidad respecto al tiempo

$$\Phi_v = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial q_j}\ \Phi_v \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\ \Phi_v$$

- $\dot{b}_v$ representa la derivada del término independiente del problema de velocidad, que formalmente se define

$$\dot{b}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial\ \Phi_t}{\partial\ q}\ \dot{q} + \frac{\partial\ \Phi_t}{\partial\ t} \\ \frac{\partial\ b}{\partial\ q}\ \dot{q} + \frac{\partial\ b}{\partial\ t} \end{bmatrix}$$

## 2.13 Planteamiento de las ecuaciones geométricas

Formalmente, las ecuaciones geométricas no son más que relaciones arbitrarias entre las coordenadas q, la variable tiempo, t (si es que son de tipo rheónomo), y un conjunto de parámetros relacionados con la geometría del sistema mecánico o con el carácter rheónomo del enlace.

Desde un punto de vista operativo, las ecuaciones geométricas se plantean como condiciones que deben cumplir los vectores de posición de puntos y vectores unitarios de las bases introducidas para posicionar los elementos del sistema.

Por ejemplo:

- Proyección del vector de posición $P_jP_i$ en la dirección definida por un vector unitario, $u$, igual a $f(q,t)$.

$$P_i\ P_j \cdot u - f\ (q,t) = 0 \qquad \textbf{(2.18)}$$

En particular, si $f(q,t) = 0$, la ecuación anterior expresa perpendicularidad entre el vector y la dirección.

- Ángulo entre dos vectores unitarios, v y w**,** en la dirección mutuamente perpendicular, u**,** igual a $f(q,t)$.

$$\cos\left(f\ (q,t)\right)\ v \cdot w - \sin\left(f\ (q,t)\right)\ v \cdot w = 0 \qquad \textbf{(2.19)}$$

- Puntos $P_j$ y $P_i$ coincidentes:

$$P_j\ P_i = 0 \qquad \textbf{(2.20)}$$

- Vector de posición $P_j\ P_i$ y vector unitario, u, paralelos

$$P_j\ P_i \wedge u = 0 \qquad \textbf{(2.21)}$$

- Ángulo entre dos vectores unitarios $\alpha \leq \pi/2$

$$u \cdot v - \cos(\alpha) = 0 \qquad \textbf{(2.22)}$$

- Distancia entre dos puntos, $p > 0$

$$P_j\ P_i \cdot P_j\ P_i - p^2 = 0 \qquad \textbf{(2.23)}$$

## 2.14 Planteamiento de ecuaciones no holónomas

Formalmente las relaciones de tipo no holónomo no son sino ecuaciones lineales en las velocidades generalizadas, en las que pueden aparecer expresiones arbitrarias que involucran a las coordenadas generalizadas y al tiempo.

Desde un punto de vista operativo estas ecuaciones se calculan como relaciones que deben cumplir los vectores velocidad de algunos puntos y velocidades angulares de algunas bases empleadas en la definición del sistema mecánico.

Por ejemplo:

- La velocidad de un punto $P_i$ en una dirección u especificado como función del tiempo, t

$$V_R\ (P_i) \cdot u + f\ (t) = 0 \qquad \textbf{(2.24)}$$

donde $V_R$ representa la referencia donde se sitúa el observador.

- No deslizamiento entre Sol y Sol´ en el punto $P_i$ (C.I.R. de Sol respecto a Sol´) en la dirección u

$$\left[ V_R\ (P_i \in\ Sol) - V_R\ (P_i \in\ Sol') \right] \qquad \textbf{(2.25)}$$

Al igual que en el caso de las ecuaciones geométricas, las ecuaciones no holónomas también incluyen algunos elementos y operadores (velocidad de un punto en una referencia) del citado interfaz cartesiano.

## 2.15 Formulación de las ecuaciones en función del tipo de coordenadas

Como ya se comentó en la introducción de este capítulo, la elección de las coordenadas es una delicada tarea que no tiene una respuesta única. El tipo de

coordenadas, junto con el formalismo empleado, determinarán la estructura final de las ecuaciones.

a) Coordenadas Relativas

El movimiento de un determinado sólido es relativo al del sólido anterior en la cadena cinemática. Dicho movimiento, se expresa en base a un número de coordenadas igual al número de grados de libertad del enlace presente entre ambos sólidos. Así, el número y tipo de coordenadas debe elegirse de forma apropiada para cada problema en concreto. El número de incógnitas de movimiento empleado en la formulación es reducido, incluso mínimo si la topología del mecanismo no presenta lazos cerrados.

Detalles de esta formulación pueden encontrarse en cualquier libro de mecánica clásica. [Cra86] y [Agu96].

b) Coordenadas Cartesianas

El movimiento de cada sólido se expresa de forma independiente respecto al resto de los que integran el sistema. Las coordenadas son elegidas de forma sistemática, (por ejemplo, desplazamientos y giros eulerianos de dichos sólidos), lo cual deriva en sistemas de ecuaciones diagonales por bloques, poco compactos y con alta dispersión (esparseidad).

Normalmente, el número de incógnitas de movimiento que resuelven el problema es elevado si éste se compara con el empleado en otras formulaciones. Además, en este caso, la definición del problema exige introducir gran número de restricciones geométricas independientemente de la existencia de lazos cerrados.

Ejemplos de formulaciones basadas en este tipo de coordenadas pueden encontrarse en las referencias [Nik88] y [Sha98].

c) Coordenadas Naturales

El movimiento se caracteriza en base a los desplazamientos cartesianos de diferentes puntos de control del mecanismo. Dada la homogeneidad en el tipo de coordenadas, las ecuaciones de movimiento correspondientes son fácilmente estructurables y presentan un gran número de invariantes [GUA86]. Como contrapartida, el número de incógnitas y de ecuaciones de enlace en situaciones generales puede ser mayor todavía al del tipo anterior. Por otra parte, hay situaciones en que las restricciones cinemáticas no pueden introducirse de forma directa, lo que obliga a introducir coordenadas en exceso o auxiliares. En la referencia [GJB94] se trata en detalle la utilización de las mencionadas coordenadas naturales.

### 2.15.1 Ejemplos

En las siguientes subsecciones, con varios ejemplos desarrollados sobre el mecanismo representado en la figura 2.10, se ilustrarán las ideas expuestas en este capítulo utilizando los diferentes tipos de coordenadas definidas en la sección anterior.

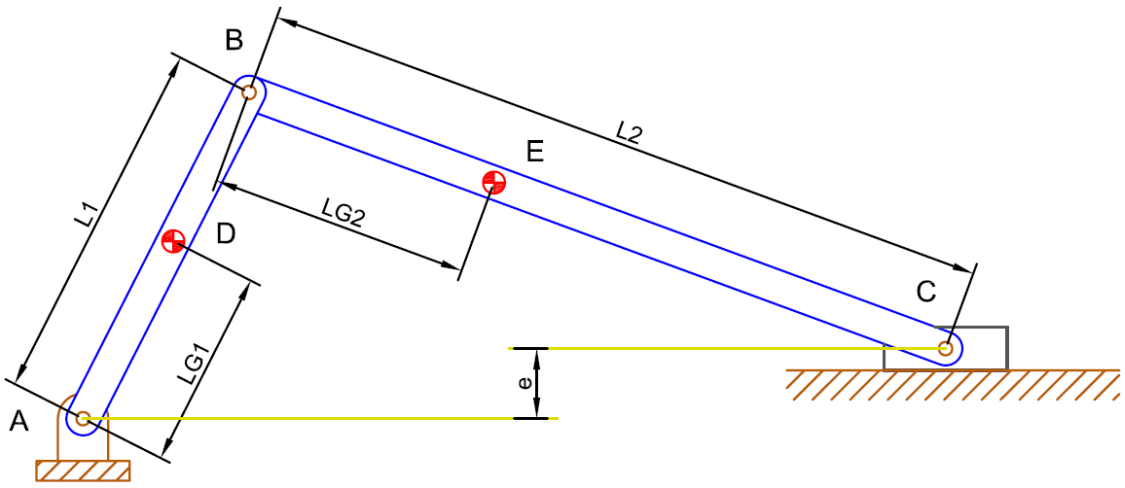



Figura 2.10. Mecanismo biela-manivela-deslizadera

## Coordenadas Relativas

El vector de coordenadas $q = [\theta_1\ \theta_2]^T$ describe la posición del mecanismo sin ligaduras (véase figura 2.11). Las coordenadas anteriores son dependientes, puesto que si toman valores arbitrarios, el punto C no estaría obligado a mantenerse paralelo al eje x de la base xyz. Por tanto, existe una relación geométrica que puede plantearse

$$AC \cdot e_y - e = 0 \qquad \textbf{(2.26)}$$

donde $e_y$ hace referencia al vector unitario en la dirección y de la base xyz.

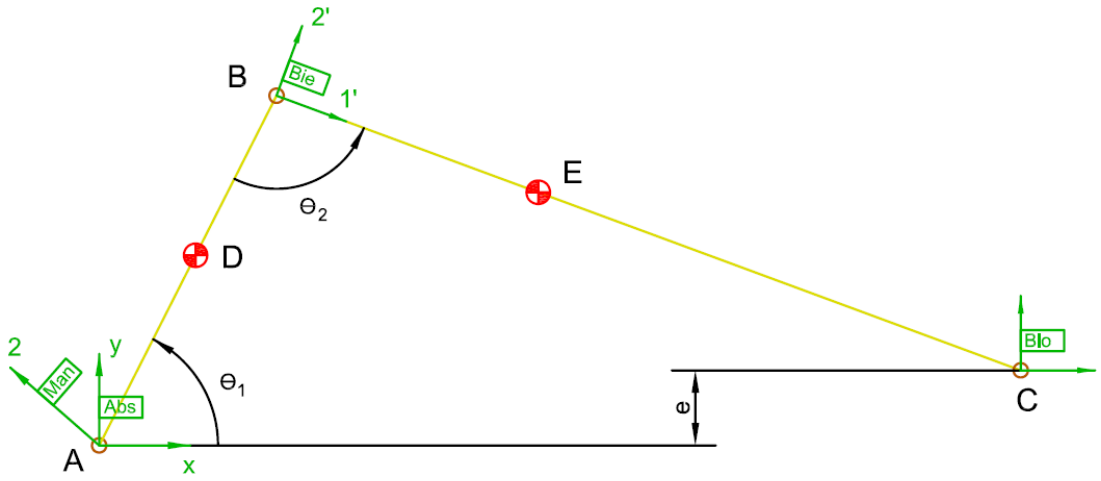



Figura 2.11. Acotación del mecanismo utilizando coordenadas relativas

Haciendo uso del diagrama de orientaciones aparece en la figura 2.11, podemos expresar la ecuación 2.26 en forma matricial:

$$\left( \left[ \overline{\overline{I}} \right]_{x\,y\,z}^{1'\,2'\,3'} [AB]_{1'\,2'\,3'} + \left[ \overline{\overline{I}} \right]_{x\,y\,z}^{1\ 2\ 3} [BC]_{1\,2\,3} \right)^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{x\,y\,z} - e = 0 \qquad \textbf{(2.27)}$$

donde

- Las matrices de cambio de base quedan definidas como

$$\left[\overline{\overline{I}}\right]_{x\,y\,z}^{1'\,2'\,3'} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$\left[\overline{\overline{I}}\right]_{x\,z\,y}^{1\,2\,3} = \left[\overline{\overline{I}}\right]_{x\,y\,z}^{1'\,2'\,3'} \left[\overline{\overline{I}}\right]_{1'\,2'\,3'}^{1\,2\,3} \tag{2.29}$$

con

$$\left[\overline{\overline{I}}\right]_{1'\,2'\,3'}^{1\,2\,3} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

- Los vectores de posición se definen como

$$[AB]_{1'\,2'\,3'} = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{1'\,2'\,3'}, \quad [BC]_{1\,2\,3} = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{1\,2\,3}$$

donde $l_1$ y $l_2$ son parámetros geométricos del problema.

Combinando las expresiones anteriores, la ecuación 2.26 puede reescribirse

$$\Phi = \left[l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - e\right] = [0] \tag{2.31}$$

Como es obvio, el mecanismo de la figura posee una coordenada independiente, lo que se traduce en que basta fijar una de las incógnitas de movimiento para determinar completamente el movimiento del mecanismo, es decir, que posee un grado de libertad.

Así, siendo:

g = 1, el número de restricciones geométricas,

r = 0, el número de restricciones no holónomas,

c = g + r = 1, el número de restricciones cinemáticas y

p = 2, el número de coordenadas de partida,

el número de grados de libertad del sistema, GDL, es $GDL = p - c = 1$ , algo que podíamos saber, dado que al ser r = 0, el número de coordenadas independientes, m, coincide con el de grados de libertad m = p – g = GDL.

Derivando respecto al tiempo la ecuación 2.31, se obtiene la relación para velocidades

$$\dot{\theta}_1 \, l_1 \cos(\theta_1) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \, l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 \qquad \textbf{(2.32)}$$

que de forma matricial se expresa

$$\dot{\Phi} = \Phi_q \, \dot{q} = \left[ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \; l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] \dot{q} = [0] \qquad \textbf{(2.33)}$$

donde la parcial $\Phi_t$ no aparece por no existir dependencias explicitas en la variable tiempo, t. Es decir, la ecuación es esclerónoma.

Por último, derivando respecto al tiempo la ecuación, se obtiene la relación para aceleraciones generalizadas

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} = \Phi_q \, \ddot{q} + \dot{\Phi}_q \, \dot{q} = & \left[ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \; l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] \ddot{q} \\ & + \dot{q}^T \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \dot{q} = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(2.34)}$$

## Coordenadas Cartesianas

La acotación en coordenadas cartesianas responde a la necesidad de generar las ecuaciones de movimiento de forma sistemática. En este caso, cada uno de los sólidos del sistema se acota de forma independiente.

En el plano, la posición de un sólido queda convenientemente representada de forma cartesiana mediante tres coordenadas independientes. Tal como se aprecia en la figura 2.12, en este caso las coordenadas elegidas son los desplazamientos absolutos de los puntos $C_1$, $D_2$ y $E_3$ y las rotaciones absolutas de los tres eslabones:

$$q = \left[ x_D \;\; y_D \;\; \theta_1 \;\; x_E \;\; y_E \;\; \theta_2 \;\; x_C \;\; y_C \;\; \theta_3 \right]^T$$

Así, el número de coordenadas de partida, p = 9**,** es superior al representado en la sección anterior.

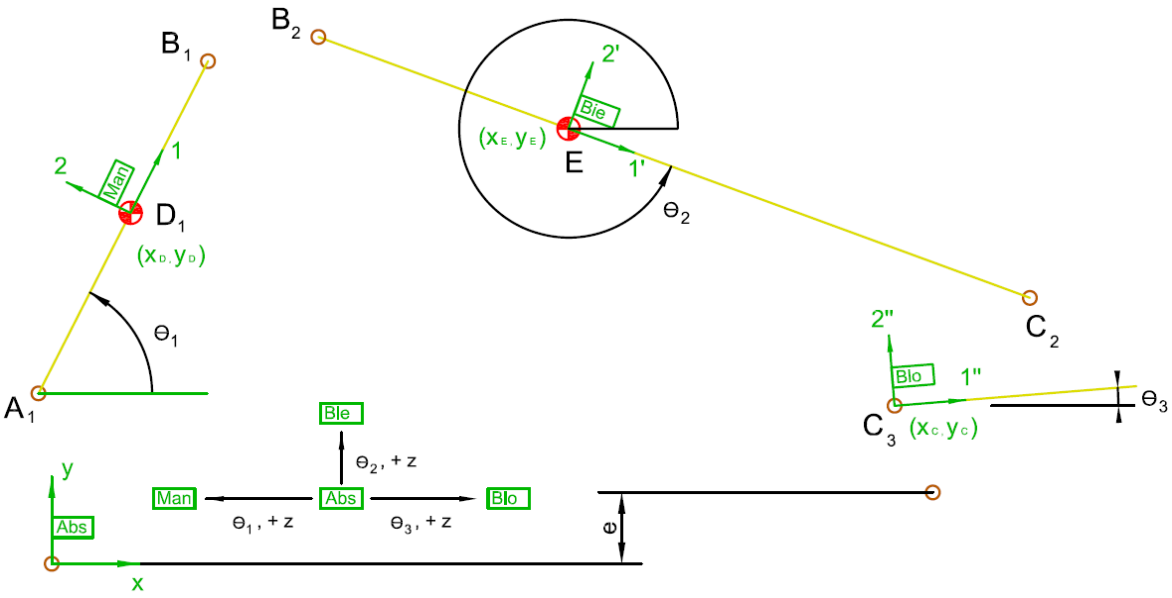



Figura 2.12. Acotación del mecanismo utilizando coordenadas cartesianas

Teniendo en cuenta la acotación elegida, se hace necesario imponer las siguientes restricciones:

- $B_1$ y $B_2$ coinciden (par de revolución),
- $C_2$ y $C_3$ también coinciden,
- $A_1$ coincide con el origen de Abs, O,
- Blo puede desplazarse exclusivamente en dirección horizontal y no tiene permitido el giro

Matemáticamente, las restricciones anteriores se traducen en:

$$\begin{aligned} OB_1 &= OB_2 \\ OC_2 &= OC_3 \\ OA_1 &= 0 \\ OC \cdot e_y &= e \\ e_{1''} \cdot e_x &= 1 \end{aligned} \qquad \textbf{(2.35)}$$

donde $e_y$ es el vector unitario sobre el eje y de la base xyz, $e_{1''}$ es el vector unitario en la dirección 1'' de la base 1'' 2'' y $e_x$ es el vector unitario sobre el eje x de la base xyz.

$$\begin{aligned} &\left[O\ D_1\right]_{xyz} + \left[\overline{\overline{I}}\right]_{xyz}^{b_1} \left[D_1\ B_1\right]_{b_1} = \left[O\ E_2\right]_{xyz} + \left[\overline{\overline{I}}\right]_{xyz}^{b_2} \left[E_2\ B_2\right]_{b_2} \\ &\left[O\ E_2\right]_{xyz} + \left[\overline{\overline{I}}\right]_{xyz}^{b_2} \left[E_2\ C_2\right]_{b_2} = \left[O\ C_3\right]_{xyz} + \left[\overline{\overline{I}}\right]_{xyz}^{b_3} \left[C_3\ C_3\right]_{b_3} \\ &\left[O\ D_1\right]_{xyz} + \left[\overline{\overline{I}}\right]_{xyz}^{b_1} \left[D_1\ A_1\right]_{b_1} = \left[0\right]_{xyz} \\ &y_c = e \\ &\theta_3 = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(2.36)}$$

donde la posición de un punto genérico Pi, solidario a cualquier referencia Ri con origen en el punto Oi y base de proyección bi se expresa como

$$\begin{aligned} O\ P_i &= O\ O_i + O_i\ P_i \\ \left[O\ P_i\right]_{xyz} &= \left[O\ O_i\right]_{xyz} + \left[\overline{\overline{I}}\right]_{xyz}^{b_i} \left[O_i\ P_i\right]_{b_i} \end{aligned} \qquad \textbf{(2.37)}$$

y donde $\left[\overline{\overline{I}}\right]_{xyz}^{b_i}$ siempre es de la forma

$$\left[\overline{\overline{I}}\right]_{xyz}^{b_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.38)}$$

Operando, el sistema de ecuaciones 2.35, presentado en la forma habitual se escribe:

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_D + \frac{1}{2} l_1 \cos\theta_1 - \left( x_E - \frac{1}{2} l_2 \cos\theta_2 \right) \\ y_D + \frac{1}{2} l_1 \sin\theta_1 - \left( y_E - \frac{1}{2} l_2 \sin\theta_2 \right) \\ x_E + \frac{1}{2} l_2 \cos\theta_2 - x_C \\ y_E + \frac{1}{2} l_2 \sin\theta_2 - y_C \\ x_D - \frac{1}{2} l_1 \cos\theta_1 \\ y_D - \frac{1}{2} l_1 \sin\theta_1 \\ y_C - e \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.39)}$$

y dado que g = 8 y r = 0**,** también se cumple que GDL = p - c = 1. Derivando respecto al tiempo de la ecuación 2.39, se obtiene la relación para velocidades, que en forma matricial se escribe

$$\dot{\Phi} = \Phi_q \dot{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} l_1 \sin\theta_1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} l_2 \sin\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} l_1 \cos\theta_1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} l_2 \cos\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} l_2 \sin\theta_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} l_2 \cos\theta_2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} l_1 \sin\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} l_1 \cos\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**(2.40)**

Las relaciones para aceleraciones generalizadas se obtienen de forma análoga a la presentada en el apartado anterior, pero se omiten por brevedad en la exposición.

## Coordenadas Naturales

El planteamiento del problema en términos puramente geométricos deriva en la elección de las denominadas Coordenadas Naturales.

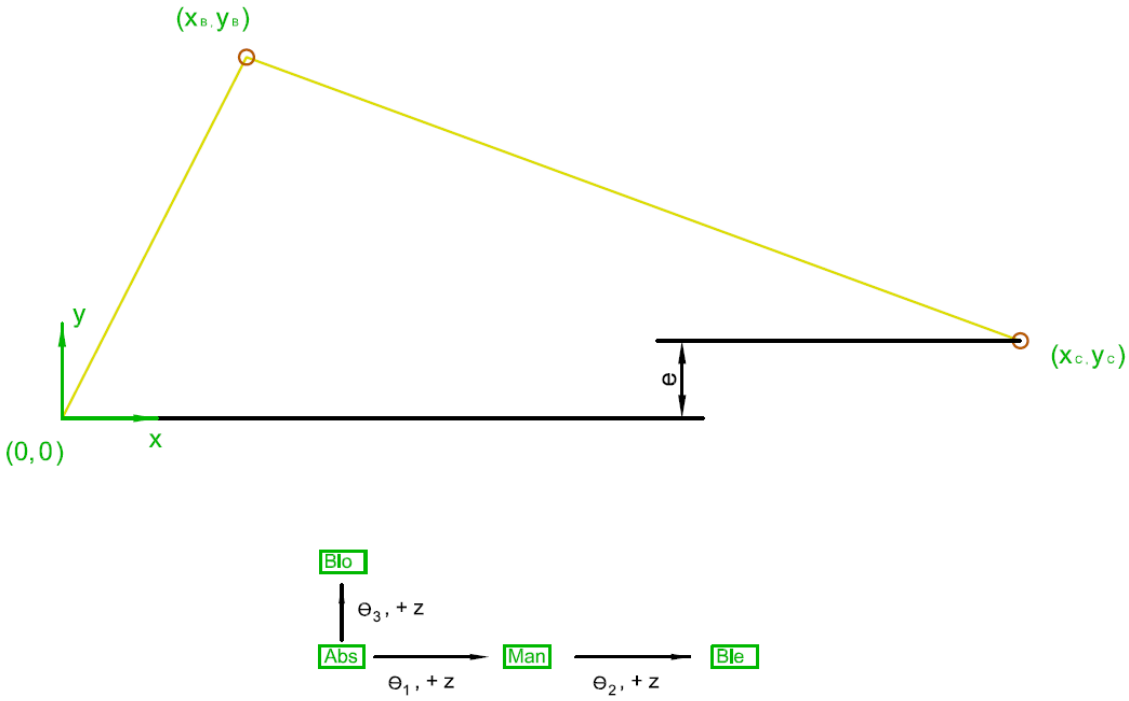



Figura 2.13. Acotación del mecanismo utilizando coordenadas naturales

Tal como se aprecia en la figura 2.13, bastan cuatro coordenadas absolutas (puntos B y C) para determinar el movimiento del mecanismo,

$$q = [\ x_B\ \ y_B\ \ x_C\ \ y_C\ ]^T$$

En este caso, las restricciones que definen el problema geométrico pueden expresarse

$$\begin{aligned} OB \cdot OB - l_1^2 &= 0 \\ BC \cdot BC - l_2^2 &= 0 \\ OC \cdot e_y &= e \end{aligned}$$

o bien,

$$\Phi = \begin{bmatrix} (x_B)^2 + (y_B)^2 - l_1^2 \\ (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 - l_2^2 \\ y_C - e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.41)}$$

y dado que g = 3 y r = 0 en este caso también se cumple que n = p – c = 1

Derivando respecto al tiempo la ecuación 2.41, se obtiene la relación para velocidades, que en forma matricial se escribe

$$\dot{\Phi} = \Phi_q \, \dot{q} = \begin{bmatrix} 2x_B & 2y_B & 0 & 0 \\ -2(x_C - x_B) & -2(y_C - y_B) & 2(x_C - x_B) & 2(y_C - y_B) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**(2.42)**

Por último, las relaciones para aceleraciones generalizadas se obtienen de forma análoga a la presentada en el primer apartado, esto es

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} = \Phi_q \, \ddot{q} + \dot{\Phi}_q \dot{q} = &\begin{bmatrix} 2x_B & 2y_B & 0 & 0 \\ -2(x_C - x_B) & -2(y_C - y_B) & 2(x_C - x_B) & 2(y_C - y_B) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{q} \\ + &\begin{bmatrix} 2\dot{x}_B & 2\dot{y}_B & 0 & 0 \\ -2(\dot{x}_C - \dot{x}_B) & -2(\dot{y}_C - \dot{y}_B) & 2(\dot{x}_C - \dot{x}_B) & 2(\dot{y}_C - \dot{y}_B) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**(2.43)**

# CAPÍTULO 3

# Base

# Dinámica

## 3.1 Introducción

En los temas anteriores de este trabajo se han estudiado los Sistemas Multicuerpo desde el punto de vista cinemático. Se ha definido con anterioridad a los Sistemas Multicuerpo como mecanismos o máquinas compuestos por varios sólidos, con movimiento relativo entre ellos y de los que se conocen sus grados de libertad, con el fin de determinar los eslabones que deben ser animados o controlados exteriormente para que el mecanismo realice su función correctamente.

El análisis cinemático permite relacionar entre sí los movimientos de los eslabones que componen el mecanismo o máquina [3dM05]. El diseño de un Sistema Multicuerpo atendiendo únicamente a aspectos cinemáticos supone una considerable simplificación y normalmente es necesario también, el análisis dinámico para conocer las solicitaciones sobre los eslabones y pares cinemáticos y completar el diseño desde el punto de vista resistente [CaC99]. No obstante en algunos casos en los que las fuerzas implicadas son pequeñas y el mecanismo funciona a bajas velocidades, las propias exigencias constructivas conducen a un diseño resistente y es posible obviar el análisis dinámico. Pensemos por ejemplo en el mecanismo de un flexo de mesa de posición regulable, en el mecanismo de un tendedero plegable de tijera o en otras aplicaciones similares.

Sin embargo, en la mayoría de los sistemas, y especialmente si se desea hacer un diseño optimizado no basta con un análisis cinemático [Hid01], bien porque las fuerzas externas aplicadas son elevadas (y por tanto también lo serán las internas), bien porque lo son las fuerzas de inercia de los elementos que lo componen (normalmente como consecuencia de que el mecanismo ha de funcionar a elevadas velocidades).

En estos casos el diseño de los eslabones y pares cinemáticos del Sistema Multicuerpo está fuertemente influenciado por las fuerzas que se producen durante su funcionamiento. Por ejemplo, si en un par giratorio lubricado la fuerza entre el eje y el cojinete es demasiado elevada, se producirá la rotura de la película de aceite y el contacto metal contra metal, lo que ocasionará calentamiento y finalmente el fallo del

cojinete [Mab99]. Por otra parte el conocimiento de las fuerzas actuantes sobre cada eslabón es determinante para el diseño resistente del mismo.

En este capítulo nos centraremos en el estudio del análisis dinámico de Sistemas Multicuerpo planos, aunque no se pretende hacer un análisis exhaustivo debido a la gran variedad de métodos existentes.

## 3.2 Planteamiento de las ecuaciones dinámicas

Las ecuaciones dinámicas pueden plantearse apelando a diferentes formalismos dinámicos. Los más comunes se resumen en:

- Formalismo de Newton-Euler [Eul76] o formalismo Vectorial, según el cual se plantean dos grupos de ecuaciones cartesianas: conservación de Momento Lineal y de Momento Angular para cada uno de los sólidos del sistema mecánico.

- Formalismo de las Potencias Virtuales [KaL85], según el cual se plantean ecuaciones para un número de movimientos virtuales suficientes y arbitrariamente escogidos para el sistema.

- Formalismo de Lagrange [Lag88], que a partir de la energía cinética y/o potencial del sistema determina las ecuaciones dinámicas para un conjunto de movimientos virtuales coincidentes con las coordenadas del sistema.

Desde un punto de vista ingenieril, una ventaja que presentan los métodos vectoriales frente a los analíticos es la posibilidad que ofrecen para calcular las fuerzas y momentos originados en los enlaces que existen entre los sólidos del sistema. Desde el punto de vista de la simulación dinámica, los formalismos de tipo lagrangiano presentan ciertas ventajas por derivar en sistemas de ecuaciones más compactos, lo cual resulta atractivo en el contexto de la simulación en tiempo real. Por último mientras que los métodos vectoriales se aplican exclusivamente a sistemas de sólidos rígidos, los analíticos pueden aplicarse a cualquier tipo de sistemas, ya sean estos de sólidos rígidos, flexibles,…

Este auge del análisis de los Sistemas Multicuerpo es un fenómeno que recuerda al producido a principios de la década de 1970 en el campo del análisis estructural, con la irrupción del software basado en el método de los elementos finitos [AJH96]. Sin embargo ambos análisis son sustancialmente distintos, ya que mientras el análisis estructural de elementos finitos es esencialmente un proceso *batch*, que no precisa la interactividad del analista durante todo el proceso, el análisis de Sistemas Multicuerpo es necesariamente interactivo, dado que el analista está interesado en obtener una respuesta del sistema en el espacio de trabajo y durante un periodo de tiempo. Además, en ocasiones es precisa una respuesta en tiempo real, con lo que el diseñador se convierte en un elemento más de la simulación que puede introducir fuerzas externas y controlar los grados de libertad del sistema.

Apoyándonos en estos conceptos y en la dificultad de dar solución a los problemas de análisis dinámico, ya que son problemas laboriosos cuando se realizan los cálculos de forma manual, sobre todo cuando se quieren analizar varias posiciones del mecanismo, y a la posibilidad de cometer errores en su resolución a los que podemos sumar los del redondeo en las operaciones, esta tesis quiere ayudar a profundizar en el estudio del análisis dinámico de los Sistemas Multicuerpo mediante la creación de un modelado computacional para los Sistemas mecánicos planos de seis eslabones y un grado de libertad, basado en el método matricial, ya que, según la bibliografía consultada, hay muy poco estudiado de tales mecanismos, y menos sobre programas de cálculo dinámico, aplicable específicamente para ellos, a diferencia de los de cuatro eslabones de los que podemos encontrar abundantes programas de análisis, tanto cinemáticos como dinámicos, y poner al alcance de cualquier persona interesada en estudiar la dinámica de un Sistema Multicuerpo de seis eslabones, con unos conocimientos básicos de mecánica y teoría de mecanismos, un programa de cálculo.

## 3.3 Tipos de análisis en dinámica

El grado de dificultad del análisis dinámico de mecanismos es función de qué datos son conocidos y cuáles son incógnitas en un problema, así como de las suposiciones o simplificaciones que puedan establecerse sobre las incógnitas. Al igual que para el

análisis cinemático, nos podemos encontrar con métodos gráficos y analíticos, aunque nosotros vamos a tratar sólo el segundo caso. Se pueden definir tres tipos de análisis dinámico en los Sistemas Multicuerpo [BeJ03] y [Bor01]:

- Análisis estático
- Análisis dinámico inverso
- Análisis dinámico directo.

El análisis estático asume que todos los elementos del mecanismo están en equilibrio. El equilibrio del mecanismo supone la eliminación de los grados de libertad que permitían su movimiento, lo que tiene lugar por la aplicación de acciones equilibrantes (fuerzas o momentos) en número igual al de grados de libertad del mecanismo. El análisis estático se emplea en una de las dos aplicaciones siguientes [San02] [GCR07]:

- Determinación de las fuerzas o momentos que equilibran el mecanismo (*fuerzas o momentos equilibrantes)* para una posición concreta conocida del mismo y bajo la acción de fuerzas externas conocidas.

- Determinación de la posición de equilibrio del mecanismo sometido a fuerzas externas cuyo valor se conoce para cada posición del mecanismo.

El análisis estático es completamente válido para mecanismos en los que no hay movimiento apreciable durante la aplicación de las fuerzas o cargas. Por ejemplo, el mecanismo de una punzonadora permite el movimiento de sus eslabones para posicionar la pieza que va a ser perforada, y sin embargo la acción efectiva del mecanismo tiene lugar en una posición prácticamente fija del mismo y un análisis estático permitirá el cálculo de la fuerza que hay que aplicar en el brazo de palanca para superar la resistencia de una chapa a ser punzonada. Por otra parte, el análisis estático es aplicable también para un cálculo aproximado de las fuerzas en mecanismos en los que el movimiento de los eslabones es suficientemente lento [Sim02]. En estos casos, aunque existan aceleraciones que hacen que el análisis estático no sea estrictamente correcto, las fuerzas de inercia debidas a dichas

aceleraciones son lo suficientemente pequeñas para que la dinámica del mecanismo pueda ser aproximada bastante bien por una serie de cálculos estáticos sucesivos en cada una de las posiciones (es lo que se llama análisis cuasiestático).

Un ejemplo de análisis estático sería el que se puede hacer del mecanismo de la grúa elevadora de la figura 3.1, para calcular las fuerzas en los cilindros hidráulicos en una posición fija del mecanismo, soportando una determinada carga P.

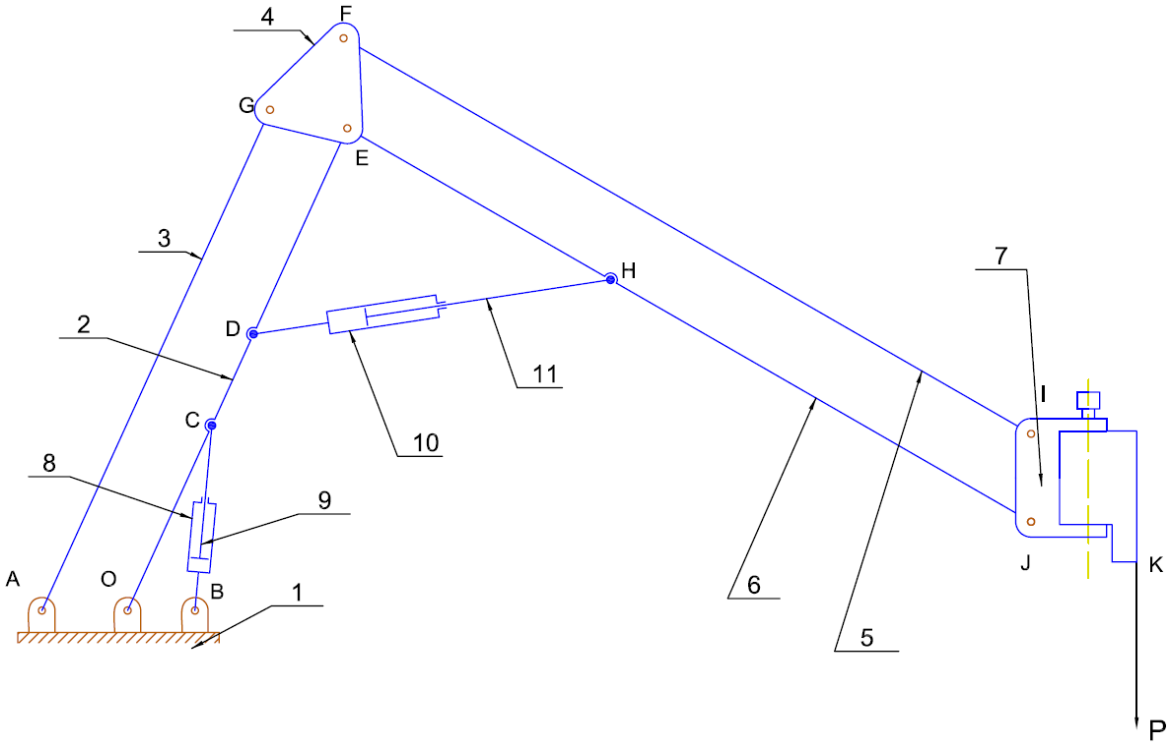



Figura 3.1

El análisis dinámico inverso se realiza cuando se conoce el movimiento de un mecanismo y se pretende determinar las fuerzas externas que originan dicho movimiento (fuerzas motoras) y las internas que aparecen como consecuencia del mismo.

Es habitual en dos situaciones:

- Cuando se conoce completamente el movimiento de cada uno de los miembros del mecanismo a través de datos experimentales, bien por instrumentación del mecanismo, bien por filmación y análisis de las imágenes o bien como

consecuencia de un análisis previo de dinámica directa.

- Cuando, sin conocer exactamente el movimiento del mecanismo, es posible realizar alguna aproximación al movimiento real de uno o más eslabones del mecanismo (aproximación cinetoestática al análisis dinámico).

Como ejemplo de esta segunda situación, supongamos que se quieren conocer las fuerzas en los elementos del mecanismo de bombeo de la figura 3.2, que funciona a un régimen concreto de velocidades.

Es posible obtener una buena aproximación de dichas fuerzas suponiendo que la velocidad angular de la manivela de entrada es constante en todo el ciclo, aunque realmente existe una fluctuación en la velocidad a lo largo de las diferentes fases de funcionamiento de la misma. Esta aproximación será tanto mejor cuanto mayor sea la inercia del mecanismo al giro.

En los casos prácticos esta inercia será elevada precisamente para eliminar esa fluctuación en la velocidad con lo que la aproximación será bastante aceptable en muchas aplicaciones.

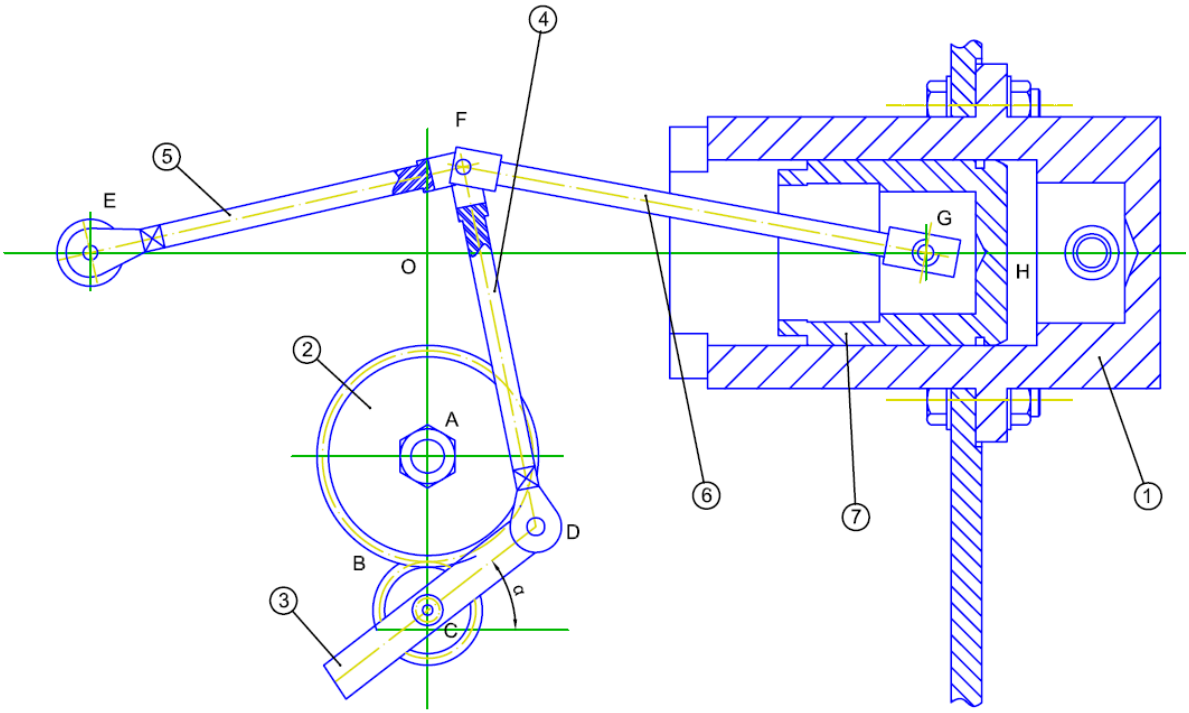



Figura 3.2

Finalmente, el análisis dinámico directo busca el cálculo del movimiento de un mecanismo conocidas las fuerzas actuantes sobre el mismo. Un ejemplo sería el cálculo de la evolución de las velocidades durante el funcionamiento de un mecanismo de regulación centrífuga como el de la figura 3.3, sobre el que actúa la gravedad y el par aplicado To, cuyo valor se conoce como función del tiempo. Una vez conocido el movimiento, las fuerzas internas y las reacciones externas pueden ser determinadas mediante un análisis dinámico inverso.

El cálculo del movimiento del mecanismo (objetivo final del análisis dinámico directo) requiere el planteamiento y resolución de las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento del sistema y su integración a partir de unas condiciones iniciales para conocer la evolución de las posiciones, velocidades y aceleraciones. Es imprescindible este análisis en aquellas aplicaciones en las que la aproximación cinetoestática no sea válida, porque las fluctuaciones de velocidad sean importantes o porque se pretenda analizar los movimientos o fuerzas que tienen lugar durante una fase transitoria del funcionamiento del mecanismo.

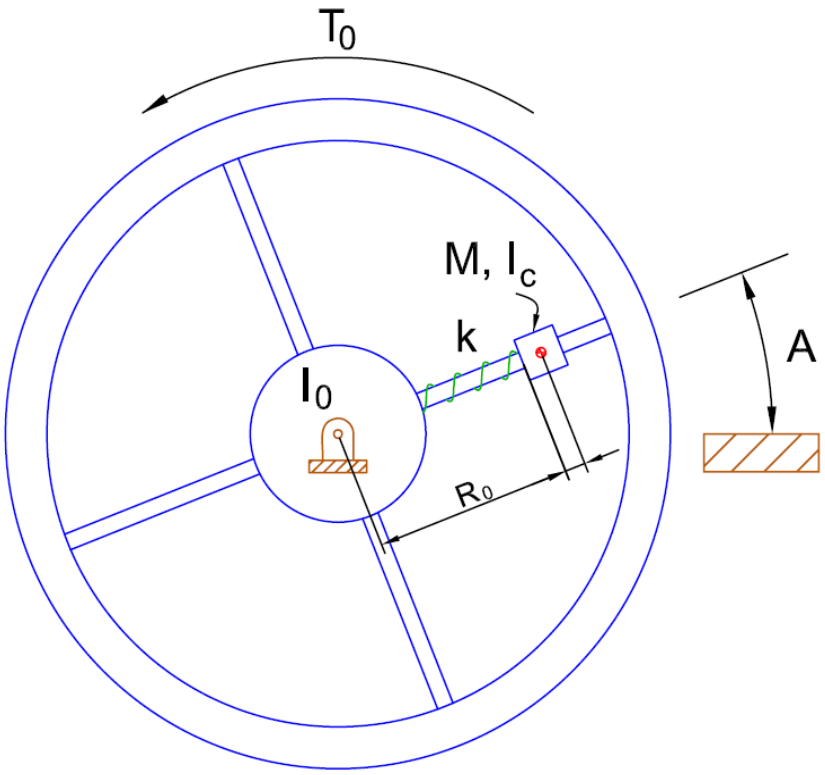



Figura 3.3

En cada tipo de análisis, como ya se ha comentado, los datos son diferentes y también las incógnitas, y debido a la propia naturaleza del problema los métodos empleados, tanto en la formulación de las ecuaciones como en la resolución de las mismas, son diferentes. En la tabla 3.1 se presenta un cuadro resumen con las características de cada tipo de análisis, que serán analizadas con más profundidad en los apartados siguientes dedicados a cada tipo.

| | TIPO DE ANÁLISIS | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Estático. Posición conocida** | **Estático. Posición de equilibrio** | **Dinámico inverso** | **Dinámico directo** |
| **Características másicas y geométricas** | • Dato (sólo afecta al peso pero no a las fuerzas de inercia) | • Dato (sólo afecta al peso pero no a las fuerzas de inercia) | • Dato | • Dato |
| **Fuerzas exteriores aplicadas** | • Dato | • Dato | • Dato como función de la posición | • Dato como función del tiempo o la cinemática del mecanismo |
| **Fuerzas equilibrantes** | • Desconocidas | • Conocidas en función de la posición | • Desconocidas | |
| **Movimiento** | • Fuerzas equilibrantes<br>• Fuerzas internas | • Posición de equilibrio<br>• Fuerzas equilibrantes<br>• Fuerzas internas | • Fuerzas equilibrantes en cada posición<br>• Fuerzas internas en cada posición | • Posición, velocidad y aceleración de cada elemento en función del tiempo |
| **Resultados** | • Fuerzas equilibrantes<br>• Fuerzas internas | • Posición de equilibrio<br>• Fuerzas equilibrantes<br>• Fuerzas internas | • Fuerzas equilibrantes en cada posición<br>• Fuerzas internas en cada posición | • Posición, velocidad y aceleración de cada elemento en función del tiempo |
| **Herramientas necesarias** | • Estática vectorial o analítica<br>• Álgebra lineal | • Estática vectorial o analítica<br>• Álgebra no lineal | • Principio de d'Alembert<br>• Estática vectorial o analítica<br>• Álgebra lineal | • Leyes de Newton<br>• Ecuación de Eksergian<br>• Ecuaciones de Lagrange<br>• Resolución de ecuaciones diferenciales por métodos numéricos |

Tabla 3.1

## 3.4 Análisis estático

Como se ha señalado anteriormente, en el análisis estático el mecanismo se supone en equilibrio [Gon03] [Gom01]. Este análisis es habitual en mecanismos diseñados para la aplicación de fuerzas en posiciones fijas, aunque seleccionables en muchos casos. Tal es el caso de las palancas, grúas, herramientas manuales como alicates o tijeras, cizallas, etc. Como ya se señaló en el apartado anterior existen dos tipos de análisis estático:

- Determinación de las fuerzas equilibrantes y reacciones para posición conocida (por ejemplo el cálculo de las fuerzas en los cilindros de la grúa de la figura 3.1 para una posición dada en la que se sostiene un peso P)

- Determinación de la posición de equilibrio y las reacciones ante fuerzas externas conocidas en función de la posición (por ejemplo en el mecanismo de apertura del capó de automóvil de la figura 3.4, cálculo del ángulo α en la posición de equilibrio).

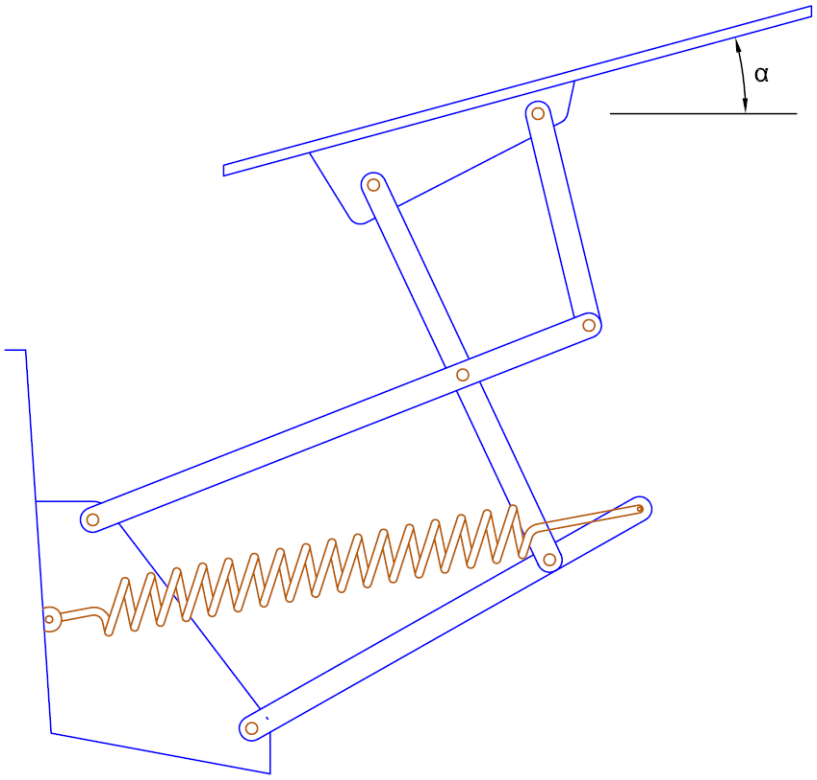



Figura 3.4

El primer caso conduce habitualmente a ecuaciones lineales, mientras que el segundo suele dar lugar a ecuaciones no lineales, por lo que su resolución es más complicada. Para el análisis estático se utilizan los principios de la estática, bien vectoriales o analíticos, que se estudian en los primeros cursos de Ingeniería. A continuación se estudiarán tres métodos alternativos que pueden utilizarse, basados respectivamente en la 1ª ley de Newton, en el principio de los trabajos virtuales y en el principio de las potencias virtuales. Se ilustrará cada uno sobre un mismo ejemplo. Para acabar se comentará la problemática relativa a la consideración del rozamiento en el análisis estático.

## 3.4.1 Análisis por métodos vectoriales

Un primer procedimiento para el análisis estático es la utilización de los métodos de la estática vectorial, basados en la 1ª ley de Newton y ampliamente utilizados ya en la Mecánica para Ingenieros. Para ello bastará con establecer el equilibrio de fuerzas y momentos en cada uno de los eslabones del mecanismo o cualquiera de los métodos de análisis de la estática aplicables a estructuras isostáticas.

Si se quieren obtener todas las reacciones internas en las articulaciones la forma más sistemática de proceder es plantear un sistema de 3(n-1) ecuaciones a partir de las tres ecuaciones de equilibrio planteadas para cada uno de los n-1 eslabones móviles del mecanismo, al igual que se hace en el análisis de una estructura isostática. Una vez resuelto el sistema se obtienen las incógnitas, que corresponden a:

$2j_1$ 2 reacciones correspondientes a cada uno de los $j_1$ pares inferiores

$j_2$ reacciones correspondientes a los $j_2$ pares superiores

M fuerzas equilibrantes correspondientes a los grados de libertad del mecanismo (por ejemplo, fuerzas en los cilindros hidráulicos de la grúa de la figura 1) o bien coordenadas que definen la posición de equilibrio (por ejemplo, ángulo α en el mecanismo de apertura de la figura 4). En cualquiera de los dos casos el número de fuerzas equilibrantes o el número de coordenadas deberá coincidir con el número de grados de libertad del mecanismo.

El número total de ecuaciones e incógnitas mencionado coincide, pues de acuerdo con la fórmula de Grübler:

$$M = 3(n-1) - 2j - j \rightarrow 3(n-1) = m + 2j_1 + j_2 \qquad \textbf{(3.1)}$$

siendo M el número de grados de libertad, n el número de eslabones, y $j_1$ y $j_2$ el número de pares inferiores y superiores respectivamente.

Por ejemplo, en el caso del mecanismo de la figura 3.1, tenemos:

$$n = 11$$

$$j_1 = 14$$

$$j_2 = 0$$

obteniéndose de la fórmula de Grübler M = 2 como corresponde a los dos grados de libertad del mecanismo, grados de libertad que se restringen en este caso mediante las fuerzas debidas al fluido a presión de los cilindros. Las ecuaciones que se pueden plantear en este caso son 3(11-1) = 30 y de este sistema se obtendrían las 2·14 = 28 incógnitas correspondientes a las reacciones en cada articulación más las 2 incógnitas correspondientes a las fuerzas del fluido soportadas por los cilindros.

En los casos, como el de la figura 3.1, en los que se conoce la posición del mecanismo, el sistema de ecuaciones resultante es lineal y por tanto tiene resolución explícita. Además es posible aplicar el principio de superposición, consistente en obtener las fuerzas incógnitas, como suma de las que corresponderían a cada uno de los casos ficticios en que actuara sólo una de las fuerzas externas. En cambio, en los problemas como el de la figura 3.4, en los que se busca la posición de equilibrio, el sistema de ecuaciones que se obtiene no es lineal en general, por lo que no es posible aplicar superposición y además la resolución se complica, debiendo realizarse por un procedimiento iterativo, como por ejemplo Newton-Raphson.

En la mayoría de los problemas de fuerzas equilibrantes, es posible realizar una resolución manual, sin necesidad de plantear todo el sistema de ecuaciones, ya que analizando el equilibrio de diferentes partes del mecanismo es posible ir resolviendo

el problema por pasos. A continuación se analiza el ejemplo de la figura 3.1.

**Ejemplo: Mecanismo de grúa (figuras 3.1 y 3.5):**

- Datos:

$q_1$ : Ángulo que forma el eslabón OE con la horizontal

$q_2$ : Ángulo que forma el eslabón EJ con la horizontal

P: Carga soportada en el punto K del eslabón 7

$$l_{EF} = l_{IJ} = l_{EG} = l_{AO}$$

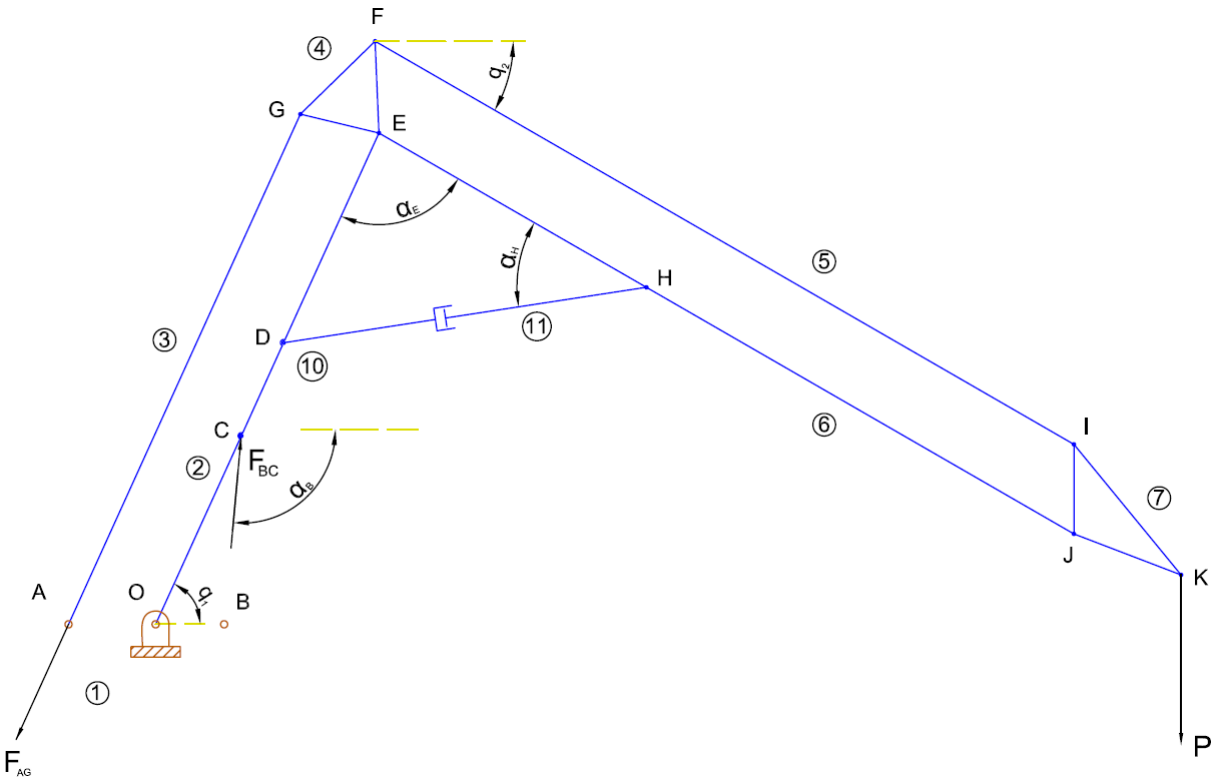



Figura 3.5

- Cálculos geométricos de posición:

Longitudes $l_{BC}$ y $l_{DH}$ en función de los ángulos $q_1$ y $q_2$ (aplicando el teorema del coseno a los triángulos OBC y EDH respectivamente)

$$l_{BC} = \sqrt{l_{OC}^2 + l_{OB}^2 - 2 l_{OC}\ l_{OB} \cos \alpha_B} \qquad \textbf{(3.2)}$$

$$l_{DH} = \sqrt{l_{DE}^2 + l_{EH}^2 - 2 l_{DE}\ l_{EH} \cos \alpha_E} \qquad \textbf{(3.3)}$$

Ángulos $\alpha_E$ y $\alpha_H$:

$$\alpha_E = \pi - q_1 + q_2 \qquad \textbf{(3.4)}$$

$$\text{sen } \alpha_H = \frac{l_{DE}}{l_{DH}} \text{sen } \alpha_E = \frac{l_{DE}}{l_{DH}} \text{sen } (\pi - q_1 + q_2) = \frac{l_{DE}}{l_{DH}} \text{sen } (q_1 - q_2) \qquad \textbf{(3.5)}$$

$$\text{sen } \alpha_B = \frac{l_{OC}}{l_{BC}} \text{sen } q_1 \qquad \textbf{(3.6)}$$

- Ecuaciones de equilibrio:

Equilibrio del eslabón 5 (figura 3.6):

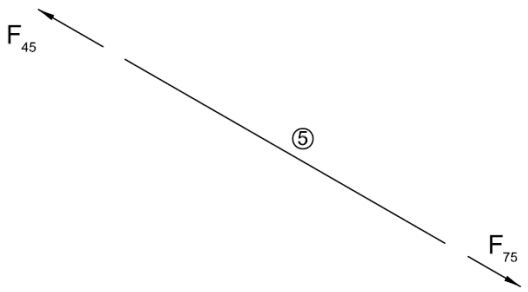



Figura 3.6

$$F_{45} = -F_{75} \qquad \textbf{(3.7)}$$

Equilibrio del eslabón 7 (figura 3.7):

$$\sum M_J = 0 \rightarrow F_{F1}\ l_{1J}\ \cos q_2 - P x_{JK} = 0 \qquad \textbf{(3.8)}$$

Equilibrio de eslabones 5-6-7 (figura3. 8)

$$\sum M_E = 0 \rightarrow F_{F1}\ l_{1J}\ \cos q_2 - P(_{EJ} + x_{JK}) + F_{DH}\ l_{EH}\ \text{sen } \alpha_H = 0 \qquad \textbf{(3.9)}$$

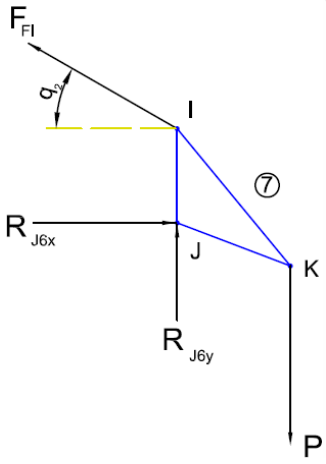



Figura 3.7

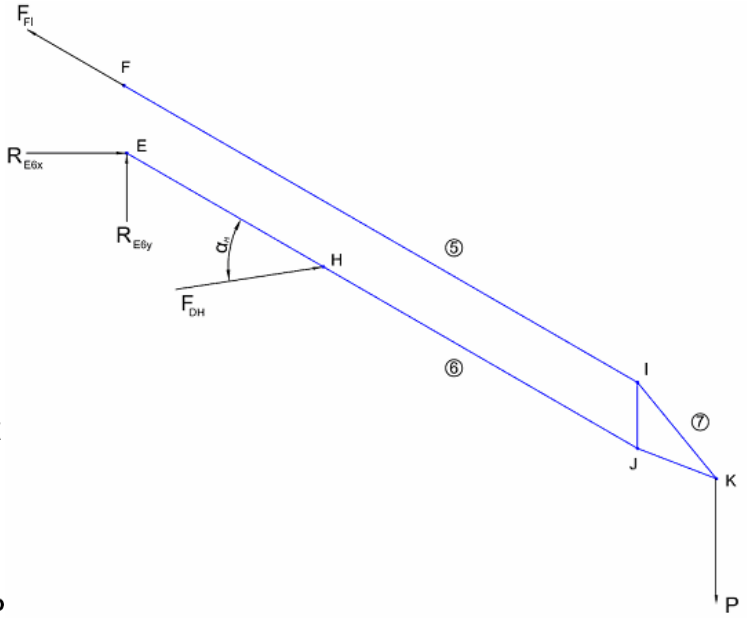



Figura 3.8

Sustituyendo la ecuación (8) en (9) se obtiene:

$$F_{DH} = \frac{Px_{EJ}}{l_{EH}\ \text{sen}\ \alpha_H} = \frac{Pl_{EJ}\ \cos q_2}{l_{EH}\ \text{sen}\ \alpha_H} \qquad \textbf{(3.10)}$$

y sustituyendo la ecuación (5) en (10):

$$F_{DH} = \frac{Pl_{EJ}\ l_{DH}\ \cos q_2}{l_{EH}\ l_{DE}\ \text{sen}(q_1 - q_2)} \qquad \textbf{(3.11)}$$

Equilibrio de eslabón 4 (figura 3.9):

$$\sum M_E = 0 \rightarrow F_{AG} = F_{F1}\frac{\cos q_2}{\text{sen}\ q_1} \qquad \textbf{(3.12)}$$

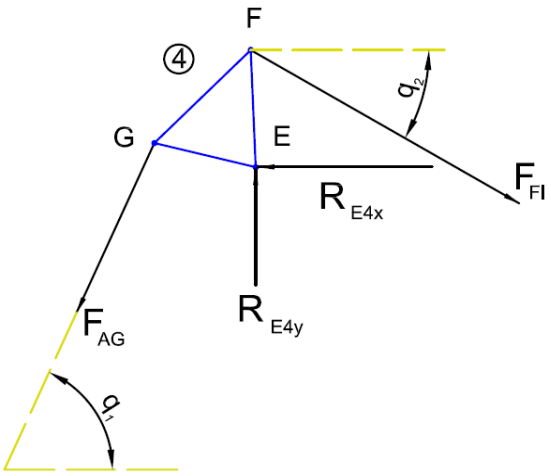



Figura 3.9

Equilibrio de eslabones 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10 y 11 (figura 3.10)

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow Px_{KO} - F_{BC}\ l_{BO}\ \text{sen}\ \alpha_B - F_{AG}\ l_{A0}\ \text{sen}\ q_1 = 0 \qquad \textbf{(3.13)}$$

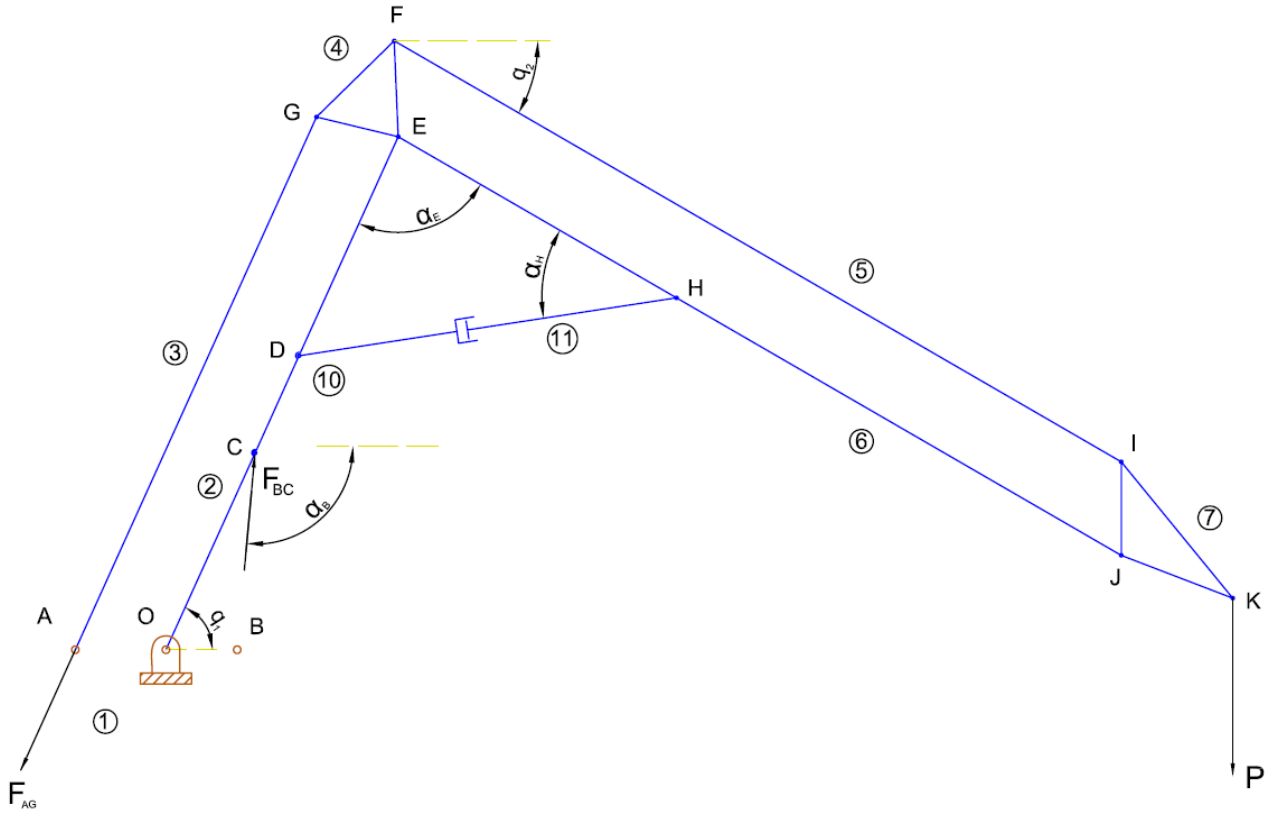



Figura 3.10

Sustituyendo (6) y (12) en (13) y teniendo en cuenta (8), se llega a:

$$F_{BC} = \frac{Pl_{BC}(\ l_{EO}\ \cos q_1 + l_{EJ}\ \cos q_2)}{l_{BO}\ l_{CO}\ \text{sen}\ q_1} \qquad \textbf{(3.14)}$$

Las reacciones en las articulaciones se pueden determinar fácilmente por equilibrio de fuerzas en elementos aislados. Alguna de ellas ya se han obtenido anteriormente.

## 3.4.2 Análisis mediante el principio de los trabajos virtuales

Otro procedimiento que puede utilizarse para el análisis estático está basado en la utilización del principio de los trabajos virtuales. Este método es especialmente interesante en el estudio de problemas en los que intervienen un gran número de sólidos interconectados entre sí, pero no se desea conocer las fuerzas internas entre los mismos, sino simplemente la posición de equilibrio del sistema o las fuerzas de entrada y salida del sistema. Si se aborda el problema mediante aplicación de las leyes de equilibrio habría que realizar una larga secuencia de diagramas de sólido libre y manipular un elevado número de ecuaciones. En cambio, mediante la aplicación del principio de los trabajos virtuales este tipo de problemas queda reducido a muy pocas ecuaciones y además no hay que considerar las fuerzas internas en la formulación. No entraremos aquí en la demostración del principio de los trabajos virtuales y únicamente repasaremos su enunciado y formulación. Para un sistema de sólidos rígidos, el principio de los trabajos virtuales establece:

***"La condición necesaria y suficiente para que un sistema de sólidos rígidos con ligaduras ideales esté en equilibrio es que se anule la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas externas sobre el sistema para cualquier desplazamiento virtual del mismo compatible con las ligaduras".***

Para el caso de mecanismos planos, en el que todas las fuerzas actúan dentro de un mismo plano y los momentos son todos perpendiculares al plano, el principio se puede expresar matemáticamente:

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_j M_j \cdot \delta \theta_j \qquad \textbf{(3.15)}$$

donde Fi y Mj son las fuerzas y momentos externos aplicados y $\delta r_i$ y $\delta \theta_j$ los desplazamientos virtuales lineales y angulares de sus puntos de aplicación respectivos.

El principio de los trabajos virtuales no puede aplicarse a sistemas que absorban o

disipen energía en un desplazamiento virtual, sin embargo sí puede emplearse si hay sistemas que acumulan energía conservativa, como por ejemplo las fuerzas gravitatorias y los muelles. En estos casos, la ecuación del principio puede escribirse añadiendo el trabajo virtual que realizan las fuerzas conservativas, que como se sabe es -$\delta V$, siendo V la función potencial correspondiente:

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_j M_j \cdot \delta \theta_j - \sum_k \delta V_k \qquad \textbf{(3.16)}$$

Para el caso de las fuerzas gravitatorias será:

$$\delta V = mg\delta z \qquad \textbf{(3.17)}$$

siendo m la masa del cuerpo, g la aceleración de la gravedad y z la cota respecto al origen de potencial.

En el caso de un muelle de tracción o compresión:

$$\delta V = \delta\left(\frac{1}{2} K(L - L_0)^2\right) \qquad \textbf{(3.18)}$$

donde K es la constante elástica del muelle, L su longitud y Lo la longitud no deformada.

Si $\delta r_i$ ,$\delta\theta_j$ y $\delta V_k$ se expresan en función de los desplazamientos virtuales de un conjunto de M coordenadas generalizadas $q_i$ independientes seleccionadas para el problema (siendo M el número de grados de libertad del mecanismo), el principio de los trabajos virtuales queda:

$$\delta W = \sum_{i=1} Q_i \cdot \delta q_i = 0 \qquad \textbf{(3.19)}$$

donde las $q_i$ son cada una de las coordenadas generalizadas definidas y $Q_i$ las fuerzas generalizadas asociadas a las mismas.

De la expresión (17) se deduce, dado que el trabajo virtual ha de ser nulo para cualquier combinación de desplazamientos virtuales, que las fuerzas generalizadas

han de ser nulas:

$$\mathbf{Q}_i = 0 \qquad \mathbf{i} = 1,...,m \qquad \textbf{(3.20)}$$

lo que constituye un sistema de m ecuaciones con m incógnitas, que pueden corresponder a:

- Fuerzas equilibrantes
- Coordenadas generalizadas en el equilibrio

Como se ve, aplicando el principio de los trabajos virtuales, el sistema de ecuaciones para el caso del mecanismo de la figura 1 se reduce de 30 a 2 ecuaciones, lo que supone una considerable simplificación. De estas 2 ecuaciones se obtendrían las fuerzas equilibrantes en los cilindros hidráulicos.

Como ejemplo, se resuelve a continuación el mismo problema analizado anteriormente mediante la 1ª ley de Newton.

**Ejemplo: Mecanismo de grúa (figura 3.5):**

Para ello, consideraremos como coordenadas generalizadas los ángulos q1 y q2 definidos previamente. Se trata de un sistema de coordenadas generalizadas independientes. Una variación virtual de estos ángulos provocará un cambio virtual en la posición del brazo. La carga P y los cilindros se pueden considerar externos al mecanismo de 2 grados de libertad y por tanto para aplicar el principio de los trabajos virtuales habrá que calcular los trabajos de P y de los cilindros en el desplazamiento virtual del mecanismo, expresándolos en función de las variaciones virtuales de las coordenadas generalizadas:

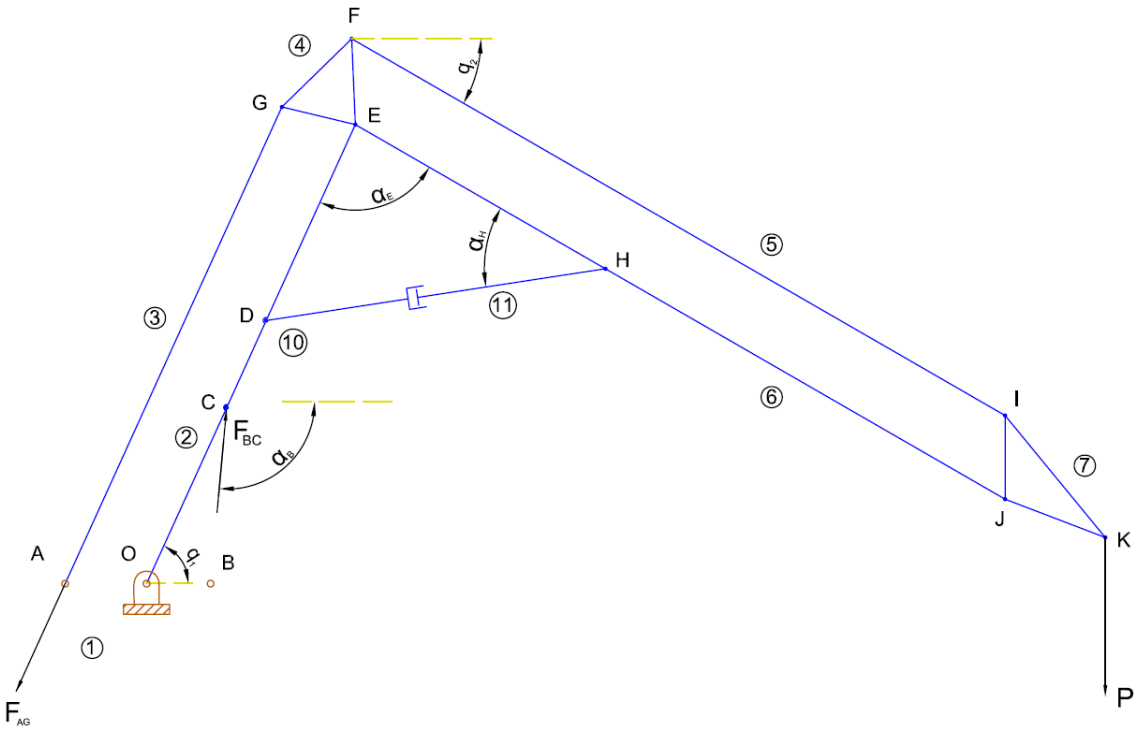



Figura 3.5

El principio de los trabajos virtuales aplicado a este caso será:

$$\begin{aligned}\delta W &= \delta W_P + \delta W_{DH} + \delta W_{BC} = \vec{P}\cdot\delta\vec{r}_{DH} + \vec{F}_{BC}\cdot\delta\vec{r}_{BC} \\ &= -P\cdot\delta y_K + F_{DH}\cdot\delta l_{DH} + F_{BC}\cdot\delta l_{BC}\end{aligned} \qquad \textbf{(3.21)}$$

Desplazamientos virtuales:

Carga P:

$$\delta y_k = \delta y_J = \delta(l_{E0}\ \text{sen}\ q_1 + l_{EJ}\ \text{sen}\ q_2) = l_{E0}\ \cos\ q_1\delta q_1 + l_{EJ}\ \cos\ q_2\delta q_2 \qquad \textbf{(3.22)}$$

Cilindro DH:

$$l_{DH}^2 = l_{DE}^2 + l_{EH}^2 - 2l_{DE}\ l_{EH}\cos\ \alpha_E \qquad \textbf{(3.23)}$$

$$2l_{DH}\ \delta l_{DH} = 2l_{DE}\ l_{EH}\ \text{sen}\ \alpha_E\ \delta\alpha_E = 2l_{DE}\ l_{EH}\ \text{sen}(q_1 - q_2)(\delta q_2 - \delta q_1) \qquad \textbf{(3.24)}$$

$$\delta l_{DH} = \frac{l_{DH}\ l_{EH}}{l_{DH}}\text{sen}(q_1 - q_2)(\delta q_2 - \delta q_1) \qquad \textbf{(3.25)}$$

Cilindro BC:

$$l_{BC}^2 = l_{BO}^2 + l_{CO}^2 - 2l_{BO}\ l_{CO}\ \cos q_1 \tag{3.26}$$

$$2l_{BC}\ \delta l_{BC} = 2l_{BO}\ l_{CO}\ \text{sen}\ q_1 \delta q_1 \tag{3.27}$$

$$\delta l_{BC} = \frac{l_{BO}\ l_{CO}}{l_{BC}} \text{sen}\ q_1\ \delta q_1 \tag{3.28}$$

Sustituyendo las ecuaciones (22),(25),(28) en (21):

$$\delta W = \left(-Pl_{EO}\ \cos q_1 - F_{DH}\ \frac{l_{DE}\ l_{EH}}{l_{DH}} \text{sen}(q_1 - q_2) + F_{BC}\ \frac{l_{BO}\ l_{CO}}{l_{BC}} \text{sen}\ q_1\right)\delta q_1 + \left(-Pl_{EJ}\ \cos q_2 + F_{DH}\ \frac{l_{DE}\ l_{EH}}{l_{DH}} \text{sen}(q_1 - q_2)\right)\delta q_2 = 0 \tag{3.29}$$

Puesto que los desplazamientos generalizados de las coordenadas $q_1$ y $q_2$ son independientes, sus factores en la ecuación anterior (las fuerzas generalizadas) serán nulos, de donde se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $F_{DH}$ Y $F_{BC}$ cuya solución es:

$$F_{DH} = \frac{Pl_{EJ}\ l_{DH}\ \cos q_2}{l_{EH}\ l_{DE}\ \text{sen}(q_1 - q_2)} \tag{3.30}$$

$$F_{BC} = \frac{Pl_{BC}\ (l_{EO}\ \cos q_1 + l_{EJ}\ \cos q_2)}{l_{BO}\ l_{CO}\ \text{sen} q_1} \tag{3.31}$$

resultados que coinciden con los obtenidos por el método vectorial.

## 3.4.3 Análisis mediante el principio de las potencias virtuales

Un método derivado directamente del de los trabajos virtuales es el de las potencias virtuales. Si se considera que los desplazamientos virtuales tienen lugar en un tiempo virtual $\delta t$ se pueden definir unas velocidades virtuales (velocidades consistentes con las restricciones pero que se producen sin variación en el tiempo).

Dividiendo la ecuación del principio de los trabajos virtuales (15) por este tiempo virtual se tendría el principio de las potencias virtuales:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_j M_j \cdot \omega_j = 0 \qquad \textbf{(3.32)}$$

donde $v_i$ y $\omega_j$ representan las velocidades virtuales de los puntos de aplicación de $F_i$ y $M_j$.

Si se expresan las velocidades virtuales en función de un conjunto de m velocidades virtuales generalizadas independientes, a través de los coeficientes de velocidad:

$$\vec{v}_i = [K_{vi}] \cdot \dot{\vec{q}} \qquad \textbf{(3.33)}$$

$$\omega_j = \vec{K}^T_{\omega j} \cdot \dot{\vec{q}} \qquad \textbf{(3.34)}$$

sustituyendo en (32) se llega a la ecuación de las potencias virtuales en coordenadas generalizadas:

$$\sum_{i=1}^{m} Q_i \cdot \dot{q}_i = 0 \qquad \textbf{(3.35)}$$

La ventaja de esta formulación es que se trabaja con velocidades en lugar de con magnitudes diferenciales, por lo que resulta de especial interés en el análisis de mecanismos, en el que el análisis cinemático de velocidades es habitual y existen diversos métodos para abordarlo.

Apliquemos el principio de las potencias virtuales al mismo ejemplo anterior:

**Ejemplo: Mecanismo de grúa (figura 3.5):**

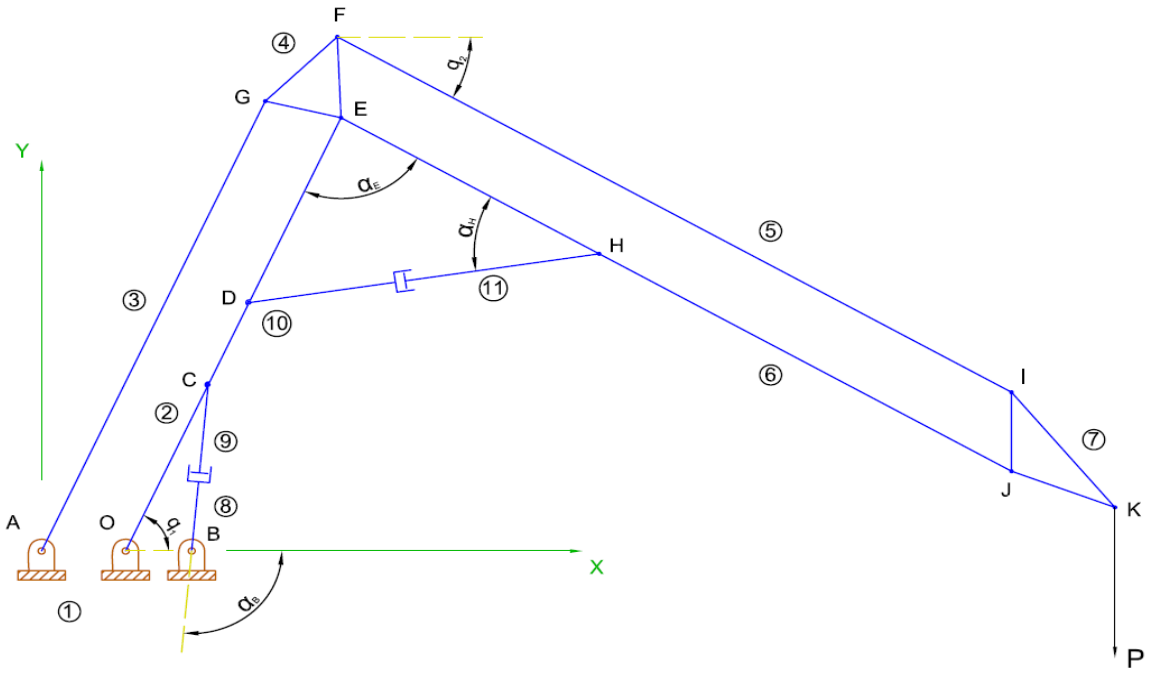



Figura 3.5

El principio de las potencias virtuales se escribirá en este caso:

$$\vec{P}\cdot\vec{v}_K+\vec{F}_{DH}\cdot\vec{v}_{rDH}+\vec{F}_{BC}\cdot\vec{v}_{rBC}=0 \qquad \textbf{(3.36)}$$

donde $\vec{v}_{rDH}$ y $\vec{v}_{rBC}$ son las velocidades relativas entre los dos elementos de los cilindros DH y BC respectivamente, velocidades que van dirigidas según el eje de dichos cilindros.

Realizando los productos escalares de (36), esta ecuación puede escribirse como:

$$-P\cdot v_{Ky}+F_{DH}\cdot v_{rDH}+F_{BC}\cdot v_{rBC}=0 \qquad \textbf{(3.37)}$$

- Cálculo de velocidades

Velocidad de K (componente vertical):

$$v_{Ky}=v_{Jy}=l_{OE}\dot{q}_1\cos q_1+l_{EJ}\dot{q}_2\cos q_2 \qquad \textbf{(3.38)}$$

Velocidad relativa entre los dos elementos del cilindro BC (figura 11):

$$v_{rBC}=v_C \ \text{sen}\ \alpha_C=\dot{q}_1 l_{OC}\frac{l_{OB}}{l_{BC}}\text{sen}\ q_1 \quad \textbf{(3.39)}$$

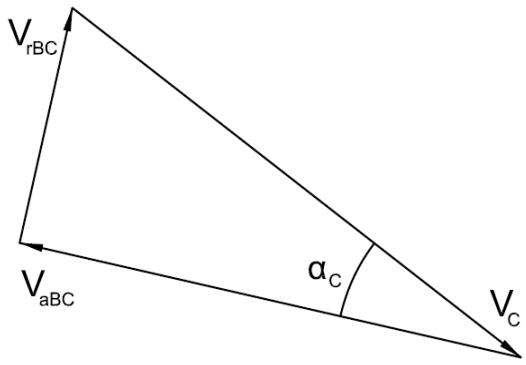



Figura 3.11

Velocidad relativa entre los elementos del cilindro DH (figura 12):

$$v_{rDH}=\vec{v}_{H/D}-\vec{\mu}_{DH} \quad \textbf{(3.40)}$$

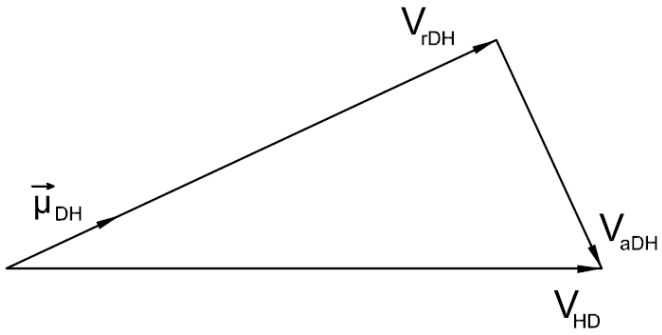



Figura 3.12

siendo $\vec{\mu}_{DH}$ el vector unitario en dirección DH. Cada uno de estos términos será:

$$\vec{v}_{H/D}=\vec{v}_H-\vec{v}_D=(-\dot{q}_1 l_{DE}\,\text{sen}\ q_1-\dot{q}_2 l_{EH}\,\text{sen}\,q_2)\vec{i}+(\dot{q}_1 l_{DE}\cos q_1+\dot{q}_2 l_{EH}\cos q_2)\vec{j} \quad \textbf{(3.41)}$$

$$\vec{\mu}_{DH}=\frac{l_{DE}\ \cos q_1+l_{EH}\ \cos q_2}{l_{DH}}\vec{i}+\frac{l_{DE}\ \text{sen}\ q_1+l_{EH}\ \text{sen}\ q_2}{l_{DH}}\vec{j} \quad \textbf{(3.42)}$$

y operando el producto escalar de (40) y simplificando se llega a:

$$V_{rDH}=\frac{l_{ED}l_{EH}}{l_{DH}}\text{sen}\ (q_2-q_1)\cdot(\dot{q}_1+\dot{q}_2) \quad \textbf{(3.43)}$$

Sustituyendo en la ecuación (37) del principio de las potencias virtuales nos quedaría:

$$\left(-Pl_{OE}\cos q_1 - F_{DH}\frac{l_{DE}l_{EH}}{l_{DH}}\text{sen}(q_1-q_2)+ F_{BC}\frac{l_{CO}l_{BO}}{l_{BC}}\text{sen } q_1\right)\cdot \dot{q}_1 + \left(-Pl_{EJ}\cos q_2 + F_{DH}\frac{l_{DE}l_{EH}}{l_{DH}}\text{sen}(q_1-q_2)\right)\cdot \dot{q}_2 = 0 \quad \textbf{(3.44)}$$

ecuación de la que se deduce que los dos términos entre paréntesis han de ser cero, dado que debe cumplirse para cualquier valor de las velocidades virtuales $q_1$ y $q_2$. Se tiene con ello un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas del que se obtiene la fuerza en cada uno de los cilindros, coincidente con la obtenida por los métodos anteriores.

## 3.4.4 Análisis estático con rozamiento

En determinados mecanismos es especialmente importante la consideración del efecto del rozamiento. Por ejemplo, en los mecanismos empleados para ejercer fuerzas de bloqueo o de presión, el rozamiento actúa en general reduciendo la ventaja mecánica respecto a la que tendría el mecanismo en el caso ideal de que no existieran rozamientos.

Para considerar el rozamiento en el análisis estático, habría que incluir en el análisis las fuerzas de rozamiento. En el caso de realizar el análisis mediante la primera ley de Newton, ello supondrá incluir como reacciones en los pares de tipo deslizamiento, además de la fuerza normal (N), la fuerza de rozamiento cuyo valor límite es μN, donde μ es el coeficiente de rozamiento al deslizamiento. Dicho valor límite se dará si el análisis se realiza en una condición estática límite en la que el deslizamiento en el par cinemático correspondiente es inminente. En el caso de los pares de tipo giratorio habrá que añadir a la reacción normal de la unión (N) un par de rozamiento de valor máximo (μNr), siendo r el radio de la articulación. Estas fuerzas de rozamiento se oponen, como es natural, al sentido del movimiento relativo entre los eslabones en contacto.

La consideración del rozamiento convierte el problema estático en no lineal, puesto que el sentido y magnitud de las fuerzas de rozamiento es dependiente del propio

resultado del análisis de fuerzas (en concreto del valor de la fuerza normal). Esto hace que el análisis se complique considerablemente, salvo en problemas sencillos.

## 3.5 Análisis dinámico inverso o cinetoestático.

La mayoría de los mecanismos funcionan realizando su trabajo mediante un movimiento cíclico de sus eslabones. En estos casos, si se pretende hacer un análisis de fuerzas, la aplicación de la 1ª ley de Newton no es válida dado que existirán aceleraciones en determinados eslabones y por tanto efectos inerciales. En este caso habrá que recurrir a la 2ª ley de Newton y la expresión derivada para la dinámica de sólidos rígidos. Un procedimiento alternativo es emplear el principio de d'Alembert, según el cual el problema dinámico se puede analizar como si fuera estático si se añade a las fuerzas externas las fuerzas de inercia de cada sólido.

En el análisis dinámico inverso, se conocen las velocidades y aceleraciones de cada eslabón del mecanismo, así como las fuerzas externas aplicadas y se pretende determinar las fuerzas equilibrantes necesarias para mantener el movimiento del mecanismo y las reacciones en los diferentes pares cinemáticos.

Mediante la aplicación del principio de D'Alembert los métodos aplicables a la resolución del problema de dinámica inversa son los mismos que al problema estático.

Antes de considerar los procedimientos de resolución repasaremos algunos conceptos referentes a las fuerzas de inercia.

### 3.5.1 Fuerzas de inercia en los mecanismos

Supongamos un eslabón de un mecanismo plano articulado en movimiento (figura 3.13), que está unido a otros eslabones a través de pares cinemáticos en los que se producen reacciones R, como $R_A$ y $R_B$ y sometido además a una serie de cargas externas de resultante $F_o$. De acuerdo con las leyes de la dinámica deberá cumplirse:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}_G \qquad \textbf{(3.45)}$$

$$\sum \vec{M}_G = I_G \vec{\alpha} \qquad \textbf{(3.46)}$$

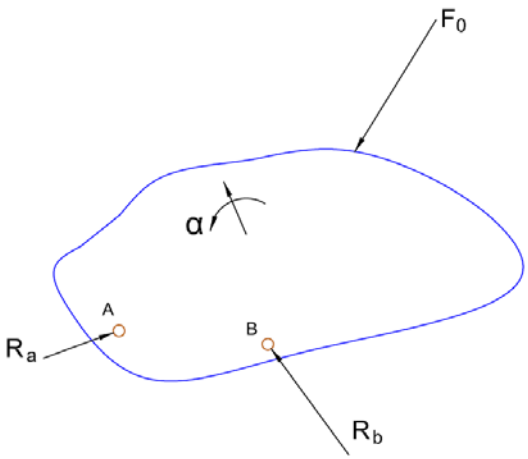



Figura 3.13

donde F son las fuerza actuantes sobre el eslabón (reacciones R y fuerzas externas $F_o$) y $M_G$ el momento de dichas fuerzas respecto del centro de masas del mismo, G. Los términos m e $I_G$ son la masa y el momento de inercia central del eslabón, y $\vec{a}_G$ y α corresponden a la aceleración del centro de masas y la aceleración angular del eslabón, que son conocidas.

Las ecuaciones (45) y (46) pueden escribirse también como:

$$\sum \vec{F} - m \cdot \vec{\alpha}_G = 0 \rightarrow \sum \vec{F} + \vec{F}_I = 0 \qquad \textbf{(3.47)}$$

$$\sum \vec{M}_G - I_G \vec{\alpha} = 0 \rightarrow \sum \vec{M}_G + \vec{M}_I = 0 \qquad \textbf{(3.4 8)}$$

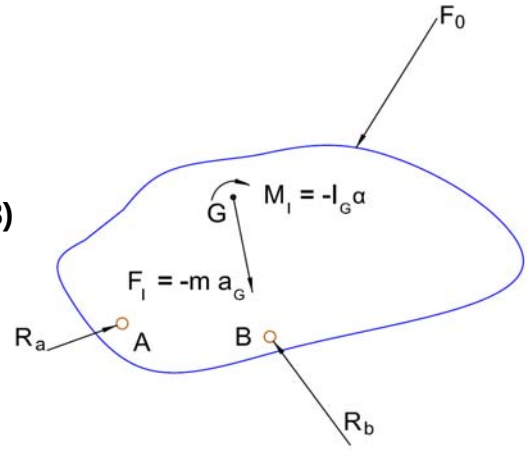



Figura 3.14

que representan la expresión del principio de d`Alembert, indicando que el problema dinámico puede ser tratado como un problema estático si a las fuerzas externas sobre el cuerpo se añade la fuerza de inercia $F_I$ y el par de inercia $M_I$, iguales en módulos y opuestos a los términos $m\vec{a}_G$ e $I_G\vec{\alpha}$ (figura 3.14).

Este sistema fuerza-par de inercia centrado en G es equivalente también a un sistema de una sola fuerza paralela a $F_I$ pero separada de G una distancia ε (figura 3.15), definida por la expresión (49), puesto que si dicha fuerza se traslada a G, tenemos el sistema fuerza-par original. A esta fuerza de inercia única equivalente al sistema original se le suele llamar fuerza de inercia única o reducida.

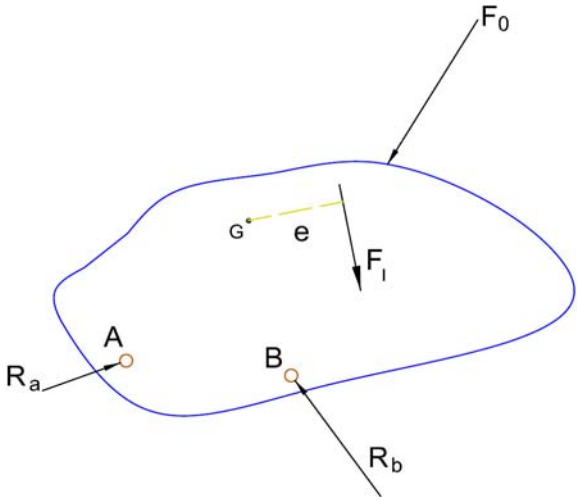



Figura 3.15

$$\varepsilon = \frac{M_I}{F_I} = \frac{I_G \alpha}{m \alpha_G} \qquad \textbf{(3.49)}$$

## 3.5.2 Centro de percusión

Una interesante propiedad derivada de la consideración de la fuerza de inercia reducida y su línea de acción se estudia en el caso de un sólido en rotación pura. Supongamos por ejemplo el sólido de la figura 3.16, que realiza una rotación pura alrededor de O, con velocidad angular ω y aceleración angular α. La aceleración de su centro de masas $a_G$ tiene dos componentes, tangencial y normal siendo:

$$a_{Gt} = \alpha \cdot r_{OG} \qquad \textbf{(3.50)}$$

$$a_{Gn} = \omega^2 \cdot r_{OG} \qquad \textbf{(3.51)}$$

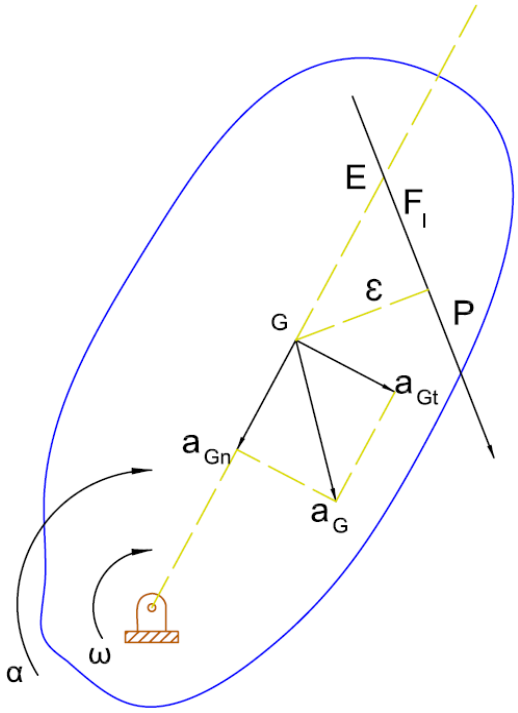



Figura 3.16

La fuerza de inercia reducida $F_I$ tendrá la misma dirección que $a_G$ y pasa por un punto P a distancia ε definida por la ecuación (3.49) de la línea de acción de $a_G$. Por semejanza de triángulos en la figura, puede escribirse:

$$\frac{r_{GE}}{r_{GP}} = \frac{a_G}{a_{Gt}} \qquad \textbf{(3.52)}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (49), (50) y $r_{GP} = \varepsilon$, y sustituyendo en (3.52) se obtiene:

$$r_{GE} \cdot r_{OG} = \frac{I_G}{m} \qquad \textbf{(3.53)}$$

De las expresiones anteriores se deduce que aunque la distancia ε depende de la velocidad y aceleración del sólido, la distancia $r_{GE}$ no, por lo que la fuerza de inercia del sólido pasa siempre por E. A este punto E se le llama centro de percusión correspondiente al centro de oscilación **O** y las distancias de ambos al centro de masas están relacionadas por la ecuación (53), dependiendo sólo de las características inerciales del sólido. Cada centro de oscilación tiene asociado su

centro de percusión correspondiente.

Una conclusión importante asociada al centro de percusión es que si el sólido que puede oscilar alrededor de O es golpeado por una fuerza que pasa por E y es perpendicular a la línea OG, no aparecerá reacción en la articulación O (salvo la componente radial debida a la velocidad angular). Esta propiedad se utiliza en las máquinas para ensayos de impacto, haciendo que el choque se produzca en el centro de percusión. Otra aplicación importante del concepto de centro de percusión se estudia en el diseño de bielas en lo correspondiente a equilibrado de máquinas.

## 3.5.3 Análisis cinetoestático por métodos vectoriales

El análisis cinetoestático puede realizarse igual que el estático si se introducen como fuerzas externas las fuerzas de inercia. Para resolver el problema pueden utilizarse los métodos vectoriales, consistentes en establecer, al igual que en el análisis estático, el equilibrio de fuerzas y momentos en cada uno de los eslabones del mecanismo. Como en el caso estático, dada la linealidad de las ecuaciones, es posible utilizar el método de superposición, es decir analizar el mecanismo cada vez con una fuerza externa diferente y obtener el resultado como suma de los resultados parciales de cada análisis (este procedimiento es habitual cuando se resuelve gráficamente).

El análisis de ecuaciones e incógnitas es idéntico al realizado en el caso estático, dado que lo único que cambia es que se han añadido acciones externas. Las incógnitas del problema serán en este caso las $2j_1+j_2$ reacciones internas en los pares cinemáticos y las m fuerzas equilibrantes que mantienen el movimiento del mecanismo.

**Ejemplo: Mecanismo de bombeo (figuras 3.2 y 3.17)**

Supongamos por ejemplo el mecanismo de bombeo de la figura 3.2, cuyo diagrama cinemático simplificado se representa en la figura 3.17. Un motorreductor está acoplado a la rueda dentada 2 haciéndola girar con centro en A. Esta rueda está engranada con 3, a la que transmite el movimiento. Una barra unida rígidamente a la rueda 3 constituye el eslabón de entrada del mecanismo de cuatro articulaciones

completado por los eslabones 4 y 3. El eslabón 6 conectado a 4 y 5 en F, se articula en G a un pistón que realiza la compresión del fluido. Se pretende calcular la variación de las reacciones internas y el par motor aplicado a lo largo del ciclo de funcionamiento, conocida la fuerza requerida para vencer la presión del fluido en cada posición, y suponiendo que la velocidad del motor es aproximadamente constante durante el ciclo.

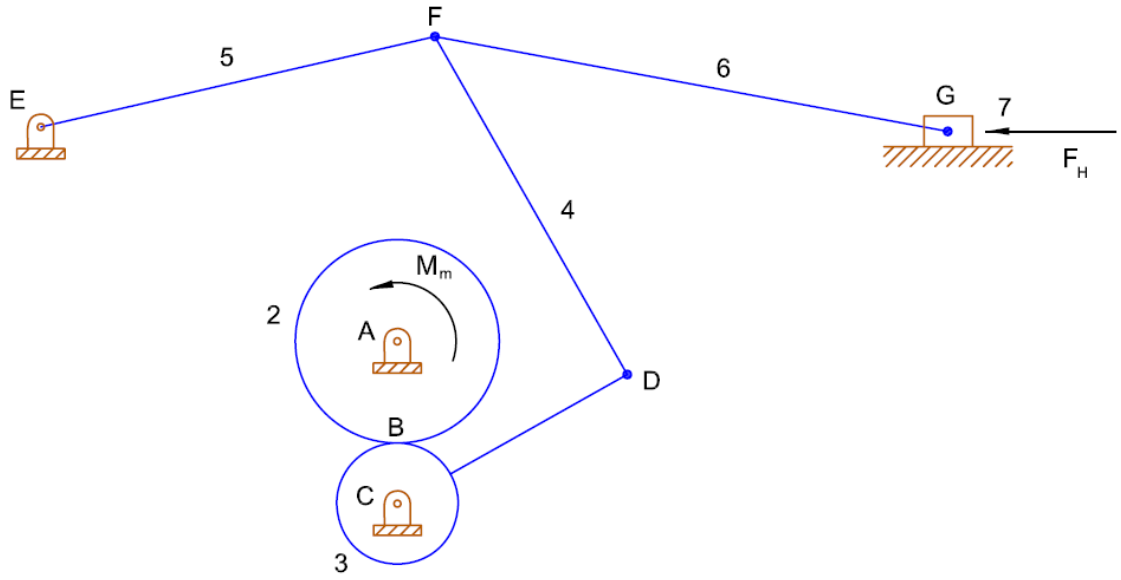



Figura 3.17

Las fuerzas externas sobre el mecanismo son las debidas a la presión del fluido sobre la cabeza del pistón, $F_H$ y el par aplicado por el motor $M_M$. Se desprecia el peso propio de los eslabones. A partir de la velocidad angular constante del motor es posible calcular la cinemática del mecanismo, con lo que se conoce la velocidad y aceleración angular de cada eslabón y también la aceleración del centro de masas de cada uno, para cada posición del mecanismo. Como la masa y momento de inercia de cada eslabón son conocidas, se podrá obtener la fuerza y el par de inercia en cada eslabón en función del ángulo α. Los diagramas de sólido libre de cada eslabón serán los de la figura 3.18, donde las $F_I$ son las fuerzas de inercia, los $M_I$ los pares de inercia y las R y M las fuerzas y momentos de reacción correspondientes a los diferentes pares cinemáticos. De cada eslabón (excepto el fijo) se obtienen tres ecuaciones, con lo que se tiene un sistema de 6·3=18 ecuaciones lineales, mediante el

cual pueden obtenerse las 18 incógnitas:

- 2 componentes de fuerza de reacción en cada articulación (E, G, D, C, A )
- 4 componentes de reacción en la articulación F
- 1 reacción normal y 1 momento en el par deslizante entre 8 y el elemento fijo
- 1 fuerza de reacción en el contacto entre los dientes de engranaje (su dirección es conocida a partir del ángulo de presión)
- 1 fuerza $F_H$ opuesta por el fluido.

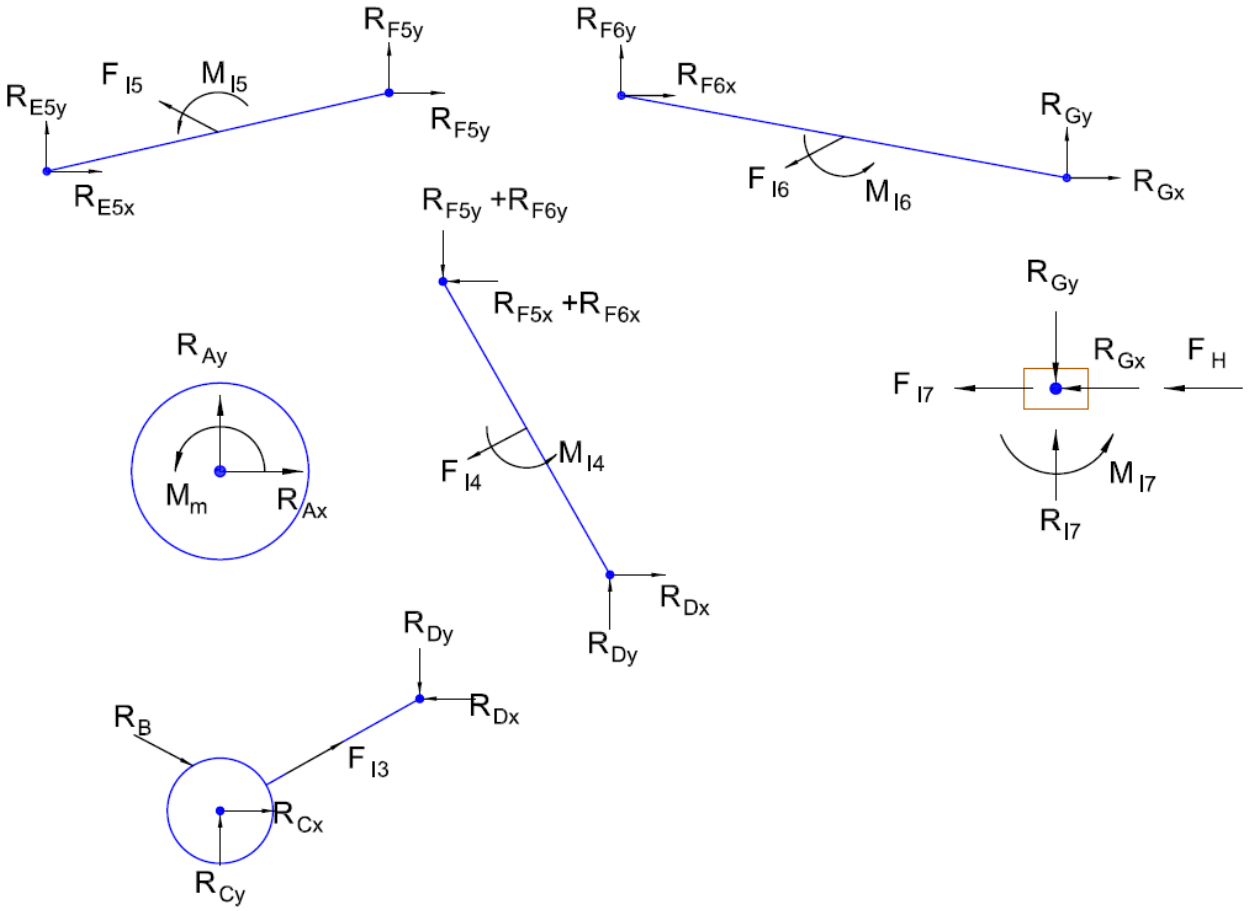



Figura 3.18

### 3.5.4 Análisis cinetoestático por trabajos o potencias virtuales

El análisis cinetoestático puede realizarse también por el método de los trabajos virtuales o el de las potencias virtuales, dado que la aplicación del principio de d'Alembert convierte el problema dinámico en estático, como ya se ha visto. Especialmente interesante en este caso es el método de las potencias virtuales, dado que al tener que realizar el análisis cinemático como paso previo para el cálculo de las fuerzas de inercia, las velocidades lineales y angulares del mecanismo son conocidas, con lo que resulta muy sencillo plantear la ecuación de potencias virtuales.

En el caso del ejemplo anterior la ecuación de potencias virtuales queda:

$$\begin{aligned}&\vec{F}_H \cdot \vec{v} + \vec{F}_{17} \cdot \vec{v}_7 + F_{16} \cdot \vec{v}_{G6} + M_{16} \cdot \vec{\omega}_6 + \vec{F}_{15} \cdot \vec{v}_{G5} \\ &+\vec{M}_{15} \cdot \vec{\omega}_5 + \vec{F}_{14} \cdot \vec{v}_{G4} + \vec{M}_{14} \cdot \vec{\omega}_4 + \vec{M}_M \cdot \vec{\omega}_2 = 0\end{aligned} \qquad \textbf{(3.54)}$$

ecuación de la que se puede despejar $M_M$ en función de la posición del mecanismo, pues tanto las velocidades como los pares y fuerzas de inercia son función de la posición y la fuerzas externa $F_H$ es conocida.

Como se observa, el método de las potencias virtuales está especialmente indicado para casos en los que se busca una relación de fuerzas entre entrada y salida, sin importar las reacciones internas, que no intervienen en la formulación.

## 3.6 Análisis dinámico directo

Como ya se comentó, el problema dinámico directo es aquél en el que se conocen las acciones externas sobre el mecanismo y se pretende determinar cuál será su movimiento a lo largo del tiempo. En ocasiones se denomina también problema de simulación dinámica, dada su aplicación para la predicción del movimiento del mecanismo. Del mismo se obtendrán las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema, ecuaciones que, integradas a partir de unas condiciones iniciales, permiten

determinar las posiciones, velocidades, aceleraciones y fuerzas del mecanismo en función del tiempo.

A continuación estudiaremos tres procedimientos para el análisis dinámico directo, cada uno basado en diferentes ecuaciones físicas: las leyes de Newton, la ecuación de Eksergian, y las ecuaciones de Lagrange. El método basado en la ecuación de Eksergian sólo es válido para sistemas de 1 grado de libertad, mientras que los otros dos son válidos para cualquier número de grados de libertad. El primero se basa en la mecánica vectorial, el segundo en el principio de la conservación de la energía y el de las ecuaciones de Lagrange en la mecánica analítica. Puesto que para los dos últimos métodos hay que calcular la energía cinética del mecanismo, antes de entrar en los mismos repasaremos la expresión de la energía cinética de un sistema mecánico.

## 3.6.1 Análisis dinámico directo por métodos vectoriales

El problema dinámico directo se puede plantear de forma semejante al dinámico inverso si se utilizan las leyes de Newton. El proceso consiste en plantear las ecuaciones de equilibrio dinámico para cada eslabón móvil del mecanismo, con lo que tenemos 3(n-1) ecuaciones del tipo:

$$\sum_k F_{kx} = ma_{Gix} \qquad \textbf{(3.55)}$$

$$\sum_k F_{ky} = ma_{Giy} \qquad i = 1,n\text{-}1 \qquad \textbf{(3.56)}$$

$$\sum_k M_{Gk} = I_G \alpha_i \qquad \textbf{(3.57)}$$

en las que las fuerzas y momentos del lado izquierdo son tanto fuerzas externas conocidas en función del tiempo o la posición, como reacciones en los pares cinemáticos, desconocidas. Por su parte las aceleraciones del centro de masas de cada eslabón y la aceleración angular serán funciones de las coordenadas, velocidades y aceleraciones generalizadas, que a su vez son funciones del tiempo desconocidas.

Las incógnitas del problema son:

$2j_1$ Reacciones en los pares inferiores

$j_2$ Reacciones en los pares superiores

m El valor de las coordenadas generalizadas en función del tiempo $q_1(t)$, $q_2(t)$,..., $q_m(t)$

que coinciden en número con las ecuaciones, de acuerdo con la ecuación de Grübler.

La resolución analítica del problema por este método se efectúa realizando sustituciones en las ecuaciones (55) a (57) hasta eliminar las reacciones internas incógnitas y llegar a un sistema de m ecuaciones diferenciales en función de las posiciones, velocidades y aceleraciones incógnita. Una vez integradas numéricamente estas ecuaciones diferenciales a partir de unas condiciones iniciales, proporcionan las funciones $q_i(t)$ y sus derivadas.

Sustituidas en las ecuaciones originales permiten obtener las diferentes reacciones internas en cada instante. En mecanismos con cierta complejidad este procedimiento puede resultar prácticamente inabordable.

## 3.6.2 Energía cinética de un mecanismo

La energía cinética de un sólido rígido i se puede expresar como:

$$T_i = \frac{1}{2} m v_{Gi}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_i^T [I_G] \vec{\omega}_i \qquad \textbf{(3.58)}$$

donde m es la masa del sólido, $[I_G]$ su matriz de inercia, $\vec{\omega}$ su vector velocidad angular y $v_G$ la velocidad del centro de masas.

La energía cinética de un mecanismo formado por varios eslabones rígidos y en movimiento plano será:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{Gi}^2 + \sum_i \frac{1}{2} I_{Gi} \omega_i^2 \qquad \textbf{(3.59)}$$

donde el subíndice *i* se extiende a todos los eslabones del mecanismo.

Esta ecuación puede escribirse también en forma matricial:

$$T = \frac{1}{2}\vec{v}_G^{\,T}[M]\vec{v}_G + \frac{1}{2}\vec{\omega}^{T}[I_G]\vec{\omega} \qquad \textbf{(3.60)}$$

donde las matrices [M] y [$I_G$] son diagonales y los vectores de las velocidades angulares y lineales incluyen por filas los valores correspondientes a cada uno de los eslabones.

Las velocidades $v_G$ y $\omega$ de cada eslabón son funciones de las velocidades generalizadas a través de los coeficientes de velocidad y dependen de la posición del mecanismo, es decir del valor de las coordenadas generalizadas. Si se han definido coordenadas generalizadas, $q_1$, $q_2$, …, $q_m$ en general será posible escribir para cada eslabón expresiones del tipo:

$$v_G = k_{v1}\cdot\dot{q}_1 + k_{v2}\cdot\dot{q}_2 + .... + k_{vm}\cdot\dot{q}_m \qquad \textbf{(3.61)}$$

$$\omega = k_{\omega 1}\cdot\dot{q}_1 + k_{\omega 2}\cdot\dot{q}_2 + .... + k_{\omega m}\cdot\dot{q}_m \qquad \textbf{(3.62)}$$

donde las constantes $k_v$ y $k_\omega$ son los coeficientes de velocidad que en general serán funciones dependientes del valor de las coordenadas generalizadas $q_1$, $q_2$, …, $q_m$. Las expresiones anteriores se pueden escribir en forma matricial:

$$v_G = \vec{k}_v^{\,T}\,\vec{\dot{q}} \qquad \textbf{(3.63)}$$

$$\omega = \vec{k}_\omega^{\,T}\,\vec{\dot{q}} \qquad \textbf{(3.64)}$$

y por tanto para todos los eslabones:

$$v_G = [K_V]\cdot\vec{\dot{q}} \qquad \textbf{(3.65)}$$

$$\vec{\omega} = [K_\omega]\cdot\vec{\dot{q}} \qquad \textbf{(3.66)}$$

Sustituyendo las expresiones (65), y (66) en (60) se tiene:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}\left[K_V\right]^T\left[M\right]\left[K_V\right]\dot{\vec{q}} + \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^T\left[K_\omega\right]^T\left[I_G\right]\left[K_\omega\right]\dot{\vec{q}} \qquad \textbf{(3.67)}$$

donde las diferentes matrices engloban por filas a cada uno de los eslabones del mecanismo y las matrices $[K_v]$ y $[K_\omega]$ dependen, como ya se ha dicho, de las coordenadas generalizadas.

## 3.6.3 Análisis dinámico directo mediante la ecuación de Eksergian.

Supongamos un mecanismo con un solo grado de libertad. En este caso el vector $\dot{\vec{q}}$ de la ecuación (66) se reduce a un escalar que corresponde a la velocidad generalizada (normalmente la del eslabón de entrada) y las matrices $[K_v]$ y $[K_\omega]$ se reducen a vectores, con lo que la ecuación queda:

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^2(\vec{K}_v^T\left[M\right]\vec{K}_v + \vec{K}_\omega^T\left[I_G\right]\vec{K}_\omega) = \frac{1}{2}\dot{q}^2\Im(q) \qquad \textbf{(3.68)}$$

donde $\Im(q)$ se llama inercia generalizada y es un escalar, representando la inercia que debería tener el eslabón de entrada para que su energía cinética fuera la misma que la del mecanismo completo. Esta inercia puede tener unidades de masa, en el caso de que el eslabón de entrada realice una traslación y por tanto $\dot{\vec{q}}$ sea una velocidad lineal, o bien unidades de momento de inercia si el eslabón de entrada es giratorio y $\dot{\vec{q}}$ es una velocidad angular.

Supongamos también, que sobre el mecanismo de 1 grado de libertad, actúan una serie de fuerzas externas $F_i$ y momentos $M_j$. El trabajo que dichas fuerzas y momentos ejercen sobre el mecanismo en un desplazamiento diferencial del mismo es:

$$dW = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \sum_j \vec{M}_j \cdot d\vec{\theta}_j \qquad \textbf{(3.69)}$$

siendo $dr_i$ el desplazamiento diferencial del punto de aplicación de $F_i$ y $d\theta_j$ el ángulo

girado por el punto de aplicación del momento $M_j$. Dividiendo por el tiempo empleado, la potencia P introducida al mecanismo es:

$$P = \frac{dW}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_j \vec{M}_j \cdot \vec{\omega}_j \qquad \textbf{(3.70)}$$

o en coordenadas generalizadas, expresando v y ω de cada punto en función de la velocidad generalizada $\vec{\dot{q}}$:

$$P = Q \cdot \dot{q} \qquad \textbf{(3.71)}$$

siendo Q la fuerza generalizada.

De acuerdo con los principios energéticos de la mecánica, el trabajo realizado sobre el sistema se invierte en variar su energía (cinética o potencial), por lo que tendremos:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(T + V) \qquad \textbf{(3.72)}$$

Teniendo en cuenta (68) y (71):

$$Q^{nc} \cdot \dot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 \frac{d\Im(q)}{dq}\dot{q} + \Im(q)\dot{q} \cdot \ddot{q} + \frac{dV}{dq}\dot{q} \qquad \textbf{(3.73)}$$

donde a la fuerza generalizada se le ha incluído el superíndice nc para indicar que sólo las fuerzas externas no conservativas deben se consideradas en la misma, pues las conservativas están consideradas a través de la energía potencial del sistema, V. Simplificando la ecuación anterior se llega a la ecuación de Eksergian, válida para sistemas de un grado de libertad:

$$\Im(q) \cdot \ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{d\Im(q)}{dq}\dot{q}^2 + \frac{dV}{dq} = Q^{nc} \qquad \textbf{(3.74)}$$

Como se observa, se trata de una ecuación diferencial de segundo orden en *q* que describe el movimiento del sistema. Una vez integrada por un método numérico apropiado a partir de unas condiciones iniciales, proporciona los valores de q, $\vec{\dot{q}}$ y $\ddot{q}$

para cada instante, a partir de los cuales se conocen las características cinemáticas de cualquier punto del mecanismo y por tanto pueden calcularse las reacciones por un análisis de dinámica inversa.

Si sobre un mecanismo sólo actúan fuerzas externas conservativas, el segundo término de (74) es nulo. Se puede llegar en este caso a la ecuación diferencial del movimiento simplemente escribiendo las energías cinética y potencial en función de q y $\vec{\dot{q}}$ y sustituyendo en (72) donde P=0 con lo que el resultado sería el mismo que por aplicación de la ecuación de Eksergian.

La ventaja del método de Eksergian frente al de las ecuaciones de Newton es que se llega directamente a la ecuación diferencial del movimiento sin necesidad de realizar sustituciones entre ecuaciones.

**Ejemplo: Mecanismo biela-manivela (figura 3.19)**

Como ejemplo supongamos el mecanismo biela-manivela de figura 3.19, sobre el que actúa el par M(q) y las fuerzas del peso y del muelle de constante k y el amortiguador viscoso, de coeficiente de amortiguamiento *c*. Las masas de los tres eslabones móviles son iguales y valen m. La manivela y la biela pueden considerarse barras delgadas con su centro de masas en el centro geométrico. El muelle tiene su longitud indeformada para *q=0*.

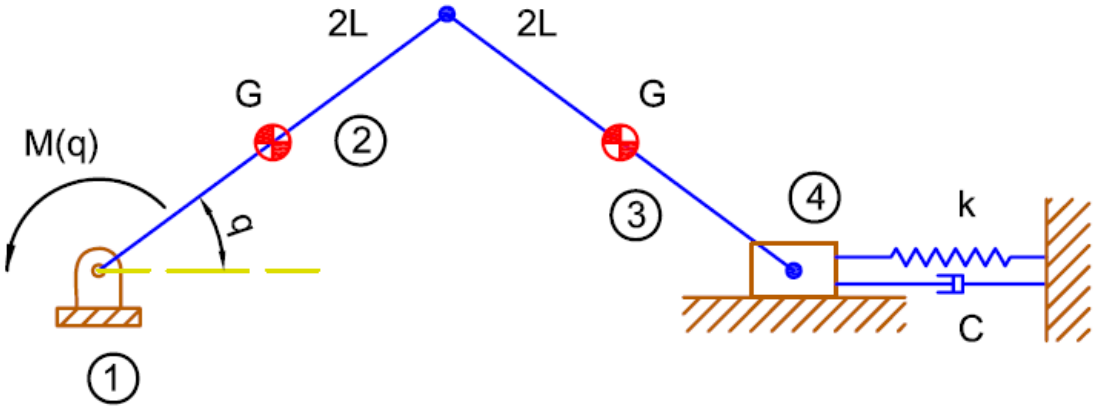



Figura 3.19

La energía cinética del mecanismo será:

$$T = T_2 + T_3 + T_4 = \frac{1}{2}(m_2 v_{G2}^2 + I_{G2}\omega_2^2 + m_3 v_{G3}^2 + I_{G3}\omega_3^2 + m_4 v_{G4}^2) \qquad \textbf{(3.75)}$$

Expresando todas las velocidades en función del ángulo y velocidad de la manivela:

$$v_{G2} = L\dot{q} \qquad \textbf{(3.76)}$$

$$v_{G3} = L\sqrt{1+8\text{sen}^2 q}\cdot\dot{q} \qquad \textbf{(3.77)}$$

$$\omega_3 = -\dot{q} \qquad \textbf{(3.78)}$$

$$v_{G4} = -(4L \text{ sen } q)\cdot\dot{q} \qquad \textbf{(3.79)}$$

Sustituyendo en (75) y teniendo en cuenta (68) se obtiene la inercia generalizada:

$$\Im(q) = m_2 L^2 + I_{G2} + m_3 L^2(1+8 \text{ sen}^2 q) + I_{G3} + m_4 16L^2 \text{ sen}^2 q = mL^2(\frac{8}{3} + 24 \text{ sen}^2 q) \qquad \textbf{(3.80)}$$

La derivada de la inercia generalizada respecto de *q* será:

$$\frac{d\Im(q)}{dq} = 24mL^2 \text{sen} 2q \qquad \textbf{(3.81)}$$

La energía potencial del mecanismo es:

$$V = (m_2 + m_3)gL \text{ sen } q + \frac{1}{2}k(4L - 4L\cos q)^2 \qquad \textbf{(3.82)}$$

y por tanto:

$$\frac{dV}{dq} = 2mgL\cos q + k(4L(1-\cos q))4L \text{ sen } q \qquad \textbf{(3.83)}$$

En cuanto a la fuerza generalizada, será debida al par motor M(q) y a la fuerza en el amortiguador, que es proporcional a la velocidad. La potencia realizada por ambas acciones es:

$$P = M(q)\cdot \dot{q} - c\cdot v_{G4}\cdot v_{G4} = (M(q) - c\cdot(4L\ \text{sen}\ q)^2\dot{q})\cdot \dot{q} \qquad \textbf{(3.84)}$$

de donde la fuerza generalizada será:

$$Q^{nc} = M(q) - c\dot{q}(4L\ \text{sen}\ q)^2 \qquad \textbf{(3.85)}$$

Sustituyendo los diferentes términos en la ecuación de Eksergian (73) se llega a la ecuación diferencial:

$$\left(mL^2\left(\frac{8}{3} + 24\ \text{sen}^2 q\right)\right)\ddot{q} + (12mL^2\ \text{sen}\ 2q)\dot{q}^2 + (c(4L\ \text{sen}\ q)^2)\dot{q} + 2mgL\cos q + 16kL^2(1-\cos q)\ \text{sen}\ q - M(q) = 0 \qquad \textbf{(3.86)}$$

## 3.6.4 Análisis dinámico directo mediante las ecuaciones de Lagrange

El método de Eksergian sólo es válido para sistemas de un grado de libertad y en los que debe ser posible expresar la energía cinética en función de la inercia generalizada como en la ecuación (68). Para sistemas de más de un grado de libertad hay que recurrir a otros métodos, como el de Lagrange, que estudiamos a continuación. Las ecuaciones de Lagrange son también aplicables a sistemas de un grado de libertad, aunque en ellos resulta algo más sencilla la utilización de la ecuación de Eksergian. No demostraremos aquí las ecuaciones de Lagrange, puesto que no es nuestro cometido, sino que sólo analizaremos sus aplicaciones.

La resolución del problema de dinámica directa mediante las ecuaciones de Lagrange, se realiza seleccionando un conjunto de *m* coordenadas generalizadas y expresando las energías cinética y potencial y las fuerzas generalizadas en función de las mismas. Posteriormente se sustituyen dichas expresiones en las ecuaciones de Lagrange obteniéndose directamente las ecuaciones diferenciales del movimiento.

La forma general de las ecuaciones de Lagrange para un sistema con m coordenadas generalizadas es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad j=1,...,m \qquad \textbf{(3.87)}$$

donde T es la energía cinética, definida por la ecuación (67) y Q las fuerzas generalizadas. Si separamos estas últimas en los términos conservativo y no conservativo y tenemos en cuenta la expresión de las fuerzas conservativas como función del potencial:

$$Q_j=Q_j^c+Q_j^{nc}=-\frac{\partial V}{\partial q_j}+Q_j^{nc} \qquad \textbf{(3.88)}$$

y sustituyendo en (87):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial q_j}=Q_j^{nc} \qquad j=1,...,m \qquad \textbf{(3.89)}$$

O, empleando la función lagrangiana, L definida como diferencia entre las energías cinética y potencial:

$$L=T-V=T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)-V(\vec{q},t) \qquad \textbf{(3.90)}$$

queda:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q_j^{nc} \qquad j=1,...,m \qquad \textbf{(3.91)}$$

Cualquiera de las expresiones (87), (89) y (91) representa una formulación válida de las ecuaciones de Lagrange.

### Ejemplo: Mecanismo de regulación centrífuga (figura 3.20)

Como ejemplo vamos a estudiar la dinámica del mecanismo de regulación centrífuga de la figura 3, en el que la masa M se desplaza radialmente sobre el radio de la rueda y está sometida a la fuerza del muelle, de constante K.

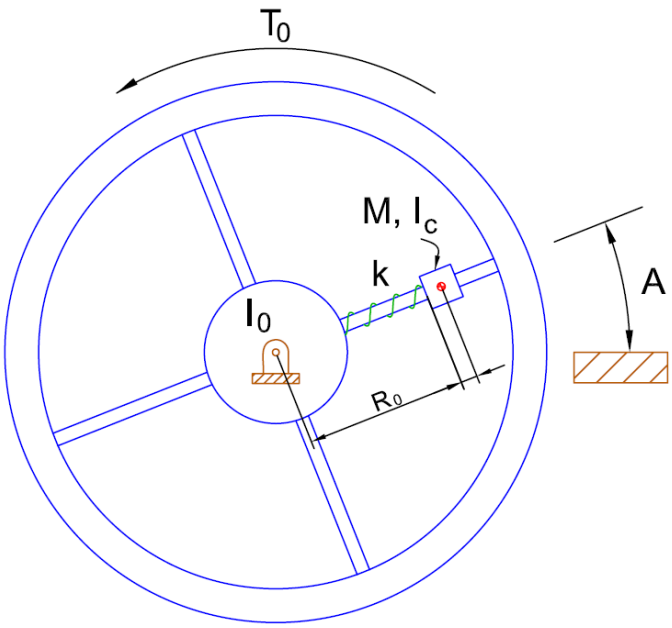



Figura 3.20

Consideraremos como coordenadas generalizadas el ángulo A y el desplazamiento X.

La velocidad de la masa M en coordenadas polares será:

$$X \cdot \vec{u}_r + (R_O + X)A \cdot \vec{u}_\theta \qquad \textbf{(3.92)}$$

La energía cinética del sistema será:

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{A}^2 + \frac{1}{2} M\left[\dot{X}^2 + (R_0 + X)^2 \dot{A}^2\right] + \frac{1}{2} I_c \dot{A}^2 = \frac{1}{2} \dot{A}^2 \left[I_0 + I_c + M(R_0 + X)^2\right] + \frac{1}{2} M \dot{X}^2 \qquad \textbf{(3.93)}$$

La energía potencial, debida a la acción gravitatoria y al muelle será:

$$V = Mg(R_0 + X) \text{ sen } A + \frac{1}{2} KX^2 \qquad \textbf{(3.94)}$$

Para definir las fuerzas generalizadas no conservativas, tengamos en cuenta la potencia introducida al sistema:

$$P = T_0 \dot{A} \qquad \textbf{(3.95)}$$

y por tanto la única fuerza generalizada es la asociada a la coordenada A y vale $T_0$.

$$Q_A = T_0 \tag{3.96}$$

Del cálculo de las derivadas necesarias para la ecuación de Lagrange se obtiene:

Respecto de la variable generalizada A:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{A}} = \dot{A}\left[I_0 + I_c + M(R_0 + X)^2\right] \tag{3.97}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{A}}\right) = \ddot{A}\left[I_0 + I_c + M(R_0 + X)^2\right] \tag{3.98}$$

$$\frac{\partial T}{\partial A} = 0 \tag{3.99}$$

$$\frac{\partial V}{\partial A} = Mg(R_0 + X)\cos A \tag{3.100}$$

Respecto de la variable X:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{X}} = M\dot{X} \tag{3.101}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}}\right) = M\ddot{X} \tag{3.102}$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} = M\dot{A}^2(R_0 + X) \tag{3.103}$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = KX + Mg \text{ sen } A \tag{3.104}$$

Sustituyendo en (89) se llega al sistema formado por dos ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\ddot{A}\left[I_0 + I_c + M(R_0 + X)^2\right] + 2M\dot{A}\dot{X}(R_0 + X)\cos A = T_0 \tag{3.105}$$

$$M\ddot{X} - M\dot{A}^2(R_0 + X) + KX + Mg \text{ sen } A = 0 \qquad \textbf{(3.106)}$$

Una vez establecidas las condiciones iniciales, el sistema puede ser integrado utilizando un método numérico apropiado, con lo que se obtienen las coordenadas generalizadas en función del tiempo, y también, las velocidades y aceleraciones. A partir de las aceleraciones y velocidades obtenidas se puede realizar un cálculo de dinámica inversa para conocer las fuerzas internas en el mecanismo.

# CAPÍTULO 4

# Determinación de Fuerzas en Sistemas Multicuerpo

# 4.1 Introducción

Al diseñar las piezas de un Sistema Multicuerpo o máquina en cuanto a su resistencia es necesario determinar las fuerzas y pares de torsión que actúan en los eslabones de forma individual. Cada componente de un Sistema completo, por pequeño que sea, deberá analizarse cuidadosamente con respecto a su papel en la transmisión de esfuerzos [Mab99].

Cuando varios cuerpos se conectan entre sí para formar un grupo o sistema, las fuerzas de acción presentes entre dos cualesquiera de los cuerpos se denominan fuerzas de restricción o fuerzas internas [Per06]. Dichas fuerzas obligan o restringen a los cuerpos a comportarse de un modo específico. En cambio las fuerzas externas que se aplican sobre el sistema de cuerpos se llaman fuerzas aplicadas o fuerzas externas [Erd98].

Las fuerzas eléctricas, magnéticas y gravitacionales son ejemplos de fuerzas aplicadas que pueden influir sobre el sistema sin tener un contacto físico real. Las fuerzas que nosotros vamos a tomar y a tener en cuenta, son las que ocurren a través de un contacto físico mecánico directo, tal como las fuerzas de fricción y las fuerzas externas [ShU95].

Las características que definen a una fuerza son su magnitud, dirección y su punto de aplicación [KaL85]. La dirección de una fuerza incluye el concepto de recta soporte, que es la recta a lo largo de la cual se dirige, así como su sentido. Por ello una fuerza puede estar dirigida positiva o negativamente a lo largo de una línea de acción. En ocasiones, el punto de aplicación no es importante, por ejemplo cuando se está estudiando el equilibrio de un cuerpo rígido, donde dos fuerzas iguales y opuestas que actúan a lo largo de dos rectas paralelas no coincidentes en un cuerpo, no se pueden combinar par obtener una sola fuerza resultante [Nav74].

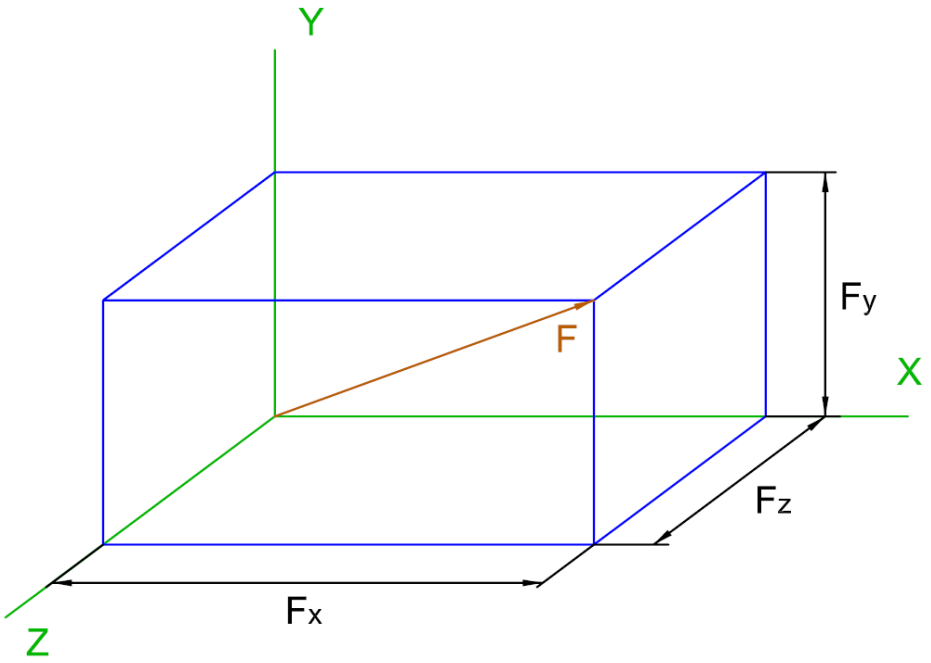



Figura 4.1 Componentes del vector fuerza

Las componentes de un vector fuerza, como el de la figura 4.1, se escribirán como sigue:

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

Dos fuerzas cualesquiera que actúen en un cuerpo, constituyen un par, en donde el brazo del par, es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las fuerzas aplicadas [Sha99]. El plano del par es aquel que contiene a ambas líneas de acción.

## 4.2 Diagrama de cuerpo libre o aislado

Un diagrama de cuerpo libre o diagrama de cuerpo aislado debe mostrar todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo (figura 4.2). Es fundamental que el diagrama de cuerpo libre esté correcto antes de aplicar la Segunda ley de Newton, ∑Fext = ma. En estos diagramas, se escoge un objeto, cuerpo o miembro del sistema mecánico y se aísla, reemplazando las barras, superficies u otros elementos por fuerzas representadas por flechas que indican sus respectivas direcciones. Por supuesto, también debe representarse la fuerza de gravedad y las fuerzas de fricción.

Si intervienen varios cuerpos, se hace un diagrama de cada uno de ellos, por separado.

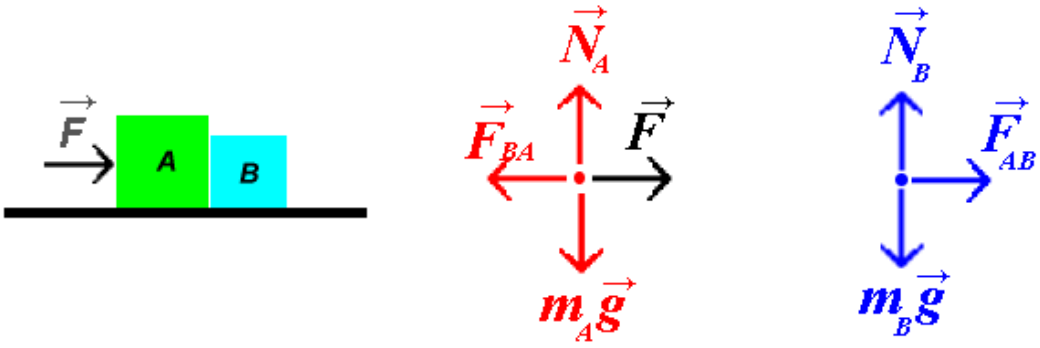



Figura 4.2 Representación de fuerzas en un diagrama de cuerpo libre o aislado.

El diagrama de cuerpo libre es una herramienta muy utilizada para el análisis de fuerzas en los Sistemas Multicuerpo [Agu96]. Es un esquema o dibujo de un cuerpo aislado de la máquina o mecanismo (en este caso será un eslabón de algún mecanismo) en el cual se representan las fuerzas y los momentos de torsión que actúan en cada pieza. Se deben incluir en el diagrama las magnitudes y las direcciones conocidas, así como cualquier otra información pertinente, tal como las fuerzas externas y/o momentos de torsión externos que actúen sobre el eslabón.

El diagrama obtenido de esta manera se conoce como “libre” ya que se ha separado la parte o porción del cuerpo del resto de los elementos de la máquina y se han reemplazados su efectos por fuerzas y momentos que actúan sobre él.

Al analizar la dinámica presente en los mecanismos, es necesario separar cada uno de sus componentes individuales para construir diagramas de cuerpo libre. Esto facilitará el análisis ya que se incluirán todas las fuerzas que actúan sobre cada eslabón, muchas de estas piezas estarán conectadas entre sí por medio de pares cinemáticos [ADG97], como se muestra en la figura 4.3, por lo tanto también se conocerán las fuerzas internas de cada eslabón.

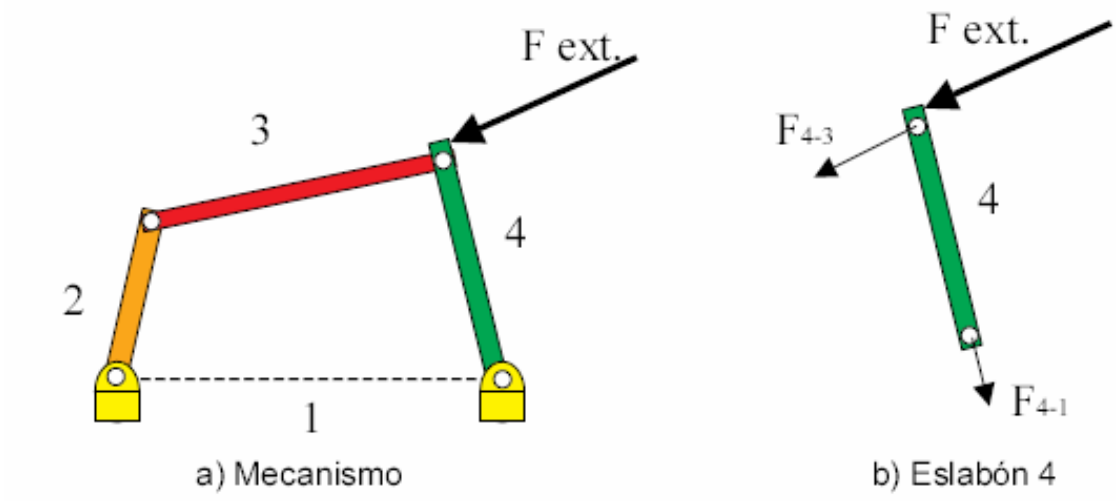



Figura 4.3 Diagrama de cuerpo libre de un mecanismo

El diagrama de cuerpo libre es una herramienta esencial para la resolución de problemas en Estática. La mejor manera de examinar el equilibrio de un cuerpo es con ayuda de un croquis adecuado que incluya el cuerpo mismo, la información geométrica importante, y todas las fuerzas que actúen sobre el cuerpo. Los diagramas de cuerpo libre son igualmente esenciales en los problemas de Dinámica. Como ellos incluyen el movimiento de uno o más cuerpos, los problemas de dinámica son necesariamente más complejos que los problemas de estática. Por consiguiente la resolución exacta y eficiente de problemas depende mucho de la elaboración de diagramas exactos de cuerpos libres [Ang78].

Un diagrama de cuerpo libre para un problema de dinámica tiene las mismas características básicas que uno para un problema de estática, con la adición de un ingrediente clave: en dinámica, es importante identificar la dirección y sentido del movimiento (ya sea conocido o supuesto) en el diagrama. El movimiento incluye desplazamiento, velocidad y aceleración, esta última incluida en la ecuación del movimiento para el cuerpo.

Cuando un problema contiene más de un diagrama de cuerpo libre, la dirección y el sentido del movimiento debe ser cinemáticamente consistente de un diagrama al siguiente. Es decir, si dos cuerpos están restringidos a moverse de cierta manera

como resultado de las restricciones cinemáticas, la dirección y sentido positivo del movimiento de cada cuerpo debe satisfacer las restricciones cinemáticas.

Para dibujar un diagrama de cuerpo libre en dinámica se siguen los pasos siguientes:

a) Dibujar un croquis exacto del sistema mecánico o estructura descrito en el problema mostrando todas las dimensiones importantes, incluyendo ángulos.

b) Seleccionar el cuerpo de interés. En el caso en que deban considerarse varios cuerpos, las ecuaciones de movimiento son aplicadas a cada cuerpo individualmente. Puede ser conveniente considerar los cuerpos en una secuencia que le permita evaluar una o más de una incógnitas inmediatamente, en vez de establecer el conjunto completo de ecuaciones para todos los cuerpos y resolver todas las ecuaciones simultáneamente.

c) Seleccionar ejes de referencia apropiados y dibujar el croquis del cuerpo. Seleccionar ejes de referencia que correspondan a orientaciones claves del cuerpo o su movimiento. Agregar al croquis las fuerzas conocidas y desconocidas que actúan sobre el cuerpo.

d) Marcar las fuerzas conocidas con sus magnitudes y sentidos correctos. Marque cada fuerza desconocida con un símbolo vectorial, como por ejemplo $\vec{F}$. Mostrar todas las fuerzas (magnitudes y direcciones), que actúan sobre el elemento. No se incluyen las fuerzas que el eslabón pueda ejercer sobre otros cuerpos, ya que la aceleración de la partícula está determinada por las fuerzas que actúan sobre ella, no por las fuerzas que ejerce sobre otros cuerpos. Normalmente una de las fuerzas es el peso del eslabón.

e) Hay que marcar la dirección y el sentido de movimiento del cuerpo. Es conveniente escoger el sentido positivo del movimiento correspondiente a uno de los ejes de referencia. Para satisfacer las relaciones cinemáticas, los sentidos positivos del desplazamiento, velocidad y aceleración deben ser los mismos.

f) Si hay dos o más cuerpos de interés, se utiliza la tercera ley de Newton para relacionar las fuerzas que ellos ejercen entre sí. Además se usan las restricciones cinemáticas para relacionar las direcciones y sentidos positivos del movimiento de los cuerpos.

g) Para sistemas de cuerpos múltiples asegurarse de que los diagramas son cinemáticamente consistentes.

Las ventajas que se obtienen al utilizar los diagramas de cuerpo libre, las podemos resumir de la siguiente manera [Mar01]:

1. Facilitan la tarea de interpretación de las palabras, pensamientos e ideas a modelos físicos que son más fáciles de comprender.
2. Contribuyen para que se vean con más claridad y se comprendan todas las fuerzas que actúan sobre cada parte del mecanismo por analizar.
3. Se muestra un panorama más amplio de cómo se debe plantear el problema según los datos que se tienen y que son representados en el diagrama.
4. Permiten establecer las relaciones matemáticas de una forma más rápida ya que se conocen todos los factores que se presentan en el eslabón.
5. Su aplicación facilita el control del avance y ayudan a establecer suposiciones que simplifican el problema.
6. Queda como respaldo y forman parte de la memoria de cálculo, con lo cual se facilita la explicación y presentación del problema, así como las consultas posteriores.

## 4.3 Métodos de estudio

Las cargas se transmiten hacia los diferentes elementos de las máquinas a través de las superficies de contacto; por ejemplo, de un engranaje hacia un eje, o de un

engranaje, a través del dentado superficial, hacia otro engranaje; de una biela, a través de un cojinete, hacia una palanca, manivela o cigüeñal; de una correa de transmisión en V hacia una polea; de una leva hacia un seguidor, o de un tambor de freno hacia la zapata del freno, por lo que es muy común que en estos elementos se presente alguna fractura o se produzcan fallos en el funcionamiento de la máquina [Mer93]. Por lo tanto es necesario conocer las magnitudes de dichos esfuerzos y por ende las fuerzas que los provocan.

Las fuerzas deben estar distribuidas entre las mismas fronteras o superficies de contacto, y su intensidad debe de estar dentro de los límites de trabajo de los distintos materiales que componen las superficies para que estas no lleguen a sufrir daño alguno [Mab99].

Para determinar los esfuerzos que generan las fuerzas entre los diferentes elementos de un mecanismo se tienen los siguientes métodos:

| | **Método** | | |
|---|---|---|---|
| Información de entrada | Estático(ventaja mecánica) | Cinetoestático | Dinámico(respuesta en el tiempo) |
| Masa | No necesaria | Conocida | Conocida |
| Carga | Especificada como la razón entrada-salida | Especificación en cada posición | Especificada en términos de posición, velocidad y/o tiempo |
| Movimiento | Posiciones especificadas | Posición, velocidad y aceleración especificadas | Desconocido |
| Información de salida (buscada) | Fuerza de entrada requerida para equilibrar la carga. Ventaja mecánica en cada posición. Reacciones en los pasadores | Fuerza de entrada requerida para mantener el movimiento supuesto. Reacciones en las juntas | Posición, velocidad y aceleración de cada miembro como función del tiempo: es decir, el movimiento real para un tiempo determinado. |
| Herramientas analíticas requeridas | Estática, álgebra lineal | Principio de D'Alembert, estática, álgebra lineal | Ecuaciones del movimiento |

Tabla 4.1

## 4.4 Análisis de esfuerzos dinámicos

A partir de las leyes de Newton, las cuales describen la relación entre el movimiento de una partícula y las fuerzas que actúan sobre ellas, se puede describir el movimiento plano de un cuerpo rígido (figura 4.4). Se representa el eslabón k y se expresan las cantidades vectoriales en forma compleja en un instante determinado. El eslabón k tiene una velocidad angular $\omega_k$ y una aceleración angular $\alpha_k$ conocidas. El centro de masa está situado en CG y tiene una aceleración $a_{CG}$; si una partícula cualquiera $P_i$ del eslabón obedece las leyes de Newton, la aceleración de $P_i$ puede calcularse por el procedimiento de diferencias de aceleración [HPP02] :

$$a_{Pi} = a_{CG} + a_{(Pi)CG} \tag{4.1}$$

Al expresar $a_{CG}$ y $a_{(Pi)CG}$ según sus componentes de aceleración:

$$a_{Pi}^{n} + a_{Pi}^{t} = a_{CG} + a_{(Pi)CG}^{n} + a_{(Pi)CG}^{t} \tag{4.2}$$

donde:

$$a_{(Pi)CG}^{n} = -r_i \, \omega_k^{2} \tag{4.3}$$

$$a_{(Pi)}^{t} = -r_i \ \alpha_k \, e^{j\pi/2} \tag{4.4}$$

en el cual es perpendicular a la componente normal con el sentido de $\alpha_k$.

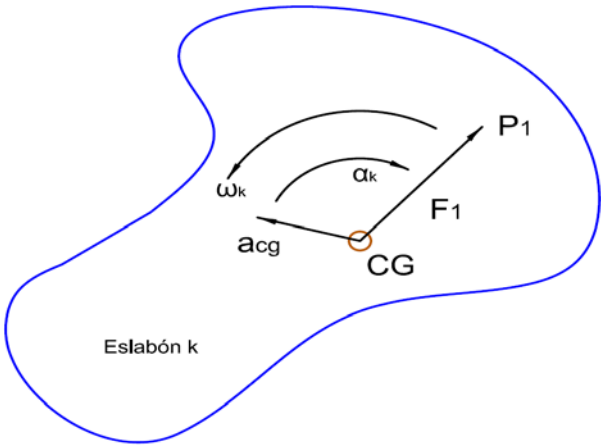



Figura 4.4 Eslabón con movimiento plano general

Aplicando la segunda ley de Newton a la partícula $P_i$ para determinar la fuerza aplicada a la partícula $P_i$ en un eslabón plano:

$$\frac{dMP_i}{dt} = m_i \frac{dVP_i}{dt} = m_i ap_i = m_i a_{CG} - m_i r_i \omega_k^2 + m_i r_i \alpha_k e^{j\pi/2} F_i \qquad \textbf{(4.5)}$$

donde $m_i$ es la masa de la partícula y M es el momento de torsión expresado en forma vectorial compleja, así como también la velocidad (V), la aceleración del CG ($a_{CG}$), y la distancia (r).

De tal manera la fuerza resultante aplicada sobre el eslabón k puede encontrarse sumando las contribuciones de todas las partículas $P_i$:

$$F = \sum_i F_i = \sum_i m_i a_{CG} - \sum_i m_i r_i \omega_k^2 + \sum_i m_i r_i \alpha_k e^{j\pi/2} \qquad \textbf{(4.6)}$$

$$F = \sum_i F_i = a_{CG} \sum_i m_i - \omega_k^2 \sum_i m_i r_i + \alpha_k e^{j\pi/2} \sum_i m_i r_i \qquad \textbf{(4.7)}$$

La ecuación 4.7 se deduce a partir de la ecuación 4.6 con base:

1. Los términos $a_{CG,}$ $\omega_k^2$ y $a_k$ constantes para un instante y cuerpo determinados, por lo que salen de la sumatoria.
2. El signo que menos aparece en los términos $\omega_k^2$ está presente ya que la fuerza está dirigida desde cada partícula hacia el centro de masa CG, mientras que la distancia $r_i$ señala del CG con dirección al punto $P_{i.}$

La ecuación 4.7 se puede simplificar ya que:

$\sum_i m_i = m$, que es la masa total del eslabón k

$\sum_i m_i r_i = 0$, ya que CG es el centro de gravedad

de tal manera que la ecuación 4.7 se puede expresar como:

$$F = m\, a_{CG} \qquad \textbf{(4.8)}$$

Cuando se suman respecto al centro de gravedad (CG) de todos los puntos Pi, los términos mínimos normales desaparecen y el momento resultante es:

$$T = \sum_i m_i\, r_i\, \alpha_k\, r_i = \alpha_k \sum_i m_i r_i^2 \qquad \textbf{(4.9)}$$

La suma en el lado derecho de la ecuación anterior es el momento de inercia de masa respecto al centro de la gravedad ($I_g$), por lo que la ecuación 4.9 puede expresar como:

$$T = I_g\, \alpha_k \qquad \textbf{(4.10)}$$

Tratándose entonces el eslabón rígido de la figura 4.4 como un conglomerado de partículas que conducirán a la ecuación 4.7, la cual se puede simplificar a una fuerza $F = m\, a_{CG}$ que pase por el centro de gravedad en la dirección de la aceleración y a un par $T = I_g\, a_k$ en el sentido de la aceleración angular.

La ecuación 4.8 tiene dos componentes ya que el movimiento es en un plano. Considerando las fuerzas y momentos de torsión involucrados se generarán tres ecuaciones independientes de equilibrio dinámico para cualquier eslabón K:

$$\sum F_x = m a_{CGx} \qquad \textbf{(4.11)}$$

$$\sum F_y = m a_{CGy} \qquad \textbf{(4.12)}$$

$$\sum T = I_g\, \alpha_k \qquad \textbf{4.13)}$$

En donde la suma de fuerzas en dirección x en la ecuación 4.11 y la suma de fuerzas en la dirección y en la ecuación 4.12 son paralelas a los ejes de cualquier sistema fijo (x, y) convenientemente orientado.

## 4.5 Análisis de fuerzas en Sistemas Multicuerpo

Para poder realizar el análisis de fuerzas en un Sistema Multicuerpo completo, generalmente se debe hacer un diagrama de cuerpo libre de cada eslabón que compone el sistema [San02] y [Col03], para indicar las fuerzas que están actuando sobre él. Para determinar las direcciones, sentidos y magnitudes de estas fuerzas, se deben recordar las siguientes leyes de la estática:

1. Un cuerpo rígido sobre el que actúan dos fuerzas está en equililibrio estático sólo si las dos fuerzas son colineales e iguales en magnitud, pero de sentido opuesto. Si sólo se conocen los puntos de aplicación de las dos fuerzas, como los puntos A y B de la figura 4.5, las direcciones de las dos fuerzas se pueden determinar a partir de la dirección de la línea que une el punto a con el B.

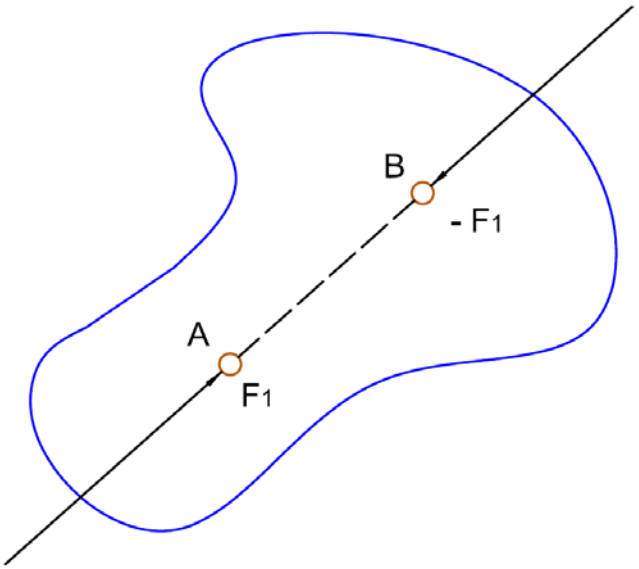



Figura 4.5 Cuerpo en equilibrio estático

2. En un cuerpo rígido sobre el que actúan tres fuerzas, éste estará en equilibrio estático, si las líneas de acción son concurrentes en algún punto y la suma de las 3 fuerzas vale cero, tal como el se observa en la figura 4.4.

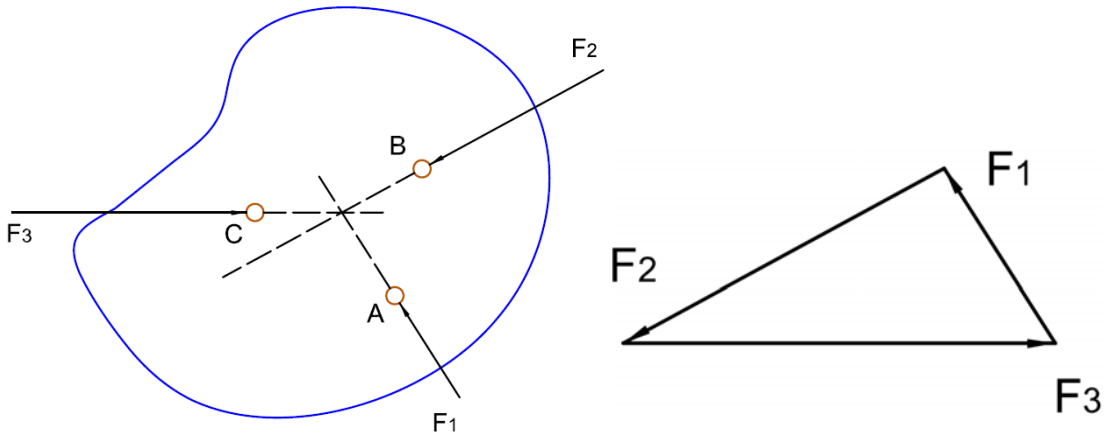
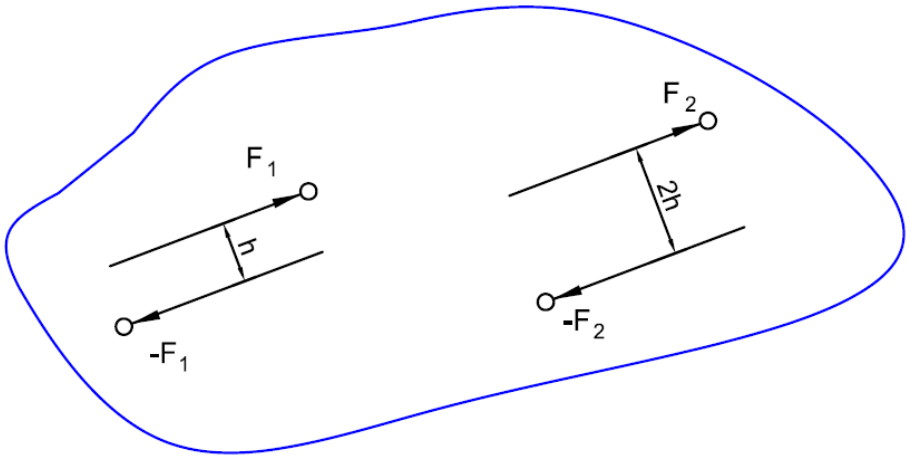



Figura 4.6 Cuerpo rígido con tres fuerzas en equilibrio estático

3. Un cuerpo rígido sobre el que actúa un par está en equilibrio estático, sólo si actúa sobre él otro par coplanar, igual en magnitud y en sentido opuesto al primero, tal como se muestra en la figura 4.7.




Donde $F_2=(1/2)F_1$

Figura 4.7 Cuerpo rígido en equilibrio estático con dos momentos de torsión

Si más de tres fuerzas actúan sobre un cuerpo en equilibrio estático o si actúan sobre él combinaciones de fuerzas y momentos de torsión, el principio de superposición puede usarse en conjunto con las tres leyes de la estática, es decir el efecto de cada fuerza o momento puede analizarse independientemente y el efecto de todas las fuerzas y momentos de torsión, será la suma vectorial de las resultantes de todos los análisis individuales.

Para el análisis estático de mecanismos compuestos de eslabones rígidos implicará el uso de diagramas de cuerpo libre, así como también, la aplicación de las leyes de la estática.

Cuando se realiza un análisis de fuerzas estáticas, la suma vectorial de las fuerzas en cada eslabón debe ser igual a cero para que permanezca en equilibrio. Lo mismo que se debe de cumplir para un análisis dinámico, cuando se emplean tanto fuerzas de inercia como fuerzas externas, las cuales se obtiene a partir de la segunda ley de Newton. Por lo tanto, es conveniente usar el concepto de fuerzas de inercia ya que tanto en los casos estáticos como en los dinámicos se pueden tratar de la misma manera. En ambos análisis las ecuaciones vectoriales obtenidas para determinar las fuerzas ejercidas sobre los eslabones del mecanismo se pueden resolver por medio de métodos analíticos o gráficos.

De entre todos los métodos que se han estudiado, se va a elegir el que se considere más apropiado para su implementación posterior, en el algoritmo de resolución dinámica de los Sistemas Multicuerpo. Para ello vamos a elegir dos de los más conocidos y a estudiar las ventajas e inconvenientes de ambos [Sim02]:

a) Método de superposición.
b) Método matricial.

## 4.6 Método de superposición.

En el método de superposición, se realiza un análisis por separado de cada eslabón móvil que compone al mecanismo, considerando las fuerzas de inercia, externas y los momentos de torsión que actúan sobre cada eslabón, por lo tanto un mecanismo que tiene n eslabones móviles requiere n análisis separados, los resultados de estos análisis se suman después para determinar las fuerzas y los momentos de torsión totales para el mecanismo.

Existen dos variantes para este método las cuales tienen un amplio uso:

1.- Cuando se hace uso de las fuerzas internas y del momento de torsión directamente, más apropiado para un desarrollo analítico.

2.- Cuando el problema se resuelve de una forma gráfica, en el cual se elimina la necesidad de considerar el momento de torsión, desplazando la fuerza de inercia a una distancia e (o excentricidad).

El principio de la superposición se puede usar en el análisis de fuerzas de un cuerpo rígido en el equilibrio estático, en el cual se establece que se puede determinar un efecto resultante a partir de la suma de varios efectos que son equivalentes al efecto total. Mediante este método, un mecanismo de eslabones articulados sobre el cual actúan varias fuerzas se puede analizar fácilmente determinando el efecto de estas fuerzas una por una, después se suman los resultados de los análisis parciales de las fuerzas únicas, para dar las fuerzas totales que actúan sobre cada junta del mecanismo.

Para comprender mejor el método de superposición se resolverá el siguiente problema: Se desea determinar las fuerzas que soporta cada eslabón así como el momento de torsión sobre la flecha de entrada del mecanismo que se muestra en la figura 4.8

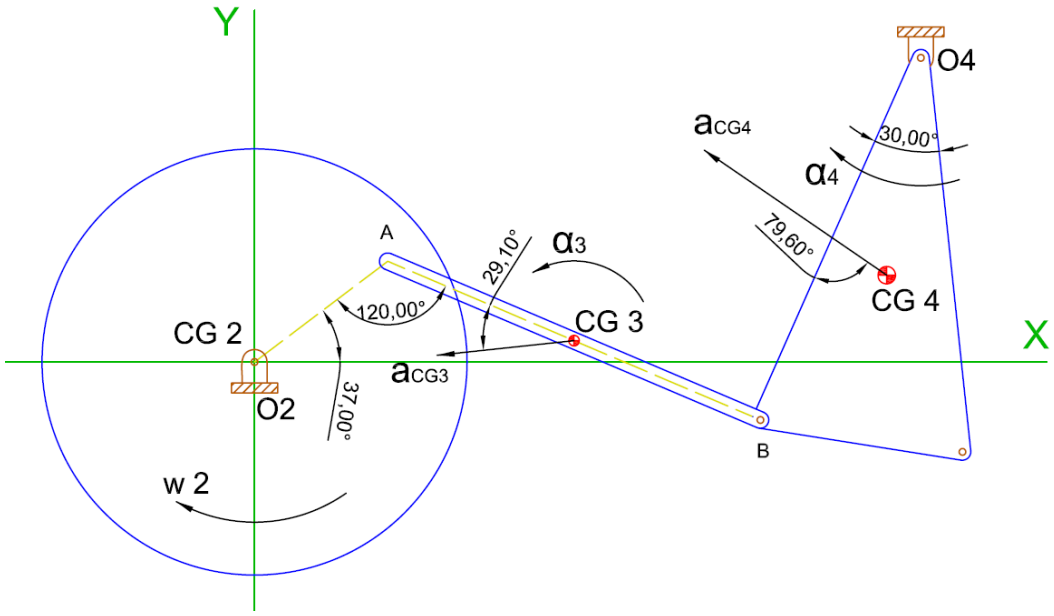



Figura 4.8 Mecanismo de cuatro eslabones

Se parte de un análisis cinemático previo, del cual se obtuvieron los siguientes datos:

$w_3 = 4.91$ rad/s (sentido contrario a las manecillas del reloj)

$w_4 = 7.82$ rad/s (sentido contrario a las manecillas del reloj)

$\alpha_3 = 241$ rad/s$^2$ (sentido contrario a las manecillas del reloj)

$\alpha_4 = -129$ rad/s$^2$ (sentido de las manecillas del reloj)

$I_3 = 0.006$ N m s$^2$

$I_4 = 0.026$ N m s$^2$

$m_3 = 4$ kg

$m_4 = 8$ kg

$a_A = 144$ m/s$^2$ < 60º

$a_B = 95.1$ m/s$^2$ < 158º

Con lo que se obtienen las aceleraciones en sus respectivos centros de gravedad para cada eslabón, así como sus direcciones:

$A_{CG3} = 91.6$ m/s$^2$

$A_{CG4} = 62.7$ m/s$^2$

Se determina la magnitud de las fuerzas internas y los momentos de torsión de la siguiente forma:

$F_{02} = 0$ ($a_{CG2} = 0$)

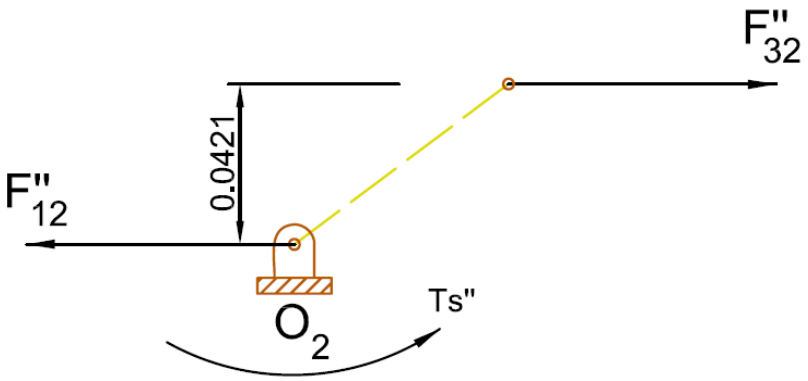
$F_{03} = m_3 a_{CG3} = 4 \times 91.6/32.2 = 11.4$N

$F_{04} = m_4 a_{CG4} = 8 \times 62.7/32.2 = 15.6$N

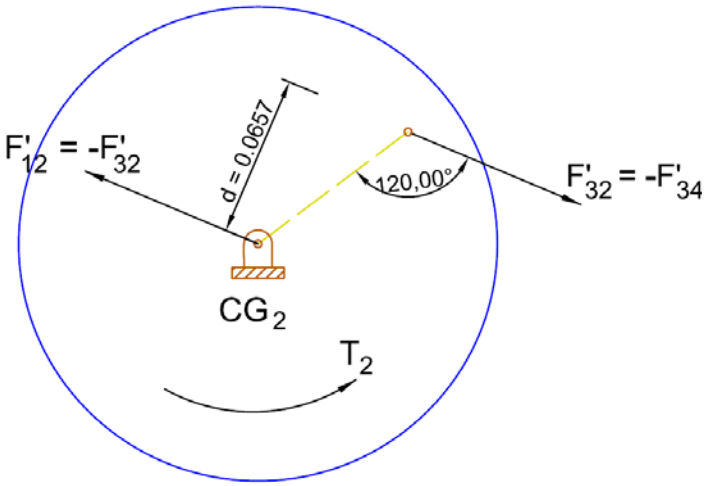
$T_{03} = -I_3 \alpha_3 = -0.026 \times 241 = -1.446$Nm

$$T_{04} = -I_4 \alpha_4 = -0.026 \times -129 = 3.351 Nm$$

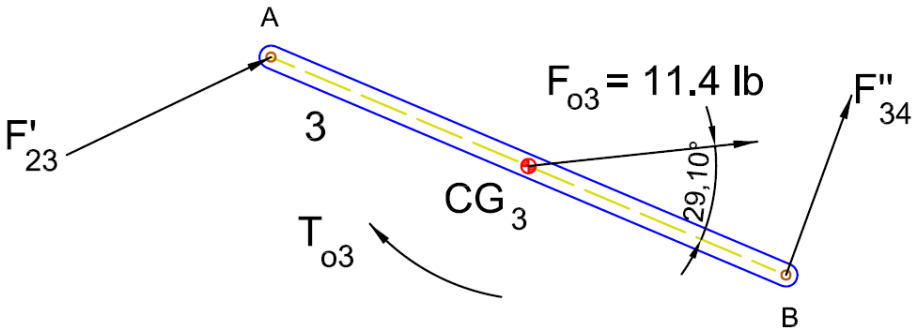
Se plantea el diagrama de cuerpo libre para todos los eslabones, lo que nos mostraría los vectores $F_{03}$, $F_{04}$, $T_{03}$, $T_{04}$, de los elementos 3 y 4 (figura 4.9):



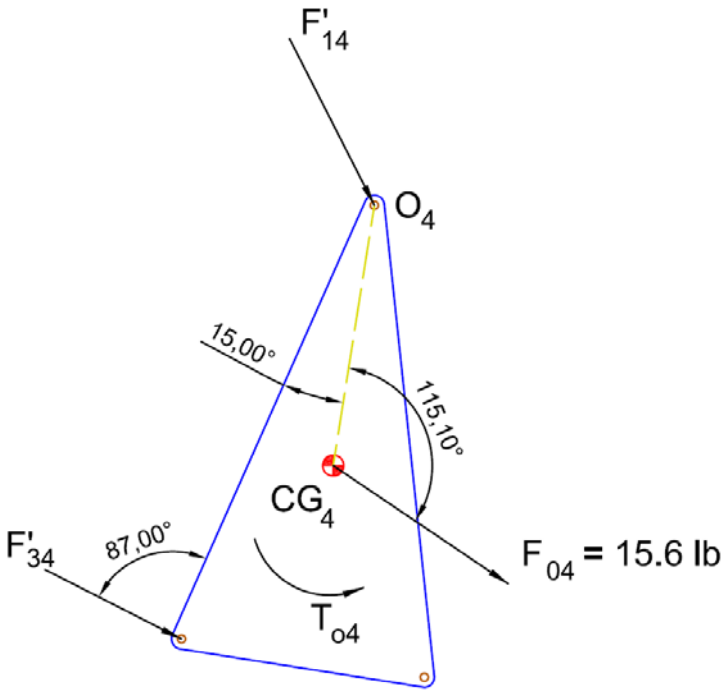

Eslabón 1




Eslabón 2




Eslabón 3




Eslabón 4

Figura 4.9 Diagramas de cuerpo libre

Para la solución del problema mediante el método de superposición se considera:

a) solo la acción $F_{04}$ y $T_{04}$
b) solo la acción $F_{03}$ y $T_{03}$
c) la suma de las acciones anteriores.

Se tomará como eje de referencia los ejes fijos xy ubicados en el eslabón 3 para todas las componentes de cada fuerza.

a) Análisis de fuerzas en donde solo actúan $F_{04}$ y $T_{04}$.

En el diagrama de cuerpo libre del eslabón cuatro se observan las fuerzas y momentos de torsión que actúan sobre de él, que son $F_{04}$, $F'_{34}$ y $F'_{14}$ y el par de torsión $T_{04}$ donde $F'_{34}$ es la fuerza que el eslabón tres ejerce sobre el eslabón cuatro y $F'_{14}$ es la fuerza que el eslabón uno ejerce sobre el eslabón cuatro. La prima o apóstrofe sencillo se utiliza para indicar que éstas son solo aquella parte de las

fuerzas reales que actúan entre los eslabones debidas a $F_{04}$ y $T_{04.}$ La dirección de $F'_{34}$ es conocida, debido a que el eslabón tres se convierte en un miembro de dos fuerzas en esta porción del proceso de superposición se desconoce tanto la dirección como la magnitud de $F'_{14.}$ Debido a que el eslabón cuatro esta en equilibrio bajo la acción de las fuerzas $F_{04,}$ $F'_{34}$ y $F'_{14}$ y el par de torsión $T_{04,}$ los momentos se pueden sumar alrededor de cualquier punto conveniente y hacerlo igual a cero.

Se hace la suma de momentos con respecto al punto $0_4$:

$$F_{04}(O_{4g4}) \text{ sen } 115.1^\circ + F'_{34}\,(0_4B) \text{ sen } 87^\circ + 40.21 = 0 \qquad \textbf{(4.14)}$$

Sustituyendo los valores correspondientes en la ecuación 4.14 se obtiene:

$$(15.6)(5.27) \text{ sen } 115.1^\circ + F'_{34}\,(0_4B) \text{ sen } 87^\circ + 40.21 = 0$$

$$F'_{34} = -\,14.35\text{N}$$

El eslabón 4 también debe de estar en equilibrio de traslación bajo la acción de las fuerzas, dadas por lo tanto:

$$F_{04} + F'_{14} + F'_{34} = 0 \qquad \textbf{(4.15)}$$

Expresando $F_{04}$ y $F'_{34}$ en el sistema de coordenadas xy, se obtiene:

$$F_{04} = 15.6(\cos 7.4^\circ i - \text{sen } 7.4^\circ j) \qquad \textbf{(4.16)}$$

$$F_{04} = 15.5i - 2.01$$

$$F'_{34} = F'_{34}i = -\,14.35i \qquad \textbf{(4.17)}$$

Al plantear la ecuación de equilibrio de traslación para el eslabón 4 se obtiene:

$$15.5i - 2.01j - 14.35i + F'_{14x}i + F'_{14y}j = 0 \qquad \textbf{(4.18)}$$

en donde $F'_{14x}$ y $F'_{14y}$ son los componentes en x, y respectivamente.

Sumando las componentes i:

$$15.5i - 14.35i + F'_{14x}i = 0 \qquad \textbf{(4.19)}$$
$$F'_{14x} = -1.151\ N$$

Sumando las componentes j:

$$-2.01j + F'_{14y}j = 0 \qquad \textbf{(4.20)}$$
$$F'_{14y} = 2.01N$$

Para calcular el momento de torsión T'S de la flecha es necesario para mantener al eslabón 2 en equilibrio bajo la acción de un par producido por $F'_{32}$ y $F_{12,}$ (eslabón 2 de la figura 4.9) donde se tiene:

$$F'_{32} = F'_{43} = 14.3\ N$$
$$d' = 0.065m$$

Por lo tanto:

$$T'_s = F'_{32}\, d' \qquad \textbf{(4.21)}$$

$$(14.3)(0.065) = 0.929\ Nm \text{ (sentido contrario a las manecillas del reloj)}$$

b) Análisis de fuerzas en donde solo actúan $F_{03}$ y $T_{03.}$

En la figura 4.9 se muestra un diagrama de cuerpo libre del eslabón tres bajo la acción de tres fuerzas $F_{03}$, $F''_{23}$ y $F''_{43}$ y el par de torsión $T_{03.}$ Aquí las primas o apóstrofes dobles indican la parte b del problema de superposición. La dirección de $F_{03}$ es conocida y la de $F''_{43}$ es a lo largo de la línea $O_4B$ debido a que el eslabón cuatro se convierte en un miembro de dos fuerzas cuando se omiten $F_{04}$ y $T_{04.}$ El eslabón tres esta en equilibrio bajo la acción de las fuerzas $F_{03}$, $F''_{23}$, $F''_{43}$ y el par de torsión $T_{04}$. Los momentos se pueden sumar con respecto a cualquier punto conveniente y se hace igual a cero.

Sumando los momentos con respecto al punto A:

$$F_{03}\,(A_{g3})\ sen29.1^o + F''_{43}\,(AB)cos3^o + T_{03} = 0 \qquad \textbf{(4.22)}$$

$$(11.4)(4)\ \text{sen}29.1^{\circ} + F''_{43}(8)\cos 3^{\circ} - 17.35 = 0$$

$$F''_{43} = -0.604\ \text{N}$$

El eslabón tres debe estar en equilibrio de translación bajo la acción de las fuerzas dadas, por lo tanto:

$$F_{03} + F''_{43} + F''_{23} = 0 \qquad \textbf{(4.23)}$$

Expresando $F_{03}$ y $F''_{43}$ en el sistema de coordenadas xy, se obtiene:

$$F_{03} = 11.4\ (\cos 29.1^{\circ}i + \text{sen}29.1^{\circ}j) = 9.94i + 5.53j \qquad \textbf{(4.24)}$$

$$F''_{43} = 0.604(\cos 87^{\circ}i + \text{sen}87^{\circ}j) = 0.04i + 0.60j \qquad \textbf{(4.25)}$$

Y la ecuación de equilibrio de traslación para el eslabón tres es:

$$9.94i+5.53j+0.04i-0.60j+F''_{23x}i+F''_{23y}j = 0 \qquad \textbf{(4.26)}$$

Sumando las componentes i:

$$9.94i + 0.04i + F''_{23x} = 0 \qquad \textbf{(4.27)}$$

$$F''_{23x} = -9.98\ \text{N}$$

Sumando las componentes j:

$$5.53j - 0.60j + F''_{23y}j = 0 \qquad \textbf{(4.28)}$$

$$F''_{23y} = -4.93\ \text{N}$$

Por lo tanto:

$$F_{23} = 11.1\ \text{N}$$

El momento de torsión $T''_{S}$ (eslabón 1 de la figura 4.9) se puede calcular empleando las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$T''_S = -(F''32 \times d'') \quad \textbf{(4.29)}$$

$$F''_{32} = -F''23 = 9.98i + 4.93j$$

$$d'' = 0.0187i - 0.0378j$$

por lo tanto:

$T''_S = 0.469$ Nm (sentido contrario a las manecillas del reloj)

c) Fuerzas totales de los eslabones:

$$F_{32} = F'_{32} + F''_{32} = F'_{43} + F''_{32} \quad \textbf{(4.30)}$$

$F_{32} = 14.3i + 9.98i + 4.93j$
$F_{32} = 24.3i + 4.93j$
$|F_{32}| = 24.8$ N

$$F_{43} = F'_{43} + F''_{43} \quad \textbf{(4.31)}$$

$F_{43} = 14.3i + 0.32i - 0.604j$
$F_{43} = 14.62i - 0.604j$
$|F_{43}| = 14.31$ N
$F_{14} = F'_{14} + F''_{14} = F'_{14} + F''_{43}$
$F_{14} = -1.3i + 2.01j + 0.032i - 0.604j$
$F_{14} = -1.10i - 14.41j$
$|F_{14}| = 1.78$ N

$$TS = T'S + T''S \quad \textbf{(4.32)}$$

$T_S = 0.929 + 0.469$

$T_S = 1.398$ N m (sentido contrario a las manecillas del reloj)

## 4.7 Método matricial

En el método matricial se plantean las ecuaciones de equilibrio dinámico, basadas en la segunda ley de Newton, para cada eslabón del mecanismo partiendo del diagrama de cuerpo libre, dando como resultado un sistema de ecuaciones lineales, a partir de la suma los cuerpos que componen el sistema, que se deben resolver en forma simultánea:

$$\text{Nº de ecuaciones} = 3n_1+2n_2 \qquad \textbf{(4.33)}$$

donde:

$n_1$ es el número de elementos del sistema con movimiento giratorio

$n_2$ es el número de elementos del sistema con movimiento lineal

Para comprender el análisis de fuerzas mediante el método matricial se considera el mecanismo de cuatro barras mostrado en la figura 4.9, en el cual se observa que los centros de masa $CG_2$, $CG_3$ y $CG_4$ de los eslabones móviles no necesitan estar a lo largo de las líneas que conectan a los pares cinemáticos. Al igual que en el método de superposición se debe partir de un análisis cinemático previo, por el cual se conoce la posición y la aceleración lineal del centro de masa, así como, la aceleración angular de cada eslabón móvil. Se debe realizar un diagrama de cuerpo libre por cada eslabón (figura 4.10) para conocer las fuerzas que actúan sobre el eslabón y los datos geométricos de los mismos.

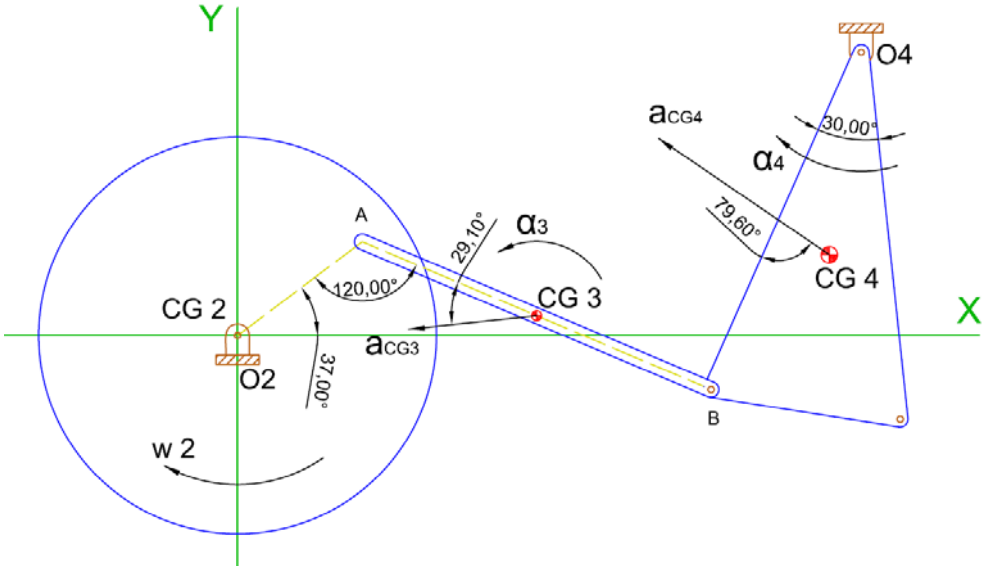



Figura 4.10 Mecanismo de cuatro eslabones

A partir de los diagramas de cuerpo libre se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio para cada eslabón móvil:

**Eslabón 2:**

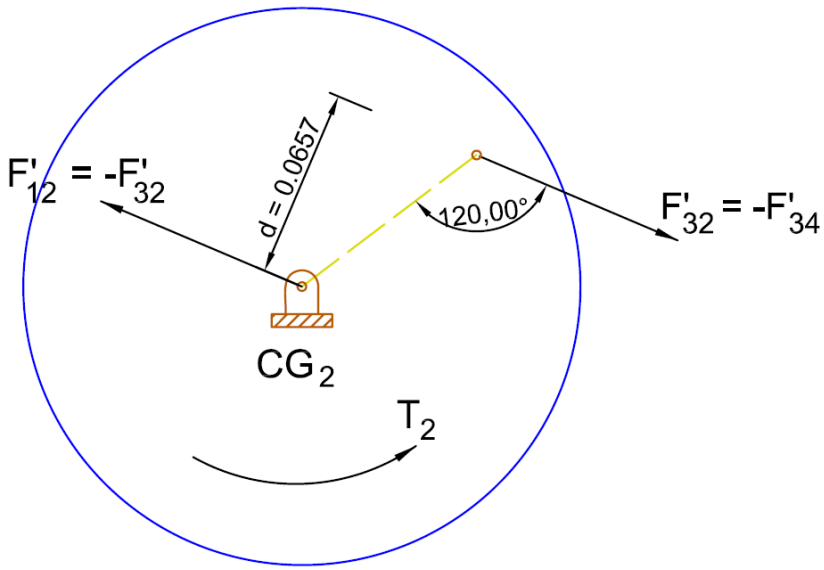



Figura 4.10a Diagrama de cuerpo libre del eslabón 2

$$F_{32} - F_{21} = m_2 a_{CG2} \quad \textbf{(4.34)}$$

$$R_{22} \times F_{32} - R_{21} \times F_{21} + Ts = I_2 \, a_2 \quad \textbf{(4.35)}$$

**Eslabón3:**

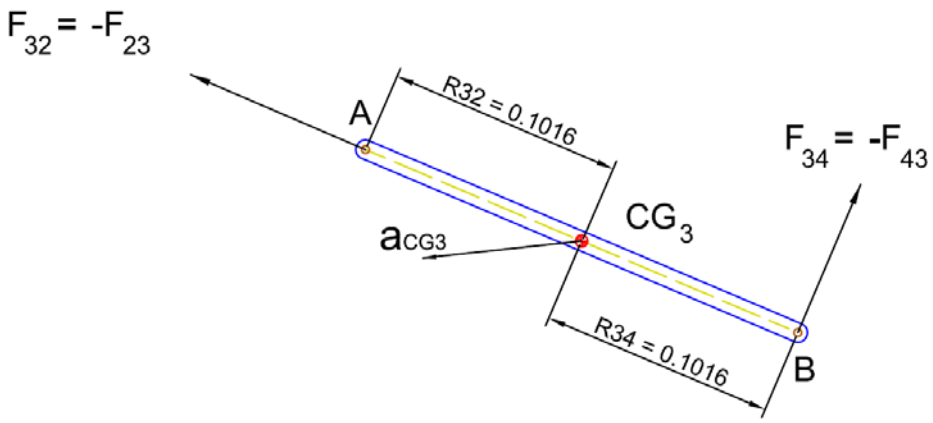



Figura 4.10b Diagrama de cuerpo libre del eslabón 3

$$F_{43} - F_{32} = m_3 a_{CG3} \quad \textbf{(4.36)}$$

$$R_{34} \times F_{43} - R_{32} F_{32} = I_3 \alpha_3 \quad \textbf{(4.37)}$$

**Eslabón 4:**

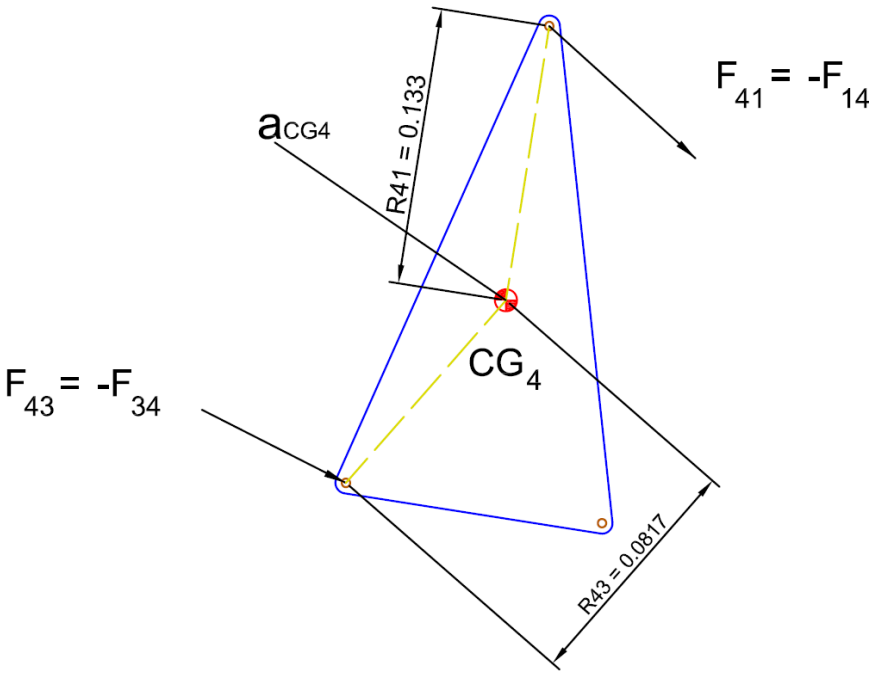



Figura 4.10c Diagrama de cuerpo libre del eslabón 4

$$F_{14} - F_{43} = m_4 a_{CG4} \quad \textbf{(4.38)}$$

$$R_{41} \times F_{14} - R_{43} F_{43} = I_4 \alpha_4 \quad \textbf{(4.39)}$$

En las ecuaciones anteriores se emplea la notación:

$R_{ij}$ = Es el vector que va desde el centro de gravedad del eslabón (i) a la junta del eslabón adjunto (j).

$F_{ij}$ = Es la fuerza que el eslabón i ejerce sobre el eslabón j.

$CG_i$ = Es el centro de gravedad del eslabón i.

$a_{CGi}$ = Es la aceleración del centro de gravedad $CG_i$.

$\alpha_i$ = Es la aceleración angular del eslabón i.

$m_i$ = Es la masa del eslabón i.

$I_i$ = Es el momento de inercia de la masa del eslabón con respecto a su centro de gravedad.

$T_S$ = Es el momento de torsión aplicado al eslabón de entrada.

A continuación, se obtienen las componentes xy de las ecuaciones vectoriales y se desarrollan los productos cruzados ($R \times F = R_x F_y - R_y F_x$), cuando los componentes en z son nulas). Se obtienen las siguientes ecuaciones:

**Eslabón 2:**

$$F_{32x} - F_{21x} = m_2 a_{CG2x} \quad \textbf{(4.40)}$$

$$F_{32y} - F_{21y} = m_2 a_{CG2y} \quad \textbf{(4.41)}$$

$$R_{22x} F_{32y} - R_{22y} F_{32x} - R_{21x} F_{21y} + R_{21y} F_{21x} = I_2\alpha_2 - T_s \quad \textbf{(4.42)}$$

**Eslabón 3:**

$$F_{43x} - F_{32x} = m_3 a_{CG3x} \quad \textbf{(4.43)}$$

$$F_{43y} - F_{32y} = m_3 a_{CGy} \quad \textbf{(4.44)}$$

$$R_{33x} F_{43y} - R_{33y} F_{43x} - R_{32x} F_{42y} + R_{32y} F_{32x} = I_3\alpha_3 \quad \textbf{(4.45)}$$

**Eslabón 4:**

$$F_{14x} - F_{43x} = m_4 a_{CG4} \quad \textbf{(4.46)}$$

$$F_{14y} - F_{43y} = m_4 a_{CG4y} \quad \textbf{(4.47)}$$

$$R_{44x} F_{14y} - R_{44y} F_{14y} - R_{43x} F_{43y} + R_{43y} F_{43x} = I_4\alpha_4 \quad \textbf{(4.48)}$$

Las ecuaciones obtenidas forman un conjunto de nueve ecuaciones lineales con nueve incógnitas ($F_{21x}$, $F_{21y}$, $F_{32x}$, $F_{32y}$, $F_{43x}$, $F_{43y}$, $F_{14x}$, $F_{14y}$, $T_S$). Estas ecuaciones pueden presentarse de la siguiente forma matricial [VaQ06],

$$\underset{[A]}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{21y} & -R_{21x} & -R_{22y} & R_{22x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{32y} & -R_{32x} & -R_{33y} & R_{33x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{43y} & -R_{43x} & -R_{44y} & R_{44x} & 0 \end{pmatrix}} \times \underset{[B]}{\begin{pmatrix} F_{21x} \\ F_{21y} \\ F_{32x} \\ F_{32y} \\ F_{43x} \\ F_{43y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \\ T_S \end{pmatrix}} = \underset{[C]}{\begin{pmatrix} m_2 a_{CG2x} \\ m_2 a_{CG2y} \\ I_2 \alpha_2 \\ m_3 a_{CG3x} \\ m_3 a_{CG3y} \\ I_3 \alpha_3 \\ m_4 a_{CG4x} \\ m_4 a_{CG4y} \\ I_4 \alpha_4 \end{pmatrix}}$$

**(4.49)**

Donde:

- La matriz A contiene toda la información geométrica.
- La matriz B contiene la información dinámica que queremos calcular acerca del sistema.
- En la matriz C se incluyen los efectos de las fuerzas externas o los momentos que son conocidos

Al resolver el sistema matricial que se ha planteado, se obtiene como solución los valores de las fuerzas que se quería calcular.

El primer paso del análisis matricial consiste en determinar las componentes xy de las fuerzas, aceleraciones y los vectores de posición que actúan en cada eslabón:

$$a_{CG2} = 0i + 0j \ (m/s^2)$$

$$R_{21} = 0i + 0j \ (m)$$

$R_{22} = 0.0762<37º = 0.0608i + 0.0458j$ (m)

$a_{CG3} = 91.6<184.1º = –91.08i –9.73j$ (m/s$^2$)

$R_{32} = 0.101<157º = –0.0929i + 0.0395j$ (m)

$R_{33} = 0.101<23º = 0.0929i – 0.0395j$ (m)

$a_{CG4} = 662.7<149.6º = –54.08i + 31.73j$ (m/s$^2$)

$R_{44} = 0.1338<85º = 0.0116i + 0.1333j$ (m)

$R_{43} = 0.0818<224.87º = –0.0579i – 0.0577j$ (m)

A continuación se calculan las fuerzas de inercia y los pares de torsión:

$m_2a_{CG2x} = (10 \text{ kg})(0 \text{ pies/s}^2) = 0$ N

$m_2a_{CG2y} = (10 \text{ kg})(0 \text{ pies/s}^2) = 0$ N

$I_2\alpha_2 = (0.017 \text{ Nms}^2)(0 \text{ rad/s}^2) = 0$ Nm

$m_3a_{CG3x} = (4 \text{ kg})(– 91.08 \text{ m/s}^2) = – 11.31$ N

$m_3a_{CG3y} = (4 \text{ kg})(– 9.73 \text{ m/s}^2) = – 1.21$ N

$I_3\alpha_3 = (0.006 \text{ Nms}^2)(241 \text{ rad/s}^2) = 17.35$ Nm

$m_4a_{CG4x} = (8 \text{ kg})(– 54.08 \text{ m/s}^2) = – 13.44$ N

$m_4a_{CG4y} = (8 \text{ kg})(31.73 \text{ m/s}^2) = 7.88$ N

$I_4\alpha_4 = (0.026 \text{ Nms}^2)(–129 \text{ rad/s}^2) = – 40.25$ Nm

Una vez que se tienen las componentes de las ecuaciones de equilibrio, se sustituyen los valores correspondientes en cada ecuación y se integran en el arreglo matricial, por lo que se obtiene:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.045 & 0.060 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.039 & 0.092 & 0.039 & 0.092 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.057 & 0.057 & 0.133 & 0.011 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F21x \\ F21y \\ F32x \\ F32y \\ F43x \\ F43y \\ F14x \\ F14y \\ Ts \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -11.31 \\ -1.21 \\ 17.35 \\ -13.44 \\ 7.88 \\ -40.25 \end{pmatrix}$$

Al resolver la matriz, por el método de Gauss Jordan, se obtienen los siguientes resultados para cada uno de los eslabones:

$$F_{21x} = 24.29 \text{ N}$$
$$F_{21y} = -4.95 \text{ N}$$
$$F_{32x} = 24.29 \text{ N}$$
$$F_{32y} = -4.95 \text{ N}$$
$$F_{43x} = 12.98 \text{ N}$$
$$F43_{y} = -4.16 \text{ N}$$
$$F_{14x} = -0.46 \text{ N}$$
$$F_{14y} = 1.73 \text{ N}$$

Y el momento de torsión en la flecha de entrada:

$T_S = 1.398$ N m (sentido contrario a las manecillas del reloj)

Expresando las fuerzas en coordenadas polares:

$$F_{21} = 24.80 \text{ N} \angle 348.48°$$
$$F_{32} = 24.80 \text{ N} \angle 348.48°$$
$$F_{43} = 14.36 \text{ N} \angle 334.61°$$
$$F_{14} = 1.79 \text{ N} \angle 104.89°$$

Estos resultados concuerdan con los obtenidos en el ejemplo en el que se uso el método de superposición para resolver el mismo problema. Sin embargo, los resultados de dicho ejemplo se expresan en el sistema de coordenadas unido al eslabón acoplador en tanto que los resultados de este ejemplo se expresan en el sistema de coordenadas fijas.

## 4.8 Análisis de fuerzas en eslabonamientos con más de cuatro barras

El método matricial puede ser extendido fácilmente para eslabones más complejos y con un número mayor de eslabones, ya que las ecuaciones son de forma similar a las anteriores (ecuaciones (4.8) y (4.10)), las cuales ahora se expresan como sumatorias:

$$\sum F = m\,a \qquad \textbf{(4.50)}$$

$$\sum T = I\,\alpha \qquad \textbf{(4.51)}$$

Con el fin de aplicar este método a cualquier mecanismo con n eslabones y con juntas de pasador, donde j es un eslabón cualquiera en la cadena cinemática e i = j – 1 es un eslabón previo en la cadena, y k = j + 1 es el siguiente eslabón; a partir de la forma vectorial de las ecuaciones se tiene:

$$F_{ij} + F_{jk} + \sum F_{extj} = ma \qquad \textbf{(4.52)}$$

$$(R_{ij} \times F_{ij}) + (R_{jk} \times F_{jk}) + \sum T_j + (R_{extj} \sum F_{extj}) = I_{cgj}\,\alpha_j \qquad \textbf{(4.53)}$$

donde:

$$j = 2, 3, \ldots n;\ i = j - 1;\ k = j + 1,\ j \neq n;\ \text{si } j = n,\ k = 1$$

$$F_{ji} = -F_{ij};\ F_{kj} = -F_{jk}$$

De la ecuación vectorial 4.52 de suma de fuerzas se obtienen sus componentes en x y, aplicando luego en conjunto con la ecuación 4.53, a cada uno de los eslabones del

mecanismo para obtener un conjunto de ecuaciones lineales simultaneas y se resuelven igual que el caso anterior.

En el mecanismo cualquier eslabón puede tener fuerzas externas y/o momentos externos aplicados, los cuales se agregarán a la matriz C. Así también, se introducen las fuerzas de reacción negativas con el fin de reducir el número de variables a una cantidad manejable. Cuando se tienen las juntas de deslizamiento o correderas, será necesario agregar restricciones en las direcciones permisibles de las fuerzas que se aplican en las juntas relacionadas con las fuerzas de fricción.

## 4.9 Elección del método de resolución

Aunque el método de superposición es fácil de usar, tiene la desventaja de que el mecanismo debe analizarse en varias ocasiones, lo cual resulta tedioso para el diseñador.

En el mismo sentido, no se puede hacer un análisis exacto si hay que considerar las fuerzas de fricción. Si bien este problema no se presenta en los mecanismos con pares de giro debido a que las fuerzas de fricción son bastante pequeñas y se desprecian, no así con los pares de deslizamiento o correderas, como en el caso de pistón y el cilindro en el mecanismo biela-manivela-corredera. El método de análisis mediante superposición no sería el apropiado, si se debe considerar la fricción entre el pistón y el cilindro. En este caso, se presentarán errores debido al cambio de dirección de la fuerza entre el pistón y el cilindro en las distintas soluciones requeridas para el método de superposición, cosa que no sucede en el método matricial, ya que se toma en cuenta la fuerza de fricción desde el planteamiento del diagrama de cuerpo libre.

Por otra parte, el método matricial requiere de un único análisis que da por resultado un conjunto de ecuaciones lineales que se deben resolver en forma simultánea para obtener todas las fuerzas y momentos de torsión desconocidos actuantes en el mecanismo. Al resolver la matriz de ecuaciones lineales, se obtienen todos los

valores buscados y se toman en cuenta fuerzas y momentos de torsión exteriores, que se aplican sobre el mecanismo [Mab99].

El método de superposición se adapta mejor para la solución mediante cálculos manuales o en forma gráfica, mientras que el método matricial se adapta mejor para la solución por medio de un programa para ordenador [Per06].

# CAPÍTULO 5

# El Programa

# DAMSFORT

# 5.1 Introducción

El uso de tecnología computacional para la solución y optimización de problemas de ingeniería, hoy en día es una práctica común en los países desarrollados, ya que el creciente avance de las computadoras y el desarrollo de poderosos sistemas de software, permite a los diseñadores de equipos mecánicos resolver, simular y optimizar sistemas complejos, mejorando el desempeño de nuevos productos que satisfagan las demandas del mercado, salvaguardando la seguridad de los consumidores.

En los últimos años la mecánica teórica y la aplicada han experimentado un gran desarrollo, principalmente debido al perfeccionamiento de las computadoras y a la disponibilidad de nuevos métodos de cálculo. El Análisis numérico es una rama de las matemáticas cuyos límites no son del todo precisos. De una forma rigurosa, se puede definir como la disciplina ocupada de describir, analizar y crear algoritmos numéricos que nos permitan resolver problemas matemáticos, en los que estén involucradas cantidades numéricas, con una precisión determinada. En el contexto del cálculo numérico, un '"algoritmo"' es un procedimiento que nos puede llevar a una solución aproximada de un problema mediante un número finito de pasos que pueden ejecutarse de manera lógica. En algunos casos, se les da el nombre de '"métodos constructivos"' a estos algoritmos numéricos. El análisis numérico cobra especial importancia con la llegada de los ordenadores. Los ordenadores son útiles para cálculos matemáticos extremadamente complejos, pero en última instancia operan con números binarios y operaciones matemáticas simples. Desde este punto de vista, el análisis numérico proporcionará todo el "andamiaje" necesario para llevar a cabo todos aquellos procedimientos matemáticos susceptibles de expresarse algorítmicamente, basándose en algoritmos que permitan su simulación o cálculo en procesos más sencillos empleando números.

Es así cómo, en las naciones altamente desarrolladas, se ha llegado a que prácticamente todo producto final sea el resultado directo o indirecto, de alguna aplicación computacional de los principios de la mecánica. Esta nueva disciplina

combina la mecánica teórica y aplicada con los métodos numéricos y la informática. Internacionalmente se la denomina mecánica computacional. El campo de aplicación de esta disciplina crece día a día. Las industrias manufactureras la utilizan para el análisis y diseño de estructuras y equipamiento mecánico. Tiene gran relevancia en ingeniería nuclear, puesto que para el diseño de reactores son fundamentales el análisis estructural, la mecánica de suelos, la fluido mecánica, etc. La industria automotriz mundial emplea la mecánica computacional como procedimientos habitual para el análisis de tensiones, el diseño estructural y el análisis dinámico de vehículos, utilizando también las ventajas del modelado y simulación. Los sistemas de defensa de las naciones desarrolladas dependen en gran proporción de esta disciplina, utilizada para resolver problemas aerodinámicos, de balística, estudios de penetración e impacto, ablación de metales, fractura, integridad estructural y dinámica y control de satélites. Es bien sabido que el análisis estructural de aeronaves, navíos oceánicos y sistemas de transporte ferroviario constituye un aspecto esencial de su diseño; sin embargo, su desarrollo actual hubiera sido imposible sin la participación de la mecánica computacional.

## 5.2 Implementación

En este apartado se describirá la implementación de un programa de análisis dinámico para Sistemas Multicuerpo basado en el análisis numérico mediante álgebra matricial.

El programa desarrollado se implementa a tres niveles, que se plasman en tres interfaces básicas:

- Interfaz Humano: Formado por una serie de funciones y colección de APPIS[1], que dan un aspecto intuitivo y sencillo con forma de ventanas, donde se realiza la comunicación del usuario con el programa.

[1] La APPIS son unas librerías graficas del sistema operativo Microsoft Windows.

- Interfaz Estructural: Conjunto de una serie de clases y funciones que almacenan y manejan, los tipos de datos que permiten al usuario definir el sistema mecánico.
- Interfaz Numérico Resolutivo: Está compuesto por una serie de funciones y plantillas que operan con los datos numéricos del sistema mecánico y que permiten al programa resolver los problemas DSM planteados por el usuario.

Como es lógico, estos tres interfaces están relacionados entre sí mediante una serie de funciones, que exportan los datos de uno a otro y que servirán como argumento de entrada a las plantillas numéricas mencionadas en el punto anterior.

Para poder documentar las diferentes secciones de los elementos del interfaz y siendo coherentes con la filosofía de trabajo desarrollada para la elaboración del modelado computacional, las secciones se dividen en los siguientes apartados:

- Aspecto visual y comunicación humana: Explicación del porque se ha elegido el lenguaje de programación Visual Studio .NET y como se realiza la interacción del usuario con el programa.
- Estructuras de datos: Descripción de los campos incluidos en las diferentes estructuras empleadas.
- Funciones de organización matricial: Explicación de cómo se modificaran las estructuras de datos, convirtiéndolas en matrices para su mejor resolución en sistema de ecuaciones.
- Funciones de resolución: Descripción de cómo resolver los problemas concretos del mecanismo.

## Aspecto visual y comunicación humana

Uno de los requisitos que nos planteamos al iniciar este proyecto fue que el lenguaje utilizado no creara ningún problema al usuario. Todo debía ser sencillo y muy intuitivo.

Se presentaron dos formas diferentes de mostrar el programa:

- Bajo consola o secuencia de comandos: Ventana única, que mostraba solo caracteres alfanuméricos que se comunicaba con el usuario por medio de teclado exclusivamente.
- En Forma de ventanas: Es el método visual actual del sistema operativo Microsoft Windows. Tiene capacidad de comunicación con el usuario a través de teclado y ratón.

Al comienzo del proyecto se implementó en forma de consola porque no se priorizó inicialmente esta característica. Pero posteriormente hubo que exportar el proyecto a un lenguaje visual.

Este fue el punto que decidió que el lenguaje de programación empleado fuera Visual Studio .NET de Microsoft. Fundamentalmente por las siguientes características:

- Sus grandes librerías graficas.
- Sencillo entorno de programación.
- Posibilidad de elegir un subtipo de lenguaje de programación entre diferentes tipos: C#, Java#, Visual Studio,… de los cuales se puede elegir el que mas sencillo pudiera resultar para el programador y que mejor se adaptara al proyecto.
- Su portabilidad: se ejecuta en una maquina virtual[1] llamada framework. Actualmente existe versiones de framework tanto para Windows como para Linux e incluso es instalable en PDA[2] que en la actualidad se usan cada vez más.

[1] Una maquina virtual es una especie preprocesador, que ejecuta sus programas valiéndose únicamente de sus librerías e implementación. No depende del sistema operativo donde se instale.

[2] PDA (Personal Digital Assistant = Asistente Digital Personal). También llamadas Poquet PC.

- La máquina virtual utilizada por Visual Studio .NET de Microsoft viene por defecto en el paquete de instalación de los sistemas operativos de última generación.

Se realizaron unas clases especiales llamadas comúnmente como “Form” que tienen la función de mostrar las ventanas de dialogo con el usuario. Se creó una para cada caso de uso.

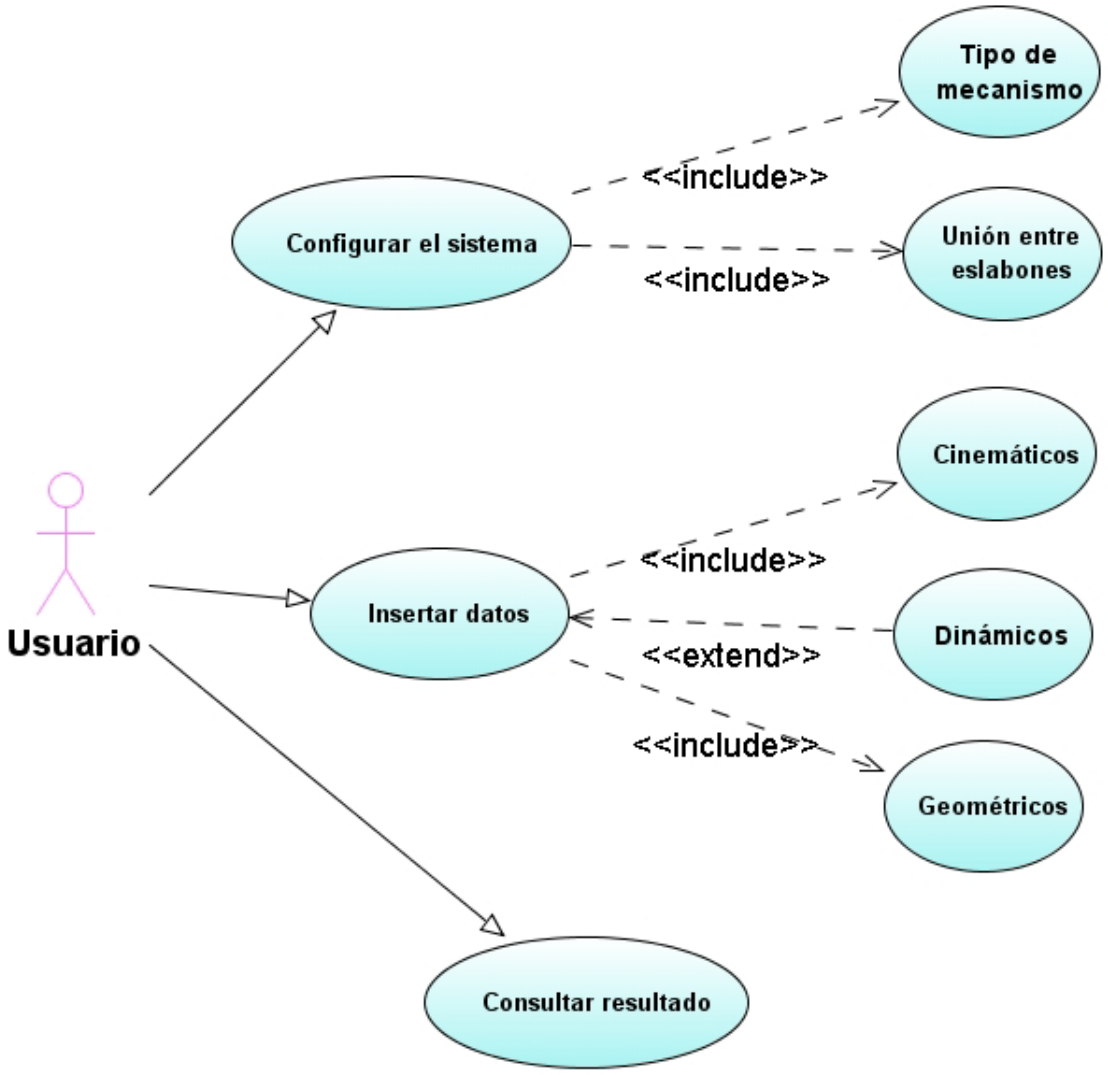



Figura 5.1 Procedimiento de resolución

En la figura 5.1 se muestra como se plantearon los casos de usos por medio de un "diagrama de casos de usos UML"[3].

Finalmente se crearon dentro de estas clases unos elementos comunes de formularios para que, por medio del hardware de usuario (teclado y ratón), se realizara su interacción y manejo del programa.

## Estructuras de datos

Para poder trabajar con los datos que nos llegan por medio del usuario, primero hay que almacenarlas para su posterior tratamiento. Estos datos se almacenarán en unas "clases", que son la descripción de un conjunto de objetos y que consta de métodos y datos que resumen las características comunes de los mismos. Estas clases tienen diferentes atributos (conjunto de objetos), que almacenan todos los datos que vaya introduciendo el usuario.

Es importante destacar la capacidad y precisión que podemos dar a nuestro programa, para que el error teórico por redondeo sea despreciable. Para ello se ha usado un tipo de variables llamado "double". Este tipo de variables puede almacenar números con una buena precisión. El rango de representación numérica positiva esta comprendida dentro de [-1.7 Exp (+308) a-4.9 Exp(-324)] y para la región negativa dentro de [+4,9 Exp -324 a +1.7 Exp (+308)] según el formato IEEE de coma flotante de doble precisión con 64 bits (8Bytes).

[3] Un diagrama de casos de usos UML es un esquema que une las acciones posibles generalizadas por medio de "includes" y "extends". Un extend indica que el caso de uso es opcional y un include que el caso de uso es obligatorio. Así siempre que realicemos un caso de uso con algún include relacionado con él, se procesará siempre el caso de uso asociado por el include antes del término del caso de uso principal. Con la relación extend puede acabar el caso de uso principal sin procesar este.

Se han implementado 5 clases distintas en este apartado:

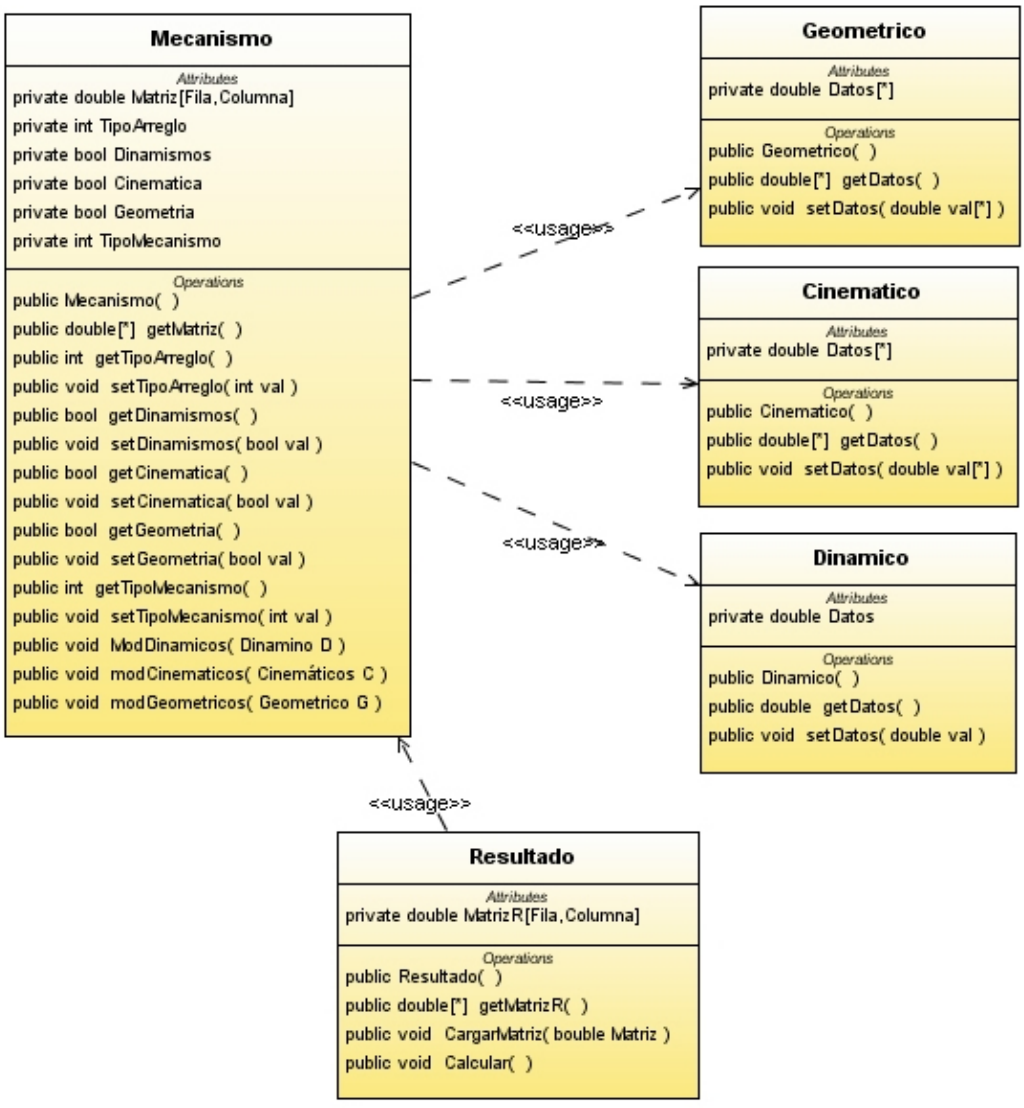
1. Mecanismo
2. Dinámico
3. Cinemático
4. Geométrico
5. Resultado

La clase “Mecanismo”, tiene por tanto un atributo base llamado “Matriz” que es de tipo “array” de dos dimensiones y que almacena números del tipo double en forma de (fila, columna). Este atributo será uno de los más importantes, pues en él configuraremos el sistema de ecuaciones, ya separadas sus componentes de cada unión de los eslabones.

Otros atributos como “TipoArreglo” y “TipoMecanismo”, almacenarán con un identificador numérico, el tipo de arreglo y mecanismo, es decir que mecanismo de seis eslabones y un grado de libertad vamos a analizar y como están unidos entres sí los distintos elementos que lo componen. Con todo ello podremos hacer los cambios pertinentes en la matriz una vez se vayan añadiendo los datos.

En conclusión, la clase “Mecanismo” prepara y asigna la matriz para el sistema de ecuaciones. Esta clase llamará a una función común denominada getDatos() que exporta los datos de las clases “Dinámica”, “Cinemática” y “Geométrica”. Por ultimo la clase “Resultado” es la que se encarga de operar la matriz modificada de la clase “Mecanismo” mediante la función CargarMatriz().

A continuación se muestra un diagrama de clases de UML:




Un diagrama de clases es un esquema por el que se especifican las clases principales del programa, sus atributos y métodos así como las relaciones entre las clases.

## Funciones de organización matricial

Según vamos recogiendo los datos dados por el usuario, llamamos a una serie de funciones que irán preparando la matriz de la clase "Mecanismo".

Estas funciones son Arreglo() y SistemaUnión(). Cada uno de ellos se ejecuta nada mas se crea la clase. Además de hacer las operaciones necesarias para inicializar la

matriz, se almacena también la opción escogida en el mecanismo, por si en algún momento se necesita o se quiere modificar, se pueda volver sobre los pasos dados.

Arreglo(): Almacena el tipo de arreglo en la clase "Mecanismo". Crea las modificaciones adecuadas en la matriz y su cardinalidad según si es

- Mecanismo cerrado.
- Mecanismo de contramanivela.
- Mecanismo con dos deslizaderas.
- Mecanismo con una corredera invertida.
- Mecanismo con corredera invertida y una manivela.

SistemaUnion(): Almacena la forma en que se configuran las uniones de los eslabones dentro del sistema.

Antes de poder usar la matriz para dar un resultado al sistema, habrá que modificarla para incorporar sus características cinemáticas, geométricas y dinámicas, siendo esta ultima opcional, con las funciones internas de la clase "Mecanismo": modCinematicos(), modDinamico() y modGeometrico().

modGeometrico(): Modifica la matriz según los valores de los datos ángulo y distancia de cada una de las uniones.

modCinematicos(): Modifica la matriz según los valores de los datos: Masa, Aceleración angular, Momento de inercia, aceleración del centro de gravedad y el ángulo del vector de aceleración de cada uno de los eslabones.

modDinamico(): Modifica la matriz según los valores de los datos según la Fuerza externa sobre cada eslabón, el ángulo de la fuerza externa, distancia entre el centro de gravedad (CG) del eslabón y la fuerza externa, ángulo de la distancia y el momento de torsión externo sobre el mecanismo.

## Funciones de resolución

La clase "resultado" tiene la misión de realizar las operaciones matriciales para formar el sistema de ecuaciones y almacenar el resultado.

Para realizar esta labor, es necesario cargar la matriz ya modificada por todas las funciones modCinematicos(), modDinamico() y modGeometrico() de la clase "Mecanismo".

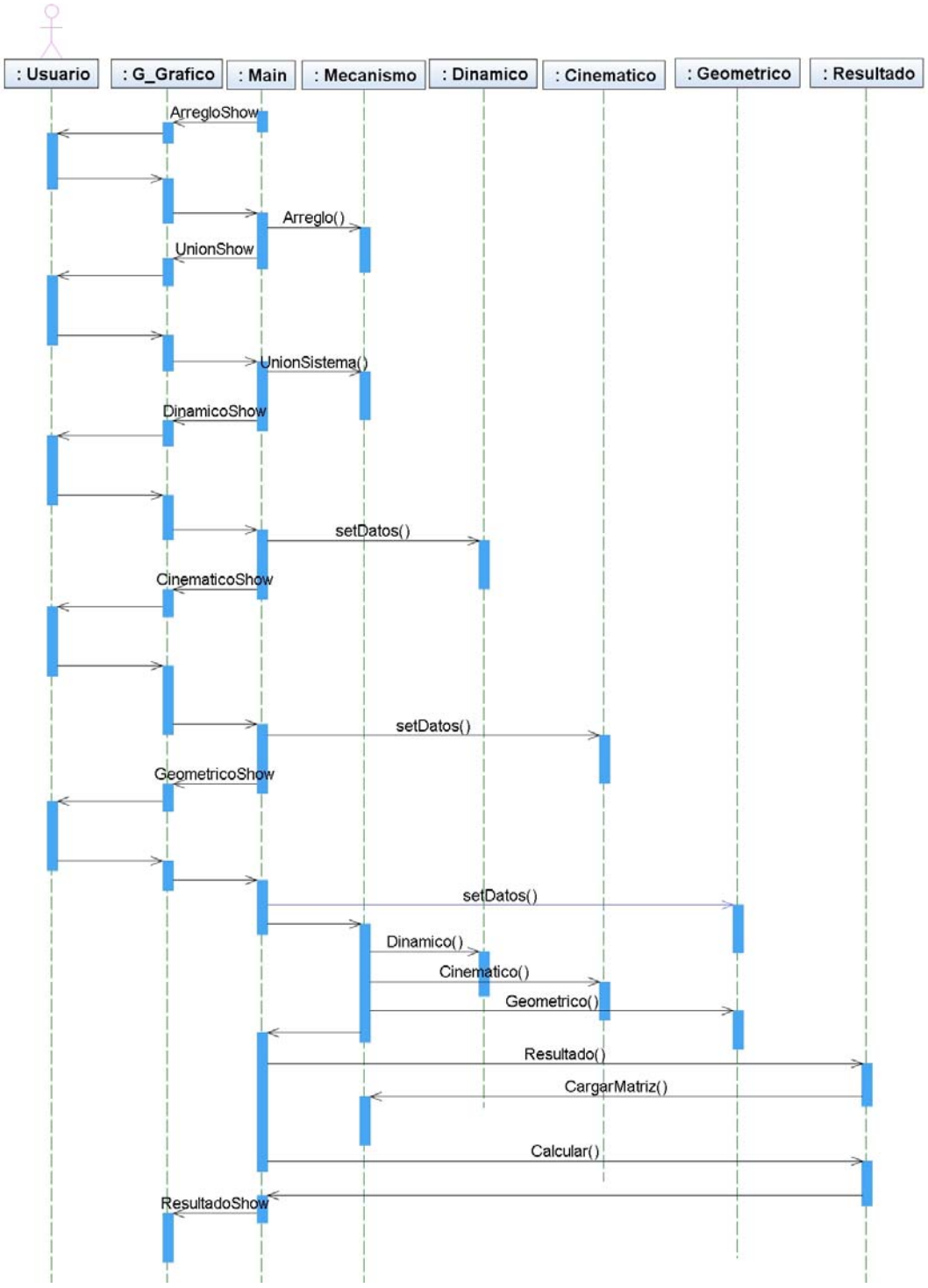
Al llamar a la función Calculo(), este descompone la matriz en tantas ecuaciones como filas tenga la matriz y almacena sus valores de fuerzas descompuestas en las coordenadas en x e y de cada eslabón, realiza la suma de las fuerza que se obtienen en un mismo eslabón y posteriormente calcula su ángulo. Finalmente almacena todos estos valores.

Con la función getMatrizR() podremos acceder a estos datos finales y mandarlos a la clase Gráfica para poderlos mostrar al usuario de la aplicación.

## Conclusión

En conclusión, el núcleo del programa o main, va llamando a cada clase en un momento adecuado para comunicarse con el usuario (con la clase GestorGrafico), para el almacenamiento de datos (con las clases "Mecanismo", "Dinámico", "Geométrico" y "Cinemático"), para realizar las operaciones de comunicación entre clases y para calcular el resultado.

A continuación se muestra un diagrama de flujo de las interacciones de todas las clases con el programa principal, la clase de Gestor Grafico y el usuario. En él se muestran también los métodos por los cuales se comunican de una clase a otra.


: Usuario
: G_Grafico
: Main
: Mecanismo
: Dinamico
: Cinematico
: Geometrico
: Resultado
ArregloShow
Arreglo()
UnionShow
UnionSistema()
DinamicoShow
setDatos()
CinematicoShow
setDatos()
GeometricoShow
setDatos()
Dinamico()
Cinematico()
Geometrico()
Resultado()
CargarMatriz()
Calcular()
ResultadoShow

## 5.3 Descripción del programa

El análisis dinámico determina el comportamiento real de los Sistemas multicuerpo porque considera la aceleración de los cuerpos físicos debido a las cargas que actúan sobre ellos [Lev62]. Para añadir la cinética, un sistema de análisis dinámico debe considerar dos valores que no se contemplan en el análisis cinemático: masa y fuerza. La masa de los cuerpos se considera generalmente constante, pero las fuerzas se calculan en función del tiempo [Das99]. Un sistema con un grado de libertad se puede resolver porque las fuerzas exteriores (y/o las fuerzas de gravedad), establecen un sistema totalmente determinado de ecuaciones simultáneas.

Como ya se demostró, la manera más adecuada para realizar el análisis dinámico es el método de resolución mediante matrices [Sha02]. El análisis dinámico incluye tanto el análisis cinemático como el dinámico, que es el análisis de las fuerzas en el sistema [RoW66], [SAG82]. Dicho análisis se realiza aplicando la segunda Ley de Newton del movimiento. La solución del análisis dinámico de Sistemas Multicuerpo es muy compleja cuando se realizan los cálculos de forma manual para determinar su solución, ya que se pueden ir acumulando errores de decimales o de redondeo. El contar con un programa que realice esta tarea permitirá al diseñador mecánico enfocar más tiempo en la optimización de mecanismos, por lo tanto el sistema le permitirá experimentar con distintos valores físicos que se puedan presentar en el mecanismo sin tener la necesidad de fabricar los mismos con lo cual se ahorrará tiempo y dinero [Joy00], [Kau78].

De la revisión bibliográfica y del estudio actual del problema se pudo deducir, que los trabajos dedicados al estudio dinámico de los Sistemas Multicuerpo es muy inferior a los que tratan los cinemáticos, tanto de análisis como de diseño [Avi02] [AsM90]. Dentro de estos la inmensa mayoría se dedican a los sistemas formados por cuatro barras o eslabones (MECAN4, FOURBAR, BIEMAN,…) [YaS01], [Nor03], [Her04]. Es por eso que, al menos en principio, el programa se ha estructurado para el análisis dinámico de Sistemas Multicuerpo de seis elementos

rígidos. El programa es capaz de resolver cualquier mecanismo de seis eslabones y un grado de libertad (GDL). El nombre asignado al programa es: **DAMSFORT**.

Se analizó el número de combinaciones que pueden existir para una combinación de seis eslabones y un GDL. Se incluyeron los mecanismos de Watt y Stephenson [SMS02] considerando sus inversiones, así como las diversas variaciones que pudiera haber con uniones que incluyan eslabones ternarios, cuaternarios, correderas y deslizaderas; las combinaciones posibles y sus diversas variaciones se muestran en la siguiente tabla [Nor03].

| Eslabón | B | T | C | Q | H |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | - | - | - | - |
| 6 | 4 | 2 | - | - | - |
| 6 | 5 | - | 1 | - | - |
| 8 | 7 | - | - | - | 1 |
| 8 | 4 | 4 | - | - | - |
| 8 | 5 | 2 | 1 | - | - |
| 8 | 6 | - | 2 | - | - |
| 8 | 6 | 1 | - | 1 | - |

Tabla 5-1 Mecanismos de hasta ocho eslabones y un GDL

Donde:

B = eslabón binario.

T = eslabón ternario.

C = eslabón cuaternario.

Q = eslabón quíntuple.

H = eslabón hexagonal.

De la tabla anterior se puede observar que solo se presentan dos combinaciones posibles para que un mecanismo con seis eslabones cumpla con la condición de tener un GDL [Whi03]. Estas combinaciones se forman con eslabones binarios, ya sea conectados con dos eslabones ternarios o con uno cuaternario; además de que las diversas combinaciones pueden tener una o dos deslizaderas, ya sean horizontales y/o verticales, o una corredera invertida.

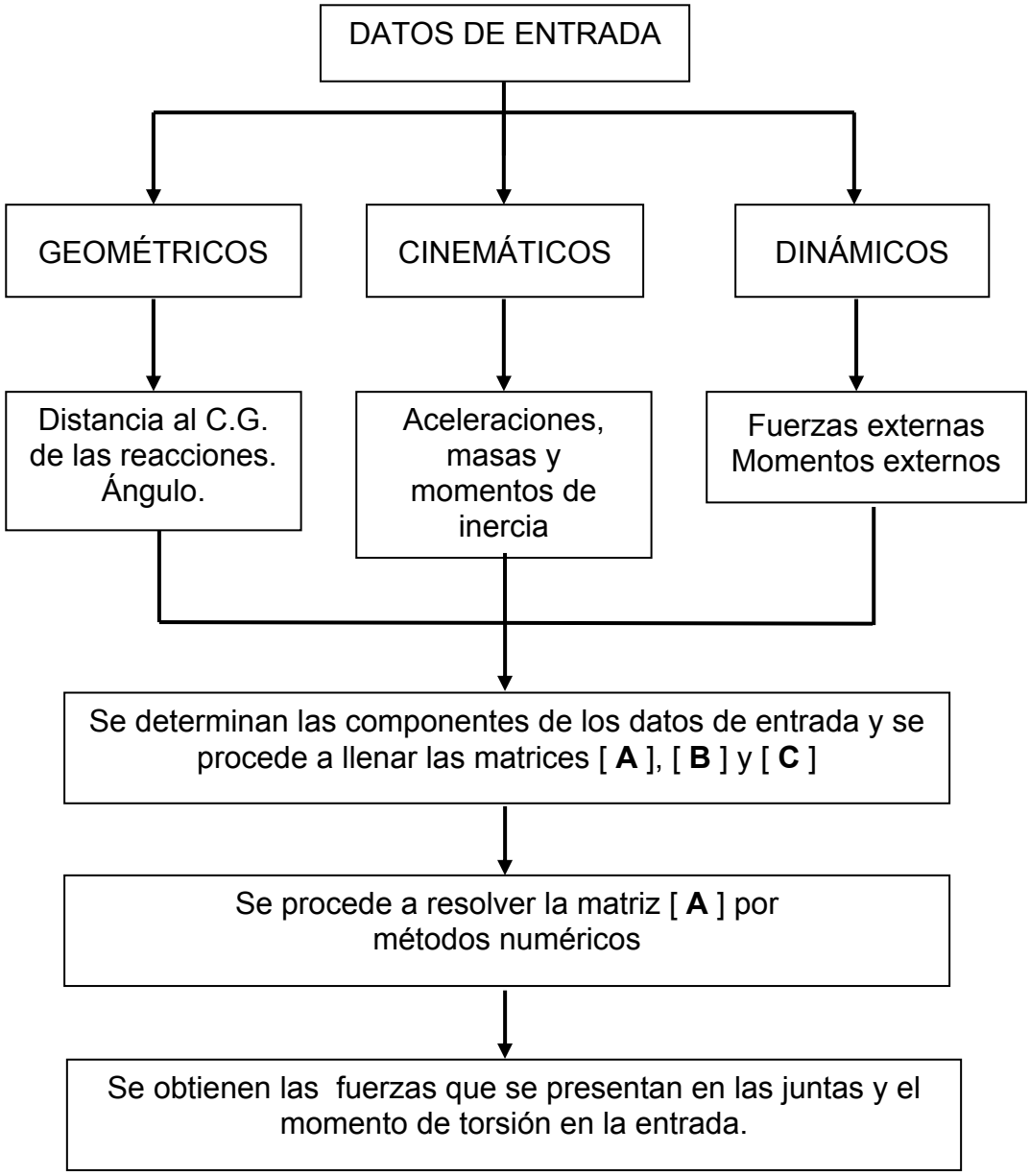



Figura 5.1 Procedimiento de resolución

Por otra parte, también se debe de tomar en cuenta los factores externos que actúan sobre el mecanismo, como son fuerzas y momentos de torsión [Ros02], así como la fuerza de rozamiento en el caso que se presenten correderas [Ser98]. Con las características descritas anteriormente, se puede formular el procedimiento para el análisis dinámico en mecanismos formulado en la figura 5.1, (utilizando el planteamiento empleado en el apartado 4.8).

La figura 5.2 muestra, a modo de diagrama de flujo, la forma habitual de interacción entre el usuario y el programa Damsfort. El programa puede solicitar una identificación del usuario para la inicialización y entrada al programa. Los datos se van seleccionando de los sucesivos menús desplegables que van apareciendo, o se introducen de forma manual en las diferentes estructuras que dan soporte al planteamiento analítico-matricial de las ecuaciones dinámicas [XBY05]. El programa dispone de una base de datos que permitirá al usuario resolver diferentes problemas de la mecánica presentados en el capítulo 4.

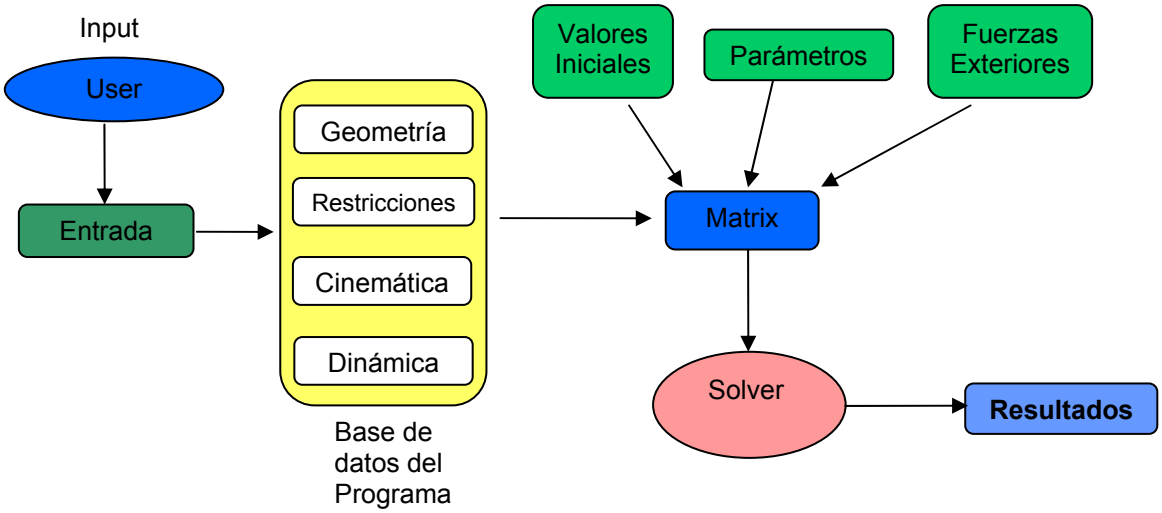



Figura 5.2 Diagrama de flujo del Programa

## 5.4 Estructura del programa DAMSFORT

Basándose en el análisis de fuerzas del método matricial [Sim02], en el cual para obtener las fuerzas actuantes sobre las juntas de los eslabones se debe de construir el sistema matricial a partir del diagrama de cuerpo por eslabón, donde se definen las ecuaciones de equilibrio y tomando en cuenta la tabla 5-1, los eslabones se deberán enumerar de la siguiente forma:

| No. de eslabón | Descripción |
|---|---|
| **1** | Es el eslabón fijo y sirve como referencia. |
| **2** | Puede ser de tipo:<br>▪ Binario.<br>▪ Ternario.<br>El cual tiene la función de ser la manivela o eslabón motor. |
| **3** | Puede ser de tipo:<br>▪ Binario.<br>▪ Ternario.<br>Y tienen la función de ser:<br>▪ Oscilador.<br>▪ Acoplador.<br>▪ Corredera invertida. |
| **4** | Puede ser de tipo<br>▪ Binario<br>▪ Ternario.<br>▪ Tiene la función de oscilador.<br>▪ Puede ser un acoplador. |
| **5** | Puede ser de tipo:<br>▪ Binario.<br>▪ Ternario, cuando esta unido al eslabón número uno.<br>▪ Corredera, cuando se presentan dos correderas, y va unido al eslabón número tres. |
| **6** | Puede ser de tipo:<br>▪ Binario.<br>▪ Corredera y unido al eslabón número cinco, y cuando se presentan dos correderas, es una de ellas y va unido al eslabón número cuatro. |

Tabla 5-2 Enumeración de los eslabones que componen un Sistema

A partir de de la tabla 5-2, se procede a analizar cada eslabón que compone el sistema, al cual se le denominara pivote, lo que facilita su ubicación dentro del

arreglo matricial por medio de coordenadas dentro de la matriz, y permite la concentración de valores en una base de datos [Ceb02] [Coh00] para cada uno de los eslabones que forman a los distintos mecanismos con un GDL. El número de ecuaciones que componen la matriz, se obtiene al plantear aisladamente el equilibrio de cada uno de los eslabones que componen el mecanismo, considerando todas las fuerzas que actúan sobre él y se define con la ecuación.

$$\text{Nº de ecuaciones} = 3(n-1) \qquad \textbf{(5.1)}$$

En la estructura matricial, también se deben tomar en cuenta tanto las fuerzas y los momentos de torsión externos que actúan en cada uno de los eslabones, y que por consiguiente, tendrán una posición definida dentro del sistema matricial dependiendo del eslabón donde estén actuando; dicha posición se registra en la base de datos.

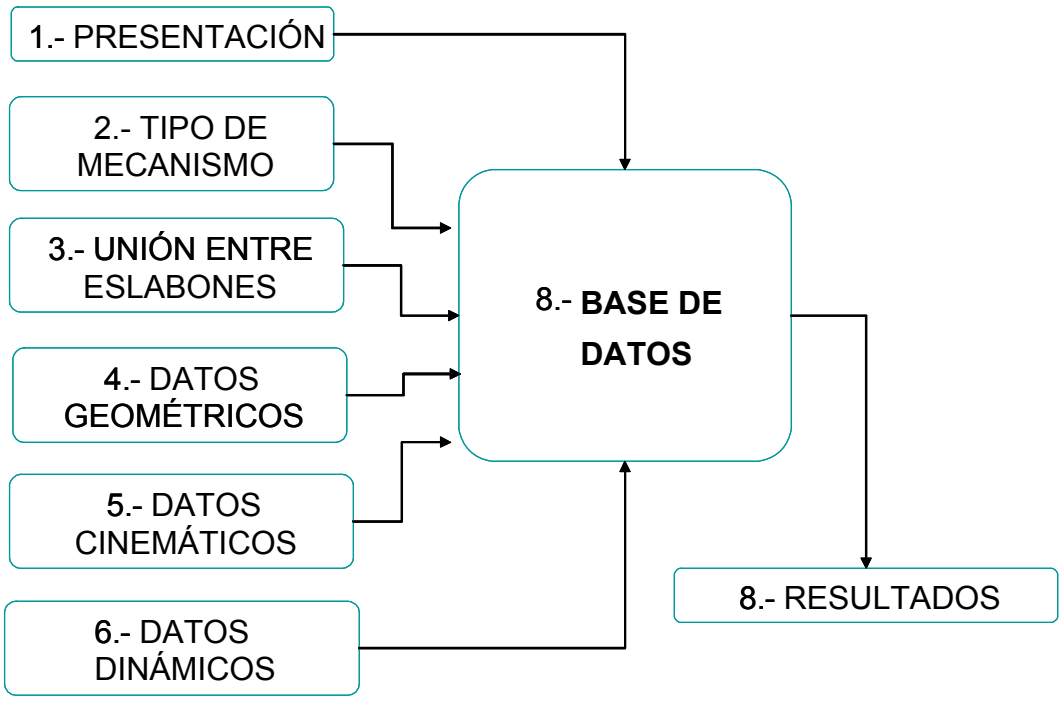



Figura 5.3 Estructura del programa.

Por lo tanto, en la base de datos se concentra toda la información necesaria para poder llevar a cabo el análisis dinámico de un mecanismo [Mat01]. La base de datos contiene:

a) El tipo de Sistema.
b) Las uniones posibles que existen entre los eslabones para conformar un mecanismo con un GDL.
c) La posición que deben tener las propiedades geométricas de cada eslabón dentro del arreglo matricial.
d) La posición que deben tener las variables cinemáticas de cada eslabón dentro del arreglo matricial.
e) La posición que deben tener las variables dinámicas de cada eslabón dentro del arreglo matricial.
f) El método numérico capaz de resolver el arreglo matricial con el mínimo error.

## 5.5 Funcionamiento del programa.

Requisitos del programa: Para que DAMSFORT funcione, es necesario tener instalado en el ordenador el paquete Framework en cualquiera de sus versiones. Este paquete es de libre distribución y se puede obtener de forma gratuita desde su página oficial http://www.microsoft.com/download [Fra06].

Para poder utilizar el programa DAMSFORT, es necesario tener algunos conocimientos previos de cinemática de mecanismos [Reu75], así como el contar con un diagrama de cuerpo libre del mecanismo donde se muestren las propiedades geométricas, cinemáticas y dinámicas del mismo [Ril96].

Consideraciones generales:

1. El programa trabaja por medio de ventanas o pantallas las cuales van cambiando de acuerdo como se va avanzando en el llenado de los datos.

2. Cuando se pide elegir alguna opción, el ratón deberá seleccionar la opción deseada por el usuario. Con un clic del ratón pasará a la siguiente ventana.
3. La inserción de datos se realiza situando el ratón encima de la posición deseada, haciendo click y, según el caso, se elegirá el valor de una lista desplegable que contendrá los valores válidos para las opciones y datos dados ya, o tecleando el valor por medio del teclado.
4. En caso de que sea necesario corregir los datos ya ingresados, estos podrán ser modificados colocándose nuevamente en la posición a modificar, utilizando el ratón para el posicionamiento y el teclado para realizar la modificación del valor.
5. Para el cambio de ventanas, una vez que se tienen todos los datos necesarios ingresados, se moverá el ratón a la palabra CONTINUAR.
6. Si se quiere realizar cambios en las pantallas anteriores, sólo haría falta hacer click en el botón "Atrás" para volver sobre nuestros pasos y poder modificar los datos anteriores y/o revisar los datos insertados.
7. El programa no es adimensional, por lo que se deben ingresar los datos en el Sistema Internacional.

### 5.5.1 Pantalla inicial.

Al inicializar el programa nos aparecerá esta pantalla inicial en la cual se muestra el nombre de la institución, el nombre del programa, así como la opción de entrar o de salir del mismo. Para comenzar a trabajar con el programa pulsar sobre el botón ENTRAR, para salir, pulsar sobre el botón SALIR.

Figura 5.4 Pantalla de presentación

## 5.5.2 Tipo de mecanismo.

Al comenzar el programa se nos muestra la siguiente página, donde podemos elegir el TIPO DE MECANISMO que se pretende analizar y que podremos seleccionar, pulsando sobre el engranaje azul que precede la opción elegida.

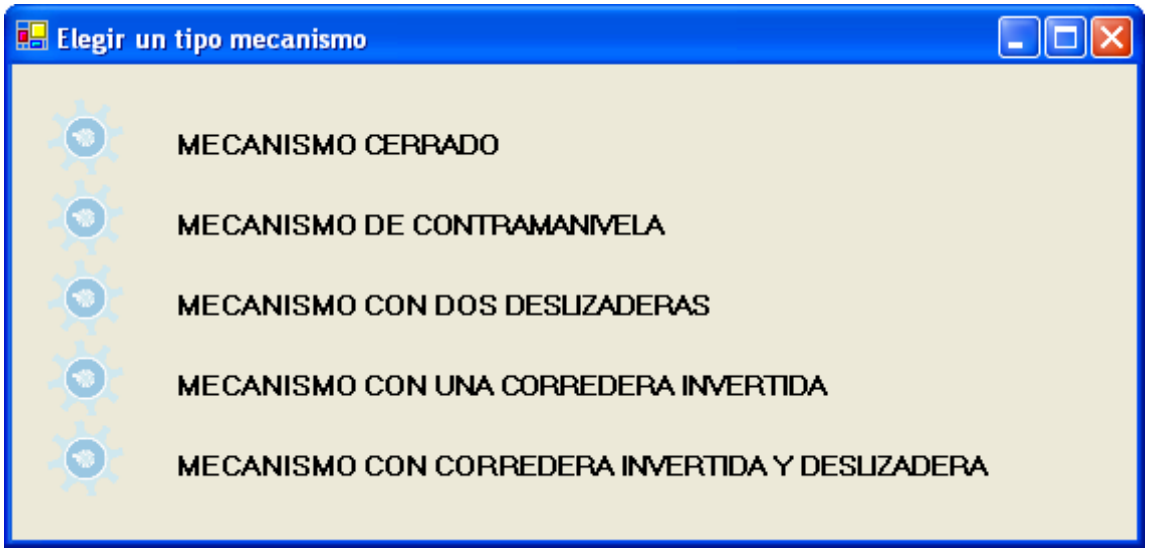



Figura 5.5 Ventana del tipo de mecanismo.

Donde:

1. Mecanismo Cerrado (sin deslizadera). (Figura 5.6) [Bur79]: en el cual los eslabones son de tipo binario, ternario o cuaternario y dos o tres de ellos están unidos a un eslabón fijo. Por ejemplo los mecanismos de Watt o Stephenson.

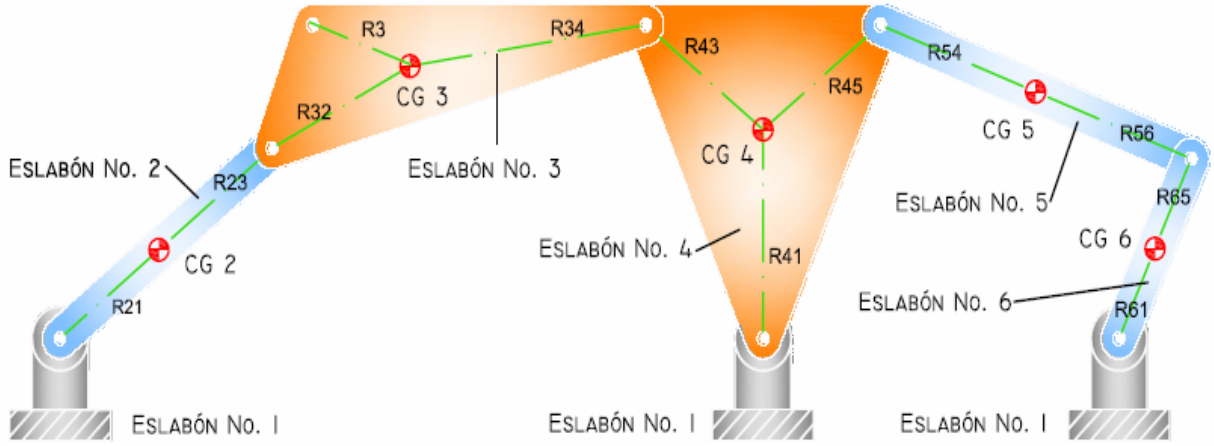



Figura 5.6 Mecanismo cerrado de seis eslabones y un GDL.

2. Mecanismo de Contramanivela (figuras 5.7, 5.8 y 5.9) [Sim02]: este mecanismo esta compuesto por una deslizadera y cinco eslabones, que pueden ser binarios o ternarios.

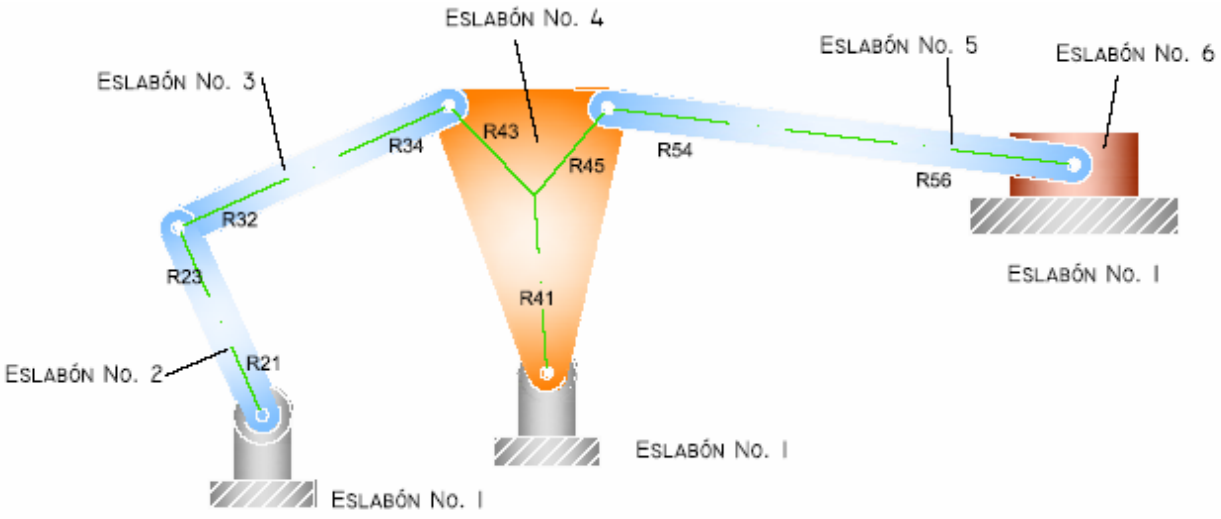



Figura 5.7 Mecanismo de Contramanivela, con seis eslabones y un GDL

Este mecanismo se utiliza abundantemente en máquinas cepilladoras, punzonadoras y de corte. Una variante del mismo es el mecanismo de gas de Atkinson.

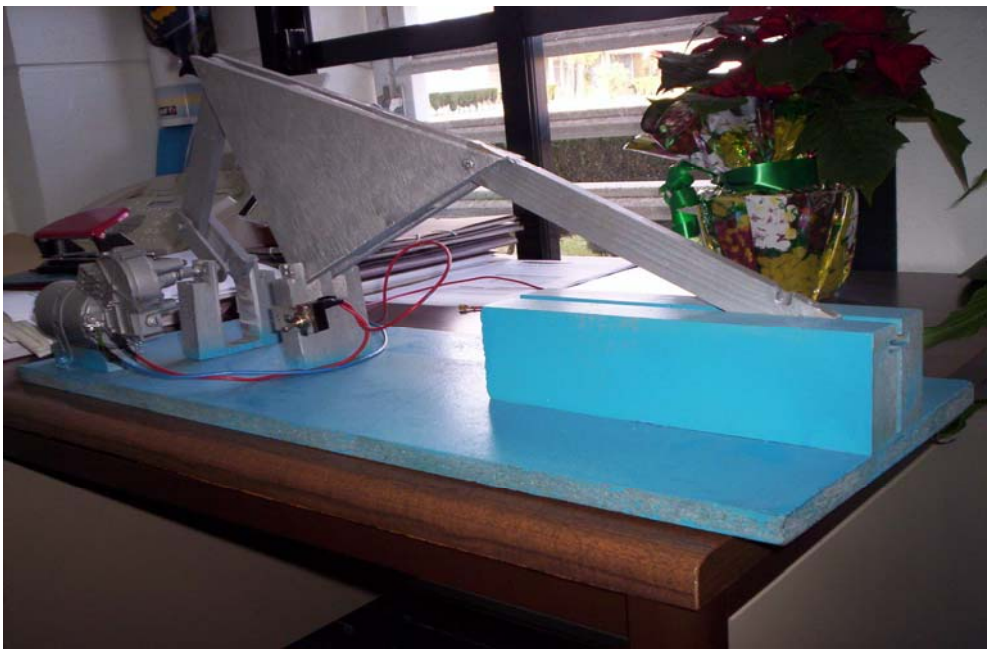


Figura 5.8 Prototipo de mecanismo de Contramanivela.

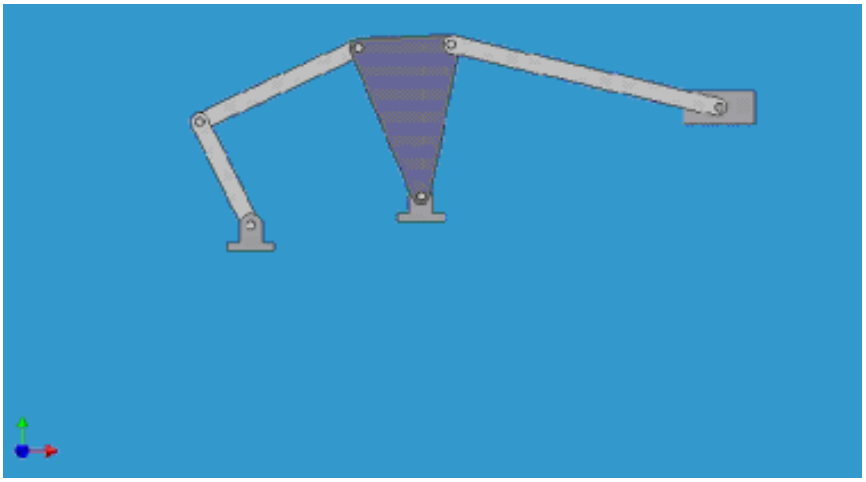


Figura 5.9 Modelizado del mecanismo de Contramanivela con Autodesk Inventor

3. Mecanismo con dos Deslizaderas [HCR80]: este mecanismo esta compuesto por dos correderas y cuatro eslabones. En estos casos se toma a una deslizadera como eslabón número seis unido al eslabón número cuatro

mientras que a la otra deslizadera es el eslabón número cinco y estará unido al eslabón número tres que es de tipo ternario, actuando el eslabón 2 como eslabón motor (figura 5.10). Este mecanismo se utiliza en bombas y sistemas de impulsión.

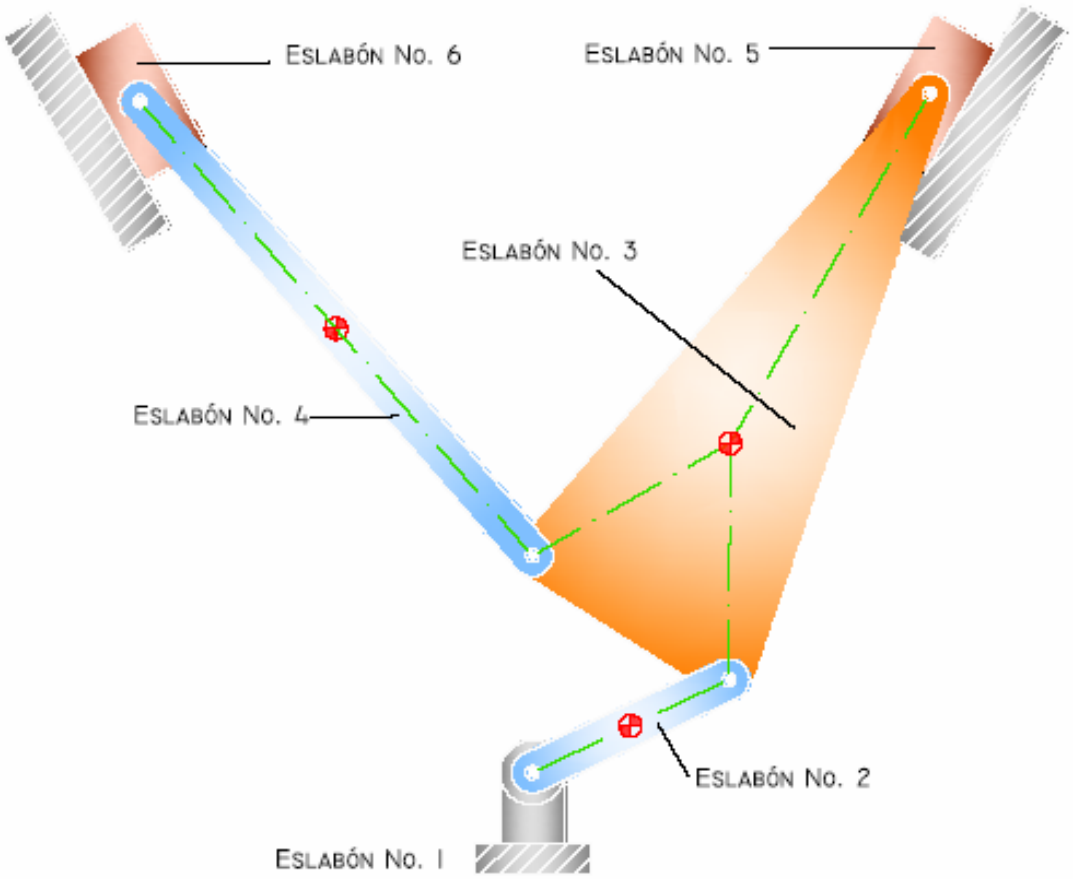



Figura 5.10 Mecanismo con dos deslizaderas

4. Mecanismo de de colisa [Koz81]: este mecanismo está compuesto por una corredera invertida y cinco eslabones. En este caso se toma a la corredera invertida como el eslabón número tres y está unido al eslabón número dos y se desplaza a través del eslabón número cuatro (figura 5.11). Los eslabones de colisa se utilizan con profusión para conseguir mecanismos de retroceso rápido

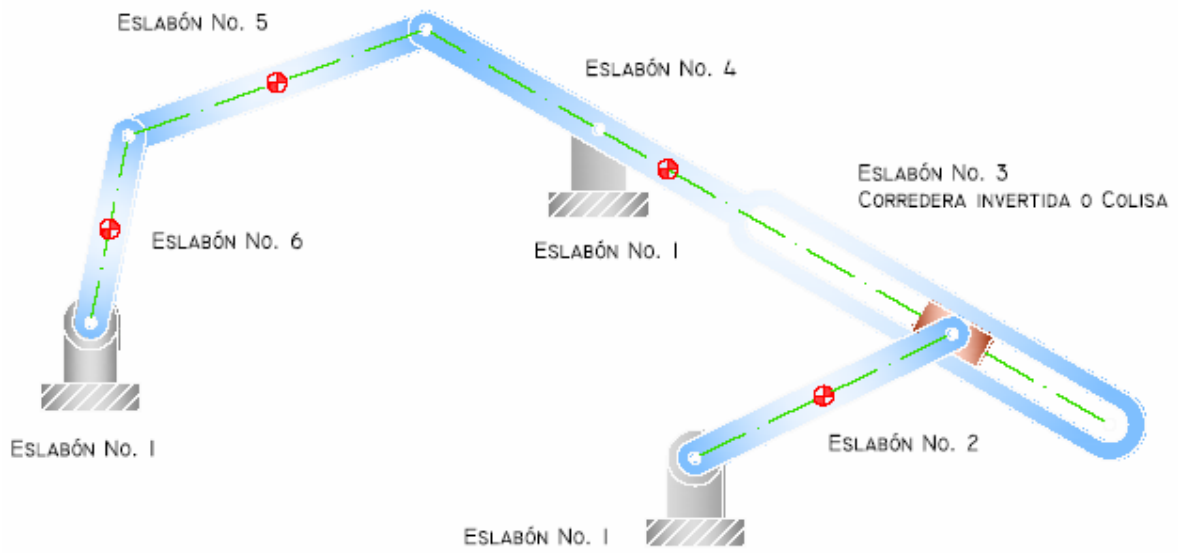



Figura 5.11 Mecanismo de colisa

5. Mecanismo de colisa y deslizadera [HCR80]: es en mecanismo compuesto por una corredera invertida, una deslizadera y cuatro eslabones. En este caso se toma como eslabón número tres a la corredera invertida, unida al eslabón número dos y se desplaza a través del eslabón número cuatro; la deslizadera es el eslabón número seis y esta unido al eslabón número cinco (figura 5.12).

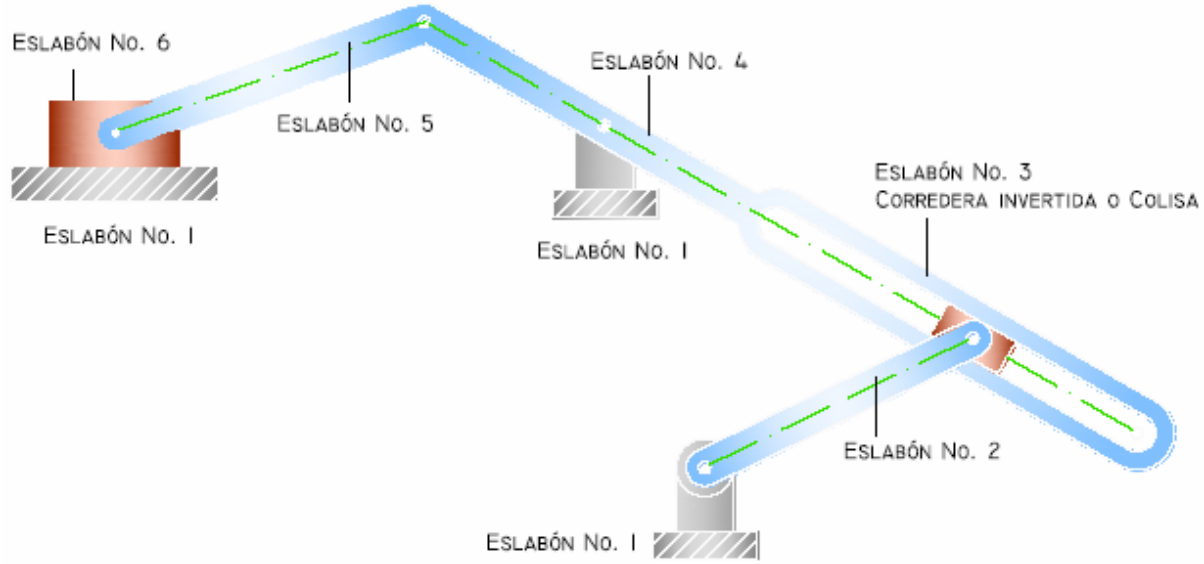



Figura 5.12 Mecanismo con corredera invertida y una deslizadera

Al pulsar la opción, se inicializarán las variables internas con valores significativos, y se creará una matriz numérica de tipo real, de cardinalidad dependiente del tipo de mecanismo elegido. Esta matriz va a ser fundamental para obtener el resultado final, ya que durante el desarrollo del programa, se le irán añadiendo los valores y será llamada por diversas funciones para realizar operaciones esenciales del programa.

## 5.5.3 Uniones entre eslabones.

Una vez elegido el tipo de mecanismo, seleccionamos las conexiones de cada eslabón con el resto de eslabones que conforman el mecanismo. Si nos hemos equivocado al elegir el mecanismo, podremos volver sobre nuestros pasos en el botón "Atrás". Para confirmar las conexiones, pulsamos el botón "CONTINUAR":

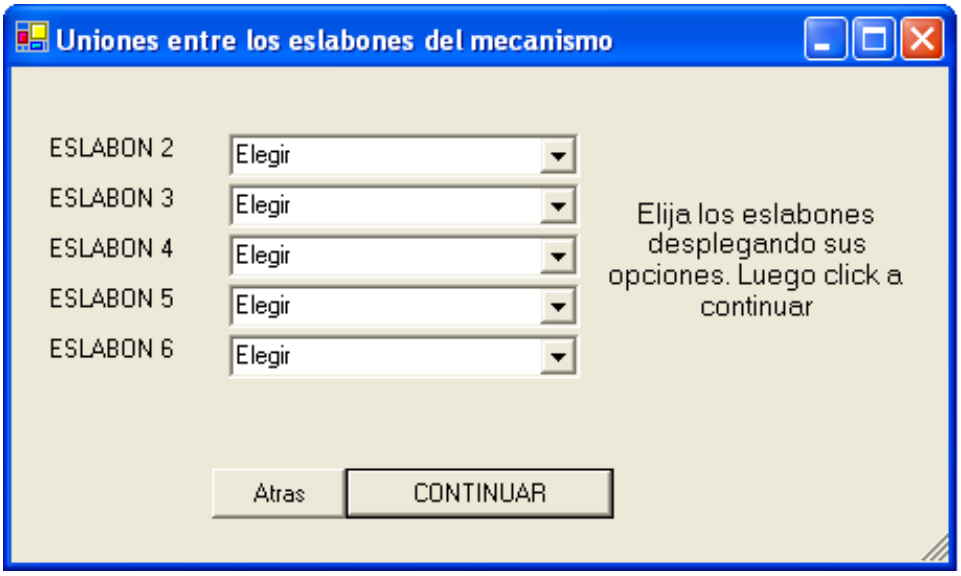



Figura 5.13 Ventana de la unión entre los eslabones del mecanismo

En esta pantalla quedarán reflejados la unión entre el eslabón de referencia y los eslabones con los que interactúa, respetando la nomenclatura que se ha definido con anterioridad en el apartado 5.2, donde se indica la numeración de los eslabones, así como la unión entre ellos. Una vez que se tienen enumerados los eslabones (basándose en un esquema físico para su mayor comprensión), se procederá a la

captura de los datos a través del menú desplegable que aparece en la pantalla. En caso de haber elegido las opciones con deslizaderas, el último carácter será una letra que identifica que es la deslizadera y la posición en la que se encuentra; para las deslizaderas normales, se utilizará la letra H cuando la deslizadera este en posición horizontal y la letra V para la posición vertical; en caso de elegir la corredera invertida se utilizará la letra I para indicarlo. A continuación se presenta un ejemplo de cómo definir la unión entre los eslabones de un mecanismo:

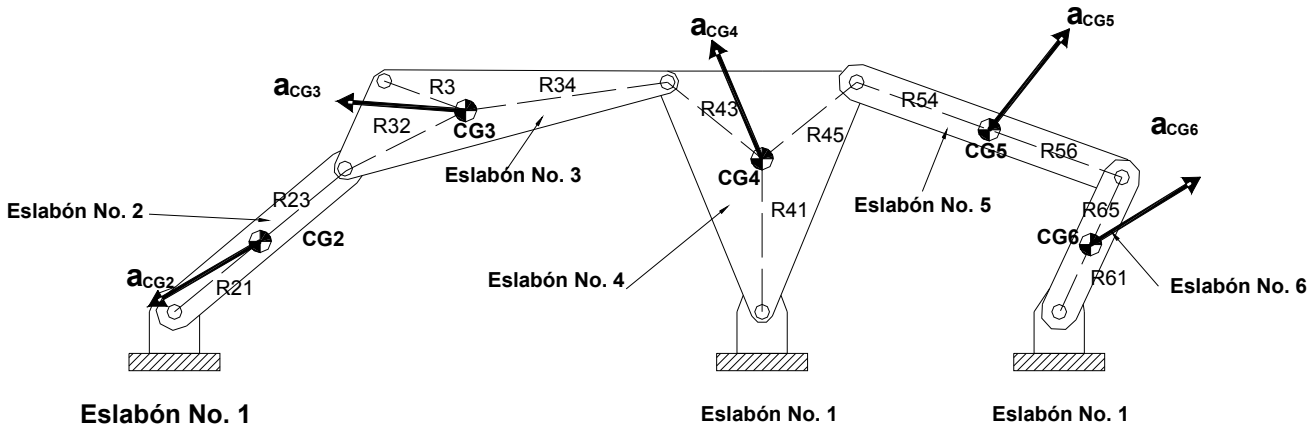



Figura 5.14 Mecanismo cerrado de seis eslabones y un GDL.

En la figura 5.14 se muestra un mecanismo sin deslizaderas ni correderas donde se identifican:

a) Una manivela. Le corresponde ser el eslabón número dos y esta unido al eslabón fijo (numero uno) y a un eslabón oscilador (número tres); por lo tanto el eslabón número dos es el pivote e interactúa con los eslabones número dos y tres, por lo tanto, en el menú desplegable que nos aparece en el apartado "ESLABON 2" de la ventana de unión entre eslabones, se elegirá el siguiente valor: 123.

b) El eslabón número tres es un oscilador y está unido a una manivela (eslabón número dos) y a un eslabón acoplador (número cuatro). Por lo tanto el eslabón pivote número tres interactúa con los eslabones número dos y cuatro. Al pulsar sobre la flecha que abre el menú desplegable del "ESLABÓN 3", elegiremos el valor: 234.

c) El eslabón pivote número cuatro interactúa con los eslabones número uno, tres y cinco, por tanto seleccionaremos el valor 1345 del menú desplegable de la posición "ESLABÓN 4".

d) El eslabón pivote número cinco interactúa con los eslabones número cuatro y seis. Del menú que aparece en la posición del "ESLABÓN 5" de la ventana de unión entre eslabones, se elegirá el siguiente valor: 456.

e) El eslabón pivote número seis interactúa con los eslabones número uno y cinco, y seleccionaremos el valor 156 de las posibilidades que se nos brindan para la posición "ESLABÓN 6" de la ventana de unión entre eslabones.

En caso de no ingresar los valores correctamente o elegir combinaciones no posibles, aparecerá un mensaje indicando que el valor es incorrecto.

Al cargase esta ventana, el sistema evaluará según el tipo de Mecanismo elegido, qué sistemas de uniones entre los eslabones son posibles y estén permitidos en su base de datos para cada tipo de unión, y estos serán cargados en un menú desplegable, que serán mostrados al pinchar en él, facilitando la elección al usuario, ya que sólo tendrá que seleccionarlo de entre todos los posibles que le son mostrados.

Al pulsar en el botón "Continuar", el programa cargará los valores seleccionados y se llamará a una función para que haga un volcado de los datos en la matriz creada anteriormente, pero en unas posiciones de coordenadas diferentes según el

mecanismo y las uniones entre los elementos que lo componen. Posteriormente se asegura de que todo el proceso no haya dado ningún error y termina el procedimiento, con la seguridad de no dañar la base de datos interna, asegurándose que todo se haya realizado sin fallos.

En el caso de que haya que volver a introducir los datos por segunda vez u otras sucesivas, el programa vuelve a validar todas las nuevas comprobaciones para el sistema de datos.

## 5.5.4 Propiedades geométricas del mecanismo.

Esta pantalla, figura 5.15, procederá a llenarse con las distancias existentes entre el centro de gravedad del eslabón pivote a las juntas en las que se unen con otros eslabones.

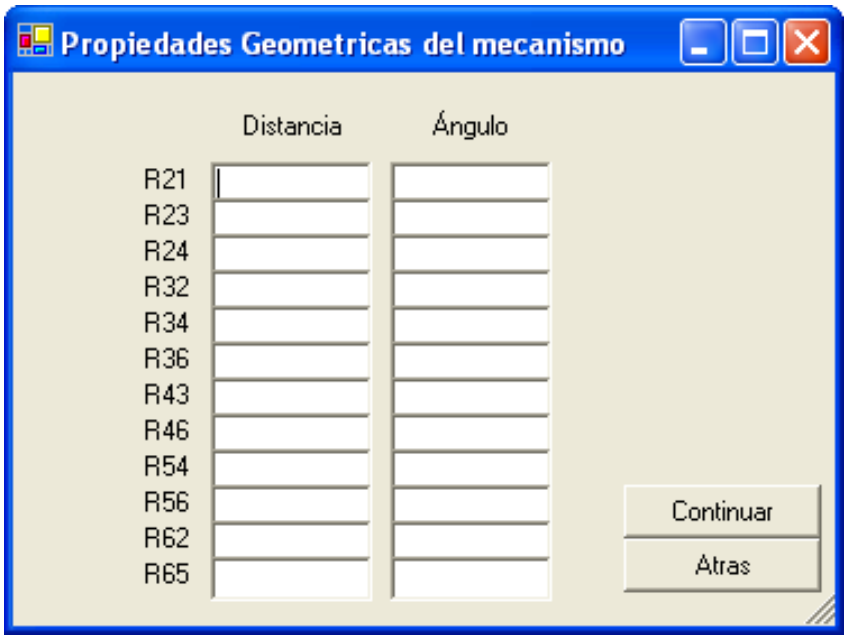



Figura 5.15 Ventana de datos geométricos

Los datos ingresados deben de cuantificarse en las unidades del sistema internacional, mientras que el valor del ángulo es tomado siempre de la referencia del centro de gravedad por cada eslabón, teniendo en cuenta que los ángulos positivos

son medidos en sentido antihorario y los negativos en sentido opuesto, desde una horizontal positiva. Cuando se elige la opción con deslizadera se pedirá el valor de U (μ) que es el coeficiente de rozamiento, y cuando se tenga una corredera invertida se pedirá el valor de $\theta_3$; este valor se obtiene del análisis cinemático, y aparecerá la literal S/D que significa sin dato. En caso de que sea necesario corregir los datos ya capturados, estos podrán ser modificados como se mencionó en las características generales, sección 5.3.

Al cargar la ventana que se va a mostrar al usuario, el programa evalúa las posibles opciones de inserción de datos por medio de funciones que invocan a referencias de los datos introducidos anteriormente en la base de datos. Gracias a esto, solo habrá un número exacto de datos que introducir, simplificando notablemente la tarea del usuario. Al pulsar el botón de "Continuar", el programa llama a un procedimiento que crea una nueva matriz que tiene como función modificar unas coordenadas específicas, sobrescribiendo los valores actuales y pasar la nueva matriz al sistema de almacenaje de datos.

## 5.5.5 Propiedades cinemáticas del mecanismo.

Esta ventana contendrá los datos cinemáticos del mecanismo (calculados con anterioridad).

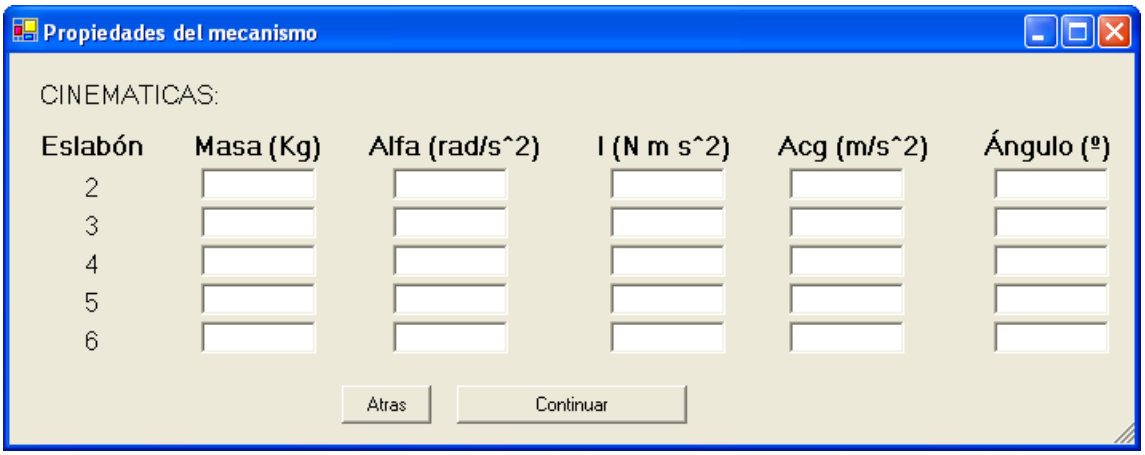



Figura 5.16 Ventana de las propiedades cinemáticas del mecanismo.

Donde:

| | |
|---|---|
| MASA | se ingresará el dato de la masa del eslabón pivote. |
| Alfa | es la aceleración angular del eslabón pivote. |
| I | es el momento de inercia del eslabón pivote. |
| Ag | es la aceleración del eslabón pivote en su centro de gravedad. |
| Angulo | es el ángulo del vector de aceleración. |

En caso de que sea necesario corregir los datos ya capturados, estos podrán ser modificados como se mencionó anteriormente en las características generales.

Al pulsar el botón continuar, el programa invoca varias funciones para crear una nueva matriz auxiliar e insertar los datos cinemáticos, pasando los valores del dato, caracteres recibidos por teclados, al tipo dato numérico necesario. Estos datos serán asignados en la base de datos para su futura utilización.

## 5.5.6 Propiedades dinámicas del mecanismo.

En caso de existir fuerzas o momentos de torsión externos actuando sobre el mecanismo analizado se usará esta ventana para proporcionar los datos dinámicos.

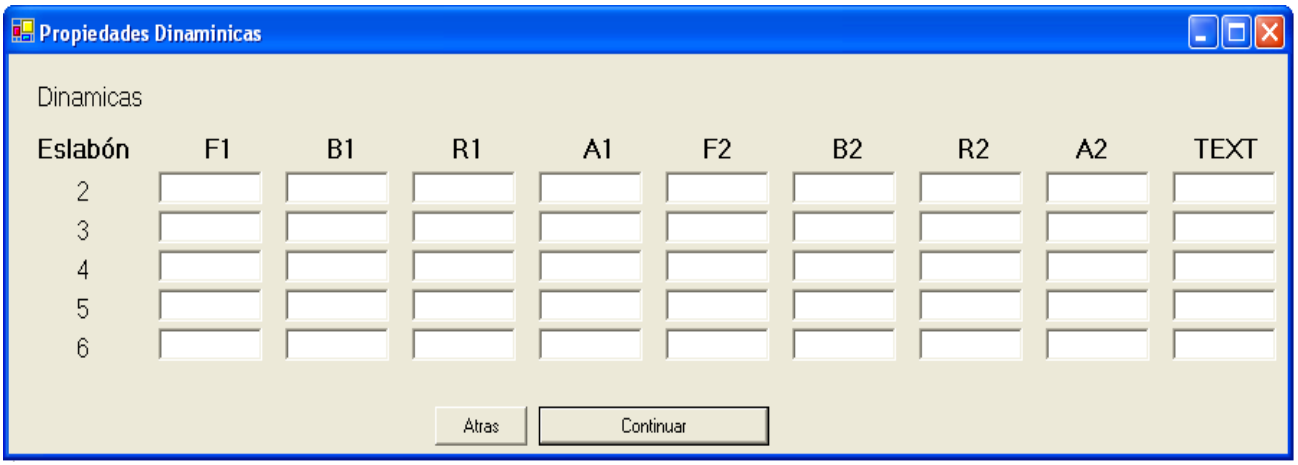



Figura 5.17 Ventana de las propiedades dinámicas

Donde:

**F1** Fuerza externa sobre cada eslabón.

**B1** Ángulo de la fuerza externa.

**R1** Distancia entre el centro de gravedad (CG) del eslabón y la fuerza externa.

**A1** Ángulo de la distancia.

**F2** Una segunda fuerza externa sobre alguno de los eslabones

**B2** Ángulo de la segunda Fuerza externa.

**R2** Distancia entre el centro de gravedad del eslabón y la segunda fuerza externa.

**A2** Ángulo de la distancia.

**Text** Momento de torsión externo sobre el mecanismo.

El método para corregir los datos ya ha sido comentado anteriormente en el texto.

Nuevamente, al pulsar el botón continuar, el programa invoca varias funciones para crear una nueva matriz auxiliar e insertar, en este caso, los datos dinámicos, pasando los valore recibidos al tipo dato numérico necesario. Estos datos serán asignados en la base de datos para su futura utilización.

## 5.5.7 Resultados.

Esta pantalla muestra las fuerzas de reacción presentes en cada junta, referenciadas al eje coordenado ubicado en el centro de gravedad de cada eslabón, así como el momento de torsión de entrada del mecanismo.

Figura 5.18 Ventana de resultados

Llegado este momento, el programa ya tiene todos los datos necesarios para poder analizar el sistema y dar la solución. Se llaman a las funciones matriciales, para desarrollar dentro de su ámbito con cada matriz, una serie de soluciones, las cuales se vuelven a operar para elaborar la solución final en forma de matriz [Sha98], la cual se ha de pasar los parámetros al tipo de datos imprimibles por pantalla y luego invoca a una función que los muestre ordenadamente por pantalla.

## 5.5.8 Menú de salida.

Si pulsamos la tecla salir en la ventana anterior, nos aparece una nueva pantalla en la que tenemos el menú de salida, donde se pueden ver diferentes informaciones y la opción de salir definitivamente del programa.

Figura 5.19 Ventana del menú de salida.

A continuación se resolverán unos problemas, para la mejor comprensión del funcionamiento y uso del programa.

## 5.6 Validación del método.

A continuación se presentan una serie de ejemplos de Dinámica de Sistemas Multicuerpo resueltos mediante métodos analíticos matriciales y el mismo caso mediante el programa DAMSFORT, para poder hacer una validación del método propuesto en esta tesis doctoral:

**Ejemplo No. 1**

Se desean conocer las fuerzas ejercidas sobre las juntas del siguiente mecanismo de seis eslabones y un grado de libertad.

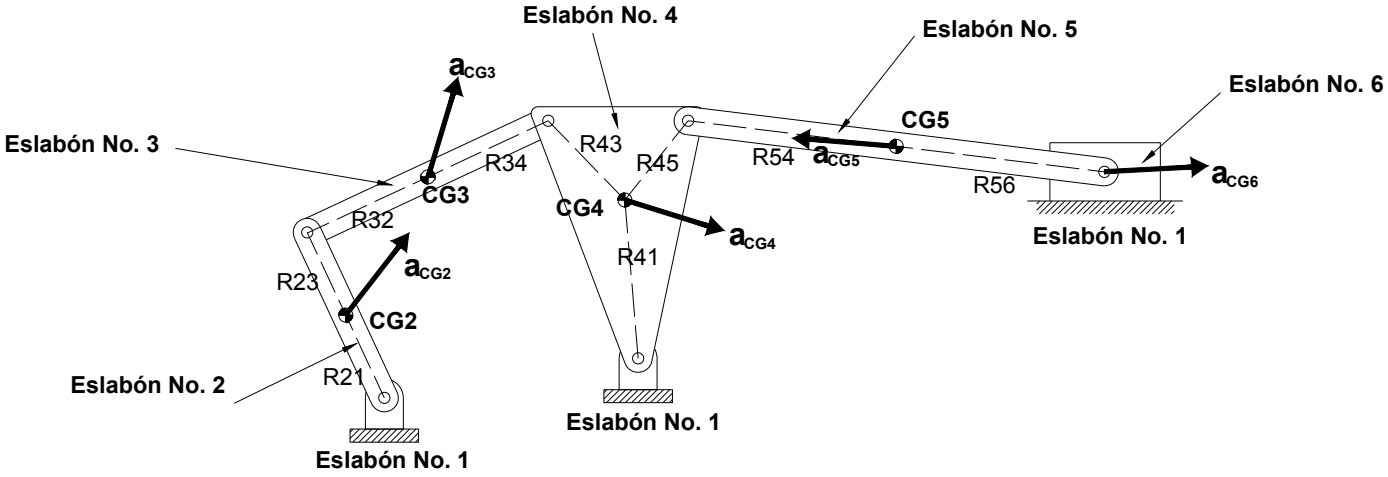



Figura 5.20 Mecanismo de Contramanivela, con seis eslabones y un GDL.

Datos geométricos:

| Eslabón | | Magnitud (mm) | Ángulo (°) |
|---|---|---|---|
| 2 | $R_{21}$ | 33.00 | 295.00 |
| | $R_{23}$ | 33.00 | 115.00 |
| 3 | $R_{32}$ | 45.50 | 205.00 |
| | $R_{34}$ | 45.50 | 25.00 |
| 4 | $R_{41}$ | 56.83 | 274.81 |
| | $R_{43}$ | 49.39 | 134.04 |
| | $R_{45}$ | 36.24 | 51.38 |
| 5 | $R_{54}$ | 75.00 | 173.00 |
| | $R_{56}$ | 75.00 | 353.00 |

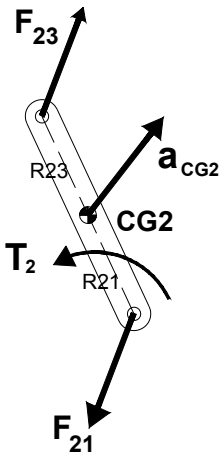
Coeficiente de fricción de la corredera ($\mu$) = -0.180

Datos cinemáticos:

| Eslabón | Masa (Kg) | α (rad/s$^2$) | I (N m s$^2$) | $a_{CG}$ (m/s$^2$) | Ángulo (°) |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1.0 | 0 | 0.53 | 1.43 | 52.151 |
| 3 | 3.0 | 1.51 | 0.82 | 6.82 | 73.219 |
| 4 | 5.0 | 3.41 | 1.81 | 4.25 | 342.631 |
| 5 | 2.5 | 2.03 | 0.42 | 2.45 | 175.314 |
| 6 | 1.7 | 1.84 | 1.20 | 3.5 | 3.103 |

A continuación se procede a realizar el DCL de cada eslabón, y se obtienen las ecuaciones de equilibrio.

**Eslabón 2:**




$$F_{21x} + F_{23x} = m_2\, a_{CG2x}$$

$$F_{21y} + F_{23y} = m_2\, a_{CG2y}$$

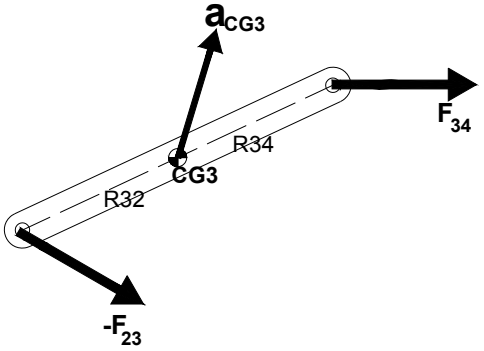
$$R_{21x}\, F_{21y} - R_{21y}\, F_{21x} + R_{23x}\, F_{23y} - R_{23y}\, F_{23x} + T_2 = I_2\, \alpha_2$$

**Eslabón 3:**

$$-F_{23x} + F_{34x} = m_3\, a_{CG3x}$$

$$-F_{23y} + F_{34y} = m_3\, a_{CG3y}$$

$$-R_{32x}\, F_{23y} + R_{32y}\, F_{23x} + R_{34x}\, F_{34y} - R_{34y}\, F_{34x} = I_3\, \alpha_3$$

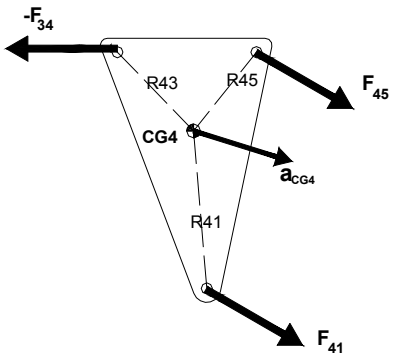



**Eslabón 4:**

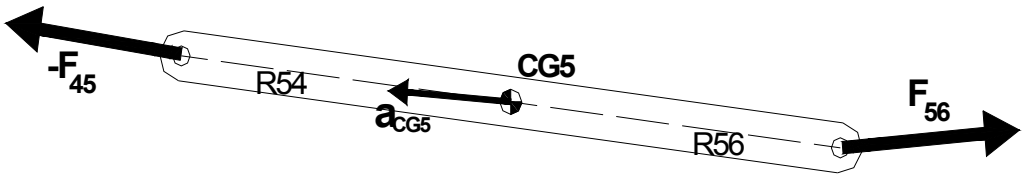
$$-F_{34x} + F_{41x} + F_{45x} = m_4\, a_{CG4x}$$

$$-F_{34y} + F_{41y} + F_{45y} = m_4\, a_{CG4y} -$$

$$-R_{43x}\, F_{34y} + R_{43y}\, F_{34x} + R_{41x}\, F_{41y} - R_{41y}$$



**Eslabón 5:**



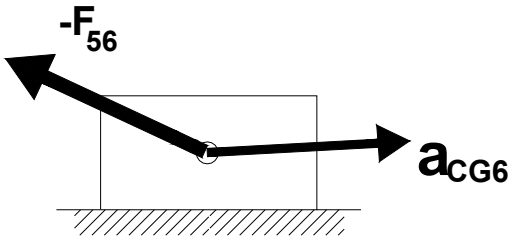

$$-F_{45x} + F_{56x} = m_5\, a_{CG5x}$$

$$-F_{45y} + F_{56y} = m_5\, a_{CG5y}$$

$$-R_{54x}\ F_{45y} + R_{54y}\ F_{45x} + R_{56x}\, F_{56y} - R_{56y}\, F_{56x} = I_5\, \alpha_5$$

$$F_{41x} + R_{45x}\, F_{45y} - R_{45y}\, F_{45x} = I_4\, \alpha_4$$

**Eslabón 6:**




$$-F_{56x} - \mu F_{61y} = m_6\, a_{CG6x}$$

$$-F_{56y} - F_{61y} = 0$$

$$F_{61x} = \mu F_{61y}$$

Se calculan las componentes de los vectores de posición, aceleración y fuerza:

| | |
|---|---|
| $R_{21x}$ | 0.01395 |
| $R_{23x}$ | -0.01395 |
| $R_{32x}$ | -0.04305 |
| $R_{34x}$ | 0.04305 |
| $R_{41x}$ | 0.00477 |
| $R_{43x}$ | -0.03433 |
| $R_{45x}$ | 0.02262 |
| $R_{54x}$ | -0.07444 |
| $R_{56x}$ | 0.07444 |
| $a_{CG2x}$ | 0.87742 |
| $a_{CG3x}$ | 1.96903 |
| $a_{CG4x}$ | 4.05621 |
| $a_{CG5x}$ | -2.44181 |
| $a_{CG6x}$ | 3.04553 |

| | |
|---|---|
| $R_{21y}$ | -0.02991 |
| $R_{23y}$ | 0.02991 |
| $R_{32y}$ | -0.02007 |
| $R_{34y}$ | 0.02007 |
| $R_{36y}$ | -0.05663 |
| $R_{41y}$ | 0.03550 |
| $R_{43y}$ | 0.02831 |
| $R_{45y}$ | 0.00914 |
| $R_{63y}$ | -0.00914 |
| $a_{CG2y}$ | 1.12917 |
| $a_{CG3y}$ | 6.52957 |
| $a_{CG4y}$ | -1.26873 |
| $a_{CG5y}$ | 0.20015 |
| $a_{CG6y}$ | 0.16510 |

Con las ecuaciones obtenidas en los DCL se procede a expresarlos en un arreglo matricial:

**A**

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $-R_{21}y$ | $R_{21}x$ | $-R_{23}y$ | $R_{23}x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | $R_{32}y$ | $-R_{32}x$ | $-R_{34}y$ | $R_{34}x$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | $R_{43}y$ | $-R_{43}x$ | $-R_{41}y$ | $R_{41}x$ | $-R_{45}y$ | $R_{45}x$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $R_{54}y$ | $-R_{54}x$ | $-R_{56}y$ | $R_{56}x$ | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | $\mu$ | 0 |
| 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 |

**B**

| |
|---|
| $F_{21}x$ |
| $F_{21}y$ |
| $F_{23}x$ |
| $F_{23}y$ |
| $F_{34}x$ |
| $F_{34}y$ |
| $F_{41}x$ |
| $F_{41}y$ |
| $F_{45}x$ |
| $F_{45}y$ |
| $F_{56}x$ |
| $F_{56}y$ |
| $F_{61}y$ |
| T |

=

**C**

| |
|---|
| $m_2\ a_{CG2}x$ |
| $m_2\ a_{CG2}y$ |
| $I_2\ \alpha_2$ |
| $m_3\ a_{CG3}x$ |
| $m_3\ a_{CG3}y$ |
| $I_3\ \alpha_3$ |
| $m_4\ a_{CG4}x$ |
| $m_4\ a_{CG4}y$ |
| $I_4\ \alpha_4$ |
| $m_5\ a_{CG5}x$ |
| $m_5\ a_{CG5}y$ |
| $I_5\ \alpha_5$ |
| $m_6\ a_{CG6}x$ |
| 0 |

Una vez planteada la ecuación matricial, se calculan los datos de la matriz C, sustituyendo por sus valores:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $m_2\ a_{CG2x}$ | = | 1.0 x 0.87742 | = | 0.8774 |
| $m_2\ a_{CG2y}$ | = | 1.0 x 1.12917 | = | 1.1292 |
| $I_2\ \alpha_2$ | = | 0.53 x 0 | = | 0.0000 |
| $m_3\ a_{CG3x}$ | = | 3.0 x 1.96903 | = | 5.9071 |
| $m_3\ a_{CG3y}$ | = | 3.0 x 6.52957 | = | 19.5887 |
| $I_3\ \alpha_3$ | = | 0.82 x 1.51 | = | 1.2382 |
| $m_4\ a_{CG4x}$ | = | 5.0 x 4.05621 | = | 20.2811 |
| $m_4\ a_{CG4y}$ | = | 5.0 x –1.26873 | = | -6.3437 |
| $I_4\ \alpha_4$ | = | 1.81 x 3.41 | = | 6.1721 |
| $m_5\ a_{CG5x}$ | = | 2.5 x –2.44181 | = | -6.1045 |
| $m_5\ a_{CG5y}$ | = | 2.5 x 0.20015 | = | 0.5004 |
| $I_5\ \alpha_5$ | = | 0.42 x 2.03 | = | 0.8526 |
| $m_6\ a_{CG6x}$ | = | 1.7 x 3.04553 | = | 5.1774 |
| 0 | = | = | = | 0 |

Sustituyendo los valores obtenidos en el sistema matricial se obtiene:

| | A | | | | | | | | | | | | | B | | C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $F_{21}x$ | | 0.8774 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $F_{21}y$ | | 1.1292 |
| 0.0299 | 0.0140 | -0.0299 | -0.0139 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $F_{23}x$ | | 0.0000 |
| 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $F_{23}y$ | | 5.9071 |
| 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $F_{34}x$ | | 19.5887 |
| 0 | 0 | -0.0201 | 0.0431 | -0.0201 | 0.0431 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $F_{34}y$ | | 1.2382 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $F_{41}x$ | = | 20.28105 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $F_{41}y$ | | -6.3437 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0.0355 | 0.0343 | 0.0566 | 0.0048 | -0.0283 | 0.0226 | 0 | 0 | 0 | 0 | $F_{45}x$ | | 6.1721 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $F_{45}y$ | | -6.1045 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | $F_{56}x$ | | 0.5004 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.00914 | 0.0744 | 0.00914 | 0.0744 | 0 | 0 | $F_{56}y$ | | 0.8526 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -0.1800 | 0 | $F_{61}y$ | | 5.1774 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | T | | 0 |

Una vez que se tienen los valores del arreglo matricial, se procede a resolver el sistema por métodos numéricos o por algún programa que facilite la resolución de matrices, para obtener el valor de la matriz B, que representa a las fuerzas que actúan en las juntas de cada eslabón.

Resolviendo el sistema obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
F_{21x} &= -29.8100\ N \\
F_{21y} &= -19.1410\ N \\
F_{23x} &= 30.6880\ N \\
F_{23y} &= 20.2700\ N \\
F_{34x} &= 36.5950\ N \\
F_{34y} &= 39.8590\ N \\
F_{41x} &= 55.0980\ N \\
F_{41y} &= 25.6340\ N \\
F_{45x} &= -22.2167\ N \\
F_{45y} &= 5.8819\ N \\
F_{56x} &= -6.3262\ N \\
F_{56y} &= 6.3822\ N \\
F_{61y} &= 6.3822\ N \\
T &= 2.3593\ Nm
\end{aligned}
$$

$$F_{61x} = \mu F_{61y} = -0.18 \times 6.3822 = -1.1487\ N$$

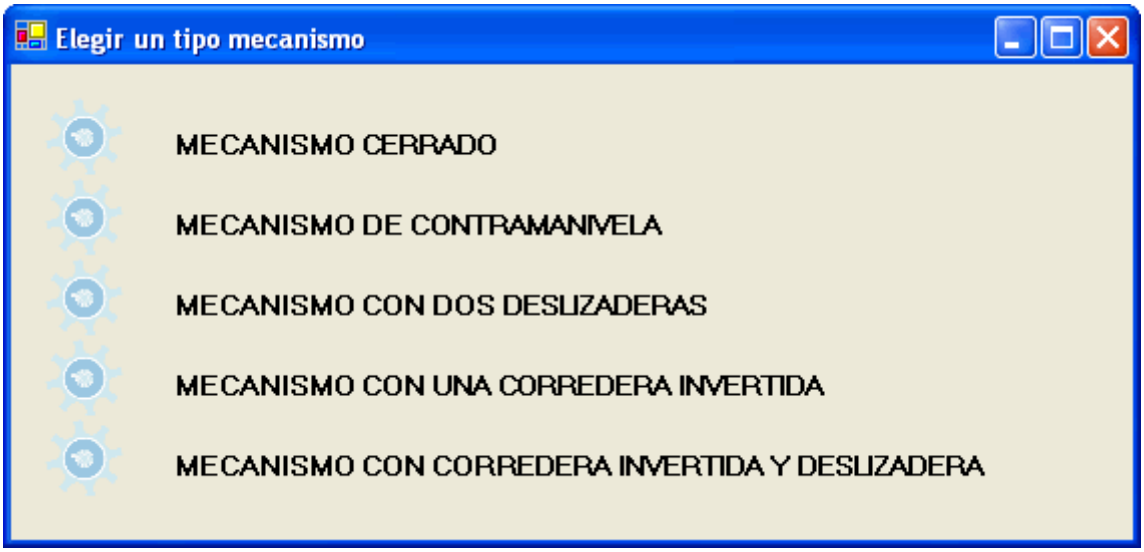
Y al convertir las fuerzas a coordenadas polares:

$$
\begin{aligned}
F_{21} &= 35.4270\ N < 212.7042° \\
F_{23} &= 36.7786\ N < 33.4459° \\
F_{34} &= 54.1108\ N < 45.4444° \\
F_{41} &= 63.4335\ N < 25.8255° \\
F_{45} &= 5.8860\ N < 92.1586° \\
F_{56} &= 5.9863\ N < 134.7475° \\
F_{61} &= 6.4848\ N < 100.2040° \\
T &= 2.3593\ Nm
\end{aligned}
$$

Resolviendo el mismo ejemplo, pero ahora utilizando el Programa DAMSFORT:

## 1. Tipo de Mecanismo

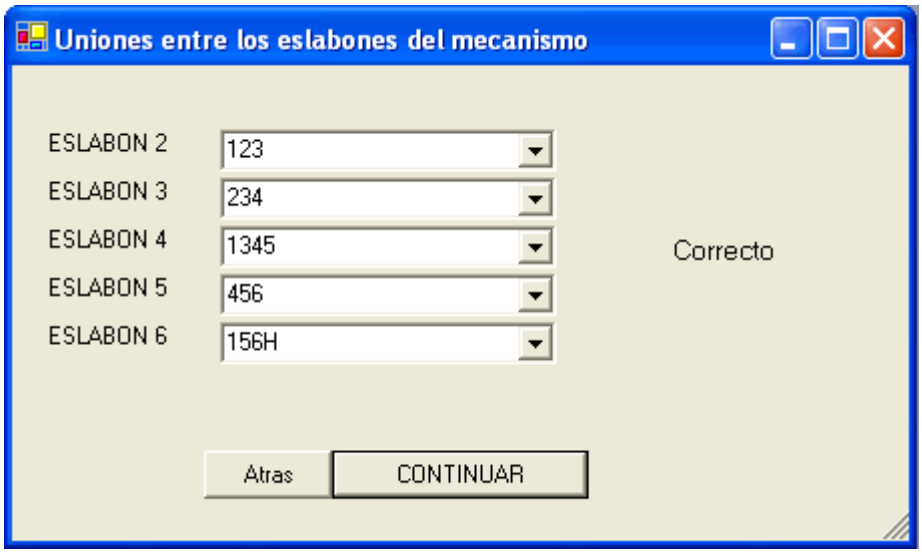
De la ventan de la figura 5.5 se selecciona el tipo de mecanismo:




Elegimos "MECANISMO DE CONTRAMANIVELA", pinchando en la segunda fila.

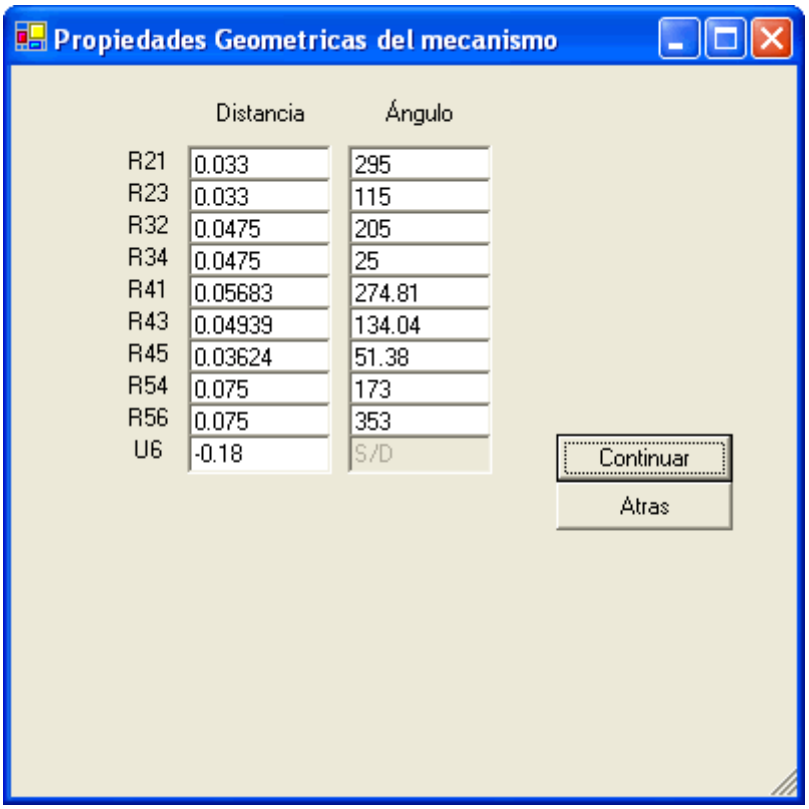
## 2. Unión entre eslabones

En la ventana de la figura 5.13 se determina la unión entre los eslabones:



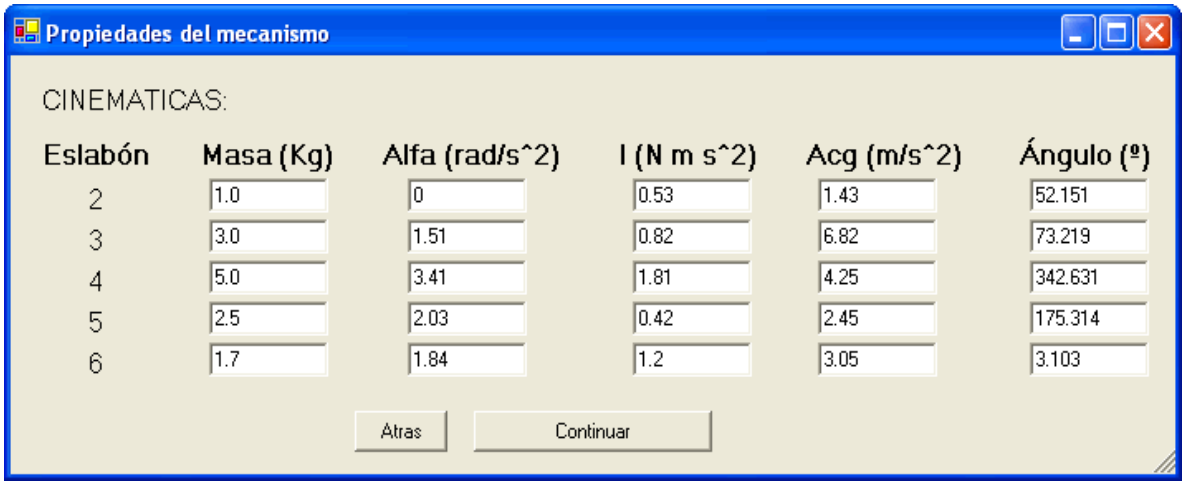
## 3. Propiedades geométricas del mecanismo

Ingresando los datos en la ventana de la figura 5.15, tenemos:




## 4. Propiedades cinemáticas del mecanismo

A partir de la información proporcionada tenemos:

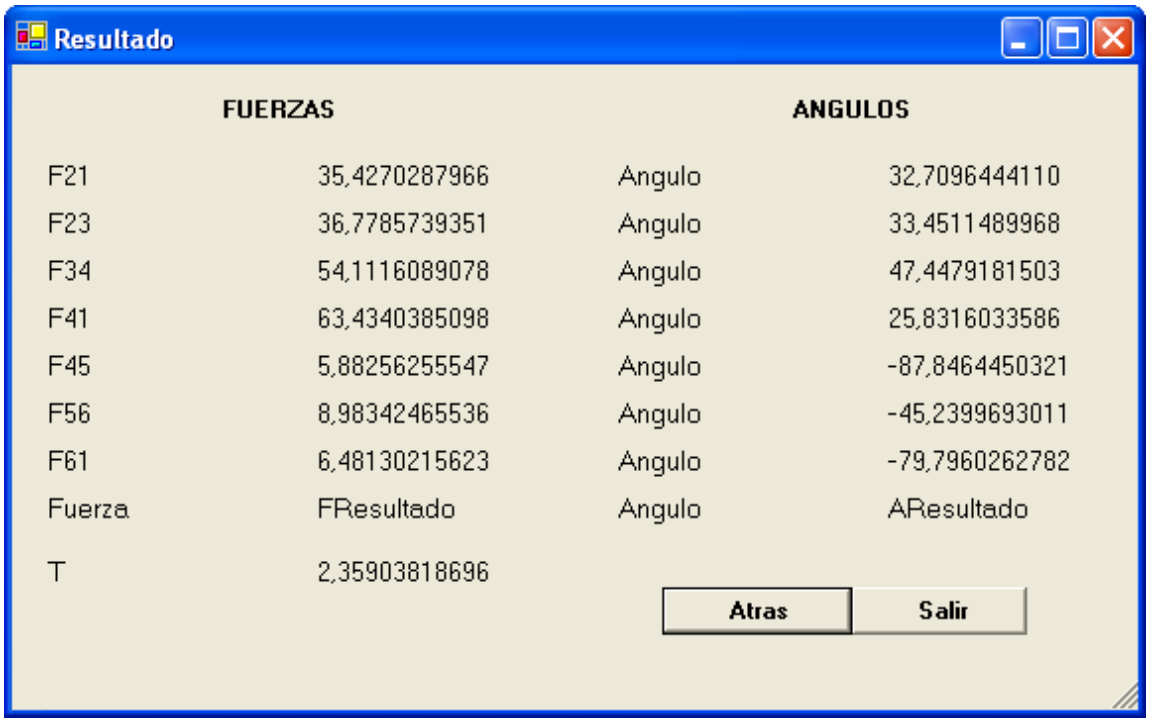


## 5. Propiedades dinámicas del mecanismo

No se cuenta con fuerzas o momentos de torsión externos, emplear la opción CONTINUAR.

## 6. Resultados

El programa da los siguientes resultados:




Como se puede observar existe una pequeña discrepancia entre los resultados obtenidos por el método matricial y por el Programa DAMSFORT. Esto es debido a que el programa tiene un menor error en el redondeo al manejar más cifras después del punto decimal. La precisión empleada en las operaciones del programa se ha conseguido por medio de un tipo numérico llamado “double”. Este tipo de dato permite una precisión para números, tanto positivos como negativos, comprendidos en unos rangos que permiten poder expresar hasta 324 decimales y manejar grandes cantidades, del orden de 10 elevado a 308.

## Ejemplo No. 2

Se desea conocer las fuerzas ejercida sobre las juntas del siguiente mecanismo de seis eslabones y un grado de libertad.

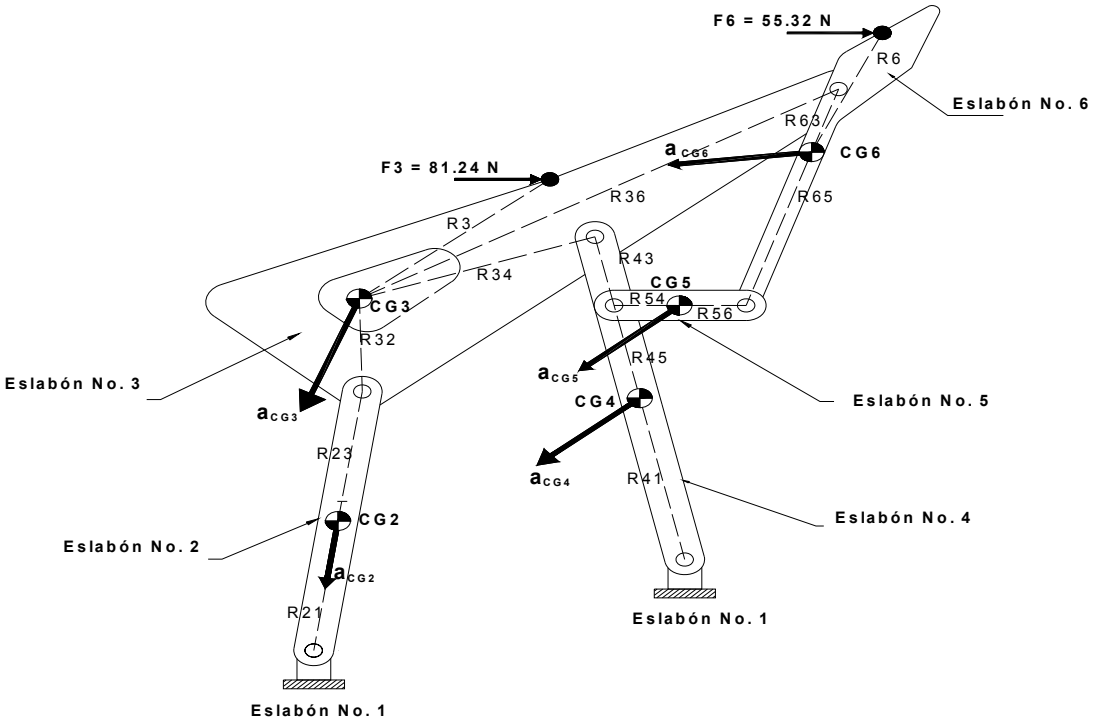



Figura 5.21 Mecanismo de seis eslabones sin corredera y un GDL.

Datos geométricos:

| Eslabón | | Magnitud (mm) | Ángulo (°). |
|---|---|---|---|
| 2 | $R_{21}$ | 69.00 | 261.887 |
| | $R_{23}$ | 69.00 | 81.887 |
| 3 | $R_{32}$ | 49.00 | 271.19 |
| | $R_{34}$ | 100.00 | 19.06 |
| | $R_{36}$ | 224.00 | 25.324 |
| 4 | $R_{41}$ | 85.00 | 281.94 |
| | $R_{43}$ | 85.00 | 101.94 |
| | $R_{45}$ | 35.12 | 101.94 |
| 5 | $R_{54}$ | 26.22 | 180 |
| | $R_{56}$ | 26.78 | 0 |
| 6 | $R_{63}$ | 35.00 | 65.372 |
| | $R_{65}$ | 85.00 | 245.372 |

Datos cinemáticos:

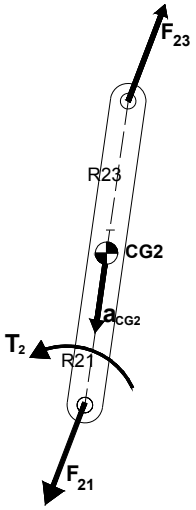
| Eslabón | Masa (Kg) | α (rad/s$^2$) | I (N m s$^2$) | $a_{CG}$ (m/s$^2$) | Ángulo (°) |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1.5 | 0 | 0.20 | 0.473 | 261.89 |
| 3 | 4.3 | 5.067 | 0.60 | 1.078 | 249.061 |
| 4 | 1.7 | 4.441 | 0.25 | 0.440 | 220.430 |
| 5 | 0.5 | 5.631 | 0.10 | 0.599 | 220.43 |
| 6 | 1.6 | 2.409 | 0.80 | 1.0518 | 186.70 |

Datos dinámicos:

| Eslabón | F ext. (N) | Ángulo (°) | R ext (mm) | Ángulo (°) |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 81.24 | 0 | 99.00 | 39.448 |
| 6 | 55.32 | 0 | 69.00 | 65.715 |

A continuación se procede a realizar el DCL de cada eslabón del Sistema, y se obtienen las ecuaciones de equilibrio.

**Eslabón 2:**




$$F_{21x} + F_{23x} = m_2\, a_{CG2x}$$

$$F_{21y} + F_{23y} = m_2\, a_{CG2y}$$

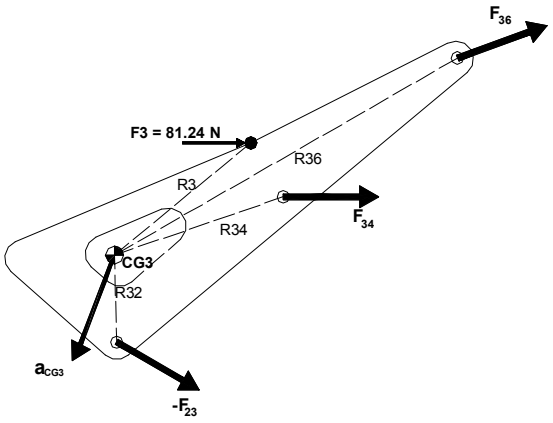
$$R_{21x}\, F_{21y} - R_{21y}\, F_{21x} + R_{23x}\, F_{23y} - R_{23y}\, F_{23x} + T_2 = I_2\, \alpha_2$$

**Eslabón 3:**

$-F_{23x} + F_{34x} + F_{36x} + F_{3x} = m_3\, a_{CG3x}$

$-F_{23y} + F_{34y} + F_{36y} + F_{3y} = m_3\, a_{CG3y}$

$-R_{32x}\, F_{23y} + R_{32y}\, F_{23x} + R_{34x}\, F_{34y} - R_{34y}\, F_{34x} + R_{36x}\, F_{36y} - R_{36y}\, F_{36x} = I_3\, \alpha_3 + R_{3y}\, F_{3x} - R_{3x}\, F_{3y}$



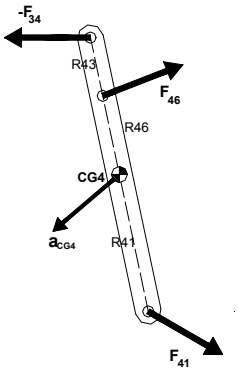

**Eslabón 4:**

$-F_{34x} + F_{41x} + F_{45x} = m_4\, a_{CG4x}$

$-F_{34y} + F_{41y} + F_{45y} = m_4\, a_{CG4y}$

$-R_{43x}\, F_{34y} + R_{43y}\, F_{34x} + R_{41x}\, F_{41y} - R_{41y}$

$F_{41x} + R_{45x}\, F_{45y} - R_{45y}\, F_{45x} = I_4\, \alpha_4$



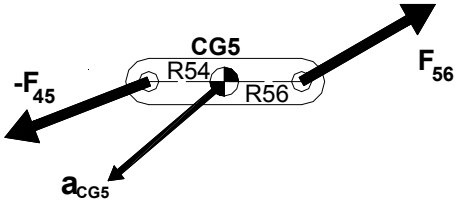

**Eslabón 5:**

$-F_{45x} + F_{56x} = m_5\, a_{CG5x}$

$-F_{45y} + F_{56y} = m_5\, a_{CG5y}$

$-R_{54x}\ \ F_{45y} + R_{54y}\ \ F_{45x} + R_{56x}\, F_{56y} -$

$R_{56y}\, F_{56x} = I_5\, \alpha_5$



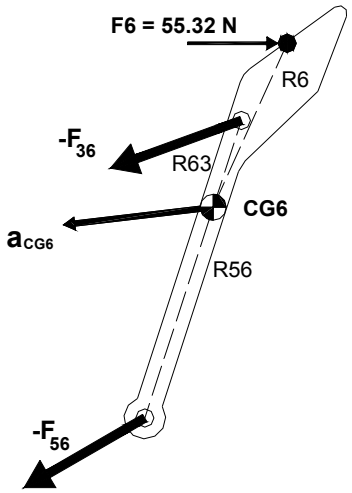
**Eslabón 6:**

$-F_{36x} - F_{56x} + F_{6x} = m_6\, a_{CG6x}$

$-F_{36y} - F_{56y} + F_{6y} = m_6\, a_{CG6y}$

$-R_{63y}\, F_{36y} + R_{63y}\, F_{36x} - R_{65x}\, F_{56y} + R_{65y}$

$F_{56x} = I_6\, \alpha_6 + R_{6y}\, F_{6x} - R_{6x}\, F_{6y}$




Se calculan las componentes de los vectores de posición, aceleración y fuerza:

| | |
|---|---|
| $R_{21x}$ | -0.00974 |
| $R_{23x}$ | 0.00974 |
| $R_{32x}$ | 0.00102 |
| $R_{34x}$ | 0.09452 |
| $R_{36x}$ | 0.20247 |
| $R_{41x}$ | 0.01800 |
| $R_{43x}$ | -0.01800 |
| $R_{45x}$ | -0.00769 |
| $R_{63x}$ | 0.01290 |
| $R_{65x}$ | -0.03133 |
| $R_{54x}$ | -0.02622 |
| $R_{56x}$ | 0.02678 |
| $a_{CG2x}$ | -0.06673 |
| $a_{CG3x}$ | -0.38525 |
| $a_{CG4x}$ | -0.33493 |
| $a_{CG5x}$ | -0.56277 |
| $a_{CG6x}$ | -1.04462 |
| $F_{3x}$ | 81.24 |
| $R_{3x}$ | 0.07668 |
| $F_{6x}$ | 55.32 |
| $R_{6x}$ | 0.02838 |

| | |
|---|---|
| $R_{21y}$ | -0.06831 |
| $R_{23y}$ | 0.06831 |
| $R_{32y}$ | -0.04899 |
| $R_{34y}$ | 0.03266 |
| $R_{36y}$ | 0.09581 |
| $R_{41y}$ | -0.08512 |
| $R_{43y}$ | 0.08512 |
| $R_{45y}$ | 0.03631 |
| $R_{63y}$ | 0.03254 |
| $R_{64y}$ | -0.07902 |
| $R_{54y}$ | 0 |
| $R_{56y}$ | 0 |
| $a_{CG2y}$ | -0.46827 |
| $a_{CG3y}$ | -1.00681 |
| $a_{CG4y}$ | -0.28535 |
| $a_{CG5y}$ | -0.20719 |
| $a_{CG6y}$ | -0.12271 |
| $F_{3y}$ | 0 |
| $R_{3y}$ | 0.06309 |
| $F_{6y}$ | 0 |
| $R_{6y}$ | 0.06289 |

Con las ecuaciones obtenidas en los DCL se procede a expresarlos en un arreglo matricial:

| | | | | | | | A | | | | | | | | B | C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | F21x | m2 aCG2x |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | F21y | m2 aCG2y |
| -R21y | R21x | -R23y | R23x | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | F23x | I2 α2 |
| 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | F23y | m3 aCG3x - F3x |
| 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | F34x | m3 aCG3y-F3y |
| 0 | 0 | R32y | -R32x | -R34y | R34x | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -R36y | R36x | 0 | F34y | I3 α3 + R3y F3x – R3x F3y |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | F41x | m4 aCG4x |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | F41y | m4 aCG4y |
| 0 | 0 | 0 | 0 | R43y | -R43x | -R41y | R41x | -R45y | R45x | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | F45x | I4 α4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | F45y | m5 aCG5x |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | F56x | m5 aCG5y |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | R54y | -R54x | -R56y | R56x | 0 | 0 | 0 | F56y | I5 α5 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | F36x | m6 aCG6x - F6x |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | F36y | m6 aCG6y - F6y |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | R65y | -R65x | R63y | -R63x | 0 | T | I6 α6 + R6y F6x – R6x F6y |

Se calculan los valores de la matriz C:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $m_2\ a_{CG2x}$ | = | 1.5 x –0.06673 | = | -0.1001 |
| $m_2\ a_{CG2y}$ | = | 1.5 x –0.46827 | = | -0.7024 |
| $I_2\ \alpha_2$ | = | 0.2 x 0 | = | 0.0000 |
| $m_3\ a_{CG3x} - F_{3x}$ | = | 4.3 x –0.38525 – 81.24 | = | -82.8966 |
| $m_3\ a_{CG3y} - F_{3y}$ | = | 4.3 x –1.00681 – 0 | = | -4.3293 |
| $I_3\ \alpha_3 + R_{3y}\ F_{3x} – R_{3x}\ F_{3y}$ | = | 0.6 x 5.067 + 0.07668 x 81.24 – 0.06309 x 0 | = | 5.1659 |
| $m_4\ a_{CG4x}$ | = | 1.7 x –0.33493 | = | -0.5694 |
| $m_4\ a_{CG4y}$ | = | 1.7 x – 0.28535 | = | -0.4851 |
| $I_4\ \alpha_4$ | = | 0.25 x 4.441 | = | 1.1103 |
| $m_5\ a_{CG5x}$ | = | 0.5 x –0.56277 | = | -0.2814 |
| $m_5\ a_{CG5y}$ | = | 0.5 x –0.20719 | = | -0.1036 |
| $I_5\ \alpha_5$ | = | 0.1 x 5.631 | = | 0.7631 |
| $m_6\ a_{CG6x} – F_{6x}$ | = | 1.6 x –1.04462 – 55.32 | = | -56.9914 |
| $m_6\ a_{CG6y} – F_{6y}$ | = | 1.6 x –0.12271 – 0 | = | -0.1963 |
| $I_6\ \alpha_6 + R_{6y}\ F_{6x} – R_{6x}\ F_{6y}$ | = | 0.8 x 2.409 + 0.02838 x 55.32 –0.06289 X 0 | = | 5.40651 |

Sustituyendo los valores obtenidos en el arreglo matricial se obtiene:

| | | | | | | | A | | | | | | | | B | | C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | F21x | | -0.1001 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | F21y | | -0.7024 |
| 0.0683 | -0.0098 | -0.0683 | 0.0097 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | F23x | | 0.0000 |
| 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | F23y | | -82.8966 |
| 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | F34x | | -4.3293 |
| 0 | 0 | -0.0485 | -0.0010 | -0.0331 | 0.0944 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.0958 | 0.2025 | 0 | F34y | | 8.1659 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | F41x | | -0.5694 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | F41y | = | -0.4851 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0.0851 | 0.0180 | 0.0851 | 0.0180 | -0.0363 | -0.0077 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | F45x | | 1.1103 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | F45y | | -0.2814 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | F56x | | -0.1036 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.0262 | 0 | 0.0268 | 0 | 0 | 0 | F56y | | 0.7631 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | F36x | | -56.9914 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | F36y | | -0.1963 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.0790 | 0.0313 | 0.0305 | -0.0129 | 0 | T | | 5.4065 |

Una vez que se tienen sustituidos los valores del arreglo matricial, se procede a resolver la matriz por métodos numéricos o por algún programa (MatLab, Matrix, etc.) que facilite la resolución de matrices, para obtener el valor de la matriz B, que representa a las fuerzas que actúan en las juntas de cada eslabón.

Resolviendo el sistema matricial tenemos que:

$F_{21x}$ = -106.5195 N
$F_{21y}$ = -225.5692 N
$F_{23x}$ = 106.4195 N
$F_{23y}$ = 225.8671 N
$F_{34x}$ = -59.7301 N
$F_{34y}$ = 235.6883 N
$F_{41x}$ = -34.3190 N
$F_{41y}$ = 22.7528 N
$F_{45x}$ = -25.9805 N
$F_{45y}$ = 14.4505 N
$F_{56x}$ = -26.2619 N
$F_{56y}$ = 14.3469 N
$F_{36x}$ = 83.2533 N
$F_{36y}$ = -14.1504 N
T = 10.1047 N m

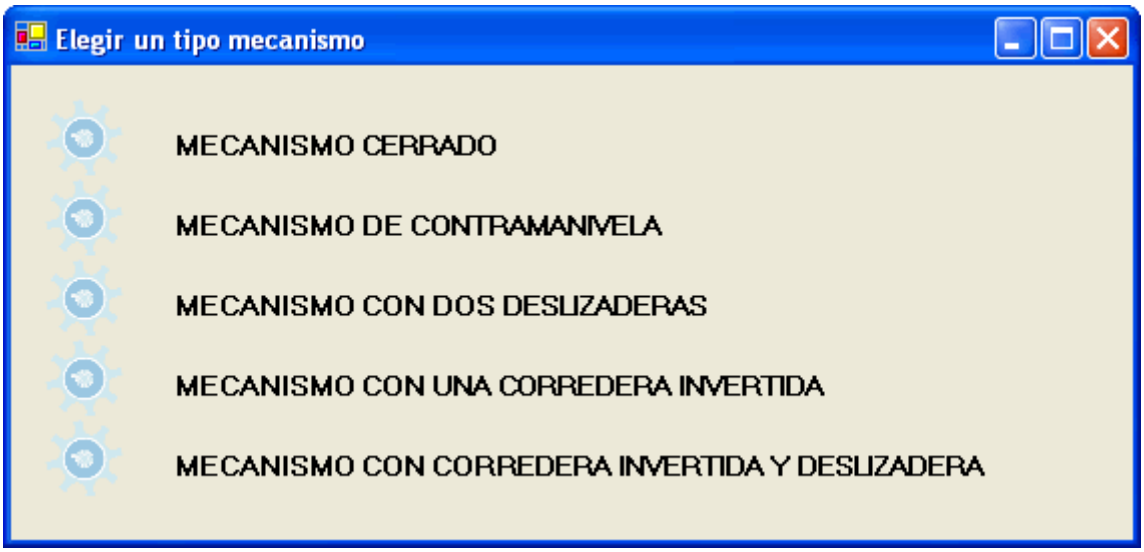
Y al convertir las fuerzas a coordenadas polares:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $F_{21}$ | = | 252.1711 N | < | 65.0131° |
| $F_{23}$ | = | 251.4926 N | < | 64.9662° |
| $F_{34}$ | = | 245.0784 N | < | -75.8938° |
| $F_{41}$ | = | 225.3810 N | < | -81.2414° |
| $F_{45}$ | = | 29.7288 N | < | -29.0831° |
| $F_{56}$ | = | 29.9253 N | < | -25.6478° |
| $F_{36}$ | = | 84.4473 N | < | -9.6462° |
| T | = | 10.1047 N m | | |

Resolviendo el mismo ejemplo, pero ahora utilizando el programa para el Análisis Dinámico de Sistemas Multicuerpo de seis eslabones y un grado de libertad (Programa DAMSFORT):

## 1. Tipo de mecanismo

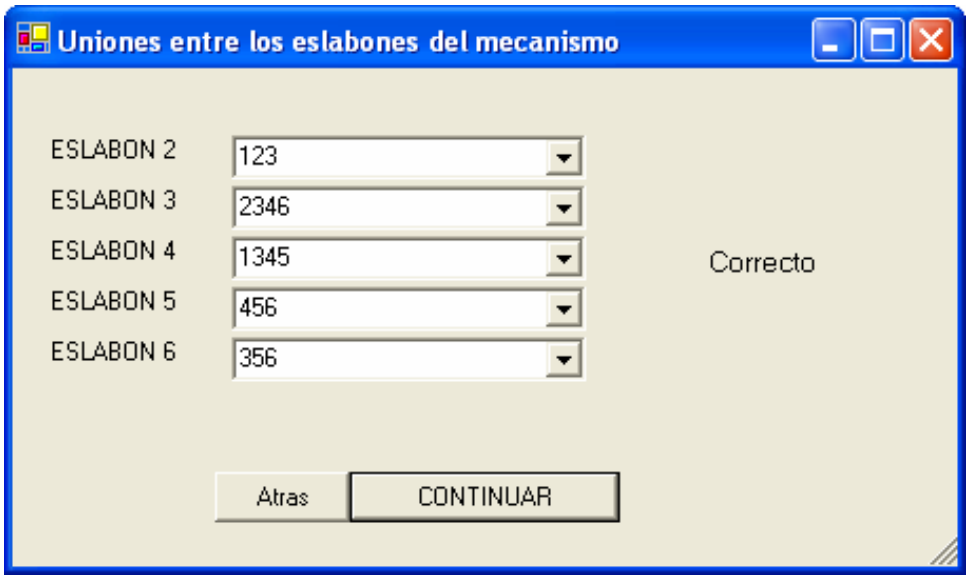
De la figura 5.5 se determina el tipo de arreglo del mecanismo:




Elegimos la opción mecanismo cerrado.

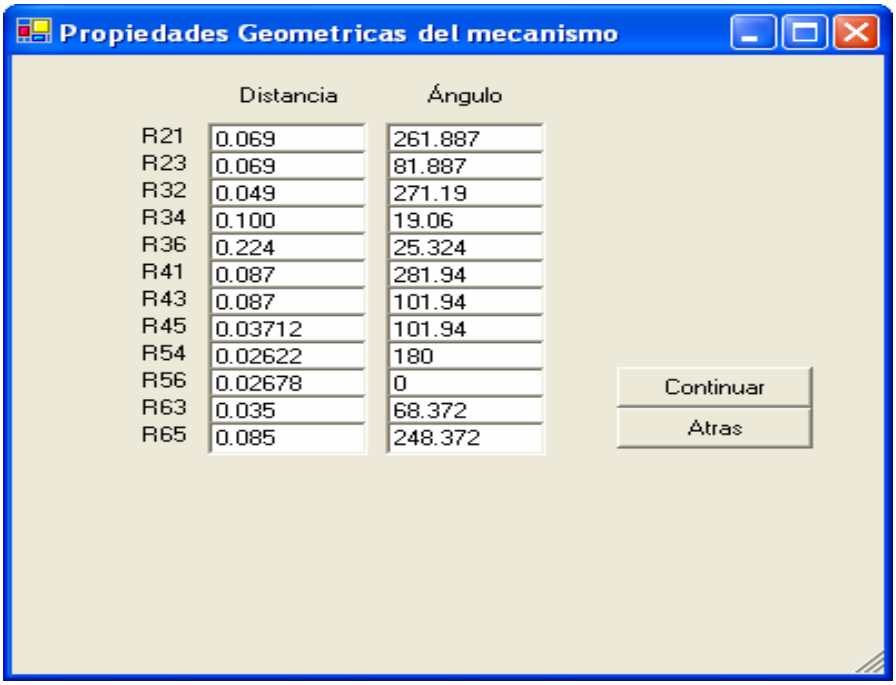
## 2. Unión entre eslabones

En la figura 5.13 se selecciona la unión entre los eslabones a partir del esquema de la figura 5.21:



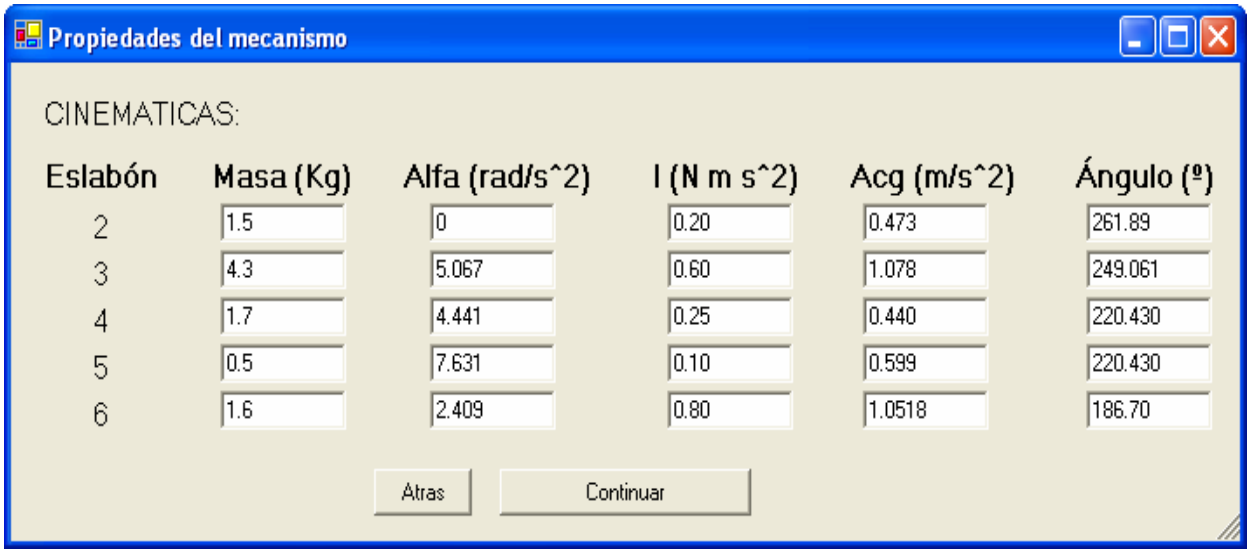

## 3. Propiedades geométricas del mecanismo

Del esquema de la figura 5.21 obtenemos la información para rellenar los datos:



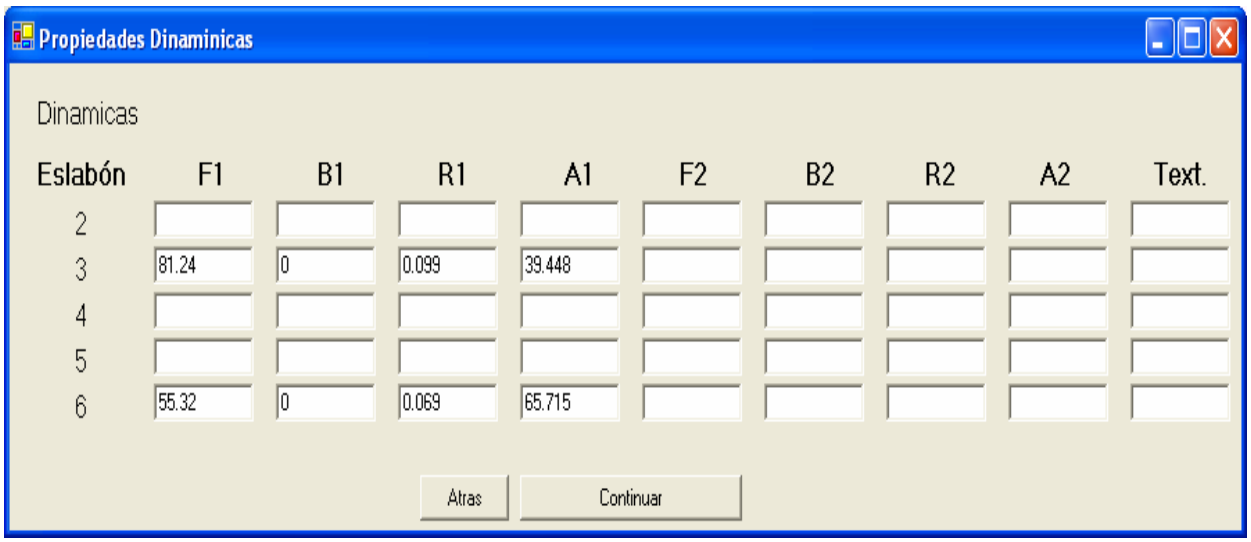
## 4. Propiedades cinemáticas del mecanismo

A partir de la información proporcionada completamos las casillas correspondientes:




## 5. Propiedades dinámicas del mecanismo

Del análisis de la figura 5.21 tenemos:



## 6. Resultados

La ventana de resultados muestra los datos siguientes:

La pequeña discrepancia entre los resultados obtenidos por el método matricial y por el Programa DAMSFORT**,** es debido a que en programa se tiene un menor error en el redondeo al manejar más cifras después del punto decimal, como ya se explicó anteriormente.

### Ejemplo No. 3

Se desea conocer las fuerzas ejercida sobre las juntas del siguiente mecanismo de doble deslizadera.

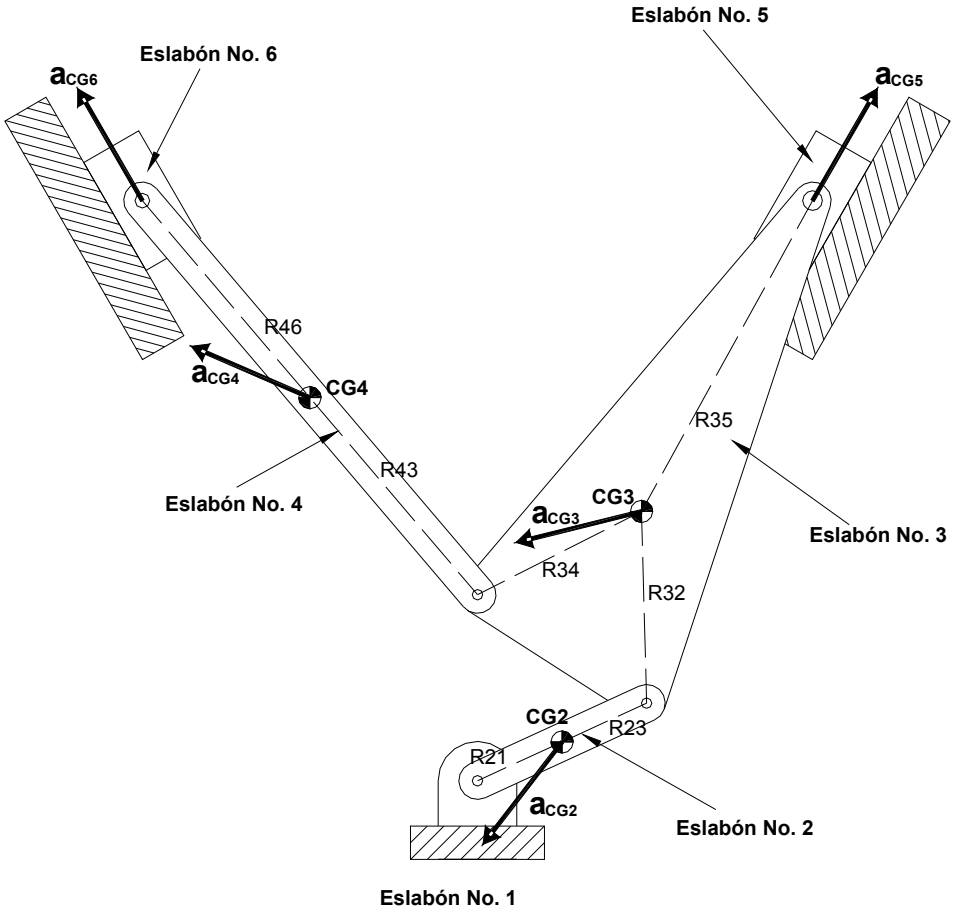



Figura 5.10 Mecanismo de doble Deslizadera

Datos geométricos:

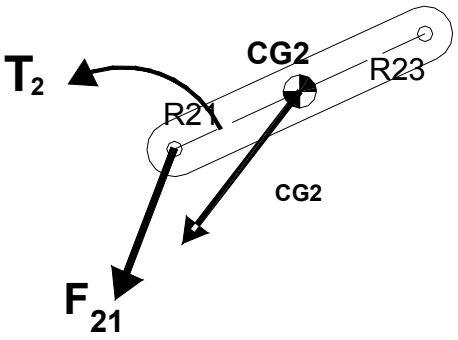
| Eslabón | | Magnitud (m) | Ángulo (°) |
|---|---|---|---|
| 2 | $R_{21}$ | 0.02500 | 24.666 |
| | $R_{23}$ | 0.02500 | 204.666 |
| 3 | $R_{32}$ | 0.05153 | 271.53 |
| | $R_{34}$ | 0.04942 | 206.927 |
| | $R_{35}$ | 0.09531 | 61.183 |
| 4 | $R_{43}$ | 0.13800 | 310.364 |
| | $R_{45}$ | 0.13800 | 130.364 |
| 5 | $\mu_5$ | -0.02000 | |
| 6 | $\mu_6$ | -0.05000 | |

Datos cinemáticos:

| Eslabón | masa (Kg) | α (rad/s$^2$) | I (N m s$^2$) | $a_{CG}$ (m/s$^2$) | Ángulo (°) |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.5 | 2 | 0.8 | 0.815 | 232.11 |
| 3 | 2.0 | 5.23 | 1.25 | 1.354 | 55.35 |
| 4 | 1.0 | 5.32 | 0.4 | 0.545 | 145.28 |
| 5 | 1.5 | | | 2.451 | 85.15 |
| 6 | 1.2 | | | 1.843 | 175.15 |

A continuación se procede a realizar el DCL de cada eslabón, y se obtienen las ecuaciones de equilibrio.

**Eslabón 2**

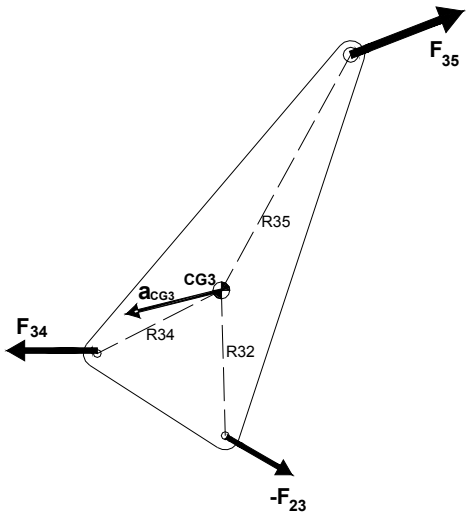



$$F_{21x} + F_{23x} = m_2\, a_{CG2x}$$

$$F_{21y} + F_{23y} = m_2\, a_{CG2y}$$

$$R_{21x}\, F_{21y} - R_{21y}\, F_{21x} + R_{23x}\, F_{23y} - R_{23y}\, F_{23x} + T_2 = I_2\, \alpha_2$$

**Eslabón 3:**

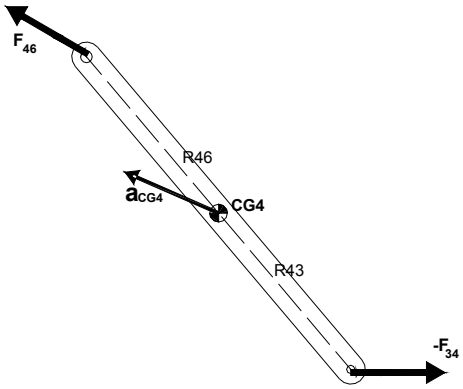



$$-F_{23x} + F_{34x} + F_{36x} = m_3\, a_{CG3x}$$

$$-F_{23y} + F_{34y} + F_{36y} = m_3\, a_{CG3y}$$

$$-R_{32x}\, F_{23y} + R_{32y}\, F_{23x} + R_{34x}\, F_{34y} - R_{34y}\, F_{34x} = I_3\, \alpha_3$$

**Eslabón 4:**

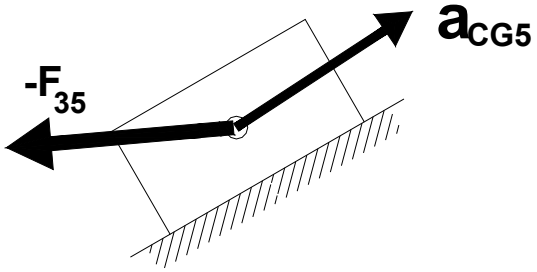



$-F_{34x} + F_{46x} = m_4\, a_{CG4x}$

$-F_{34y} + F_{46y} = m_4\, a_{CG4y}$

$-R_{43x}\, F_{34y} + R_{43y}\, F_{34x} + R_{46x}\, F_{41y} - R_{46y}\, F_{46x} = I_4\, \alpha_4$

**Eslabón 5.:**

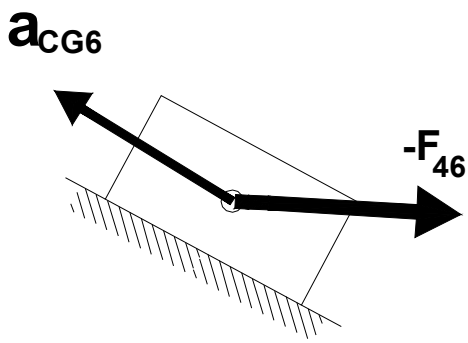



$-F_{35x} - \mu F_{51y} = m_5\, a_{CG5x}$

$-F_{35y} - F_{51y} = 0$

$F_{51x} = \mu F_{51y}$

**Eslabón 6:**




$-F_{46x} - \mu F_{61y} = m_6\, a_{CG6x}$

$-F_{46y} - F_{61y} = 0$

$F_{61x} = \mu F_{61y}$

Se calculan las componentes de los vectores de posición, aceleración y fuerza:

| | |
|---|---|
| $R_{21x}$ | 0.02272 |
| $R_{23x}$ | -0.02272 |
| $R_{32x}$ | 0.00138 |
| $R_{34x}$ | -0.04406 |
| $R_{35x}$ | 0.04594 |
| $R_{43x}$ | 0.08937 |
| $R_{46x}$ | -0.08937 |
| $a_{CG2x}$ | -0.50053 |
| $a_{CG3x}$ | 0.71048 |
| $a_{CG4x}$ | -0.44796 |
| $a_{CG5x}$ | 0.20723 |
| $a_{CG6x}$ | -1.83640 |

| | |
|---|---|
| $R_{21y}$ | 0.01043 |
| $R_{23y}$ | -0.01043 |
| $R_{32y}$ | -0.05151 |
| $R_{34y}$ | -0.02238 |
| $R_{35y}$ | 0.08351 |
| $R_{43y}$ | -0.10515 |
| $R_{46y}$ | 0.10515 |
| $a_{CG2y}$ | -0.64319 |
| $a_{CG3y}$ | 1.15262 |
| $a_{CG4y}$ | 0.31041 |
| $a_{CG5y}$ | 2.44222 |
| $a_{CG6y}$ | 0.15582 |

Con las ecuaciones obtenidas en los DCL se procede a expresarlos en un arreglo matricial:

**A**

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -R21y | R21x | -R23y | R23x | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | R32y | -R32x | -R34y | R34x | -R35y | R34x | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | R43y | -R43x | 0 | 0 | -R46y | R46x | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | $\mu 5$ | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | $\mu 6$ | 0 |

**B**

| |
|---|
| F21x |
| F21y |
| F23x |
| F23y |
| F24x |
| F24y |
| F35x |
| F35y |
| F46x |
| F46y |
| F51y |
| F61y |
| T |

=

**C**

| |
|---|
| m2 aCG2x |
| m2 aCG2y |
| I2 α2 |
| m3 aCG3x |
| m2 aCG3y |
| I3 α3 |
| m4 aCG4x |
| m4 aCG4y |
| I4 α4 |
| m5 aCG5x |
| 0 |
| m6 aCG6x |
| 0 |

Se calculan los valores de la matriz **C**:

$$m_2\, a_{CG2x} = -0.25027$$
$$m_2\, a_{CG2y} = -0.3216$$
$$I_2\, \alpha_2 = 1.6000$$
$$m_3\, a_{CG3x} = 1.4209$$
$$m_3\, a_{CG3y} = 2.3052$$
$$I_3\, \alpha_3 = 10.2875$$
$$m_4\, a_{CG4x} = -0.4480$$
$$m_4\, a_{CG4y} = 0.3104$$
$$I_4\, \alpha_4 = 2.1280$$

$$m_5\, a_{CG5x} = 0.3109$$
$$0 = 0$$
$$m_6\, a_{CG6x} = -2.2037$$
$$0 = 0$$

Sustituyendo los valores obtenidos en el arreglo matricial se obtiene:

Una vez que se tienen sustituidos los valores del arreglo matricial, se procede a resolver la matriz por métodos numéricos o por algún programa que facilite la resolución de matrices, para obtener el valor de la matriz B, que representa a las fuerzas que actúan en las juntas de cada eslabón.

Resolviendo el arreglo tenemos que:

$$F_{21x} = 2.0953 \text{ N}$$
$$F_{21y} = -184.2516 \text{ N}$$
$$F_{23x} = -2.3456 \text{ N}$$
$$F_{23y} = 183.9300 \text{ N}$$
$$F_{24x} = 3.4276 \text{ N}$$
$$F_{24y} = -15.8300 \text{ N}$$
$$F_{35x} = -4.3522 \text{ N}$$
$$F_{35y} = 202.0653 \text{ N}$$
$$F_{46x} = 2.9796 \text{ N}$$
$$F_{46y} = -15.5196 \text{ N}$$
$$F_{51y} = 202.0652 \text{ N}$$
$$F_{61y} = -15.5200 \text{ N}$$
$$T = 10.0205 \text{ N m}$$
$$F_{51x} = \mu_5 F_{51y} = -4.04130 \text{ N}$$
$$F_{61x} = \mu_6 F_{61y} = 0.776 \text{ N}$$

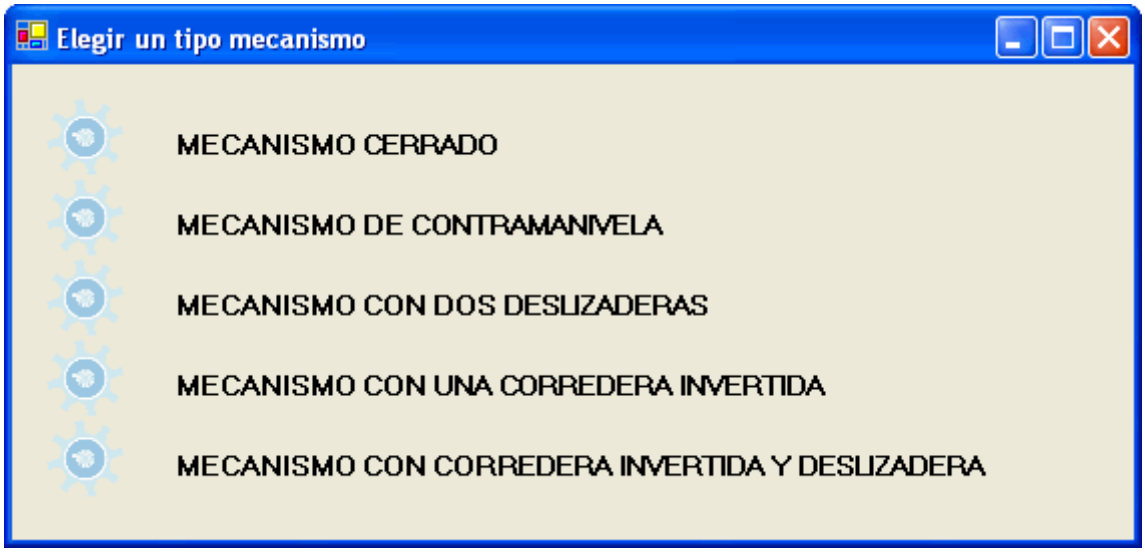
Y al convertir las fuerzas a coordenadas polares:

$$F_{21} = 184.2635 \text{ N} < -89.3485°$$
$$F_{23} = 183.9450 \text{ N} < -89.2694°$$
$$F_{24} = 16.1968 \text{ N} < -75.7826°$$
$$F_{35} = 202.1122 \text{ N} < -85.7661°$$
$$F_{46} = 15.8030 \text{ N} < -79.1321°$$
$$F_{51} = 202.1056 \text{ N} < -85.8542°$$
$$F_{61} = 15.5394 \text{ N} < -85.1376°$$
$$T = 10.0205 \text{ N m}$$

Resolviendo el mismo ejemplo utilizando el programa DAMSFORT:

## 1. Tipo de Mecanismo

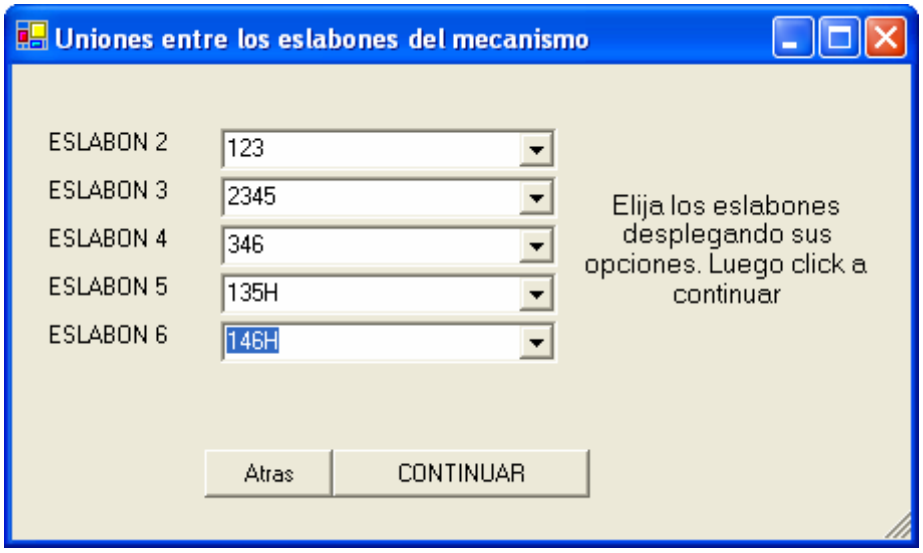
En la ventana de la figura 5.5 se selecciona el tipo de mecanismo a analizar:




Elegimos la opción mecanismo con dos deslizaderas.

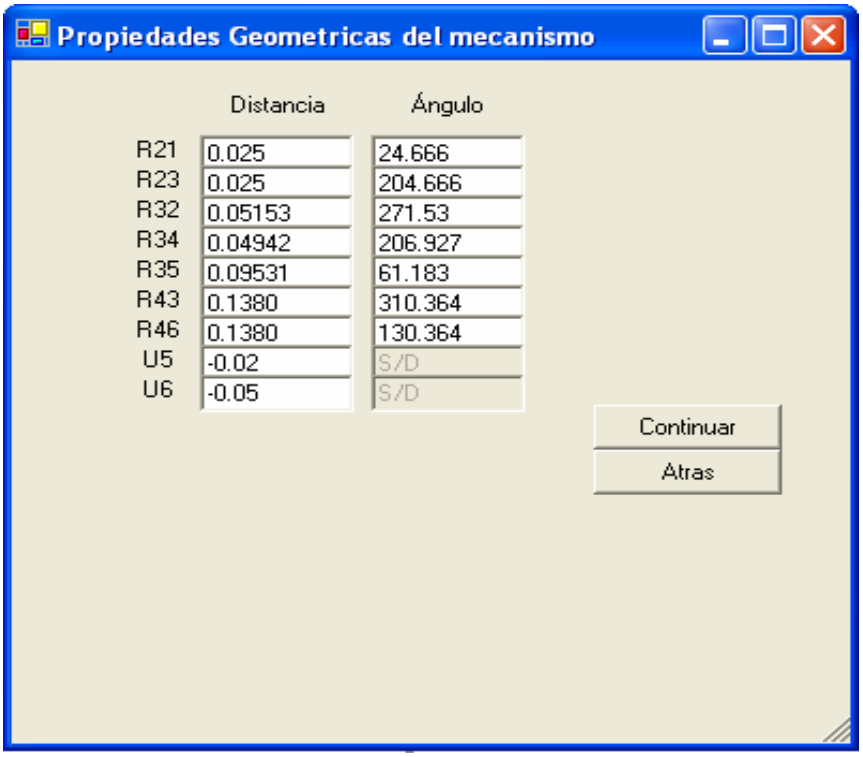
## 2. Unión entre eslabones

En los menús desplegables de la figura, seleccionamos las uniones entre los distintos eslabones coherentes con la figura 5.10



## 3. Propiedades geométricas del mecanismo

A partir de la información proporcionada en el esquema del sistema, tenemos:




## 4. Propiedades cinemáticas del mecanismo

Se rellenan los datos que se solicitan en la ventana de POPIEDADES a partir de la información proporcionada:

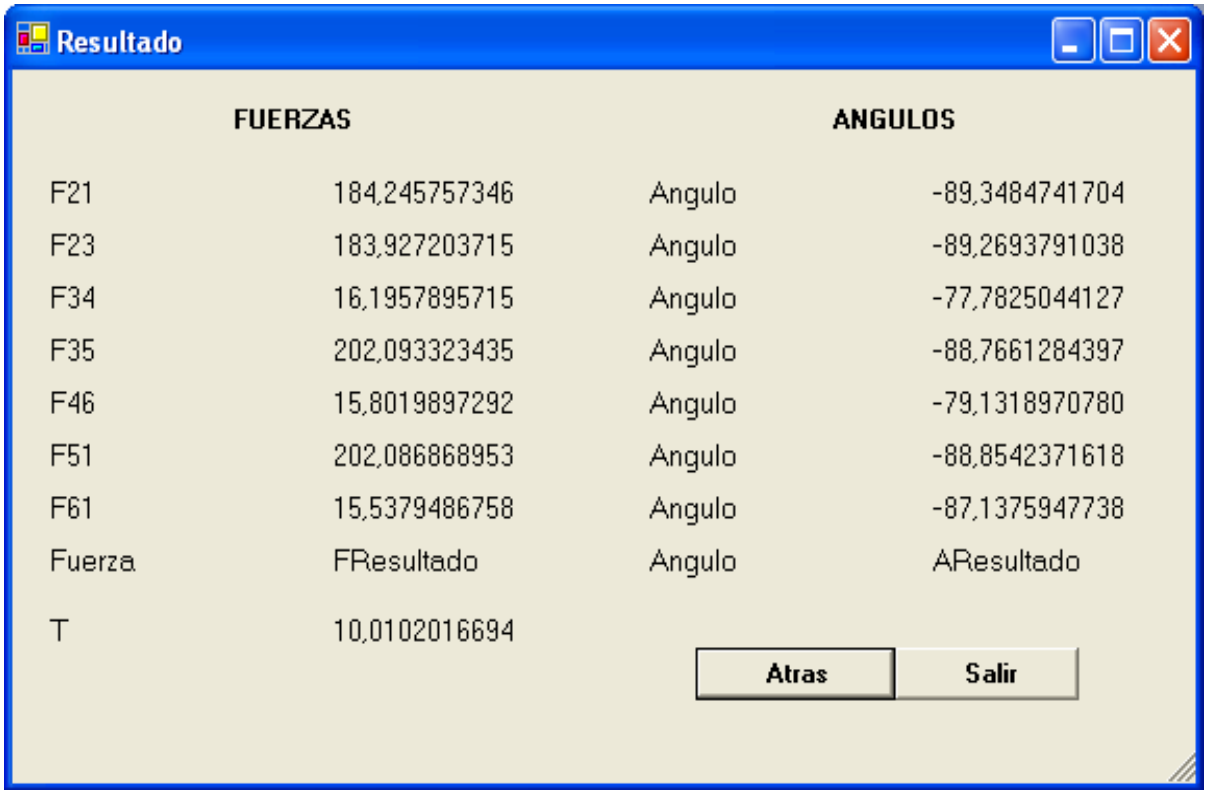
Una vez completada la ventana pulsamos sobre el botón CONTINUAR.

## 5. Propiedades dinámicas del mecanismo

A partir de la figura 5.10 se observa que sobre el mecanismo no actúan fuerzas ni momentos de torsión externos, por lo tanto se deja en blanco la pantalla de las propiedades dinámicas del mecanismo y se continúa.

## 6. Resultados

El programa da los siguientes resultados:



# CAPÍTULO 6

# Conclusiones y Líneas Futuras de Investigación

# 6.1 Conclusiones

La simulación de sistemas mecánicos tiene una aplicación directa para muchas industrias: automoción, aeroespacial, naval, robótica, biomecánica, ferroviaria, máquinas-herramienta, maquinaria pesada, animación, médica [HLV01], deportiva, militar, etc.

El conocimiento más riguroso de las características cinemático-dinámicas de los Sistemas Multicuerpo, conduce a proyectos más fiables y capaces de mejores prestaciones, una vez que reduce los márgenes de incertidumbre no previsible de su comportamiento en servicio. La Mecánica procura acompañar esta evolución proporcionando métodos de análisis y síntesis de los mecanismos y máquinas [BeS96]. La utilización de métodos analíticos, se vuelve imprescindible para unos cálculos precisos y exactos, que permitan estudiar la influencia de varios parámetros en el movimiento y transmisión de esfuerzos global producido. Asociando a estos métodos el procesamiento computacional [Dyn04], [Aut06], el análisis dinámico gana, por un lado precisión, ya que se minimizan los errores inherentes a los métodos analíticos, y por otro, economía de tiempo.

La optimización del diseño y análisis de los Sistemas Multicuerpo es un campo en continuo desarrollo debido a la propia complejidad del problema y a la enorme cantidad de aplicaciones de desarrollo tecnológico que posee en sectores tan diversos como la industria automovilística, la industria aeroespacial, la robótica o la biomecánica [ReH86].

Los objetivos planteados en el apartado 1.2 de esta Tesis han sido totalmente conseguidos. Se ha desarrollado un código general de diseño y análisis dinámico de Sistemas Multicuerpo de seis eslabones y un grado de libertad, con restricciones de posición, cinemáticas y dinámicas, que puede ser aplicado sobre cualquier sistema multicuerpo constituido por elementos rígidos, independientemente de la dimensión de su movimiento, de su configuración topológica y de los pares cinemáticos que otorguen movimiento relativo a sus eslabones.

Los otros objetivos que se pretendían también han sido conseguidos ya que se ha logrado:

1) Revisión de la bibliografía sobre análisis dinámico de Sistemas Multicuerpo y métodos computacionales aplicables.
2) Profundizar en el estudio de la Dinámica de Sistemas Multicuerpo.
3) La incorporación de un método que permitirá controlar los parámetros del sistema desde las fases más tempranas del diseño, permitiendo mejorar considerablemente el control sobre el comportamiento de dicho sistema y reduciendo sensiblemente el tiempo de diseño del mismo.
4) Implementar el código para diseñar un algoritmo que determine el momento de entrada y las fuerzas de reacción en las juntas mediante un análisis dinámico del mecanismo.
5) Desarrollar un modelado computacional cómodo y amigable para la resolución de los problemas dinámicos de Sistemas Multicuerpo de seis eslabones.
6) Disponer de un software que facilite, a los diseñadores y estudiantes de teoría de mecanismos, máquinas y elementos de máquinas, el estudio, análisis, comprensión y diseño de los mismos, partiendo de unos conocimientos básicos de mecanismos.

Debido a que actualmente la computadora es una poderosa herramienta que aligera la tarea del diseñador en el desarrollo y análisis de los mecanismos, el programa presentado en este trabajo es una contribución para poder realizar de forma más rápida y precisa el estudio en las primeras fases de diseño y pretende ser una ayuda para el diseñador mecánico ya que permite enfocar más tiempo en la optimización los sistemas mecánicos, debido a que el programa le permitirá experimentar con

distintos valores físicos que se puedan presentar en el mecanismo, sin tener la necesidad de fabricar los mismos; así mismo también puede enfocarse como un software que sirve de apoyo didáctico para los alumnos que cursen las asignaturas relacionadas con el diseño de elementos de máquinas, dinámica de máquinas, teoría y diseño de mecanismos.

Por otra parte los simuladores de mecanismos permiten predecir el comportamiento cinemático y dinámico de una gran variedad de Sistemas Multicuerpo en todas las etapas del proceso de diseño, desde la etapa de concepto a la de prototipo. En cualquiera de estas etapas, éste tipo de análisis es una herramienta de gran valor, proporcionando al ingeniero suficiente cantidad de datos para estudiar la influencia de diferentes parámetros de ahí la importancia de este programa ya que tiene la posibilidad de ser adaptado de acuerdo a las necesidades de los usuarios ya que el código fuente puede ser modificado y adaptado a otras plataformas y compiladores, ventaja que se tiene sobre los software comerciales (DADS™ Rev 9.5.1, MATLAB, MATRIX, EASY**,** Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector, entre otros) que no pueden ser adaptados, además de su alto costo así como las características especiales en las que trabajan ya que requieren plataformas como Windows NT/2000.

El programa DAMSFORT desarrollado en esta Tesis Doctoral, reduce el tiempo requerido para la solución de los problemas dinámicos de mecanismos y máquinas, manteniendo un error despreciable en sus resultados, brindando un comportamiento estable y fidedigno.

La mayoría de los recursos de cómputo que consume, son destinados al cálculo de las variables desconocidas y no al manejo de interfaces gráficas como lo hacen otros programas comerciales [Alv06]. El código de este programa puede ser empleado y modificado para satisfacer las necesidades particulares que puedan presentarse dentro del diseño y análisis de mecanismos. El programa se ejecuta bajo una máquina virtual llamada framework, siendo muy sencilla su portación a ambientes Windows debido a que fue codificado en lenguaje .NET. El código fuente del programa es exportable a otros sistemas operativos como LINUX, FORTRAN, MS-DOS, etc.

La contribución de este proyecto fue haber creado una codificación numérica con más de 12000 líneas, un algoritmo y el programa apropiado para la resolución de problemas dinámicos en Sistemas Multicuerpo de hasta seis elementos con un GDL. Dicho programa reproduce fielmente los cálculos realizados a mano pero de una forma más ágil y dinámica.

## 6.2 Líneas futuras de investigación

La presente tesis tiene el espíritu de aportar una herramienta que ayude en la experimentación del diseño y análisis dinámico de Sistemas Multicuerpo. Consecuentemente, cuanto mayor sea el grado de satisfacción en los objetivos marcados, mayor será el campo abierto a futuras ampliaciones y mejoras. Por tanto, los diferentes caminos que han ido apareciendo a lo largo de la tesis, presentan múltiples aspectos dignos de ser continuados con el mismo interés que se ha puesto en el desarrollo del trabajo previo.

A continuación se enumeran los diferentes aspectos teóricos y relativos a la implementación que quedan pendientes de una mayor profundización y que pueden ser objeto de nuevos trabajos de investigación:

- Interacción con programas de tipo CAD y/o implementación de un interfaz gráfico que permita definir sólidos y caracterizar uniones entre los mismos.
- El programa DAMSFORT podría expandirse para proporcionarle manejo de archivos y que de esta forma interactúe con programas dedicados a la graficación (Excel, MatLab, Simulink, ...) donde se podría graficar la respuesta de un mecanismo en un ciclo completo.
- Incorporación de estructuras y algoritmos de exportación para la resolución de Sistemas Multi-Cuerpo Flexibles. Aunque no se incluye en el contenido de la presente Tesis Doctoral, se han realizado pruebas de implementación de las

formulaciones más comunes adoptadas como solución en varios paquetes comerciales como ADAMS [Mec99] o SIMPACK [Wal95], que permiten hacer uso de la información obtenida mediante programas MEF de propósito general, como NASTRAN [Nas04] o ANSYS [Ans04], aunque su uso queda limitado a problemas de pequeñas deformaciones.

- Interacción en tiempo de simulación con librerías y/o estándares de representación gráfica como OPENGL [Ope04] y VRML [VRM97], que permitan al usuario visualizar el mecanismo con mayor calidad.

- Incorporación de estructuras y simulación de análisis mediante redes neuronales y/o algoritmos genéticos.

- El campo de la simulación computacional se amplia maravillosamente a medida que se avanza en él. El simulador desarrollado sobre una librería de libre distribución hace uso intensivo de los algoritmos implementados en dicha librería. Sin embargo, son muchas las mejoras que pueden ir adicionándose a dicho código, como detectores de colisiones, otros generadores de fuerzas, otros integradores numéricos..., de forma que cada uno de estos problemas puede ser tratado como un módulo independiente. Por otra parte, la naturaleza discreta de los procesos numéricos impone nuevos retos teóricos en el aspecto de estabilidad.

- Ampliación y mejora para la simulación y el análisis de Sistemas con más de un grado de libertad y mayor número de elementos.

- Interfaz capaz de capturar directamente de la pantalla los datos del Sistema y cargarlos automáticamente en la base de datos del programa, realizando el análisis cinemático, mostrándolos en una tabla de resultados y reintroduciéndolos para el cálculo dinámico, evitando así la tarea de ir asignando valores en las casillas de las diferentes pantallas.

# Bibliografía

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


| | |
|---|---|
| [3dM05] | **3d_Mec.** *http://www.imem.unavarra.es/3d_mec*, **Departamento Ingeniería Mecánica, Universidad Pública de Navarra, 2004.** |
| [Ada04] | **Adams,** *http://www.mscsoftware.com*, **Msc Software Inc., 2004.** |
| [ADG97] | **Alba, J.A., Doblaré, M., Gracia, L.,** *Un método general para la síntesis de posición de mecanismos con pares inferiores y superiores (II): síntesis de posición con restricciones cinemáticas***, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, vol. 13, n.º 1, pp. 71-94, 1997.** |
| [Agu96] | **Agulló, J.,** *Mecánica de la partícula y del sólido rígido,* **OK Punt, Barcelona. ISBN: 84-920850-2-9. 1996** |
| [AJH96] | **Avilés, R., Jauría, M., Hormaza, M., Hernández, A.,** *A procedure based on finite elements for the solution of nonlinear problems in the kinematic análisis of mechanisms,* **Finite Elements in Analysis and Design, vol. 22, pp. 305-327, 1996.** |
| [Alv06] | **Alvarez Loira, M.,** *Desarrollo de software modular, abierto y colaborativo para simulación de máquinas y mecanismos,* **Tesis doctoral, Universidad de la Coruña, 2006.** |
| [Ang78] | **Ángeles Álvarez, J.,** *Análisis y síntesis cinemáticos de sistemas mecánicos.* **Editorial Limusa, México 1978.** |
| [Ans04] | **Ansys,** *http://www.ansys.com***. cAnsys Inc. 2004.** |
| [AsM90] | **Ashrafiuon, H., Mani, N.K.,** *Analysis and optimal design of spatial mechanical systems,* **Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, vol. 112, pp. 200-207, 1990.** |

| | |
|---|---|
| [Aut06] | **Autolev,** *http://www.autolev.com,* **Online Dynamics, Inc., 2004.** |
| [Avi02] | **Avilés, R.,** *Métodos de análisis para diseño mecánico*. **Sección de publicaciones de la E.S. de Ingenieros de Bilbao. Bilbao, 2002.** |
| [Bau07] | **Bautista Paz, E**., *Breve historia ilustrada de las máquinas*. **Asociación Española de Ingeniería Mecánica-ETSII. Madrid. 2007.** |
| [BeJ03] | **Beer, F. P. y Johnston, E. R.,** *Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica.* **Editorial McGraw Hill. 7ª edición. México, 2003.** |
| [BeS96] | **Bestle, D., Schielen, W.O.,** *Optimization of mechanical systems,* **Kluwer Academia publishers, 1996.** |
| [Bor01] | **Boresi, Arthur P.,** *Ingeniería mecánica: Dinámica.* **Editorial Díaz de Santos. Madrid. 2001.** |
| [Buc85] | **Buchberger, B.,** *Gröbner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory,* **in N. K. Bose (Ed), Multidimensional Systems Theory, Holland, pp. 184-232, 1985.** |
| [BuD98] | **Burden, R., Douglas J.,** *Numerical Analysis (spain edition),* **International Thomson Publishing, 1998.** |
| [Bur79] | **Burton, P.,** *Kinematics and dynamics of planar machinery.* **Editorial Prentice Hall. New Jersey, 1979.** |
| [CaC99] | **Calero Pérez, R. y Carta J.A.,** *Fundamentos de mecanismos y máquinas para ingenieros.* **Editorial McGraw Hill. Madrid, 1999.** |

| | |
|---|---|
| [Car04] | **Carsim,** *http://www.carsim.com,* **Mechanical Simulation Corporation Inc., 2004.** |
| [Ceb02] | **Ceballos. F.,** *C / C ++: Curso de programación.* **Editorial Alfaomega, 2ª edición. México, 2002.** |
| [ChH01] | **Chang, C.C., Huston, R.L.,** *Collisions of multibody systems,* **Computational Mechanics, vol. 27, n.º 5, pp. 436-444, 2001.** |
| [Coh00] | **Cohoon.** *Diseño y programación en C++.* **Editorial McGraw Hill. 2ªedición. Madrid, 2000.** |
| [Col03] | **Colominas y otros.,** *Problemes de Teoría de Máquines*. **Editorial Díaz de Santos. Madrid, 2003.** |
| [CrA04] | **Critchley, J.H., Anderson, K.S.,** *Parallel logarithmic order algorithm for general Multibody System Dynamics,* **Journal of Multiescale Computational Engineering, vol. 12, n.º 1, pp. 75-93, 2004.** |
| [Cra86] | **Craig, R.,** *Introduction to robotics, mechanics and control.,* **Addison-Wesley, New York. 1986** |
| [CSP02] | **Cabrera, J.A., Simon, A., Prado, M.,** *Optimal synthesis of mechanisms with genetic algorithms,* **Mechanism and Machine Theory, vol. 37, n.º 10, pp. 1165-1178, 2002.** |
| [Cua97] | **Cuadrado J., et al.,** *Modelling and solution methods for efficient real time simulation of multibody dynamics,* **Multibody System Dynamics 259–280. 1997.** |
| [Dad04] | **Dads,** *http://www.lmsintl.com,* **The Mathworks Inc., 2004.** |

| | |
|---|---|
| [DAK00] | **Dhingra, A. K., Almadi, A. N., Kohli, D.,** *Closed form displacement análisis of 8, 9 and 10-link mechanisms. Part I: 8-link mechanisms,* **Mechanism an Machine Theory, vol. 35, pp. 821-850, 2000.** |
| [DAK01] | **Dhingra, A. K., Almadi, A. N., Kohli, D.,** *Closed form displacement análisis of 10-link 1-DOF mechanisms: Part I-general framework,* **Mechanism an Machine Theory, vol. 36, pp. 29-56, 2001.** |
| [DAK98] | **Dhingra, A. K., Almadi, A. N., Kohli, D.,** *A Gröbner-Sylvester hybrid meted for closed-form desplacement análisis of mechanisms,* **Proceedings ASME DETDC, September 13-16, Atlanta, 1998.** |
| [Das99] | **Das, B.M....[et Al.].,** *Mecánica para Ingenieros. Dinámica.* **Editorial Limusa. México, ISBN: 9681850939 1999.** |
| [DER97] | **Duff, I.S., Erisman, A.M., Reid, J.K.,** *Direct methods for sparse matrices,* **Oxford University Press, 1997.** |
| [Dyn04] | **Dynaflex,** *http://real.uwaterloo.ca/dynaflex,* **University of Waterloo, Department of System Design Engineering, 2004.** |
| [Erd97] | **Erdman, A.,** *Mechanism design: analysis and synthesis,* **Prentice Hall, 1997.** |
| [Erd98] | **Erdman, A.,** *Diseño de mecanismos.* **Editorial Prentice Hall, 3ª edición. México, 1998.** |
| [Eul76] | **Euler, L.,** *Nova methodus motum corporum regidarum determinandi*, **Opera Omnia 2 nº. 9, 99–125. 1776.** |
| [Fra06] | **Framework.,** *http://www.microsoft.com/download* . **2006.** |

| | |
|---|---|
| [GaV04] | **García Vallejo, D. et al.** *Formulación espacial de Sistemas Multicuerpo con Sólidos Rígidos y Flexibles mediante Coordenadas absolutas.* **Anales de Ingeniería Mecánica. Vol 3. Pág. 1639-1646. 2004** |
| [GCR07] | **García Prada, J.C., Castejón Sisamón, C., Rubio Alonso, H.,** *Problemas Resueltos de Teoría de Máquinas y Mecanismos,* **Thomson Editores, Madrid. ISBN 978-84-9732-495-3. 2007.** |
| [Gil05] | **Gil Soto, J.J.,** *Preprocesador para la simulación dinámica de Sistemas Multicuerpo basado en álgebra simbólica,* **Tesis doctoral, Universidad Pública de Navarra, 2005.** |
| [GJB94] | **García de Jalón J. and Bayo, E.,** *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems: the real time challenge,* **Springer Verlag, New York, ISBN: 0-387-94096-0. 1994.** |
| [Gom01] | **Gómez del Campo B., J.C.,** *Mecánica***. Editorial Paraninfo, 2001.** |
| [Gon03] | **González Fernández, C.,** *Mecánica del Sólido Rígido,* **Editorial Ariel. ISBN: 8434480581. 1ª Ed. Febrero 2003.** |
| [GSA81] | **Garcia de Jalón, J., Serna, M. A., Avilés, R.,** *Computer mathod for kinematic análisis of lower-pair mechanism-I: velocities and accelerations. –II: position problems,* **Mechanism & Machine Theory, vol. 16, n. 5, pp. 543-566, 1981.** |
| [GUA86] | **García de Jalón, J., Unda, J., Avelló, A.,** *Natural coordinates for the computer analysis of multibody systems,* **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 56, pp. 309-327, 1986.** |

| | |
|---|---|
| [GuD05] | **Guzman M.A., Delgado A.;** *Optimización de la geometría de un eje aplicando algoritmos genéticos*. **Revista Ingeniería e Investigación (58). Vol. 25 p.15-23, 2005**. |
| [Guy65] | **Guyan, R.,** *Reduction of stiffness and mass matrices,* **AIAA Journal nº 2, 1965.** |
| [Hai67] | **Hain, K.,** *Applied kinematics,* **cap. 4, Mc Graw-Hill,1967** |
| [Hau89] | **Haugh, E. J.,** *computer-aided kinematics and dynamics of mechanical systems,* **Ed. Allyn and Bacon, 1989.** |
| [HCR80] | **Ham, C.W., Crane, E.J. y Rogers, W.L.:** *Mecánica de Máquinas.* **McGraw-Hill, 4ª edición. Nueva York. 1980.** |
| [Her04] | **Hernández, A.:** *Cinemática de Mecanismos. Análisis y Diseño.* **Ed. Síntesis. ISBN: 84-7738-224-0. 2004.** |
| [Hid01] | **Hidalgo Martínez, M.,** *Cadenas cinemáticas planas: análisis cinemático y dinámico,* **Universidad de córdoba, ISBN: 847801568X. 2001.** |
| [HLV01] | **Haulin, E.N., Lakis, A.A., Vinet, R.,** *Optimal synthesis of a planar four-link mechanism used in a hand prothesis,* **Mechanism and Machine Theory, Vol. 36, n.º 11, pp. 1203-1214, 2001.** |
| [HPA02] | **Hernández, A., Petruya, V., Amenuza, E.,** *A meted for the solution of the forward position problems of planar mechanisms with prismatic and revolute Joints,* **Journal of Mechanical Engineering Science (P. I. Mech. Eng. Part C), vol. 216, pp. 395-407, 2002.** |

| | |
|---|---|
| [HPP02] | **Hernández, A., Pinto, C., Petuya, V. y Agirrebeitia, J.,** *Teoría de Mecanismos.* **E.T.S. Ingenieros de Bilbao. ISBN: 84-95809-11-7. 2002.** |
| [Hus90] | **Huston R.L.,** *Multibody dynamics since 1990.* **Applied Mechanics review, 49(10):535_540.1996.** |
| [Inn97] | **Innocenti, C.,** *Position analysis in analytical form of the 7-link Assur kinematic chain featuring one ternary link connected of ternary links only,* **Mechanism and Machine Theory, vol. 32, pp. 501-509, 1997.** |
| [Jim95] | **Jiménez J.M. et al.,** *An efficient implementation of the velocity transformation method for real time dynamics with illustrative examples,* **Computational Dynamics in Multibody Systems, 15–35. 1995.** |
| [Joy00] | **Joyanes.,** *Programación en C++.* **Editorial McGraw Hill. Madrid, 2000.** |
| [KaL85] | **Kane T.R. and Levinson D.A.,** *Dynamics, theory and applications,* **Mc-Graw Hill, New York, 1985.** |
| [Kau78] | **Kaufman, R.E.,** *Mechanism design by computer,* **Machine Design, vol. 50, n.º 24, pp. 94-100, 1978.** |
| [KiC84] | **Kinzel, G. L. And Chang,** *The analysisof planar linkages using a modular approach,* **Mechanism and Machine Theory, vol.19, pp. 165-172, 1984.** |
| [Koz81] | **Kozhevnikoc, S.,** *Mecanismos*. **Editorial Gustavo Gill, España, 1981.** |
| [Lag88] | **Lagrange, J.,** *Mécanique analytique,* **L'Academie Royal des Sciences, Paris, 1788.** |

| | |
|---|---|
| [LAP07] | **LAPACK**. *http://www.netlib.org/lapack/*. **University of Tennessee. 2007** |
| [Lev62] | **Levi, V.,** *Elementos de mecanismos.* **C.E.C.S.A., México, 1962.** |
| [Mab99] | **Mabie, H.,** *Mecanismos y dinámica de maquinaria*. **Editorial Limusa, 2ª. edición. México 1999.** |
| [Man68] | **Manolescu, N.,** *For a united point of view in the study of structural analysis of kinematic chains and mechanism,* **Journal of Mechanical Design, vol. 3, pp 149-169, 1968.** |
| [Map04] | **Maple**, *http://www.maplesoft.com,* **Waterloo Maple Inc., 2004.** |
| [Mar01] | **Marks.,** *Manual del ingeniero mecánico.* **Editorial McGraw Hill, México, 2001.** |
| [Mat01] | **Mata, T.,** *Introducción a la programación con ejemplos en visual basic, C, C++ y Java.* **Editorial McGraw Hill, México 2001.** |
| [Mat04] | **Matlab,** *http://www.mathworks.com,* **The Mathworks Inc., 2004.** |
| [Mbs03] | **Mbsymba***, http://www.dim.unipd.it/lot/mbsymba.html* **Università di Padova, Dipartimento di Ingegneria Meccanica, 2003.** |
| [Mec99] | **Mechanical dynamics Inc.,** *Adams referente, theory of flexible bodies in adams.* **1999.** |
| [Mer93] | **Merian, J. L.,** *Dinámica*. **Editorial Reverté, 2ª edición, Barcelona 1993.** |
| [Mth04] | **Mathemática,** *htpp://www.wolfram.com***, Wolfram Research Inc., 2004.** |
| [NAG95] | **NAG, NAG Fortran library manual**, *The Numerical Algorithms* **Group Ltd., 1995.** |

| | |
|---|---|
| [Nas04] | **Nastran,** *http://www.mscsoftware.com*, **Msc Software Inc., 2004.** |
| [Nav74] | **Nava, H.,** *Mecánica vectorial para ingenieros.* **Editorial Limusa, México, 1974.** |
| [New04] | **Neweul,** *http://www.mechb.uni-stuttgart.de/forschung/neweul,* **Universität Stuttgart, Institut B für Mechanik, 2004.** |
| [Nik88] | **Nikravesh, P.E.,** *Computer-aided analysis of mechanical systems,* **Ed. Prentice-Hall, New York,1988.** |
| [NiR00] | **Nielsen, J., Roth, B.,** *On the kinematic analisis of robotic mechanis,* **The International Journal of Robotics Research, vol. 18, nº 12, 2000.** |
| [NiR99] | **Nielsen, J., Roth, B.,** *Solving the input/output problem for planar mechanisms,* **Journal of Mechanical Design, vol. 121, pp. 206-211, 1999.** |
| [Nor03] | **Norton, R.,** *Diseño de maquinaria.* **Editorial McGraw Hill, 3ª edición. México, 2003.** |
| [Ope04] | **OpenGL,** *http://www.opengl.org.* **Sgi Software. 2004.** |
| [Pag94] | **Pagalday, J.M.,** *Optimización del comportamiento dinámico de mecanismos,* **Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, 1994.** |
| [Per06] | **Pérez Moreno R.,** Análisis de Mecanismos y Problemas Resueltos 2ª Ed., **Editorial Alfaomega, México, 2006.** |
| [PoS93] | **Popp U. and Schiehlen, W.** *Fahrzeugdynamik.*, **1st ed., Teubner-Verlag, Stuttgart, 1993.** |
| [Rah98] | **Rahnejat, H.,** *Multi-body dynamics. Vehicles, machines and mechanisms,* **Professional Engineering Publishing, 1998.** |

| | |
|---|---|
| [RaR95] | **Raghavan, M. and Roth, B.,** *Solving polimial systems for the kinematic analysis and synthesis of mechanisms and robot manipulators,* **Special 50th anniversary design issue, trans ASME, vol. 117, pp. 71-79, 1995.** |
| [ReH86] | **Redfield, R., Hull, M.L.,** *Prediction of pedal forces in bicycling using optimization methods,* **Journal of Biomechanics, vol. 17, pp. 523-540, 1986.** |
| [Reu75] | **Reuleaux, F.,** *Theoretische kinematik,* **Vieweg, 1875.** |
| [RFM03] | **Romero, S., Fortes, JC., Moreno, F.J. y Llopart, A.J.:** *Uso de Maple para el análisis cinemático de mecanismos planos.* **VI Congresso Iberoamericano de Engenharia Mecânica (CIBEM VI).Coimbra. ISBN: 972-98871-4-4. 2003.** |
| [Ril96] | **Riley, W. F.,** *Ingeniería Mecánica. Dinámica.* **Editorial Reverté. Barcelona, 1996.** |
| [Rob04] | **Robotran,** *http://www.prm.ucl.ac.be/robotran,* **Université catholique de Louvain, Faculté de production mécanique et machines, 2004.** |
| [Rod04] | **Rodriguez J. et al.,** *Recursive and residual algorithms for the efficient numerical integration of multi-body systems,* **Multibody System Dynamics, 295–320. 2004.** |
| [Ros02] | **Ros, J.,** *Apuntes de dinámica,* **Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Pública de Navarra, 2002.** |
| [RoW66] | **Roberson, R.E., Wittenburg, J.A.,** *A dynamical formalism for an arbitrary number of interconnected rigid bodies with reference to the problem of attitude control,* **Proceedings of the 3rd International Congress of Automated Control, London, 1966.** |

| | |
|---|---|
| [SaF03] | **Samin J.C. and P. Fisette,** *Symbolic modelling of multibody systems,* **Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2003, ISBN: 1-4020-1629-8.** |
| [SAG82] | **Serna, M.A., Avilés, R., García de Jalón, J.,** *Dynamic analysis of plane mechanisms with lower pairs in basic coordinates,* **Mechanism and Machine Theory, vol. 17, n.º 6, 397-403, 1982.** |
| [Sal85] | **Salmon, G.,** *Modern higher algebra,* **Chelsea Publishing Co, New York, 1885.** |
| [San02] | **Sandor Bela I.,** *Ingeniería mecánica: Estática y Dinámica.* **Editorial Prentice Hall. México, 2002.** |
| [Say90] | **Sayers, M.,** *Symbolic computer methods to automatically formulate vehicle simulation codes,* **Master Thesis, 1990.** |
| [Ser98] | **Serban, R.,** *Dynamic and sensitivity analysis of multibody systems,* **Ph.D. Thesis, The University of Iowa, 1998.** |
| [Sha02] | **Shabana, A. A.,** *Computational Dynamics,* **J. Wiley & Sons, New York, 2002 . ISBN 0-471-37144-0** |
| [Sha98] | **Shabana, A. A.** *Dynamics of multibody systems,* **2nd ed., J. Wiley & Sons, New York, 1998, ISBN: 0-521-59446-4.** |
| [Sha99] | **Shames, I.H.,** M*ecánica para Ingenieros. Mecánica.* **Editorial Díaz de Santos. Madrid , 1999.** |
| [ShU95] | **Shigley, J.E., Uicker Jr., J.J.,** *Teoría de máquinas y mecanismos.* **Editorial Mcgraw Hill. 2ª edición. México, 1995.** |

| | |
|---|---|
| [SiB02] | **Simionescu, P.A., Beale, D.,** *Synthesis and analysis of the five-link rear suspension system used in automobiles*, **Mechanism and Machine Theory, vol. 37, nº 9, pp. 815-832, 2002.** |
| [Sim02] | **Simón Mata A.,** *Fundamentos de Teoría de Máquinas.* 2ª Edición. **Librería Técnica Bellisco. Madrid, ISBN: 978-84-95279-96-5. 2002.** |
| [Sim04] | **Simpack,** *http://www.simpack.de*, **Intec GmbH, 2004.** |
| [SMS02] | **Schreiber, H., Meer, K., Schmitt, B.J.,** *Dimensional synthesis of planar Stephenson mechanisms for motion generation using circlepoint search and homotopy methods,* **Mechanism and Machine Theory, vol. 37, n.º 7, pp. 717, 2002.** |
| [Sto85] | **Stoer, J.,** *Principles of sequential quadratic programming methods for solving nonlinear programs,* **Computational Mathematical Programming, Vol. 15, 1985.** |
| [Str82] | **Strandh, S.,** *Máquinas. Una historia ilustrada,* **Hermann Blume Ediciones, 1982.** |
| [Sui72] | **Seth, P. N. And Uicker, J.,** *IMP: A computer aided design analysis system for mechanism and linkages* **Journal of Engineering for Industry, vol.94, pp. 454-464, 1972.** |
| [Tor97] | **Torres-Moreno J.M.,** *Apprentisasge par des réseaux de neuronas: étude de noveaux algorithmes constructifs*. **Ph.D. These INPG. Grenoble 1.997.** |
| [VaQ06] | **Van de Geijn, R.A., Quintana-Ortí, E.S.,** *Programming Matrix Computations*. **University of Texas. 2007. http://www.cs.utexas.edu/users/flame/book/Docs/book.pdf.** |

| | |
|---|---|
| [VRM97] | **VRML,** *http://www.web3d.org.* **Web 3d consortium. 1997.** |
| [Wal95] | **Wallrapp, O.,** *Fembs an interface betwewn fem codes and mbs codes, user manual for ansys and nastran.* **DLR. Oberpfaffenhofen. 1995.** |
| [Wal96] | **Waldron, K.J and Sreenivasan, S.V.,** *A study of the solvability of the position problem for multicircuit mechanisms by way of example of the double-butterfly linkage,* **Journal of Mechanical design, vol.118, nº 4, 1996.** |
| [Wam00] | **Wampler, C. W.,** *Solving the kinematics of planar mechanisms by Dixon determinant and a complex plane formulation,* **Proceedings of ASME DETC, Sept 10-13, Baltimore, 2000.** |
| [WaS96] | **Wang, S.J., Sodhi, R.S.,** *Kinematic synthesis of adjustable moving pivot four-bar mechanisms for multi-phase motion generation,* **Mechanism and Machine Theory, vol. 31, n.º 4, pp. 459-474, 1996.** |
| [Whi03] | **Whitten.,** *Systems analysis and methods with project cases.* **McGraw Hill. 6ª edición. Nueva York, 2003.** |
| [WiM06] | **WinMecc.,** htpp://www.webdeptos.uma.es/ingenieriamecanica/ winmecc/Imágenes/Descripción.png, **2006.** |
| [WMS90] | **Wampler, C. W., Morgan, A. P., Sommese , A. J.,** *Numerical continuation methods for solving polynomial systems arising in kinematics,* **Journal of mechanical design, vol. 112, pp. 59-68, 1990.** |
| [WoM06] | **Working Model.** *http://www.design-simulation.com/WM2d/* index php, **2006.** |

| | |
|---|---|
| [XBY05] | **Xiaoting R., Bin He, Yuqui L.,** *Discrete Time Transfer Matrix Method for Multibbody System Dynamics.* **Multibody Sistem Dynamics 14: 317-344, 2005.** |
| [YaS01] | **Yan, H.S., Soong, R.C.,** *Kinematic and dynamic design of four-bar linkages by links counterweighing with variable input speed,* **Mechanism and Machine Theory, vol. 36, n.º 9, pp. 1051-1071, 2001.** |

## BASES DE DATOS GENERALES CONSULTADAS

ISO, Lista de Comités Técnicos, [Base de Datos en Línea] [Génova]: ISO, 2002, http://www.iso.ch/memf/memento.html

The Serials Directory: An International Reference Book, [Base de Datos en Línea], 2002, http://www.epnet.com/hosttrial/login.html

Biblioteca Digital, [Base de Datos en Línea], 2003, http://www.cbuc.es

Current Contents, [Base de Datos en Línea], 2004, http://www.bib.ub.es/bub/buberl.htm

Base de Datos ICYT, [Base de Datos en Línea], 2001, http://ebano.cti.csic.es

8080/ Article@INIST, [Base de Datos en Línea], 2002, http://www.inist.fr

British Library, [Base de Datos en Línea], 2002, http://opac97.bl.uk

Library of Congress, [Base de Datos en Línea], 2002, http://lcweb.loc.gov/z3950

Teseo, [Base de Datos en Línea], 2004, http://www.mec.es/teseo

Dialnet [Base de Datos en línea], 2006, http://dialnet.unirioja.es/

Biblioteca ETSEIB Inspec™, [Base de Datos], 2007, http://bibliotecnica.upc.es/bib240/serveis/digitals/noticiari/sumari.asp

Science Citation Index®, [Base de Datos], 2007, http://scientific.thomson.com/products/solutions/engtech/

Biblioteca ETSEIB. Tesis Doctorales. http://www.tesisenxarxa.net/

Science Direct, [Base de Datos], 2007, http://www.sciencedirect.com/