RINCÓN "SAPERE AUDE"… ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

1. Matemáticas en la antigua India.

Hemos indicado en números anteriores que la historia de las matemáticas es el compendio de investigaciones sobre el origen de su nacimiento, su evolución y de los personajes, actores fundamentales de su desarrollo, es decir los matemáticos y matemáticas involucrados que lo han hecho posible.
El concepto de número ha estado ligado al surgimiento de las matemáticas en la historia de la humanidad de una manera muy gradual en las comunidades primitivas. A lo largo de la historia, los avances en la complejidad de la estructura social y sus relaciones se fue reflejando en el desarrollo de la matemática. Los problemas a resolver se hicieron más difíciles y ya no bastaba, como en las comunidades primitivas, con solo contar cosas y comunicar a otros la cardinalidad del conjunto contado, sino que llegó a ser crucial contar conjuntos cada vez mayores, cuantificar el tiempo, operar con fechas, posibilitar el cálculo de equivalencias para el trueque: es el momento del ***surgimiento de los nombres y símbolos numéricos.***
En esta ocasión vamos a dedicar el sub-apartado de la historia a las *Matemáticas en la antigua India.*
Recogida la idea, en partes, de un excelente artículo de Michel Waldschmidt, *Les Mathématiques en Inde* (2001) voy a esbozar algunas ideas de los registros más antiguos existentes de la India y que se encuentran en los Sulba Sutras (datados de aproximadamente entre el siglo VIII a. C. y II d. C), y apéndices de textos religiosos con reglas simples para construir altares de formas diversas, como cuadrados, rectángulos, paralelogramos y otros. Los textos más antiguos que se conservan sobre matemáticas en la Antigua India (que comprendería la actual India, así como Pakistán, Nepal, Bangladesh y Sri Lanka) están escritos en sánscrito, una lengua ya hablada por los habitantes del área de Punjab hacia la mitad del segundo milenio a.C.

Fig. 1. La épica India, el Mahabharata y el Ramayana
https://introduccionalteatroasiatico.wordpress.com/la-epica-india-el-mahabharata-y-el-ramayana/

Al igual que con Egipto, las preocupaciones por las funciones del templo, señalan un origen de las matemáticas en rituales religiosos. En los Sulba Sutras se encuentran métodos para construir círculos con aproximadamente la misma área que un cuadrado, lo que implica muchas aproximaciones diferentes del número π.

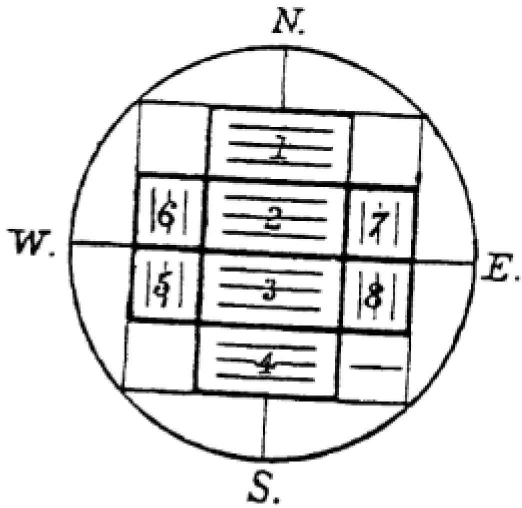

Fig.2. Regla para hacer un altar Garhapatya (círculo circunscrito al cuadrado)
https://pages.uv.es/iarribas/wikibase/Varios/Pi_India.pdf

La historia de las matemáticas antiguas, tal como se percibe en los países occidentales, se centra con mayor frecuencia en la antigüedad helénica, en sí misma influenciada por civilizaciones egipcias y mesopotámicas, y también por la riqueza de las matemáticas chinas y de la India, que ha sido durante mucho tiempo subestimada en esta perspectiva, comienza a ser mejor entendida. Las interacciones entre estas diferentes civilizaciones aún no están claramente establecidas, y son objeto de discusión, si no de controversia.
Según la tradición ortodoxa hindú, el trabajo astronómico más importante, Surya Siddhãnta, se dice que se compuso hace más de dos millones de años.
De hecho, no hay rastros de matemáticas en India antes de 1500 a. C. La civilización del valle del Indo (alrededor del año 3000 a. C) no se ha descubierto hasta 1920, y la escritura aún no está descifrada. Hay unos pesos, objetos que parecen destinados a medir, probablemente sea una numeración, pero no sabemos nada más.
Es posible que algunas piezas de Véda se hayan escrito alrededor del año 1500 a. C, en la época en la que los Arios venían del norte. Pero los Sulvasutras (manuales de la cuerda), textos que indicaban reglas y procedimientos en la construcción de los altares

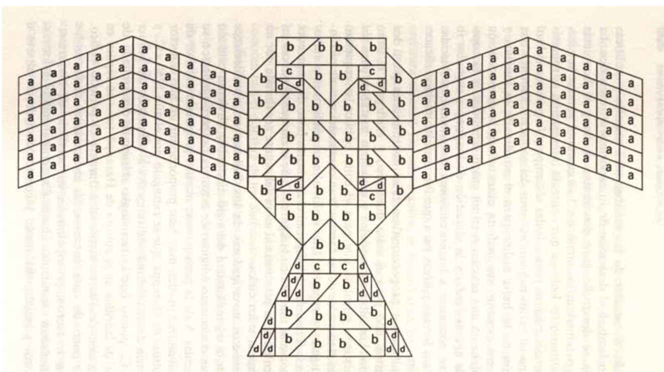
Fig.3. Salvasutra (I)
https://www.gktoday.in/gk/sulvasutras/

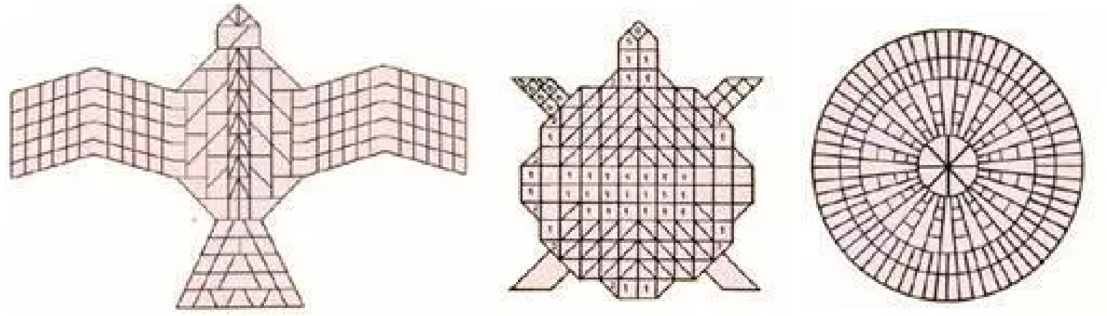

Fig. 4. Sulvasutras (II)
https://www.gktoday.in/gk/sulvasutras/

que no contenían demostraciones, solo reglas: la perfección de los altares les daría el favor de los dioses, fueron escritos por Baudhyayana, Āpastamba y Katyayana entre los siglos octavo y cuarto antes de Jesucristo, después de que el ejército persa de Darío entrara en la India. El primero formula el teorema de Pitágoras, da un procedimiento para calcular la raíz cuadrada $\sqrt{2}$ correcta hasta la quinta cifra decimal, y diversas construcciones geométricas. El segundo amplía estos temas. El último no añade mucho. La geometría aquí provenía de la integración de orientación, forma y área de los altares, según las prescripciones de los libros sagrados védicos. Había resultados geométricos, procedimientos de construcción de altares y algoritmos. El teorema de Pitágoras está incluido de la siguiente manera, por ejemplo, por Katyayana: *"La soga (estirada a lo largo de la longitud) de la diagonal de un rectángulo produce un (área) que producen conjuntamente los lados horizontal y vertical"*.

En la construcción de un altar aparecen varios tripletes pitagóricos, incluso con números irracionales. En las construcciones geométricas que planteaban, había cuadrados, rectángulos, trapecios y círculos, que se debían construir con restricciones de área. Un par de ejemplos: "Fusionar dos cuadrados iguales o desiguales para obtener un tercer cuadrado", "transformar un rectángulo en un cuadrado de la misma área"

También aparecen, al mismo tiempo, el gramático Panini (Shalatura siglo IV a. C.) sánscrito de la India antigua. Con seguridad, el gramático más célebre y más frecuentemente citado de los antiguos gramáticos de la India, y Siddartha (Gautama), nombre civil del Buddha/Buda histórico (563-483 a. C.), asceta y sabio, fundador del budismo

Estos antiguos manuales de texto hindúes marcan pautas para construir altares de sacrificio de la forma y de tamaño precisos. La redacción de los manuales sigue una métrica fija (como los textos sagrados, y como el tratado de Gramática de Panini). Se organizan en *slokas*, formas de versos desarrollados a partir del tipo de cuarteto poético llamado *anustubh.*

Es la base del verso épico de la literatura hinduista, y puede ser considerada la forma de verso indio por excelencia, ya que se utiliza con mucha más frecuencia que cualquier otra métrica en la poesía clásica en sáncrito. Por ejemplo, el Majábharata y el Ramaiana (ambos del siglo III a. C. aproximadamente) están escritos en su mayoría en slokas, evitando los verbos y destinados a ser aprendido de memoria.

Las construcciones de los altares son descritas por el citado ut-supra, Āpastamba (Personaje importante entre el 510 y el 240 a. C. Fue un religioso hinduista y matemático indio. Se desconoce dónde nació o dónde vivió. Los estudiosos tampoco coinciden en la datación de sus obras. Es probable que fuera un clérigo de la religión védica (una religión ritualista que desapareció para dar lugar a la más mística religión hinduista). Se sabe que pertenecía a una familia de brahmanes de la secta védica Taitiríia, que se dedicaban a la repetición del Krisna-iáyur-veda ("el veda negro de los sacrificios'), compuso al menos parte de un extenso texto llamado Kalpa-sutra. El texto completo se atribuye a Āpastamba, pero el indólogo indio Pandurang Vaman Kane (1880-1972) afirma que con respecto a esta autoría hay una diferencia de opiniones entre los distintos indólogos. Kane logró datar el Dharma-sutra (una de las partes del Kalpa-sutra) entre el 450 y el 350 a. C. Otra parte del Kalpa-sutra es el Āpastamba-srauta-sutra, que es la más conocida de las obras Sulba-sutras, que son libros sobre la construcción de altares y sobre las formas de los lugares y fuegos rituales para los sacrificios como se ha indicado ut-supra. Escritos en forma de aforismos, abordaban temas como la conversión de espacios circulares en cuadrados con la misma superficie o la construcción de cuadrados sobre la diagonal de otro cuadrado, etc.

El estilo aforístico los Sulba-sutras solo proporciona fórmulas para hacer determinadas construcciones sin explicar el procedimiento por el que se obtuvieron estas fórmulas (lo que hoy se llamaría una demostración). Posiblemente obtenían los datos midiendo de manera empírica (sin fórmulas teóricas). No obstante, Āpastamba, en algunos pasajes muestra razonamientos comparables a una demostración.

En esta obra primitiva, quizás contemporánea al geómetra griego Pitágoras (572-497 a. C.), se encuentran reglas para la construcción de ángulos rectos (para la construcción de altares perfectamente cuadrados, lo cual era necesario para los rituales místicos) por medio de ternas de cuerdas. En varios sutras proporciona una lista de ternas pitagóricas y muestra su utilización en la construcción de triángulos rectángulos. La lista de ternas incluye las siguientes:

(3; 4; 5); (5; 12; 13); (7; 24; 25); (8; 15; 17); (20; 21; 29); (12; 35; 37) ;(15, 36, 39); (5/2, 6, 13/2);(15/2, 10, 25/2).

También aparece una regla que recuerda a los elementos de Euclides. Es la siguiente:

Para construir un cuadrado equivalente (en área) a un rectángulo ABCD, llévense los lados menores "y" sobre los mayores de manera que AF=AB=BE=CD y trácese la recta HG mediatriz de los segmentos CE y DF; prolónguese EF hasta K, GH hasta L y AB hasta M de manera que FK=HL=FH=HM, y trácese la recta LKM. Constrúyase ahora un rectángulo con diagonal igual a LG y con su lado más corto igual a HF; entonces el lado más largo de este rectángulo es el lado "x"del cuadrado buscado. (Āpastamba-srauta-sutra)

En este problema importante Baudhãyana expresa así la diagonal de un cuadrado

"*Como medida (del lado del cuadrado) y el tercio aumentado del cuarto disminuido de su trigésima cuarta parte, esto es, en términos modernos, nos viene a dar la aproximación*

$$1+\frac{1}{3}(1+\frac{1}{4}(1-\frac{1}{34}))=\frac{577}{408}=1.414215...$$

para $\sqrt{2}$ *(notemos que* 577^2*-2.*408^2 *= 1*).

El establecimiento de calendarios fue otra motivación importante para desarrollar las matemáticas, y esto lleva al estudio de la astronomía (*Jyotisutras*).

No se puede ignorar la importancia de la astrología y las revelaciones cósmicas.

Las tablas de fechas, latitudes y longitudes, del movimiento del sol, de la luna y de la Tierra, representan la base de los cálculos para hacer horóscopos y predecir la longevidad de los individuos, así como la elección de fechas propicias y adecuadas para eventos importantes (por ejemplo, el matrimonio).

De 500 a 200 a.C., las matemáticas Védicas (El período védico o la era védica es el período de la historia de la India en la que los textos canónicos hindúes, como los cuatro Vedas, Brāhmaṇas, Āraṇyaka y Upaniṣad, se compusieron en sánscrito védico, una forma de sánscrito. La cultura asociada con este período, a veces denominada civilización védica, se desarrolló en el norte y noroeste del subcontinente indio. El período védico es, por definición, aquel en el que se desarrolló la literatura védica, y se puede ubicar en el segundo milenio antes de Cristo y el primer milenio antes de Cristo. hasta el siglo 6 a.C.) continuarán desarrollándose, antes de decidirse a dar paso a las matemáticas de la teoría de números, permutaciones y combinaciones, teorema del binomio, y siempre la astronomía.

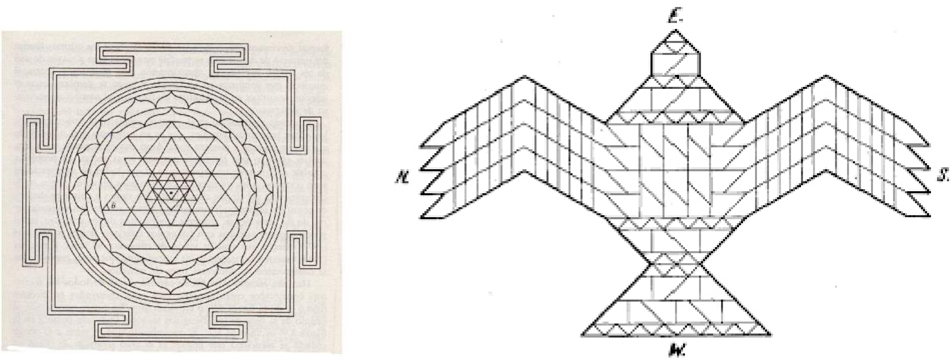

Fig. 5. Matemáticas Védicas

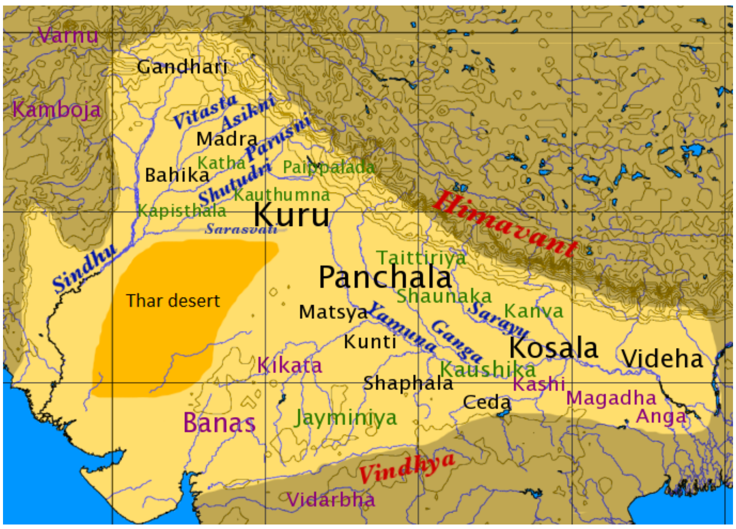

Fig. 6. Mapa de la India Védica

https://es.wikipedia.org/wiki/Periodo_védico

Un sistema de numeración digital se encuentra en la India en el siglo III a.C. en tiempos del rey Ashoka, probablemente uno de los más grandes gobernantes que la Tierra ha conocido. En la India del siglo III a,C, su adhesión al budismo le permitió encarnar una revolución humana valiente y comprometida.

Los historiadores se han preguntado durante mucho tiempo si este hombre había existido, porque solo se le conocía a través de las leyendas budistas. Pero en 1837, James Prinsep, un funcionario de la administración civil del imperio británico en Benares, logra descifrar un alfabeto hasta ahora desconocido, y logra comprender el significado de las inscripciones grabadas en dos columnas de arenisca rosa. Gradualmente, muchos escritos en columnas, en rocas o en cuevas son descubiertos y traducidos, identificados como edictos dictados por el rey Ashoka y grabados en las cuatro esquinas de su inmenso reino (¡finalmente, nos enfrentamos a documentos históricos reales!).

Fig.7. Posible representación de Asoka. Relieve en Amravati
https://es.wikipedia.org/wiki/Asoka

Fig. 8. Rey Ashoka con sus tropas.
https://fr.dreamstime.com/photo-stock-roi-ashoka-ses-troupes-image63840367

Había hecho pilares de piedra (algunos existen todavía), en el que se encuentran inscripciones grabadas en brahmi, con los ascendientes más lejanos de nuestro sistema numérico actual. La numeración brahmi es un sistema de numeración indio que apareció alrededor del siglo III a. C. y que fue utilizado hasta bien entrado el siglo IV.
Es el antepasado gráfico directo de la numeración gupta, utilizada en el Imperio Gupta,

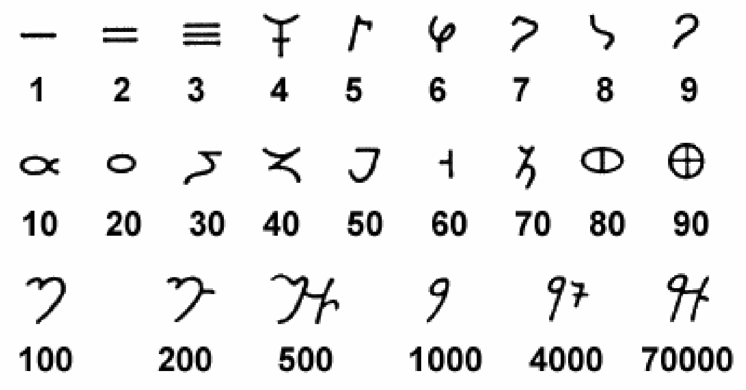

Fig. 9. Numeración brahmi

https://www.geocachingtoolbox.com/index.php?lang=es&page=codeTables&id=brahmiNumbers

uno de los mayores imperios políticos y militares de la historia de la India. Fue gobernado por la dinastía Gupta entre 320 y 550 d.C. y ocupó la mayor parte de la India septentrional y de los actuales Pakistán oriental y Bangladés (bajo este imperio, se dio un período de paz y prosperidad que favoreció el desarrollo de la cultura india desde el punto de vista artístico, literario y científico. Así, los reyes Gupta establecieron un eficaz sistema administrativo y un fuerte poder central, permitiendo la autonomía local en períodos de paz. La sociedad era ordenada según las creencias del hinduismo con una rígida división en castas. En esta etapa el hinduismo adquiere sus principales características: las principales divinidades, las prácticas religiosas y la importancia de los templos. Durante este período fueron tan grandes el comercio y los intercambios con el exterior que la mitología y arquitectura hinduista y budista se expandieron por Borneo, Camboya, Indonesia y Tailandia).

Los numerales brahmí no utilizaban el sistema posicional, sino que utilizaban símbolos separados para 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y también había símbolos para 10, 100, 1000, etc., al igual que para 20, 30, 40, [...], 90 y para 200, 300, 400, [...], 900. Los números 2 y 3 se formaban a partir del símbolo 1.

La introducción de este sistema de escritura será una herramienta indispensable en el desarrollo futuro de las matemáticas en la India que permitirá escribir grandes números que fascinarán a los matemáticos.

Probablemente sea, entre el segundo y el cuarto siglo de nuestra era, cuándo sea datado el manuscrito de Bakhahli con la introducción de operaciones matemáticas, decimal, introducción de cero, álgebra, ecuaciones cuadráticas, raíces cuadradas, uso de incógnitas y el signo menos.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. Ejercicios de aquí y allá

En Matemáticas, muchas veces, me pregunto si realmente conocemos suficientemente la historia de las matemáticas y especialmente la de la geometría: sus fundamentos y sus conceptos que debemos recordar obligatoriamente. En los planes de estudio durante muchos años la geometría no ha sido bien tratada En los libros de texto, o durante su primer curso de geometría para principiantes, al alumno hay que "ENFRENTARLO" inevitablemente con los teoremas y principios más simples de esta rama de las matemáticas: con un poco de trabajo y una buena dosis de motivación, podrán adquirir y aprender destrezas en poco tiempo y reglas básicas en geometría:

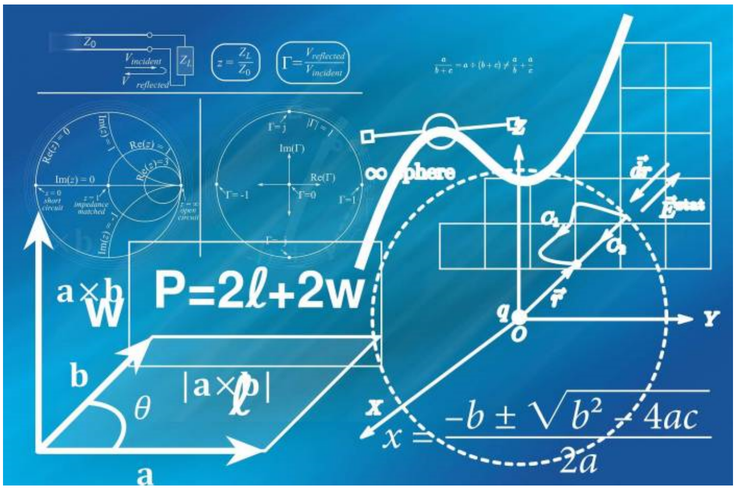

Fig.10. ¿Para principiantes en el estudio de la geometría puede parecer chino?
https://www.superprof.fr/blog/etudier-les-formes-et-les-espaces/

a) Vocabulario de las figuras: tangente, paralelo,secante, perpendicular,…
b) Ángulos: ángulo adyacente, ángulo opuesto, ángulo interno y externo, bisectriz,
c) Distancias: punto a punto, círculo y esfera, mediana, altura, distancia métrica, distancia de Hausdorff,…
d) Plano cartesiano,…
e) Triángulos: triángulo isósceles, rectángulo, equilátero, escaleno,…
f) Teoremas: teorema de Thales, teorema de Pitágoras, teorema de la altura,…
Algunos pueden pensar que solo los estudiantes de doctorado o los investigadores son capaces de llevar a cabo las teorías más complejas de la geometría, pero a mi juicio esto es un error común. En realidad, ¿la geometría es solo una cuestión de lógica?
Debemos hablar de diferentes tipos de geometría.
En el sentido estricto del término, hablamos de geometría para evocar la geometría clásica y euclidiana, que es la que enseñan los profesores de matemáticas de todo el mundo. En la escuela intermedia o secundaria, los estudiantes aprenderán conceptos simples de geometría clásica que permiten una introducción a puntos de referencia más complejos. Aunque en cursos en la Universidad, los estudiantes pueden elegir diferentes áreas de investigación en geometría: geometría diferencial, geometría algebraica, geometría compleja, geometría no conmutativa, geometría no euclidiana, geometría de contacto, geometría riemanniana...
¡La llamada geometría clásica debería ser, en gran parte suficiente, para esperar obtener una buena formación en matemáticas durante su carrera escolar!

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

JOYITA: a) *Sea M un punto del lado BC de un triángulo ABC. La paralela por M a AB corta al lado AC en el punto N y la paralela por M a AC corta al lado AB en el punto O. La razón entre las áreas de los triángulos OBM y NMC es k^2. Determínese la razón entre las áreas de los triángulos AON y ABC.*

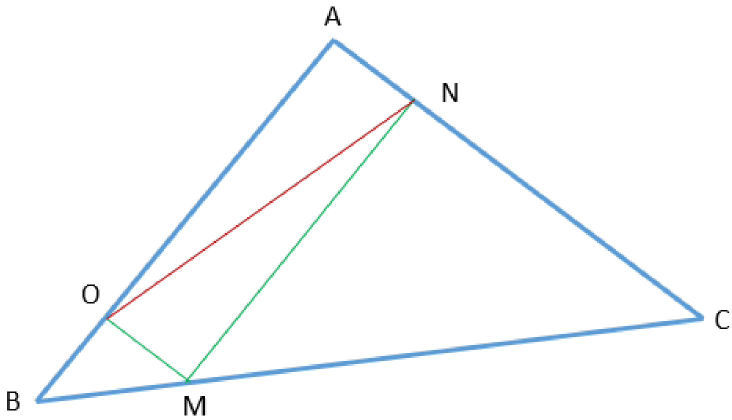

Fig. 11. Triángulo cualquiera

JOYITA: b) *Dos circunferencias secantes* C_1 *y* C_2 *de radios* R_1 *y* R_2 *se cortan en los puntos A y B.*
Por B se traza una recta variable que corta de nuevo a C_1 *y* C_2 *en dos puntos que llamaremos M y N respectivamente. Comprobar que existe un punto P, que depende sólo de* C_1 *y* C_2*, tal que la mediatriz del segmento MN pasa por P.*

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. Ejercicios de aquí y allá

La teoría de los números siempre ha fascinado tanto a los aficionados como a los matemáticos profesionales desde la antigüedad.

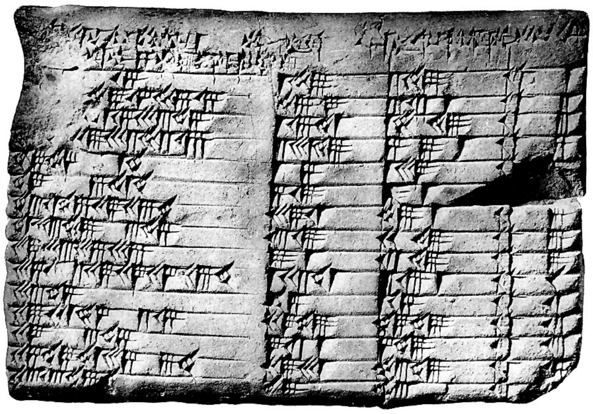

Fig. 12. Plimpton 322 es una tablilla de barro de Babilonia
https://en.wikipedia.org/wiki/Number_theory#/media/File:Plimpton_322.jpg

En contraste con otras ramas de las matemáticas, muchos de los problemas y teoremas de la teoría de los números requieren a menudo una base matemática sofisticada.

Fig. 13. Depósito de Números
https://sp.depositphotos.com/stock-photos/n%C3%BAmeros-de.html?qview=126584852

Hasta mediados del siglo XX, la teoría de los números se consideraba la rama más pura de las matemáticas, sin aplicaciones directas al mundo real. El advenimiento de los ordenadores y las comunicaciones digitales reveló que el problema no era fácil. Hay que distinguir actualmente la naturaleza de una teoría elemental de los números, una teoría pura de los números, una teoría analítica de los números y una teoría probabilística de los números. Estas categorías reflejan los métodos utilizados para abordar los problemas relacionados con los enteros.
En este sentido, presentaremos algunos ejemplos propuestos en la Olimpiada matemática española que bien merecen nuestra atención y que puede servir de entrenamiento para nuestros alumnos y material docente para el/los profesores que lo deseen.
Ahí va mi propuesta para este número 101.

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

JOYITA: *a) Hallar todos los enteros positivos p y q tales que*

$$p! + 1 = (q! - 1)^2.$$

JOYITA: b) *Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de un cuadrado 3x3. A continuación sumamos seis números de tres cifras, tres que se leen en filas de izquierda a derecha y otros tres que se leen en columnas de arriba abajo. ¿Podremos encontrar alguna distribución para la que se obtenga como valor de la suma 2019?*

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@gmail.com