Universidad de Huelva

Departamento de Matemáticas



Análisis de algunas degeneraciones y de bifurcaciones globales en campos vectoriales simétricos

Memoria para optar al grado de doctor
presentada por:

Manuel Merino Morlesín

Fecha de lectura: 3 de julio de 2009

Bajo la dirección de los doctores:

Antonio Algaba Durán
Alejandro José Rodríguez Luis

Huelva, 2010

ISBN: 978-84-92679-55-3
D.L.: H 29-2010



UNIVERSIDAD DE HUELVA

Departamento de Matemáticas

Análisis de Algunas Degeneraciones y de Bifurcaciones Globales en Campos Vectoriales Simétricos

Manuel Merino Morlesín

Tesis Doctoral

Análisis de Algunas Degeneraciones y de Bifurcaciones Globales en Campos Vectoriales Simétricos

---

Manuel Merino Morlesín

Certificamos que la presente memoria ha sido realizada por Manuel Merino Morlesín bajo nuestra dirección y constituye su Tesis para aspirar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Huelva.

V^{o} B^{o} de los Directores:

Dr. Antonio Algaba Durán

Dr. Alejandro José Rodríguez Luis

Huelva, Mayo de 2009

Agradecimientos

Durante el desarrollo de esta memoria he recibido el apoyo y la ayuda de numerosas personas a las que, con estas líneas, quiero expresar mi más sincero agradecimiento:

A los Dres. Antonio Algaba Durán y Alejandro J. Rodríguez Luis, directores de la presente tesis doctoral, por introducirme en el campo de los sistemas dinámicos y, con su gran conocimiento y experiencia, haberme ayudado en mi aprendizaje y la realización de este trabajo.

A los compañeros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Huelva, Dres. Cristóbal García García y Manuel Reyes Columé por su inestimable ayuda, tanto moral como material, a lo largo de todos estos años.

A los profesores del Grupo de Investigación en Sistemas Dinámicos del Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla por su participación, directa o indirecta, en mi formación y por su colaboración desinteresada en todo momento, en especial a su responsable Dr. Emilio Freire Macías. Tambien quisiera destacar la ayuda y colaboración que me han brindado, durante la elaboración de esta memoria, los profesores Dres. Fernando Fernández Sánchez y Estanislao Gamero Gutiérrez.

A Susi, Claudia y Cristina.

A mi familia.

Índice general

Introducción **1**

1. Bifurcaciones en la Ecuación de Chua **7**
1.1. Introducción . . . 7
1.2. Bifurcaciones locales en la ecuación de Chua . . . 9
1.3. Bifurcación de Hopf del origen . . . 11
1.4. Bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales . . . 15
1.4.1. Degeneraciones de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales 23
1.4.2. Estabilidad de la Hopf de los equilibrios no triviales en un entorno del infinito en el plano de parámetros . . . 26
1.5. Bifurcaciones de codimensión dos y tres . . . 31
1.5.1. Bifurcación de Takens-Bogdanov . . . 31
1.5.2. Bifurcación Hopf-pitchfork . . . 34
1.5.3. Bifurcación triple-cero . . . 35
1.6. Conjuntos de bifurcaciones . . . 35

2. Degeneraciones No Lineales de la Bifurcación Hopf-pitchfork **45**
2.1. Introducción . . . 45
2.2. Cálculo de la forma normal . . . 47
2.3. Análisis de los casos degenerados . . . 51
2.3.1. Determinación de la singularidad . . . 52
2.3.2. Análisis del despliegue plano . . . 53
2.3.3. Comportamiento del despliegue tridimensional truncado . . . 101
2.4. Estudio numérico . . . 102

3. Lenguas de Arnold **119**
3.1. Introducción . . . 119
3.2. Análisis de las lenguas de Arnold . . . 125
3.3. Dinámica en el interior de las lenguas . . . 130
3.3.1. Evolución de las lenguas de Arnold . . . 134
3.3.2. Bifurcaciones de Takens-Bogdanov . . . 140
3.3.3. Conexiones Homoclinas . . . 149

4. Degeneraciones de Conexiones Homoclinas **153**
4.1. Introducción . . . 153
4.2. Estudio teórico . . . 154
4.2.1. Homoclinas de doble pulso . . . 155
4.2.2. Homoclinas de triple pulso . . . 160
4.3. Estudio numérico . . . 166

5. Notas sobre la Bifurcación Triple Cero **191**
5.1. Introducción . . . 191
5.2. Análisis de la forma normal . . . 192
5.3. Bifurcaciones locales de codimensión dos . . . 197
5.3.1. Bifurcación de Takens-Bogdanov . . . 198
5.3.2. Bifurcación Hopf-pitchfork . . . 211
5.3.3. Bifurcación triple-cero . . . 216
5.4. Sistemas de control: forma normal y bifurcaciones locales . . . 216
5.5. Estudio numérico . . . 220
5.5.1. Conexión homoclina principal y sus degeneraciones . . . 222
5.5.2. Conexión heteroclina principal y sus degeneraciones . . . 233
5.5.3. Evolución de la conexiones globales en un entorno del triple-cero . . . 236

6. Cúspides de Órbitas Periódicas cerca de un Punto-T No Transversal **253**
6.1. Introducción . . . 253
6.2. Planteamiento del modelo . . . 255
6.3. Análisis del modelo: órbitas periódicas principales y sus bifurcaciones . . . 259
6.3.1. Órbitas periódicas principales . . . 260
6.3.2. Bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas principales . . . 263
6.3.3. Bifurcaciones cúspide . . . 267
6.3.4. Estudio numérico del modelo . . . 271
6.4. Aplicación a la ecuación de Chua . . . 280

7. Análisis de una Degeneración de la Bifurcación Hopf-Silla-Nodo **291**
7.1. Introducción . . . 291
7.2. Una degeneración no lineal de la bifurcación Hopf-silla-nodo . . . 293
7.2.1. Estudio de la singularidad . . . 294
7.2.2. Estudio de un despliegue de codimensión tres . . . 296
7.2.3. Bifurcaciones globales . . . 299
7.2.4. Implicaciones para el sistema tridimensional . . . 300
7.3. Estudio numérico de un oscilador electrónico . . . 302
7.4. Apéndice . . . 313
7.4.1. Conexiones heteroclinas degeneradas . . . 313
7.4.2. Conexiones heteroclinas no degeneradas . . . 315
7.4.3. Conexiones homoclinas . . . 316
7.4.4. Conexiones globales del tipo J . . . 321

Introducción

La teoría de bifurcaciones forma parte de la teoría general de sistemas dinámicos y se origina junto con la moderna teoría cualitativa, al final del siglo XIX cuando Poincaré introduce las ideas topológicas y geométricas en el estudio de la dinámica. La formalización del concepto de bifurcación se produce al ponerlo en relación con el de estabilidad estructural, introducido por Andronov y Pontriaguin en 1937.

Los mayores progresos se han producido en el contexto de la llamada teoría local de bifurcaciones; es decir, bifurcaciones de los elementos críticos: equilibrios y órbitas periódicas. Dicha teoría hace uso de dos intrumentos básicos: reducción mediante el teorema de la variedad de centro, y simplificación mediante formas normales.

En la segunda mitad del siglo XX, y como resultado de esfuerzos conjuntos desde diferentes disciplinas, se ha evidenciado la existencia de una gran complejidad en la conducta dinámica de sistemas deterministas. Un primer paso para la comprensión de dicha complejidad consiste en obtener una descripción del "esqueleto" de un sistema dinámico: equilibrios y órbitas periódicas. Se trata de conocer la dinámica local en torno a las soluciones más simples (estacionarias y periódicas) y, además, mediante la prolongación de sus variedades estables e inestables indagar sobre sus intersecciones, lo que conduce a fenómenos de dinámica global.

Este programa fue iniciado por Poincaré a finales del siglo XIX; en sus estudios sobre el problema de los tres cuerpos introduce el concepto de órbitas homoclinas y heteroclinas y vislumbra la complejidad dinámica que las acompaña. Las primeras ideas de Poincaré encontraron eco en los trabajos de Birkhoff, pero, en general, tuvieron escasa repercusión.

A mediados de los años sesenta Smale completa resultados de Birkhoff, mostrando que la existencia de órbitas homoclinas transversales implica la presencia de conjuntos invariantes que describió con la "herradura" que lleva su nombre. Por la misma época, aparecen en Rusia los trabajos pioneros de Shil'nikov (1965) sobre órbitas homoclinas de equilibrios en sistemas autónomos. No es hasta los años ochenta que estos resultados tienen continuación en Europa occidental: trabajos de Glendinning y Sparrow (1984) y Gaspard, Kapral y Nicolis (1984) sobre la conducta periódica en torno a una órbita homoclina.

En este contexto surgen los primeros estudios sobre ciclos heteroclinos de codimensión dos en sistemas de dimensión mayor o igual a 3. Citemos los trabajos de Glendinning y Sparrow (1986) sobre el llamado punto–T en la ecuación de Lorenz y los de Bykov (1993).

En todos estos trabajos se destacan las consecuencias sobre la dinámica periódica y no periódica de la existencia de conexiones globales. Normalmente los resultados se obtienen en forma de diagramas y conjuntos de bifurcaciones puesto que trabajan con una familia parametrizada de sistemas.

En los últimos años, y en el marco de los proyectos de investigación de nuestro grupo, hemos considerado ciertas familias de osciladores electrónicos tridimensionales del tipo van der Pol-Duffing; el estudio del comportamiento dinámico y de bifurcaciones de dichos osciladores se encuentra en el origen y motivación de esta memoria. La aplicación de las ideas y técnicas propias de la teoría geométrica y de bifurcaciones de sistemas dinámicos, hace que se susciten diversos problemas y cuestiones que son de interés general y cuya resolución constituye un segundo y fundamental objetivo.

Entre las hipótesis de partida se encuentra el hecho de que mediante el análisis de las posibles bifurcaciones es factible obtener información valiosa sobre el comportamiento dinámico, muchas veces de una gran complejidad, de sistemas concretos. La teoría de bifurcaciones constituye, pues, una herramienta básica a utilizar en el estudio de sistemas dinámicos.

El estudio de bifurcaciones de una familia parametrizada de sistemas dinámicos se centra sobre aquellos valores de los parámetros donde se producen pérdidas de estabilidad estructural. Los problemas son locales y globales. En el primer caso se trata de la pérdida de hiperbolicidad (degeneración lineal) de equilibrios u órbitas periódicas que da origen a fenómenos de bifurcación local (inestabilidad estructural local). Un ejemplo del segundo caso lo constituye la característica de inestabilidad estructural de las órbitas homoclinas, que está en la base de variados y complejos fenómenos de bifurcación global.

A lo largo de esta memoria aparece, de forma recurrente, el procedimiento siguiente de aplicación de la teoría de bifurcación local. Se buscan las situaciones de mayor degeneración de los elementos críticos (preferentemente equilibrios, ocasionalmente órbitas periódicas) en los sistemas parametrizados. Para ello se comienzan analizando las degeneraciones posibles en las partes lineales (no hiperbolicidad), con lo que se consigue especificar un primer conjunto de parámetros de bifurcación de entre los parámetros propios del sistema. El estudio de las correspondientes conductas de bifurcación se lleva a cabo mediante técnicas analíticas tales como variedad de centro y formas normales. Con tal fin se precisa el concurso de algoritmos de computación simbólica desarrollados en trabajos anteriores.

El cálculo de las formas normales nos proporciona información sobre aquellos términos no lineales esenciales para la conducta de bifurcación. Nos planteamos, en este punto, analizar las posibles degeneraciones en dichas partes no lineales. Con ello, pondremos en evidencia el papel como parámetros de bifurcación de nuevos parámetros del sistema.

En síntesis, habremos encontrado situaciones altamente degeneradas y se pretende describir las correspondientes bifurcaciones multiparamétricas. Dichas situaciones de degeneración actúan como centros organizadores de la dinámica, y así, mediante el adecuado análisis local, podremos detectar una amplia variedad de comportamientos dinámicos y de bifurcaciones.

Los resultados del análisis local antes citado serán válidos, en principio, en un entorno del elemento crítico en el espacio de órbitas y en un entorno de los valores críticos de bifurcación en el espacio de parámetros. Sin embargo, de la observación experimental o la simulación numérica se deduce, con frecuencia, que los resultados del estudio local se conservan *lejos* de las situaciones de bifurcación (los entornos predichos por la teoría tienen en todo caso un tamaño concreto, aun cuando no sea conocido, en general, a priori).

Nos planteamos, pues, *extender* los resultados locales mediante el uso de los métodos numéricos de continuación. La valiosa información obtenida en el estudio de una bifurcación local será el adecuado punto de arranque en la aplicación de las técnicas numéricas: aproximaciones locales bien en el espacio de órbitas (por ejemplo, condiciones iniciales aproximadas de órbitas periódicas u homoclinas), bien en el espacio de parámetros (por ejemplo, aproximaciones a curvas de bifurcación). Se trata, por tanto, de una buena muestra de la conjunción de técnicas analíticas y numéricas en el estudio de sistemas dinámicos.

A lo largo de esta memoria diversos sistemas osciladores autónomos son estudiados, aplicando las técnicas analíticas y numéricas desarrolladas. Específicamente, el capítulo 1 se dedica al estudio del comportamiento dinámico de un sistema electrónico autónomo; tal estudio ha originado, en buena medida, el trabajo desarrollado en esta memoria y ha suscitado una gran parte de los problemas y cuestiones generales abordados.

La característica no lineal de algunos de los elementos que configuran el circuito electrónico antes citado, es determinante de su dinámica. El carácter no lineal, no sólo aparece en el modelado de fenómenos naturales en los más diversos campos de la ciencia y la técnica, sino que puede ser utilizado con provecho, en el diseño; claro está, si suponemos conocidas sus consecuencias.

Esta memoria está organizada como sigue: el capítulo 1 está dedicado al análisis de las ecuación de Chua, derivadas en Pivka, Wu y Huang (1996) del oscilador de Chua, que tiene la propiedad de la $\mathbb{Z}_2$-simetría. Se analizan las degeneraciones lineales correspondientes a los equilibrios, proceso que nos posibilitará descubrir el papel que juegan los parámetros del sistema como parámetros de bifurcación. Describimos las degeneraciones lineales de codimensión uno, dos y tres, de las cuales surgen, en ciertos casos, conexiones globales. Concretamente en este capítulo estudiamos bifurcación de Hopf del origen y de los equilibrios no triviales, analizando sus degeneraciones y las distintas configuraciones que pueden presentar dichas superficies en el espacio de parámetros. También se analiza la bifurcación de Takens-Bogdanov del equilibrio en el origen y sus posibles degeneraciones, dejando para los siguientes capítulos un desarrollo más profundo de las restantes degeneraciones. Con la información obtenida en el estudio teórico previo se presentan diversos conjuntos de bifurcaciones en los que se muestran las curvas donde tienen lugar las bifurcaciones detectadas. En particular en uno de ellos mostramos, en un plano de parámetros, las curvas donde tienen lugar las bifurcaciones de codimensión tres del origen para la ecuación de Chua. Estas curvas delimitan varias zonas, en el plano de parámetros utilizado, cuyos conjuntos parciales de bifurcaciones se representan utilizando los otros dos restantes parámetros de la ecuación.

En el capítulo 2 se exponen algunos aspectos asociados con las bifurcaciones que presenta la ecuación de Chua en un entorno de una degeneración lineal Hopf-pitchfork, justificando los resultados descritos en el capítulo 1 relativos a esta degeneración. Es conocido que al menos hay tres degeneraciones no lineales diferentes de la bifurcación Hopf-pitchfork (ver Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*a*), (2000), (1999b)). En el caso de la ecuación de Chua mostramos que las tres degeneraciones anteriores se presentan al mismo tiempo, estudiándose cuál de estas bifurcaciones persiste en este caso múltiplemente degenerado. En concreto, varios fenómenos relacionados con movimientos periódicos y cuasiperiódicos son justificados analíticamente por el estudio que llevaremos

a cabo; si bien al analizar algunas de las zonas de resonancia generadas por la curva de bifurcación a toros (Hopf secundaria de órbitas periódicas) que surge del punto de degeneración Hopf-pitchfork, estas zonas de resonancia son abiertas. De acuerdo a Peckham, Frouzakis y Kevrekidis (1995), dado que en nuestro caso la curva que representa la evolución del argumento de los multiplicadores de Floquet cuando se mueven a la largo de la curva de bifurcación a toros tiene forma parabólica, es decir, hay un punto donde la función argumento cambia su variación monótona, las zonas de resonancia que surgen en torno a dicho punto son abiertas y no cerradas como podría esperarse del estudio local.

Esto motiva el capítulo 3 donde analizamos otro oscilador electrónico, también con la propiedad de la $\mathbb{Z}_2$-simetría. Describiremos las degeneraciones lineales de codimensión uno, dos y tres, realizando un análisis detallado de las zonas de resonancia en relación con una curva de bifurcación a toros que nace de un punto de codimensión dos Hopf-pitchfork. Mostramos el proceso, que permite la unión de las lenguas de Arnold (zonas de resonancia cerradas) que surgen de una curva de bifurcación a toros (sobre la que esté presente un punto de degeneración angular de tipo *banana*) y las zonas de resonancia abiertas (delimitadas por curvas de bifurcación silla-nodo del mismo tipo 1:p) relacionadas con degeneraciones de las conexiones homoclinas de los equilibrios del sistema.

Precisamente el estudio de las conexiones homoclinas centra el capítulo 4 de esta memoria. Nuestro interés en dicho capítulo, consiste en analizar la conducta de bifurcaciones homoclinas (de doble y triple pulso) situadas en zona Shil'nikov, relacionadas con la existencia de un punto de Belyakov, es decir, un punto donde el equilibrio pasa de silla-foco a silla-nodo, para sistemas con $\mathbb{Z}_2$–simetría.

El estudio teórico, mediante la aplicación de Poincaré, nos permite obtener la distribución de las curvas de conexiones homoclinas de doble y triple pulso, en relación a la homoclina principal, en un entorno del punto donde los autovalores del equilibrio en el origen están en resonancia. La configuración obtenida aquí es diferente, debido a la presencia de nuevos lazos homoclinos, en relación a la de Gonchenko, Turaev, Gaspard y Nicolis (1997) para sistemas donde no se tiene la propiedad de la $\mathbb{Z}_2$–simetría. La última sección de este capítulo está dedicada al análisis numérico, en la ecuación de Chua, de los resultados teóricos obtenidos usando las primeras curvas de la sucesión de conexiones homoclinas que acumulan al punto de degeneración anterior.

En el capítulo 5 analizamos la última degeneración descrita en el capítulo 1, a saber, la degeneración triple cero del equilibrio en el origen. Nuestro interés en este capítulo es revelar algunos aspectos asociados con el comportamiento, desde el punto de vista de las bifurcaciones, que exhibe la ecuación de Chua cerca de la bifurcación triple-cero. Esta última es una situación lineal de codimension tres, cuyo análisis está lejos de ser completado analíticamente, aun en las situaciones más simples y sin la simetría (ver Dumortier, Ibáñez y Kokubu (2001); Freire, Gamero, Rodríguez-Luis y Algaba (2002) y sus referencias). En la tercera sección de este capítulo realizaremos el análisis de bifurcaciones de un despliegue triparamétrico, correspondiente a una degeneración lineal con un autovalor triple cero, para sistemas que tienen la propiedad de la $\mathbb{Z}_2$-simetría. Llevaremos a cabo un estudio de las bifurcaciones locales de codimensión dos de los puntos de equilibrio, Takens-Bogdanov y Hopf-cero, mostrando que éstas son no degeneradas.

Al objeto de aplicar los resultados obtenidos, nos interesamos en la sección cuarta por el

estudio de un conjunto de sistemas generales y el análisis de un sistema concreto que actúa como paradigma de aquel conjunto. Esta es la situación en el caso de algunos sistemas de control $\mathbb{Z}_2$-simétricos y la ecuación de Chua. Realizaremos el análisis de bifurcaciones para los sistemas de control canónicos tridimensionales y luego, la información obtenida será utilizada para explicar algunas bifurcaciones en la ecuación de Chua.

Finalmente realizamos un detallado estudio numérico de la ecuación de Chua cerca de las dos bifurcaciones de equilibrio, de codimensión tres, estudiadas analíticamente (bifurcación de Takens-Bogdanov degenerada y degeneración triple-cero). Este estudio numérico nos permite dar una importante información acerca de otras bifurcaciones de codimensión dos y tres, de conexiones globales y de órbitas periódicas. En efecto, varias conexiones homoclinas de codimensión tres detectadas aquí, por lo que conocemos, no han sido estudiadas ni analítica ni numéricamente.

El estudio anterior nos revela la existencia de una curva de conexiones heteroclinas de codimensión dos, que recibe el nombre de puntos-T (ver Fernández-Sánchez (2002)), en un entorno de la degeneración lineal triple-cero. Esta curva presenta un falta de transversalidad en el espacio de parámetros cuyas consecuencias analizamos en el capítulo 6.

En trabajos previos (ver Algaba, Merino, Fernández-Sánchez y Rodríguez-Luis (2003)) detectamos numéricamente la existencia de curvas cerradas de bifurcaciones globales (conexiones homoclinas y heteroclinas) relacionadas con el fenómeno de la falta de transversalidad de una curva de puntos-T en el espacio tridimensional de parámetros. La construcción de un modelo teórico que justifica dicho comportamiento fue desarrollada posteriormente (ver Fernández-Sánchez (2002); Algaba, Fernández-Sánchez, Freire, Merino y Rodríguez-Luis (2002)). Como continuación de estos trabajos nos planteamos en el capítulo 6 detectar numéricamente, en la ecuación de Chua, la presencia de otras curvas de bifurcación, básicamente sillas-nodo y cúspides de órbitas periódicas, relacionadas con el mismo fenómeno. Posteriormente comprobamos que su disposición y evolución en el plano de parámetros está en concordancia con el resultado obtenido en el estudio teórico-numérico que llevamos a cabo en nuestro modelo teórico.

El último capítulo de esta memoria está motivado por el estudio de una degeneración que se presenta en un circuito electrónico, sin la propiedad de la $\mathbb{Z}_2$-simetría diseñado acoplando dos circuitos simples (ver Algaba, Gamero y Rodríguez-Luis (2005)). La idea de acoplar sistemas simples nos lleva a conseguir sistemas con un comportamiento dinámico complejo: un amplio escenario de bifurcaciones aparece debido a la existencia de varias degeneraciones de equilibrio, las cuales varían de un autovalor cero simple a una degeneración del tipo triple-cero (ver Algaba, Freire, Gamero y García (2004)).

En este capítulo 7 consideramos el estudio teórico de un caso degenerado de la bifurcación Hopf-silla-nodo que permite conectar los casos no degenerados I$\longleftrightarrow$IIa, III$\longleftrightarrow$IVa,b (siguiendo la notación de Guckenheimer y Holmes (1997)). Hay que hacer notar que algunos problemas que aparecen en el caso no degenerado IIa son resueltos en el caso degenerado: la órbita periódica que nace en la bifurcación de Hopf (la cual crece sin medida en el caso no degenerado) está limitada debido a la presencia de una bifurcación de órbitas periódicas del tipo Takens-Bogdanov. Además de los casos de bifurcaciones no degeneradas de codimensión dos, aparecen otras bifurcaciones: la bifurcación de Takens-Bogdanov, y varios tipos de conexiones globales cuya existencia es demostrada teóricamente.

Para finalizar analizamos numéricamente los resultados teóricos obtenidos en un circuito electrónico autónomo tridimensional. Nuestro estudio también nos permite predecir fenómenos de resonancia sobre los toros invariantes que aparecen en la bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas. En particular, nos permite detectar degeneraciones angulares. También son analizados algunos aspectos relacionados con la forma de la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas que sirve para acotar las zonas de resonancia. Este estudio de las zonas de resonancia, que coincide con los resultados obtenidos en el capítulo tercero para otro oscilador electrónico, nos evidencia que este proceso (de cómo al mover los parámetros de control las zonas de resonancia cerradas de tipo *banana* se convierten en zonas de resonancia abiertas parece ser general y no está condicionado por la propiedad de la $\mathbb{Z}_2$-simetría.

Capítulo 1

Bifurcaciones en la Ecuación de Chua

1.1. Introducción

Uno de los logros más notables de la ciencia en las últimas décadas, es el descubrimiento de la presencia de comportamientos caóticos en sistemas dinámicos que modelan la evolución de fenómenos no necesariamente complejos. Observaciones de comportamiento caótico en el campo de los circuitos eléctricos se remontan a van der Pol y van der Mark (1927), los cuales narraron la existencia de "ruido irregular" desde su circuito con bombilla de neón.

La gran variedad de comportamientos dinámicos exhibidos por algunos circuitos electrónicos ha hecho que estos dispositivos se hayan analizado ampliamente. En esta memoria estudiamos parte del comportamiento dinámico de un sistema electrónico que ha sido considerado en la literatura. Variantes suyas han sido presentadas y analizadas en diversos trabajos, como exponentes de dinámica caótica en sistemas electrónicos (ver Shinriki, Yamamoto y Mori (1979) y (1981), Matsumoto (1984), Matsumoto, Chua y Komuro (1985), Zhong y Ayrom (1985), Chua, Komuro y Matsumoto (1986), Freire, Franquelo y Aracil (1984), Freire, Rodríguez-Luis, Gamero y Ponce (1993), Healey, Broomhead, Cliffe, Jones y Mullin (1991), Gomes y King (1992)).

Presentaremos las degeneraciones lineales correspondientes a los equilibrios, proceso que nos posibilitará descubrir el papel que juegan los parámetros del sistema como parámetros de bifurcación. Describiremos degeneraciones lineales de codimensión uno, dos y tres, de las cuales surgirán, en ciertos casos, conexiones globales. Precisamente, serán estas bifurcaciones el objeto principal de nuestro estudio. Entender cómo se forman y desaparecen, las estructuras de bifurcaciones que organizan, las posibles relaciones entre tipos distintos de conexiones globales y si a partir de ellas podemos encontrar otras degeneraciones más complicadas, será uno de nuestros propósitos en esta memoria.

El circuito electrónico objeto de nuestro estudio, que aparece representado en la figura 1.1, consiste en el acoplamiento, mediante la conductancia no lineal G_2, de dos circuitos: un circuito paralelo RCL (conductancia no lineal G_3, inductancia L y capacidad C), y un circuito paralelo RC (conductancia no lineal G_1 y capacidad C_0). Diferentes elecciones para las conductancias no lineales G_1, G_2, G_3 dan lugar a diversos sistemas particulares, estudiados en trabajos previos.

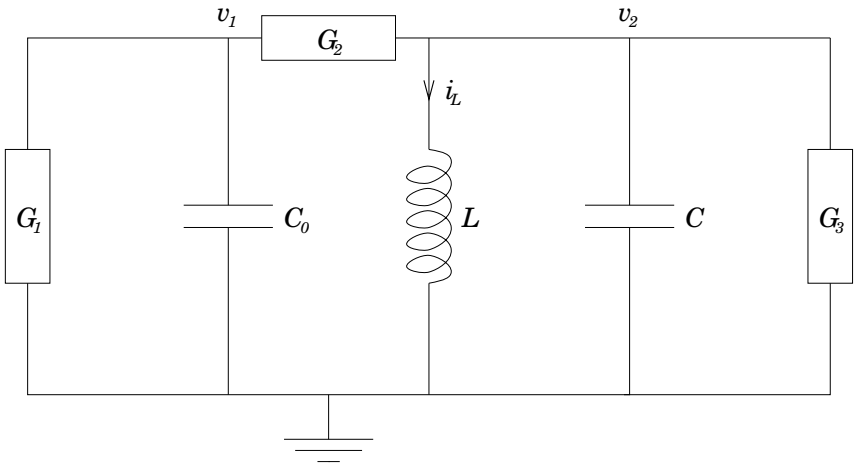


Figura 1.1: Diagrama esquemático del circuito electrónico de van der Pol-Duffing. Está formado por tres conductancias no lineales (G_1, G_2 y G_3), dos capacitancias (C_0 y C) y una inductancia L.

En el caso de G_1 conductancia no lineal negativa (oscilador de tipo van der Pol), G_2 conductancia no lineal positiva y G_3 conductancia puramente lineal, tenemos el sistema originalmente propuesto por Shinriki, Yamamoto y Mori (1979) y (1981) como un oscilador que genera *ondas aleatorias*. El análisis realizado por dichos autores se reduce a simulaciones numéricas y alguna experimentación; no llevan a cabo ningún estudio teórico de las ecuaciones de estado e incluso el análisis empírico realizado es incompleto. Un estudio más completo de la dinámica del mencionado sistema puede encontrarse en el trabajo de Freire, Franquelo y Aracil (1984).

En el caso de G_1 conductancia no lineal negativa, G_2 conductancia lineal y G_3 conductancia nula se obtendría el llamado *circuito de Chua*, analizado por Matsumoto (1984), Matsumoto, Chua y Komuro (1985) y Chua, Komuro y Matsumoto (1986). Estos autores aproximan la característica tensión-intensidad para G_1 mediante una función lineal a trozos, lo que no permite utilizar, en el análisis de las ecuaciones de estado, resultados de la dinámica diferenciable y la teoría local de bifurcaciones. Una recopilación bastante amplia de trabajos sobre el *circuito de Chua* se puede encontrar en Madan (1993). Una relación de los trabajos relacionados con dicho circuito aparece en `http://www.eecs.berkeley.edu/~chua/circuitrefs.html`.

Otra elección distinta de las conductancias puede ser encontrada en el trabajo de Gomes y King (1992), donde se modela G_1 mediante un polinomio cúbico no impar para tener en cuenta algunas imperfecciones en el circuito. En este trabajo se estudian algunos aspectos de la dinámica del sistema debidos a la ruptura de la $\mathbb{Z}_2$-simetría.

En el trabajo de Healey, Broomhead, Cliffe, Jones y Mullin (1991), se vuelve a considerar una configuración parecida a la originalmente propuesta por Shinriki, Yamamoto y Mori (1979) y (1981), aunque se elimina G_3 y se considera una pequeña resistencia R conectada en serie con la inductancia L, con la idea de incluir el efecto de la resistividad en el circuito experimental.

En esta memoria trabajaremos fundamentalmente con el *oscilador de Chua* derivado en Pivka, Wu y Huang (1996). Para obtener la ecuación de Chua primero aplican las leyes de Kirchoff, tomando como variables de estado las tensiones en los condensadores y la intensidad en la bobina. Tras adimensionalizar el tiempo y las variables de estado y modelar la no linealidad por un polinomio cúbico impar llegan a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - ax^3 - cx), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z, \end{aligned} \tag{1.1}$$

con $a = \pm 1,\ \alpha \neq 0,\ \beta,\ \gamma,\ c \in \mathbb{R}$. El parámetro γ lo han incluido para tener en cuenta pequeños efectos resistivos en la bobina del circuito.

1.2. Bifurcaciones locales en la ecuación de Chua

En lo que resta de capítulo trabajaremos con las ecuaciones (1.1) donde consideraremos $\alpha \neq 0$, ya que si $\alpha = 0$ sería un caso trivial al tratarse de un sistema lineal.

Si $\beta = 0$ el sistema (1.1) está desacoplado. El cambio lineal invertible $u = z$, $v = y$, $w = x - y + z$, transforma las ecuaciones (1.1) en una ecuación diferencial no autónoma de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\gamma u, \\ \dot{v} &= w, \\ \dot{w} &= (\alpha c - \gamma)u + \alpha\,(1 - c)\,v - (1 + \alpha c)w - a\alpha\,(-u + v + w)^3\,. \end{aligned}$$

Si $\beta \neq 0$, el cambio de variables lineal dado por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \\ -\beta & \beta(1+\gamma) & -\beta + \gamma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

transforma el sistema (1.1) en una ecuación diferencial autónoma de tercer orden

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= w, \\ \dot{w} &= -p_3 u - p_2 v - p_1 w - \frac{a\alpha}{\beta^2}\left[(\beta + \gamma)u + (1 + \gamma)v + w\right]^3, \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 + \gamma + \alpha c, \\ p_2 &= \beta + \gamma + \alpha c(1 + \gamma) - \alpha, \\ p_3 &= \alpha\left[c(\beta + \gamma) - \gamma\right]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

El escribir las ecuaciones (1.1) en la forma del sistema (1.2) nos permitirá no sólo estudiar más cómodamente las bifurcaciones locales del origen, sino además considerar la

ecuación de Chua como una perturbación de la bifurcación triple-cero, con $\mathbb{Z}_2$-simetría, en una cierta región del espacio de parámetros.

Comenzamos estudiando los equilibrios del sistema así como sus estabilidades. Debido a la propiedad de la $\mathbb{Z}_2$-simetría que presenta el sistema (1.1), invariancia al cambio de signo $(x, y, z, t) \leftrightarrow (-x, -y, -z, t)$, el origen es siempre un punto de equilibrio para todos los valores de los parámetros. Para estudiar la dinámica alrededor del origen, consideramos la matriz de la linealización del sistema (1.1) en el origen

$$M(\alpha, \beta, \gamma, c) = \begin{pmatrix} -\alpha c & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico viene dado por $P_M(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0$, donde p_1, p_2 y p_3 están dados en (1.3). Se pueden dar los siguientes casos de no hiperbolicidad, que hemos recogido en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.1 *El equilibrio del origen del sistema (1.1) presenta las siguientes degeneraciones lineales:*

1. *Una bifurcación pitchfork o tridente (un autovalor cero simple y los dos restantes con parte real no nula) para los valores $p_3 = 0$, $p_1 \neq 0$ y $p_2 \neq 0$.*

   - *Si $\gamma \neq 0$, expresando el parámetro β en función de los parámetros γ, c, en las condiciones genéricas $c \neq 0$, $1 - c(1+\gamma) \neq 0$,*

   $$\mathbf{PI} \equiv \begin{cases} \beta = \dfrac{\gamma(1-c)}{c}, \\ \alpha \neq \dfrac{\gamma}{c[1-c(1+\gamma)]}, \qquad \alpha \neq -\dfrac{1+\gamma}{c}. \end{cases}$$

   - *Si $\gamma = 0$*

   $$\mathbf{PI} \equiv \begin{cases} c = 0, \\ \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

   Esta bifurcación hace aparecer dos equilibrios simétricos respecto del origen (equilibrios no triviales) cuando cruzamos la superficie $\beta = \dfrac{\gamma(1-c)}{c}$, si $\gamma \neq 0$, ó $c = 0$, si $\gamma = 0$ (ver figura 1.2).

2. *Una bifurcación de Hopf (dos autovalores imaginarios puros y un tercero no nulo) para $p_1 p_2 = p_3$, $p_1 \neq 0$, $p_2 > 0$.*

3. *Una bifurcación de Takens-Bogdanov (un autovalor cero doble y un tercero no nulo) para $p_2 = p_3 = 0$, $p_1 \neq 0$.*

- *Si* $\gamma \neq 0$, *expresando los parámetros* α *y* β *en función de los parámetros restantes* γ, c, *en las condiciones genéricas* $c \neq 0$, $1 - c(1+\gamma) \neq 0$,

$$\mathbf{TB} \equiv \begin{cases} \alpha = \dfrac{\gamma}{c[1-c(1+\gamma)]}, \ \beta = \dfrac{\gamma(1-c)}{c}, \\ \dfrac{1+2\gamma-c(1+\gamma)^2}{1-c(1+\gamma)} \neq 0. \end{cases}$$

- *Si* $\gamma = 0$

$$\mathbf{TB} \equiv \begin{cases} c = 0, \\ \alpha = \beta. \end{cases}$$

4. *Una bifurcación Hopf-pitchfork (dos autovalores imaginarios puros y el tercero nulo) para* $p_1 = p_3 = 0$, $p_2 > 0$, *que se corresponde, en función de los parámetros del sistema y bajo la condición de ser* $c \neq 0$, *con*

$$\mathbf{HP} \equiv \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1+\gamma}{c}, \ \beta = \dfrac{\gamma(1-c)}{c}, \\ \dfrac{1+2\gamma-c(1+\gamma)^2}{c} > 0. \end{cases}$$

5. *Una bifurcación triple-cero (correspondiente a un autovalor cero triple) para* $p_1 = p_2 = p_3 = 0$. *Es posible expresar* α, β *y* c *como función de* γ *en las condiciones genéricas* $\gamma \neq -1$, $\gamma \neq -\dfrac{1}{2}$, $\gamma \neq 0$,

$$\mathbf{TZ} \equiv \begin{cases} \alpha = -\dfrac{(1+\gamma)^3}{1+2\gamma}, \\ \beta = \dfrac{\gamma^3}{1+2\gamma}, \\ c = \dfrac{1+2\gamma}{(1+\gamma)^2}. \end{cases}$$

El análisis de la bifurcación de Hopf del origen se llevará a cabo en la sección 1.3. En la sección 1.4 consideraremos la bifurcación de Hopf que experimentan los equilibrios no triviales que nacen en la bifurcación pitchfork. En la subsección 1.5.1 estudiaremos la bifurcación de Takens-Bogdanov, en la 1.5.2 la bifurcación Hopf-pitchfork y en la 1.5.3 la bifurcación triple-cero.

1.3. Bifurcación de Hopf del origen

En el trabajo de Huang, Pivka, Wu y Franz (1996) se muestran diagramas en el plano (α, β) de cómo evolucionan los autovalores del equilibrio en el origen, así como los de los equilibrios no triviales, cuando pasan de ser los tres autovalores reales a ser uno real y un par complejo conjugado para el sistema (1.1), pero no se realiza un estudio analítico

sobre las bifurcaciones de Hopf asociadas a dichos equilibrios. Mas recientemente Messias, Braga y Mello (2009) si realizan un estudio analítico sobre las bifurcación de Hopf, pero en el caso particular de ser $\gamma = 0$, con $\alpha, \beta > 0$ (ver también Moiola y Chua (1999)).

Consideramos ahora el caso en que la matriz de la parte lineal del sistema (1.1) tiene como autovalores $\lambda_{1,2} = \pm\omega_0 i$, $\lambda_3 \neq 0$, con $\omega_0 > 0$. En términos de los coeficientes del polinomio característico $P_M(\lambda)$, este caso se corresponde a $p_1 p_2 = p_3$, con $p_1 \neq 0$ y $p_2 = \omega_0^2 > 0$.

Comenzamos nuestro estudio por el caso genérico $\gamma \neq -1$.

En este caso la bifurcación ocurre cuando

$$\mathbf{H} \equiv \begin{cases} \beta + \gamma = -\alpha^2 c^2 + \dfrac{\alpha(\alpha - (1+\gamma)^2)}{1+\gamma} c + \dfrac{\alpha}{1+\gamma}, \\ \beta + \gamma > \alpha - \alpha c(1+\gamma), \quad 1 + \gamma + \alpha c \neq 0. \end{cases}$$

Si denotamos $\tilde{\beta} = \beta + \gamma$, la primera ecuación representa una parábola invertida en el plano $(c, \tilde{\beta})$, que existe en el semiplano $\tilde{\beta} > \alpha - \alpha c(1+\gamma)$.

Para estudiar el carácter y las posibles degeneraciones de la bifurcación de Hopf, consideramos primeramente las ecuaciones con los parámetros evaluados en los valores críticos. Para ello escribimos las ecuaciones (1.3) en la forma

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv 1 + \gamma + \alpha c - p_1 = 0, \\ F_2 &\equiv \tilde{\beta} + \alpha c(1+\gamma) - \alpha - p_2 = 0, \\ F_3 &\equiv \alpha \left[c\tilde{\beta} - \gamma \right] - p_3 = 0. \end{aligned}$$

Dado que $\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(\alpha, \tilde{\beta}, c)} = \alpha(\gamma - \alpha c)$ al ser $\alpha \neq 0$ y $\alpha c \neq \gamma$, las tres ecuaciones anteriores definen implícitamente a α, $\tilde{\beta}$ y c como función de p_1, p_2, p_3 y los restantes parámetros. Notemos que si $\alpha c = \gamma$ sobre la superficie de Hopf

$$\beta = -2\alpha^2 c^2 - 2\alpha c + \alpha,$$

al ser $p_2 = \beta + \alpha^2 c^2 + 2\alpha c - \alpha = -\alpha^2 c^2$, no se cumple la condición $p_2 > 0$.

Operando se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{(1+\gamma)(1+\gamma-p_1)^2 + (1+\gamma)p_2 + p_3 - p_1 p_2}{1 + 2\gamma - p_1}, \\ \tilde{\beta} &= \alpha - \alpha c(1+\gamma) + p_2, \\ c &= -\frac{1+\gamma-p_1}{\alpha}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Obsérvese que $\alpha c \neq \gamma$ es equivalente a $1 + 2\gamma - p_1 \neq 0$.

De las expresiones (1.4), ya que $p_2 = \omega_0^2$, si denotamos $\lambda_H = -p_1$, como $p_1 p_2 = p_3$ se obtiene una superficie parametrizada en λ_H, ω_0^2 y γ, donde tiene lugar la bifurcación de Hopf del origen

$$\mathbf{H} \equiv \begin{cases} \alpha = -\dfrac{(1+\gamma)\left[(1+\gamma+\lambda_H)^2+\omega_0^2\right]}{1+2\gamma+\lambda_H}, \\ \tilde{\beta} = \dfrac{(\gamma+\lambda_H)\omega_0^2+\gamma(1+\gamma)(1+\gamma+\lambda_H)}{1+2\gamma+\lambda_H}, \\ c = \dfrac{(1+\gamma+\lambda_H)(1+2\gamma+\lambda_H)}{(1+\gamma)[(1+\gamma+\lambda_H)^2+\omega_0^2]}, \\ \omega_0^2 > 0, \quad \lambda_H \neq 0, \quad \gamma \neq -1. \end{cases}$$

Para estudiar el carácter de la bifurcación de Hopf, vamos a escribir el sistema en la forma apropiada. Si realizamos en el sistema (1.1), con los parámetros evaluados en los valores críticos, el cambio lineal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0(1+\gamma) & (1+\gamma)(1+\gamma+\lambda_H) & (1+\gamma+\lambda_H)^2+\omega_0^2 \\ 0 & 1+2\gamma+\lambda_H & 1+2\gamma+\lambda_H \\ \omega_0(\gamma+\lambda_H) & -\gamma(\gamma+\lambda_H) & -(\gamma^2+\omega_0^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

obtenemos, como matriz de la parte lineal en el nuevo sistema, la matriz de Jordan. Es decir

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \cdots.$$

Tomando la aproximación a orden tres de la variedad de centro

$$Z = a_{30}X^3 + a_{21}X^2Y + a_{12}XY^2 + a_{03}Y^3,$$

donde no indicamos el valor de los coeficientes debido a su extensión, y usando el algoritmo recursivo desarrollado en Gamero, Freire y Ponce (1991), obtenemos la siguiente forma normal, a quinto orden para el sistema reducido

$$\begin{aligned} \dot{r} &= a_1 r^3 + a_2 r^5, \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + b_1 r^2 + b_2 r^4, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{3a\left[(1+\gamma+\lambda_H)^2+\omega_0^2\right]^2(1+\gamma)^4\left[\gamma^2+\gamma+3\gamma\lambda_H+\lambda_H+\lambda_H^2-\omega_0^2\right]}{8(1+2\gamma+\lambda_H)^2(\lambda_H^2+\omega_0^2)}, \\ a_2 &= -\frac{3a^2\left[(1+\gamma+\lambda_H)^2+\omega_0^2\right]^4(1+\gamma)^7 a_{21}}{32\omega_0^2(1+2\gamma+\lambda_H)^4(\lambda_H^2+\omega_0^2)^3(\lambda_H^2+9\omega_0^2)}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

siendo el factor a_{21} el polinomio en las variables $\gamma,\ \lambda_H, \omega_0^2$

$$
\begin{aligned}
a_{21} \;=\; & -9\omega_0^8 - 10\omega_0^2\lambda_H^8 + 142\ \omega_0^8\lambda_H^2 - 70\ \omega_0^4\lambda_H^6 + 82\ \omega_0^6\lambda_H^4 - 64\ \lambda_H^7\omega_0^2\gamma \\
& -1150\ \lambda_H^3\omega_0^4\gamma^3 + 160\ \lambda_H^3\omega_0^6\gamma - 122\ \lambda_H^4\omega_0^2\gamma^4 - 155\ \lambda_H^6\omega_0^2\gamma^2 \\
& -197\ \lambda_H^5\omega_0^2\gamma^3 - 1419\ \omega_0^4\lambda_H^2\gamma^3 - 78\ \omega_0^2\lambda_H^3\gamma^4 - 1864\ \omega_0^4\lambda_H^3\gamma^2 \\
& -279\ \omega_0^2\lambda_H^4\gamma^3 - 317\ \omega_0^2\lambda_H^5\gamma^2 - 156\ \lambda_H^6\omega_0^2\gamma - 1026\ \omega_0^4\lambda_H^4\gamma \\
& -363\ \omega_0^4\gamma^4\lambda_H - 1057\ \lambda_H^4\omega_0^4\gamma^2 - 472\ \lambda_H^5\omega_0^4\gamma - 3\ \gamma^4\lambda_H^5 - 9\ \gamma^3\lambda_H^6 \\
& -\lambda_H^8\gamma - 6\ \lambda_H^7\gamma^2 - 28\ \lambda_H^7\omega_0^2 - 188\ \omega_0^4\lambda_H^5 - 66\ \lambda_H^3\omega_0^4 - \lambda_H^6\gamma \\
& -9\ \lambda_H^5\omega_0^2 - 2\ \lambda_H^7\gamma - 27\ \lambda_H^6\omega_0^2 - 183\ \omega_0^4\lambda_H^4 - 3\ \gamma^3\lambda_H^5 - \gamma^2\lambda_H^5 \\
& -6\ \lambda_H^6\gamma^2 + 184\ \omega_0^8\gamma\ \lambda_H + 655\ \omega_0^6\lambda_H\ \gamma^2 + 668\ \omega_0^6\lambda_H^2\gamma + 291\ \omega_0^6\lambda_H^2\gamma^2 \\
& +291\ \omega_0^6\lambda_H\ \gamma^3 + 403\ \omega_0^6\gamma\ \lambda_H + 12\ \omega_0^8\lambda_H + 236\ \omega_0^6\lambda_H^3 + 156\ \omega_0^6\gamma^2 \\
& +219\ \omega_0^6\lambda_H^2 + 78\ \omega_0^6\gamma^4 + 195\ \omega_0^6\gamma^3 + 42\ \omega_0^8\gamma^2 + 3\ \omega_0^8\gamma + 39\ \omega_0^6\lambda_H \\
& +39\ \omega_0^6\gamma - 121\ \omega_0^4\gamma^5\lambda_H - 4\ \gamma^4\lambda_H^6 - \gamma^5\lambda_H^5 - 4\ \gamma^3\lambda_H^7 - \lambda_H^8\gamma^2 \\
& -26\ \gamma^5\lambda_H^3\omega_0^2 - 616\ \omega_0^4\lambda_H^2\gamma^4 - 35\ \lambda_H^4\omega_0^2\gamma - 363\ \omega_0^4\lambda_H\ \gamma^3 - 990\ \omega_0^4\lambda_H^2\gamma^2 \\
& -78\ \omega_0^2\lambda_H^3\gamma^3 - 187\ \omega_0^4\lambda_H^2\gamma - 26\ \omega_0^2\lambda_H^3\gamma^2 - 121\ \omega_0^4\lambda_H\ \gamma^2 - 129\ \omega_0^2\lambda_H^5\gamma \\
& -780\ \omega_0^4\lambda_H^3\gamma - 192\ \gamma^2\lambda_H^4\omega_0^2.
\end{aligned}
$$

La degeneración en la bifurcación de Hopf del origen tiene lugar cuando el coeficiente a_1 se anula, ya que $a \neq 0$ y $\gamma \neq -1$, esto ocurre cuando

$$\omega_0^2 = \gamma^2 + \gamma + 3\gamma\lambda_H + \lambda_H + \lambda_H^2 = (1 + \gamma + 2\lambda_H)(\gamma + \lambda_H) - \lambda_H^2. \tag{1.6}$$

Sustituyendo ω_0^2 en **H** se tiene una curva donde tiene lugar una degeneración en la bifurcación de Hopf del origen de, al menos, codimensión dos

$$\mathbf{Hd} \equiv \begin{cases} \beta + \gamma = -\alpha^2 c^2 + \dfrac{\alpha(\alpha - (1+\gamma)^2)}{1+\gamma} c + \dfrac{\alpha}{1+\gamma}, \\ c = \dfrac{\alpha - (1+\gamma)^2}{2\alpha(1+\gamma)}, \\ \beta + \gamma > \alpha - \alpha c(1+\gamma), \quad \alpha + (1+\gamma)^2 \neq 0. \end{cases}$$

En relación al carácter de la bifurcación de Hopf del equilibrio en el origen, notemos que cuando $\omega_0^2 > \gamma^2+\gamma+3\gamma\lambda_H+\lambda_H+\lambda_H^2$, o bien en términos de los parámetros originales cuando $\beta + \gamma > \alpha^2c^2 - 2\alpha c\gamma + \alpha - \gamma - \gamma^2$, el $sig(a_1) = sig(a)$ por lo que se trata de una bifurcación de Hopf subcrítica cuando $a = 1$ y supercrítica si $a = -1$. El caso opuesto se presenta cuando $\omega_0^2 < \gamma^2 + \gamma + 3\gamma\lambda_H + \lambda_H + \lambda_H^2$.

Para obtener el orden de degeneración de la bifurcación de Hopf se hace preciso estudiar si, para los valores de los parámetros donde se anula el coeficiente a_1, es posible que el segundo coeficiente de la bifurcación de Hopf a_2, también se anule.

Si sustituimos el valor de ω_0^2, dado en la ecuación (1.6), en el factor a_{21} que aparece en el numerador del coeficiente a_2 de las ecuaciones (1.5), se tiene que

$$a_{21} \;=\; 6\omega_0^2(\gamma + \lambda_H)^2(1 + 2\gamma + \lambda_H)^2(1 + \gamma + 2\lambda_H)^2(\lambda_H^2 + 5\omega_0^2).$$

Notemos que al ser $\omega_0^2 > 0$, de la relación (1.6) se deduce que $\gamma + \lambda_H \neq 0$ y también que $1 + \gamma + 2\lambda_H \neq 0$, luego el factor a_{21} no se anula y, en consecuencia, tampoco se anula el coeficiente a_2 de la forma normal de la bifurcación de Hopf en el origen. Podemos pues concluir que no existe ningún valor de los parámetros para los que la degeneración en la bifurcación de Hopf del origen sea de segundo orden.

Analizamos en último lugar el caso particular $\gamma = -1$.

Para dicho valor del parámetro la bifurcación ocurre cuando

$$c = -\frac{1}{\alpha}, \qquad \beta - 1 > \alpha.$$

En este caso la ecuación representa una recta vertical en el plano $(c, \tilde{\beta})$, que existe en el semiplano $\tilde{\beta} > \alpha$.

Ahora como coeficiente a_1, de la forma normal del sistema reducido, se obtiene

$$a_1 = -\frac{3a\alpha^4}{8(\alpha - \beta)}.$$

Ya que $a \neq 0$ y $\alpha \neq 0$, el coeficiente a_1 no se anula y, por tanto, no hay degeneración en la bifurcación de Hopf del origen para este caso. En relación al carácter de la bifurcación de Hopf del equilibrio en el origen, notemos que al ser $\beta > \alpha + 1 > \alpha$, $sig(a_1) = sig(a)$ por lo que se trata de una bifurcación de Hopf subcrítica cuando $a = 1$ y supercrítica si $a = -1$.

1.4. Bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales

Los equilibrios no triviales del sistema (1.1), aparecen en

$$(x_0, \quad ax_0^3 + cx_0, \quad ax_0^3 + (c-1)x_0), \qquad x_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{a}\left(\frac{\gamma}{\beta+\gamma} - c\right)}.$$

Notemos que cuando $\beta + \gamma = 0$ los dos equilibrios no triviales se hacen infinitos y pasan de ser reales a complejos. En la figura 1.2 se muestra el número de equilibrios que tiene el sistema (1.1) en el plano $(c, \beta + \gamma)$, dependiendo del signo del parámetro γ, para $a = -1$. En el caso de ser $a = 1$, únicamente cambia el número de equilibrios en cada zona (1 por 3 ó 3 por 1).

Debido a la simetría que presenta el sistema, bastará analizar la bifurcación de Hopf en uno de ellos (x_0, y_0, z_0). Para llevarlo al origen, realizamos en el sistema (1.1) la traslación $x = u + x_0, \;\; y = v + y_0, \;\; z = w + z_0$, obteniéndose como sistema transformado

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \left(2\alpha c - \frac{3\alpha\gamma}{\beta+\gamma}\right)u + \alpha v - 3x_0 a\alpha u^2 - a\alpha u^3, \\ \dot{v} &= u - v + w, \\ \dot{w} &= -\beta v - \gamma w, \end{aligned} \tag{1.7}$$

cuya matriz de la linealización en el origen es

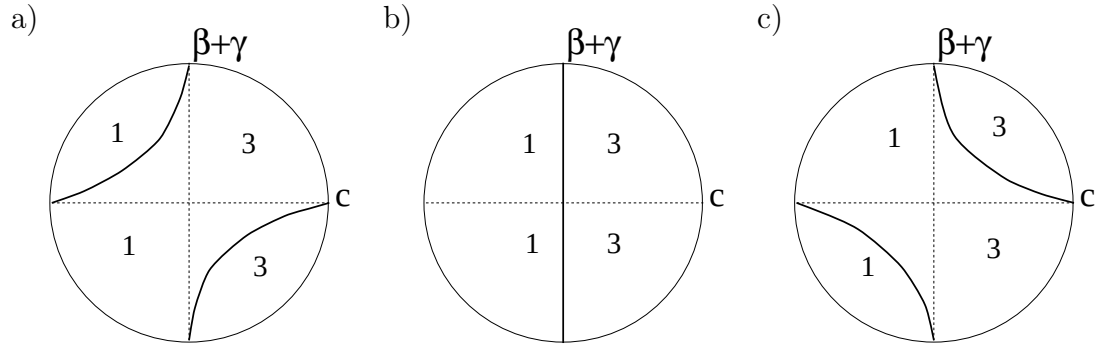


Figura 1.2: Para $a = -1$, número de equilibrios del sistema (1.1) en el plano $(c, \beta+\gamma)$ cuando: (a) $\gamma < 0$. (b) $\gamma = 0$. (c) $\gamma > 0$.

$$M = \begin{pmatrix} 2\alpha c - \dfrac{3\alpha\gamma}{\beta+\gamma} & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de dicha matriz es $P_M(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0$, donde

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{3\alpha\gamma}{\beta+\gamma} + (1+\gamma) - 2\alpha c, \\ p_2 &= \beta + \gamma - \alpha - 2\alpha c(1+\gamma) + \frac{3\alpha\gamma(1+\gamma)}{\beta+\gamma}, \\ p_3 &= -2\alpha\left[c(\beta+\gamma) - \gamma\right]. \end{aligned} \tag{1.8}$$

La bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales ocurre cuando $p_3 = p_1 p_2$, con $p_1 \neq 0$, $p_2 > 0$ y se cumple además la condición de existencia de los equilibrios no triviales.

Al igual que en el estudio realizado sobre la bifurcación de Hopf del origen, distinguiremos el caso $\gamma \neq -1$ (genérico) del caso $\gamma = -1$.

Comenzamos considerando el caso $\gamma \neq -1$.

Utilizando la ecuación equivalente $(1+\gamma)(p_1 p_2 - p_3) = 0$, se obtiene

$$\left[2\alpha c(1+\gamma) + \beta_0\right]^2 - \frac{1}{4}\left[\alpha_0 - 4(1+\gamma)^2(\beta+\gamma)\right] = 0, \tag{1.9}$$

$$\beta + \gamma - \alpha - 2\alpha c(1+\gamma) + \frac{3\alpha\gamma(1+\gamma)}{\beta+\gamma} > 0, \tag{1.10}$$

$$a\left(\frac{\gamma}{\beta+\gamma} - c\right) > 0, \tag{1.11}$$

siendo

$$\beta_0 = -\frac{3\alpha\gamma(1+\gamma)}{\beta+\gamma} + \frac{\alpha-(1+\gamma)^2}{2}, \tag{1.12}$$

$$\alpha_0 = (1+\alpha-\gamma^2)^2 + 4\gamma(1+\gamma)^2. \tag{1.13}$$

Veamos ahora las distintas configuraciones que presentan las superficies donde tiene lugar la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales.

Proposición 1.4.1 *Para valores fijos de α y γ, con $\alpha \neq 0$ y $\gamma \neq -1$, existen como máximo dos curvas de bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales acotadas en el plano $(c, \beta+\gamma)$. Además estas curvas no contienen puntos singulares y no forman islas que no toquen a la curva donde se experimenta la bifurcación pitchfork del origen.*

Demostración:

- Hay como máximo dos curvas de bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales acotadas, para valores fijos de α y γ, en el plano $(c, \beta+\gamma)$.

  En efecto, si despejamos c en la igualdad (1.9) se tiene

  $$c_\pm = \frac{-\beta_0}{2\alpha(1+\gamma)} \pm \frac{\sqrt{\alpha_0 - 4(1+\gamma)^2(\beta+\gamma)}}{4\alpha(1+\gamma)}, \tag{1.14}$$

  por tanto para cada valor de $\beta+\gamma$ hay, a lo más, dos valores de c. En concreto para que existan soluciones debe ser $\beta+\gamma \leq \dfrac{\alpha_0}{4(1+\gamma)^2} = K_1$. Si sustituimos estos valores de c en la desigualdad (1.10) se tiene la nueva desigualdad

  $$\pm\sqrt{\alpha_0 - 4(1+\gamma)^2(\beta+\gamma)} < 2(\beta+\gamma) - \alpha - (1+\gamma)^2. \tag{1.15}$$

  Si consideramos el signo + en (1.15), se tiene que para que tenga sentido la misma debe ser

  $$\beta+\gamma > \frac{\alpha+(1+\gamma)^2}{2} = K_2, \tag{1.16}$$

  y elevando al cuadrado los dos miembros de (1.15) se llega a la desigualdad $Q(\beta+\gamma) > 0$, donde $Q(x) = x^2 - \alpha x + \alpha\gamma(1+\gamma)$.

  Si consideramos el signo − en la desigualdad (1.15), esta se verifica trivialmente cuando se cumple (1.16). Si se cumple la desigualdad contraria de (1.16), elevando nuevamente al cuadrado en los dos miembros de (1.15) se llega a la desigualdad $Q(\beta+\gamma) < 0$.

  En consecuencia, si $a\left(\dfrac{\gamma}{\beta+\gamma} - c\right) > 0$ tenemos las dos siguientes curvas acotadas de bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales

$$h_+ \equiv \begin{cases} c = c_+, \\ K_2 < \beta + \gamma \leq K_1, \\ Q(\beta + \gamma) > 0, \end{cases}$$

y

$$h_-^1 \equiv \begin{cases} c = c_-, \\ K_2 \leq \beta + \gamma \leq K_1, \end{cases} \qquad o \qquad h_-^2 \equiv \begin{cases} c = c_-, \\ \beta + \gamma \leq K_1, \\ \beta + \gamma < K_2, \\ Q(\beta + \gamma) < 0. \end{cases}$$

- Las curvas de Hopf de los equilibrios no triviales no tienen puntos singulares.

  Si escribimos la ecuación (1.9) en la forma $h(c, \tilde{\beta}) = h_1^2 - h_2 = 0$, siendo $h_1 = 2\alpha c(1+\gamma) + \beta_0$ y $h_2 = \frac{1}{4}\left[\alpha_0 - 4\tilde{\beta}(1+\gamma)^2\right]$ con $\tilde{\beta} = \beta + \gamma$, los puntos singulares son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} h(c, \tilde{\beta}) = 0, \\ \dfrac{\partial h(c, \tilde{\beta})}{\partial c} = 0, \\ \dfrac{\partial h(c, \tilde{\beta})}{\partial \tilde{\beta}} = 0. \end{cases}$$

  De la segunda ecuación, $\dfrac{\partial h(c, \tilde{\beta})}{\partial c} = 4\alpha(1+\gamma)h_1 = 0$, se deduce que, ya que $\alpha \neq 0$ y $\gamma \neq -1$, debe ser $h_1 = 0$. Al imponer esta condición en la tercera ecuación quedaría $\dfrac{\partial h(c, \tilde{\beta})}{\partial \tilde{\beta}} = (1+\gamma)^2 = 0$, que no tiene solución.

- Las curvas de Hopf de los equilibrios no triviales no forman islas que no toquen a la curva donde se experimenta la bifurcación pitchfork del origen.

  Si hay ramas cerradas en forma de islas, existirían al menos dos soluciones del sistema

$$\begin{cases} h(c, \tilde{\beta}) = 0, \\ \dfrac{\partial h(c, \tilde{\beta})}{\partial c} = 0. \end{cases}$$

  Pero la segunda ecuación implicaba que $h_1 = 0$. Llevando esta condición a la primera ecuación, se obtiene que $h_2 = 0$. Como $h_2 = \frac{1}{4}\left[\alpha_0 - 4\tilde{\beta}(1+\gamma)^2\right]$ obtenemos que $\tilde{\beta} = \dfrac{\alpha_0}{4(1+\gamma)^2}$. Finalmente despejando c en la ecuación $h_1 = 2\alpha c(1+\gamma) + \beta_0 =$

0, tenemos que hay un único punto del plano $(c, \tilde{\beta}) = \left(-\frac{\beta_0}{2\alpha(1+\gamma)}, \frac{\alpha_0}{4(1+\gamma)^2}\right)$ solución del sistema anterior. En consecuencia no es posible la existencia, en dicho plano, de curvas cerradas.

■

A continuación pasamos a estudiar las zonas del plano de parámetros (γ, α), donde la curvas de Hopf de los equilibrios no triviales tienen puntos del infinito en el plano $(c, \beta + \gamma)$.

Corolario 1.4.2 *Las curvas de Hopf de los equilibrios no triviales parten de puntos degenerados de la curva de bifurcación pitchfork del origen, ya sean puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov o de Hopf-pitchfork, y o bien finalizan en estos mismos, en cuyo caso la curva es acotada, o bien finalizan en un punto de degeneración del infinito del plano* $(c, \beta + \gamma) = (\pm\infty, 0)$.

Demostración:

Veamos en primer lugar que los únicos puntos del infinito, del plano $(c, \beta + \gamma)$, que pueden pertenecer a las curvas de Hopf de los equilibrios no triviales son $(\pm\infty, 0)$.

En efecto, si otro punto del infinito perteneciese a la curva de Hopf de los equilibrios no triviales en el plano $(c, \beta + \gamma)$, tendría que cumplirse $\beta + \gamma \to -\infty$ (ver 1.14). Si tomamos $\beta + \gamma = -\frac{1}{\varepsilon^2}$, y utilizando un desarrollo asintótico para $\varepsilon \approx 0$ se tiene por (1.14) que

$$c_\pm(\varepsilon) = \pm\frac{A}{\varepsilon} + \mathcal{O}(1), \quad A \in \mathbb{R},$$

donde $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$, con $n \geq 0$, indica la existencia de una constante C tal que $|\mathcal{O}(\varepsilon^n)| < C\varepsilon^n$ para ε suficientemente pequeño.

La desigualdad (1.10) quedaría

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} \pm \frac{\tilde{A}}{\varepsilon} + \mathcal{O}(1) > 0, \quad \varepsilon \approx 0, \quad \tilde{A} \in \mathbb{R},$$

lo cual es falso.

Vamos ahora a determinar para qué valores de α y γ, las curvas de Hopf de los equilibrios no triviales finalizan en el punto del plano $(c, \beta + \gamma) = (\pm\infty, 0)$.

Si llamamos $\beta + \gamma = \varepsilon$, utilizando un desarrollo asintótico para $\varepsilon \approx 0$ se tiene

$$c_\pm(\varepsilon) = \frac{3\gamma}{2\varepsilon} - \frac{1}{4(1+\gamma)} + \frac{1+\gamma}{4\alpha} \pm \frac{\sqrt{\alpha_0}}{4\alpha(1+\gamma)} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Por tanto, si $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq -1$ y $\gamma \neq 0$ se tiene que

$$\lim_{(\beta+\gamma)\to 0^\pm} c_\pm = \pm sig(\gamma)\infty.$$

Sustituyendo el valor de $c_\pm(\varepsilon)$ en las inecuaciones (1.10) y (1.11) obtenemos

$$\mp\sqrt{\alpha_0} - \left[\alpha + (1+\gamma)^2\right] + \mathcal{O}(\varepsilon) > 0, \tag{1.17}$$

$$-a\frac{\gamma}{2\varepsilon} + \mathcal{O}(1) > 0 \Longleftrightarrow a\gamma(\beta+\gamma) < 0. \tag{1.18}$$

Analicemos cuándo se cumple la primera de estas desigualdades.

En relación al primer sumando, si $\gamma > 0$, como $\alpha_0 = (1+\alpha-\gamma^2)^2 + 4\gamma(1+\gamma)^2$ siempre se cumple que $\alpha_0 > 0$. Si $\gamma < 0$, llamemos

$$\alpha_1 = -1+\gamma^2 - \sqrt{-4\gamma(1+\gamma)^2}, \quad \alpha_2 = -1+\gamma^2 + \sqrt{-4\gamma(1+\gamma)^2},$$

a las dos raíces de la parábola $\alpha_0 = 0$ en el plano (γ, α). En este caso para que $\alpha_0 > 0$, debe ser $\alpha < \alpha_1$ ó $\alpha > \alpha_2$ (ver figura 1.3).

Por otra parte, considerando el segundo sumando de la expresión (1.17), si llamamos $\alpha_3 = -(1+\gamma)^2$ se pueden presentar los siguientes casos:

- Caso $\alpha < \alpha_3$.

  - Si consideramos el signo + en la raíz cuadrada, se cumple trivialmente (1.17).
  - Si consideramos el signo − en la raíz cuadrada de (1.17) y elevamos al cuadrado ambos miembros, se tiene que $\alpha_0 < [\alpha + (1+\gamma)^2]^2$. Sustituyendo el valor de α_0 dado en (1.13), se tiene

$$\begin{aligned} 4\gamma(1+\gamma)^2 &< [\alpha + (1+\gamma)^2]^2 - [\alpha + (1-\gamma^2)]^2 \\ \Longleftrightarrow 4\gamma(1+\gamma)^2 &< (2+2\alpha+2\gamma)(2\gamma+2\gamma^2) \\ \Longleftrightarrow 4\gamma(1+\gamma)^2 &< 4\alpha\gamma(1+\gamma) + 4\gamma(1+\gamma)^2 \Longleftrightarrow \alpha\gamma(1+\gamma) > 0, \end{aligned}$$

    pero como estamos en el caso en que $\alpha + (1+\gamma)^2 < 0$, debe ser $\alpha < 0$, y en consecuencia la última desigualdad es equivalente a $\gamma(1+\gamma) < 0$. Por tanto en este caso se cumple (1.17) cuando $-1 < \gamma < 0$.

- Caso $\alpha > \alpha_3$.

  - Si consideramos el signo − en la raíz cuadrada, nunca se cumple (1.17).
  - Si consideramos el signo + en la raíz cuadrada de (1.17) y elevamos al cuadrado ambos miembros, se tiene que $\alpha_0 > [\alpha + (1+\gamma)^2]^2$. Sustituyendo el valor de α_0 dado en (1.13) y utilizando un razonamiento similar al anterior, obtenemos que la desigualdad se cumple, considerando el signo + en la raíz cuadrada, en aquellas zonas del plano de parámetros (γ, α) donde se verifique que $\alpha\gamma(1+\gamma) < 0$. Si $\alpha > 0$ esto implica que $-1 < \gamma < 0$, mientras que si $\alpha < 0$ se cumple cuando $\gamma < -1$ o bien $\gamma > 0$.

■

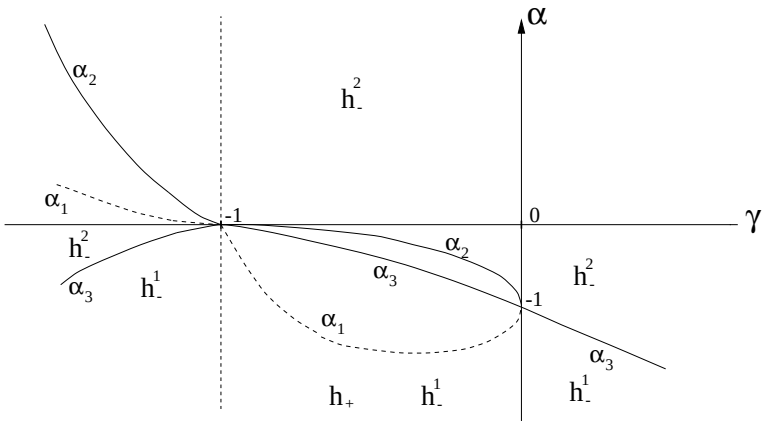


Figura 1.3: Dibujo cualitativo de las curvas α_1, α_2 y α_3 en el plano (γ, α) delimitando las zonas, y las ramas que existen en cada zona, para la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales en un entorno del punto $(c, \beta + \gamma) = (\pm\infty, 0)$.

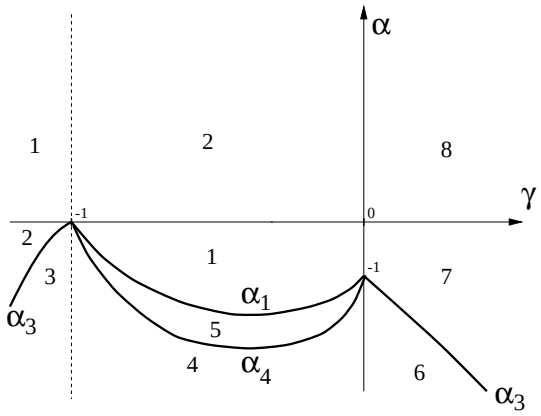


Figura 1.4: Diferentes zonas, en el plano (γ, α), para la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales en un entorno del punto $(c, \beta + \gamma) = (\pm\infty, 0)$.

En la figura 1.3 aparece una representación cualitativa de las curvas α_1, α_2 y α_3, así como de las regiones donde existen cada una de las ramas de la curva de bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales en las proximidades del punto $(\pm\infty, 0)$, según los distintos casos del corolario, en el plano (γ, α).

En la figura 1.4 podemos observar las diferentes zonas que existen en el plano (γ, α) en relación a la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales en un entorno del punto $(c, \beta + \gamma) = (\pm\infty, 0)$, y en la figura 1.5 mostramos la configuración presente en cada una de las zonas. La expresión de la curva α_4 se obtiene en la subsección 1.4.2.

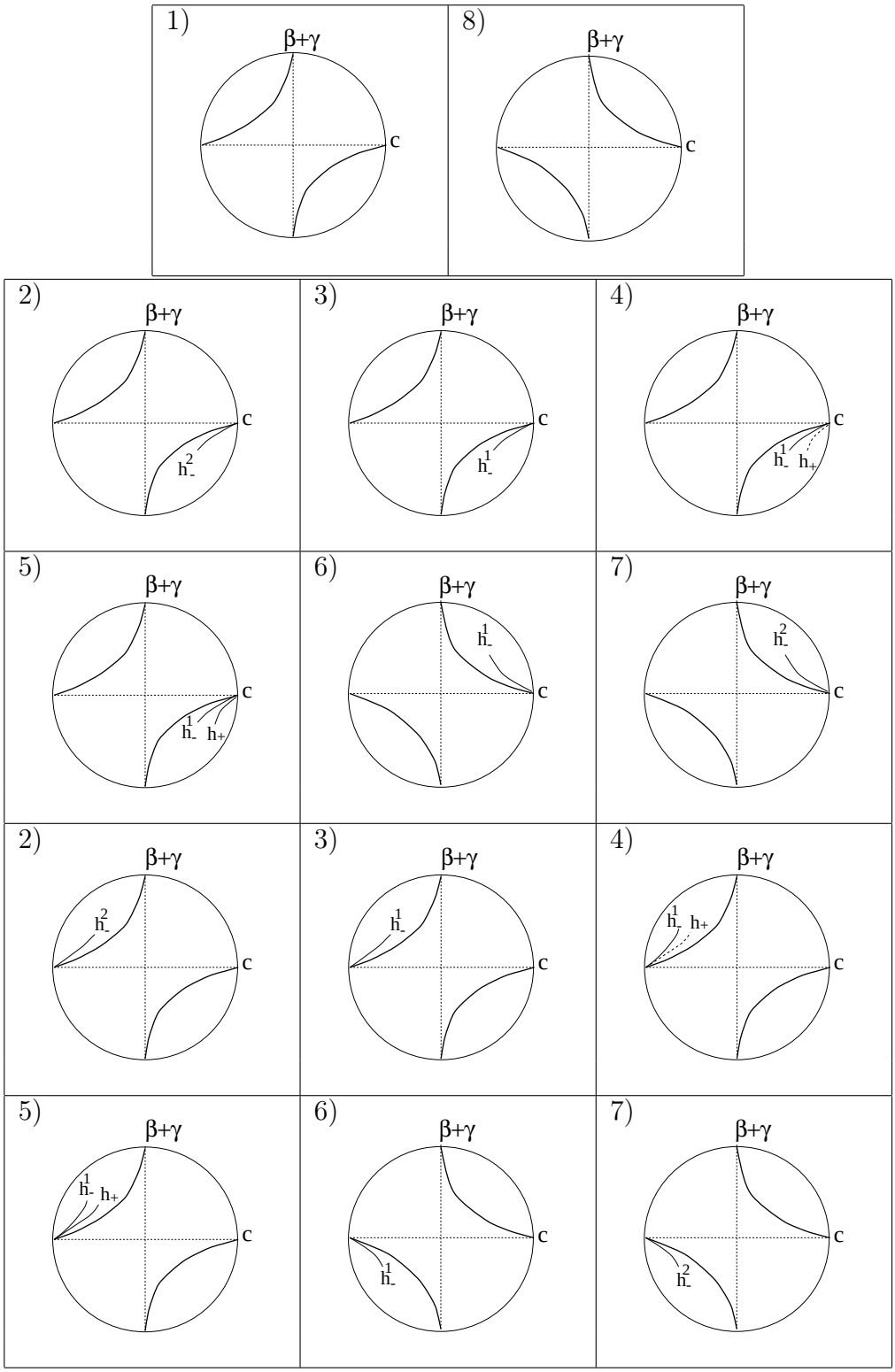


Figura 1.5: Configuraciones de las distintas zonas de la figura 1.4, para $a = \pm 1$ en la fila superior, $a = -1$ en la segunda y tercera fila y $a = 1$ en la cuarta y quinta fila.

1.4.1. Degeneraciones de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales

Para estudiar el carácter y las posibles degeneraciones de la bifurcación de Hopf consideramos las ecuaciones dadas por (1.7) en los valores críticos de los parámetros. Considerando los valores de los coeficientes p_1, p_2 y p_3 dados en (1.8) y que la matriz de la linealización debe tener dos autovalores complejos conjugados de la forma $\pm\omega_0 i$ y el tercer autovalor real no nulo $\lambda_h = -p_1$, tenemos las condiciones para que tenga lugar la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales

$$\begin{aligned} F_1 &= p_1 + \lambda_h = 0, \\ F_2 &= p_2 - \omega_0^2 = 0, \\ F_3 &= p_3 - p_1 p_2 = 0, \\ F_4 &= a(\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} - c) > 0, \end{aligned}$$

siendo $\tilde{\beta} = \beta + \gamma$. Ya que

$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(\alpha, \tilde{\beta}, c)} = 2\alpha \left(\frac{3\alpha\gamma}{\tilde{\beta}} - 2\alpha c - \gamma \right) = -2\alpha(\lambda_h + (1 + 2\gamma)),$$

como $\alpha \neq 0$, imponiendo que $\lambda_h \neq -(1 + 2\gamma)$ (posteriormente veremos que no es una restricción), las tres primeras ecuaciones anteriores definen implícitamente a α, $\tilde{\beta}$ y c en función de λ_h, ω_0^2 y γ.

Es posible obtener una parametrización de la superficie donde tiene lugar la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales. Para ello en primer lugar despejamos c en la ecuación $F_1 = 0$, y sustituimos el valor de c en las restantes ecuaciones. Posteriormente despejamos el parámetro α de la nueva ecuación $F_2 = 0$ y sustituimos dicho valor de α en la nueva ecuación $F_3 = 0$, al objeto de despejar en ella el valor de $\tilde{\beta}$. Dicho valor sustituido en la expresión obtenida para el parámetro α nos proporciona los valores buscados

$$\mathbf{h} \equiv \begin{cases} c = \dfrac{3\gamma}{2\tilde{\beta}} + \dfrac{1 + \gamma + \lambda_h}{2\alpha}, \\ \tilde{\beta} = \dfrac{(\gamma + \lambda_h)w_0^2 + \gamma(1 + \gamma)(1 + \gamma + \lambda_h)}{1 + 2\gamma + \lambda_h}, \\ \alpha = -\dfrac{(1 + \gamma)[(1 + \gamma + \lambda_h)^2 + w_0^2]}{1 + 2\gamma + \lambda_h}, \\ (-a)\left(\dfrac{\gamma}{\tilde{\beta}} + \dfrac{1 + \gamma + \lambda_h}{\alpha} \right) > 0, \quad 1 + 2\gamma + \lambda_h \neq 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Para estudiar su carácter, así como sus posibles degeneraciones, realizamos en el sistema (1.7) el cambio lineal

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \gamma)\omega_0 & (1 + \gamma)(1 + \gamma + \lambda_h) & (1 + \gamma + \lambda_h)^2 + \omega_0^2 \\ 0 & 1 + 2\gamma + \lambda_h & 1 + 2\gamma + \lambda_h \\ (\gamma + \lambda_h)\omega_0 & -\gamma(\gamma + \lambda_h) & -(\gamma^2 + \omega_0^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

obteniéndose como matriz, de la parte lineal en el nuevo sistema, la matriz de Jordan. Es decir

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \cdots .$$

Tomando la aproximación a orden cuatro de la variedad de centro, y usando el algoritmo recursivo desarrollado en Gamero, Freire y Ponce (1991), obtenemos la siguiente forma normal en coordenadas polares, a quinto orden, para el sistema reducido sobre la variedad de centro

$$\begin{aligned} \dot{r} &= a_1 r^3 + a_2 r^5, \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + b_1 r^2 + b_2 r^4, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3a^2 x_0^2 (1+\gamma)^5 \left[(1+\gamma+\lambda_h)^2+\omega_0^2\right]^3 a_{11}}{2\lambda_h \omega_0^2 (\lambda_h^2+4\omega_0^2)(\lambda_h^2+\omega_0^2)(1+2\gamma+\lambda_h)^4}, \\ a_2 &= \frac{3a^4 x_0^4 (1+\gamma)^9 \left[(1+\gamma+\lambda_h)^2+\omega_0^2\right]^6 a_{21}}{2\lambda_h^3 \omega_0^6 (1+2\gamma+\lambda_h)^8 (\lambda_h^2+\omega_0^2)^3 (\lambda_h^2+9\omega_0^2)(\lambda_h^2+4\omega_0^2)^3}, \end{aligned} \tag{1.20}$$

siendo

$$\begin{aligned} a_{11} = {} & -10(\gamma+\lambda_h)\omega_0^6 + [(12\gamma-5)\lambda_h^2 + (12\gamma^2-11\gamma-6)\lambda_h \\ & -10\gamma(\gamma+1)]\omega_0^4 + [4\lambda_h^5 + 5(5\gamma+2)\lambda_h^4 + (58\gamma^2+56\gamma+9)\lambda_h^3 \\ & +(\gamma+1)(73\gamma^2+43\gamma+3)\lambda_h^2 + \gamma(46\gamma+13)(\gamma+1)^2\lambda_h \\ & +10\gamma^2(\gamma+1)^3]\omega_0^2 + \gamma\lambda_h^2(\gamma+1)(\lambda_h+\gamma+1)[\lambda_h^2 \\ & +(3\gamma+1)\lambda_h + \gamma(\gamma+1)], \end{aligned}$$

y a_{21} un polinomio de grado 10 en ω_0^2, con coeficientes polinómicos en las variables γ y λ_h, cuya expresión omitimos por su extensión.

El único valor que anula el coeficiente a_1 es $a_{11} = 0$, al ser $a \neq 0$, $\gamma \neq -1$ y $x_0 \neq 0$. La expresión de a_{11} es la de un polinomio cúbico en ω_0^2, en el caso $\gamma \neq -\lambda_h$. Si $\gamma = -\lambda_h$ se tiene

$$a_{11} = -\gamma(1+\gamma)(\gamma^2+\omega_0^2)(\gamma^2+4\omega_0^2),$$

y este valor no tiene raíces reales en ω_0.

De cualquier manera, podemos asegurar que para cada valor de los parámetros hay, como máximo, tres puntos de degeneración de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales cuando $\gamma \neq -1$.

Degeneración de segundo orden de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales

Estamos interesados ahora en saber si hay degeneraciones de segundo orden en la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales cuando $\gamma \neq -1$.

Describimos a continuación el proceso que hemos seguido en este caso, sin especificar los coeficientes y ecuaciones resultantes, debido a su extensa expresión.

Vimos anteriormente que el coeficiente a_1 de la forma normal se anulaba únicamente cuando $a_{11} = 0$ en (1.20). Análogamente, el coeficiente a_2 se anula únicamente cuando $a_{21} = 0$, ya que $a \neq 0$, $\gamma \neq -1$ y $x_0 \neq 0$. Se trata pues de encontrar soluciones del sistema

$$\begin{cases} a_{11} = 0, \\ a_{21} = 0. \end{cases}$$

Para ello escribimos dichas ecuaciones en la forma

$$a_{11} = d_3(\omega_0^2)^3 + d_2(\omega_0^2)^2 + d_1\omega_0^2 + d_0 = 0,$$

$$a_{21} = k_{10}(\omega_0^2)^{10} + k_9(\omega_0^2)^9 + k_8(\omega_0^2)^8 + k_7(\omega_0^2)^7 + k_6(\omega_0^2)^6 + k_5(\omega_0^2)^5$$

$$+k_4(\omega_0^2)^4 + k_3(\omega_0^2)^3 + k_2(\omega_0^2)^2 + k_1\omega_0^2 + k_0 = 0,$$

donde $d_3 = -10(\gamma + \lambda_h) \neq 0$ y $k_{10} = 12960(1+\gamma)(\gamma+\lambda_h)^2 \neq 0$.

Despejando en la primera de ellas tenemos

$$(\omega_0^2)^3 = -\frac{d_2(\omega_0^2)^2 + d_1\omega_0^2 + d_0}{d_3},$$

y utilizando un programa de cálculo simbólico hemos ido sustituyendo reiteradamente esta expresión en la segunda ecuación $a_{21} = 0$, hasta llegar a obtener un polinomio en ω_0^2 de la forma

$$t_2(\omega_0^2)^2 + t_1\omega_0^2 + t_0 = 0,$$

donde los coeficientes t_i son funciones racionales.

En condiciones genéricas si suponemos el coeficiente $t_2 \neq 0$, podemos expresar

$$(\omega_0^2)^2 = -\frac{t_1\omega_0^2 + t_0}{t_2},$$

y sustituyendo este valor dos veces en la ecuación $a_{11} = 0$, obtenemos una ecuación $p_1\omega_0^2 + p_0 = 0$, de donde se obtiene el valor de $\omega_0^2 = -\dfrac{p_0}{p_1}$, con p_0 y p_1 funciones racionales en las variables γ y λ_h. Por último, al sustituir este valor de ω_0^2 en la ecuación $a_{21} = 0$, obtenemos que las soluciones de la ecuación

$$Q(\gamma, \lambda_h) = 0 \tag{1.21}$$

que cumplan $sig(p_0) \neq sig(p_1)$, en las condiciones genéricas de ser $p_0 p_1 t_2 \neq 0$, son puntos donde se presenta una degeneración de segundo orden de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales. El primer miembro de la ecuación (1.21) es una función racional en las variables especificadas. Utilizaremos esta ecuación en capítulos posteriores para, fijado el parámetro γ, obtener puntos del espacio triparamétrico (α, β, c) donde tiene lugar la citada degeneración.

1.4.2. Estabilidad de la Hopf de los equilibrios no triviales en un entorno del infinito en el plano de parámetros

Vamos a calcular, para $\gamma \neq -1$, el signo del coeficiente a_1 en el punto $(c, \tilde{\beta} = \beta + \gamma) = (\pm\infty, 0)$, al objeto de determinar su carácter en dicho punto.

La curva de Hopf para $\tilde{\beta} \approx 0$ viene dada por

$$c = \frac{3\gamma}{2\tilde{\beta}} + \mathcal{O}(1).$$

En dicho caso, dado que la primera coordenada de los equilibrios no triviales viene dada por $x_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{a}\left(\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} - c\right)}$, y teniendo en cuenta el valor de c en (1.19) se tiene que $x_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{a}\left(-\frac{\gamma}{2\tilde{\beta}} - \frac{1+\gamma+\lambda_h}{2\alpha}\right)}$, siendo

$$\lambda_h = -1 - \gamma + \frac{-\alpha + (1+\gamma)^2 \pm \sqrt{(1+\alpha-\gamma^2)^2 + 4\gamma(1+\gamma)^2}}{2(1+\gamma)} + \mathcal{O}(\tilde{\beta}),$$

donde los signos $\pm$ hay que considerarlos según estemos sobre $c_\pm$ en las curvas de Hopf. En consecuencia $x_0 \to \pm\infty$, cuando $\tilde{\beta} \to 0^-$ con a, γ teniendo el mismo signo o bien cuando $\tilde{\beta} \to 0^+$ cuando a, γ tienen signos distintos.

Observemos que de la expresión del coeficiente a_1 en (1.20) se deduce que $sig(a_1) = sig(a_{11}(1+\gamma)\lambda_h)$. Por otra parte si $\tilde{\beta} \approx 0$ y de (1.19) se obtiene, al estar acotado λ_h

$$\lambda_h = -\frac{\gamma\left[(1+\gamma)^2 + \omega_0^2\right]}{\gamma(1+\gamma) + \omega_0^2} + \mathcal{O}(\tilde{\beta}), \tag{1.22}$$

siendo

$$\omega_0^2 = \frac{-\alpha - (1+\gamma)^2 \mp \sqrt{(1+\alpha-\gamma^2)^2 + 4\gamma(1+\gamma)^2}}{2} + \mathcal{O}(\tilde{\beta}),$$

donde los signos $\mp$ hay que considerarlos según estemos sobre $c_\pm$ en las curvas de Hopf. En consecuencia, ya que

$$a_{11}(1+\gamma)\lambda_h = -\frac{3\omega_0^4[\gamma(1+\gamma)]^2(\gamma^2+\omega_0^2)^2[(1+\gamma)^2+\omega^2]^2 f(\omega_0^2,\gamma)}{[\gamma(1+\gamma)+\omega_0^2]^6} + \mathcal{O}(\tilde{\beta}),$$

donde

$$f(\omega_0^2, \gamma) = 2\omega_0^4 + 3\gamma(1+\gamma)\omega_0^2 + \gamma(1+\gamma)^3,$$

se tiene que $sig(a_1) = -sig(f(\omega_0^2, \gamma))$.

Fijado un valor de γ, la curva $f(\omega_0^2, \gamma)$ es una parábola cuyo vértice se encuentra en el punto

$$\left(-\frac{3\gamma(1+\gamma)}{4}, \frac{\gamma(8-\gamma)(1+\gamma)^2}{8}\right). \tag{1.23}$$

Vamos a estudiar las diferentes situaciones que se pueden presentar:

- Caso $\gamma \in (-\infty, -1) \cup (8, \infty)$.

  En este caso el vértice de la parábola f está situado en el tercer cuadrante, y al ser $f(0, \gamma) = \gamma(1+\gamma)^3 > 0$ las dos raíces se encuentran en el semieje negativo del eje ω_0^2. Por tanto al ser $f(\omega_0^2, \gamma) > 0$ para $\omega_0^2 > 0$, se tiene que $sig(a_1) = -sig(f(\omega_0^2, \gamma) < 0$. En consecuencia, la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales en el infinito que surge del punto $(c, \beta + \gamma) = (\pm\infty, 0)$ es supercrítica.

- Caso $\gamma \in (0, 8)$.

  Ahora el vértice de la parábola f se encuentra situado en el segundo cuadrante y $f(0, \gamma) = \gamma(1+\gamma)^3 > 0$. En consecuencia tenemos una situación similar a la del caso anterior, si bien ahora la parábola no corta al eje, y por tanto la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales en el infinito es también supercrítica en este intervalo.

- Caso $\gamma \in (-1, 0)$.

  Para estos valores del parámetro γ, se tiene que el vértice de la parábola f se encuentra situado en el cuarto cuadrante, y $f(0, \gamma) = \gamma(1+\gamma)^3 < 0$. Ahora una raíz se encuentra en el semieje negativo y la otra en el positivo. La raíz positiva viene dada por el valor crítico

  $$(\omega_0^2)_c = \frac{(1+\gamma)\left[-3\gamma + \sqrt{\gamma(\gamma-8)}\right]}{4}.$$

  Lógicamente, para los valores $\omega_0^2 \in (0, (\omega_0^2)_c)$, al ser $f(\omega_0^2, \gamma) < 0$ la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales en el infinito es subcrítica, siendo supercrítica para los valores $\omega_0^2 \in ((\omega_0^2)_c, \infty)$ (ver figura 1.6).

  Para poder calcular la curva donde cambia la estabilidad de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales en el infinito, en el plano de parámetros (γ, α), sustituimos en la expresión (1.19) de α el valor λ_h dado en (1.22), obteniéndose

  $$\alpha = -\frac{\omega_0^2\left[\omega_0^2 + (1+\gamma)^2\right]}{\omega_0^2 + \gamma(1+\gamma)}.$$

  A continuación, y al objeto de simplificar su expresión, multiplicamos numerador y denominador por $2\omega_0^2 + \gamma(1+\gamma)$, llegando a

  $$\alpha = \frac{-2\omega_0^6 - (1+\gamma)(3\gamma+2)\omega_0^4 - \gamma(1+\gamma)^3\omega_0^2}{2\omega_0^4 + 3\gamma(1+\gamma)\omega_0^2 + \gamma^2(1+\gamma)^2}.$$

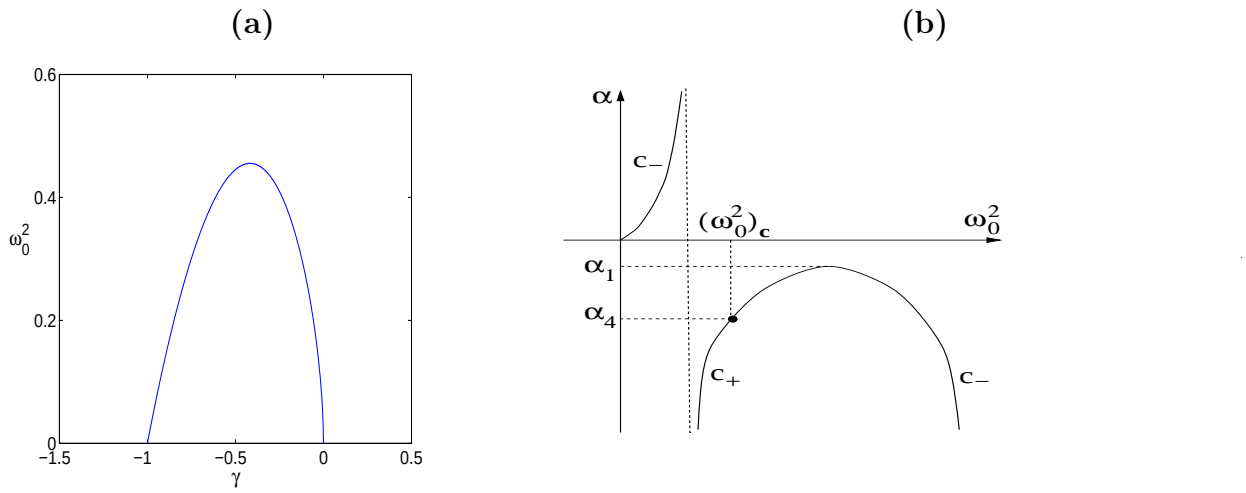


Figura 1.6: (a) Gráfica en el plano (γ, ω_0^2) de la curva que delimita las regiones donde cambia la estabilidad de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales en un entorno del punto $(c, \beta + \gamma) = (\pm\infty, 0)$. (b) Dibujo cualitativo, en el plano (ω_0^2, α), de las dos ramas de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales en un entorno del punto $(c, \beta + \gamma) = (\pm\infty, 0)$.

Ahora teniendo en cuenta que $f(\omega_0^2, \gamma) = 2\omega_0^4 + 3\gamma(1+\gamma)\omega_0^2 + \gamma(1+\gamma)^3 = 0$, podemos despejar

$$\omega_0^4 = -\frac{3\gamma(1+\gamma)\omega_0^2 + \gamma(1+\gamma)^3}{2},$$

y sustituyendo este valor en la expresión de α, dos veces en el numerador y una vez en el denominador, se obtiene

$$\alpha = -[(1+\gamma)^2 + 3\omega_0^2]. \tag{1.24}$$

Finalmente sustituimos el valor de la raíz $(\omega_0^2)_c$ y obtenemos la expresión de la curva buscada

$$\alpha = \alpha_4 := -\frac{(1+\gamma)\left[4 - 5\gamma + 3\sqrt{\gamma(\gamma-8)}\right]}{4} + \mathcal{O}(\tilde{\beta}), \qquad \gamma \in (-1, 0).$$

Para los valores de esta curva de bifurcación se tiene que $a_1 = 0$ en el punto del plano de parámetros $(c, \beta + \gamma) = (\pm\infty, 0)$. Para ver sobre qué rama se presenta la degeneración notemos que para $\gamma \in (-1, 0)$ es $(\omega_0^2)_c + \dfrac{(1+\gamma^2) + \alpha_4}{2} < 0$, en consecuencia el valor $(\omega_0^2)_c$ coincide con el obtenido al elegir el signo $-$ en la expresión de ω_0^2, y por tanto se presenta para el valor c_+, es decir sobre la rama h_+ de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales (ver figura 1.5). Además se cumple que para $\gamma \in (-1, 0)$ es $\alpha'((\omega_0^2)_c) > 0$ (ver figura 1.6(b)).

Para ver que en dicho punto no hay una degeneración de mayor orden hemos comprobado que, para los valores de los parámetros donde $a_1 = 0$, es $a_2 \neq 0$, ya que el factor $a_{21} \neq 0$ cuando $\gamma \in (-1, 0)$.

- Caso $\gamma = 8$.

  En este caso se cumple que $f(\omega_0^2, 8) > 0$ y por tanto $sig(a_1) < 0$. Es decir, la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales en el infinito es supercrítica para este valor.

Finalizamos el estudio de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales analizando el caso particular $\gamma = -1$.

Para este valor del parámetro la bifurcación ocurre cuando

$$c = -\frac{3}{2(\beta-1)} + \frac{1}{2\alpha}, \quad \beta - 1 - \alpha > 0, \quad a\left(\frac{1}{\alpha} + c\right) < 0.$$

Notemos que en este caso particular se deduce, del valor del coeficiente p_1 dado en (1.8), que sobre la superficie de Hopf de los equilibrios no triviales **h** el tercer autovalor real no nulo $\lambda_h = -p_1$ se mantiene constante $\lambda_h = 1$.

En este caso, si $a = 1$, en la zona donde existe la curva de Hopf de los equilibrios no triviales, $\beta - 1 - \alpha > 0$, no se cumple la condición de existencia de dichos equilibrios no triviales, $a\left(\frac{1}{\alpha} + c\right) < 0$, por tanto la curva de Hopf sólo existe en el caso $a = -1$.

Ahora como coeficiente a_1, de la forma normal del sistema reducido sobre la variedad de centro, se obtiene

$$a_1 = \frac{3\alpha^4[(48x_0^2\alpha - 4)w_0^4 + (48x_0^2\alpha^2 + 30x_0^2\alpha - 1)w_0^2 + 6x_0^2\alpha^2]}{8w_0^2(1 + w_0^2)(1 + 4w_0^2)}.$$

Ya que $w_0^2 = \beta - \alpha - 1$, y sobre la curva de Hopf de los equilibrios no triviales **h** se tiene que $x_0 = \sqrt{-\frac{1}{2(\beta-1)} + \frac{1}{2\alpha}}$, el coeficiente a_1, en función de los parámetros α y $\tilde{\beta} = \beta - 1$, viene dado por

$$a_1 = \frac{3\alpha^4[10\tilde{\beta}^2 - (10\alpha - 7)\tilde{\beta} - 6\alpha]}{4\tilde{\beta}(\tilde{\beta} - \alpha + 1)(4\tilde{\beta} - 4\alpha + 1)}.$$

Al ser $\alpha \neq 0$ el coeficiente a_1 se anula cuando

$$P(\alpha, \tilde{\beta}) = 10\tilde{\beta}^2 - (10\alpha - 7)\tilde{\beta} - 6\alpha = 0.$$

En la figura 1.7 podemos ver la representación gráfica de la función $P(\alpha, \tilde{\beta}) = 0$, (en color azul) observándose que consta de dos ramas las cuales son asintóticas a la recta $\tilde{\beta} = -\frac{3}{5}$ y a la bisectriz del primer-tercer cuadrante $\tilde{\beta} = \alpha$. Además cuando $\alpha < 0$ hay una única degeneración de primer orden ($a_1 = 0$), de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales **h**, en la zona donde existe la citada curva, por encima de la bisectriz del

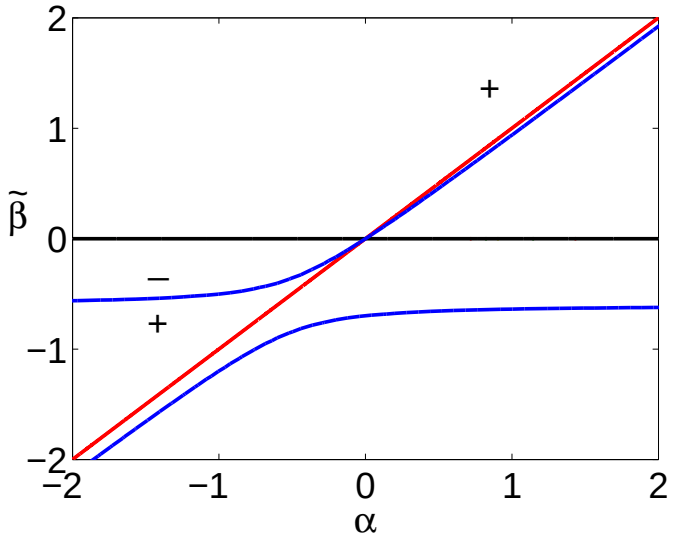


Figura 1.7: Representación gráfica, en el plano $(\alpha, \tilde{\beta})$, de la función $P(\alpha, \tilde{\beta}) = 0$ (color azul), de la recta $\tilde{\beta} = 0$ (color negro), y de la bisectriz del primer-tercer cuadrante (color rojo). También, en las zonas donde existe la curva de Hopf de los equilibrios no triviales **h**, aparece el signo del coeficiente a_1 de la forma normal.

primer-tercer cuadrante $\tilde{\beta} = \alpha$ (de color rojo en la figura 1.7). La gráfica de la curva $P(\alpha, \tilde{\beta}) = 0$, cuando $\alpha > 0$, está situada debajo de la bisectriz $\tilde{\beta} = \alpha$ y, en consecuencia, no hay degeneraciones cuando $\alpha > 0$. Nótese que las curvas $P(\alpha, \tilde{\beta}) = 0$ y $\tilde{\beta} = \alpha$ se cortan en un solo punto $(\alpha = 0, \tilde{\beta} = 0)$.

Para estudiar el carácter de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales notemos que $\tilde{\beta} - \alpha + 1 > 0$ y $4\tilde{\beta} - 4\alpha + 1 > 0$, ya que $\tilde{\beta} > \alpha$, por tanto el $sig(a_1) = sig(\tilde{\beta}\ P(\alpha, \tilde{\beta}))$. Si $\alpha > 0$, como debe ser $\tilde{\beta} > \alpha$, se tiene que $\tilde{\beta} > 0$. Si $\alpha < 0$, escribimos la curva **h** en la forma $\tilde{\beta} = \dfrac{3\alpha}{1 - 2\alpha c}$, y como debe ser, para que existan los equilibrios no triviales, $\dfrac{1}{\alpha} + c > 0$ se deduce que, al ser $1 - 2\alpha c > 3$, es $\tilde{\beta} < 0$.

En la figura 1.7 se representa con el signo + las zonas del plano $(\alpha, \tilde{\beta})$ donde la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales **h** existe y es subcrítica, $a_1 > 0$, y con el signo − la zona donde la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales **h** existe y es supercrítica, $a_1 < 0$.

Finalmente estudiamos si, para los valores de los parámetros donde se anulaba el coeficiente a_1 de la forma normal de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales, es posible que el segundo coeficiente a_2 también se anule.

Recordemos que el coeficiente a_1 se anulaba cuando

$$P(\alpha, \tilde{\beta}) = 10\tilde{\beta}^2 - (10\alpha - 7)\tilde{\beta} - 6\alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \frac{10\tilde{\beta}^2 + 7\tilde{\beta}}{10\tilde{\beta} + 6}, \qquad -\frac{3}{5} < \tilde{\beta} < 0.$$

Para estos valores de los parámetros el coeficiente a_2 viene dado por

$$a_2 = \frac{\tilde{\beta}^7(10\tilde{\beta}+7)^8(9270\tilde{\beta}^3+16995\tilde{\beta}^2+10358\tilde{\beta}+2100)}{18432(3\tilde{\beta}+2)^4(5\tilde{\beta}+3)^6},$$

por tanto las degeneraciones de segundo orden serán las raíces del polinomio $9270\tilde{\beta}^3 + 16995\tilde{\beta}^2 + 10358\tilde{\beta} + 2100$, que cumplan $-\frac{3}{5} < \tilde{\beta} < 0$. Este polinomio tiene dos raíces complejas y una raíz real para $\tilde{\beta} \approx -0.6824198279$, en consecuencia podemos afirmar que para $\gamma = -1$ no hay degeneraciones de segundo orden de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales.

1.5. Bifurcaciones de codimensión dos y tres

1.5.1. Bifurcación de Takens-Bogdanov

Suponemos ahora que, en términos de los coeficientes del polinomio característico (1.3), se cumple que $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ y $\lambda_{TB} = -p_1 \neq 0$.

Vamos a distinguir los casos $\gamma \neq 0$ y $\gamma = 0$.

Comenzamos el estudio por el caso genérico $\gamma \neq 0$.

Al expresar los parámetros α y β en función de los parámetros restantes γ, c, con las condiciones genéricas $c \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $1 - c(1+\gamma) \neq 0$, obtenemos los valores donde tiene lugar una bifurcación de Takens-Bogdanov

$$\mathbf{TB} \equiv \begin{cases} \alpha = \dfrac{\gamma}{c[1-c(1+\gamma)]}, \\ \beta = \dfrac{\gamma(1-c)}{c}, \\ \lambda_{TB} = \dfrac{-1-2\gamma+c(1+\gamma)^2}{1-c(1+\gamma)} \neq 0. \end{cases}$$

Nótese que para el estudio de esta bifurcación hemos cambiado el plano de parámetros, en relación a los utilizados en el análisis de la bifurcación de Hopf, al plano (α, β). Este cambio nos permite una expresión más sencilla de los valores de los parámetros donde se experimenta la bifurcación.

En el caso de ser $c = 0$, o bien $1 - c(1+\gamma) = 0$ se cumple que $p_3 \neq 0$ y por tanto no hay bifurcación de Takens-Bogdanov.

Para analizar la estabilidad y las posibles degeneraciones de esta bifurcación, consideramos las ecuaciones con los parámetros evaluados en sus valores críticos y realizamos, cuando $\beta \neq 0$, la siguiente transformación lineal en el sistema (1.2)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda_{TB} \\ 0 & 0 & \lambda_{TB}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Si $\beta = 0$, al ser $\gamma \neq 0$, se tiene que $c = 1$, y en ese caso para los valores críticos de los parámetros $\alpha = -1$, $\beta = 0$, el origen no es un equilibrio aislado del sistema (1.1).

El sistema transformado tiene como matriz de la parte lineal, la matriz de Jordan

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{TB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \cdots .$$

Si aplicamos a este sistema transformado el algoritmo desarrollado en Gamero, Freire y Ponce (1991) se obtiene sobre la variedad de centro, cuya expresión no damos debido a la extensión de sus coeficientes, la siguiente forma normal a orden cinco para el sistema reducido

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Y, \\ \dot{Y} &= a_3X^3 + b_3X^2Y + a_5X^5 + b_5X^4Y, \end{aligned}$$

donde

$$a_3 = \frac{a\gamma^2}{c^2(c-1)^2[-1-2\gamma+c(1+\gamma)^2]},$$

$$b_3 = \frac{3a\gamma[c^2(1+\gamma)^3 - c(1+\gamma)(3\gamma+1)+\gamma]}{c^2(c-1)^2[-1-2\gamma+c(1+\gamma)^2]^2},$$

$$a_5 = \frac{-3a^2\gamma^4}{c^4(c-1)^3[-1-2\gamma+c(1+\gamma)^2]^4},$$

$$b_5 = \frac{-5(c-1)a_3b_3}{[-1-2\gamma+c(1+\gamma)^2]^2} + \frac{3a_5}{\lambda_{TB}}.$$

Se observa que el coeficiente a_3 no se anula nunca, ya que $a \neq 0$ y $\gamma \neq 0$. Además, para $a = 1$ y $\gamma \neq -1$, este coeficiente es positivo si $c > c_{TZ}$ y negativo si $c < c_{TZ}$, donde $c_{TZ} := \dfrac{1+2\gamma}{(1+\gamma)^2}$ es el valor del parámetro c donde tiene lugar una bifurcación triple-cero del origen. En consecuencia al pasar por el punto **TZ** cambia el carácter de la bifurcación de Takens-Bogdanov **TB** pasando de ser de tipo heteroclino a tipo homoclino. Lo contrario ocurre si $a = -1$ y $\gamma \neq -1$ (ver Guckenheimer y Holmes (1997)).

Cuando $\gamma \neq -1$, el coeficiente b_3 se anula para los valores

$$c = \frac{(1+\gamma)(1+3\gamma) \pm |1+\gamma|\sqrt{(1+\gamma)^2+4\gamma^2}}{2(1+\gamma)^3},$$

donde tiene lugar una degeneración de la bifurcación de Takens-Bogdanov (ver Li y Rousseau (1989); Rodríguez-Luis, Freire y Ponce (1991)). Para los valores donde tiene lugar esta degeneración se cumple que el coeficiente $a_5 \neq 0$ y, en consecuencia, también $b_5 = \dfrac{3a_5}{\lambda_{TB}} \neq 0$. Tenemos pues dos puntos (**TBD1** si elegimos el signo $-$ en el valor de c y **TBD2** si escogemos el signo $+$) donde tiene lugar una degeneración, de codimensión tres, de la bifurcación de Takens-Bogdanov. Las coordenadas de estos dos puntos en función del parámetro γ vienen dadas por

$$\mathbf{TBD} \equiv \begin{cases} \alpha = -\dfrac{(\gamma+1)^3}{2\gamma \pm \sqrt{(1+\gamma)^2+4\gamma^2}}, \\ \beta = \dfrac{2\gamma(1+\gamma)^2}{(1+3\gamma) \pm \sqrt{(1+\gamma)^2+4\gamma^2}} - \gamma, \\ c = \dfrac{(1+3\gamma) \pm \sqrt{(1+\gamma)^2+4\gamma^2}}{2(1+\gamma)^2}, \\ \gamma \neq -1, 0, \end{cases}$$

donde el punto **TBD1** se obtiene al elegir el signo $-$ de la raíz si $\gamma \in (-1,0) \cup (0,\infty)$ y el signo $+$ cuando $\gamma \in (-\infty,-1)$, mientras que la elección contraria correspondería a elegir el punto **TBD2**.

Si $\gamma = -1$, el coeficiente b_3 no se anula nunca por ser $a \neq 0$. Además, para $a = 1$ y $\gamma = -1$, el coeficiente a_3 es siempre positivo y la bifurcación de Takens-Bogdanov **TB** es de tipo heteroclino, siendo de tipo homoclino cuando $a = -1$ y $\gamma = -1$, debido a que el coeficiente a_3 es negativo.

En el quinto capítulo de esta memoria se computa la forma normal de la bifurcación de Takens-Bogdanov, para una amplia clase de sistemas de control simétricos que tienen al oscilador de Chua como un prototipo, y se determinan las bifurcaciones locales que emergen de ella. También se realiza un estudio numérico exhaustivo de las curvas de bifurcación que surgen del punto de codimensión tres **TBD2** para el sistema (1.1).

Finalmente analizamos el caso $\gamma = 0$.

Para el estudio de este caso nos situamos nuevamente en el plano de parámetros utilizado en el análisis de la bifurcación de Hopf, a saber $(c, \beta+\gamma) = (c, \beta)$.

Al imponer que se cumpla $p_3 = \alpha\beta c = 0$, ya que $\alpha \neq 0$, se tienen dos posibilidades. Si $\beta = 0$ para que $p_2 = 0$ debe ser $c = 1$, pero para estos valores críticos de los parámetros el origen no sería un equilibrio aislado del sistema (1.1). La otra opción, $\beta \neq 0$, nos lleva a que la bifurcación se presenta en el punto

$$\mathbf{TB} \equiv \begin{cases} c = 0, \\ \beta = \alpha, \end{cases}$$

cumpliéndose que $\lambda_{TB} = -1 \neq 0$.

Para estudiar la estabilidad y posibles degeneraciones de la bifurcación repetimos los cálculos anteriores en el plano de parámetros (c, β). Para ello realizamos la siguiente transformación lineal en el sistema (1.1)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ -\alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

El sistema transformado tiene como matriz de la parte lineal, la matriz de Jordan

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \cdots.$$

En las nuevas variables la aproximación a orden tres de la variedad de centro viene dada por

$$Z = a\alpha^4(X^3 - 3X^2Y + 6XY^2 - 6Y^3).$$

Aplicando ahora el algoritmo desarrollado en Gamero, Freire y Ponce (1991) se obtiene, sobre la variedad de centro, la siguiente forma normal a orden cinco para el sistema reducido

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Y, \\ \dot{Y} &= a_3X^3 + b_3X^2Y + a_5X^5 + b_5X^4Y, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_3 &= -a\alpha^4, & b_3 &= 3a\alpha^3(\alpha - 1), \\ a_5 &= 3a^2\alpha^8, & b_5 &= -3a^2\alpha^7(8\alpha - 5). \end{aligned}$$

Se observa que el coeficiente a_3 no se anula nunca, ya que $a \neq 0$ y $\alpha \neq 0$. Además, para $a = 1$, este coeficiente es siempre negativo y, en consecuencia, la bifurcación de Takens-Bogdanov **TB** es de tipo homoclino, por contra si $a = -1$ el coeficiente a_3 es siempre positivo y la bifurcación de Takens-Bogdanov es de tipo heteroclino. Sin embargo el coeficiente b_3 se anula para $\alpha = 1$, donde tiene lugar una degeneración de la bifurcación de Takens-Bogdanov (ver Li y Rousseau (1989); Rodríguez-Luis, Freire y Ponce (1991)). Para los valores donde tiene lugar esta degeneración se cumple que el coeficiente $a_5 = 3a^2 \neq 0$ y también $b_5 = -9a^2 \neq 0$. En consecuencia hay un único punto **TBD**, de coordenadas $(c, \beta, \alpha) = (0, 1, 1)$, donde tiene lugar una bifurcación de Takens-Bogdanov degenerada de codimensión tres.

1.5.2. Bifurcación Hopf-pitchfork

La bifurcación Hopf-pitchfork, que corresponde al caso en que los autovalores de la matriz de la linealización en el origen son $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ y $\lambda_3 = 0$, se presenta cuando imponemos, en los coeficientes del polinomio característico (1.3), las condiciones $p_1 = p_3 = 0$, $p_2 > 0$. En función de los parámetros originales del sistema (1.1) esto ocurre cuando

$$\mathbf{HP} \equiv \begin{cases} \beta = -\dfrac{\gamma(1+\alpha+\gamma)}{\gamma+1}, \ \alpha = -\dfrac{1+\gamma}{c}, \\ \omega_0^2 = -\dfrac{(1+\gamma)^3 + \alpha(1+2\gamma)}{(1+\gamma)} > 0. \end{cases}$$

Un estudio más profundo de esta bifurcación, así como de sus degeneraciones, se llevará a cabo en el segundo capítulo de esta memoria. En el citado estudio se obtienen los valores de los parámetros del sistema (1.1) para los que ocurren degeneraciones de la bifurcación Hopf-pitchfork de codimensión tres y superior.

$$\mathbf{HPD} \equiv \begin{cases} \alpha = -(1+\gamma)^2, \\ \beta = \gamma^2, \\ c = \dfrac{1}{1+\gamma}, \\ \gamma \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty). \end{cases}$$

También se determina el tipo topológico de la bifurcación Hopf-pitchfork **HP**. En efecto, si $\gamma < -\frac{1}{2}$ o $\gamma > 0$ la bifurcación Hopf-pitchfork es de tipo Ib (usando la nomenclatura de Guckenheimer y Holmes (1997), [Sec. 7.5]) en la zona $\alpha < -(1+\gamma)^2$, siendo de tipo VIa para los valores en los que $\alpha > -(1+\gamma)^2$ o bien $\alpha < -(1+\gamma)^2$ con $-\frac{1}{2} < \gamma < 0$.

1.5.3. Bifurcación triple-cero

Finalmente la bifurcación triple-cero, correspondiente al caso de un autovalor cero triple en la matriz de la linealización en el origen, surge de imponer las tres condiciones $p_1 = p_2 = p_3 = 0$. Los valores de los parámetros del sistema (1.1) donde aparece esta bifurcación vienen dados por las expresiones

$$\mathbf{TZ} \equiv \begin{cases} \alpha = -\dfrac{(1+\gamma)^3}{1+2\gamma}, \\ \beta = \dfrac{\gamma^3}{1+2\gamma}, \\ c = \dfrac{1+2\gamma}{(1+\gamma)^2}, \\ \gamma \neq -1, -\dfrac{1}{2}, 0. \end{cases}$$

En el capítulo quinto de esta memoria se computa la forma normal de esta singularidad, y se lleva a cabo un detallado estudio numérico del sistema (1.1) para los valores de los parámetros cerca de la degeneración lineal triple-cero.

1.6. Conjuntos de bifurcaciones

Si bien la justificación de algunos de los resultados presentados en este primer capítulo queda postergada a capítulos posteriores, con la información obtenida en él creemos conveniente mostrar ahora, al objeto de tener una visión global, varios dibujos cualitativos en el plano (c, α), de las curvas de bifurcación de codimensión dos analizadas al ir variando el parámetro γ.

En la figura 1.8, para $\gamma < -1$, se observa la disposición en el plano de parámetros (c, α) de las siguientes curvas de bifurcación:

- La bifurcación de Takens-Bogdanov del origen **TB**.

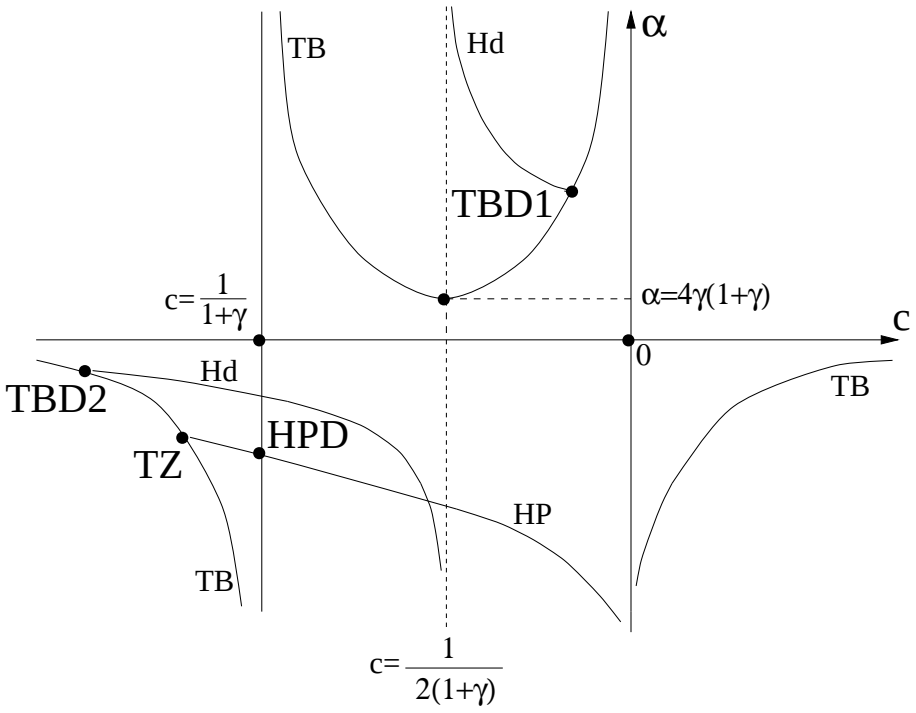


Figura 1.8: Para $a = \pm 1$, $\gamma < -1$ conjunto parcial de bifurcaciones en el plano (c, α).

- La degeneración de la bifurcación de Hopf del origen **Hd**, surgiendo de los dos puntos de codimensión tres **TBD1** y **TBD2** donde tiene lugar una degeneración de la bifurcación de Takens-Bogdanov.

- La bifurcación Hopf-pitchfork del origen **HP**, surgiendo del punto de codimensión tres **TZ**, donde tiene lugar una degeneración triple-cero del origen. Sobre la curva **HP** hay un punto, **HPD**, donde se produce una degeneración de la bifurcación Hopf-pitchfork del origen de codimensión tres.

En la figura 1.9 aparecen las mismas curvas de bifurcación y varias degeneraciones de codimensión tres presentes en la figura 1.8, si bien ha cambiado su disposición en el plano de parámetros (c, α). En este caso, cuando $-1 < \gamma < -\frac{1}{2}$, no se degenera la bifurcación Hopf-pitchfork del origen.

Para $-\frac{1}{2} < \gamma < -\frac{1}{3}$, en la figura 1.10, aparecen los mismos elementos de la figura 1.8, con la única variación de que el punto de codimensión tres **TZ**, donde tiene lugar una degeneración triple-cero del origen, está situado en la rama parabólica de la curva de Takens-Bogdanov del origen **TB**.

Cuando $-\frac{1}{3} < \gamma < 0$ el punto **TZ** ha pasado por el vértice de la rama parabólica de la curva **TB**, según vemos en la figura 1.11. Finalmente, cuando $\gamma > 0$ podemos observar en la figura 1.12 las mismas curvas de bifurcación, y en una disposición casi simétrica

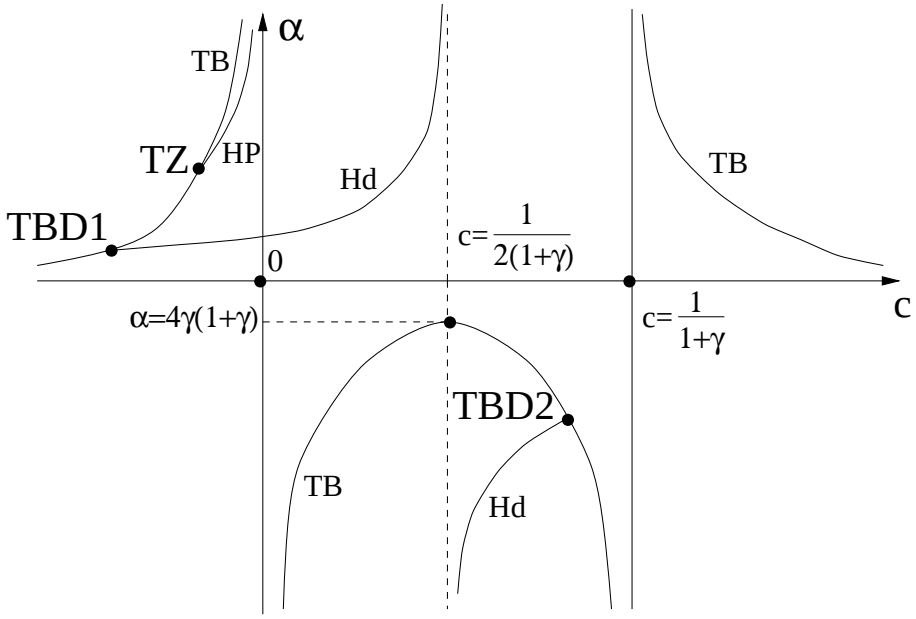


Figura 1.9: Para $a = \pm 1$, $-1 < \gamma < -\frac{1}{2}$ conjunto parcial de bifurcaciones en el plano (c, α).

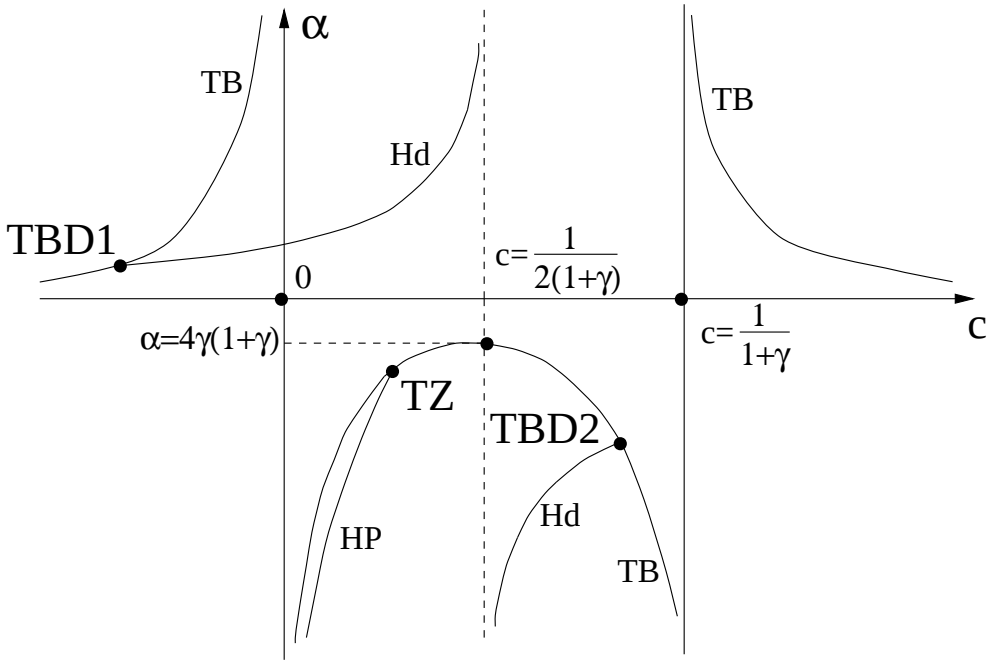


Figura 1.10: Para $a = \pm 1$, $-\frac{1}{2} < \gamma < -\frac{1}{3}$ conjunto parcial de bifurcaciones en el plano (c, α).

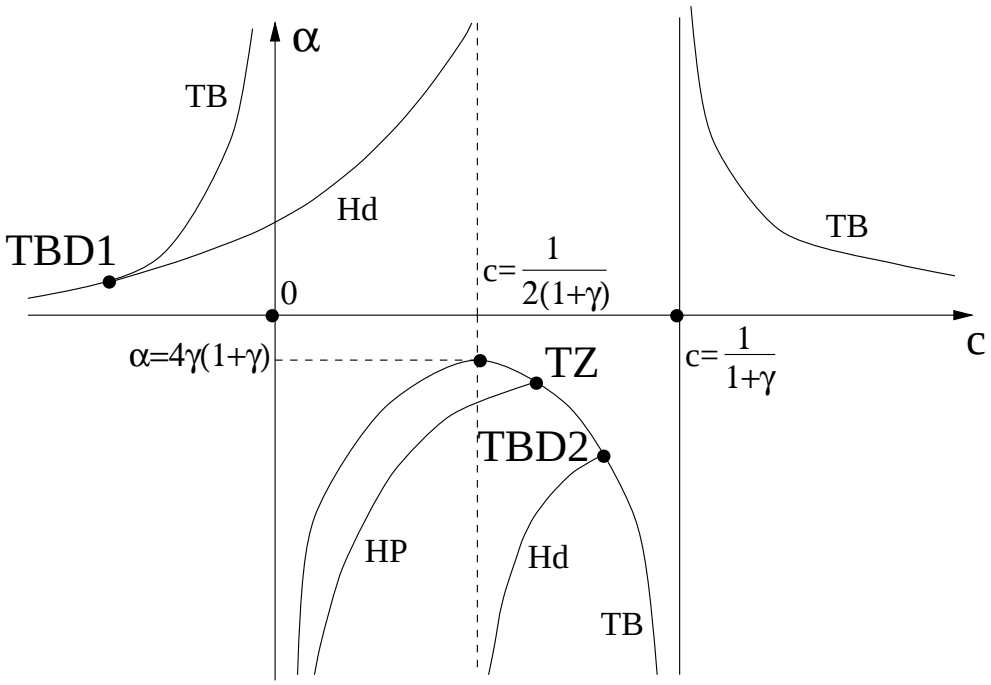


Figura 1.11: Para $a = \pm 1$, $-\dfrac{1}{3} < \gamma < 0$ conjunto parcial de bifurcaciones en el plano (c, α).

respecto de la recta $c = \dfrac{1}{2(1+\gamma)}$, de la figura 1.8. Aparecen también los puntos, **TBD1**, **TBD2**, **TZ** y **HPD** donde se presentan las degeneraciones de codimensión tres.

En la figura 1.13 hemos dibujado, en el plano (γ, α), las curvas donde tienen lugar las bifurcaciones de codimensión tres que aparecen en las figuras 1.8 a 1.12, a saber

$$\textbf{TBD1} \equiv \begin{cases} \alpha = -\dfrac{(1+\gamma)^3}{2\gamma - \sqrt{(1+\gamma)^2 + 4\gamma^2}}, & \gamma \in (-1, 0) \cup (0, \infty), \\ \alpha = -\dfrac{(1+\gamma)^3}{2\gamma + \sqrt{(1+\gamma)^2 + 4\gamma^2}}, & \gamma \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

Estos valores corresponden a una degeneración no lineal, donde el coeficiente de la forma normal a orden tres b_3 se anula.

$$\textbf{TBD2} \equiv \begin{cases} \alpha = -\dfrac{(1+\gamma)^3}{2\gamma + \sqrt{(1+\gamma)^2 + 4\gamma^2}}, & \gamma \in (-1, 0) \cup (0, \infty), \\ \alpha = -\dfrac{(1+\gamma)^3}{2\gamma - \sqrt{(1+\gamma)^2 + 4\gamma^2}}, & \gamma \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

Estos valores corresponden a una degeneración no lineal, donde el coeficiente de la forma normal a orden tres b_3 se anula.

$$\textbf{TZ} \equiv \alpha = -\frac{(1+\gamma)^3}{1+2\gamma}, \quad \gamma \neq -1, -\frac{1}{2}, 0.$$

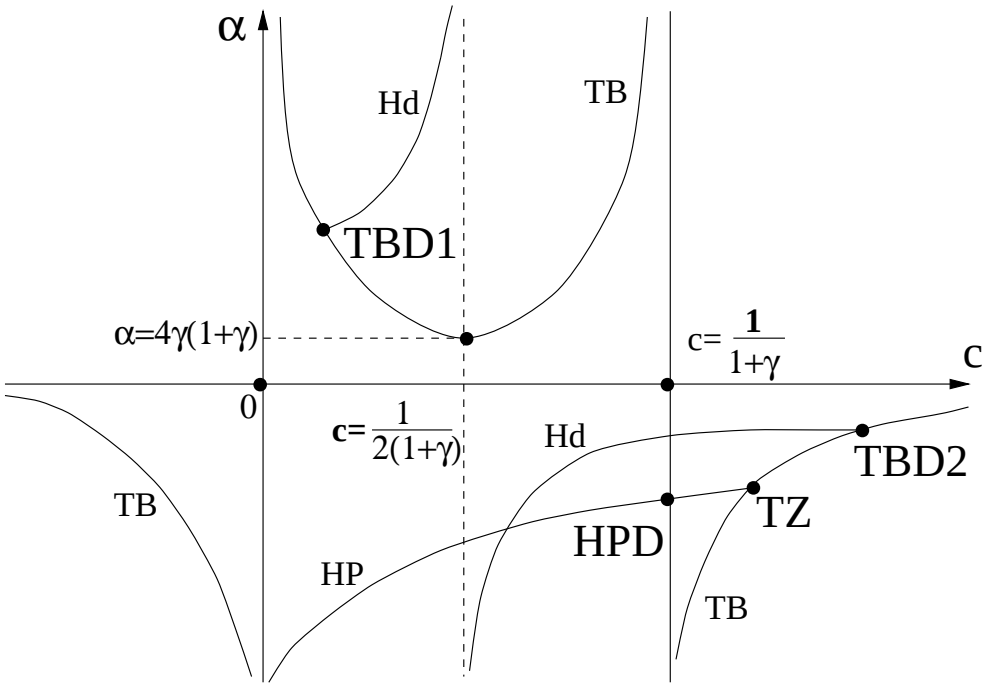


Figura 1.12: Para $a = \pm 1$, $\gamma > 0$ conjunto parcial de bifurcaciones en el plano (c, α).

Para los valores de esta curva, se tiene una bifurcación del origen correspondiente a un autovalor triple cero.

HPD $\equiv \alpha = -(1+\gamma)^2, \quad \gamma \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

Estos valores corresponden a una degeneración no lineal, donde los coeficientes de la forma normal a orden tres a_1 y a_2 se anulan.

La curvas α_1 y α_4 aparecen también en la figura 1.13. Recordemos que la primera curva delimitaba dos zonas, una de ellas relacionada con la existencia de dos ramas de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales que surgen del punto $(c, \beta + \gamma) = (\pm\infty, 0)$, mientras que la segunda curva está relacionada con el cambio de estabilidad de la bifurcación de Hopf en ambas ramas.

La última curva que hemos representado, $\alpha_5 = 4\gamma(1+\gamma)$, no es una curva de bifurcación, ya que α_5 es la curva donde se produce una pérdida de transversalidad en los parámetros de la curva **TB**. Más concretamente, para $\gamma \in (-1, 0)$, en la zona situada debajo de la curva α_5 hay dos puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov del origen mientras que en la zona superior no tiene lugar la citada degeneración. Lo contrario ocurre cuando $\gamma \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

En capítulos posteriores usaremos esta figura para realizar estudios numéricos en los que fijaremos el valor del parámetro γ, para obtener diversos conjuntos de bifurcaciones en el plano de parámetros (β, c), al ir variando el parámetro α.

Por último presentamos, en las figuras 1.14, 1.15 y 1.16, los conjuntos parciales de bifurcaciones en cada una de las zonas delimitadas por las curvas de bifurcación de la

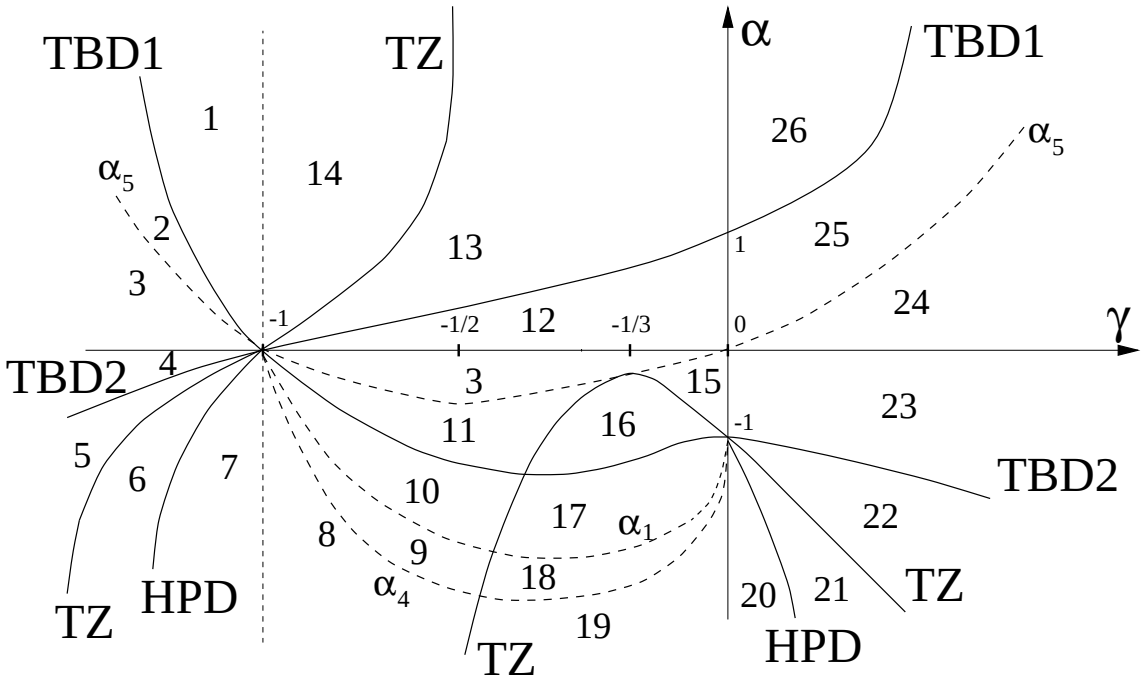
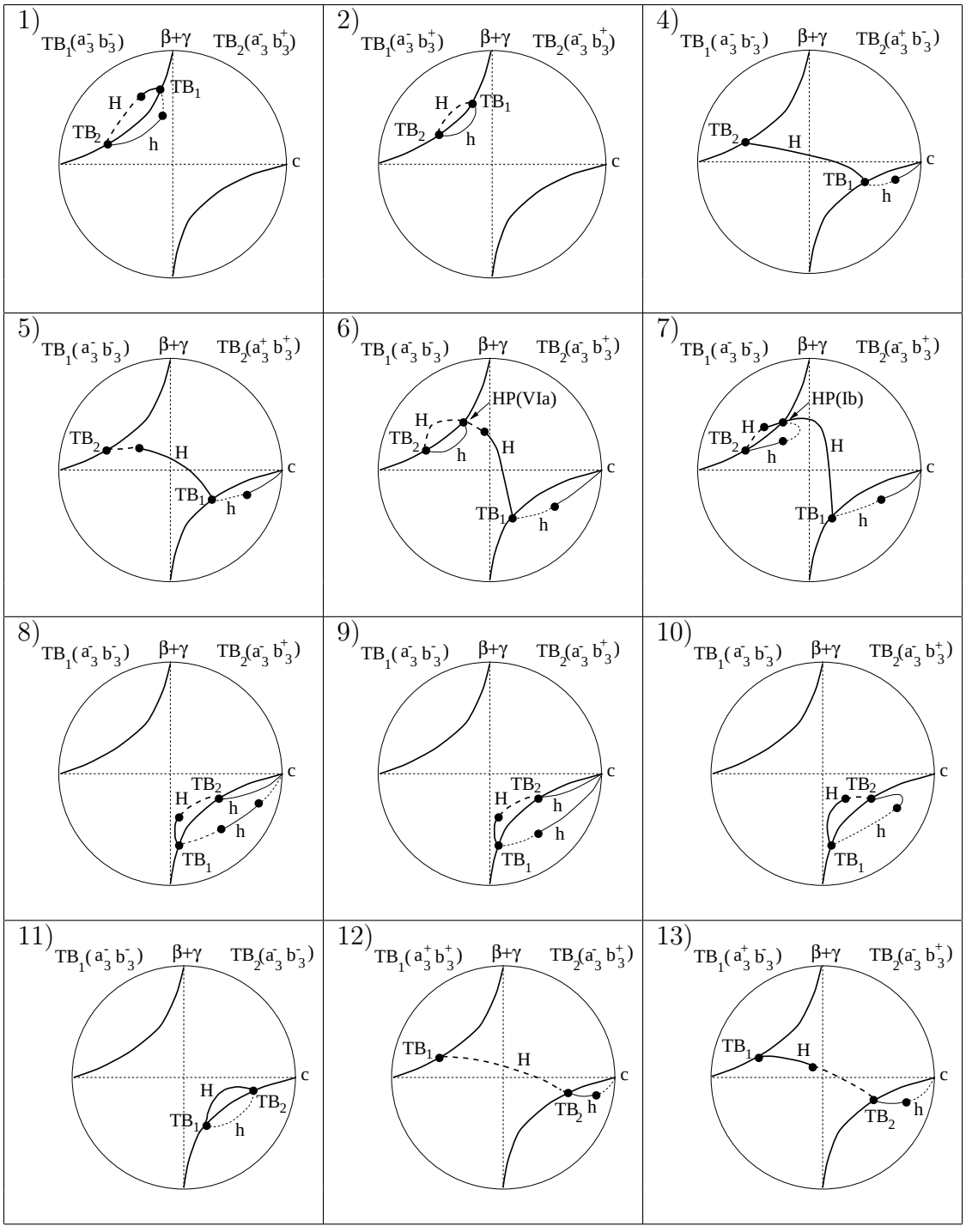
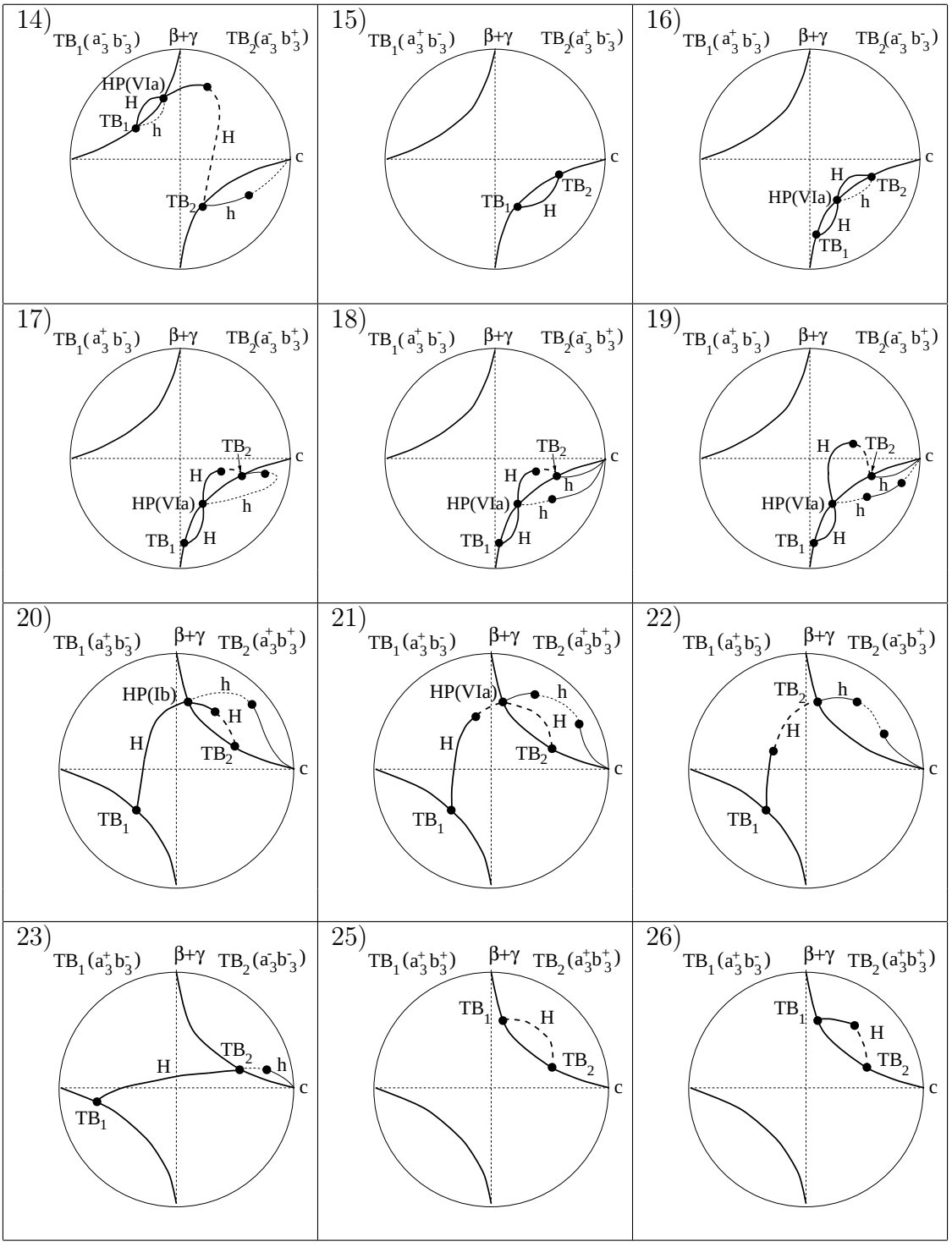


Figura 1.13: Para $a = \pm 1$ conjunto parcial de bifurcaciones en el plano (γ, α).

figura 1.13 para el caso $a = -1$. En cada uno de ellos hemos considerado el menor número posible de degeneraciones de primer orden, sobre la curva de bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales **h**, para que el dibujo sea compatible. Asimismo, hemos representado con una línea continua los casos en los que la curva, donde se experimenta la bifurcación de Hopf **H** o **h**, es supercrítica y con trazo discontinuo cuando es subcrítica. De forma análoga se obtienen los conjuntos parciales de bifurcaciones, para el caso $a = 1$, en cada una de las zonas delimitadas por las curvas de bifurcación de la figura 1.13. Obsérvese que la diferencia existente entre ambos casos, para una misma zona, se debe a que los coeficientes a_3 y b_3 de la forma normal para la bifurcación de Takens-Bogdanov tienen signos opuestos.


1)
TB1(a3- b3-)
β+γ
TB2(a3- b3+)
H
TB1
TB2
h
c
2)
TB1(a3- b3+)
β+γ
TB2(a3- b3+)
H
TB1
TB2
h
c
4)
TB1(a3- b3-)
β+γ
TB2(a3+ b3-)
TB2
H
c
TB1
h
5)
TB1(a3- b3-)
β+γ
TB2(a3+ b3+)
TB2
H
c
TB1
h
6)
TB1(a3- b3-)
β+γ
TB2(a3- b3+)
HP(VIa)
H
TB2
h
H
c
TB1
h
7)
TB1(a3- b3-)
β+γ
TB2(a3- b3+)
HP(Ib)
H
TB2
h
H
c
TB1
h
8)
TB1(a3- b3-)
β+γ
TB2(a3- b3+)
c
TB2
H
h
h
TB1
9)
TB1(a3- b3-)
β+γ
TB2(a3- b3+)
c
TB2
H
h
h
TB1
10)
TB1(a3- b3-)
β+γ
TB2(a3- b3+)
c
H
TB2
h
TB1
11)
TB1(a3- b3-)
β+γ
TB2(a3- b3-)
c
H
TB2
TB1
h
12)
TB1(a3+ b3+)
β+γ
TB2(a3- b3+)
TB1
H
c
TB2
h
13)
TB1(a3+ b3-)
β+γ
TB2(a3- b3+)
TB1
H
c
TB2
h


14)
TB1(a3- b3-)
β+γ
TB2(a3- b3+)
HP(VIa)
H
TB1
h
H
c
TB2
h
15)
TB1(a3+ b3-)
β+γ
TB2(a3+ b3-)
c
TB2
TB1
H
16)
TB1(a3+ b3-)
β+γ
TB2(a3- b3-)
c
H
TB2
HP(VIa)
h
H
TB1
17)
TB1(a3+ b3-)
β+γ
TB2(a3- b3+)
TB2
c
H
HP(VIa)
h
TB1
H
18)
TB1(a3+ b3-)
β+γ
TB2(a3- b3+)
TB2
c
H
h
HP(VIa)
h
TB1
H
19)
TB1(a3+ b3-)
β+γ
TB2(a3- b3+)
H
TB2
c
h
HP(VIa)
h
TB1
H
20)
TB1(a3+b3-)
β+γ
TB2(a3+b3+)
h
HP(Ib)
H
H
TB2
c
TB1
21)
TB1(a3+b3-)
β+γ
TB2(a3+b3+)
HP(VIa)
h
H
H
TB2
c
TB1
22)
TB1(a3+b3-)
β+γ
TB2(a3-b3+)
TB2
h
H
c
TB1
23)
TB1(a3+b3-)
β+γ
TB2(a3-b3-)
TB2
H
h
c
TB1
25)
TB1(a3+b3+)
β+γ
TB2(a3+b3+)
TB1
H
TB2
c
26)
TB1(a3+b3-)
β+γ
TB2(a3+b3+)
TB1
H
TB2
c

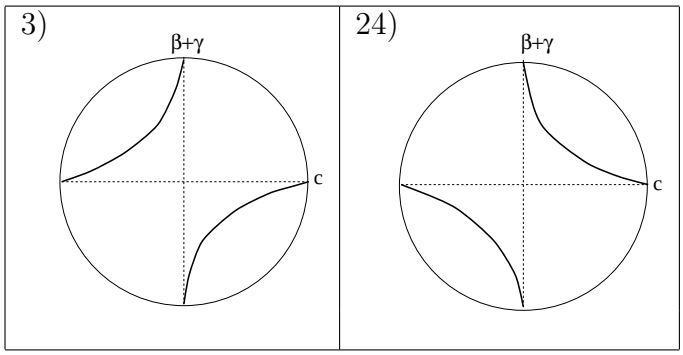


Figura 1.14: Para $a = -1$, $\gamma \neq -1, 0$, dibujo cualitativo en el plano $(c, \beta+\gamma)$ del conjunto parcial de bifurcaciones relativo a cada una de las zonas de la figura 1.13.

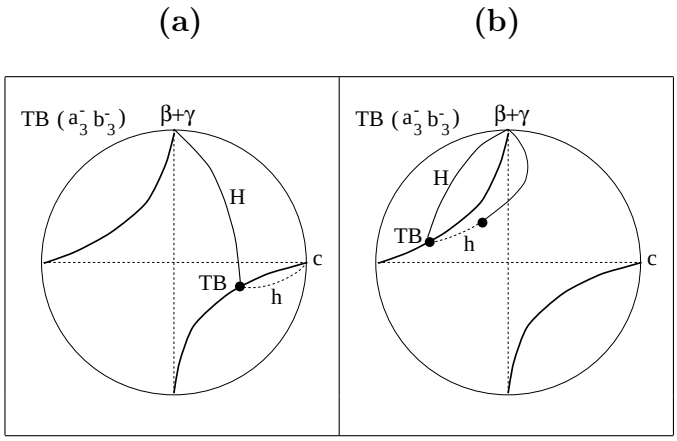


Figura 1.15: Para $a = -1$, $\gamma = -1$, dibujo cualitativo en el plano $(c, \beta + \gamma)$ del conjunto parcial de bifurcaciones cuando: (a) $\alpha < 0$. (b) $\alpha > 0$.

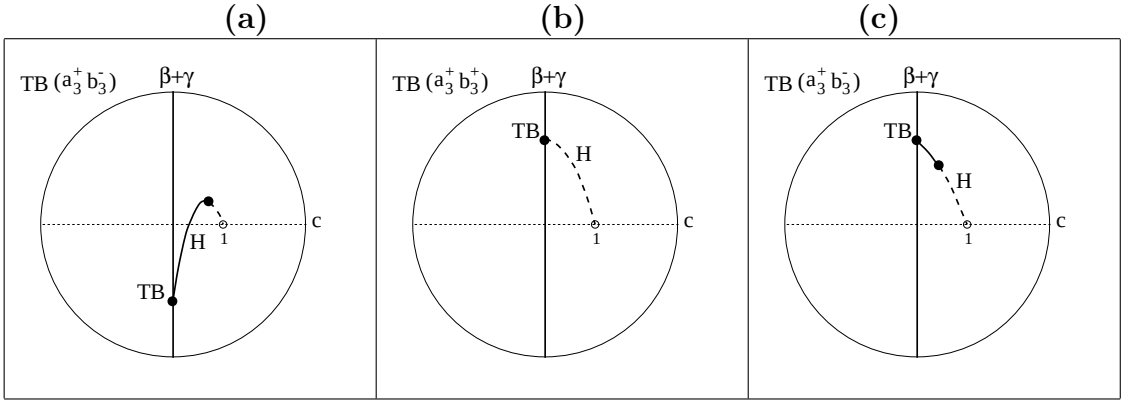


Figura 1.16: Para $a = -1$, $\gamma = 0$, dibujo cualitativo en el plano $(c, \beta + \gamma)$ del conjunto parcial de bifurcaciones cuando: (a) $\alpha < 0$. (b) $0 < \alpha < 1$. (c) $\alpha > 1$.

Capítulo 2

Degeneraciones No Lineales de la Bifurcación Hopf-pitchfork

2.1. Introducción

La teoría local de bifurcaciones de equilibrios puede ser considerada como un conjunto de métodos potentes para detectar, desde la situación más simple (estacionaria), diferentes y complicados comportamientos dinámicos.

La degeneración lineal Hopf-cero corresponde a la aparición simultánea de una Hopf y una bifurcación estática de los equilibrios. Es la singularidad tridimensional con la menor codimensión lineal, y su importancia es evidente por varias razones. Por un lado, comportamientos estacionarios e interacciones oscilatorias permiten un interesante comportamiento dinámico tridimensional: cuasiperiódico, aperiódico, homoclino, heteroclino, ... (ver los libros de Guckenheimer y Holmes (1997), Kuznetsov (2004) y Wiggins (2003)). Por otro lado, en una familia biparamétrica de campos vectoriales de dimensión mayor o igual que tres, un cruce transversal entre la curva de bifurcación de los equilibrios y la curva de bifurcación de Hopf debería ser genérico. Por esta razón esta degeneración lineal aparece frecuentemente en varios campos: modelos reacción-difusión, osciladores bioquímicos, modelos presa-depredador, sistemas hidrodinámicos, osciladores electrónicos autónomos, etc.

Algunos de estos sistemas físicos son modelados de tal forma que las ecuaciones que definen el sistema tienen la propiedad de la $\mathbb{Z}_2$-simetría, es decir, son invariantes al cambio de signo en las variables de estado. En estos sistemas, el origen es siempre un punto de equilibrio y las bifurcaciones locales más simples que este equilibrio puede experimentar son la bifurcación pitchfork (relacionada únicamente con equilibrios) y la bifurcación de Hopf (relacionada con comportamientos periódicos).

La forma normal es una herramienta muy importante en el ánalisis de esta degeneración lineal, centro organizador para los estados complejos que el correspondiente despliegue exhibe. La parte más engorrosa del análisis, de este tipo de degeneración lineal en las aplicaciones, está relacionada con la computación de los coeficientes de la forma normal.

La computación de la forma normal para la bifurcación Hopf-pitchfork es de gran importancia y tiene una doble utilidad. Por un lado su despliegue muestra varios tipos

de bifurcaciones que uno debería esperar encontrar y, por otra parte, podemos encontrar los valores de los parámetros donde algunas degeneraciones no lineales ocurren. Cerca de estos valores de los parámetros, se puede observar una dinámica más complicada. El estudio numérico, que nos permite observar esta dinámica compleja, sería muy difícil de realizar sin un análisis teórico previo.

Si consideramos un sistema tridimensional invariante al cambio de signo en las variables de estado y con un equilibrio aislado en el origen, que tiene una degeneración lineal dada por un autovalor cero y un par de autovalores imaginarios puros, su forma normal en coordenadas cilíndricas, viene dada por

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= a_1\rho^3 + a_2\rho z^2 + a_3\rho^5 + a_4\rho^3 z^2 + a_5\rho z^4 + \cdots, \\ \dot{z} &= b_1\rho^2 z + b_2 z^3 + b_3 z^5 + b_4\rho^2 z^3 + b_5\rho^4 z + \cdots, \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + c_1\rho^2 + c_2 z^2 + c_3\rho^4 + c_4\rho^2 z^2 + c_5 z^4 + \cdots, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde los puntos suspensivos corresponden a los términos de la forma normal de orden mayor que cinco. La estructura de la forma normal anterior viene determinada por la parte lineal del sistema tridimensional. No obstante, teniendo en cuenta los términos no lineales, se pueden obtener nuevas simplificaciones. El estudio de este problema, usando sólo $\mathcal{C}^\infty$-conjugación, ha sido realizado por Ushiki (1984) y Gamero (1990), llegando únicamente a órdenes bajos. El segundo autor proporciona además un procedimiento computacionalmente útil para obtener los coeficientes de la forma normal. Posteriormente, en el trabajo de Algaba, Freire y Gamero (1998) se demuestra que si los coeficientes de los términos de tercer orden en la forma normal (que sólo dependen de los términos de tercer orden en el sistema inicial) cumplen $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ y $a_1 \neq b_1$, entonces usando $\mathcal{C}^\infty$-conjugación se tiene que $a_4 = a_5 = b_5 = c_4 = c_5 = 0$. Reparametrizando también el tiempo, se pueden obtener más simplificaciones. Así, utilizando $\mathcal{C}^\infty$-equivalencia, se pueden anular todos los términos anteriores y también a_3, b_4 y c_3. Esta forma normal más simple, se llama forma hipernormal. Truncada a orden cinco la forma hipernormal es

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= a_1\rho^3 + a_2\rho z^2, \\ \dot{z} &= b_1\rho^2 z + b_2 z^3 + b_3 z^5, \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + c_1\rho^2 + c_2 z^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Esta forma hipernormal tiene simetría de rotación con respecto al eje Z, lo cual permite, usando coordenadas cilíndricas, desacoplar la componente azimutal y reducir el análisis a un campo vectorial plano $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ simétrico. El análisis del despliegue del campo vectorial plano, cortado a orden cinco

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \mu_1\rho + a_1\rho^3 + a_2\rho z^2, \\ \dot{z} &= \mu_2 z + b_1\rho^2 z + b_2 z^3 + b_3 z^5, \end{aligned} \tag{2.3}$$

ha sido realizado por varios autores, asumiendo que los coeficientes de (2.3) no se anulan y que $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ (ver Guckenheimer y Holmes (1997) y sus referencias). Este flujo bidimensional se puede ver como una aproximación de la aplicación local de Poincaré del sistema tridimensional, cuando recuperamos la componente azimutal, ya que parte de

la información obtenida en el estudio del sistema plano puede ser trasladada fácilmente al flujo tridimensional.

En este capítulo vamos a mostrar algunos aspectos asociados con las bifurcaciones que presenta la ecuación de Chua en un entorno de una degeneración lineal Hopf-pitchfork, y justificaremos los resultados expuestos en la subsección 1.5.2 del capítulo 1. En concreto, varios fenómenos relacionados con movimientos periódicos y cuasiperiódicos pueden ser analíticamente explicados por el estudio que llevaremos a cabo.

2.2. Cálculo de la forma normal

Consideramos nuevamente las ecuaciones (1.1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - ax^3 - cx), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z, \end{aligned}$$

con $a = \pm 1,\ \alpha \neq 0,\ \beta,\ \gamma,\ c \in \mathbb{R}$.

Debido a la $\mathbb{Z}_2$-simetría que tienen las ecuaciones (1.1), el origen es siempre un punto de equilibrio. Si denotamos por $\Lambda = \dfrac{1}{(\gamma+1)^3 + \alpha(2\gamma+1)}$, la matriz de la linealización en el origen

$$M(\alpha, \beta, \gamma, c) = \begin{pmatrix} -\alpha c & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

tiene por autovalores 0, $\pm\omega_0 i$, con $\omega_0^2 = -\dfrac{1}{\Lambda(\gamma+1)}$, para los valores de los parámetros

$$\beta = \beta_c = -\frac{\gamma\,(\alpha+\gamma+1)}{\gamma+1}, \qquad c = c_c = -\frac{\gamma+1}{\alpha}, \tag{2.5}$$

siempre que $\Lambda\,(\gamma+1) < 0$ (por ejemplo, cuando $\gamma \approx 0$, esta desigualdad se cumple cuando $\alpha < -\dfrac{(\gamma+1)^3}{2\gamma+1} \approx -1$), y en consecuencia se experimenta una bifurcación Hopf-pitchfork.

Para estudiar la degeneración lineal de esta bifurcación Hopf-pitchfork, al ser de codimensión dos, tomaremos como parámetros de bifurcación β y c, y fijaremos los restantes parámetros a, α y γ. Para valores $\beta \approx \beta_c$, $c \approx c_c$, la matriz de la linealización en el origen (2.4) es semejante a

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mu_1(\beta,c) & -\omega(\beta,c) & \\ \omega(\beta,c) & \mu_1(\beta,c) & \\ \hline & & \mu_2(\beta,c) \end{array}\right),$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_1(\beta,c) &= \tfrac{1}{2}\Lambda(\gamma+1)^2\,(\beta-\beta_c) - \tfrac{1}{2}\alpha(1-\Lambda\alpha\gamma)\,(c-c_c) + \mathcal{O}\left(|\beta-\beta_c, c-c_c|^2\right), \\ \omega(\beta,c) &= \omega_0 + \mathcal{O}\left(|\beta-\beta_c, c-c_c|\right), \\ \mu_2(\beta,c) &= -\Lambda(\gamma+1)^2\,(\beta-\beta_c) - \Lambda\gamma\alpha^2\,(c-c_c) + \mathcal{O}\left(|\beta-\beta_c, c-c_c|^2\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

De las expresiones anteriores se deduce que el cambio de parámetros (β, c) por (μ_1, μ_2) es un difeomorfismo, ya que

$$\left|\frac{\partial(\mu_1,\mu_2)}{\partial(\beta,c)}\right|_{\beta=\beta_c, c=c_c} = -\frac{\alpha\Lambda(\gamma+1)^2}{2} \neq 0,$$

por lo que se cumple la condición de transversalidad.

Consideremos el sistema (1.1), con los valores críticos de los parámetros

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\gamma+1)x + \alpha y - \alpha a x^3, \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= \frac{\gamma(\alpha+\gamma+1)}{\gamma+1} y - \gamma z. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Realizando el cambio lineal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{(\gamma+1)\left(\omega_0^2+(\gamma+1)^2\right)}{2\gamma+1} & \omega_0^2+(\gamma+1)^2 \\ \omega_0 & -(\gamma+1) & 2\gamma+1 \\ -\omega_0\gamma & \dfrac{\gamma\left(\gamma^2+\gamma-\omega_0^2\right)}{2\gamma+1} & -(\omega_0^2+\gamma^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ &\quad -a\alpha \left(\left(-\frac{(\gamma+1)\left(\omega_0^2+(\gamma+1)^2\right)}{2\gamma+1} \right) Y + \left(\omega_0^2+(\gamma+1)^2\right) Z \right)^3 P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A este campo vectorial le podemos aplicar el algoritmo de formas normales desarrollado en Algaba, Freire y Gamero (1998), obteniéndose la siguiente forma normal a orden 3 en coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= a_1\rho^3 + a_2\rho z^2, \\ \dot{z} &= b_1\rho^2 z + b_2 z^3, \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + c_1\rho^2 + c_2 z^2, \end{aligned}$$

donde los coeficientes son

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-3a\alpha^3\left(\alpha+(\gamma+1)^2\right)(2\gamma+1)(\alpha+\gamma+1)}{8\omega_0^2(\gamma+1)}, \\ a_2 &= \frac{3a\alpha^3\left(\alpha+(\gamma+1)^2\right)}{2\omega_0^2}, \\ b_1 &= \frac{-3a\alpha^4\gamma(2\gamma+1)(\alpha+\gamma+1)}{2\omega_0^2(\gamma+1)^2}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$
\begin{aligned}
b_2 &= \frac{a\alpha^4\gamma}{\omega_0^2(\gamma+1)}, \\
c_1 &= \frac{-3a\alpha^3(2\gamma+1)(\alpha+\gamma+1)}{8\omega_0}, \\
c_2 &= \frac{3a\alpha^3(\gamma+1)}{2\omega_0}.
\end{aligned}
$$

Incluyendo ahora los parámetros del despliegue, podemos poner en correspondencia las ecuaciones (1.1) (para $\beta \approx \beta_c$, $c \approx c_c$,), con el siguiente despliegue de la forma normal anterior

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho} &= \rho\left(\mu_1 + a_1\rho^2 + a_2 z^2\right), \\
\dot{z} &= z\left(\mu_2 + b_1\rho^2 + b_2 z^2\right), \\
\dot{\theta} &= \omega_0 + c_1\rho^2 + c_2 z^2,
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

donde μ_1 y μ_2 vienen dados, a primer orden, en (2.6).

El análisis de los signos de a_1, a_2, b_1 y b_2 nos permite clasificar el despliegue anterior. Como $a \neq 0$ en las ecuaciones (1.1), podemos inferir que el despliegue (2.9) corresponde a los casos Ib o VIa (usando la nomenclatura de Guckenheimer y Holmes (1997), [Sec. 7.5]). La situación está esquematizada en la figura 2.1, donde hemos dibujado el plano de parámetros (γ, α) dividido en varias regiones.

Si elegimos valores de los parámetros correspondientes a las regiones de color oro en la figura 2.1, estaremos en el caso Ib. Entonces, si tomamos $\beta \approx \beta_c$, $c \approx c_c$, únicamente encontraremos una bifurcación pitchfork del origen, una bifurcación de Hopf también del origen, otra bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales (los cuales surgieron en la bifurcación pitchfork del origen anterior) y una bifurcación pitchfork de órbitas periódicas que nacen de la bifurcación de Hopf.

Si los parámetros α y γ son seleccionados en la zona de color amarillo en la figura 2.1, el despliegue (2.9) nos lleva al caso VIa. Ahora, la situación es más complicada, ya que además de las bifurcaciones anteriores están presentes una bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas (donde un toro invariante aparece) y varios tipos de conexiones globales.

Las zonas coloreadas, que es donde tiene lugar una bifurcación Hopf-pitchfork no degenerada, están separadas por diferentes curvas. A saber:

TZ $\equiv (\gamma+1)^3 + \alpha(2\gamma+1) = 0$.

Para los valores de esta curva, se tiene una bifurcación del origen correspondiente a un autovalor triple cero.

D$_1 \equiv \gamma + 1 = 0$.

En este caso deja de existir la bifurcación Hopf-pitchfork, a la izquierda de dicha recta si $\alpha > 0$ y a la derecha si $\alpha < 0$, porque ω_0^2 pasa de $+\infty$ a $-\infty$.

D$_2 \equiv \gamma = 0$, $\alpha < -1$.

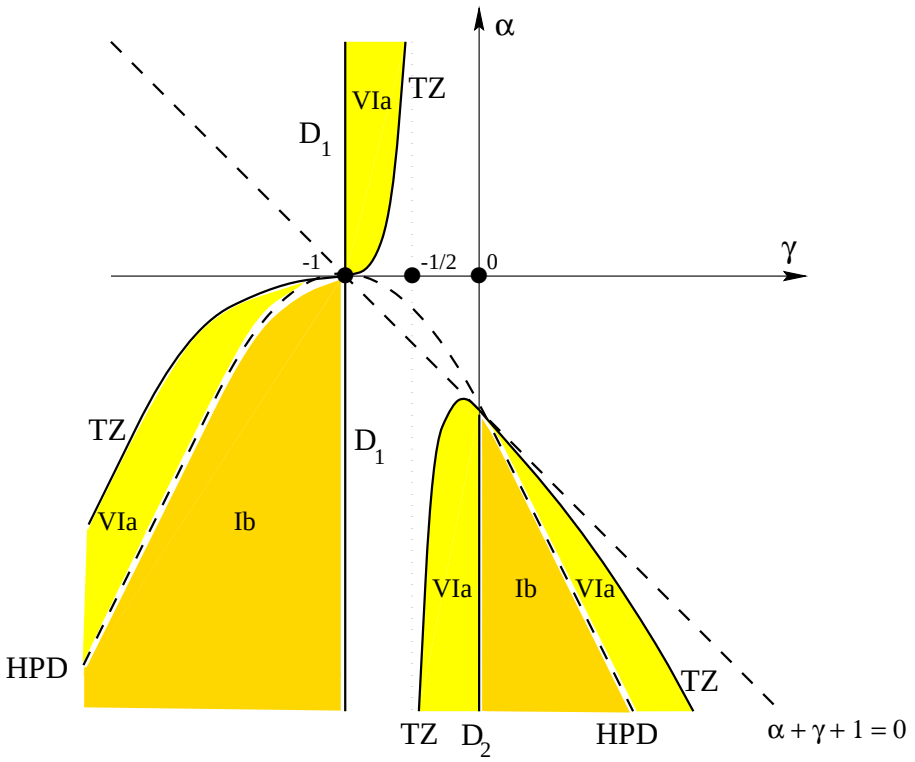


Figura 2.1: Diferentes tipos para la bifurcación Hopf-pitchfork en las ecuaciones (1.1) siguiendo la clasificación de Guckenheimer & Holmes.

Sobre esta recta se produce una degeneración, ya que $\beta_c = 0$, y por tanto la tercera ecuación de (1.1) se convierte en $\dot{z} = 0$, no correspondiendo a un sistema tridimensional.

HPD $\equiv \alpha + (\gamma + 1)^2 = 0$, $\gamma > 0$ ó $\gamma < -1$.

Estos valores corresponden a una degeneración no lineal, donde los coeficientes de la forma normal a orden tres a_1 y a_2 se anulan.

En lo que sigue vamos a realizar el análisis de esta última degeneración, de codimensión alta, para encontrar nuevas bifurcaciones. Por otra parte el estudio numérico de esta degeneración, que llevaremos a cabo posteriormente, nos confirmará las bifurcaciones correspondientes a los casos no degenerados Ib y VIa y nos detectará nuevas bifurcaciones.

Hay tres degeneraciones diferentes no lineales de la bifurcación Hopf-pitchfork, dos de ellas se deben a la anulación de los coeficientes a_1, a_2 y la tercera ocurre cuando los coeficientes de la forma normal satisfacen la relación $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. El estudio de estas tres degeneraciones se ha llevado a cabo en los trabajos de Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*a*), (2000), (1999b), respectivamente. Como se pone de manifiesto en los trabajos citados, además de las bifurcaciones mencionadas anteriormente se debe esperar la aparición de bifurcaciones de órbitas periódicas: silla-nodo de órbitas periódicas, órbitas periódicas no hiperbólicas asociadas a un multiplicador de Floquet doble +1,

bifurcaciones de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas, degeneraciones de bifurcaciones pitchfork de órbitas periódicas, y conexiones globales relacionadas con equilibrios y órbitas periódicas.

En el caso que nos ocupa, las ecuaciones (1.1), las tres degeneraciones anteriores se presentan al mismo tiempo sobre la curva **HPD**. Queremos averiguar cuáles de estas bifurcaciones persisten en este caso múltiplemente degenerado.

2.3. Análisis de los casos degenerados

Para estudiar la degeneración de la bifurcación Hopf-pitchfork correspondiente a nuestro caso, comenzamos por seleccionar los tres parámetros que nos permitan describirla. Estos parámetros serán α, β y c mientras que los restantes parámetros a y γ permanecerán fijos (con $\gamma > 0$ o $\gamma < -1$). Estamos interesados en las bifurcaciones cerca de los valores críticos $\alpha \approx \alpha_c = -(\gamma+1)^2$, $\beta \approx \beta_c$ y $c \approx c_c$, para lo cual tendremos que obtener la forma normal a orden cinco en dichos valores críticos. Para facilitar nuestro trabajo es muy importante obtener la forma normal más simple, por lo que siguiendo las ideas desarrolladas en el trabajo de Algaba, Freire y Gamero (1998) usaremos $\mathcal{C}^\infty$-equivalencia, es decir, una transformación en las variables de estado y una reparametrización en el tiempo.

Dado que $a \neq 0$ y asumiendo que $\gamma \neq -1, -1/2, 0$, y aplicando el algoritmo anterior obtenemos, en los valores $\alpha = \alpha_c$, $\beta = \beta_c$ y $c = c_c$, la siguiente forma hipernormal a orden cinco

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho^3(a_3^*\rho^2 + a_4^* z^2), \\ \dot{z} &= z(b_1^*\rho^2 + b_2^* z^2), \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + \mathcal{O}(|\rho, z|), \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde

$$\begin{aligned} a_3^* &= \frac{-5a^2\gamma(2\gamma+1)^2(\gamma+1)^{12}}{16}, \\ a_4^* &= \frac{27a^2(2\gamma+1)(\gamma+1)^{12}}{8}, \\ b_1^* &= \frac{3a\gamma(2\gamma+1)(\gamma+1)^6}{2}, \\ b_2^* &= a(\gamma+1)^6. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Para nuestro análisis nos basaremos en la $\mathbb{Z}_2$-simetría del sistema plano que se obtiene al eliminar la componente angular (que está desacoplada a cualquier orden)

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho^3(a_3^*\rho^2 + a_4^* z^2), \\ \dot{z} &= z(b_1^*\rho^2 + b_2^* z^2). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Primero veremos que, genéricamente, los términos de orden alto despreciados en la forma hipernormal de orden cinco no son esenciales en el comportamiento dinámico de la singularidad. Posteriormente analizaremos el despliegue de la singularidad plana y mostraremos las consecuencias en el sistema tridimensional.

2.3.1. Determinación de la singularidad

Nuestra primera tarea en el análisis del caso degenerado será estudiar la determinación de la singularidad, para así asegurar que los términos de orden alto que hemos despreciado en la forma hipernormal a orden cinco no influyen en el comportamiento dinámico de la singularidad.

Para ello consideramos el campo

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= a_3^*\rho^5 + a_4^*\rho^3 z^2 + \rho P(\rho^2, z^2),\\ \dot{z} &= b_1^*\rho^2 z + b_2^* z^3 + zQ(\rho^2, z^2),\end{aligned}$$

donde $P(\rho, z) = \mathcal{O}(\mid \rho, z \mid^3)$, $Q(\rho, z) = \mathcal{O}(\mid \rho, z \mid^3)$, es decir, hemos incluido perturbaciones $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$-simétricas de órdenes superiores al quinto. Los ejes ρ y z son variedades invariantes, por lo tanto basta estudiarlo para $\rho, z \geq 0$. Realizando el cambio

$$R = \rho^2, \qquad Z = z^2, \qquad T = 2t, \tag{2.13}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{R} &= a_3^* R^3 + a_4^* R^2 Z + RP(R, Z),\\ \dot{Z} &= b_1^* RZ + b_2^* Z^2 + ZQ(R, Z).\end{aligned} \tag{2.14}$$

Para estudiar la dinámica en la zona $R, Z > 0$, en un entorno del origen, realizamos un *blow-up* direccional (ver Andronov, Leontovich, Gordon y Maier (1970), Dumortier (1991)) dado por: $R = r\cos\phi,\ Z = r\sin\phi$. Después de algunos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r\left(b_1^*\sin^2\phi\cos\phi + b_2^*\sin^3\phi\right) + r^2\left(a_3^*\cos^4\phi + a_4^*\sin\phi\cos^3\phi\right) + \mathcal{O}(r^3),\\ \dot{\phi} &= \left(b_1^*\sin\phi\cos^2\phi + b_2^*\sin^2\phi\cos\phi\right) - r\left(a_3^*\sin\phi\cos^3\phi + a_4^*\sin^2\phi\cos^2\phi\right) + \mathcal{O}(r^2).\end{aligned}$$

Los equilibrios de este sistema, sobre el eje ϕ, son:

(i) $r = 0, \phi = 0$,

(ii) $r = 0, \phi = \pi/2$,

(iii) $r = 0, \phi = \phi_0$, donde $\phi_0 \in (0, \pi/2)$ cumple que $\tan\phi_0 = -b_1^*/b_2^*$. Notar que este último equilibrio tiene sentido únicamente cuando b_1^* y b_2^* tienen signos opuestos.

Estudiamos cada uno de ellos.

(i) La matriz de la linealización en el equilibrio $r = 0, \phi = 0$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_1^* \end{pmatrix}.$$

Asumiendo que $b_1^* \neq 0$, tenemos una variedad de centro unidimensional dada por $\phi = \Phi(r)$ (con $\Phi(0) = 0$), y el sistema reducido sobre la variedad de centro viene dado por $\dot{r} = a_3^* r^2 + \mathcal{O}(r^3)$, en consecuencia se presenta una bifurcación silla-nodo que está determinada bajo la hipótesis de ser $a_3^* \neq 0$.

(ii) Con respecto al equilibrio $r = 0, \phi = \pi/2$, la matriz de la linealización es

$$\begin{pmatrix} b_2^* & 0 \\ 0 & -b_2^* \end{pmatrix}.$$

En consecuencia el equilibrio es un punto de silla hiperbólico si $b_2^* \neq 0$.

(iii) Finalmente, consideramos que $b_1^* b_2^* < 0$ y analizamos el equilibrio $r = 0, \phi = \phi_0$. Después de algunos cálculos, la matriz de la linealización en este equilibrio se puede escribir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cdots & -b_1^* \cos^3\phi_0 \left(b_1^{*2} + b_2^{*2}\right)/b_2^{*2} \end{pmatrix}.$$

En este caso también tenemos una variedad de centro unidimensional dada por $\phi = \tilde{\Phi}(r)$ (con $\tilde{\Phi}(0) = \phi_0$), y el sistema reducido sobre ella es $\dot{r} = \dfrac{a_3^* b_2^* - a_4^* b_1^*}{b_2^*} r^2 + \mathcal{O}(r^3)$. Por tanto, si asumimos que $a_3^* b_2^* \neq a_4^* b_1^*$, el equilibrio $r = 0, \phi = \phi_0$ está también determinado.

En resumen, para garantizar que los términos de orden alto no tienen influencia, se debe cumplir que $a_3^* \neq 0$, $b_1^* \neq 0$, $b_2^* \neq 0$, y también que $a_3^* b_2^* \neq a_4^* b_1^*$ si $b_1^* b_2^* < 0$.

Es sencillo ver que todas estas condiciones se cumplen para las ecuaciones (1.1), siempre que $\gamma \neq -1, -1/2, 0$.

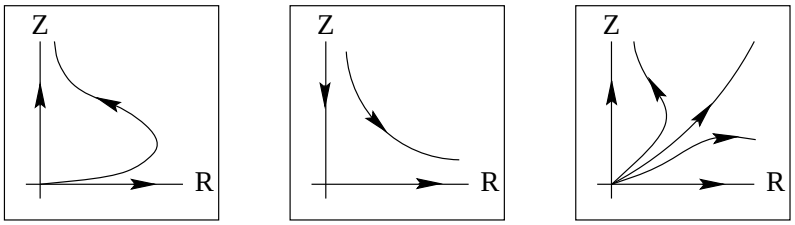
Reuniendo toda la información anterior, podemos hacer una clasificación de los diferentes tipos topológicos para el sistema (2.12), el cual es mostrado en la figura 2.2 (cualitativamente, son los mismos que los del sistema (2.14)). Para disminuir el número de casos, hemos utilizado la propiedad de que el sistema (2.12) es invariante al cambio $(t, a_3^*, a_4^*, b_1^*, b_2^*) \leftrightarrow (-t, -a_3^*, -a_4^*, -b_1^*, -b_2^*)$.

2.3.2. Análisis del despliegue plano

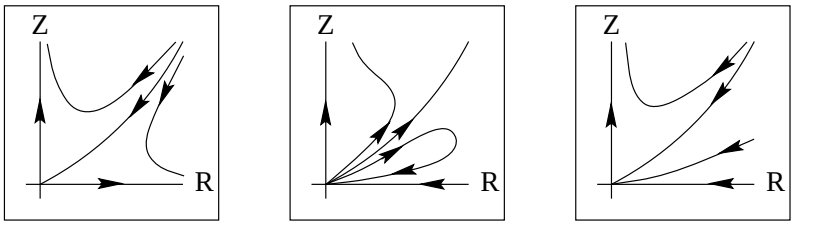
Ahora vamos a poner en correspondencia las ecuaciones (1.1) con $c \approx c_c$, $\beta \approx \beta_c$ y $\alpha \approx \alpha_c$, con un despliegue apropiado del sistema (2.12).

Tomaremos el siguiente despliegue

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\mu_1 + \mu_3\rho^2 + \mu_4 z^2 + a_3^*\rho^4 + a_4^*\rho^2 z^2), \\ \dot{z} &= z(\mu_2 + b_1^*\rho^2 + b_2^* z^2), \end{aligned} \tag{2.15}$$



$a_3^* > 0,\ b_1^* > 0,\ b_2^* > 0.$ $a_3^* > 0,\ b_1^* < 0,\ b_2^* < 0.$ $a_3^* > 0,\ b_1^* < 0,\ b_2^* > 0,\ a_3^*\, b_2^* - a_4^*\, b_1^* > 0.$



$a_3^* > 0,\ b_1^* < 0,\ b_2^* > 0,\ a_3^*\, b_2^* - a_4^*\, b_1^* < 0.$ $a_3^* < 0,\ b_1^* < 0,\ b_2^* > 0,\ a_3^*\, b_2^* - a_4^*\, b_1^* > 0.$ $a_3^* < 0,\ b_1^* < 0,\ b_2^* > 0,\ a_3^*\, b_2^* - a_4^*\, b_1^* < 0.$

Figura 2.2: Tipos topológicos del sistema plano (2.14).

donde μ_1, μ_2 están dados en (2.6), $\mu_3 = a_1 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|)$, $\mu_4 = a_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|)$ (a_1, a_2 aparecen en (2.8)), y finalmente a_3^*, a_4^*, b_1^*, b_2^* están dados en (2.11). Como μ_3 y μ_4 se anulan simultáneamente, cuando el parámetro α toma el valor crítico, nuestro estudio triparamétrico en las ecuaciones (1.1) lo obtendremos como un corte en el espacio de los cuatro parámetros presentes en el análisis de (2.15).

Como primer paso para el estudio de (2.15), realizamos el cambio (2.13), y a continuación escalamos mediante:

$$R \to \left|\frac{a_3^*}{b_1^*}\right| R, \quad Z \to \frac{|a_3^* b_2^*|}{{b_1^*}^2} Z, \quad t \to \operatorname{sgn}(b_2^*) \frac{{b_1^*}^2}{|a_3^*|} t,$$

(notemos que los ejes y el primer cuadrante permanecen invariantes). De esta forma obtenemos el sistema plano

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 R + \varepsilon_4 Z + A_3 R^2 + A_4 R Z\right), \\ \dot{Z} &= Z\left(\varepsilon_2 + B R + Z\right), \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde

$$\varepsilon_1 = \frac{\operatorname{sgn}(b_2^*)|a_3^*|}{(b_1^*)^2}\mu_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{\operatorname{sgn}(b_2^*)|a_3^*|}{(b_1^*)^2}\mu_2, \quad \varepsilon_3 = \frac{\operatorname{sgn}(b_2^*)}{|b_1^*|}\mu_3, \quad \varepsilon_4 = \frac{1}{b_2^*}\mu_4,$$

$$A_3 = \operatorname{sgn}(a_3^* b_2^*), \quad A_4 = \frac{a_4^*|b_1^*|}{|a_3^*| b_2^*}, \quad B = \operatorname{sgn}(b_1^* b_2^*).$$

Recordemos que para la determinación de la singularidad es necesario que sea $a_3^* \neq 0$, $b_1^* \neq 0$, $b_2^* \neq 0$ y $a_3^* b_2^* \neq a_4^* b_1^*$ cuando $b_1^* b_2^* < 0$. Por lo tanto, al analizar las diferentes posibilidades que surgen del sistema (2.16) supondremos que $A_3 \neq 0$, $B \neq 0$ y $A_3 + A_4 \neq 0$ cuando $B = -1$. En particular estas condiciones se satisfacen para los valores que toman estos coeficientes en las ecuaciones (1.1)

$$A_3 = \operatorname{sgn}(-a\gamma), \quad A_4 = \operatorname{sgn}(a(2\gamma+1))\frac{81}{5}, \quad B = \operatorname{sgn}(\gamma(2\gamma+1)).$$

Comenzamos enumerando las bifurcaciones locales del mismo. En el análisis que sigue rescataremos las bifurcaciones presentes en los despliegues de los casos no degenerados de codimensión dos y detectaremos nuevas bifurcaciones.

Comenzamos con el estudio, en un entorno del origen de los parámetros y de las variables de estado, de los equilibrios del sistema:

* El origen $(0, 0)$.

* Equilibrios situados sobre el semieje positivo del eje R: $(R_\pm, 0)$, donde

$$R_\pm = \frac{-\varepsilon_3 \pm \sqrt{\varepsilon_3^2 - 4A_3\varepsilon_1}}{2A_3}.$$

* Equilibrio situado sobre el semieje positivo del eje Z: $(0, Z_0) = (0, -\varepsilon_2)$.

* Equilibrios situados en el primer cuadrante $R > 0$, $Z > 0$: $(R^\pm, Z^\pm)$, donde

$$\begin{aligned} R^\pm &= \frac{B\varepsilon_4 - \varepsilon_3 + A_4\varepsilon_2 \pm \sqrt{(B\varepsilon_4 - \varepsilon_3 + A_4\varepsilon_2)^2 - 4(A_3 - A_4B)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_4)}}{2(A_3 - A_4B)}, \\ Z^\pm &= -\varepsilon_2 - BR^\pm, \end{aligned}$$

los cuales son la solución del sistema algebraico

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 + \varepsilon_3 R + \varepsilon_4 Z + A_3 R^2 + A_4 RZ &= 0, \\ \varepsilon_2 + BR + Z &= 0. \end{aligned}$$

En el caso particular $B = 1$, $A_3 - A_4 = 0$, el sistema anterior adopta la forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_4 - (A_3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4)R &= 0, \\ \varepsilon_2 + R + Z &= 0, \end{aligned}$$

y por tanto sólo uno de los dos equilibrios anteriores permanece en un entorno del origen, a saber

$$R^* = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_4}{A_3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4}, \quad Z^* = -\varepsilon_2 - R^*,$$

siempre que $A_3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \neq 0$.

Resumimos a continuación las bifurcaciones que presentan estos equilibrios.

- Hay una bifurcación transcrítica, no degenerada, del origen (codimensión uno) en

$$\mathsf{T}_1 \equiv \{\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 \neq 0, \quad \varepsilon_3 \neq 0\}\,.$$

  En efecto, en el sistema (2.16), dos equilibrios (el origen y uno de los equilibrios situados sobre el semieje positivo del eje R) chocan y cambian su estabilidad. Hacemos notar que, como sólo debemos considerar la dinámica en el primer cuadrante, esta bifurcación da lugar a un nuevo equilibrio sobre el semieje positivo del eje R. De la expresión de $R_\pm$, se deduce que si tomamos $\varepsilon_3 > 0$, emerge el equilibrio $(R_+, 0)$, y si consideramos $\varepsilon_3 < 0$, es $(R_-, 0)$ el equilibrio que aparece.

  Además, trasladando el equilibrio $(R_\pm, 0)$ al origen, mediante el cambio $\widetilde{R} = R - R_\pm$, $\widetilde{Z} = Z$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{\widetilde{R}} &= (\widetilde{R} + R_\pm)\left((\varepsilon_3 + 2A_3R_\pm)\widetilde{R} + (\varepsilon_4 + A_4R_\pm)\widetilde{Z} + A_4\widetilde{R}\widetilde{Z} + A_3\widetilde{R}^2\right), \\
\dot{\widetilde{Z}} &= \widetilde{Z}(\varepsilon_2 + BR_\pm + B\widetilde{R} + \widetilde{Z}).
\end{aligned}$$

  La matriz de la linealización en el origen es

$$\begin{pmatrix} R_\pm(\varepsilon_3 + 2A_3R_\pm) & R_\pm(\varepsilon_4 + A_4R_\pm) \\ 0 & \varepsilon_2 + BR_\pm \end{pmatrix},$$

  y su determinante $\mathsf{Det} = R_\pm(\varepsilon_3 + 2A_3R_\pm)(\varepsilon_2 + BR_\pm)$. Sustituyendo en el primer paréntesis $R_\pm$ por su valor, se obtiene $\mathsf{Det} = R_\pm(\pm\sqrt{\varepsilon_3^2 - 4A_3\varepsilon_1})(\varepsilon_2 + BR_\pm)$.

  En consecuencia, si $\varepsilon_3 > 0$, el equilibrio $(R_+, 0)$ es un equilibrio hiperbólico de tipo nodo o foco cuando $(\varepsilon_2 + BR_+) > 0$ y de tipo silla cuando $(\varepsilon_2 + BR_+) < 0$; mientras que si $\varepsilon_3 < 0$, el equilibrio $(R_-, 0)$ es un equilibrio hiperbólico de tipo silla cuando $(\varepsilon_2 + BR_-) > 0$ y nodo o foco en caso contrario.

- Hay una bifurcación transcrítica, degenerada, del origen (codimensión dos) en

$$\mathsf{DT}_1 \equiv \{\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_2 \neq 0\}\,.$$

  Ahora, tres equilibrios chocan y cambian su estabilidad. Descartando la dinámica fuera del primer cuadrante, se produce un cambio en la estabilidad del equilibrio en el origen, y la aparición de uno o dos equilibrios sobre el semieje positivo del eje R.

  Desde este punto del espacio de parámetros, DT_1, emerge una curva de bifurcación silla-nodo de equilibrios. La ecuación de esta curva se obtiene de anular el radicando en la coordenada $R_\pm$ para el equilibrio $(R_\pm, 0)$, resultando

$$\mathsf{SN} \equiv \left\{\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_3^2}{4A_3},\ \varepsilon_3 A_3 < 0\right\}.$$

  En esta curva, los equilibrios $(R_+, 0)$ y $(R_-, 0)$ colapsan.

- Hay otra bifurcación transcrítica, no degenerada, del origen (codimensión uno) en

$$\mathsf{T}_2 \equiv \{\varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_1 \neq 0\}\,.$$

  Para este valor del parámetro, el equilibrio del origen cambia su estabilidad y, para $\varepsilon_2 < 0$, un nuevo equilibrio $(0, Z_0)$ surge sobre el semieje positivo del eje Z. Si trasladamos el equilibrio $(0, Z_0)$ al origen, mediante el cambio $\widetilde{R} = R,\ \widetilde{Z} = Z - Z_0$, obtenemos como matriz de la linealización en el origen

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_4 Z_0 & 0 \\ BZ_0 & Z_0 \end{pmatrix},$$

  cuyo determinante es $\mathsf{Det} = Z_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_4 Z_0)$. Sustituyendo Z_0 por su valor, se obtiene $\mathsf{Det} = -\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_4)$. En consecuencia, como $\varepsilon_2 < 0$, el equilibrio $(0, Z_0)$ es un equilibrio hiperbólico de tipo silla cuando $\varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_4 < 0$ y de tipo nodo o foco cuando $\varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_4 > 0$.

- En los restantes casos el origen es un equilibrio hiperbólico. En concreto es un silla cuando $\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0$ y un nodo cuando $\varepsilon_1\varepsilon_2 > 0$ (estable si $\varepsilon_1 < 0$ e inestable si $\varepsilon_1 > 0$).

- Hay cuatro puntos donde tiene lugar una degeneración de codimensión dos del campo vectorial plano con $\mathbb{Z}_2$-simetría (2.16)

$$\mathsf{HP} \equiv \{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3, \varepsilon_4 \neq 0\}\,.$$

- El equilibrio $(0, Z_0)$ experimenta una bifurcación transcrítica, no degenerada, en

$$\mathsf{T}_3 \equiv \left\{\varepsilon_1 = \varepsilon_2\varepsilon_4, \quad \varepsilon_2 < 0, \quad \varepsilon_2 \neq \frac{\varepsilon_3 - B\varepsilon_4}{A_4}\right\},$$

  surgiendo un nuevo equilibrio $(R^{\pm}, Z^{\pm})$ en el primer cuadrante $R > 0$, $Z > 0$.

  En efecto, igualando la primera coordenada de los equilibrios $(0, Z_0)$ y $(R^{\pm}, Z^{\pm})$, es decir, anulando el numerador de $R^{\pm}$, y teniendo en cuenta que $A_3 - A_4 B \neq 0$, se obtiene la curva donde tiene lugar la degeneración.

  De la expresión de $R^{\pm}$, se deduce que si $A_4\varepsilon_2 < \varepsilon_3 - B\varepsilon_4$, emerge el equilibrio (R^+, Z^+), fuera de los ejes, en el primer cuadrante. Si $A_4\varepsilon_2 > \varepsilon_3 - B\varepsilon_4$, es el equilibrio (R^-, Z^-) el que surge, fuera de los ejes, en el primer cuadrante.

  Además, trasladando el equilibrio $(R^{\pm}, Z^{\pm})$ al origen, mediante el cambio $\widetilde{R} = R - R^{\pm},\ \widetilde{Z} = Z - Z^{\pm}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{R}} &= (\widetilde{R} + R^{\pm})\left((\varepsilon_3 + 2A_3R^{\pm} + A_4Z^{\pm})\widetilde{R} + (\varepsilon_4 + A_4R^{\pm})\widetilde{Z} + A_4\widetilde{R}\widetilde{Z} + A_3\widetilde{R}^2\right), \\ \dot{\widetilde{Z}} &= (\widetilde{Z} + Z^{\pm})(B\widetilde{R} + \widetilde{Z}). \end{aligned}$$

La matriz de la linealización en el origen es

$$\begin{pmatrix} R^{\pm}(\varepsilon_3 + 2A_3R^{\pm} + A_4Z^{\pm}) & R^{\pm}(\varepsilon_4 + A_4R^{\pm}) \\ BZ^{\pm} & Z^{\pm} \end{pmatrix},$$

con traza $\mathsf{Tr} = 2A_3(R^{\pm})^2 + (\varepsilon_3 + A_4Z^{\pm})R^{\pm} + Z^{\pm}$ y determinante $\mathsf{Det} = R^{\pm}Z^{\pm}(\varepsilon_3 - B\varepsilon_4 + (2A_3 - A_4B)R^{\pm} + A_4Z^{\pm})$. Sustituyendo en la expresión del determinante el valor de $Z^{\pm} = -\varepsilon_2 - BR^{\pm}$ del interior del paréntesis, se obtiene, después de operar $\mathsf{Det} = R^{\pm}Z^{\pm}\left(\pm\sqrt{(B\varepsilon_4 - \varepsilon_3 + A_4\varepsilon_2)^2 - 4(A_3 - A_4B)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_4)}\right)$.

En consecuencia el equilibrio (R^+, Z^+) es un equilibrio hiperbólico de tipo nodo o foco, mientras que (R^-, Z^-) es un equilibrio hiperbólico de tipo silla.

En el caso particular $B = 1$, $A_3 - A_4 = 0$ únicamente surge un equilibrio hiperbólico en el primer cuadrante (R^*, Z^*), siendo de tipo silla cuando $A_3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 > 0$ y de tipo nodo o foco cuando $A_3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 < 0$.

- El equilibrio $(0, Z_0)$ experimenta una bifurcación transcrítica degenerada en

$$\mathsf{DT}_3 \equiv \left\{\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_4(\varepsilon_3 - B\varepsilon_4)}{A_4}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_3 - B\varepsilon_4}{A_4} < 0, \quad A_4 \neq 0\right\},$$

que corresponde a tomar $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon_3 - B\varepsilon_4}{A_4}$ en T_3.

Si $A_4 = 0$, veremos posteriormente que el sistema (2.16), tiene degeneraciones de codimensión cuatro, al menos; por ello excluimos este caso.

Eligiendo valores de los parámetros cercanos a DT_3, el sistema (2.16) puede presentar hasta dos equilibrios fuera de los ejes.

Desde dicho punto DT_3, una curva de bifurcación silla-nodo de equilibrios emerge. La ecuación de esta curva se obtiene de anular el radicando en la coordenada $R^{\pm}$ para el equilibrio $(R^{\pm}, Z^{\pm})$, resultando

$$\begin{aligned} \mathsf{sn} \quad \equiv \quad & \left\{\varepsilon_1 = \varepsilon_2\varepsilon_4 + \frac{(B\varepsilon_4 - \varepsilon_3 + A_4\varepsilon_2)^2}{4(A_3 - A_4B)}, \right. \\ & \left. \frac{B\varepsilon_4 - \varepsilon_3 + A_4\varepsilon_2}{2(A_3 - A_4B)} > 0, \ \frac{(A_4B - 2A_3)\varepsilon_2 + B\varepsilon_3 - \varepsilon_4}{2(A_3 - A_4B)} > 0\right\}, \end{aligned}$$

y sobre ella los equilibrios (R^+, Z^+) y (R^-, Z^-) colapsan.

Esta degeneración DT_3 no se presenta en el caso particular $B = 1$, $A_3 - A_4 = 0$, ya que $A_3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \neq 0$.

- Hay una bifurcación transcrítica, en relación al equilibrio $(R_-, 0)$ que tiene lugar sobre T_4, y otra del equilibrio $(R_+, 0)$ sobre T_5, donde

$$\mathsf{T}_{4,5} \equiv \left\{\varepsilon_1 = B\varepsilon_2\varepsilon_3 - A_3\varepsilon_2^2, \quad B\varepsilon_2 < 0, \quad \varepsilon_2 \neq \frac{B\varepsilon_3}{2A_3}, \quad \varepsilon_2 \neq \frac{B\varepsilon_3 - \varepsilon_4}{2A_3 - A_4B}\right\},$$

surgiendo un nuevo equilibrio $(R^{\pm}, Z^{\pm})$ en el primer cuadrante $R > 0$, $Z > 0$.

En efecto, para que $(R^{\pm}, Z^{\pm}) = (R_{\pm}, 0)$, dado que $Z^{\pm} = -\varepsilon_2 - BR^{\pm}$ debe ser $\varepsilon_2 = -BR^{\pm} = -BR_{\pm}$. Sustituyendo en esta igualdad $R_{\pm}$ por su valor se obtiene, después de operar, la expresión de la curva $\mathsf{T}_{4,5}$.

Además, de ser $\varepsilon_2 = -BR_{\pm}$ tenemos que

$$\varepsilon_2 = \frac{B\varepsilon_3 \mp B\sqrt{\varepsilon_3^2 - 4A_3\varepsilon_1}}{2A_3} \quad \Longleftrightarrow \quad 2A_3\varepsilon_2 - B\varepsilon_3 = -B(\pm\sqrt{\varepsilon_3^2 - 4A_3\varepsilon_1}).$$

En consecuencia el equilibrio $(R_-, 0)$ experimenta una bifurcación transcrítica sobre la curva T_4, si $2A_3\varepsilon_2 - B\varepsilon_3 > 0$ y $B = +1$, o bien cuando $2A_3\varepsilon_2 - B\varepsilon_3 < 0$ y $B = -1$. Análogamente el equilibrio $(R_+, 0)$ experimenta una bifurcación transcrítica sobre la curva T_5, si $2A_3\varepsilon_2 - B\varepsilon_3 > 0$ y $B = -1$, o bien cuando $2A_3\varepsilon_2 - B\varepsilon_3 < 0$ y $B = +1$.

En el caso particular $B = 1$, $A_3 - A_4 = 0$ el equilibrio $(R_-, 0)$ experimenta una bifurcación transcrítica sobre la curva T_4 si $2A_3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 > 0$, mientras que si $2A_3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 < 0$ lo experimenta el equilibrio $(R_+, 0)$. En ambos casos surge el equilibrio (R^*, Z^*).

- Una degeneración de la bifurcación transcrítica T_4, y otra de la T_5, se presenta al tomar los parámetros los valores

$$\mathsf{DT}_{4,5} \equiv \left\{ \varepsilon_1 = \frac{(A_3 - A_4B)\varepsilon_3^2 + A_4\varepsilon_3\varepsilon_4 - A_3\varepsilon_4^2}{(2A_3 - A_4B)^2}, \;\; \varepsilon_2 = \frac{B\varepsilon_3 - \varepsilon_4}{2A_3 - A_4B}, \; B\varepsilon_2 < 0 \right\},$$

que corresponde a tomar $\varepsilon_2 = \dfrac{B\varepsilon_3 - \varepsilon_4}{2A_3 - A_4B}$ en $\mathsf{T}_{4,5}$.

Aquí, tres equilibrios colapsan en DT_5. Ellos son $(R_+, 0) = (R^+, Z^+) = (R^-, Z^-)$ si $(2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3)(2A_3B - A_4) > 0$. En caso contrario $(2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3)(2A_3B - A_4) < 0$, los equilibrios $(R_-, 0) = (R^+, Z^+) = (R^-, Z^-)$ colapsan en DT_4.

En efecto, al imponer que $(R^+, Z^+) = (R^-, Z^-) = (R_{\pm}, 0)$ se obtiene

$$\frac{B\varepsilon_4 - \varepsilon_3 + A_4\varepsilon_2}{2(A_3 - A_4B)} = \frac{-\varepsilon_3 \pm \sqrt{\varepsilon_3^2 - 4A_3\varepsilon_1}}{2A_3}.$$

Sustituyendo en esta igualdad $\varepsilon_2 = \dfrac{B\varepsilon_3 - \varepsilon_4}{2A_3 - A_4B}$, y operando, se obtiene

$$\frac{(2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3)B}{(2A_3 - A_4B)} = \pm\sqrt{\varepsilon_3^2 - 4A_3\varepsilon_1},$$

de donde se deduce lo anterior.

Observemos que DT_4 es la intersección de sn y T_4, mientras que DT_5 es la intersección de sn y T_5.

En el caso particular $B = 1$, $A_3 - A_4 = 0$, la degeneración $\mathsf{DT}_{4,5}$ no está presente ya que $A_3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \neq 0$. No obstante hacemos notar que cuando las curvas T_3 y $\mathsf{T}_{4,5}$ se cortan en el plano de parámetros $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ en un punto distinto del origen, lo hacen en el punto singular $\mathsf{PS} = \mathsf{DT}_3 = \mathsf{DT}_{4,5}$ donde hay una degeneración más alta del sistema (2.16). En efecto, para los valores de los parámetros $\varepsilon_1 = \varepsilon_2\varepsilon_4$ y $A_3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 0$ hay una recta de puntos de equilibrio $Z^* = -\varepsilon_2 - R^*$ en un entorno del origen.

- El equilibrio (R^+, Z^+) experimenta una bifurcación de Hopf en

$$\mathsf{H} \equiv \left\{\varepsilon_1 = B\varepsilon_2\varepsilon_3 - A_3\varepsilon_2^2 + \mathcal{O}(|\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4|^3)\right\}.$$

Notemos que a orden dos coincide con la expresión obtenida para la bifurcación transcrítica $\mathsf{T}_{4,5}$. La siguiente proposición analiza en detalle esta bifurcación de Hopf H.

Proposición 2.3.1 *El equilibrio (R^+, Z^+), del sistema (2.16), experimenta una bifurcación de Hopf dada por*

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_2(-A_3\varepsilon_2 + B\varepsilon_3 + 2(2 - A_3A_4B)\varepsilon_2^2 + (-4A_3B + A_4)\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2A_3\varepsilon_2\varepsilon_4 \\ &\quad +\varepsilon_3^2 - B\varepsilon_3\varepsilon_4) + \mathcal{O}(|\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4|^4). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Si $A_3A_4B > 1$ esta bifurcación tiene una degeneración de primer orden para $\varepsilon_4 = \varepsilon_4^c$, donde ε_4^c es la solución de la ecuación de segundo grado

$$2A_3B(1 + A_4R^+)(\varepsilon_4^c)^2 + (-A_3B + 2A_4(R^+)^2 + 3A_3A_4^2B(R^+)^2 - A_3\varepsilon_3 - A_4B\varepsilon_3)\varepsilon_4^c$$

$$+A_4(A_3BR^+ - 4(R^+)^2 + 2A_4(R^+)^3 + A_3A_4^2B(R^+)^3 + B\varepsilon_3 - 3A_3R^+\varepsilon_3) = 0,$$

que se obtiene al tomar el signo de $-A_3B$ como signo de la raíz cuadrada.

Además, si $\varepsilon_4 < \varepsilon_4^c$ la bifurcación de Hopf es subcrítica si $A_3 = 1$ y supercrítica si $A_3 = -1$. En el caso de ser $\varepsilon_4 > \varepsilon_4^c$, la bifurcación de Hopf es subcrítica si $A_3 = -1$ y supercrítica si $A_3 = 1$.

Demostración:
Recordemos que la matriz de la linealización en el origen del equilibrio $(R^\pm, Z^\pm)$ tenía traza y determinante dados por

$$\begin{aligned}\mathsf{Tr} &= 2A_3(R^\pm)^2 + (\varepsilon_3 + A_4Z^\pm)R^\pm + Z^\pm, \\ \mathsf{Det} &= R^\pm Z^\pm\left(\pm\sqrt{(B\varepsilon_4 - \varepsilon_3 + A_4\varepsilon_2)^2 - 4(A_3 - A_4B)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_4)}\right).\end{aligned}$$

Las condiciones para que ocurra una bifurcación de Hopf son $\mathsf{Det} > 0$ y $\mathsf{Tr} = 0$. Al ser $R^\pm, Z^\pm > 0$ si tomamos el signo $-$ en la raíz cuadrada, es $\mathsf{Det} < 0$ y, en consecuencia, no hay bifurcación de Hopf para el equilibrio (R^-, Z^-). Si elegimos el

signo + es $\mathsf{Det} > 0$ y la bifurcación de Hopf, para el equilibrio (R^+, Z^+), ocurre si $\mathsf{Tr} = 2A_3(R^+)^2+(\varepsilon_3+A_4Z^+)R^++Z^+ = 0$. Sustituyendo el valor de $Z^+ = -\varepsilon_2-BR^+$, se obtiene como condición

$$\mathsf{Tr} = (2A_3 - A_4B)(R^+)^2 + (\varepsilon_3 - A_4\varepsilon_2 - B)R^+ - \varepsilon_2 = 0. \tag{2.18}$$

Por otra parte sabemos que el equilibrio (R^+, Z^+) es solución del sistema

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 + \varepsilon_3 R + \varepsilon_4 Z + A_3R^2 + A_4RZ &= 0, \\ \varepsilon_2 + BR + Z &= 0, \end{aligned}$$

despejando Z^+ en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera se obtiene

$$(A_3 - A_4B)(R^+)^2 + (\varepsilon_3 - A_4\varepsilon_2 - B\varepsilon_4)R^+ + \varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_4 = 0. \tag{2.19}$$

Restando la ecuación (2.18) de la (2.19) se obtiene una ecuación equivalente a esta última para R^+, a saber,

$$A_3(R^+)^2 - B(1-\varepsilon_4)R^+ - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_4 = 0.$$

De esta ecuación obtenemos la expresión de R^+

$$\begin{aligned} R^+ = B(&-(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + A_3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 - \varepsilon_1\varepsilon_4 - 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^3 \\ &+3\,A_3\varepsilon_1^2\varepsilon_4 + A_3\varepsilon_2^2\varepsilon_4 - \varepsilon_1\varepsilon_4^2 + 4A_3\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4) + \mathcal{O}(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_4|^4). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Notar que esta solución corresponde a tomar $-B$ como signo de la raíz cuadrada. Sustituyendo este valor en la ecuación (2.18), y despejando ε_1 se obtiene la expresión buscada (2.17).

Analizamos ahora la condición de transversalidad de la bifurcación de Hopf, tomando ε_1 como parámetro de bifurcación y fijando los restantes parámetros ε_2, ε_3 y ε_4. Denotamos por ε_1^c al valor del parámetro ε_1 para el cual ocurre la bifurcación de Hopf $\varepsilon_1^c = -A_3\varepsilon_2^2 + B\varepsilon_2\varepsilon_3 + \mathcal{O}(3)$.

Para valores $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_1^c$, la matriz de la linealización es semejante a la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha(\varepsilon_1) & -\omega(\varepsilon_1) \\ \omega(\varepsilon_1) & \alpha(\varepsilon_1) \end{pmatrix},$$

siendo $\alpha(\varepsilon_1^c) = 0$ y $\omega(\varepsilon_1^c) = \omega_0$, donde ω_0 viene dado por la expresión
$\omega_0 = \sqrt{R^+Z^+(\varepsilon_3 - B\varepsilon_4 + (2A_3 - A_4B)R^+ + A_4Z^+)}$.

La condición de transversalidad es $\dfrac{d\alpha}{d\varepsilon_1}(\varepsilon_1^c) \neq 0$ (es decir, que los autovalores complejos atraviesen con velocidad no nula el eje imaginario), donde $\alpha(\varepsilon_1) = \dfrac{\mathsf{Tr}}{2}$. Sustituyendo en la ecuación de la traza (2.18) el valor de R^+ dado en (2.20), y haciendo las operaciones correspondientes, resulta

$$\frac{d\alpha}{d\varepsilon_1}(\varepsilon_1^c) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(|\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4|) \neq 0,$$

para $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \approx 0$, y se cumple por tanto la condición de transversalidad.

A continuación, para estudiar las posibles degeneraciones de la bifurcación de Hopf, aplicamos el algoritmo para el cálculo de los coeficientes de dicha bifurcación descrito en Freire, Gamero y Ponce (1989), obteniéndose la siguiente expresión para el primer coeficiente

$$a_1 = \frac{(R^+)^4(2A_3R^+ + \varepsilon_3)(A_4R^+ + \varepsilon_4)a_{11}}{8\ \omega_0^4(1 + A_4R^+)^2}, \tag{2.21}$$

donde a_{11} es el polinomio de segundo grado en ε_4

$$\begin{aligned} a_{11} \;=\; & 2A_3B(1 + A_4R^+)\varepsilon_4^2 + (-A_3B + 2A_4(R^+)^2 + 3A_3A_4^2B(R^+)^2 \\ & -A_3\varepsilon_3 - A_4B\varepsilon_3)\varepsilon_4 + A_4(A_3BR^+ - 4(R^+)^2 + 2A_4(R^+)^3 \\ & +A_3A_4^2B(R^+)^3 + B\varepsilon_3 - 3A_3R^+\varepsilon_3). \end{aligned}$$

La degeneración de la bifurcación de Hopf ocurre cuando $a_1 = 0$, teniendo en cuenta las dos restricciones $\{R^+,\ Z^+ > 0\}$, $\{\mathsf{Det} > 0,\ \mathsf{Tr} = 0\}$.

De la primera restricción se deduce que al ser $R^+ > 0$ y pequeño se tiene que $(1 + A_4R^+) > 0$. Por otra parte, despejando Z^+ en la ecuación $\mathsf{Tr} = 2A_3(R^+)^2 + (\varepsilon_3 + A_4Z^+)R^+ + Z^+ = 0$, obtenemos

$$Z^+ = -\frac{R^+(2A_3R^+ + \varepsilon_3)}{1 + A_4R^+}, \tag{2.22}$$

como $Z^+ > 0$, se tiene la restricción

$$R1 \equiv 2A_3R^+ + \varepsilon_3 < 0. \tag{2.23}$$

En consecuencia se deduce que $a_1 = 0 \Leftrightarrow (A_4R^+ + \varepsilon_4)a_{11} = 0$. Veamos si se pueden anular estos dos factores.

Comenzamos con el primer factor $A_4R^+ + \varepsilon_4$.

En la segunda restricción, como

$$\mathsf{Det} = R^+Z^+(\varepsilon_3 - B\varepsilon_4 + (2A_3 - A_4B)R^+ + A_4Z^+),$$

la condición

$$\mathsf{Det} > 0 \Leftrightarrow (\varepsilon_3 - B\varepsilon_4 + (2A_3 - A_4B)R^+ + A_4Z^+) > 0.$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de Z^+ dado en (2.22), se obtiene como condición después de operar

$$R2 \equiv (2A_3R^+ + \varepsilon_3) - B(A_4R^+ + \varepsilon_4)(1 + A_4R^+) > 0. \tag{2.24}$$

Por lo tanto si $A_4R^+ + \varepsilon_4 = 0$ tendría que ser $2A_3R^+ + \varepsilon_3 > 0$, lo que contradice la inecuación (2.23). En consecuencia $A_4R^+ + \varepsilon_4 \neq 0$.

Veamos ahora el segundo factor a_{11}.

El discriminante de la ecuación de segundo grado $a_{11} = 0$, teniendo en cuenta que $(A_3)^{par} = (B)^{par} = 1$, viene dado por

$$\begin{aligned}\triangle &= 1 + (4A_4^2 - 4A_3A_4^3B + A_4^4)(R^+)^4 + (16A_3A_4^2B - 8A_4^3)(R^+)^3 \\ &\quad +(28A_3A_4B - 4A_3A_4\varepsilon_3 - 14A_4^2 + 14A_4^2B\varepsilon_3 - 6A_3A_4^3\varepsilon_3)(R^+)^2 \\ &\quad +(-8A_4 + 24A_4B\varepsilon_3 - 8A_3A_4^2\varepsilon_3)(R^+) + (2B - 6A_3A_4)\varepsilon_3 \\ &\quad +(1 + 2A_3A_4B + A_4^2)\varepsilon_3^2,\end{aligned}$$

por lo tanto al ser R^+ y ε_3 pequeños, $\triangle > 0$ y la ecuación $a_{11} = 0$ tiene dos soluciones reales, si bien sólo nos interesa una de ellas, la de menor valor absoluto.

Para estudiar la restricción $R1$ (2.23), deducida de la primera restricción, realizamos un desarrollo en serie en $(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = (0, 0)$ de la solución más próxima a cero de la ecuación (2.18), obteniéndose

$$R^+ = -B\varepsilon_2 + 2A_3B\varepsilon_2^2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 + \mathcal{O}(3). \tag{2.25}$$

Notemos que esta solución corresponde a tomar $-B$ como signo de la raíz cuadrada para la solución R^+ de la ecuación (2.18). Sustituyendo dicha expresión en $R1$ se obtiene

$$R1 = (\varepsilon_3 - 2A_3B\varepsilon_2)(1 - 2A_3\varepsilon_2 + \mathcal{O}(|\varepsilon_2, \varepsilon_3|^2)).$$

Repitiendo nuevamente los cálculos anteriores, pero considerando el desarrollo a tercer orden y posteriormente a cuarto orden, se observa que en todas las expresiones de $R1$ se repite el factor $\varepsilon_3 - 2A_3B\varepsilon_2$, lo que nos lleva a conjeturar que

$$R1 = 2A_3R^+ + \varepsilon_3 = (\varepsilon_3 - 2A_3B\varepsilon_2)\Psi(\varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

donde $\Psi(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ es una función analítica con $\Psi(0, 0) = 1$.

Para demostrarlo basta con sustituir $\varepsilon_3 = 2A_3B\varepsilon_2$ en la solución, R^+, de la ecuación (2.18) obtenida tomando $-B$ como signo de la raíz cuadrada y en la expresión de $R1$, obteniéndose después de operar $R1 = 0$.

Para analizar la restricción $R2$ (2.24), deducida de la segunda restricción, hacemos un desarrollo en serie en $(R^+, \varepsilon_3) = (0, 0)$ de la solución más próxima a cero, ε_4^c, de la ecuación $a_{11} = 0$, obteniéndose $\varepsilon_4^c = A_4[A_3\varepsilon_3 + R^+ + 2(-2A_3B + A_4)(R^+)^2 + (-4B + 3A_3A_4)\varepsilon_3R^+ + (A_4 - A_3B)\varepsilon_3^2] + \mathcal{O}(|R^+, \varepsilon_3|^3)$.

Notemos que esta solución corresponde a tomar $-A_3B$ como el signo de la raíz cuadrada para la solución ε_4 de la ecuación $a_{11} = 0$.

Sustituyendo en la expresión de $R2$ (2.24) el desarrollo en serie de $\varepsilon_4 = \varepsilon_4^c$ y el de R^+ obtenido en (2.25) se deduce, después de operar, que $R2 = (1 - A_3A_4B)(\varepsilon_3 - 2A_3B\varepsilon_2)(1 + 2A_3\varepsilon_2 + 2A_4B\varepsilon_2 - A_3A_4\varepsilon_3 + \mathcal{O}(|\varepsilon_2, \varepsilon_3|^2)$.

Repitiendo nuevamente los cálculos anteriores, pero considerando el desarrollo a tercer orden y posteriormente a cuarto orden, se observa que en todas las expresiones de $R1$ se repite el factor $\varepsilon_3 - 2A_3B\varepsilon_2$, lo que nos lleva a conjeturar que

$$R2 = (\varepsilon_3 - 2A_3B\varepsilon_2)\Phi(\varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

donde $\Phi(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ es una función analítica con $\Phi(0,0) = 1 - A_3A_4B$.

Para demostrarlo basta, considerando el valor de Z^+ dado en (2.22), escribir

$$\begin{aligned} R2 &= (2A_3R^+ + \varepsilon_3) - B(A_4R^+ + \varepsilon_4)(1 + A_4R^+) \\ &= (2A_3R^+ + \varepsilon_3) + B(A_4R^+ + \varepsilon_4)\frac{R^+(2A_3R^+ + \varepsilon_3)}{Z^+}, \end{aligned}$$

lo que nos permite expresar

$$R2 = (2A_3R^+ + \varepsilon_3)\left(1 + \frac{BR^+(A_4R^+ + \varepsilon_4)}{Z^+}\right).$$

En consecuencia, dado que $Z^+ > 0$ y para $\varepsilon_3 = 2A_3B\varepsilon_2$ se cumple que $(2A_3R^+ + \varepsilon_3) = 0$, es $R2 = 0$.

En resumen, ε_4^c, solución obtenida de la ecuación $a_{11} = 0$ considerando el signo $-A_3B$ en la raíz cuadrada, es una superficie en el espacio de parámetros $(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ donde la bifurcación de Hopf se degenera si

$$R1 = (\varepsilon_3 - 2A_3B\varepsilon_2)\Psi(\varepsilon_2, \varepsilon_3) < 0 \quad \text{y} \quad R2 = (\varepsilon_3 - 2A_3B\varepsilon_2)\Phi(\varepsilon_2, \varepsilon_3) > 0,$$

siendo $\Psi(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ y $\Phi(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ funciones analíticas con $\Psi(0,0) = 1$ y $\Phi(0,0) = 1 - A_3A_4B$.

En consecuencia si $1 - A_3A_4B > 0$ las restricciones $R1$ y $R2$ son incompatibles en un entorno del origen en el plano $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, por contra si $1 - A_3A_4B < 0$ hay un semientorno del origen en el plano $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, situado debajo de la recta $\varepsilon_3 = 2A_3B\varepsilon_2$, donde son compatibles dichas restricciones y la degeneración de la bifurcación de Hopf tiene lugar.

Finalmente estudiamos la estabilidad de la bifurcación de Hopf. Restando las desigualdades (2.23) y(2.24), como $1 + A_4R^+ > 0$, es

$$B(A_4R^+ + \varepsilon_4) < 0. \tag{2.26}$$

Si denotamos por ε_4^{nc} a la solución de mayor valor absoluto en la ecuación $a_{11} = 0$ se deduce, teniendo en cuenta (2.21) y la citada ecuación, que $\operatorname{sgn}(a_1) = \operatorname{sgn}((2A_3R^+ + \varepsilon_3)(A_4R^+ + \varepsilon_4)A_3B(\varepsilon_4 - \varepsilon_4^c)(\varepsilon_4 - \varepsilon_4^{nc}))$, pero teniendo en cuenta las inecuaciones (2.23) y (2.26) se concluye que

$$\operatorname{sgn}(a_1) = \operatorname{sgn}(A_3(\varepsilon_4 - \varepsilon_4^c)(\varepsilon_4 - \varepsilon_4^{nc})).$$

Haciendo un desarrollo en serie en $(R^+, \varepsilon_3) = (0,0)$ de la solución ε_4^{nc} de la ecuación $a_{11} = 0$, se obtiene $\varepsilon_4^{nc} = \dfrac{1}{2} + \mathcal{O}(|R^+, \varepsilon_3|)$. Notar que esta solución corresponde a tomar $A_3 B$ como signo de la raíz cuadrada. En consecuencia

$$\operatorname{sgn}(a_1) = \operatorname{sgn}(-A_3(\varepsilon_4 - \varepsilon_4^c)).$$

Por lo tanto, si $\varepsilon_4 < \varepsilon_4^c$ la bifurcación de Hopf es subcrítica si $A_3 = 1$ y supercrítica si $A_3 = -1$. En el caso de ser $\varepsilon_4 > \varepsilon_4^c$, la bifurcación de Hopf es subcrítica si $A_3 = -1$ y supercrítica si $A_3 = 1$. ■

En el caso particular $B = 1$, $A_3 - A_4 = 0$, el equilibrio (R^*, Z^*) experimenta una bifurcación de Hopf dada por la ecuación (2.17), siendo

$$\begin{aligned} a_{11} = & A_3[2(1 + A_3 R^*)\varepsilon_4^2 + (-1 - 2\varepsilon_3 + 5R^{*2})\varepsilon_4 + \varepsilon_3 + A_3 R^* - 3A_3\varepsilon_3 R^* - 4R^{*2} \\ & + 3A_3 R^{*3}] = A_3(-1 + 2\varepsilon_4 + 3A_3 R^*)((1 + A_3 R^*)\varepsilon_4 - \varepsilon_3 - A_3 R^* + R^{*2}). \end{aligned}$$

La raíz del polinomio a_{11} que se encuentra en un entorno del origen viene dada por

$$\varepsilon_4^c = \frac{\varepsilon_3 + A_3 R^* - (R^*)^2}{1 + A_3 R^*} = -A_3\varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

donde hemos sustituido la primera coordenada del equilibrio (R^*, Z^*) que experimenta la bifurcación de Hopf por su valor. Pero dado que dicho equilibrio es de tipo foco cuando $A_3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 < 0$, la bifurcación de Hopf no se degenera en este caso. Además como $\operatorname{sgn}(a_1) = \operatorname{sgn}(A_3)$, se tiene que la bifurcación es supercrítica si $A_3 = -1$ y subcrítica si $A_3 = 1$.

- Una segunda degeneración de la bifurcación transcrítica T_4, y también de la T_5, ocurre para los valores de los parámetros

$$\mathsf{A}_{1,2} \equiv \left\{ \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_3^2}{4A_3},\ \varepsilon_2 = \frac{B\varepsilon_3}{2A_3},\ A_3\varepsilon_3 < 0 \right\}$$

(que corresponde a tomar $\varepsilon_2 = \dfrac{B\varepsilon_3}{2A_3}$ en $\mathsf{T}_{4,5}$).

Aquí nuevamente colapsan tres equilibrios, $(R_+, 0) = (R_-, 0) = (R^-, Z^-)$ en A_1 o bien $(R_+, 0) = (R_-, 0) = (R^+, Z^+)$ en A_2. Notemos que los puntos $\mathsf{A}_{1,2}$ corresponden a la intersección de SN y $\mathsf{T}_{4,5}$.

Este equilibrio degenerado tiene la matriz nula como matriz de la linealización y la singularidad se convierte en un campo vectorial plano con simetría de reflexión. El análisis de la bifurcación en esta clase de sistemas ha sido realizada en Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*b*).

En el caso particular $B = 1$, $A_3 - A_4 = 0$ hay un único punto A donde colapsan los equilibrios $(R_+, 0) = (R_-, 0) = (R^*, Z^*)$.

- Para $2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3 = 0$, hay un punto de codimensión tres donde la singularidad corresponde a una degeneración de un campo vectorial plano con simetría de reflexión (ver Krauskopf y Rousseau (1997)). El punto de codimensión tres está localizado en

$$\mathsf{HSND} \equiv \left\{ \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_3^2}{4A_3}, \quad \varepsilon_2 = \frac{B\varepsilon_3}{2A_3}, \quad \varepsilon_4 = \frac{A_4\varepsilon_3}{2A_3}, \quad A_3\varepsilon_3 < 0 \right\},$$

y será analizado posteriormente.

En el caso particular $B = 1$, $A_3 - A_4 = 0$, para $2\varepsilon_4 - \varepsilon_3 = 0$ no está presente el punto de codimensión tres HSND, ya que para dichos valores de los parámetros el punto A coincide con el punto singular PS donde hay una degeneración más alta del sistema (2.16) por existir infinitos puntos de equilibrio en un entorno del origen en el cuadrante $R > 0, Z > 0$.

Vamos ahora a clasificar los puntos de codimensión dos A_1 y A_2, siguiendo la notación de Guckenheimer y Holmes (1997), [Sec. 7.4].

Proposición 2.3.2 *Se verifica que:*

1. *Para $A_3B(2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3) > 0$, el punto A_1 es del tipo I ó IVb, y los equilibrios involucrados son $(R_+, 0)$, $(R_-, 0)$ y (R^-, Z^-).*
2. *Para $A_3B(2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3) < 0$, el punto A_2 es del tipo IIb ó III, y los equilibrios involucrados son $(R_+, 0)$, $(R_-, 0)$ y (R^+, Z^+).*

Demostración:
En efecto, al imponer que $(R_+, 0) = (R_-, 0) = (R^\pm, Z^\pm)$ se obtiene

$$-\frac{\varepsilon_3}{2A_3} = \frac{B\varepsilon_4 - \varepsilon_3 + A_4\varepsilon_2 \pm \sqrt{(B\varepsilon_4 - \varepsilon_3 + A_4\varepsilon_2)^2 - 4(A_3 - A_4B)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_4)}}{2(A_3 - A_4B)}.$$

Sustituyendo $\varepsilon_2 = \dfrac{B\varepsilon_3}{2A_3}$, llegamos tras operar a

$$\frac{B(A_4\varepsilon_3 - 2A_3\varepsilon_4)}{2A_3} = \pm\sqrt{(B\varepsilon_4 - \varepsilon_3 + A_4\varepsilon_2)^2 - 4(A_3 - A_4B)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_4)},$$

de donde deducimos los equilibrios involucrados en cada caso.

Para clasificar los puntos de codimensión dos A_1 y A_2 realizamos, en el campo vectorial (2.16), el cambio de variables

$$R = r^2, \qquad Z = z^2, \qquad T = 2t, \tag{2.27}$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 r^2 + \varepsilon_4 z^2 + A_3 r^4 + A_4 r^2 z^2), \\ \dot{z} &= z(\varepsilon_2 + Br^2 + z^2). \end{aligned} \tag{2.28}$$

En el valor crítico de los parámetros del punto HSND existe, cuando $A_3\varepsilon_3 < 0$, un equilibrio de coordenadas $\left(r_+ = +\sqrt{\frac{-\varepsilon_3}{2A_3}}, 0\right)$. Si trasladamos el equilibrio al origen, mediante el cambio $y = r - r_+$, $x = z$, nos queda después de operar el nuevo sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu_1 x + 2Br_+xy + x^3 + Bxy^2, \\ \dot{y} &= \mu_2 r_+ + \mu_2 y + \left(\varepsilon_4 - \frac{A_4\varepsilon_3}{2A_3}\right) r_+x^2 - 2\varepsilon_3 r_+y^2 + 2A_4r_+^2x^2y \\ &\quad +(\varepsilon_3 + 10A_3r_+^2)y^3 + 3A_4r_+x^2y^2 + 5A_3r_+y^4 + \mathcal{O}(|x,y|^5),\end{aligned} \tag{2.29}$$

donde $\mu_1 = \varepsilon_2 - \dfrac{B\varepsilon_3}{2A_3}$ y $\mu_2 = \varepsilon_1 - \dfrac{\varepsilon_3^2}{4A_3}$ se anulan para los valores críticos de los parámetros correspondientes al punto HSND.

A continuación mediante el cambio de variables

$$X = x, \qquad Y = y - \frac{\mu_2}{4\varepsilon_3 r_+}, \qquad T = t,$$

llegamos al campo vectorial

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \widetilde{\mu_1}X + 2Br_+XY + \mathcal{O}(|X,Y|^3), \\ \dot{Y} &= \widetilde{\mu_2} + \left(\varepsilon_4 - \frac{A_4\varepsilon_3}{2A_3}\right) r_+X^2 - 2\varepsilon_3 r_+Y^2 + \mathcal{O}(|X,Y|^3),\end{aligned}$$

donde $\widetilde{\mu_1} = \Phi_1(\mu_1,\mu_2)$ y $\widetilde{\mu_2} = \Phi_2(\mu_2)$ con $\Phi_1(0,0) = \Phi_2(0) = 0$.

En el valor crítico de los parámetros este campo vectorial, a orden dos, viene dado por

$$\begin{aligned}\dot{X} &= 2Br_+XY, \\ \dot{Y} &= \left(\varepsilon_4 - \frac{A_4\varepsilon_3}{2A_3}\right) r_+X^2 - 2\varepsilon_3 r_+Y^2.\end{aligned}$$

Finalmente mediante el escalado

$$X \to -\frac{A_3}{\varepsilon_3}\sqrt{\frac{2}{2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3}}X, \quad Y \to \frac{1}{2\varepsilon_3 r_+}Y,$$

la forma normal se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \frac{B}{\varepsilon_3}XY, \\ \dot{Y} &= -\mathrm{sgn}(2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3)X^2 - Y^2.\end{aligned}$$

Puesto que $A_3\varepsilon_3 < 0$, se cumple que $B\varepsilon_3 > 0\,(B\varepsilon_3 < 0) \Leftrightarrow A_3B < 0\,(A_3B > 0)$. En consecuencia se tiene que:

- Si $A_3B < 0$ y $2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3 < 0$ estamos en el caso I, mientras que si $2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3 > 0$ estaríamos en el caso III.
- Si $A_3B > 0$ y $2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3 < 0$ estamos en el caso IIb, mientras que si $2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3 > 0$ estaríamos en el caso IVb.

En el caso particular $B = 1$, $A_3 - A_4 = 0$ el punto A es:

- Si $A_3 = -1$ y $2\varepsilon_4 - \varepsilon_3 > 0$ de tipo I, mientras que si $2\varepsilon_4 - \varepsilon_3 < 0$ es de tipo III.
- Si $A_3 = 1$ y $2\varepsilon_4 - \varepsilon_3 < 0$ es de tipo IIb, mientras que si $2\varepsilon_4 - \varepsilon_3 > 0$ es de tipo IVb.

- Hay una bifurcación de Takens-Bogdanov del equilibrio $(R^+, Z^+) = (R^-, Z^-)$.

Proposición 2.3.3 *Consideremos el sistema (2.16). El equilibrio* $(R^+, Z^+) = (R^-, Z^-)$ *experimenta una bifurcación de Takens-Bogdanov no degenerada en*

$$\begin{aligned}\mathsf{TB} \equiv \{&\varepsilon_1 = \varepsilon_1^c, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^c, \quad (-\varepsilon_3 + B\varepsilon_4)(2A_3 - A_4B) > 0,\\ &(B\varepsilon_3 - \varepsilon_4)(2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3) > 0\},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^c &= \frac{(A_3 - A_4B)\varepsilon_3^2 + A_4\varepsilon_3\varepsilon_4 - A_3\varepsilon_4^2}{(2A_3 - A_4B)^2} + \mathcal{O}(|\varepsilon_3, \varepsilon_4|^3),\\ \varepsilon_2^c &= \frac{B\varepsilon_3 - \varepsilon_4}{2A_3 - A_4B}\\ &\quad + \frac{2A_4B(A_3 - A_4B)\varepsilon_3^2 + 2B(-2 + A_3A_4B + A_4^2)\varepsilon_3\varepsilon_4 + 4(1 - A_3A_4B)\varepsilon_4^2}{(2A_3 - A_4B)^3}\\ &\quad + \mathcal{O}(|\varepsilon_3, \varepsilon_4|^3).\end{aligned}$$

Además, si $A_4 - A_3B < 0$ *la bifurcación de Takens-Bogdanov es subcrítica y supercrítica si* $A_4 - A_3B > 0$.

Demostración:

En el estudio de esta degeneración vamos a fijar ε_3 y ε_4, tomando ε_1 y ε_2 como parámetros de bifurcación. Denotamos

$$R^c = R^+ = R^- = \frac{B\varepsilon_4 - \varepsilon_3 + A_4\varepsilon_2}{2(A_3 - A_4B)}, \qquad Z^c = Z^+ = Z^- = -\varepsilon_2 - BR^c.$$

Al trasladar el equilibrio (R^c, Z^c) y los valores críticos de los parámetros $(\varepsilon_1^c, \varepsilon_2^c)$ al origen, mediante el cambio de variables y parámetros

$$X = R - R^c, \quad Y = Z - Z^c, \quad \mu_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_1^c, \quad \mu_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_2^c,$$

se observa que R^c y Z^c se pueden expresar en la forma $R^c = R_0^c\mu_2 + R_1^c$, $Z^c = Z_0^c\mu_2 + Z_1^c$, donde R_0^c, Z_0^c son funciones de (A_3, A_4, B) y R_1^c, Z_1^c son funciones de $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

Aplicando este cambio de variables y parámetros al sistema (2.16) obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{X} =& (a_1\mu_1 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2)) \\
&+(\mu_1 + a_2\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2) + R_1^c\varepsilon_3 + 2A_3(R_1^c)^2 + A_4R_1^cZ_1^c)X \\
&+(a_3\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2) + R_1^c\varepsilon_4 + A_4(R_1^c)^2)Y \\
&+(a_4\mu_2 + \varepsilon_3 + 3A_3R_1^c + A_4Z_1^c)X^2 + (a_5\mu_2 + \varepsilon_4 + 2A_4R_1^c)XY + \mathcal{O}(|X, Y|^3), \\
\dot{Y} =& (b_1\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2)) + (b_2\mu_2 + BZ_1^c)X + (b_3\mu_2 + Z_1^c)Y + BXY + Y^2,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

donde a_i, b_j son funciones de $(A_3, A_4, B, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ para $i = 1, 2, \cdots, 5;\ j = 1, 2, 3$.

Para $\mu_1 = \mu_2 = 0$ es $R^c = R_1^c$, $Z^c = Z_1^c$, y la matriz de la linealización en el origen

$$\begin{pmatrix} R^c(\varepsilon_3 + 2A_3R^c + A_4Z^c) & R^c(\varepsilon_4 + A_4R^c) \\ BZ^c & Z^c \end{pmatrix},$$

tiene traza $\mathsf{Tr} = (2A_3 - A_4B)(R^c)^2 + (\varepsilon_3 - A_4\varepsilon_2 - B)R^c - \varepsilon_2 = 0$ y determinante $\mathsf{Det} = R^cZ^c\left(\pm\sqrt{(B\varepsilon_4 - \varepsilon_3 + A_4\varepsilon_2)^2 - 4(A_3 - A_4B)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_4)}\right) = 0$.

Ya que $R^c, Z^c > 0$, para que se cumpla la segunda condición debe anularse el radicando, obteniéndose $\varepsilon_1 = \varepsilon_2\varepsilon_4 + \dfrac{(B\varepsilon_4 - \varepsilon_3 + A_4\varepsilon_2)^2}{4(A_3 - A_4B)}$.

Al sustituir el valor de R^c en la ecuación $\mathsf{Tr} = 0$, aparece la ecuación de segundo grado en ε_2

$$\begin{aligned}
&-A_4^3\varepsilon_2^2 + (4B - 6A_3A_4 + 2A_4^2B + 2A_4^2\varepsilon_3 - 2A_3A_4\varepsilon_4)\varepsilon_2 + 2(-A_3 + A_4B)\varepsilon_3 \\
&+2(-A_4 + A_3B)\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3^2 + 2A_3\varepsilon_3\varepsilon_4 + (A_4 - 2A_3B)\varepsilon_4^2 = 0.
\end{aligned}$$

La solución de esta ecuación que se anula para $(\varepsilon_3, \varepsilon_4) = (0, 0)$ se obtiene al tomar el signo + en la raíz cuadrada, y mediante un desarrollo en serie resulta

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2^c \;=\; & \frac{B\varepsilon_3 - \varepsilon_4}{2A_3 - A_4B} \\
&+\frac{2A_4B(A_3 - A_4B)\varepsilon_3^2 + 2B(-2 + A_3A_4B + A_4^2)\varepsilon_3\varepsilon_4 + 4(1 - A_3A_4B)\varepsilon_4^2}{(2A_3 - A_4B)^3} \\
&+\mathcal{O}(|\varepsilon_3, \varepsilon_4|^3).
\end{aligned}$$

Sustituyendo ε_2 por ε_2^c en la expresión obtenida para ε_1 obtenemos

$$\varepsilon_1^c = \frac{(A_3 - A_4B)\varepsilon_3^2 + A_4\varepsilon_3\varepsilon_4 - A_3\varepsilon_4^2}{(2A_3 - A_4B)^2} + \mathcal{O}(|\varepsilon_3, \varepsilon_4|^3).$$

Notemos que a primer orden estos valores obtenidos para $(\varepsilon_1^c, \varepsilon_2^c)$, coinciden con los de la degeneración $\mathsf{DT}_{4,5}$. Sustituyendo el valor de ε_2^c en R^c se obtiene $R^c = \dfrac{-\varepsilon_3 + B\varepsilon_4}{2A_3 - A_4B} + \mathcal{O}(|\varepsilon_3, \varepsilon_4|^2) > 0$, y llevando este valor y el de ε_2^c a la expresión de Z^c obtenemos $Z^c = \dfrac{(B\varepsilon_3 - \varepsilon_4)(2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3)}{(2A_3 - A_4B)^2} + \mathcal{O}(|\varepsilon_3, \varepsilon_4|^3) > 0$ lo que nos da las condiciones de existencia del equilibrio que experimenta la bifurcación.

Al realizar, en el sistema (2.30), el cambio de variables lineal

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BZ_1^c & 0 \\ -Z_1^c & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{U} =& (a_1^*\mu_1 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2)) + (\mu_1 + a_2^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2))U \\
&+(1 + a_3^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2))V + (a_4^*\mu_2 + (Bc - d)Z_1^c)U^2 - (a_5^*\mu_2 + d)UV \\
&+\mathcal{O}(|U, V|^3), \\
\dot{V} =& (b_1^*\mu_1 + b_2^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2)) + (b_3^*\mu_1 + b_4^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2)U \\
&+(b_5^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2)V + (b_6^*\mu_2 + (d - Bc)(Z_1^c)^2)U^2 + (d-1)Z_1^cUV - V^2,
\end{aligned}$$

donde $c = \varepsilon_3 + 3A_3R_1^c + A_4Z_1^c$, $d = \varepsilon_4 + 2A_4R_1^c$ y los coeficientes a_i^*, b_j^* son funciones de $(A_3, A_4, B, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ para $i = 1, 2, \cdots, 5$; $j = 1, 2, \cdots, 6$.

Para obtener la forma normal de este campo vectorial realizamos el cambio

$$\begin{aligned}
\tilde{U} =& U, \\
\tilde{V} =& (a_1^*\mu_1 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2)) + (\mu_1 + a_2^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2))U + (1 + a_3^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2))V,
\end{aligned}$$

dando lugar al nuevo sistema

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{U}} &= \tilde{V} + (a_1^*d\mu_1 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2))\tilde{U} + \mathcal{O}(|\tilde{U}, \tilde{V}, \mu_1, \mu_2|^2), \\
\dot{\tilde{V}} &= (b_1^*\mu_1 + b_2^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2)) + (-a_1^*Z_1^c(d-1) + b_3^*)\mu_1 \\
&\quad +b_4^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2))\tilde{U} + ((1 + 2a_1^*)\mu_1 + (a_2^* + b_5^*)\mu_2 \\
&\quad +\mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2))\tilde{V} + \mathcal{O}(|\tilde{U}, \tilde{V}, \mu_1, \mu_2|^2).
\end{aligned}$$

Un nuevo cambio de variables

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= \tilde{U}, \\
\tilde{v} &= \tilde{V} + (a_1^*d\mu_1 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2)\tilde{U},
\end{aligned}$$

nos lleva al sistema

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{u}} =& \tilde{v} + \mathcal{O}(|\tilde{u}, \tilde{v}, \mu_1, \mu_2|^2), \\
\dot{\tilde{v}} =& (b_1^*\mu_1 + b_2^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2)) + (-a_1^*Z_1^c(d-1) + b_3^*)\mu_1 + b_4^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2))\tilde{u} \\
&+((1 + 2a_1^* + a_1^*d)\mu_1 + (a_2^* + b_5^*)\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1, \mu_2|^2))\tilde{v} + \mathcal{O}(|\tilde{u}, \tilde{v}, \mu_1, \mu_2|^2).
\end{aligned}$$

La forma normal de este campo vectorial es

$$\begin{aligned}
&\dot{\tilde{u}} = \tilde{v},\\
&\dot{\tilde{v}} = [b_1^*\mu_1 + b_2^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1,\mu_2|^2)] + [(-a_1^* Z_1^c(d-1) + b_3^*)\mu_1 + b_4^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1,\mu_2|^2)]\tilde{u}\\
&\quad +[(1 + 2a_1^* + a_1^* d)\mu_1 + (a_2^* + b_5^*)\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1,\mu_2|^2)]\tilde{v} + t_1(\mu_1,\mu_2)\tilde{u}^2 + t_2(\mu_1,\mu_2)\tilde{u}\tilde{v}\\
&\quad +\mathcal{O}(|\tilde{u},\tilde{v},\mu_1,\mu_2|^3).
\end{aligned}$$

Para los valores críticos $\mu_1 = \mu_2 = 0$ (recordemos que $R^c = R_1^c,\ Z^c = Z_1^c$) utilizamos el algoritmo descrito en Gamero, Freire y Ponce (1991) para computar los coeficientes de la forma normal, obteniéndose

$$t_1(0,0) = (d - Bc)(Z^c)^2, \quad t_2(0,0) = (-1 - d + 2Bc)Z^c.$$

Para ver que $t_1(0,0) \neq 0$, ya que $Z^c = -\varepsilon_2 - BR^c > 0$, calculamos $d - Bc = \varepsilon_4 + 2A_4R^c - B(\varepsilon_3 + 3A_3R^c + A_4Z^c) = \varepsilon_4 - B\varepsilon_3 + 3(A_4 - A_3B)R^c + A_4B\varepsilon_2$. De la expresión de R^c se deduce que $A_4\varepsilon_2 = 2(A_3 - A_4B)R^c + \varepsilon_3 - B\varepsilon_4$, sustituyendo en el último sumando se obtiene, tras simplificar, que $d - Bc = (A_4 - A_3B)R^c \neq 0$, ya que $(A_4 - A_3B) \neq 0$ y $R^c > 0$. Notemos que el signo de $t_1(0,0)$ pasa de negativo, si $A_4 - A_3B < 0$, a positivo cuando $A_4 - A_3B > 0$.

Análogamente para ver que $t_2(0,0) \neq 0$, ya que $Z^c > 0$, necesitamos calcular $-1 - d + 2Bc = -1 - \varepsilon_4 + 2B\varepsilon_3 + (6A_3B - 4A_4)R^c - 2A_4B\varepsilon_2$. Sustituyendo de nuevo $A_4\varepsilon_2$ por su valor en el último sumando se obtiene, tras simplificar, que $-1 - d + 2Bc = -1 + 2A_3BR^c + \varepsilon_4 \neq 0$, ya que $R^c \approx 0$ y $\varepsilon_4 \approx 0$. En este caso vemos que $t_2(0,0)$ es siempre negativo.

Finalmente mediante el cambio

$$\begin{aligned}
u &= \tilde{u} + \frac{(-a_1^* Z_1^c(d-1) + b_3^*)\mu_1 + b_4^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1,\mu_2|^2)}{2t_1(\mu_1,\mu_2)},\\
v &= \tilde{v},\\
\xi_1 &= b_1^*\mu_1 + b_2^*\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1,\mu_2|^2),\\
\xi_2 &= \left(1 + 2a_1^* + a_1^* d - \frac{t_2(0,0)}{2t_1(0,0)}(-a_1^* Z_1^c(d-1) + b_3^*)\right)\mu_1\\
&\quad + \left(a_2^* - \frac{t_2(0,0)}{2t_1(0,0)}\, b_4^* + b_5^*\right)\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu_1,\mu_2|^2),
\end{aligned}$$

llegamos al sistema

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= v,\\
\dot{v} &= \xi_1 + \xi_2 v + t_1(\xi_1,\xi_2)u^2 + t_2(\xi_1,\xi_2)uv + \mathcal{O}(|u,v,\xi_1,\xi_2|^3).
\end{aligned}$$

Como $t_1(0,0) \neq 0,\ t_2(0,0) \neq 0$, se tiene que $t_1(\xi_1,\xi_2) \neq 0,\ t_2(\xi_1,\xi_2) \neq 0$, en un entorno del origen.

De este punto de bifurcación de Takens-Bogdanov no degenerado emergen la bifurcación silla-nodo sn, de los equilibrios (R^-, Z^-) y (R^+, Z^+), la bifurcación de Hopf H, que experimenta el equilibrio (R^+, Z^+), y una bifurcación homoclina **Ho** del equilibrio (R^-, Z^-). Notemos que el cambio de carácter de la bifurcación de Takens-Bogdanov al pasar por $A_3A_4B = 1$ está en concordancia con la condición de degeneración obtenida para la bifurcación de Hopf en la proposición 2.3.1. ■

Hay cuatro puntos de bifurcación, de codimensión tres, correspondientes a los casos degenerados analizados en Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*a*), (2000), (1999b) y Krauskopf y Rousseau (1997).

Estos puntos están localizados en:

$$\mathsf{HPDC}_1 \equiv \{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_4 \neq 0\}.$$
$$\mathsf{HPDC}_2 \equiv \{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0, \quad \varepsilon_3 \neq 0\}.$$
$$\mathsf{HPDC}_3 \equiv \{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = B\varepsilon_4, \quad \varepsilon_4 \neq 0\}.$$
$$\mathsf{HSND} \equiv \left\{\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_3^2}{4A_3}, \quad \varepsilon_2 = \frac{B\varepsilon_3}{2A_3}, \quad \varepsilon_4 = \frac{A_4\varepsilon_3}{2A_3}, \quad A_3\varepsilon_3 < 0\right\}.$$

Vamos a analizar cada una de estas degeneraciones para ver si aportan nuevas bifurcaciones, al margen de las detectadas hasta ahora, en relación al sistema que estamos estudiando (2.16).

Análisis de la degeneración $\mathsf{HPDC}_1 \equiv \{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_4 \neq 0\}$.

En primer lugar escalamos $\varepsilon_4 = 1$, en el sistema (2.16), mediante el cambio dado por

$$R \to R, \quad Z \to \frac{1}{|\varepsilon_4|}Z, \quad t \to \operatorname{sgn}(\varepsilon_4)t,$$

obteniéndose el nuevo sistema

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R\left(\varepsilon_1^* + \varepsilon_3^* R + Z + A_3^* R^2 + A_4^* RZ\right), \\ \dot{Z} &= Z\left(\varepsilon_2^* + B^* R + DZ\right), \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde

$$\varepsilon_1^* = \operatorname{sgn}(\varepsilon_4)\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2^* = \operatorname{sgn}(\varepsilon_4)\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3^* = \operatorname{sgn}(\varepsilon_4)\varepsilon_3,$$
$$A_3^* = \operatorname{sgn}(\varepsilon_4)A_3, \quad A_4^* = \frac{A_4}{\varepsilon_4}, \quad B^* = \operatorname{sgn}(\varepsilon_4)B, \quad D = \frac{1}{\varepsilon_4}.$$

Nuestro objetivo es llegar al despliegue obtenido en Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*a*) para el caso de la degeneración no lineal de la bifurcación Hopf-pitchfork $a_1 = 0$, para lo cual realizamos en el sistema (2.31) el cambio

$$R \to R - \left(\frac{A_4^*(1-D)}{2-D} + \mathcal{O}(|\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*|)\right) R^2,$$

$$Z \rightarrow Z + \left(\frac{A_4^* D}{2-D} + \mathcal{O}(|\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*|) \right) RZ,$$

$$t \rightarrow \left(1 - \left(\frac{A_4^*(1-D)}{2-D} + \mathcal{O}(|\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*|) \right) R \right) t,$$

lo que nos lleva al sistema

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R\left(\varepsilon_1^* + \varepsilon_3^{**} R + Z + A_3^{**} R^2\right), \\ \dot{Z} &= Z\left(\varepsilon_2^* + B^{**} R + DZ\right), \end{aligned}$$

con

$$\varepsilon_3^{**} = -\left(\frac{2A_4^*(1-D)}{2-D} \right) \varepsilon_1^* + \varepsilon_3^* + \mathcal{O}(|(\varepsilon_1^*)^2, \varepsilon_1^* \varepsilon_2^*, \varepsilon_1^* \varepsilon_3^*|),$$
$$A_3^{**} = A_3^* + \mathcal{O}(|\varepsilon_1^*, \varepsilon_3^*|), \quad B^{**} = B^* + \mathcal{O}(|\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*|).$$

Finalmente mediante el escalado en las variables

$$R \rightarrow \frac{A_3^* B^{**}}{A_3^{**} B^*} R, \quad Z \rightarrow \frac{A_3^* (B^{**})^2}{A_3^{**} (B^*)^2} Z, \quad t \rightarrow \frac{A_3^{**} (B^*)^2}{A_3^* (B^{**})^2} t,$$

el sistema adopta la forma buscada

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R\left(\varepsilon_1^{**} + \varepsilon_3^{***} R + Z + A_3^* R^2\right), \\ \dot{Z} &= Z\left(\varepsilon_2^{**} + B^* R + DZ\right), \end{aligned} \tag{2.32}$$

siendo

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{**} &= \varepsilon_1^* + \mathcal{O}(|(\varepsilon_1^*)^2, \varepsilon_1^* \varepsilon_2^*, \varepsilon_1^* \varepsilon_3^*|), \quad \varepsilon_2^{**} = \varepsilon_2^* + \mathcal{O}(|\varepsilon_1^* \varepsilon_2^*, (\varepsilon_2^*)^2, \varepsilon_2^* \varepsilon_3^*|), \\ \varepsilon_3^{***} &= \varepsilon_3^{**} + \mathcal{O}(|\varepsilon_2^* \varepsilon_3^*|), \quad A_3^* = \operatorname{sgn}(\varepsilon_4) A_3 = \pm 1, \quad B^* = \operatorname{sgn}(\varepsilon_4) B = \pm 1, \\ D &= \frac{1}{\varepsilon_4} \neq 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Desde el punto de vista de las bifurcaciones los sistemas, (2.32) y (2.16), son equivalentes cuando $\varepsilon_4 \neq 0$.

El análisis del sistema (2.32) ha sido realizado en Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*a*). En dicho estudio aparecen las siguientes bifurcaciones:

De codimensión 1

- Las curvas T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, SN, H y Het_1.

  Notemos que en el citado trabajo no pueden coexistir los dos equilibrios situados fuera de los ejes (R^-, Z^-) y (R^+, Z^+). La bifurcación de Hopf se presenta en este caso cuando $B^* = -1$ y $D\varepsilon_3^{***} < 0$, o bien, en términos de los parámetros del sistema original (2.16), cuando $\operatorname{sgn}(\varepsilon_4) B = -1$ y $\varepsilon_3 < 0$. Obsérvese que

la bifurcación de Hopf no se degenera nunca para los valores de los parámetros correspondientes a las ecuaciones (1.1). En efecto, de acuerdo con la proposición 2.3.1, al ser $A_3A_4B = \mathrm{sgn}(-a^2\gamma^2(1+2\gamma)^2)\dfrac{81}{5} = -\dfrac{81}{5} < 1$, no hay degeneración en la bifurcación de Hopf.

Para $A_3 = B = 1$ y $\varepsilon_4 < 0$ existe una superficie de conexiones heteroclinas

$$\mathsf{Het}_1 \equiv \left\{ \varepsilon_1 = (1-\varepsilon_4)\varepsilon_2\varepsilon_3 - (1-\varepsilon_4)^2\varepsilon_2^2 + \mathcal{O}(3), \right.$$
$$\left. 0 \le \varepsilon_1 \le \frac{\varepsilon_3^2}{4} + \mathcal{O}(3),\ \varepsilon_2 \le 0,\ \varepsilon_3 \le 0 \right\},$$

donde tiene lugar una conexión heteroclina entre los equilibrios hiperbólicos de tipo silla $(0, -\varepsilon_2)$ y $(R_-, 0)$. En dicha conexión heteroclina finaliza la órbita periódica que surge en la bifurcación de Hopf H.

De codimensión 2

- Los puntos HP_1, HP_2, DT, A y S_1.

  Los puntos HP_1 y HP_2, dado que en este caso ε_4 es fijo, corresponden a los puntos HP ya detectados cuando $\varepsilon_3\varepsilon_4 < 0$ y $\varepsilon_3\varepsilon_4 > 0$ respectivamente. El punto DT corresponde al punto DT_1 de nuestro estudio y el punto A se desglosa en nuestro caso en los puntos A_1 y A_2.

  Análogamente para $A_3 = B = 1$ y $\varepsilon_4 < 0$ existe una curva de conexiones heteroclinas

$$\mathsf{S}_1 \equiv \left\{ \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_3^2}{4},\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_3}{2(1-\varepsilon_4)} + \mathcal{O}(\varepsilon_3^2),\ \varepsilon_3 \le 0 \right\},$$

  donde tiene lugar una conexión heteroclina entre el equilibrio hiperbólico silla $(0, -\varepsilon_2)$ y el punto de silla-nodo $\left(\dfrac{-\varepsilon_3}{2A_3}, 0\right)$, donde se cumple que $(R_-, 0) = (R_+, 0)$.

Hemos esquematizado en la tabla 2.1 el análisis de las distintas posibilidades para el despliegue (2.16), correspondiente a la primera degeneración analizada HPDC_1. Hacemos notar que de los doce casos obtenidos en Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*a*) sólo ocho están presentes en el despliegue (2.16). Cada uno de los ocho despliegues de codimensión tres de la tabla 2.1 involucra un par de despliegues de codimensión dos del campo vectorial plano con $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-simetría (ver tabla 2.2).

Representamos los conjuntos de bifurcaciones en un entorno de la singularidad de codimensión tres, por intersección del espacio de parámetros con una esfera y deformando ésta en un plano. La idea geométrica es conectar los respectivos casos para $\varepsilon_3^{***} < 0 \Leftrightarrow \varepsilon_3\varepsilon_4 < 0$, y $\varepsilon_3^{***} > 0 \Leftrightarrow \varepsilon_3\varepsilon_4 > 0$, sobre la superficie de la esfera.

Hacemos notar que los conjuntos de bifurcaciones correspondientes a los casos HPDC_1vi y HPDC_1vii (ver figuras 5 y 8 del trabajo Algaba, Freire, Gamero y

Tabla 2.1: Diferentes despliegues para el sistema (2.16).

Caso HPDC_1i	$\varepsilon_4 < 0$	$A_3 = +1$	$B = -1$
Caso HPDC_1ii	$\varepsilon_4 < 0$	$A_3 = -1$	$B = -1$
Caso HPDC_1iii	$\varepsilon_4 > 0$	$A_3 = -1$	$B = +1$
Caso HPDC_1iv	$\varepsilon_4 > 0$	$A_3 = +1$	$B = +1$
Caso HPDC_1v	$\varepsilon_4 < 0$	$A_3 = +1$	$B = +1$
Caso HPDC_1vi	$\varepsilon_4 < 0$	$A_3 = -1$	$B = +1$
Caso HPDC_1vii	$0 < \varepsilon_4 < 1/2$	$A_3 = +1$	$B = -1$
Caso HPDC_1viii	$0 < \varepsilon_4 < 1/2$	$A_3 = -1$	$B = -1$

Tabla 2.2: Pares de despliegues de codimensión dos (siguiendo la notación de Guckenheimer & Holmes) asociados a cada uno de los casos de la tabla (2.1).

	Despliegues de codim. dos para $\varepsilon_4\varepsilon_3 < 0$	Despliegues de codim. dos para $\varepsilon_4\varepsilon_3 > 0$
Caso HPDC_1i	IVb	V
Caso HPDC_1ii	IVb	V
Caso HPDC_1iii	VIII	Ib
Caso HPDC_1iv	VIII	Ib
Caso HPDC_1v	III	VIa
Caso HPDC_1vi	III	VIa
Caso HPDC_1vii	VIIa	II
Caso HPDC_1viii	VIIa	II

Rodríguez-Luis (1999*a*)) contienen además, lejos de las bifurcaciones locales encontradas, una conexión heteroclina Het_5 entre los equilibrios hiperbólicos de tipo silla $(R_+, 0)$ y $(R_-, 0)$, y una bifurcación de codimensión dos TH, donde T_1, Het_1 y Het_5 intersecan.

En el caso HPDC_1viii, dado que $\varepsilon_4 > 0$, no está presente la conexión heteroclina Het_1 y la órbita periódica que surge de la bifurcación de Hopf H, relativa al equilibrio (R^+, Z^+), desaparece en una conexión homoclina del equilibrio hiperbólico de tipo silla

$$(R^-, Z^-) = (\varepsilon_4 + \mathcal{O}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \varepsilon_4^2 + \mathcal{O}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)).$$

Esta bifurcación homoclina emerge desde el punto de codimensión dos de Takens-Bogdanov TB. La bifurcación TB aparece en los casos HPDC_1vi y HPDC_1viii y en ella finaliza la curva de bifurcación de Hopf H. En el trabajo Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*a*) esta bifurcación TB está muy lejos del origen, ya que tanto ella como el equilibrio (R^-, Z^-) del caso HPDC_1viii son del orden de la unidad, por ello no aparece la bifurcación TB, cuando se corta con la esfera, en el conjunto de bifurcaciones de la figura 5 del citado trabajo.

De todos los casos posibles únicamente vamos a representar los conjuntos de bifurcaciones correspondientes a valores de los parámetros en un entorno de la degeneración no lineal Hopf-pitchfork **HPD**, que aparecen para $a = -1$ en las ecuaciones (1.1), al objeto de poder confrontarlos con los que se obtengan en la simulación numérica que vamos a realizar de las ecuaciones en la sección 2.4. Además como $B = \mathrm{sgn}(\gamma(2\gamma + 1))$, y de acuerdo a la figura 2.1 la degeneración se presenta para $\gamma < -1$ ó $\gamma > 0$, se tiene que $B = +1$. Por último dado que $\gamma \approx 0$, tomaremos $\gamma > 0$, lo cual implica que $A_3 = \mathrm{sgn}(-a\gamma) = +1$ y $A_4 = \mathrm{sgn}(a(2\gamma + 1))\dfrac{81}{5} = -\dfrac{81}{5} < 0$. En consecuencia los casos a dibujar son HPDC_1iv y HPDC_1v.

En la figura 2.3 hemos dibujado la proyección en el plano $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ del conjunto parcial de bifurcaciones, en un entorno de la degeneración $\mathsf{HPDC} \equiv \{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0\}$, para los valores $A_3 = B = +1,\ A_4 = -\dfrac{81}{5}$ del despliegue (2.16). En ella se observan los pares correspondientes a los casos no degenerados, siguiendo la notación de Guckenheimer & Holmes, que están conectados al atravesar la recta de codimensión tres HPDC_1. También aparecen las bifurcaciones locales de codimensión dos estudiadas que están presentes en los conjuntos de bifurcaciones correspondientes a cada uno de los casos no degenerados. Estos conjuntos de bifurcaciones están representados en el plano de parámetros $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ en la figura 2.4. En ella hemos utilizado el color verde para indicar las curvas que al atravesarlas, en uno u otro sentido, dan lugar a un punto de equilibrio inestable de tipo silla, si el punto de equilibrio es inestable de tipo nodo o foco lo hemos representado mediante el color rojo y si es un punto de equilibrio estable mediante el azul. El color negro lo hemos usado para los casos en los que surgen dos puntos de equilibrio o bien cuando sobre una curva se producen conexiones globales entre los equilibrios. Las configuraciones de los equilibrios y retratos de fases están dibujadas esquemáticamente en la figura 2.12. En relación a los equilibrios situados fuera de los ejes en la citada figura, recordamos que el equilibrio (R^-, Z^-) es siempre de tipo silla mientras que el equilibrio (R^+, Z^+) aparece con una configuración de tipo nodo o foco. Con respecto a los equilibrios situados sobre el semieje positivo del eje R hacemos notar que si aparece sólo uno se trata del equilibrio $(R_+, 0)$, y si aparecen los dos es $(R_-, 0)$ el equilibrio mas próximo al origen $(0, 0)$.

Obsérvese que en nuestro caso, es decir en el sistema (2.16), hay nuevas bifurcaciones locales en relación a la degeneración analizada en Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*a*). En efecto, en el caso HPDC_1iv aparece una degeneración de codimesión dos DT_5, sobre la curva T_5, de la cual surge una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas sn. Análogamente en el caso HPDC_1v aparece una degeneración de codimesión dos DT_3, sobre la curva T_3, de la cual surge otra bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas sn. También están presentes nuevas bifurcaciones globales, que surgen al estudiar la degeneración HSND, como son la curva de conexiones heteroclinas Het_2 que une los equilibrios hiperbólicos de tipo silla $(R_+, 0)$ y (R^-, Z^-), así como los puntos de conexiones heteroclinas S_2, uniendo el equilibrio hiperbólico de tipo silla $(R_+, 0)$ con el equilibrio silla-nodo $(R^-, Z^-) = (R^+, Z^+)$, donde se cortan

las curvas sn y Het_2, y el punto S_3, que une el equilibrio hiperbólico de tipo silla (R^-, Z^-) con el equilibrio silla-nodo $(R_-, 0) = (R_+, 0)$, donde se cortan las curvas SN y Het_2.

Observemos que en el conjunto de bifurcaciones de la figura 2.4 correspondiente al primer caso HPDC_1iv, al ser $\varepsilon_4 > 0$ y $\mathrm{sgn}(\varepsilon_4)B = +1$, no está presente la bifurcación de Hopf H, ni tampoco las nuevas bifurcaciones Het_1 y S_1 para el sistema (2.16); lo contrario sucede en el caso HPDC_1v.

Notemos que en el caso particular $B = 1$, $A_3 - A_4 = 0$, sólo están presentes los casos HPDC_1iii, HPDC_1iv, HPDC_1v y HPDC_1vi.

Análisis de la degeneración $\mathsf{HPDC}_2 \equiv \{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0, \ \ \varepsilon_3 \neq 0\}$.

El objetivo ahora es llegar al despliegue obtenido en Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (2000) para el caso de la degeneración no lineal de la bifurcación Hopf-pitchfork $a_2 = 0$. Realizando cambios de variables, en el sistema (2.16), análogos al caso anterior HPDC_1 obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R\left(\varepsilon_1^* + R + \varepsilon_4^* Z + A_5 Z^2\right), \\ \dot{Z} &= Z\left(\varepsilon_2^* + B^* R + DZ\right), \end{aligned} \tag{2.33}$$

donde

$$\varepsilon_1^* = \mathrm{sgn}(\varepsilon_3)\varepsilon_1, \ \ \varepsilon_2^* = \mathrm{sgn}(\varepsilon_3)\varepsilon_2, \ \ \varepsilon_4^* = \mathrm{sgn}(\varepsilon_3)\varepsilon_4 - \frac{\mathrm{sgn}(\varepsilon_3)A_4}{B - \varepsilon_3}\varepsilon_2 + \mathcal{O}(|\varepsilon_1\varepsilon_2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_2\varepsilon_4|),$$

$$A_5 = \frac{A_4 D}{\varepsilon_3 - B} + \mathcal{O}(|\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4|) \neq 0, \ \ B^* = \frac{B}{\varepsilon_3} + \mathcal{O}(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|) \neq 0, \ \ D = \mathrm{sgn}(\varepsilon_3) = \pm 1.$$

Desde el punto de vista de las bifurcaciones los sistemas, (2.33) y (2.16), son equivalentes cuando $\varepsilon_3 \neq 0$.

El análisis del sistema (2.33) ha sido realizado en Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (2000). Todas las bifurcaciones que aparecen en dicho estudio han sido detectadas aquí, a saber:

De codimensión 1

- Las curvas T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5.

  Hacemos notar que en el trabajo citado, al existir un solo equilibrio sobre el semieje positivo del eje R, está presente únicamente una de las curvas $\mathsf{T}_{4,5}$. En nuestro caso (2.33) este equilibrio tiene coordenadas $(-\mathrm{sgn}(\varepsilon_3)\varepsilon_1, 0)$; haciendo un desarrollo en serie de la primera coordenada del equilibrio $(R_\pm, 0)$ correspondiente al sistema (2.16), se obtiene que si $\varepsilon_3 > 0$ este equilibrio es el equilibrio $(R_+, 0)$, mientras que si $\varepsilon_3 < 0$ se trata del equilibrio $(R_-, 0)$. En consecuencia, en nuestro caso aparecen ambas curvas T_4 y T_5.

De codimensión 2

- Los puntos HP_1 y HP_2.

  Obsérvese que los puntos HP_1 y HP_2, dado que en este caso ε_3 es fijo, corresponden a los puntos HP ya detectados cuando $\varepsilon_3\varepsilon_4 < 0$ y $\varepsilon_3\varepsilon_4 > 0$ respectivamente.

Hemos esquematizado en la tabla 2.3 el análisis de las distintas posibilidades para el despliegue (2.16), correspondiente a la segunda degeneración analizada HPDC_2. Hacemos notar que los cuatro casos obtenidos en Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (2000) están presentes en el despliegue (2.16). Cada uno de los cuatro despliegues de codimensión tres de la tabla 2.3 involucra un par de despliegues de codimensión dos del campo vectorial plano con $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-simetría (ver tabla 2.4).

Tabla 2.3: Diferentes despliegues para el sistema (2.16).

Caso HPDC_2i	$\varepsilon_3 > 0$	$B = +1$
Caso HPDC_2ii	$\varepsilon_3 > 0$	$B = -1$
Caso HPDC_2iii	$\varepsilon_3 < 0$	$B = -1$
Caso HPDC_2iv	$\varepsilon_3 < 0$	$B = +1$

Tabla 2.4: Pares de despliegues de codimensión dos (siguiendo la notación de Guckenheimer & Holmes) asociados a cada uno de los casos de la tabla (2.3).

	Despliegues de codim. dos para $\varepsilon_3\varepsilon_4 < 0$	Despliegues de codim. dos para $\varepsilon_3\varepsilon_4 > 0$
Caso HPDC_2i	III	Ia
Caso HPDC_2ii	IVa	II
Caso HPDC_2iii	VIIb	V
Caso HPDC_2iv	VIII	VIb

Representamos los conjuntos de bifurcaciones en un entorno de la singularidad de codimensión tres, por intersección del espacio de parámetros con una esfera y deformando ésta en un plano. La idea geométrica es conectar los respectivos casos para $\varepsilon_4^* < 0 \Leftrightarrow \varepsilon_3\varepsilon_4 < 0$, y $\varepsilon_4^* > 0 \Leftrightarrow \varepsilon_3\varepsilon_4 > 0$, sobre la superficie de la esfera.

Siguiendo el criterio elegido en el análisis de la degeneración HPDC_1, dado que era $B = +1$, los casos a dibujar son HPDC_2i y HPDC_2iv.

En la figura 2.3 podemos observar los pares correspondientes a los casos no degenerados, siguiendo la notación de Guckenheimer & Holmes, que están conectados al atravesar la recta de codimensión tres HPDC_2. También aparecen las bifurcaciones locales de codimensión dos estudiadas que están presentes en los conjuntos de bifurcaciones correspondientes a cada uno de los casos no degenerados. Estos conjuntos

de bifurcaciones están representados en el plano de parámetros $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ en la figura 2.5. Las configuraciones de los equilibrios y retratos de fases están dibujadas esquemáticamente en la figura 2.12.

Notemos que en ambos casos, para el sistema (2.16), hay nuevas bifurcaciones locales que no están presentes en los casos homólogos del trabajo de Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (2000). En efecto, sobre las curvas T_3 y T_4 hay puntos de degeneración DT_3 y DT_4 de los cuales surge una curva de bifurcación silla-nodo sn. Además en el caso HPDC_2iv aparecen otras bifurcaciones locales, la curva SN de codimensión uno, y los puntos A_2 y TB de codimensión dos. Estos puntos están unidos por la curva de bifurcación de Hopf H, que experimenta el equilibrio (R^+, Z^+), y la de conexiones homoclinas **Ho** que experimenta el equilibrio (R^-, Z^-). Finalmente aparece también una curva de conexiones heteroclinas Het_3 que une los equilibrios hiperbólicos de tipo silla $(R_-, 0)$ y (R^-, Z^-), así como los puntos de conexiones heteroclinas S_4, uniendo el equilibrio hiperbólico de tipo silla $(R_-, 0)$ con el equilibrio silla-nodo $(R^-, Z^-) = (R^+, Z^+)$, donde se cortan las curvas sn y Het_3, y el punto S_3 donde se cortaban las curvas SN y Het_2. Estas bifurcaciones globales surgen al estudiar la degeneración HSND.

Notemos que en el caso particular $B = 1$, $A_3 - A_4 = 0$, sólo están presentes los casos HPDC_2i y HPDC_2iv.

Análisis de la degeneración $\mathsf{HPDC}_3 \equiv \{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = B\varepsilon_4, \quad \varepsilon_4 \neq 0\}$.

Al objeto de llegar al despliegue obtenido en Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*b*) para el caso de la degeneración no lineal de la bifurcación Hopf-pitchfork $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, realizamos nuevamente cambios análogos a los del caso HPDC_1 en el sistema (2.16), obteniéndose

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R\left(\varepsilon_1^* + BR + Z\right), \\ \dot{Z} &= Z\left(\varepsilon_2^* + (BD - \varepsilon_3^*)R + DZ + A_5 R^2\right), \end{aligned} \tag{2.34}$$

donde

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1^* = \frac{|-A_3 + A_4 B|}{\varepsilon_4^3}\varepsilon_1 + \mathcal{O}(2), \quad \varepsilon_2^* = \frac{|-A_3 + A_4 B|}{\varepsilon_4^3}\varepsilon_2 + \mathcal{O}(2), \\ &\varepsilon_3^* = \frac{\varepsilon_3 - B\varepsilon_4}{\varepsilon_4^2} - \frac{A_3 + A_4 B}{B\varepsilon_4^3}\varepsilon_1 + \frac{A_3}{B\varepsilon_4^2}\varepsilon_2 + \mathcal{O}(2), \\ &D = \frac{1}{\varepsilon_4} \neq 0, 1, \quad A_5 = \operatorname{sgn}(-A_3 + A_4 B) = \pm 1. \end{aligned}$$

Desde el punto de vista de las bifurcaciones, los sistemas (2.34) y (2.16) son equivalentes cuando $\varepsilon_3 = B\varepsilon_4$ con $\varepsilon_4 \neq 0$.

El análisis del sistema (2.34) ha sido realizado en Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*b*). En dicho estudio aparecen las siguientes bifurcaciones:

De codimensión 1

- Las curvas T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, sn, H, **Ho**, Het_1, Het_3 y Het_4.

  Hacemos notar que en el trabajo citado, al existir un solo equilibrio sobre el semieje positivo del eje R, está presente únicamente una de las curvas $\mathsf{T}_{4,5}$. En nuestro caso (2.34) este equilibrio tiene de coordenadas $\left(-\frac{\varepsilon_1^*}{B}, 0\right)$; haciendo un desarrollo en serie de la primera coordenada del equilibrio $(R_\pm, 0)$ correspondiente al sistema (2.16), se obtiene que si $B\varepsilon_4 > 0$ este equilibrio es el $(R_+, 0)$, mientras que si $B\varepsilon_4 < 0$ se trata del equilibrio $(R_-, 0)$. En consecuencia, en nuestro caso aparecen ambas curvas T_4 y T_5.

  La bifurcación de Hopf se presenta en este caso cuando $BD < 0$ y $\varepsilon_3^* > 0$, o bien en términos de los parámetros del sistema original (2.16) cuando $B\varepsilon_4 < 0$ y $\varepsilon_3 - B\varepsilon_4 > 0$. Finalmente la conexión homoclina **Ho**, que está organizada por el punto de codimensión dos TB y da lugar a la desaparición de la órbita periódica que surge de la bifurcación de Hopf H, está presente en los casos HPDC_3v, HPDC_3vi, HPDC_3vii y HPDC_3viii.

  Para $\varepsilon_3 - B\varepsilon_4 > 0$ y fijo, hay tres curvas de conexiones heteroclinas, Het_1, Het_3 y Het_4, en el plano de parámetros $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

  El policiclo hiperbólico Het_1, que relaciona el origen $(0, 0)$ con los equilibrios hiperbólicos de tipo silla $(0, -\varepsilon_2)$ y $(R_-, 0)$, aparece en los casos HPDC_3vii y HPDC_3viii (ver tablas 2.5 y 2.6). La conexión heteroclina Het_3, que une los equilibrios hiperbólicos de tipo silla $(R_-, 0)$ y (R^-, Z^-), está presente en los casos HPDC_3v, HPDC_3vi y HPDC_3vii y la conexión heteroclina Het_4, que involucra a los equilibrios hiperbólicos de tipo silla $(0, -\varepsilon_2)$ y (R^-, Z^-), aparece en los casos HPDC_3v, HPDC_3vi y HPDC_3viii.

De codimensión 2

- Los puntos HP_1, HP_2, DT_3, DT_4, DT_5, TB, S_4 y S_5.

  Los puntos HP_1 y HP_2, dado que en este caso ε_4 es fijo, corresponden a los puntos HP ya detectados cuando $\varepsilon_3 - B\varepsilon_4 < 0$ y $\varepsilon_3 - B\varepsilon_4 > 0$.

  Para $\varepsilon_3 - B\varepsilon_4 > 0$ y fijo, hay dos puntos de conexiones heteroclinas, S_4 y S_5, en el plano de parámetros $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

  La conexión heteroclina S_4 donde se cortaban las curvas sn y Het_3 y la conexión heteroclina S_5, que une el equilibrio hiperbólico de tipo silla $(0, -\varepsilon_2)$ con el equilibrio silla-nodo $(R^-, Z^-) = (R^+, Z^+)$, donde se cortan las curvas sn y Het_4.

Hemos esquematizado en la tabla 2.5 el análisis de las distintas posibilidades para el despliegue (2.16), correspondiente a la tercera degeneración analizada HPDC_3. Hacemos notar que de los diez casos obtenidos en Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*b*) sólo ocho están presentes en el despliegue (2.16). Cada uno de los ocho despliegues de codimensión tres de la tabla 2.5 involucra un par de despliegues de codimensión dos del campo vectorial plano con $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-simetría (ver tabla 2.6).

Tabla 2.5: Diferentes despliegues para el sistema (2.16) en el caso general.

Caso HPDC_3i	$\varepsilon_4 > 0$	$B = +1$	$\mathrm{sgn}(-A_3 + A_4 B) = +1$
Caso HPDC_3ii	$\varepsilon_4 > 0$	$B = +1$	$\mathrm{sgn}(-A_3 + A_4 B) = -1$
Caso HPDC_3iii	$\varepsilon_4 < 0$	$B = -1$	$\mathrm{sgn}(-A_3 + A_4 B) = +1$
Caso HPDC_3iv	$\varepsilon_4 < 0$	$B = -1$	$\mathrm{sgn}(-A_3 + A_4 B) = -1$
Caso HPDC_3v	$0 < \varepsilon_4 < 1$	$B = -1$	$\mathrm{sgn}(-A_3 + A_4 B) = +1$
Caso HPDC_3vi	$0 < \varepsilon_4 < 1$	$B = -1$	$\mathrm{sgn}(-A_3 + A_4 B) = -1$
Caso HPDC_3vii	$\varepsilon_4 < 0$	$B = +1$	$\mathrm{sgn}(-A_3 + A_4 B) = -1$
Caso HPDC_3viii	$\varepsilon_4 < 0$	$B = +1$	$\mathrm{sgn}(-A_3 + A_4 B) = +1$

Tabla 2.6: Pares de despliegues de codimensión dos (siguiendo la notación de Guckenheimer & Holmes) asociados a cada uno de los casos de la tabla (2.5).

	Despliegues de codim. dos para $\varepsilon_3 - B\varepsilon_4 < 0$	Despliegues de codim. dos para $\varepsilon_3 - B\varepsilon_4 > 0$
Caso HPDC_3i	Ib	Ia
Caso HPDC_3ii	Ib	Ia
Caso HPDC_3iii	IVb	IVa
Caso HPDC_3iv	IVb	IVa
Caso HPDC_3v	VIIb	VIIa
Caso HPDC_3vi	VIIb	VIIa
Caso HPDC_3vii	VIb	VIa
Caso HPDC_3viii	VIb	VIa

Representamos los conjuntos de bifurcaciones en un entorno de la singularidad de codimensión tres, por intersección del espacio de parámetros con una esfera y deformando ésta en un plano. La idea geométrica es conectar los respectivos casos para $\varepsilon_3^* < 0 \Leftrightarrow \varepsilon_3 - B\varepsilon_4 < 0$, y $\varepsilon_3^* > 0 \Leftrightarrow \varepsilon_3 - B\varepsilon_4 > 0$, sobre la superficie de la esfera.

Siguiendo el criterio elegido en el análisis de la degeneraciones HPDC_1 y HPDC_2, para ver qué conjuntos de bifurcaciones debemos representar necesitamos calcular el signo de $(-A_3 + A_4 B)$ para las ecuaciones (1.1)

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(-A_3 + A_4 B) &= \mathrm{sgn}\left(-\mathrm{sgn}(-a\gamma) + \mathrm{sgn}(\gamma(1+2\gamma))\mathrm{sgn}(a(1+2\gamma))\frac{81}{5}\right) \\ &= \mathrm{sgn}(a\gamma) = -A_3.\end{aligned}$$

En consecuencia, dado que $A_3 = +1$ y $B = +1$, los casos a representar son HPDC_3ii y HPDC_3vii. En la figura 2.3 se observan los pares correspondientes a los casos no degenerados, siguiendo la notación de Guckenheimer & Holmes, que están conectados al atravesar la recta de codimensión tres HPDC_3. También aparecen las bifurcaciones locales de codimensión dos estudiadas que están presentes en los conjuntos

Tabla 2.7: Diferentes despliegues para el sistema (2.16) en el caso $B = 1,\ A_3 = A_4$.

Caso HPDC_3i-ii	$\varepsilon_4 > 0$	$A_3 = -1$
Caso HPDC_3ii-i	$\varepsilon_4 > 0$	$A_3 = +1$
Caso HPDC_3vii-viii	$\varepsilon_4 < 0$	$A_3 = -1$
Caso HPDC_3viii-vii	$\varepsilon_4 < 0$	$A_3 = +1$

Tabla 2.8: Pares de despliegues de codimensión dos asociados a cada uno de los casos de la tabla (2.7).

	Despliegues de codim. dos para $\varepsilon_3 - \varepsilon_4 < 0$	Despliegues de codim. dos para $\varepsilon_3 - \varepsilon_4 > 0$
Caso HPDC_3i-ii	Ib (HPDC_3i)	Ia (HPDC_3ii)
Caso HPDC_3ii-i	Ib (HPDC_3ii)	Ia (HPDC_3i)
Caso HPDC_3vii-viii	VIb (HPDC_3vii)	VIa (HPDC_3viii)
Caso HPDC_3viii-vii	VIb (HPDC_3viii)	VIa (HPDC_3vii)

de bifurcaciones correspondientes a cada uno de los casos no degenerados. Estos conjuntos de bifurcaciones están representados en el plano de parámetros $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ en la figura 2.6. Las configuraciones de los equilibrios y retratos de fases están dibujadas esquemáticamente en la figura 2.12.

El conjunto de bifurcaciones correspondiente al caso HPDC_3vii presenta, con respecto a su homólogo del trabajo Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*b*), nuevas bifurcaciones de codimensión uno, la curva SN, y de codimensión dos, el punto A_2 y las conexiones heteroclinas S_1 y S_3. Tanto el punto A_2 como las conexiones heteroclinas, presentes en el análisis de la degeneraciones HPDC_1 o HPDC_2, no aparecen en el citado trabajo por no existir la curva SN. Nótese que en el caso HPDC_3ii, al ser $B\varepsilon_4 > 0$ no puede presentarse la bifurcación de Hopf H; lo contrario sucede en el caso HPDC_3vii.

En el caso $B = 1$, $A_3 - A_4 = 0$ necesitamos considerar términos de orden más alto en los coeficientes $\varepsilon_1^*,\ \varepsilon_2^*$ y A_5 del sistema (2.34), ya que $(-A_3 + A_4 B) = 0$, resultando

$$\varepsilon_1^* = L\,\mathrm{sgn}(\varepsilon_4)\varepsilon_1 + \mathcal{O}(2), \quad \varepsilon_2^* = L\,\mathrm{sgn}(\varepsilon_4)\varepsilon_2 + \mathcal{O}(2),$$
$$\varepsilon_3^* = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_4}{\varepsilon_4^2} - \frac{2A_3}{\varepsilon_4^3}\,\varepsilon_1 + \frac{A_3}{\varepsilon_4^2}\,\varepsilon_2 + \mathcal{O}(2), D = \frac{1}{\varepsilon_4} \neq 0, 1, \quad A_5 = \mathrm{sgn}(A_3(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)\varepsilon_4) = \pm 1,$$

donde L es el valor absoluto de una función que depende de ε_3 y ε_4.

Como se observa en la expresión del coeficiente A_5, éste depende ahora del signo de ε_3^* y, por tanto, aparecen nuevos casos que hemos recogido en la tabla 2.7. Estos casos tienen la particularidad de unir un despliegue de codimensión dos que aparece en el caso HPDC_3i, con otro despliegue de codimensión dos presente en el caso HPDC_3ii, lo mismo sucede en relación a los casos HPDC_3vii y HPDC_3viii, ello justifica la notación utilizada en las tablas 2.7 y 2.8 para estos casos.

Análisis de la degeneración HSND.

El campo vectorial (2.29), en el valor crítico de los parámetros correspondientes a la degeneración HSND, adopta la expresión

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2Br_+xy + x^3 + Bxy^2,\\ \dot{y} &= -2\varepsilon_3 r_+ y^2 + 2A_4 r_+^2 x^2 y + (\varepsilon_3 + 10A_3 r_+^2)y^3\\ &\quad +3A_4 r_+ x^2 y^2 + 5A_3 r_+ y^4 + \mathcal{O}(|x,y|^5),\end{aligned} \tag{2.35}$$

en consecuencia el origen presenta una degeneración Hopf-silla-nodo, que analizamos a continuación.

Proposición 2.3.4 *El campo vectorial*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_{11}xy + x^3 + A_{12}xy^2,\\ \dot{y} &= B_{02}y^2 + B_{21}x^2y + B_{03}y^3 + B_{22}x^2y^2 + B_{04}y^4 + \mathcal{O}(|x,y|^5),\end{aligned} \tag{2.36}$$

con $A_{11}B_{02} \neq 0$, $A_{11} \neq B_{02}$, *y* $2A_{11} \neq B_{02}$ *es* C^ω*-equivalente al campo*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -axy - x^3 + \mathcal{O}(|x,y|^5),\\ \dot{y} &= -y^2 + bx^4 + \mathcal{O}(|x,y|^5),\end{aligned} \tag{2.37}$$

con $a = \dfrac{A_{11}}{B_{02}}$ *y* $b = -\dfrac{B_{02}\left[\dfrac{B_{21}(-2+B_{21})}{2(A_{11}-B_{02})} + \dfrac{B_{21}^2(-2A_{11}+B_{02})}{4(A_{11}-B_{02})^2}\right]}{\left(1 + \dfrac{A_{11}B_{21}}{2(A_{11}-B_{02})}\right)^2}$.

Demostración:

Haciendo el cambio $dt = (1 - Ay)d\tau$ se tiene

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_{11}xy + x^3 + (A_{12} - AA_{11})xy^2 - Ax^3y - AA_{12}xy^3,\\ \dot{y} &= B_{02}y^2 + B_{21}x^2y + (B_{03} - AB_{02})y^3 + (B_{22} - AB_{21})x^2y^2 + (B_{04} - AB_{03})y^4\\ &\quad +\mathcal{O}(|x,y|^5).\end{aligned}$$

Si tomamos $A = \dfrac{B_{03}}{B_{02}}$ podemos eliminar el término y^3 de la segunda ecuación, quedando el campo

$$f \equiv \begin{cases} \dot{x} = a_{11}xy + x^3 + a_{12}xy^2 + a_{13}xy^3 + a_{31}x^3y,\\ \dot{y} = b_{02}y^2 + b_{21}x^2y + b_{22}x^2y^2 + b_{04}y^4 + \mathcal{O}(|x,y|^5),\end{cases}$$

donde

$$a_{11} = A_{11}, \quad a_{12} = A_{12} - \frac{A_{11}B_{03}}{B_{02}}, \quad a_{13} = -\frac{A_{12}B_{03}}{B_{02}}, \quad a_{31} = -\frac{B_{03}}{B_{02}},$$

$$b_{02} = B_{02}, \quad b_{21} = B_{21}, \quad b_{22} = B_{22} - \frac{B_{03}B_{21}}{B_{02}}, \quad b_{04} = B_{04} - \frac{B_{03}^2}{B_{02}}.$$

Realizando una transformación de Lie, con generador $U = U_2 + U_3$, el campo transformado es $g = \phi \circ f$, donde ϕ es el flujo del campo U

$$g = f_2 + f_3 + [f_2, U_2] + f_4 + [f_2, U_3] + \frac{1}{2}[[f_2, U_2], U_2] + [f_3, U_2] + \mathcal{O}(|x, y|^5).$$

Dado que $f_2 = \begin{pmatrix} a_{11}xy \\ b_{02}y^2 \end{pmatrix}$, si tomamos $U_2 = \begin{pmatrix} Axy \\ Bx^2 \end{pmatrix}$ resulta

$$[f_2, U_2] = \begin{pmatrix} a_{11}Bx^3 - b_{02}Axy^2 \\ 2(b_{02} - a_{11})Bx^2y \end{pmatrix}.$$

Por tanto, si elegimos $A = \dfrac{a_{12}}{b_{02}}$ y $B = \dfrac{b_{21}}{2(a_{11} - b_{02})}$, dado que $b_{02} \neq 0$ y $a_{11} \neq b_{02}$, tenemos que

$$g_3 = \begin{pmatrix} \left(1 + \dfrac{a_{11}b_{21}}{2(a_{11} - b_{02})}\right) x^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{30}x^3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Tomando $U_3 = \begin{pmatrix} \widetilde{A}x^3 + \widetilde{B}xy^2 \\ \widetilde{C}x^2y + \widetilde{D}y^3 \end{pmatrix}$ se tiene que

$$[f_2, U_3] = \begin{pmatrix} (-2a_{11}\widetilde{A} + a_{11}\widetilde{C})x^3y + (-2b_{02}\widetilde{B} + a_{11}\widetilde{D})xy^3 \\ (b_{02} - 2a_{11})\widetilde{C})x^2y^2 - b_{02}\widetilde{D}y^4 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, dado que $a_{11} \neq 0$, $b_{02} \neq 0$ y $b_{02} - 2a_{11} \neq 0$, se pueden elegir los coeficientes $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}$ de manera que

$$g_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ g_{40}x^4 \end{pmatrix}.$$

Además, calculando $g_4 = f_4 + [f_2, U_3] + \dfrac{1}{2}[[f_2, U_2], U_2] + [f_3, U_2]$, con la elección adecuada de U_3 obtenemos que

$$g_{40} = (b_{21} - 2)B + (b_{02} - 2a_{11})B^2. \tag{2.39}$$

En consecuencia hemos llegado a que

$$g = \begin{pmatrix} g_{11}xy + g_{30}x^3 + \mathcal{O}(|x,y|^5) \\ g_{02}y^2 + g_{40}x^4 + \mathcal{O}(|x,y|^5) \end{pmatrix},$$

con $g_{11} = a_{11}$, $g_{02} = b_{02}$ y g_{30} y g_{40} dados en (2.38) y (2.39) respectivamente. Finalmente haciendo el escalado

$$x \to \sqrt{|g_{30}|}x, \quad y \to \mathrm{sgn}(g_{30})g_{02}y, \quad t \to -\mathrm{sgn}(g_{30})t,$$

nos queda el campo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -axy - x^3 + \mathcal{O}(|x,y|^5), \\ \dot{y} &= -y^2 + bx^4 + \mathcal{O}(|x,y|^5), \end{aligned}$$

donde $a = \dfrac{g_{11}}{g_{02}} = \dfrac{A_{11}}{B_{02}}$ y

$$b = -\frac{g_{02}g_{40}}{(g_{30})^2} = -\frac{B_{02}\left[\dfrac{B_{21}(-2+B_{21})}{2(A_{11}-B_{02})} + \dfrac{B_{21}^2(-2A_{11}+B_{02})}{4(A_{11}-B_{02})^2}\right]}{\left(1 + \dfrac{A_{11}B_{21}}{2(A_{11}-B_{02})}\right)^2}. \qquad \blacksquare$$

Notemos que el campo (2.35) cumple las condiciones exigidas en el teorema, ya que $A_{11} = 2Br_+ \neq 0$, $B_{02} = -2r_+\varepsilon_3 \neq 0$ y dado que $B = \pm 1$ y $\varepsilon_3 \approx 0$ también se cumple que $A_{11} \neq B_{02}$, y $2A_{11} \neq B_{02}$. Además los coeficientes a y b del sistema (2.37), en función de los parámetros del despliegue (2.16), vienen dados por

$$a = -\frac{B}{\varepsilon_3}, \quad b = \frac{(4A_3B + 4A_3\varepsilon_3 + A_4\varepsilon_3^2)A_4\varepsilon_3^2}{(2A_3B + (2A_3 - A_4B)\varepsilon_3)^2},$$

en consecuencia dado que $\varepsilon_3 \approx 0$ se tiene que $a \approx \infty$ y que $b \approx 0$. Nótese que si $A_4 = 0$ es $b = 0$ y nos encontraríamos ante una degeneración del sistema (2.37).

En función de nuestros parámetros las curvas $a^2b = 1$ y $(2a-1)b = 1$, presentes en la figura 4 de Krauskopf y Rousseau (1997), vienen dadas por

$$a^2b - 1 = \frac{4(\varepsilon_3 + B)^2(A_3A_4B - 1)}{(2A_3B + 2A_3\varepsilon_3 - A_4B\varepsilon_3)^2},$$

$$(2a-1)b - 1 = -\frac{(\varepsilon_3 + B)^2(A_4\varepsilon_3 + 2A_3)^2}{(2A_3B + 2A_3\varepsilon_3 - A_4B\varepsilon_3)^2}.$$

Por lo tanto si $A_3A_4B < 1$ nos encontramos en alguna de las zonas existentes debajo de dicha curva $a^2b = 1$. Si $A_3A_4B = 1$, estaríamos sobre la citada curva (esto ocurre en el caso particular $B = 1$, $A_3 - A_4 = 0$ y en concordancia con lo obtenido en Krauskopf y Rousseau (1997) para los valores de los parámetros correspondientes a la degeneración HSND hay una infinidad de puntos de equilibrio en un entorno

del origen), y por último si $A_3A_4B > 1$ nos encontramos en alguna de las zonas existentes por encima de dicha curva. Análogamente, dado que $(2a-1)b-1<0$, siempre nos encontramos en alguna de las zonas comprendidas entre las dos ramas de la hipérbola $(2a-1)b=1$ de la figura 4.

El análisis del sistema (2.37) ha sido realizado en Krauskopf y Rousseau (1997). Hemos esquematizado en la tabla 2.9 el análisis de las distintas posibilidades para el despliegue (2.16), correspondiente a la degeneración analizada HSND. Hacemos notar que de los diecisiete casos obtenidos en Krauskopf y Rousseau (1997) sólo seis están presentes en el despliegue (2.16). En efecto, de acuerdo a la notación utilizada en el citado trabajo estaríamos, dentro del plano de parámetros (a,b), en una de las seis zonas denotadas como A1, A2, D1, C3, C4, F2. La rama de la curva $a^2b=1$ frontera entre las zonas A2 y D1 aparece en el caso $B=+1$ y $A_3=A_4=-1$, mientras que si $B=+1$ y $A_3=A_4=1$ estamos situados en la otra rama, la que separa las zonas C4 y F2.

Cada uno de los ocho despliegues de codimensión tres de la tabla 2.9 involucra un par de despliegues de codimensión dos del campo vectorial plano con $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$-simetría (ver tabla 2.10). Notar que para las ecuaciones (1.1) siempre se cumple que $A_3A_4B=-\dfrac{81}{5}<0$, en consecuencia únicamente pueden presentarse los casos HSNDA1 y HSNDC3.

Tabla 2.9: Diferentes despliegues para el sistema (2.16).

Caso HSNDD1	$A_3B=-1$	$A_4<-1$
Caso HSNDfronteraD1-A2	$A_3B=-1$	$A_4=-1$
Caso HSNDA2	$A_3B=-1$	$-1<A_4<0$
Caso HSNDA1	$A_3B=-1$	$A_4>0$
Caso HSNDC3	$A_3B=+1$	$A_4<0$
Caso HSNDC4	$A_3B=+1$	$0<A_4<1$
Caso HSNDfronteraC4-F2	$A_3B=+1$	$A_4=1$
Caso HSNDF2	$A_3B=+1$	$A_4>1$

En el análisis realizado en Krauskopf y Rousseau (1997) aparecen las siguientes bifurcaciones:

De codimensión 1

- Las curvas T_4, T_5, SN, sn, H, **Ho**, Het_2, Het_3 y Het_5.

  La bifurcación de Hopf está presente en los seis casos. Notemos además que, de acuerdo a la proposición 2.3.1, la bifurcación de Hopf presenta una degeneración, en las zonas $D1$ y $F2$, por cumplirse que $A_3A_4B>1 \Longleftrightarrow a^2b-1>0$; por contra en las restantes zonas, al ser $A_3A_4B<1 \Longleftrightarrow a^2b-1<0$, no hay degeneración.

Tabla 2.10: Pares de despliegues de codimensión dos (siguiendo la notación de Guckenheimer & Holmes) asociados a cada uno de los casos de la tabla (2.9).

	Despliegues de codim. dos para $A_3B(2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3) < 0$	Despliegues de codim. dos para $A_3B(2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3) > 0$
Caso HSNDD1	III	I
Caso HSNDfronteraD1-A2	III	I
Caso HSNDA2	III	I
Caso HSNDA1	III	I
Caso HSNDC3	IIb	IVb
Caso HSNDC4	IIb	IVb
Caso HSNDfronteraC4-F2	IIb	IVb
Caso HSNDF2	IIb	IVb

La conexión heteroclina Het_2 aparece en los casos HSNDA2, HSNDC3 y HSNDD1 (ver tablas 2.9 y 2.10), la conexión heteroclina Het_3 en los casos HSNDC3, HSNDC4 y HSNDD1 y la heteroclina Het_5, que une los equilibrios hiperbólicos de tipo silla $(R_-, 0)$ y $(R_+, 0)$, se presenta en los casos HSNDA1, HSNDA2 y HSNDD1.

De codimensión 2

- Los puntos A_4, A_5, DT_4, DT_5, TB, S_2, S_3, S_4 y S_6.

  Las conexiones heteroclinas S_2, S_3 y S_4 ya estaban presentes en las degeneraciones anteriores. La conexión heteroclina S_6, que une el equilibrio hiperbólico de tipo silla $(R_+, 0)$ con el equilibrio semi-hiperbólico $(R_-, 0) = (R^-, Z^-)$, es el punto donde se cortan las curvas T_4 y Het_5.

Siguiendo el criterio elegido en el análisis de las degeneraciones HPDC_1, HPDC_2 y HPDC_3 representamos los conjuntos de bifurcaciones correspondientes a los valores de los parámetros $A_3 = +1$, $B = +1$ y $A_4 < 0$ para el sistema (2.16). Además, al objeto de completar el conjunto de bifurcaciones correspondiente a las zonas $F2$ y $D1$ de Krauskopf y Rousseau (1997), que está incompleto pues el ciclo límite que surge de la bifurcación de Hopf crece de tamaño saliendo de cualquier entorno del origen y desaparece en el infinito, también representaremos los conjuntos de bifurcaciones correspondientes a los valores de los parámetros $A_3 = +1,\ B = +1,\ A_4 = \dfrac{3}{2} > 1$ y $A_3 = -1,\ B = +1,\ A_4 = \dfrac{3}{2} < -1$, respectivamente.

En las figuras 2.3 y 2.8 hemos dibujado la proyección en el plano $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ del conjunto parcial de bifurcaciones, en un entorno de la degeneración HPDC, para los valores $A_3 = B = +1,\ A_4 = -\dfrac{81}{5}$ en el primer caso, $A_3 = B = +1,\ A_4 = \dfrac{3}{2}$ en el segundo y $A_3 = -1,\ A_4 = -\dfrac{3}{2},\ B = +1$ en tercer lugar del despliegue (2.16). En ellas se observan los casos no degenerados, siguiendo la notación de Guckenheimer & Holmes, que están conectados

al atravesar las diferentes degeneraciones de codimensión tres presentes. También aparecen algunas de las bifurcaciones locales de codimensión dos estudiadas que están presentes en los conjuntos de bifurcaciones correspondientes a cada uno de los casos no degenerados.

El paso por la degeneración de codimensión tres HSND correspondiente a cada uno de los tres casos anteriores lo podemos ver, en el plano de parámetros $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, en las figuras 2.7, 2.9 y 2.10. Estos conjuntos parciales de bifurcaciones corresponden a las zonas $C3$, $F2$ y $D1$ respectivamente, de la singularidad de codimensión tres HSND. Cada uno de ellos se ha obtenido por intersección del espacio de parámetros con una esfera y deformando ésta en un plano, como parte de otro conjunto de bifurcaciones más amplio. La idea geométrica es conectar los casos $\mathsf{A}_2 \Leftrightarrow \mathsf{A}_1$, $A_3B(2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3) < 0 \Leftrightarrow A_3B(2A_3\varepsilon_4 - A_4\varepsilon_3) > 0$ respectivamente, sobre la superficie de la esfera. Las configuraciones de los equilibrios y retratos de fases para los casos $C3$ y $F2$ están dibujadas esquemáticamente en la figura 2.12, y para el caso $D1$ en la figura 2.13. En relación a estas dos figuras hay que tener en cuenta, para los equilibrios situados fuera de los ejes, que (R^-, Z^-) es siempre de tipo silla y (R^+, Z^+) aparece con una configuración de tipo nodo o foco. Con respecto a los equilibrios situados sobre el semieje positivo del eje R hacemos notar que cuando en la figura 2.12 hay un solo equilibrio se trata de $(R_+, 0)$ ($(R_-, 0)$ en la figura 2.13), y si aparecen los dos equilibrios es $(R_-, 0)$ el más cercano al origen $(0, 0)$ ($(R_+, 0)$ en el caso de la figura 2.13).

Obsérvese que en Krauskopf y Rousseau (1997) no existen equilibrios en el eje Z y sobre el eje R, excepto en el punto donde tiene lugar la degeneración $\mathsf{A}_{1,2}$, que hay dos equilibrios o ninguno; por ello, no aparecen las curvas T_1, T_2, T_3. Además de las curvas citadas, en los casos $F2$ y $D1$, aparecen nuevas bifurcaciones de codimensión uno y dos. En efecto, existe una curva de conexiones heteroclinas Het_4 que une el punto S_5 con el punto S_7 donde se cortan las curvas T_4 y Het_4. En este punto hay un policiclo uniendo el origen, el silla hiperbólico $(0, -\varepsilon_2)$ y el equilibrio semi-hiperbólico donde $(R_-, 0) = (R^-, Z^-)$. Así mismo, del punto DH, donde se degenera la bifurcación de Hopf H, surge una curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas snop. Dicha curva, en el caso $D1$, finaliza en el punto DHet_5 donde tiene lugar una degeneración de la conexión heteroclina Het_5. Por último, también está presente la degeneración DT_3 de la curva T_3.

Hacemos notar que en el conjunto de bifurcaciones del caso $F2$ (ver figura 12 de Krauskopf y Rousseau (1997)) el papel de la curva I, donde se experimenta la bifurcación de una órbita periódica en el infinito, es desempeñado en nuestro caso por el policiclo heteroclino Het_1, que relaciona los tres equilibrios hiperbólicos de tipo silla $(0, 0)$, $(R_-, 0)$ y $(0, -\varepsilon_2)$. Es en este policiclo donde desaparece la órbita periódica que surge de la bifurcación de Hopf H.

Finalmente, en la figura 2.11, hemos representado la proyección en el plano $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de los conjuntos parciales de bifurcaciones, en un entorno de la singularidad de codimensión cuatro HPDC, correspondientes a las dos ramas de la curva $a^2b = 1$ que delimitan las fronteras entre las zonas $D1$ y $A2$ en el primer caso, y $C4$ y $F2$ en el segundo.

Si comparamos esta figura 2.11 con la figura 2.8, correspondiente a las zonas $D1$ y $F2$, podemos observar que, si bien las degeneraciones DT_3, DT_4, DT_5 y TB no pueden darse, sí existe en la misma zona del plano de parámetros un punto de degeneración PS donde finaliza la curva de bifurcación de Hopf no degenerada H y las conexiones heteroclinas

que surgen del punto A, cuando es del tipo III, o bien del punto HP cuando es del tipo VIa. El punto A pasa de ser del tipo I al tipo III (IVb a IIb) cuando atravesamos la línea discontinua de la figura 2.11. En estos valores de los parámetros el sistema (2.16) presenta una degeneración más alta ya que el punto A coincide con el punto singular PS donde existe una recta de puntos de equilibrio $Z^* = -\varepsilon_2 - R^*$ en un entorno del origen en el cuadrante $R > 0, Z > 0$.

Una vez finalizado el análisis de la degeneración HSND consideramos nuevamente la figura 2.1 y nos preguntamos ahora cómo podemos pasar, en el sistema (2.16), del tipo Ib al VIa (o viceversa) mediante estas degeneraciones no lineales de codimensión tres de la bifurcación Hopf-pitchfork.

Para ello consideramos nuevamente el conjunto de bifurcaciones de la figura 2.3 correspondiente a los valores $A_3 = B = +1,\ A_4 = -\dfrac{81}{5}$ del despligue (2.16). Recordemos que estos valores se obtenían al elegir $a = -1,\ \gamma > 0$ en las ecuaciones (1.1) y por tanto, en relación a la figura 2.1, estamos situados en un entorno de la curva de degeneración **HPD** correspondiente a la rama situada en el cuarto cuadrante.

Como sabemos, del punto HPDC presente en la figura 2.3 surgen, al margen de otras bifurcaciones, tres rectas de puntos de codimensión tres HPDC_1, HPDC_2 y HPDC_3 y una semirrecta HSNDC3, también de puntos de codimensión tres, que nos permiten pasar del tipo Ib al VIa o viceversa. En el cuadro 2.6 vemos que, para la degeneración HPDC_3, hay dos casos HPDC_3i y HPDC_3ii que nos permiten pasar del tipo Ib al Ia. De acuerdo al cuadro 2.5 para los valores correspondientes a la figura 2.3 el $\mathrm{sgn}(-A_3 + A_4 B) = -1$ por lo que nos encontramos en el caso HPDC_3ii (ver figura 2.6). Para pasar del tipo Ia al III, mediante la degeneración HPDC_2, se observa en el cuadro 2.4 que hay un único caso HPDC_2i (ver figura 2.5). Por último, mediante la primera degeneración HPDC_1, vemos en la tabla 2.2 que nuevamente hay dos casos HPDC_1v y HPDC_1vi que nos permiten pasar del tipo III al tipo VIa. De acuerdo al cuadro 2.1 para los valores correspondientes a la figura 2.3, $A_3 = B = +1$, nos encontramos en el caso HPDC_1v (ver figura 2.4).

Análogamente vemos en la figura 2.3 que también es posible partir del tipo Ib y, haciendo el recorrido en sentido contrario, acabar en el tipo VIa si bien ahora pasando por la degeneración HSNDC3. También en dicha figura podemos ver la región del plano $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ donde existen algunas de las bifurcaciones de codimensión dos presentes en los respectivos conjuntos de bifurcaciones. Así por ejemplo las bifurcaciones DT_4 y TB únicamente aparecen en la región, correspondiente al segundo-tercer cuadrante del plano $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$, comprendida entre las degeneraciones HSNDC3 y HPDC_3.

Para las ecuaciones (1.1), y en concreto para los valores de los parámetros sobre la curva **HPD** ($\alpha = -(1+\gamma)^2,\ \gamma > 0$ ó $\gamma < -1$), sabemos que hay una situación muy degenerada ya que las tres degeneraciones no lineales HPDC_1, HPDC_2, y HPDC_3 ocurren simultáneamente. En consecuencia, si en la figura 2.3 partimos del caso Ib, al coincidir las tres semirrectas anteriores situadas en el primer-cuarto cuadrante, pasamos directamente al tipo VIa lo que explica cómo en la figura 2.1 pasamos del tipo Ib al VIa cuando $\gamma \neq 0$.

Esta situación tan degenerada no se presenta en el oscilador de van der Pol-Duffing modificado, desarrollado en Freire, Franquelo y Aracil (1984), que estudiaremos en el capítulo tercero. En efecto, en la figura 8 de Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis

(2000) se observa cómo, al mover uno de los parámetros que aparecen en las ecuaciones de estado del oscilador, vamos pasando, al atravesar el valor crítico $\gamma_c = -0.422$ para el cual se experimenta la degeneración HPDC_3, del tipo Ib (ver figura 15 para $\gamma = -0.3$) al tipo Ia (ver figura 10 para $\gamma = -0.425$). Análogamente al pasar por el valor crítico $\gamma_c = -0.4294$, para el cual se experimenta la degeneración HPDC_2, nos encontramos con el tipo III (ver figura 9 para $\gamma = -0.447$). Finalmente al pasar por el valor crítico $\gamma_c = -0.4519$, para el cual se experimenta la degeneración HPDC_1, pasamos al tipo VIa (ver figura 13 para $\gamma = -0.6$). Nuestro estudio permite explicar la existencia de algunas bifurcaciones presentes en los conjuntos de bifurcaciones de las citadas figuras, como por ejemplo el punto de codimensión dos DT_5 y la curva de bifurcación **sn** que surge del mismo en la figura 15 de Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (2000). En este trabajo sobre la degeneración no lineal de codimensión tres HPDC_2 no se justifica la presencia de tales bifurcaciones.

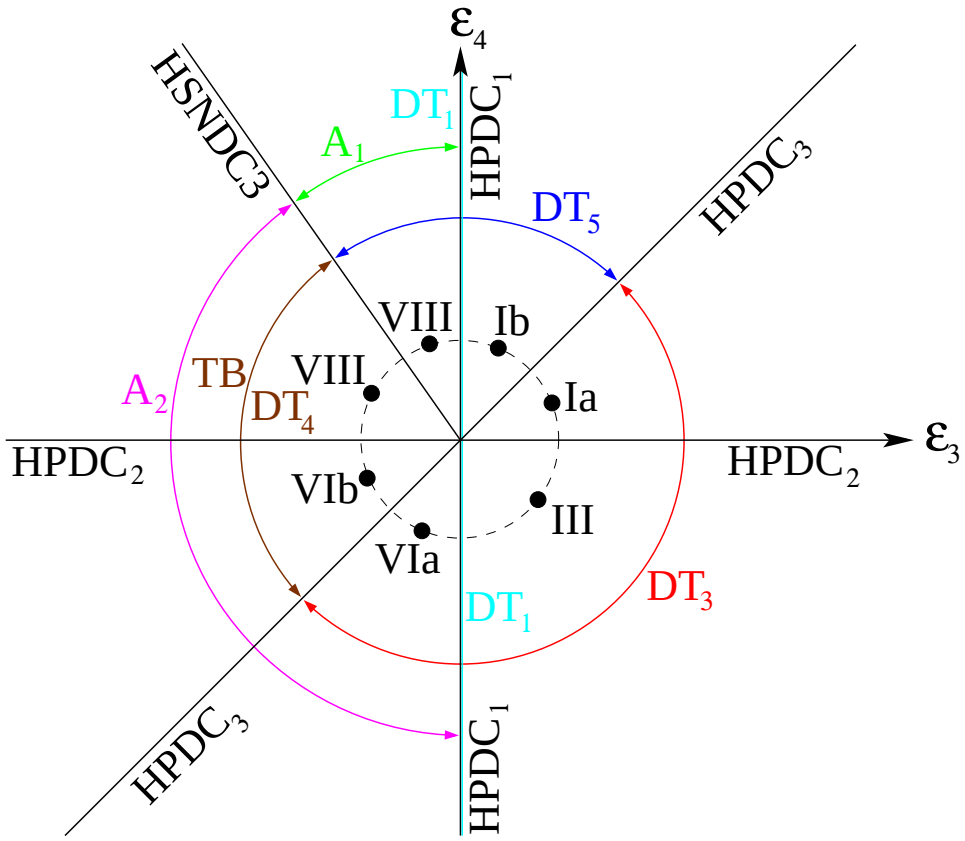
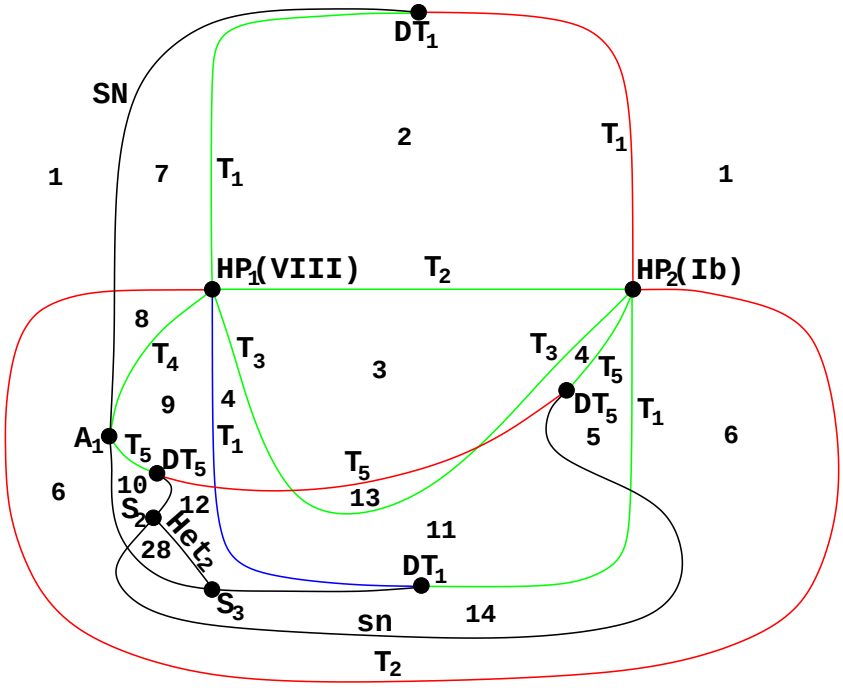
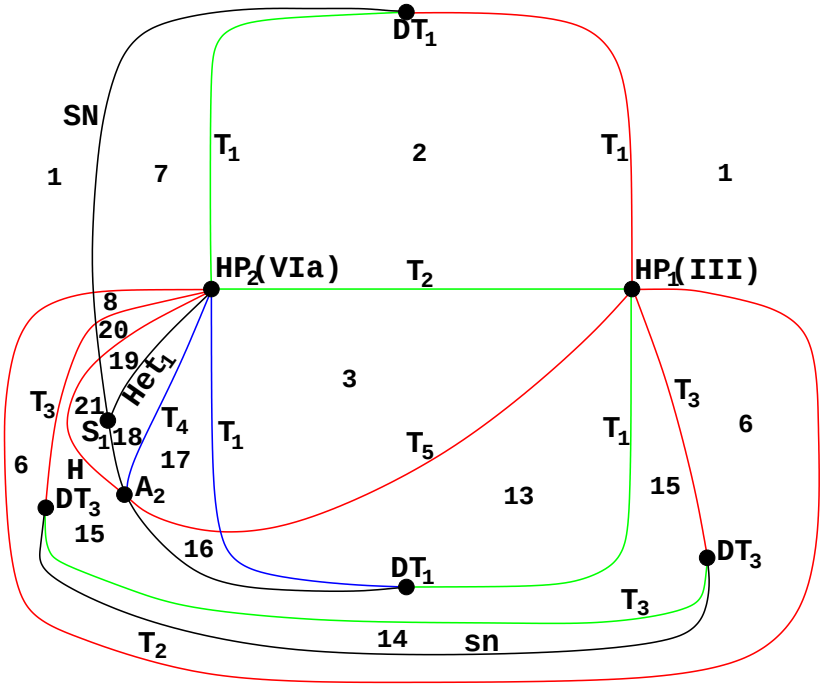


Figura 2.3: Conjunto parcial de bifurcaciones del sistema (2.16) en un entorno del punto HPDC, para $A_3 = B = +1$, $A_4 = -\dfrac{81}{5}$, y casos no degenerados de codimensión dos presentes.

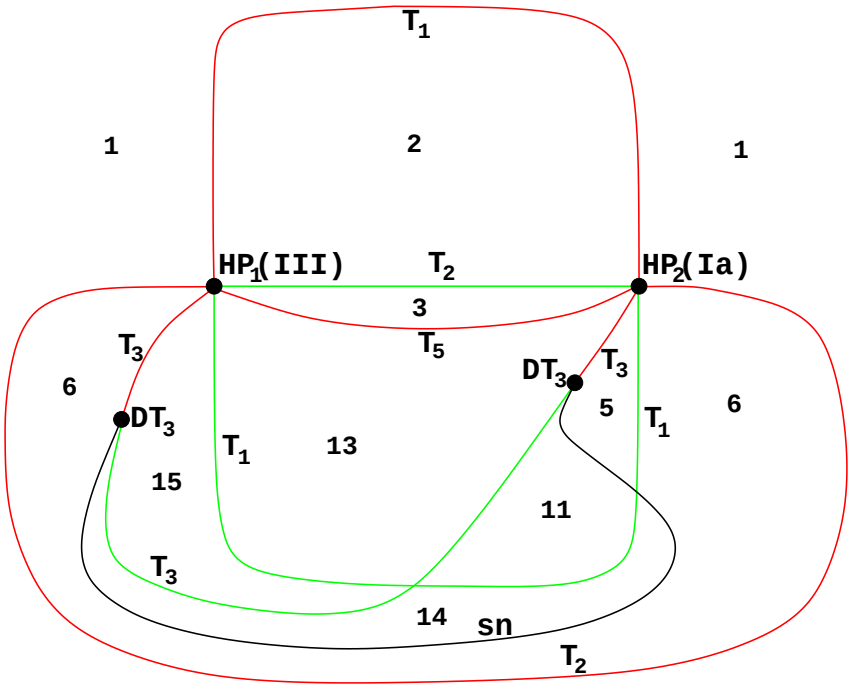


Caso HPDC_1iv

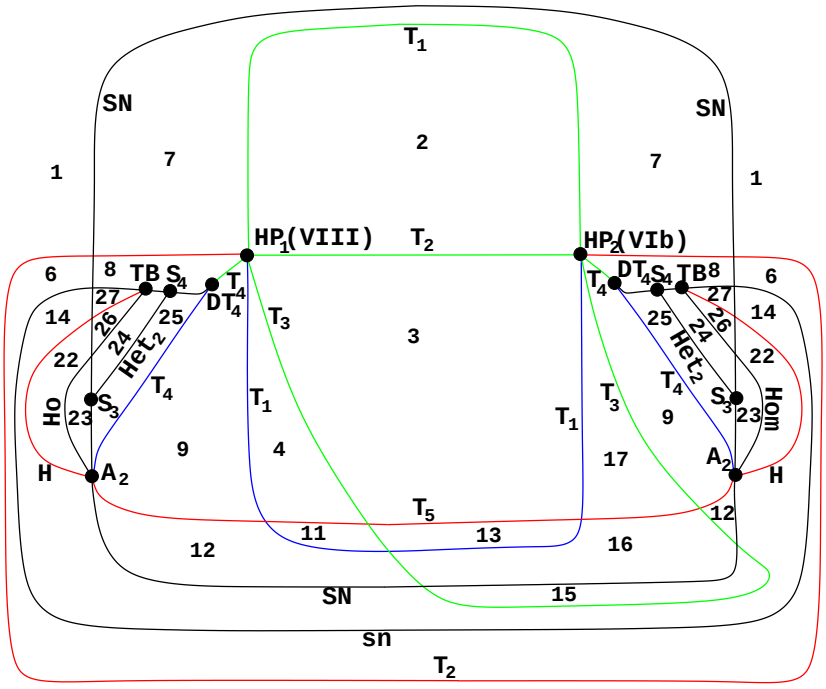


Caso HPDC_1v

Figura 2.4: Conjuntos de bifurcaciones correspondientes al paso por la degeneración HPDC_1 del sistema (2.16), para $A_3 = B = +1,\ A_4 = -\dfrac{81}{5}$.

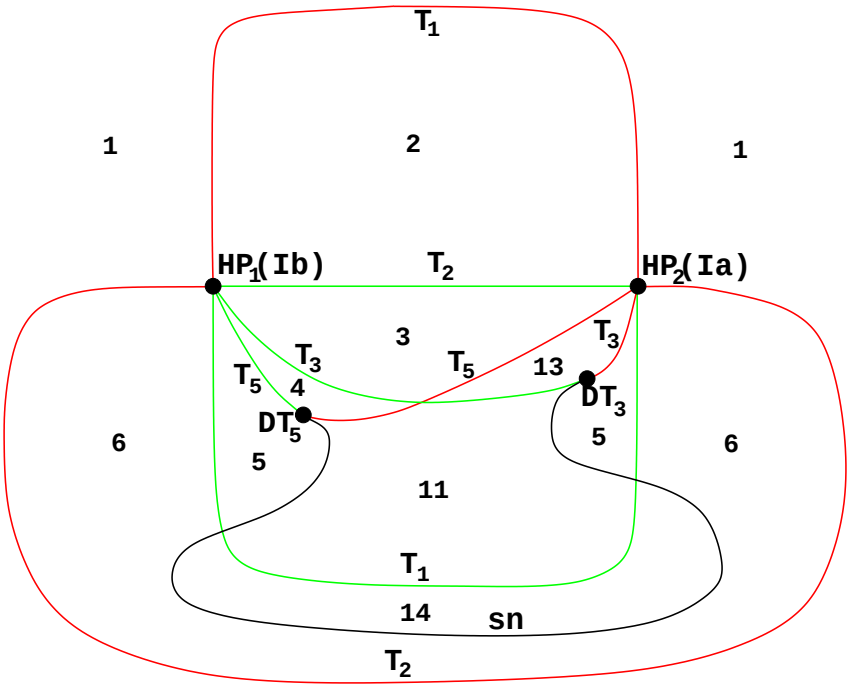


Caso HPDC_2i

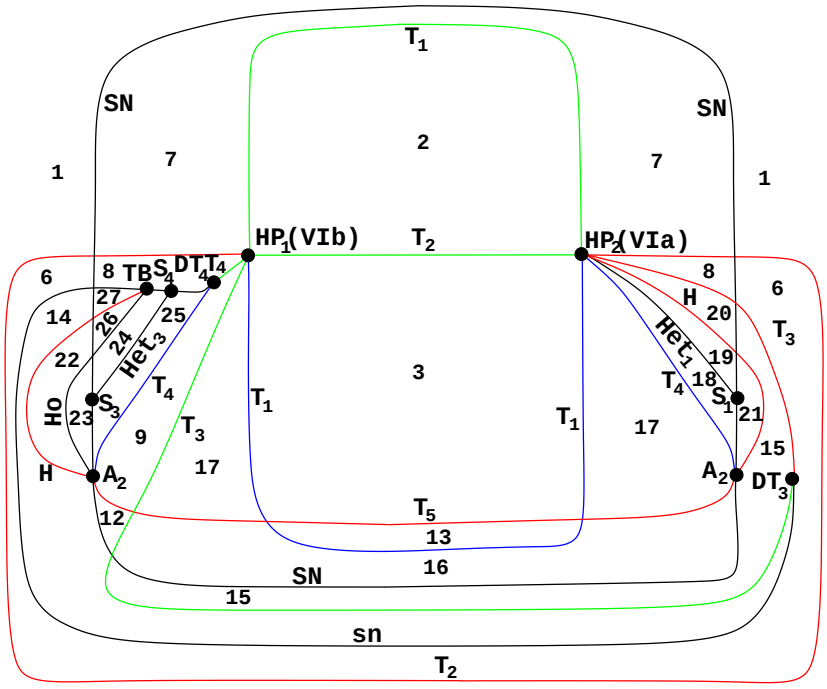


Caso HPDC_2iv

Figura 2.5: Conjuntos de bifurcaciones correspondientes al paso por la degeneración HPDC_2 del sistema (2.16), para $A_3 = B = +1,\ A_4 = -\dfrac{81}{5}$.

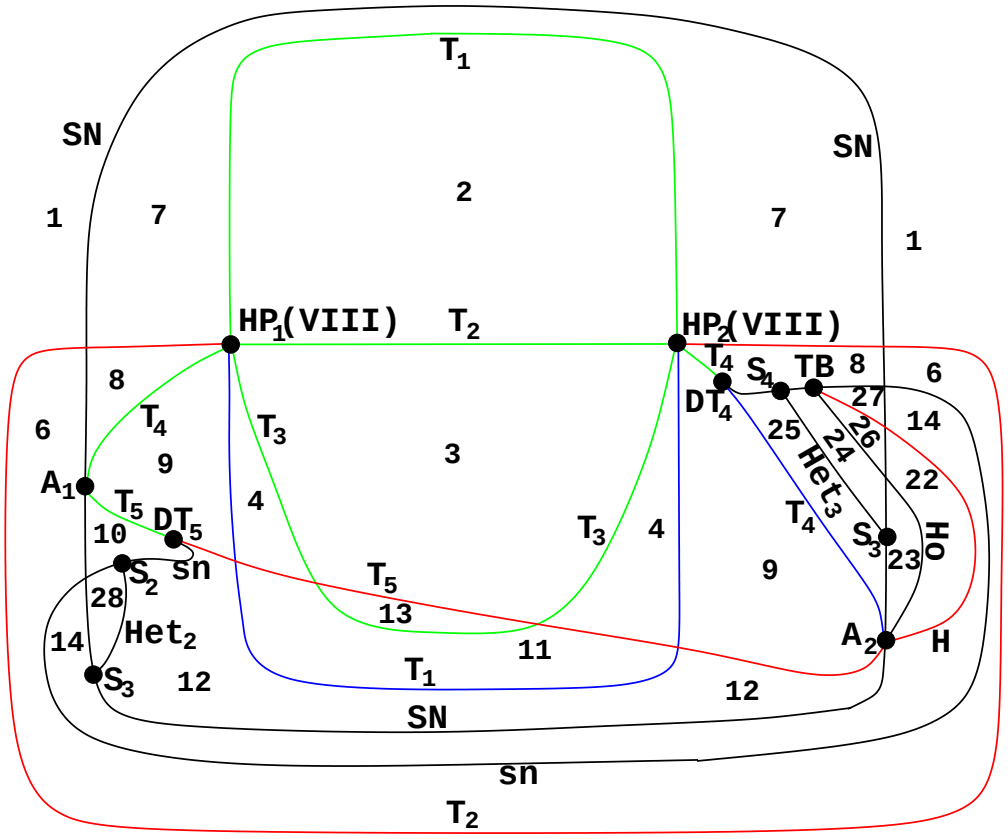


Caso HPDC_3ii



Caso HPDC_3vii

Figura 2.6: Conjuntos de bifurcaciones correspondientes al paso por la degeneración HPDC_3 del sistema (2.16), para $A_3 = B = +1,\ A_4 = -\dfrac{81}{5}$.



Caso HSNDC3

Figura 2.7: Conjunto de bifurcaciones correspondiente al paso por la degeneración HSND del sistema (2.16), para $A_3 = B = +1,\ A_4 = -\frac{81}{5}$.

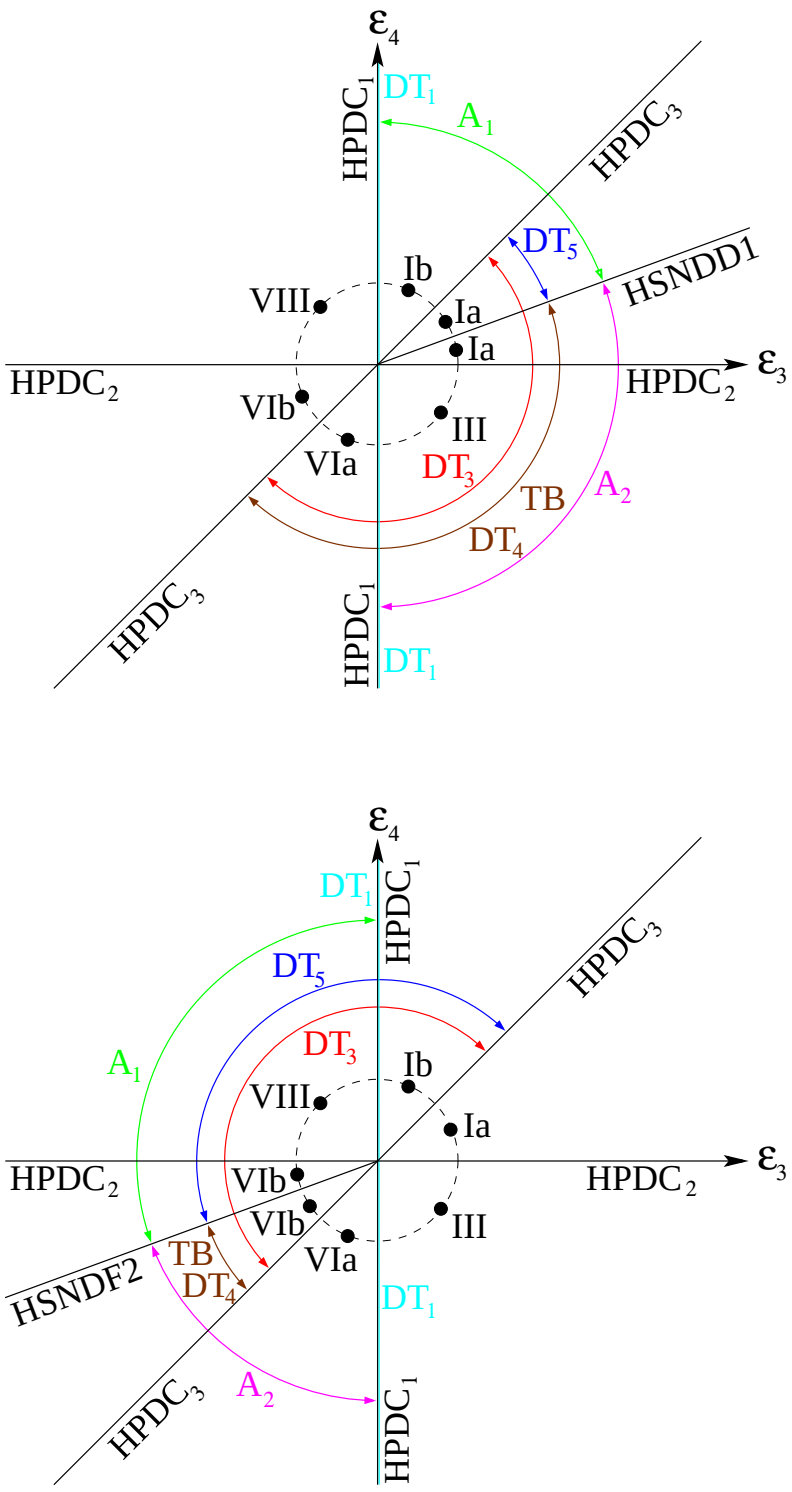
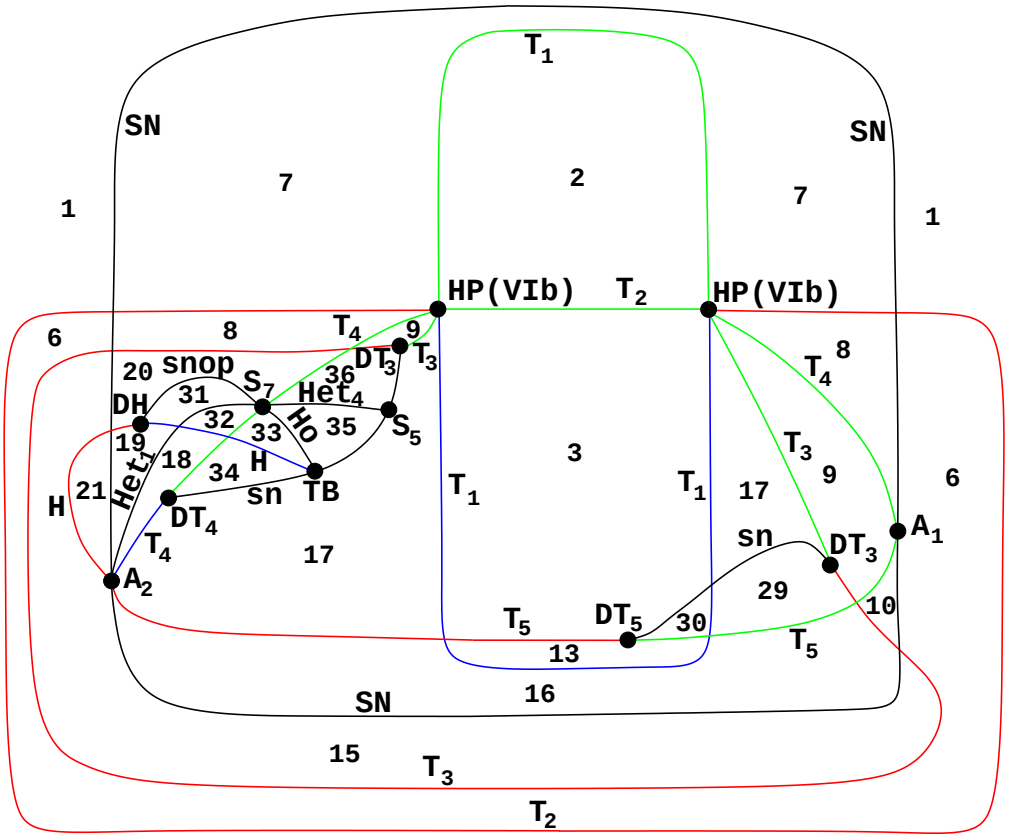
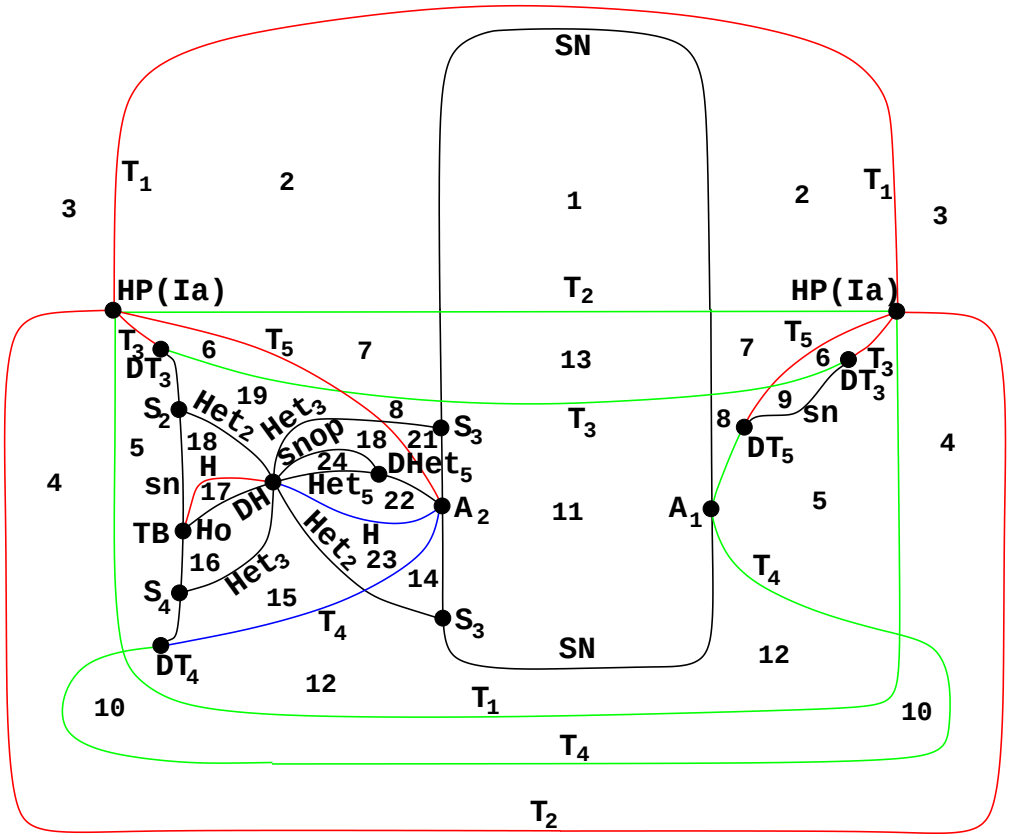


Figura 2.8: Conjunto parcial de bifurcaciones cualitativo del sistema (2.16) en un entorno del punto HPDC, para $A_3 = -1,\ A_4 = -\frac{3}{2},\ B = +1$ en el dibujo superior y $A_3 = B = +1,\ A_4 = \frac{3}{2}$ en el inferior, y casos no degenerados de codimensión dos presentes.



Caso HSNDF2

Figura 2.9: Conjunto de bifurcaciones correspondiente al paso por la degeneración HSND del sistema (2.16), para $A_3 = B = +1,\ A_4 = \dfrac{3}{2}$.



Caso HSNDD1

Figura 2.10: Conjunto de bifurcaciones correspondiente al paso por la degeneración HSND del sistema (2.16), para $A_3 = -1,\ B = +1,\ A_4 = -\frac{3}{2}$.

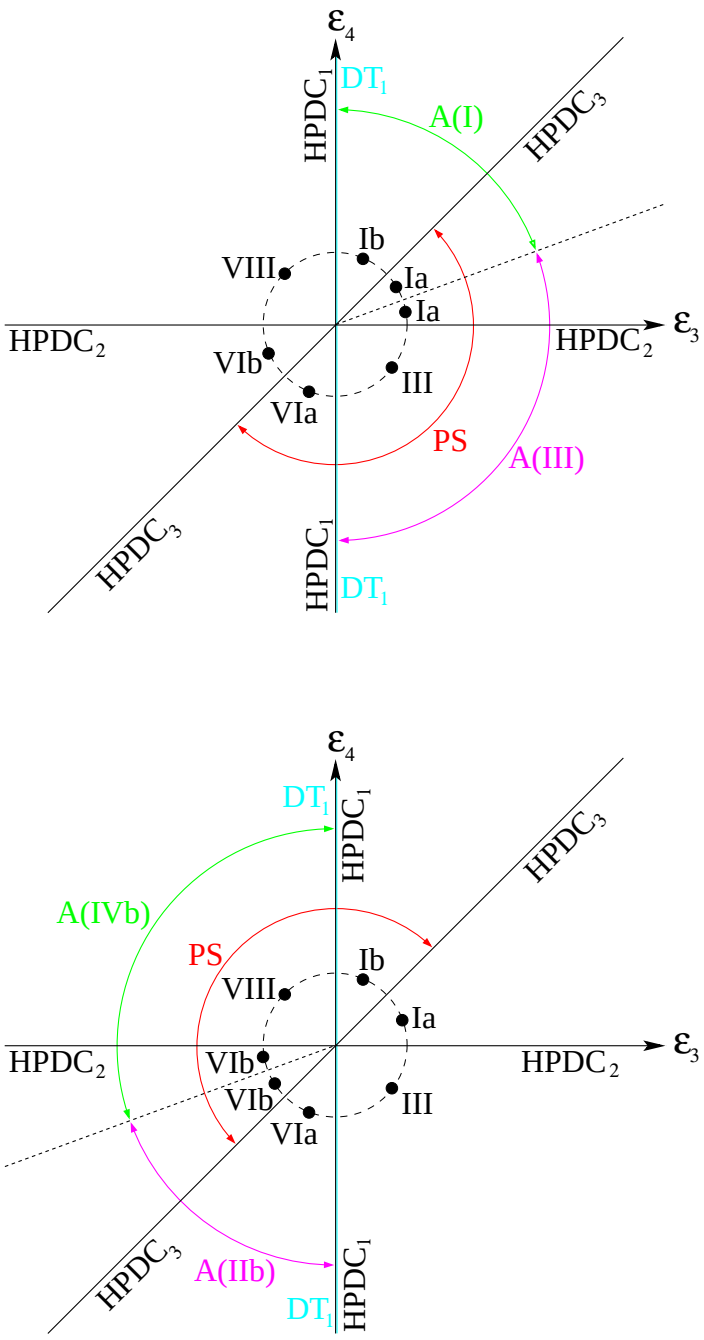


Figura 2.11: Conjunto parcial de bifurcaciones cualitativo del sistema (2.16) en un entorno del punto HPDC, para $A_3 = A_4 = -1,\ B = +1$ en el dibujo superior y $A_3 = A_4 = B = +1$ en el inferior, y casos no degenerados de codimensión dos presentes.

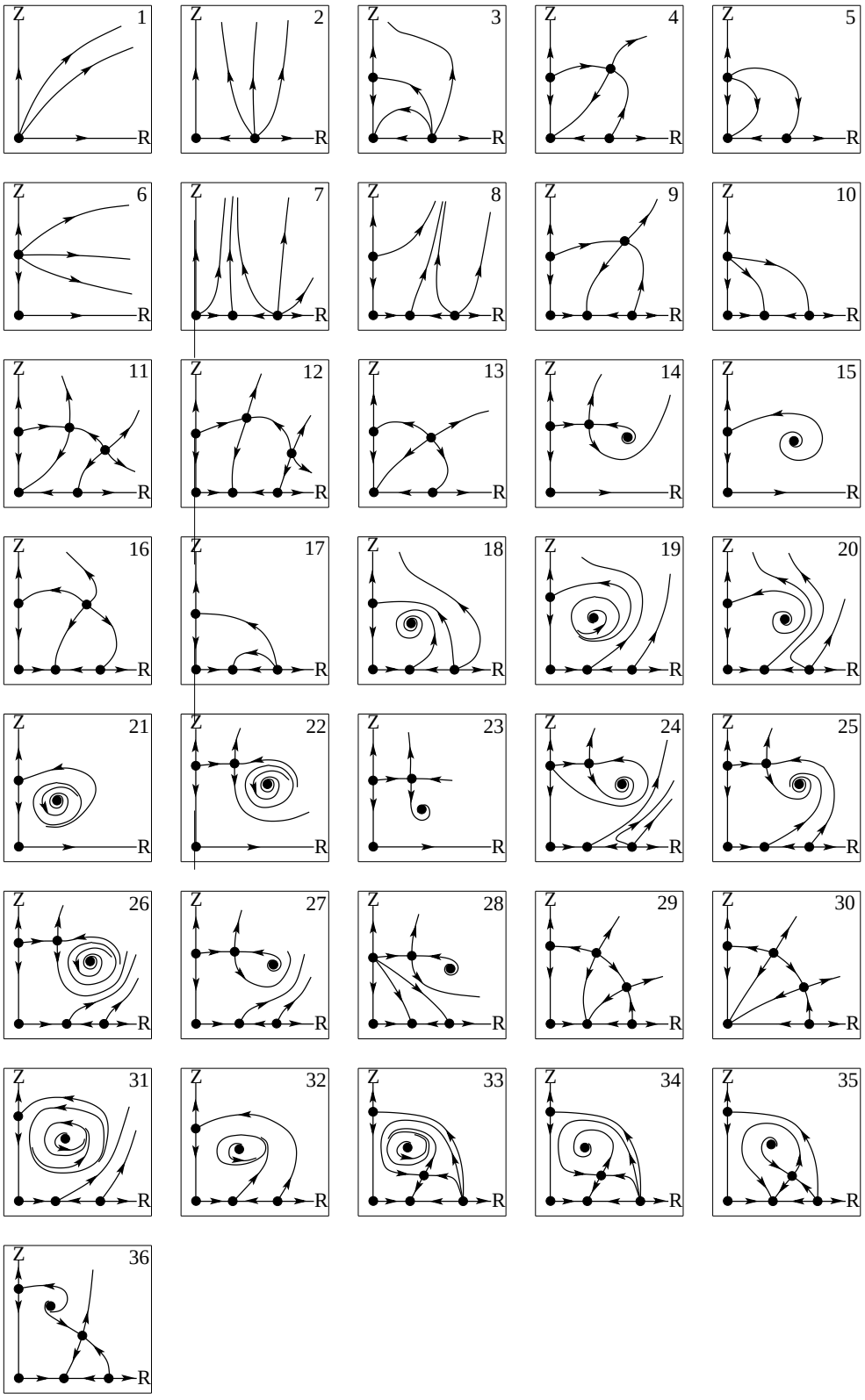


Figura 2.12: Configuraciones de los equilibrios del sistema (2.16) correspondientes a las figuras 2.4 a 2.7 y 2.9.

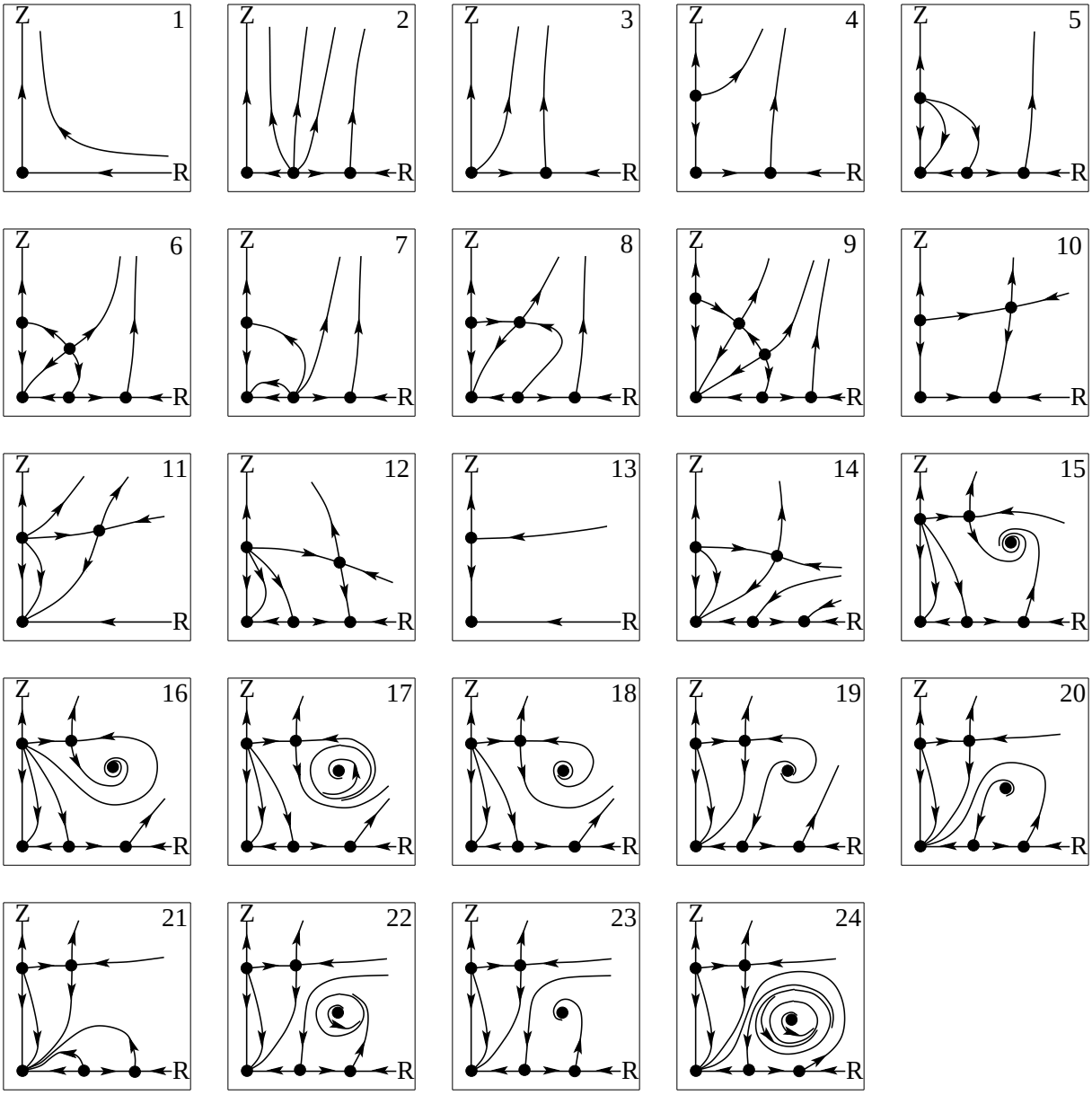


Figura 2.13: Configuraciones de los equilibrios del sistema (2.16) correspondiente a la figura 2.10.

2.3.3. Comportamiento del despliegue tridimensional truncado

Vamos ahora, en esta sección, a trasladar algunos de los resultados obtenidos anteriormente para el sistema plano al caso del sistema tridimensional.

Teniendo en cuenta sólo el efecto de la rotación en torno al eje Z (el cual corresponde a incluir la rotación $\dot{\theta} \approx \omega_0$), no vamos a obtener toda la dinámica de las ecuaciones (1.1), las cuales no tienen simetría de rotación. Para comprender la dinámica sería necesario considerar los términos que han sido despreciados en la forma hipernormal truncada a orden cinco. Los efectos derivados de la ruptura de la simetría, que introducen estos términos, permiten la aparición de nuevos fenómenos de bifurcación relacionados con la ruptura del toro invariante, que surge de la bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas, y también con las conexiones homoclinas y heteroclinas entre equilibrios y/u órbitas periódicas (Kirk y Rucklidge (2008); Champneys, Kirk, Knobloch, Oldeman y Rademacher (2009)). Además también se presenta comportamiento caótico.

No obstante, parte de la información obtenida en el análisis de la forma normal truncada persiste en el sistema tridimensional. Consideramos el siguiente despliegue tridimensional de la forma hipernormal a orden cinco

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\mu_1 + \mu_3\rho^2 + \mu_4 z^2 + a_3^*\rho^4 + a_4^*\rho^2 z^2), \\ \dot{z} &= z(\mu_2 + b_1^*\rho^2 + b_2^* z^2), \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + \cdots. \end{aligned} \tag{2.40}$$

El conjunto de bifurcaciones para este sistema se obtiene a partir del análisis realizado en la sección 2.3.2. Para ello hay que tener en cuenta que el equilibrio situado sobre el eje Z continúa siendo un equilibrio para el sistema tridimensional, los equilibrios que están fuera del eje Z se convierten en órbitas periódicas y las órbitas periódicas dan lugar a un toro invariante.

En la tabla 2.11 mostramos como se trasladan las bifurcaciones del despliegue plano (2.16) al despliegue del sistema tridimensional (2.40). En ella, se distingue entre las órbitas periódicas *simétricas* (las cuales aparecen en relación con una bifurcación del equilibrio en el origen) y las órbitas periódicas *asimétricas* (que se presentan a pares debido a la propiedad de la $\mathbb{Z}_2$-simetría y surgen en bifurcaciones que experimentan los equilibrios no triviales). Algunas de estas bifurcaciones serán detectadas en la sección 2.4 donde llevaremos a cabo un estudio numérico de la ecuación de Chua.

Describimos a continuación las bifurcaciones más interesantes que aparecen en la tabla 2.11. Cerca del punto **B**, donde se produce una degeneración de una bifurcación pitchfork de órbitas periódicas, una órbita periódica simétrica colapsa con uno o dos pares de órbitas periódicas asimétricas. En este caso, hasta cinco órbitas periódicas están involucradas en esta bifurcación. En la bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas **HH**, la órbita periódica asimétrica tiene un par de multiplicadores de Floquet sobre el círculo unidad. Cuando cruzamos la curva **HH**, un par de toros invariantes aparecen. El estudio de la evolución de los multiplicadores de Floquet es de gran interés en el análisis de los fenómenos de resonancia sobre el toro, pues nos permite predecir la presencia de órbitas periódicas sobre él.

T_1	**H**: bifurcación de Hopf del origen.
T_2	**PI**: bifurcación pitchfork del origen.
T_3	**h**: bifurcación de Hopf del equilibrio no trivial que surge en **PI**.
$T_4,\ T_5$	**PPO**: bifurcación pitchfork de órbitas periódicas.
SN	**SN**: bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas.
sn	**sn**: bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas asimétricas.
H	**HH**: bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas.
DT_1	**Hd**: degeneración de la bifurcación de Hopf del origen.
DT_3	**hd**: degeneración de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales.
$DT_4,\ DT_5$	**B**: degeneración de la bifurcación pitchfork de órbitas periódicas simétricas.
$A_1,\ A_2$	**A**: bifurcación doblemente degenerada de órbitas periódicas simétricas, por la aparición simultánea de una bifurcación silla-nodo y pitchfork.
TB	**TBPO**: bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas asimétricas.
HP	**HP**: bifurcación Hopf-pitchfork del origen.

Tabla 2.11: Tabla de traslación de las bifurcaciones del sistema plano (2.16) al sistema tridimensional (2.40).

También es compleja la dinámica cerca de los puntos **A**. En dicho punto, una órbita periódica simétrica presenta una degeneración porque la órbita tiene un multiplicador de Floquet doble +1 diagonalizable. Dependiendo del tipo de la bifurcación de codimensión dos que tengamos, se puede predecir también la presencia de comportamiento cuasiperiódico y fenómenos globales como heteroclinas de órbitas periódicas simétricas.

Por último, otro caso interesante está relacionado con el comportamiento cerca de la bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas asimétricas **TBPO**. En este caso, las órbitas periódicas asimétricas tienen un multiplicador de Floquet doble +1 no diagonalizable, por lo que cabe esperar la presencia, en un entorno de dicho punto, de comportamiento cuasiperiódico y fenómenos globales: homoclinas de órbitas periódicas asimétricas, ...

2.4. Estudio numérico

En esta sección, a partir de los resultados analíticos obtenidos en las secciones anteriores, vamos a realizar un estudio numérico de las ecuaciones (1.1) utilizando los programas AUTO97 (ver Doedel, Champneys, Fairgrieve, Kuznetsov, Sandstede y Wang (1998)) y DSTOOL (ver Guckenheimer, Myers, Wicklin y Worfolk (1995)) para corroborar que las bifurcaciones anteriores están presentes en las ecuaciones (1.1).

Genéricamente, el comportamiento sobre los toros invariantes será diferente cuando se incluyen los términos truncados en la forma normal, debido al fenómeno de *phase locking* (ver Kuznetsov (2004), [Sec. 7.3]). Además en el sistema truncado, el toro se rompe en una superficie esférica llena de órbitas que unen puntos de equilibrio no triviales con una órbita periódica. Esta situación es muy degenerada y desaparece cuando añadimos los

términos de orden alto. En su lugar debemos esperar complejas estructuras heteroclinas y también comportamiento homoclino relacionado con equilibrios y órbitas periódicas.

En nuestro análisis, y en concordancia con los valores elegidos en la subsección 2.3.2, fijaremos los parámetros $a = -1$, $\gamma = 0.3 > 0$ en las ecuaciones (1.1). Entonces, la degeneración de la bifurcación Hopf-pitchfork tiene lugar para los valores críticos de los parámetros $\alpha_c = -1.69$, $\beta_c = 0.09$ y $c_c \approx 0.76923$ (ver figuras 1.13 y 2.1).

Haremos dos cortes $\alpha =$*constante* en el espacio tridimensional de parámetros, donde las secciones se tomaran a ambos lados del valor crítico α_c. Concretamente consideraremos $\alpha = -1.7$ y $\alpha = -1.6$ (que corresponden a valores del parámetro α situados en las zonas 20 y 21, respectivamente, de la figura 1.13).

Si incrementamos el parámetro α un poco más, tomando por ejemplo $\alpha = -1.57$, vemos en la figura 2.14 cómo la curva de bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas **HH** se rompe en dos trozos. Esto se produce por la intersección de la curva **HH** con otra curva de bifurcación **PD**, donde tiene lugar una duplicación de periodo, la cual no aparece en el análisis local del sistema plano (2.16). Esta figura 2.14 será completada posteriormente en el capítulo 5 de esta memoria.

Notemos que la curva de bifurcación Hopf secundaria de órbitas periódicas **HH** está presente en las tres secciones. En efecto, en el primer corte para $\alpha = -1.7$, la curva de bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas **HH** consta de una única rama, que existe entre dos puntos de una curva de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPO** y, por tanto, no está directamente relacionada con la bifurcación Hopf-pitchfork (del tipo Ib Guckenheimer y Holmes (1997), [Sec. 7.5]). Como consecuencia, esta curva **HH**, no pudo ser encontrada en el análisis local previamente realizado. La curva de bifurcación **TBPO** surge del punto **HPD**, de codimensión tres, donde tiene lugar la degeneración de la bifurcación Hopf-pitchfork. Al pasar al otro lado del punto **HPD** vemos, en la segunda sección para $\alpha = -1.6$, cómo la curva **HH** comienza en un punto de bifurcación Hopf-pitchfork no degenerada (del tipo VIa Guckenheimer y Holmes (1997), [Sec. 7.5]) y finaliza en un punto de la curva de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPO**, lo cual sí fue detectado en nuestro estudio teórico previo.

Finalmente si incrementamos el parámetro α un poco más, tomando $\alpha = -1.57$, podemos ver en las figuras 2.14 y 2.15 cómo la curva de bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas **HH** cambia al romperse en dos trozos, ya que interseca con la curva de bifurcación **PD** donde se produce una duplicación de periodo. Esto conlleva la aparición de dos nuevos puntos **TBPOS**, situados sobre la curva **PD**, que corresponden también a dos bifurcaciones de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas. No obstante, hay que tener en cuenta que las bifurcaciones de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPO** y **TBPOS** son cualitativamente diferentes. La primera de ellas corresponde a un multiplicador de Floquet doble $+1$ no diagonalizable de una órbita periódica (resonancia fuerte 1:1), mientras que en **TBPOS** tiene un multiplicador de Floquet doble -1 no diagonalizable (resonancia fuerte 1:2).

Este último caso es muy interesante, porque esperamos encontrar una cascada de Feigenbaum de bifurcaciones de duplicación de periodo (lo que permite la existencia de atractores caóticos), y en consecuencia una secuencia de resonancias 1:2, 1:4, 1:8, ... (ver Arnold (1983), Kuznetsov (2004)). Este hecho puede ser observado en el dibujo inferior de

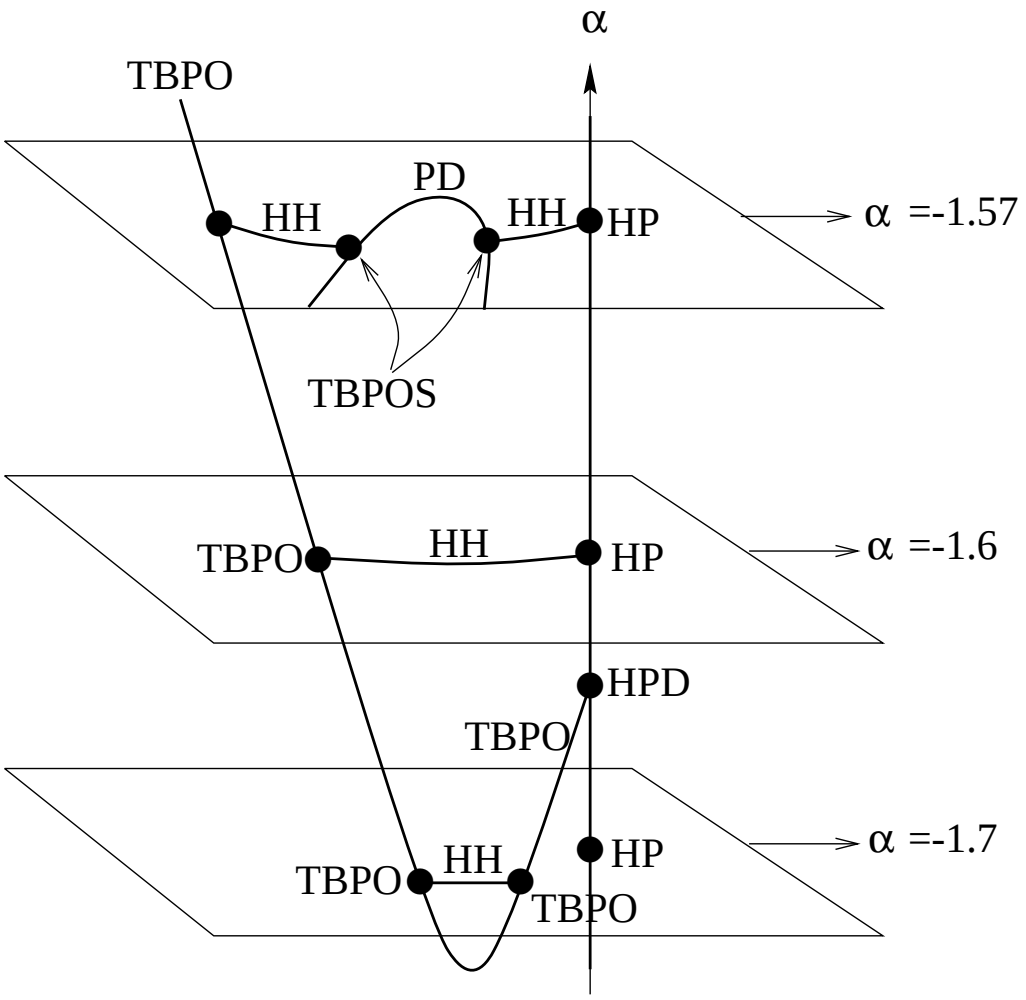


Figura 2.14: Secciones planas del conjunto de bifurcaciones para las ecuaciones (1.1) con $a = -1$, $\gamma = 0.3$ y diversos valores de α, mostrando las diferentes formas que presenta la curva de bifurcación Hopf secundaria de órbitas periódicas **HH**. También hemos dibujado la curva de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPO** que surge del punto **HPD**, donde tiene lugar la degeneración de la bifurcación Hopf-pitchfork.

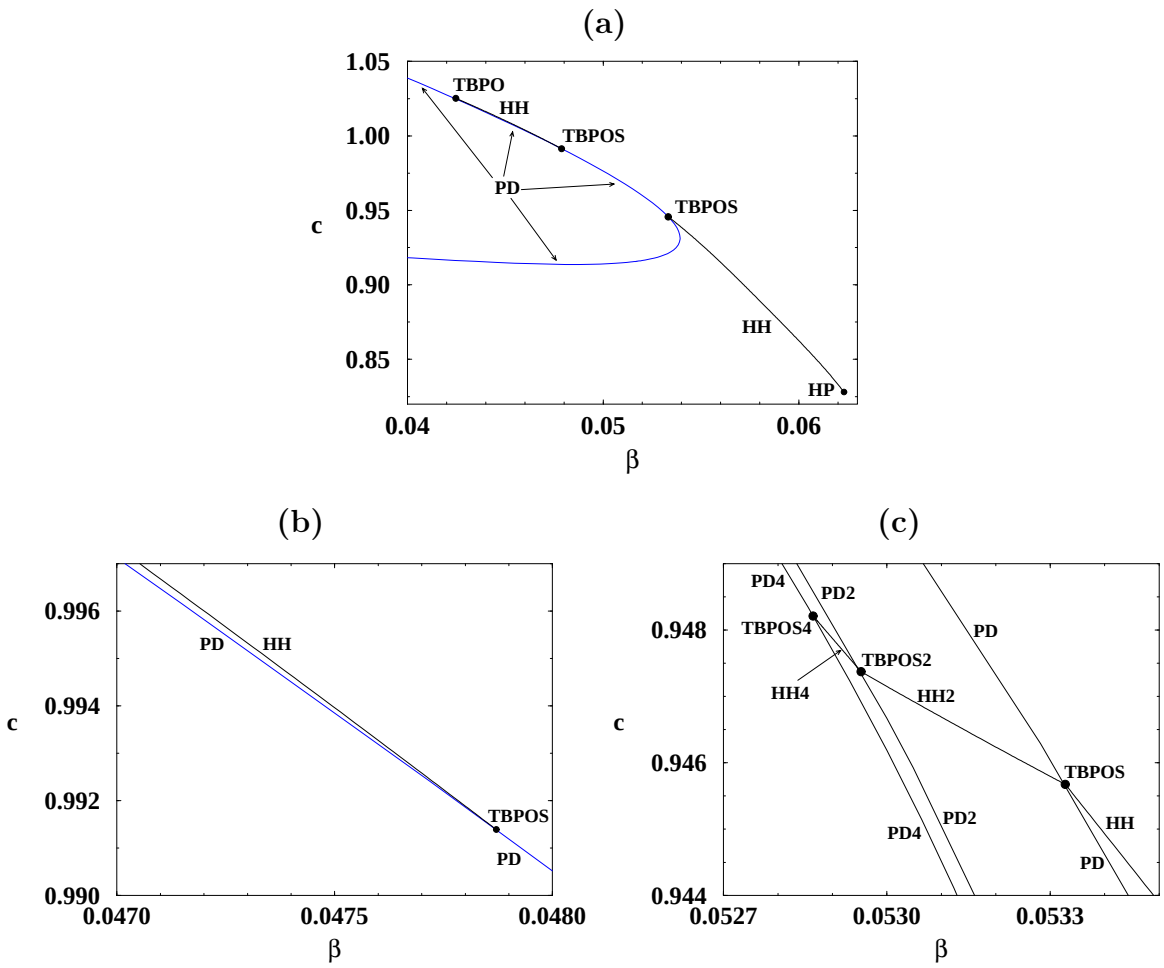


Figura 2.15: Conjunto parcial de bifurcaciones para $a = -1$, $\alpha = -1.57$, $\gamma = 0.3$: (a) En un entorno de las curvas de bifurcación a toros **HH**. (b) Zoom en un entorno del punto **TBPOS** de mayor valor en c. (c) Zoom en un entorno del punto **TBPOS** de menor valor en c.

la figura 2.15, donde hemos etiquetado como $\mathbf{PD}_2$ y $\mathbf{PD}_4$ las dos primeras bifurcaciones de la secuencia de duplicación de periodo, y como $\mathbf{HH}_2$ y $\mathbf{HH}_4$ las curvas donde surgen un toro de periodo doble y cuádruple, respectivamente.

De todas formas, nuestro principal objetivo en este estudio numérico es analizar con detalle las secciones planas para $\alpha = -1.7$ y $\alpha = -1.6$, que son las que están directamente relacionadas con la degeneración de la bifurcación Hopf-pitchfork.

Los conjuntos de bifurcaciones, para $\alpha = -1.7$ y $\alpha = -1.6$, están dibujados en las figuras 2.16 y 2.17 respectivamente. Hacemos notar que todos los elementos que en ellos aparecen han sido detectados previamente en el estudio analítico, a saber

- La bifurcación de Hopf del origen **H** (línea verde), donde nace una órbita periódica simétrica.
- La bifurcación pitchfork del origen **PI** (línea roja).

- La bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales **h** (línea azul), de donde surge un par de órbitas periódicas asimétricas.
- La bifurcación pitchfork de órbitas periódicas **PPO** (línea amarilla), donde la órbita periódica simétrica y el par de órbitas periódicas asimétricas colapsan.
- La degeneración de la bifurcación de Hopf del origen **Hd**.
- La degeneración de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales **hd**.
- La bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas **SN** (línea naranja), comenzando en **Hd**.
- La bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas asimétricas **sn** (línea marrón), comenzando en **hd**.
- La bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas **HH** (línea negra).
- La bifurcación silla-nodo-pitchfork de órbitas periódicas **A**.
- La degeneración de la bifurcación pitchfork de órbitas periódicas **B**.
- La bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPO**.

En ambas figuras incluimos también un zoom del punto de codimensión dos Hopf-pitchfork **HP** (de tipos VIa y Ib Guckenheimer y Holmes (1997), [Sec. 7.5] respectivamente), debido a que algunas de las curvas que aparecen en ellos están muy próximas.

El paso por la degeneración de la bifurcación Hopf-pitchfork **HPD**, figura 2.16 a la figura 2.17, produce los siguientes cambios

- Las curvas de bifurcación de Hopf del origen **H** y Hopf de los equilibrios no triviales **h**, que surgen del punto Hopf-pitchfork **HP**, intercambian sus posiciones y estabilidades en un entorno del citado punto al producirse la degeneración del mismo **HPD**.
- También cambia la posición del punto donde tiene lugar la degeneración de la bifurcación Hopf del origen **Hd**, pasando de estar situado sobre la rama de la bifurcación Hopf del origen **H** que une los puntos de codimensión dos **TB** y **HP**, a encontrarse en la rama de la curva **H** que surge en sentido opuesto del punto **HP**. Esta curva de puntos **Hd** existe a ambos lados del punto, **HPD**, donde ocurre la degeneración Hopf-pitchfork.
- Al desaparecer el punto **B**, donde tiene lugar una degeneración de la bifurcación pitchfork de órbitas periódicas y surge la bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas asimétricas **sn**, aparece un nuevo punto de codimensión dos **hd**, donde se degenera la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales, del cual emerge ahora la curva de bifurcación **sn**. Estas curvas de puntos **hd** y **B** surgen ambas del punto **HPD**, pero en sentido opuesto. Concretamente el punto **B** aparece cuando el punto de codimensión dos Hopf-pitchfork, **HP**, es del tipo Ib y el punto **hd** cuando corresponde al tipo VIa.

- Por último cabe destacar la existencia de una curva de puntos **A**, donde se produce al mismo tiempo una bifurcación silla-nodo y otra pitchfork de órbitas periódicas, que también surge a un lado del punto de codimensión tres **HPD**.

En el dibujo correspondiente a la figura 2.17 hay una bifurcación de Takens-Bogdanov del origen **TB**, desde la cual una curva de conexiones heteroclinas **Het** surge. Esta curva finaliza cuando interseca con la curva **h**, donde tiene lugar una bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales, dando lugar a la aparición de una bifurcación de codimensión dos Hopf-Shil'nikov **HS** (ver Hirschberg y Knobloch (1993)). Hacemos notar también cómo la curva de bifurcación pitchfork de órbitas periódicas **PPO**, que surge del punto **HP**, se acerca al punto **TB** y posteriormente se aleja del mismo. Esta cúspide está relacionada con la existencia de una degeneración, que estudiaremos en el capítulo 5, existente sobre la curva de conexiones heteroclinas **Het** que surge del punto **TB**.

En las figuras 2.18 y 2.19 presentamos dibujos cualitativos correspondientes a las figuras 2.16 y 2.17, respectivamente. Los retratos de fases de las figuras 2.18 y 2.19 se muestran de forma esquemática en la figura 2.20. Con respecto a esta última figura hay que tener en cuenta que al ser $b_2^* = -4.826809 < 0$, los retratos de fases que en ella aparecen están cambiados en el tiempo en relación a los de las figuras 2.4 (Caso HPD_1iv) y 2.6 (Caso HPD_3vii) correspondientes al sistema (2.16).

En la parte final de este estudio numérico, vamos a analizar en detalle las zonas donde tiene lugar el comportamiento dinámico relacionado con el movimiento cuasiperiódico que surge de la curva **HH**, para lo cual tomaremos en lo sucesivo $\alpha = -1.6$.

En la figura 2.21 mostramos el atractor toroidal (en color azul), correspondiente a los valores $\beta = 0.0629$, $c = 0.9$. La curva roja dibujada en su interior corresponde a la órbita periódica de la que surge el atractor toroidal. También incluimos en dicha figura una sección de Poincaré, en el plano $y = 0$, en la que aparecen ambos elementos.

Es conocido que los fenómenos de resonancia sobre el toro dan lugar a nuevas bifurcaciones. La órbita periódica, que experimenta la bifurcación Hopf secundaria de órbitas periódicas **HH**, tiene un par de multiplicadores de Floquet sobre el círculo unidad. En la figura 2.22 dibujamos la evolución del argumento de los multiplicadores de Floquet cuando se mueven a la largo de la curva **HH**. Esta información es muy importante para predecir los diferentes fenómenos de resonancia sobre la curva **HH**, que se presentan cuando los multiplicadores de Floquet se mueven sobre el círculo unidad al ir variando los valores de los parámetros β y c. Notemos que en los puntos **HP** y **TBPO**, puntos finales de la curva **HH**, el argumento vale cero.

Se observa, en la figura 2.22, que el argumento es siempre menor de 105 grados, por lo tanto no podemos encontrar zonas de resonancia fuerte 1:3 relacionadas con el toro, pero sí debe estar presente la resonancia fuerte 1:4. Además la curva que representa la evolución del argumento de los multiplicadores de Floquet cuando se mueven a la largo de la curva **HH** tiene forma parabólica. Esto implica la existencia de un punto (etiquetado como **D** en las figuras 2.22 y 2.23) donde se presenta una degeneración angular, es decir un punto donde la función argumento cambia su variación monótona.

Las implicaciones que esta degeneración angular conlleva han sido consideradas por Peckham, Frouzakis y Kevrekidis (1995), en el caso de una aplicación en $\mathbb{R}^2$ teniendo un

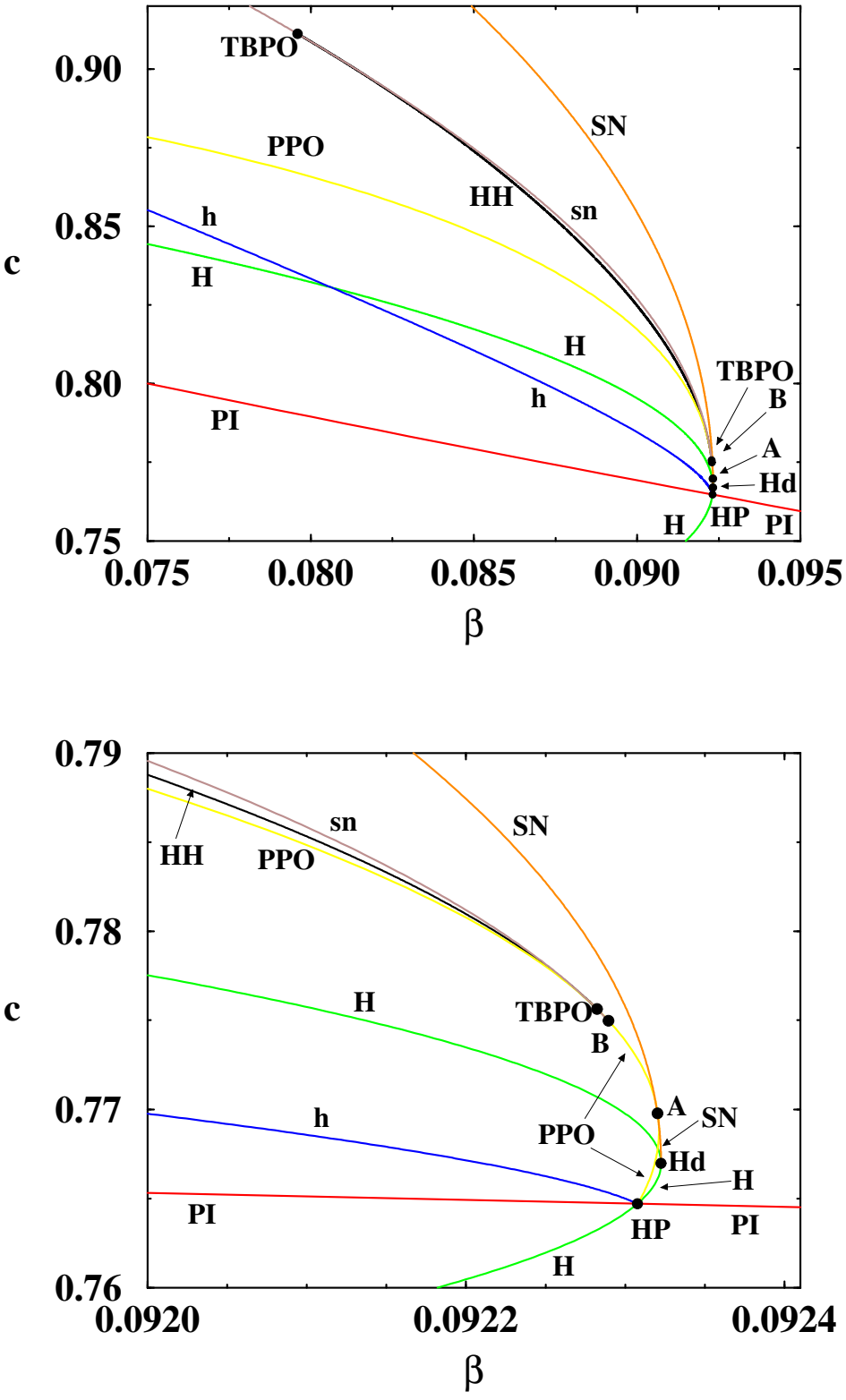


Figura 2.16: Conjunto parcial de bifurcaciones para $a = -1$, $\alpha = -1.7$, $\gamma = 0.3$, cerca de la degeneración Hopf-pitchfork. El dibujo inferior es un zoom en un entorno del punto Hopf-pitchfork.

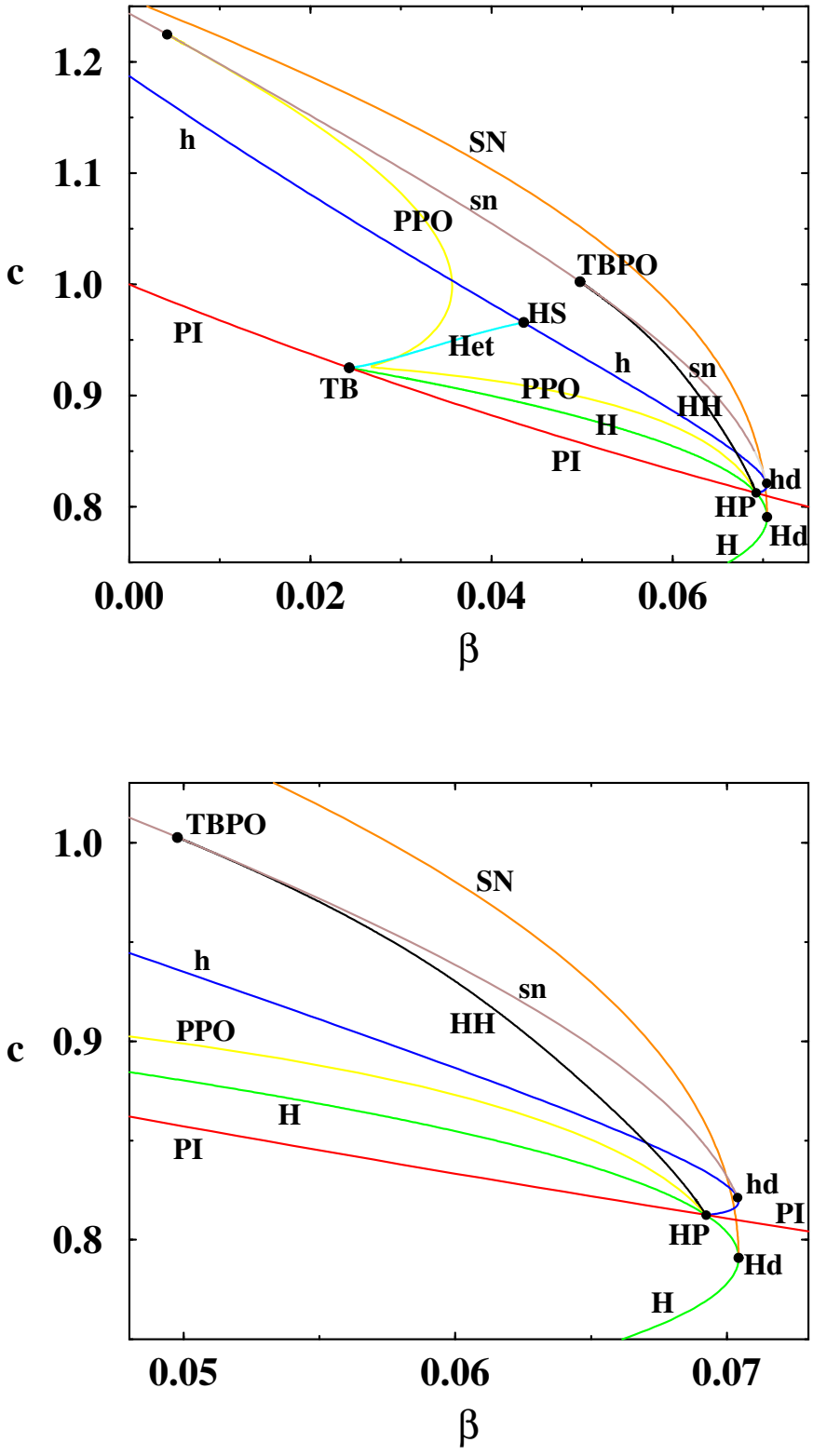


Figura 2.17: Conjunto parcial de bifurcaciones para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$, cerca de la degeneración Hopf-pitchfork. El dibujo inferior es un zoom en un entorno del punto Hopf-pitchfork.

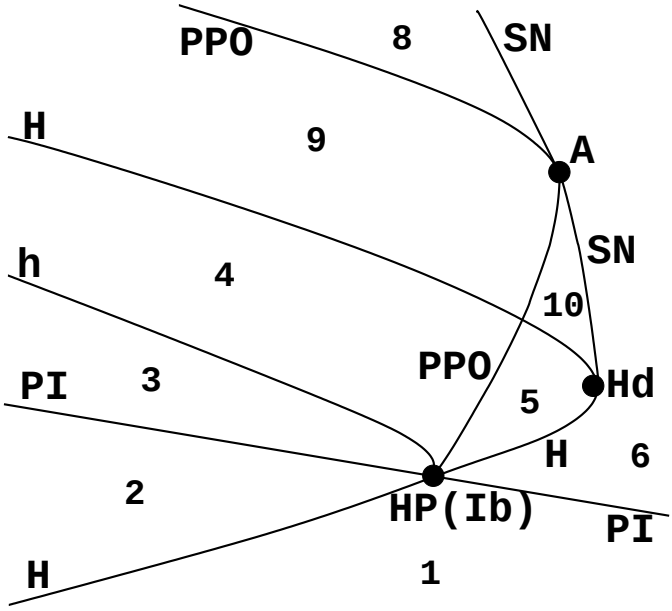


Figura 2.18: Conjunto parcial de bifurcaciones cualitativo para $a = -1$, $\alpha = -1.7$, $\gamma = 0.3$, cerca de la degeneración Hopf-pitchfork.

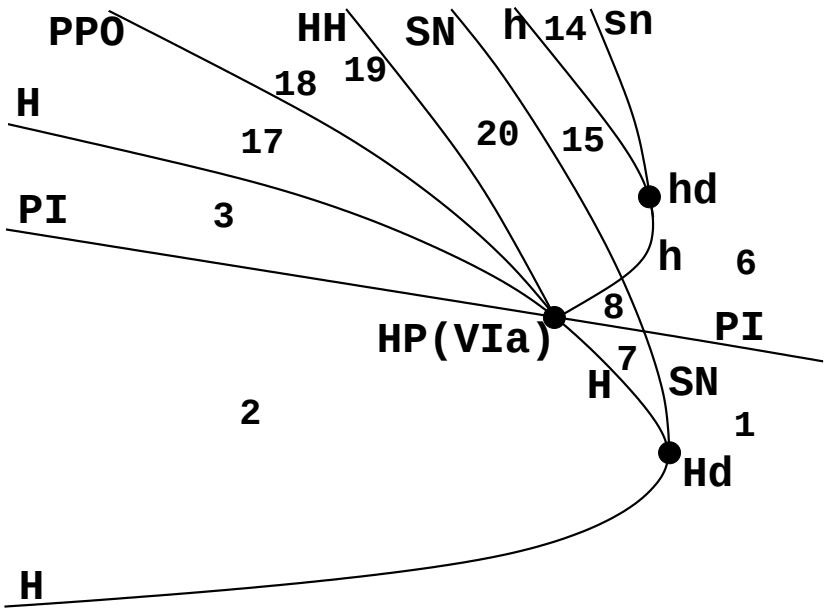


Figura 2.19: Conjunto parcial de bifurcaciones cualitativo para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$, cerca de la degeneración Hopf-pitchfork.

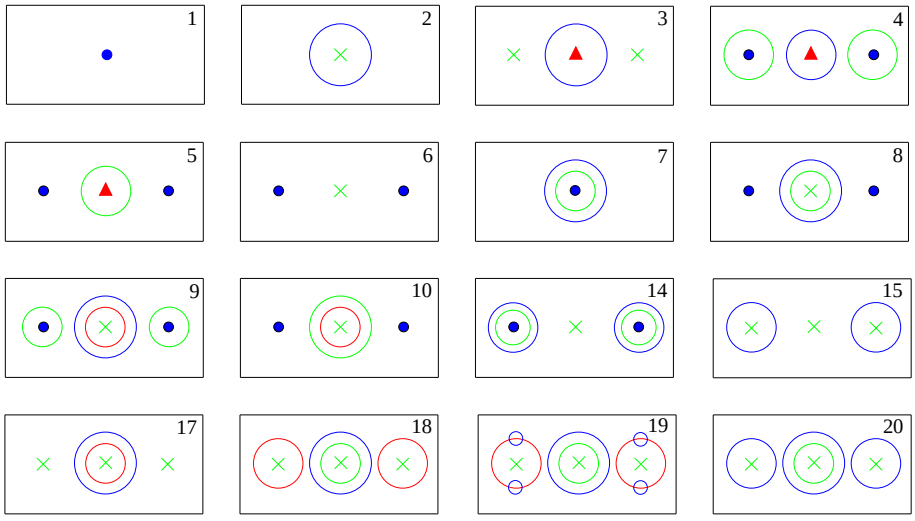


Figura 2.20: Configuraciones de los equilibrios y órbitas periódicas en las figuras 2.18 y 2.19.

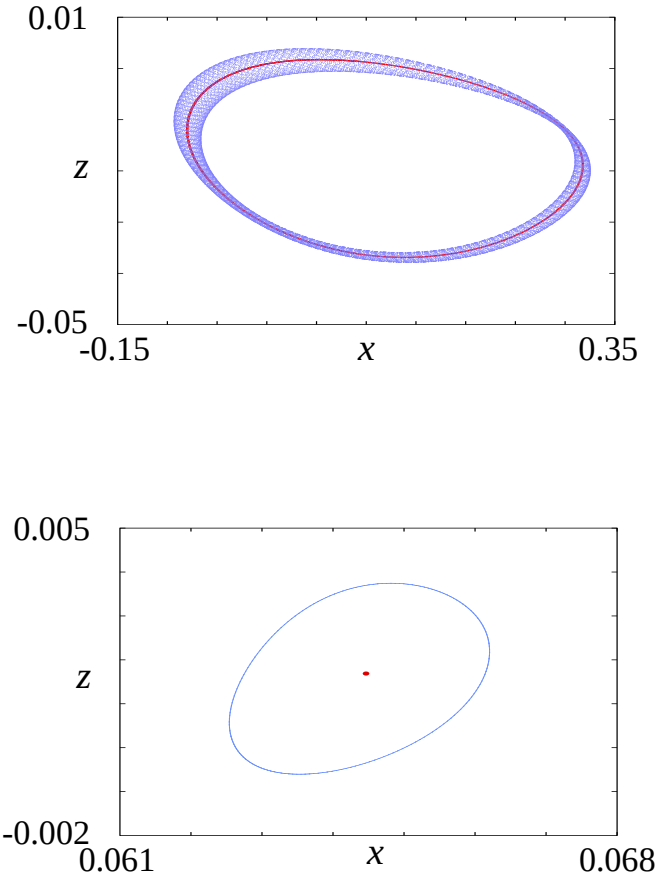


Figura 2.21: Proyección sobre el plano xz del atractor toroidal y de la la órbita periódica interior al toro correspondiente a los valores $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\beta = 0.0629$, $\gamma = 0.3$, $c = 0.9$. En la parte inferior, incluimos una sección de Poincaré del toro en el plano $y = 0$.

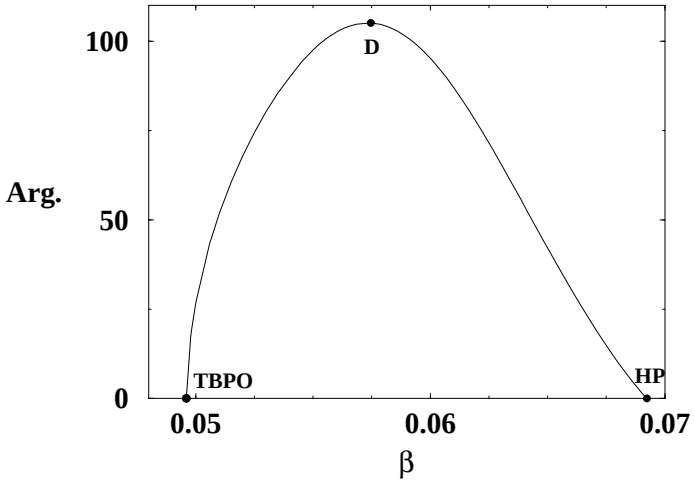


Figura 2.22: Evolución del argumento (en grados) de los multiplicadores de Floquet cuando se mueven a lo largo de la curva **HH** para los valores $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$.

punto fijo no hiperbólico con autovalores complejos sobre el círculo unidad. Del trabajo citado (ver la figura 1) se desprende que, en lo relacionado con las resonancias débiles, debemos encontrar zonas de resonancia o lenguas de Arnold (ver Arnold (1983)) con una forma particular (denominada por los autores como *banana*), cumpliéndose además que las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas que delimitan estas lenguas de Arnold intersecan dos veces con la curva **HH**, una vez a cada lado del punto de degeneración angular. En la figura 2.23 hemos dibujado las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas frontera de las zonas de resonancias débiles 1:5, 1:6, 1:7 y 1:8. Cada una de estas curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas consta de tres ramas: una rama uniendo ambos *tips* (puntos donde las curvas de silla-nodo intersecan con la curva **HH**), y dos ramas abiertas que surgen de cada uno de los tips. En la parte inferior de la figura 2.23, se muestra un zoom donde aparecen los tips situados entre el punto de degeneración angular **D** y el punto **HP**. En ella se observa cómo localmente, en un entorno de cada uno de los tips, todas las lenguas de Arnold surgen a la izquierda de la curva de bifurcación **HH**. Pero fuera de dicho entorno, la rama que une ambos tips cruza la curva **HH** para situarse a la izquierda de dicha curva, lo que significa que en esas zonas las órbitas periódicas, de periodo $4\mathrm{T}, 5\mathrm{T}, 6\mathrm{T}, 7\mathrm{T}$ y $8\mathrm{T}$, también existen antes de que aparezca el atractor toroidal. Posteriormente todas estas curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas cruzan nuevamente la curva **HH**, finalizando en los tips superiores situados sobre la citada curva.

La característica anterior, de tener una misma zona de resonancia dos tips sobre la curva de bifurcación a toros **HH**, se cumple en nuestro caso y era de esperar por la forma que tiene la curva que muestra la evolución del argumento de los multiplicadores de Floquet en la figura 2.22. Sin embargo, las zonas de resonancia representadas en la figura 2.23 no son zonas cerradas, como ocurre en las lenguas de tipo *banana*. La razón de por qué ocurre esto en nuestro caso será justificada en el capítulo 3 de esta memoria.

Los dos ramas abiertas, que delimitan cada una de las zonas de resonancia, tienen un comportamiento asintótico común: ellas son tangentes a un par de curvas relacionadas

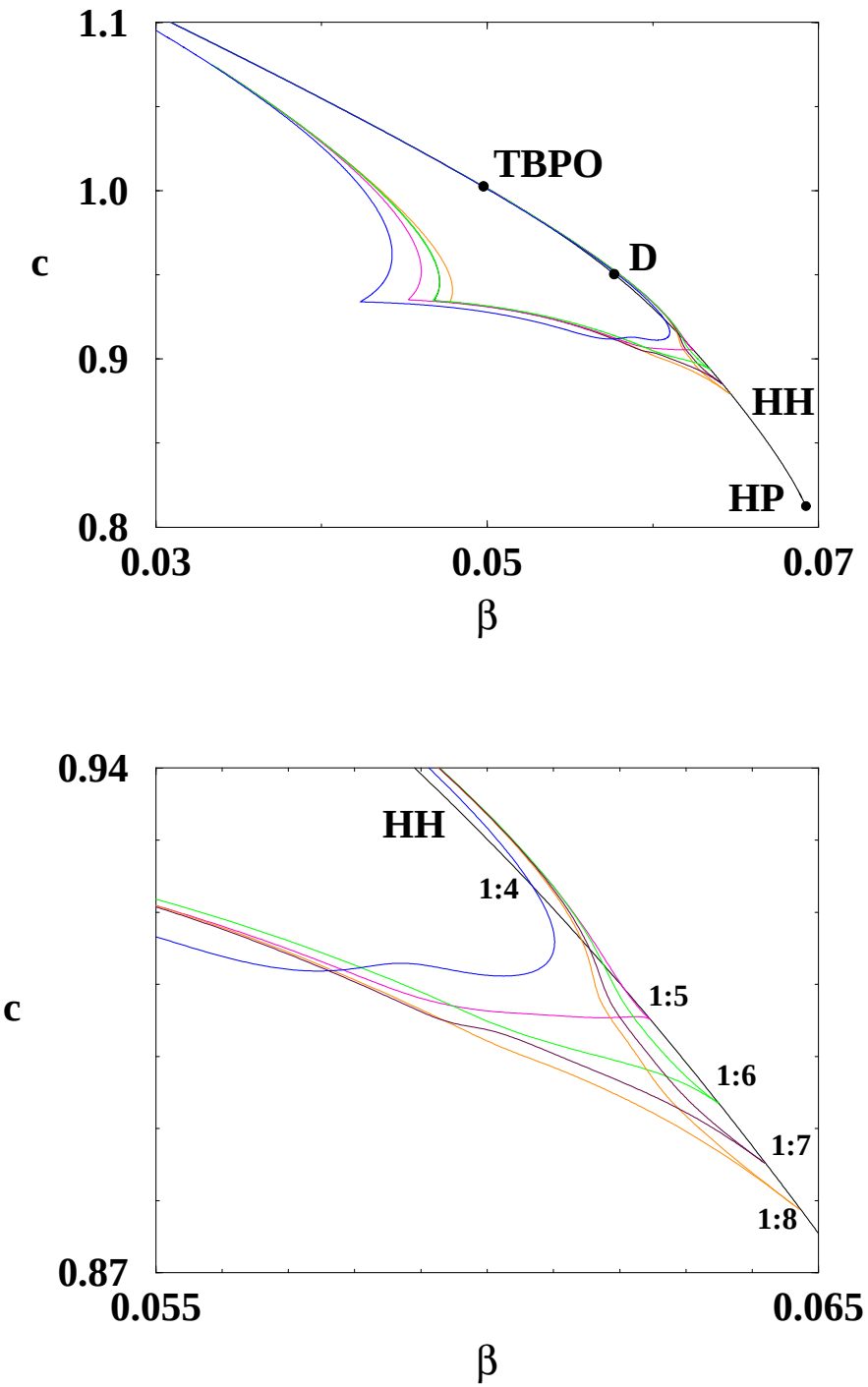


Figura 2.23: Conjunto parcial de bifurcaciones de para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$, donde aparecen la curva de bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas **HH** y las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas correspondientes a las resonancias 1:4, 1:5, 1:6, 1:7 y 1:8. En la parte inferior se muestra un zoom de los puntos donde las curvas silla-nodo intersecan con la curva **HH**.

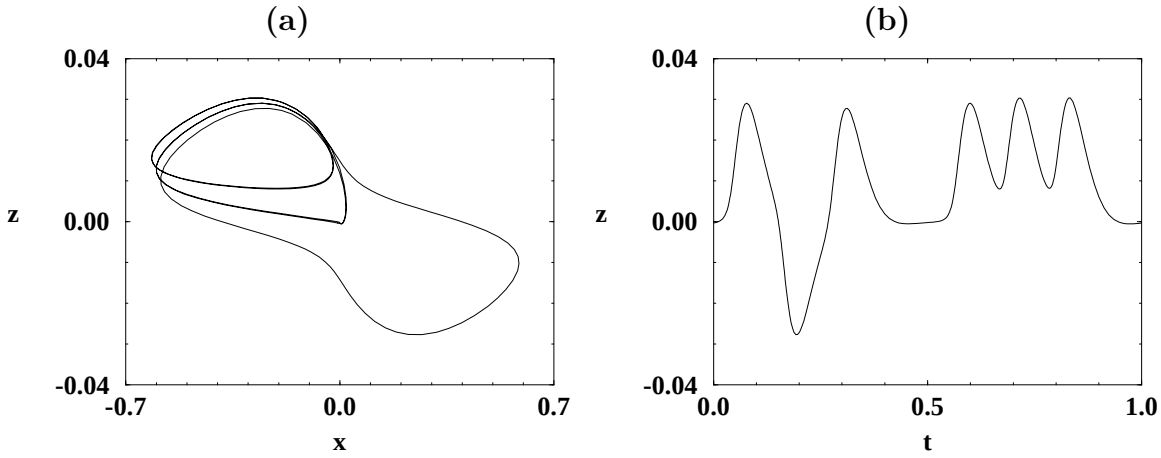


Figura 2.24: Para los valores de los parámetros $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\beta = 0.02604$, $\gamma = 0.3$, $c = 1.11779$: (a) Proyección sobre el plano xz de una órbita periódica interior a la zona de resonancia 1:5. (b) Coordenada z de la órbita periódica frente al tiempo, en un periodo normalizado.

con conexiones homoclinas del origen, que no hemos representado en la figura 2.23. Un comportamiento similar de estas curvas, pero en el caso de una bifurcación Hopf-silla-nodo, han sido encontrados por Hirschberg y Laing (1995) y Kirk (1991). También, en el contexto de los difeomorfismos planos, este fenómeno ha sido puesto en evidencia por Broer, Simó y Tatjer (1998). También cabe destacar la bifurcación cúspide de órbitas periódicas que presenta cada una de las ramas abiertas, que surgen de los tips situados entre los puntos **D** y **HP**, para todas las zonas de resonancia representadas antes de su aproximación tangencial.

En la figura 2.24 hemos dibujado una órbita periódica de las ecuaciones (1.1), para los valores de los parámetros $\beta = 0.02604$, $c = 1.11779$, que está situada en el interior de la zona de resonancia 1:5. Esta órbita periódica está próxima a una homoclina del origen de pulso cinco.

La zona de resonancia fuerte 1:4 viene delimitada por una curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas $\mathbf{sn}_4$ que corta dos veces la curva **HH**, si bien en la figura 2.23 únicamente podemos ver el corte inferior. Al realizar un estudio mas detallado de la curva $\mathbf{sn}_4$, vemos en la figura 2.25 cómo hay en ella un punto de degeneración de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas asimétricas $\mathbf{TBPO}_4$ (la degeneración corresponde a un multiplicador de Floquet doble $+1$ no diagonalizable de la órbita periódica). Desde este punto surge una curva de bifurcación Hopf secundaria de órbitas periódicas $\mathbf{HH}_4$ de periodo 4T. La curva $\mathbf{HH}_4$ finaliza cuando ella interseca con la curva de duplicación de periodo $\mathbf{PD}_4$. Este punto de intersección es otro punto de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas $\mathbf{TBPOS}_4$ (correspondiente a un multiplicador de Floquet doble -1 no diagonalizable). Éste es el punto de comienzo de una cascada de Feigenbaum, de la que vemos en la figura 2.25 los primeros pasos de la secuencia: $\mathbf{HH}_8$, $\mathbf{PD}_8$; $\mathbf{HH}_{16}$, $\mathbf{PD}_{16}$.

En la figura 2.26 presentamos dos secciones de Poincaré, correspondientes a valores de los parámetros interiores a la lengua de Arnold 1:4. La sección de la parte superior

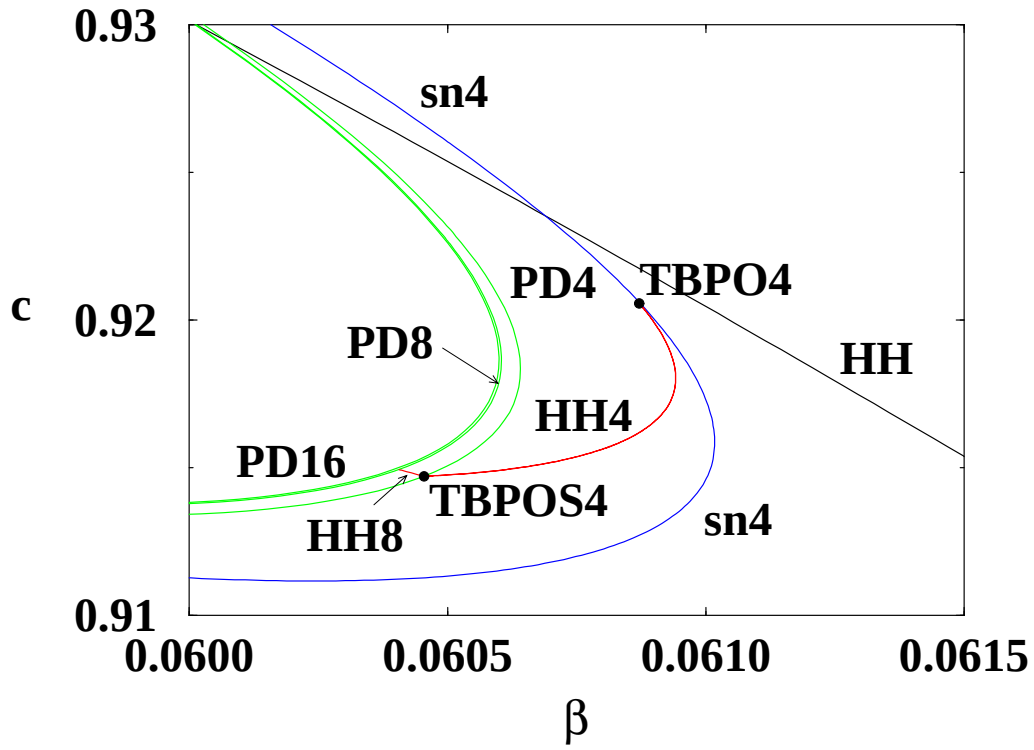


Figura 2.25: Para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$, conjunto parcial de bifurcaciones en un entorno del punto de resonancia 1:4 sobre la curva **HH** inferior. También se muestran la curva de bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas $\mathbf{HH}_4$ de periodo cuádruple, la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas $\mathbf{sn}_4$ correspondiente a la resonancia 1:4, y la secuencia de duplicación de periodo.

corresponde a los valores $\beta = 0.0606909$, $c = 0.9235$, los cuales están localizados en la figura 2.25 cerca del punto de corte inferior de la curva $\mathbf{sn}_4$ con la curva **HH**. En esta sección la variedad inestable de la órbita periódica silla de periodo 4T (representada por cuatro puntos verdes) une la órbita periódica estable de periodo 4T (representada por cuatro puntos azules) con el atractor toroidal. En la sección de la parte inferior hemos tomado $\beta = 0.06092$, $c = 0.917$. En el conjunto de bifurcaciones de la figura 2.25 este punto está situado por encima, pero cerca, de la curva $\mathbf{HH}_4$. Ahora, el toro invariante no está presente y la variedad estable de la órbita periódica silla de periodo 4T conecta la variedad inestable de la órbita periódica principal y el toro repulsivo de periodo 4T (representado por cuatro curvas cerradas rojas).

Hemos comprobado que estos comportamientos están en concordancia con el tipo D_2, siguiendo la clasificación de Chow, Li y Wang (1994), sección 4.4, en el análisis de sistemas planos con un autovalor cero doble, los cuales son invariantes bajo una rotación de ángulo $2\pi/4$. Hacemos notar que sobre la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas $\mathbf{sn}_4$ hay otro punto de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas asimétricas, para los valores de los parámetros $\beta \approx 0.05347$, $c \approx 0.98024$, si bien este punto queda fuera del rango de la figura 2.25.

Finalmente, en orden a poner en evidencia la complejidad de la frontera de la zona de resonancia 1:4 hemos incluido, en la figura 2.27, un diagrama de bifurcaciones (c frente a periodo) para los valores de los parámetros $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\beta = 0.053$, $\gamma = 0.3$. El diagrama de bifurcaciones, representado en la parte superior de la figura 2.27, consiste en una curva cerrada. En ella hemos marcado dos puntos, que corresponden a puntos de la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas $\mathbf{sn}_4$ (dibujada en color azul). Además, hemos representado otras ocho curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas. Estas ocho curvas de bifurcación están organizadas en torno a cuatro bifurcaciones cúspides de órbitas periódicas. Notemos que una de estas curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas, de periodo 4T, cruza la curva $\mathbf{sn}_4$. Este tipo de comportamiento ha sido observado por Broer, Simó y Tatjer (1998) en el estudio numérico de la *fattened Arnold family*, donde clasifican los tipos de cúspides presentes en el interior de una lengua de Arnold y muestran cómo, al mover un determinado parámetro, la interacción entre ellas, mediante bifurcaciones de codimensión tres, hace que cambien las fronteras de las lenguas de Arnold. En el capítulo 4 analizaremos estos comportamientos para las ecuaciones (1.1).

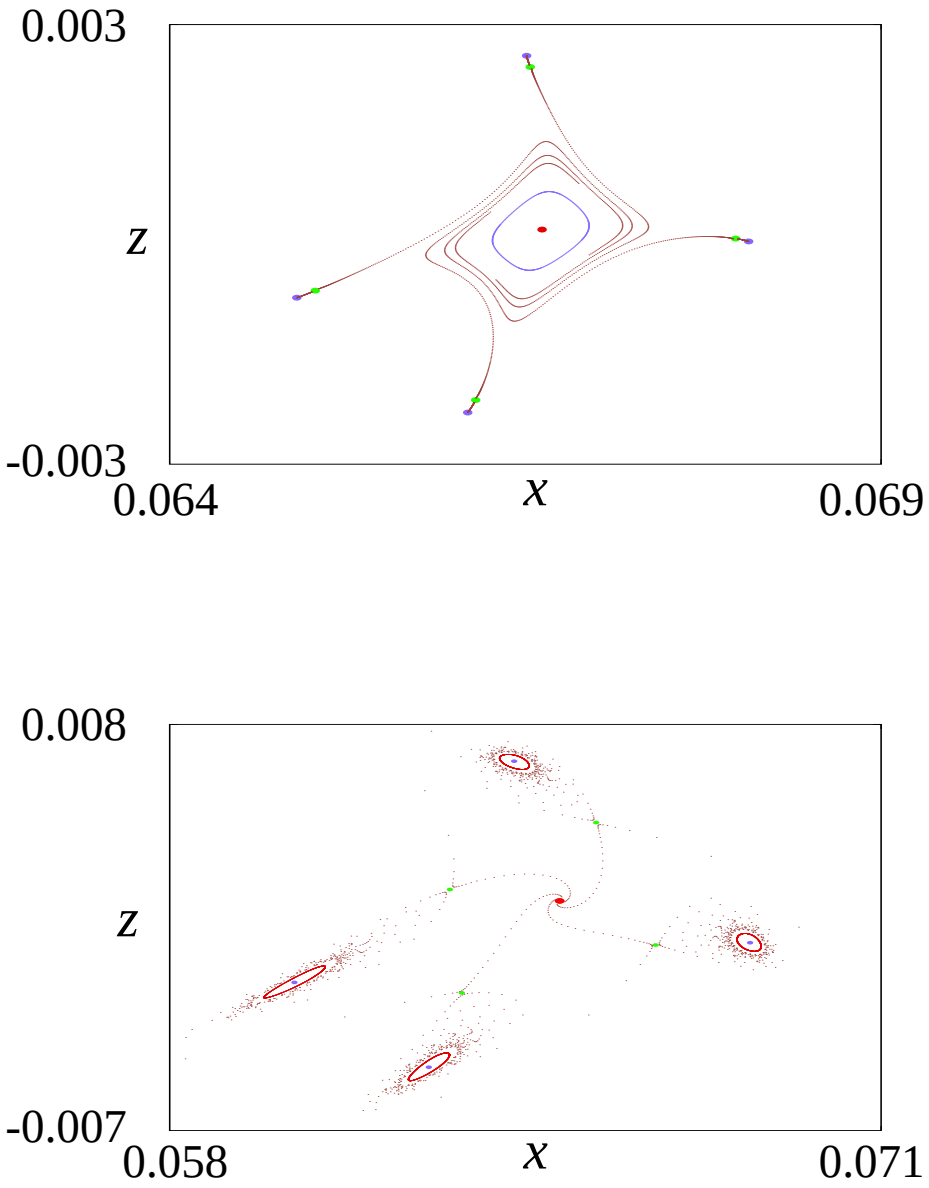


Figura 2.26: Sección de Poincaré en el plano xz del escenario correspondiente a la resonancia 1:4 para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$. En la parte superior ($\beta = 0.0606909$, $c = 0.9235$) se muestra el atractor toroidal, la órbita periódica repulsiva (interior al toro) y dos órbitas periódicas de periodo cuádruple 4T, una atractiva y la otra silla (exteriores al toro). En la parte inferior ($\beta = 0.06092$, $c = 0.917$), vemos la órbita periódica principal (inestable), una órbita periódica silla de periodo 4T y una órbita periódica estable de periodo 4T encerrada por un toro repulsivo de periodo cuádruple 4T.

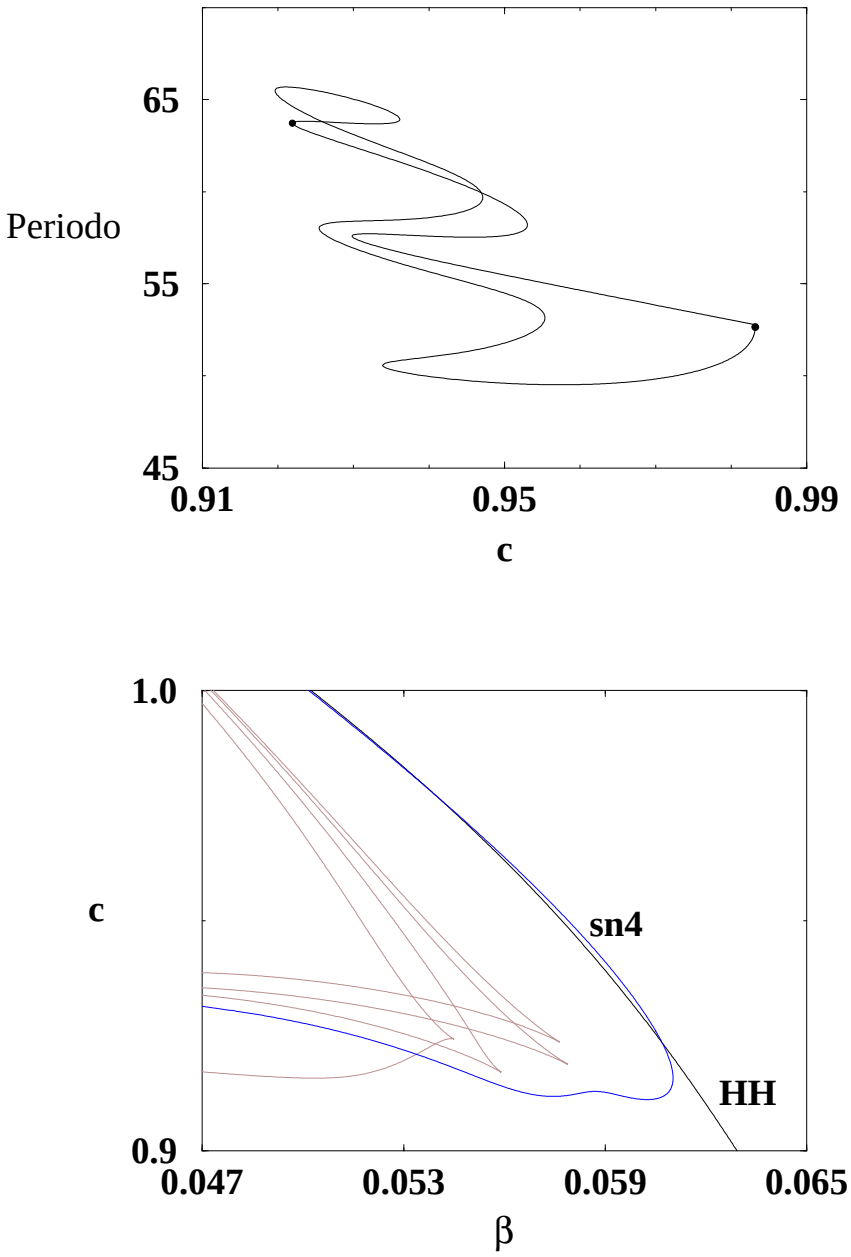


Figura 2.27: Diagrama de bifurcación (c frente a periodo) para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\beta = 0.053$, $\gamma = 0.3$, cerca del punto de resonancia 1:4 sobre la curva **HH**. Los puntos marcados sobre la línea cerrada del diagrama corresponden a puntos de la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas $\mathbf{sn}_4$ que delimita la zona de resonancia. En la parte inferior, incluimos un conjunto de bifurcaciones con las ocho curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas de periodo 4T relacionadas con la resonancia 1:4. Estas ocho curvas colapsan a pares en cuatro puntos donde se presenta una bifurcación cúspide de órbitas periódicas.

Capítulo 3

Lenguas de Arnold

3.1. Introducción

Los fenómenos de resonancia han sido ampliamente estudiados en aplicaciones, concretamente en difeomorfismos planos que corresponden con una aplicación de Poincaré sobre un 2-toro (ver, por ejemplo, Arnold (1983), Aronson, Chory, Hall y McGeehee (1982)). En Frouzakis, Adomaitis y Kevrekidis (1991) estudian la estructura de bifurcaciones dentro de la zona de resonancias en un sistema de control adaptativo, modelado por una aplicación 3D. Debido al carácter bidimensional de la variedad de centro, los resultados obtenidos se corresponden al comportamiento dinámico presente en aplicaciones planas.

Fenómenos similares han sido encontrados en sistemas no autónomos bidimensionales. Por ejemplo, las resonancias fuertes en un sistema presa-depredador forzado periódicamente han sido estudiadas en Kuznetsov, Muratori y Rinaldi (1992). Investigaciones en el campo de los circuitos electrónicos modelados por sistemas lineales a trozos han sido llevadas a cabo por Matsumoto, Chua y Tokunaga (1987).

Por otra parte, en el caso autónomo, Kirk (1993) estudia las zonas de resonancia en un sistema tridimensional que corresponde a la forma normal a tercer orden de la bifurcación Hopf-silla-nodo. Perturba dicha forma normal con términos cúbicos no simétricos, para romper la simetría axial (bajo rotaciones) y la invariancia del eje sobre el que se da la bifurcación silla-nodo. De esta manera encuentra un nuevo fenómeno que no puede aparecer en aplicaciones o en sistemas forzados, a saber, el *merging* de lenguas.

Creemos conveniente destacar algunas diferencias entre las lenguas de resonancia en aplicaciones planas u osciladores forzados (que son equivalentes) y en sistemas autónomos tridimensionales.

Por un lado, en las aplicaciones planas una lengua de resonancia p:q puede definirse como el lugar en el espacio de parámetros donde existen puntos periódicos con número de rotación p:q. Por tanto el valor p:q distingue una lengua de resonancia de las otras. Aunque las lenguas correspondientes a distintos valores de p:q pueden solaparse en el espacio de parámetros, no hay ninguna trayectoria en ese espacio en la que una órbita periódica correspondiente a una lengua se convierta en una órbita periódica correspondiente a otra lengua de resonancia distinta. En otras palabras, una órbita periódica con cuatro puntos no puede convertirse en una de cinco moviendo los parámetros.

Sin embargo, en el caso de los sistemas tridimensionales autónomos, las lenguas están bien definidas sólo en las proximidades de la curva de toros, esto es, están definidas localmente y es precisamente en esta zona donde se comportan como un difeomorfismo del círculo (ver, por ejemplo, Arrowsmith y Place (1990) y Devaney (1986)). Una lengua de resonancia es definida como la región del espacio de parámetros acotada por curvas de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas. Pero como la órbita periódica puede desaparecer en una bifurcación homoclina dentro de la región existente entre las sillas-nodo, tal definición no puede extenderse a todo el espacio de parámetros. Además, lejos de la bifurcación a toros, el toro puede desaparecer dejando libre a la órbita periódica. En esta situación dicha órbita periódica puede modificar su forma y colapsar en una bifurcación silla-nodo con otra órbita periódica procedente de otra lengua de resonancia; es el llamado *merging* de lenguas de resonancia.

Nuestro objetivo principal en este capítulo es dar respuesta a la pregunta siguiente, planteada en la sección 2.4 del capítulo 2: ¿por qué las lenguas de Arnold relacionadas con la curva de bifurcación a toros **HH** son abiertas (ver figura 2.23), siendo el punto de degeneración angular **D** sobre la curva **HH** de tipo *banana*? Para ello realizaremos un análisis detallado de las zonas de resonancia que existen en relación con una curva de bifurcación a toros que surge de un punto de codimensión dos Hopf-pitchfork.

Nuestro propósito es estudiar las resonancias en un sistema realista, que introducimos a continuación.

El oscilador electrónico que consideramos en este capítulo corresponde a tomar, en el circuito esquematizado en la figura 1.1 del capítulo 1, G_1 y G_3 conductancias no lineales negativas y G_2 conductancia no lineal positiva. Aplicando las leyes de Kirchoff (tomando como variables de estado las tensiones en los condensadores y la intensidad en la bobina) modelando las conductancias por polinomios cúbicos impares y, tras escalar adecuadamente el tiempo y las variables de estado, se llega a (ver Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1998))

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& -\left(\dfrac{\nu+\beta}{r}\right)x + \dfrac{\beta}{r}y - \dfrac{A_3}{r}x^3 + \dfrac{B_3}{r}(y-x)^3, \\ \dot{y} &=& \beta x - (\beta+\gamma)y - z - B_3(y-x)^3 - C_3y^3, \\ \dot{z} &=& y. \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Resaltamos que el sistema obtenido presenta $\mathbb{Z}_2$-simetría y la posibilidad de ser singularmente perturbado, para el valor límite $r = 0$.

Como es inmediato comprobar, el origen del espacio de fases es un punto de equilibrio del sistema para todos los valores de los parámetros, debido a la simetría que éste presenta. Del análisis de la matriz de la linealización del sistema en el origen,

$$M(\nu,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\nu+\beta}{r} & \dfrac{\beta}{r} & 0 \\ \beta & -(\beta+\gamma) & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico $P_M(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3$ tiene como coeficientes

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\beta(1+r)+\nu+r\gamma}{r}, \\ p_2 &= \frac{\gamma(\nu+\beta)+\beta\nu+r}{r}, \\ p_3 &= \frac{\nu+\beta}{r}, \end{aligned}$$

extraemos información de la dinámica alrededor de dicho punto, comprobando fácilmente que se pueden dar los siguientes casos de no hiperbolicidad, que hemos recogido en la siguiente proposición:

Proposición 3.1.1 *El equilibrio del origen del sistema (3.1) presenta las siguientes degeneraciones lineales:*

1. *Una bifurcación pitchfork o tridente (un autovalor cero simple y los dos restantes con parte real no nula) para los valores $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$ y $p_3 = 0$ o, en términos de los parámetros ν, β, γ, sobre el conjunto*

$$\mathbf{PI} = \left\{(\nu,\beta,\gamma) \ / \ \ \nu+\beta=0,\ \beta\neq-\gamma,\ \beta\neq\pm\sqrt{r})\right\}.$$

   Esta bifurcación hace aparecer dos equilibrios simétricos respecto del origen en la zona $\nu + \beta \leq 0$.

2. *Una bifurcación de Hopf (dos autovalores imaginarios puros y un tercero no nulo) para $p_1p_2 = p_3$, $p_2 > 0$, $p_3 \neq 0$.*

3. *Una bifurcación de Takens-Bogdanov (un autovalor cero doble y un tercero no nulo) para $p_2 = p_3 = 0$, $p_1 \neq 0$, que, en función de los parámetros ν, β, γ, se corresponde con el conjunto*

$$\mathbf{TB} = \{(\nu,\beta,\gamma) \ / \ \ \nu+\beta=0,\ \nu\beta+r=0,\ \beta+\gamma\neq0\}.$$

4. *Una bifurcación Hopf-pitchfork (dos autovalores imaginarios puros y el tercero nulo) para $p_1 = p_3 = 0$, $p_2 > 0$, que se corresponde, en el espacio de parámetros (ν, β, γ), con el segmento rectilíneo*

$$\mathbf{HP} = \left\{(\nu,\beta,\gamma) \ / \ \ \nu+\beta=0,\ \beta+\gamma=0,\ \beta\leq\sqrt{r}\right\}.$$

5. *Una bifurcación triple-cero (correspondiente a un autovalor cero triple) para $p_1 = p_2 = p_3 = 0$. En el espacio de parámetros (ν, β, γ), se obtienen los dos puntos $\mathbf{TZ}_1 = (-\sqrt{r}, \sqrt{r}, -\sqrt{r})$ y $\mathbf{TZ}_2 = (\sqrt{r}, -\sqrt{r}, \sqrt{r})$.*

Todos los lugares geométricos donde se producen las degeneraciones lineales, salvo la bifurcación de Hopf, por ser su superficie bastante más complicada, están esquematizados en la figura 3.1.

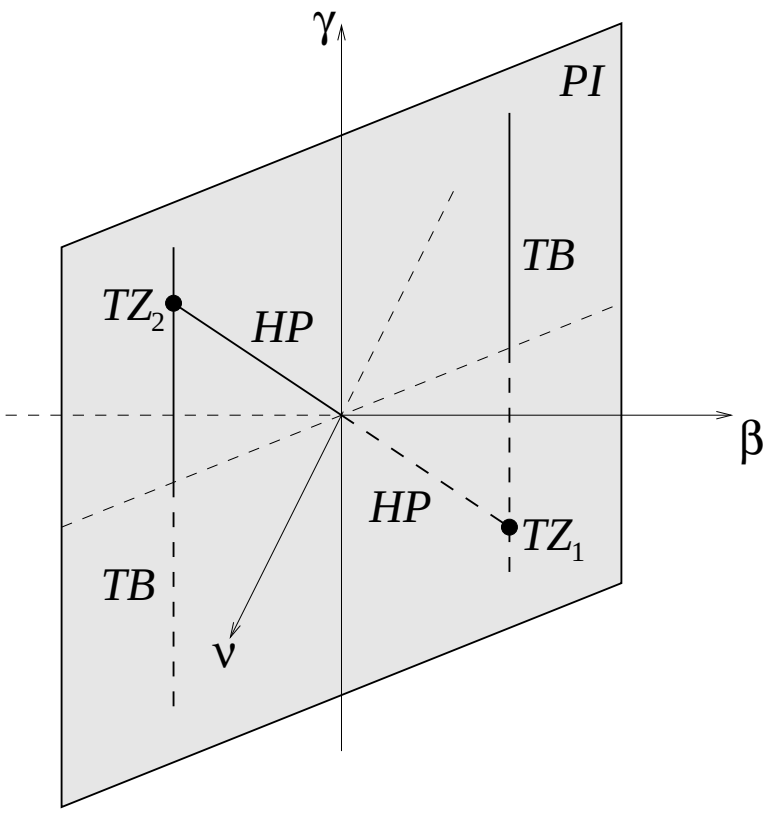


Figura 3.1: No hiperbolicidades del equilibrio del origen del sistema (3.1) en el espacio de parámetros (ν, β, γ).

Una exposición detallada del primer caso de la proposición se puede ver en el trabajo de Freire, Franquelo y Aracil (1984). En el caso particular $\gamma = 0$, $C_3 = 0$, las bifurcaciones de Hopf y de Takens-Bogdanov están analizadas en Gamero (1990) y Rodríguez-Luis (1991). En el trabajo de Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1998), se analizan también las bifurcaciones de Hopf y de Takens-Bogdanov para los distintos valores de γ. Un estudio general del resto de los casos, bajando de $\gamma = 0$ hasta $\gamma = -\sqrt{r}$, con el fin de aproximarse a uno de los puntos de degeneración triple-cero existentes, se puede encontrar en Algaba (1996). Más concretamente, el análisis de la bifurcación Hopf-pitchfork del equilibrio del origen, incluyendo varios casos de degeneración no lineal, se lleva a cabo en los trabajos de Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*a*), (1999*b*) y (2000).

Puesto que nuestro objetivo es estudiar las zonas de resonancia, estamos especialmente interesados en las bifurcaciones de Hopf secundaria de órbitas periódicas, o bifurcaciones a toros, puesto que de ellas nacen las lenguas de Arnold (ver Arnold (1983)). Como es bien conocido, una bifurcación a toros surge de una bifurcación Hopf-pitchfork cuando es de tipo VIa o VIIa (según la notación de Guckenheimer y Holmes (1997)). Será pues interesante determinar cuándo la bifurcación de Hopf-pitchfork, que en el sistema (3.1) ocurre sobre el segmento $\nu = \gamma$, $\beta = -\gamma$, $|\gamma| < \sqrt{r}$, puede dar lugar a la presencia de curvas de bifurcación a toros. El estudio de la bifurcación Hopf-pitchfork en el sistema

(3.1) aparece en Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*a*), (1999*b*) y (2000).

Se demuestra que, para

$$\gamma = \gamma_c = \pm\sqrt{\frac{qr^2}{1+rq}}, \quad \text{donde} \quad q = \sqrt{\frac{B_3+C_3}{A_3+B_3}},$$

una degeneración no lineal (codimensión tres) aparece en la bifurcación Hopf-pitchfork (el coeficiente de r^3 de la componente de la forma normal con respecto a $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$ se anula) de tal manera que el caso VIa aparece cuando $\gamma^2 > \gamma_c^2$.

Para $\nu \approx \gamma_c$, $\beta \approx -\gamma_c$, $\gamma \approx \gamma_c$, el sistema (3.1) puede ponerse en correspondencia con el desplegamiento (ver Algaba, Freire y Gamero (1998))

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 r^2 + z^2 + cr^4), \\ \dot{z} &= z(\varepsilon_2 + dr^2 + az^2), \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + \alpha_1 r^2 + \alpha_2 z^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

El conjunto de bifurcaciones de este despliegue, si no consideramos la componente azimutal, se estudia en Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*a*). En ese trabajo se ponen también de manifiesto las consecuencias que conlleva esta situación para la dinámica de los sistemas tridimensionales. Para nosotros, es de particular interés la aparición de una bifurcación de codimension dos de órbitas periódicas que está presente en el despliegue (3.2). Esta bifurcación corresponde a un multiplicador de Floquet doble $+1$ diagonalizable de la órbita periódica que surgió en la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales. En lo que sigue, denominaremos **A** a esta bifurcación Hopf-silla-nodo de órbitas periódicas, siguiendo la notación utilizada en el capítulo anterior. De hecho, la curva de bifurcación a toros que surge del punto de Hopf-pitchfork termina en el punto **A**.

En este capítulo fijamos los valores de los siguientes parámetros $r = 0.6$, $A_3 = 0.3286$, $B_3 = 0.9336$ y $C_3 = 0$, que coinciden con los valores tomados, por ejemplo, en Algaba (1996), Freire, Rodríguez-Luis, Gamero y Ponce (1993), Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*a*) y Champneys y Rodríguez-Luis (1999).

Para estos valores, una degeneración no lineal en la bifurcación Hopf-pitchfork ocurre en el punto $(\gamma_c, -\gamma_c, \gamma_c)$ del espacio paramétrico, siendo $\gamma_c \approx -0.451915$. Para este valor crítico, los coeficientes en (3.2) son $a \approx -13.993$, $c = +1$, $d = -1$, $\omega_0 = 0.6325$, $\alpha_1 = -0.2814$ y $\alpha_2 = -22.143$.

De esta forma, elegimos $\gamma = -0.6$ para obtener un plano de parámetros donde los repulsores toroidales existen. De hecho, para este valor de γ la bifurcación Hopf-pitchfork es del tipo VIa (siguiendo la notación de Guckenheimer y Holmes (1997)).

Usando métodos de continuación numérica podemos *extender* las curvas de bifurcación detectadas en el estudio local (ver Doedel, Champneys, Fairgrieve, Kuznetsov, Sandstede y Wang (1998)). Un conjunto parcial de bifurcaciones para $\gamma = -0.6$ se muestra en la figura 3.2. Encontramos la presencia de cinco puntos de codimensión dos: Hopf-pitchfork del origen **HP**, Takens-Bogdanov (de tipo cúbico homoclino) del origen **TB**, Hopf degenerada del origen **Hd**, Hopf-silla-nodo de órbitas periódicas **A** de tipo III (siguiendo la notación de Guckenheimer y Holmes (1997)) y una conexión heteroclina de codimensión dos en la que las variedades unidimensionales de dos equilibrios tipo silla coinciden y el lazo

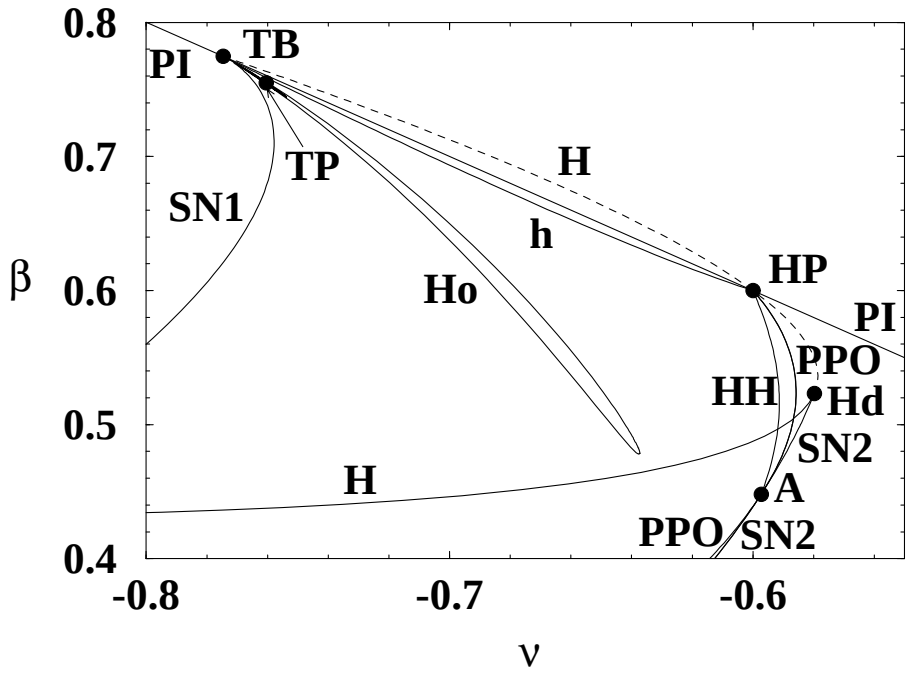


Figura 3.2: Para $\gamma = -0.6$, conjunto parcial de bifurcaciones. Aparecen cinco puntos de bifurcaciones de codimensión dos (**TB**, Takens-Bogdanov; **HP**, Hopf-pitchfork; **Hd**, Hopf degenerada del origen; **A**, Hopf-silla-nodo; **TP**, ciclo heteroclíno entre el origen y los equilibrios no triviales) y varias curvas correspondientes a bifurcaciones de codimensión uno (**PI**, pitchfork del origen; **H**, Hopf del origen; **h**, Hopf de los equilibrios no triviales; **PPO**, pitchfork de órbitas periódicas; **SN1** y **SN2**, silla-nodo de órbitas periódicas simétricas; **Ho**, conexiones homoclinas del origen; **HH**, bifurcación a toros).

se cierra al intersecar también sus variedades bidimensionales **TP** (ver Glendinning y Sparrow (1986), Bykov (1993), Fernández-Sánchez (2002), Fernández-Sánchez, Freire y Rodríguez-Luis (2002)). Observemos que tres de ellos, **TB**, **HP** y **Hd**, están sobre la curva de bifurcación de Hopf del origen **H**.

Con respecto a las bifurcaciones de codimensión uno presentes en la figura 3.2, hacemos las siguientes consideraciones. Una bifurcación pitchfork del origen **PI** se produce sobre la recta que pasa por los puntos **TB** y **HP**. Por encima de esta recta el origen es el único equilibrio y por debajo, dos equilibrios no triviales coexisten con el equilibrio en el origen. La curva de Hopf del origen **H** es subcrítica cuando sale del punto **TB** y se transforma en supercrítica a partir del punto **Hd**. De dicho punto surge una curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas **SN2**, que pasa por el punto **A**.

Del punto **TB** surgen también una curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas **SN1**, y una curva de conexiones homoclinas del origen **Ho**. Para este valor del parámetro γ, la curva de conexiones homoclinas **Ho** tiene un punto de retorno y no interseca con la curva **H** (si aumentamos el valor del parámetro γ tal intersección ocurre en un punto de Hopf-Shil'nikov, ver Hirschberg y Knobloch (1993), Champneys y Rodríguez-Luis (1999)). Después la curva **Ho** acaba *espiralando* en torno al punto **TP**.

La curva de Hopf de los equilibrios no triviales **h** es supercrítica desde el punto **TB** al punto **HP**. La curva de bifurcaciones pitchfork de órbitas periódicas **PPO** une los puntos **HP** y **A**. Por debajo del punto **A** también existe otra curva de bifurcación pitchfork de órbitas periódicas **PPO**. Hay otra curva que también une los puntos **HP** y **A**, la curva de bifurcación a toros **HH** desde la que bifurca un toro repulsivo. En efecto, cuando atravesamos la curva **PPO**, en sentido decreciente del parámetro ν, surge una órbita periódica asimétrica repulsiva en torno a cada uno de los equilibrios no triviales. Al ir moviendo el parámetro ν en la misma dirección dicha órbita periódica experimenta una bifurcación a toros, al atravesar la curva **HH**, y pasa a ser atractiva. Posteriormente esta órbita periódica atractiva experimenta una bifurcación de duplicación de periodo **PD**, dando lugar a una órbita periódica atractiva de *doble pulso*, y se transforma en una órbita periódica inestable de tipo silla.

En la figura 3.3 hemos dibujado la curva **PD**. Notemos que sobre esta misma curva también experimentan una bifurcación de duplicación de periodo las órbitas periódicas asimétricas atractivas que surgen de la curva de Hopf de los equilibrios no triviales **h**. También aparecen en la citada figura otras curvas de bifurcación $\mathbf{sn_3}$, $\mathbf{sn_4}$, $\mathbf{sn_5}$ y $\mathbf{sn_{11}}$ que delimitan, al igual que la curva **PD**, una zona abierta de existencia de órbitas periódicas asimétricas. Todas ellas se caracterizan porque las órbitas periódicas que surgen inicialmente de cada una de estas curvas, una estable y otra inestable de tipo silla, dan n vueltas en torno al equilibrio no trivial, con $n = 3, 4, 5, 11$ respectivamente, antes de cerrarse. Destacamos cómo, además de las cúspides presentes sobre cada una de estas curvas excepto sobre la curva **PD**, todas ellas se cortan, organizándose en orden creciente en relación al pulso n cuando se aproximan, en el plano de parámetros de la figura 3.3, a la curva de bifurcación a toros **HH**. Nótese que ninguna de estas curvas, para este valor del parámetro γ, corta a la curva **HH**. En la figura 3.4 hemos dibujado, para $\beta = 0.5$, la proyección sobre el plano x-y de la órbita periódica atractiva que surge de la curva $\mathbf{sn_3}$ para $\nu = -0.6105$ y de la curva $\mathbf{sn_{11}}$ para $\nu = -0.5933$.

Todas estas curvas están relacionadas con la degeneración **Hod**, de la figura 3.3, que existe sobre ambas ramas de la curva de conexiones homoclinas **Ho** cuando entran en zona Shil'nikov (ver Belyakov (1984), Gaspard, Kapral y Nicolis (1984) y Glendinning y Sparrow (1984)). Si denotamos por $(\rho \pm i\omega, \lambda)$ los autovalores del origen, la degeneración **Hod** se produce cuando $\delta = |\rho/\lambda| = 1$ (autovalores resonantes) muy cerca del punto **TB**. En estos puntos se produce la transición de *dócil* a *caótica* de la órbita homoclina. Esta degeneración será objeto de estudio en el siguiente capítulo.

En este capítulo mostraremos que la interacción entre las curvas **PD** y **HH** va a implicar la presencia de comportamientos dinámicos complejos, a saber, bifurcaciones de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas (ver Algaba, Merino y Rodríguez-Luis (1999); Algaba, Merino y Rodríguez-Luis (2001)).

3.2. Análisis de las lenguas de Arnold

Los multiplicadores de Floquet de la órbita periódica que experimenta la bifurcación a toros se mueven sobre la circunferencia unidad en la forma mostrada en la figura 3.5,

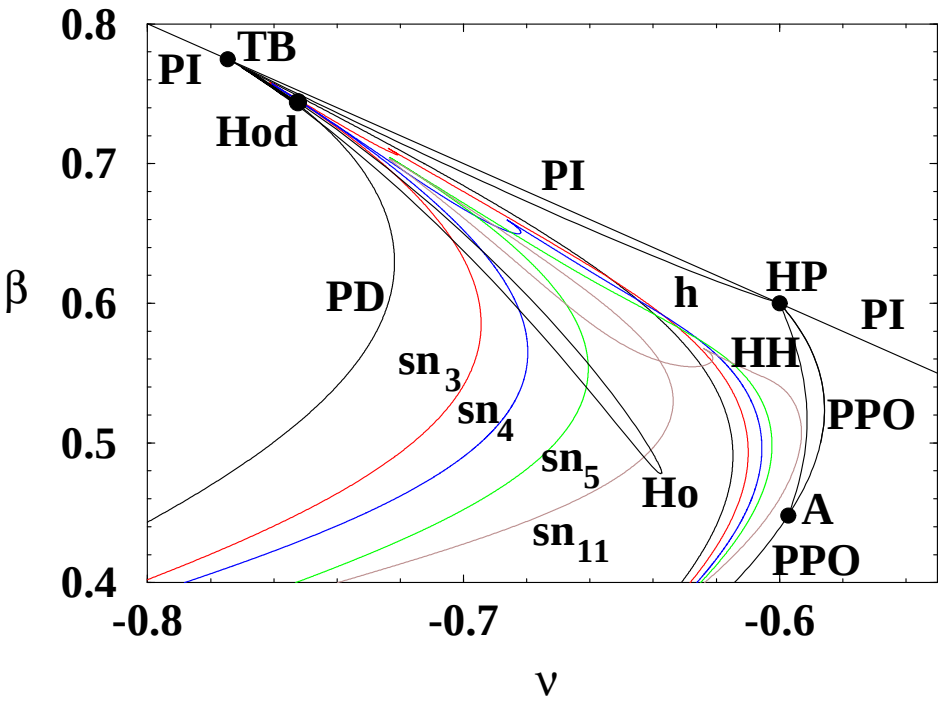


Figura 3.3: Para $\gamma = -0.6$, conjunto parcial de bifurcaciones. Aparece, en relación a la figura 3.2, un nuevo punto de bifurcación de codimensión dos (**Hod**, degeneración de la homoclina **Ho**) y varias curvas correspondientes a bifurcaciones de codimensión uno (**PD**, duplicación de periodo de la órbita periódica asimétrica que surge de la pitchfork de órbitas periódicas **PPO**; $\mathbf{sn_3}$ (color rojo), $\mathbf{sn_4}$ (color azul), $\mathbf{sn_5}$ (color verde) y $\mathbf{sn_{11}}$ (color marrón) sillas-nodo de órbitas periódicas asimétricas).

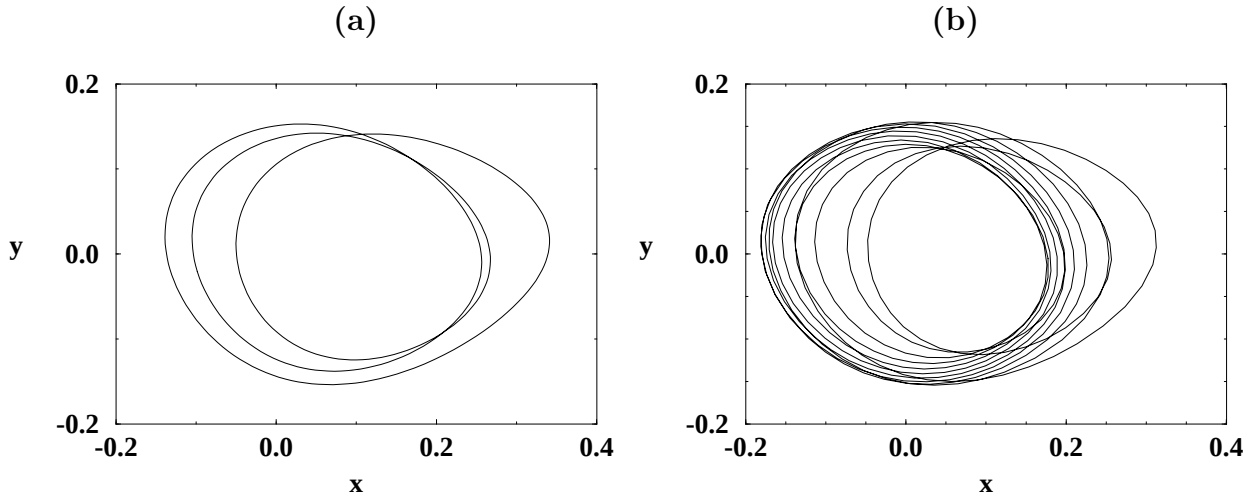


Figura 3.4: Para $\beta = 0.5$ y $\gamma = -0.6$: (a) Proyección sobre el plano x-y de la órbita periódica atractiva que surge de la curva $\mathbf{sn_3}$ para $\nu = -0.6105$. (b) Proyección sobre el plano x-y de la órbita periódica atractiva que surge de la curva $\mathbf{sn_{11}}$ para $\nu = -0.5933$.

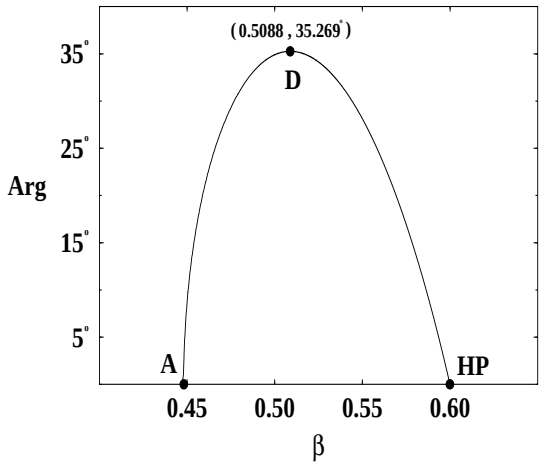


Figura 3.5: Para $\gamma = -0.6$, argumento de los multiplicadores característicos frente a β a lo largo de la curva de bifurcación a toros **HH**, con un punto de degeneración angular **D** sobre ella.

donde el argumento (ángulo que forma el multiplicador de Floquet con parte imaginaria positiva y el eje horizontal) se representa frente al parámetro β.

Cuando el argumento deja de variar de forma monótona decimos que la bifurcación a toros tiene una degeneración angular (ver Peckham, Frouzakis y Kevrekidis (1995)), como ocurre en nuestro caso donde la curva tiene forma parabólica y alcanza un máximo en un punto de degeneración angular **D** (en el que los multiplicadores de Floquet cambian su sentido de movimiento sobre la circunferencia unidad). La aparición de esta degeneración angular es una consecuencia de la existencia del punto **A** (puesto que el argumento es nulo en ambos extremos de la curva **HH**).

El valor del argumento en este punto de degeneración **D** (aproximadamente 35.3°) nos indica que van a aparecer resonancias 1:p y 2:q sobre la curva **HH** solamente para $p \geq 11$ y $q \geq 21$. Además, las lenguas de Arnold correspondientes a una misma resonancia tendrán dos puntos de inicio (*tips*) sobre la curva **HH** para dos valores diferentes de los parámetros.

Para ver la evolución de las zonas de resonancia tenemos que detectar la solución periódica que surge del toro. El estudio analítico de la bifurcación Hopf-pitchfork combinado con la computación numérica de los multiplicadores de Floquet a lo largo de la curva de bifurcación a toros proporciona la zona de resonancia en primera aproximación. Vamos a proceder de la siguiente manera: primero fijamos los parámetros, próximos a los valores de la curva **HH**, en la zona en que existe movimiento cuasiperiódico, y construimos la sección de Poincaré del toro que define un difeomorfismo del círculo en sí mismo. A continuación calculamos las potencias de este difeomorfismo (teniendo en cuenta el orden de Farey de los números racionales, ver Nayfeh y Balachandran (1995)), lo que nos permite averiguar la resonancia más próxima que está presente para los valores de los parámetros fijados. Finalmente, con la ayuda de la aplicación de Poincaré, buscamos la órbita periódica correspondiente. La continuación numérica de esta órbita periódica, llevada a cabo con el código AUTO (ver Doedel, Champneys, Fairgrieve, Kuznetsov, Sandstede y Wang (1998)),

proporciona los límites de su zona de existencia (curvas de bifurcación silla-nodo). Obtenemos de esta manera algunas lenguas de Arnold correspondientes a resonancias 1:p que aparecen en la figura 3.6(a) en un entorno de la curva **HH**.

La forma de estas lenguas lejos de la curva **HH** se muestra en la figura 3.6(b), donde el comportamiento asintótico de todas ellas puede observarse. En efecto, del punto **A** surge la curva de bifurcación a toros **HH** y la curva **PPO**, donde se experimenta una bifurcación pitchfork de órbitas periódicas, hace el papel de zona de resonancia 1:1 para ella. En consecuencia del punto **A** surgen dos curvas de bifurcación, donde se producen la primera y última tangencia homoclina entre las variedades estables e inestables de la órbita periódica silla, que delimitan una región abierta donde hay *enredo homoclino*. Sobre estas dos curvas acumulan las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas correspondientes a las lenguas de Arnold (ver Broer, Roussarie y Simó (1993), Broer, Simó y Tatjer (1998), Kirk (1991)). Un comentario análogo se puede realizar con respecto al punto **HP**, en el cual finaliza la curva **HH**, y las curvas **h** y **PPO** como zonas que delimitan la zona de resonancia 1:1 en la parte superior del plano de parámetros ν-β. La representación gráfica de las lenguas de Arnold en la figura 3.6(b) nos sugiere, en nuestro caso, que dos de las cuatro curvas donde tienen lugar las tangencias homoclinas pudieran estar unidas.

En la figura 3.6(c) mostramos, para $\gamma = -0.6$, el punto de degeneración angular **D** sobre la curva de bifurcación **HH**, así como las primeras zonas de resonancia (1:p y 2:q) que existen cerca del punto **D**. La computación numérica efectuada nos sugiere, puesto que las tres primeras zonas son cerradas (2:21, 1:11, 2:23), que el punto **D** es del tipo *banana* (ver Peckham, Frouzakis y Kevrekidis (1995)).

En nuestro estudio nos centraremos en las dos resonancias más bajas 1:p, es decir, la 1:11 y la 1:12. Nos referiremos a ambos casos para ilustrar que el comportamiento encontrado es genérico para las resonancias débiles en este circuito. Además, estas resonancias corresponden, para $\gamma = -0.6$, a una zona de resonancia cerrada (1:11) y a la primera zona de resonancia abierta del tipo 1:p (1:12) en el plano de parámetros ν-β.

En efecto, se observa en la figura 3.6(d) cómo las curvas de bifurcación silla-nodo que surgen de los dos *tips* correspondientes al mismo valor del argumento sobre la curva **HH** se unen dando lugar a que la región de resonancia 1:11 sea cerrada. Sin embargo, hay tres curvas de bifurcación silla-nodo que limitan la región 1:12, que en este caso es abierta porque sólo una de las curvas del *tip* superior se une con una de las curvas surgidas del *tip* inferior.

Notemos también que dentro de la zona de resonancia cerrada 1:11 existen dos órbitas periódicas que no experimentan ninguna bifurcación. Ambas son hiperbólicas, una de tipo silla y la otra repulsiva, y en consecuencia el diagrama de bifurcaciones que se obtendría en esta situación (fijando cualquiera de los dos parámetros ν o β) es una isla en forma de o. En la figura 3.7 mostramos la proyección sobre el plano x-y de la órbita periódica repulsiva que surge de la lengua de Arnold 1:11. Nótese la semejanza con la figura 3.4(b), correspondiente a la órbita periódica atractiva que surge de la curva $\mathbf{sn}_{11}$.

Nuestro propósito es, tomando γ como parámetro de control, estudiar la evolución de las lenguas de Arnold correspondientes a tales resonancias, al objeto de saber si las zonas de resonancia pasan de ser cerradas a ser abiertas, al mover un determinado parámetro

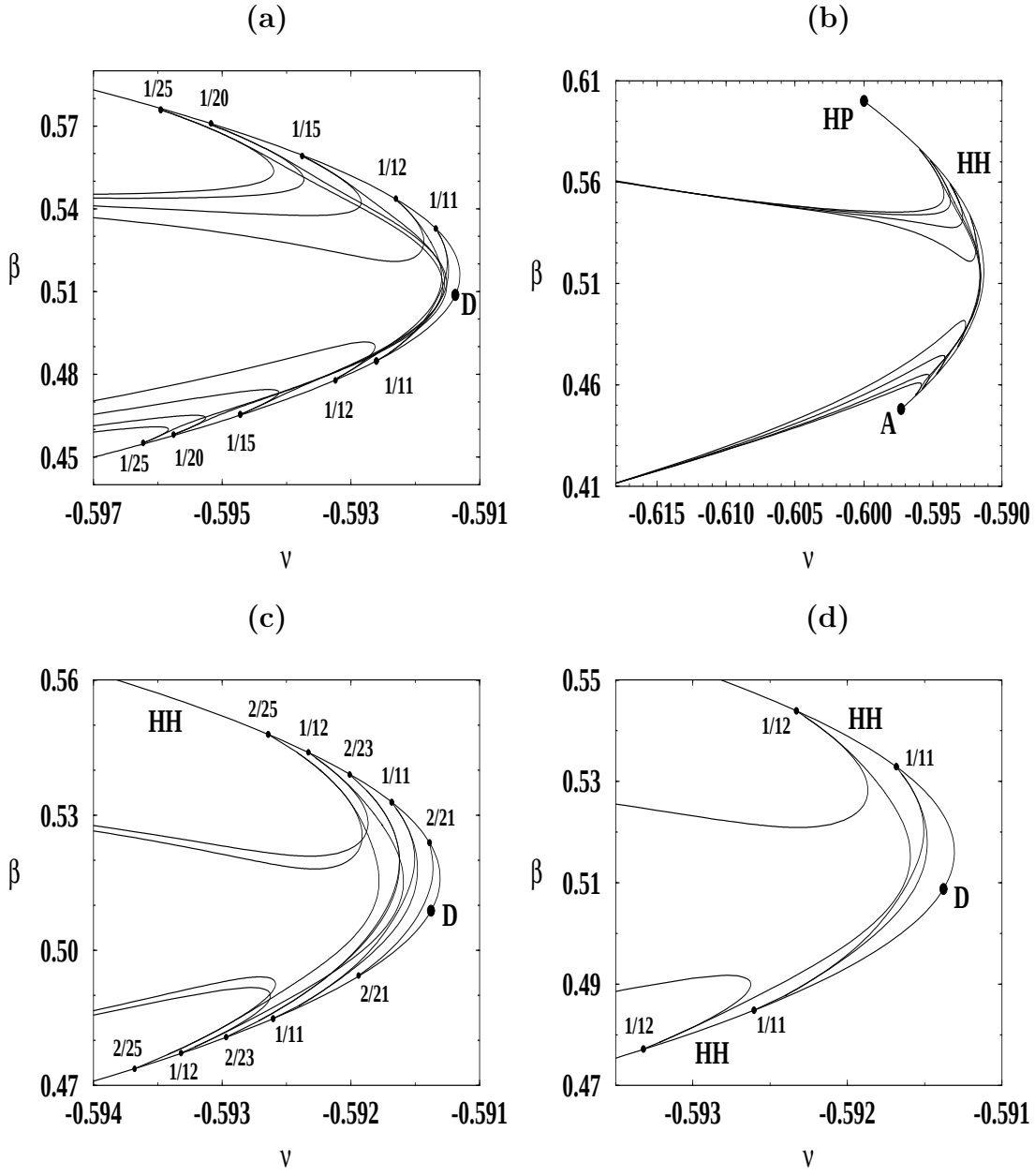


Figura 3.6: Para $\gamma = -0.6$: (a) Lenguas de Arnold para las resonancias 1:p, con $p = 11, 12, 15, 20, 25$ cerca de la curva **HH**. (b) Las mismas lenguas en una región más amplia donde se observa su comportamiento asintótico. (c) Lenguas de Arnold para las primeras resonancias 1:p y 2:q, concretamente 2:21, 1:11, 2:23, 1:12 y 2:25. (d) Detalle de las lenguas de Arnold para la resonancia 1:11 (zona de resonancia cerrada) y 1:12 (primera zona de resonancia abierta del tipo 1:p).

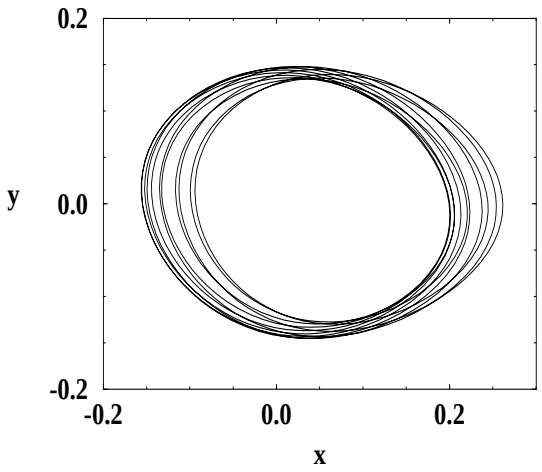


Figura 3.7: Para $\beta = 0.5$ y $\gamma = -0.6$, proyección sobre el plano x-y de la órbita periódica repulsiva de la lengua de Arnold cerrada 1:11 para $\nu = -0.59152$.

y cómo se lleva a cabo este proceso. Esto explicaría que todas las resonancias débiles dibujadas en el capítulo 2, correspondientes a la simulación numérica del circuito de Chua, eran abiertas para los valores de los parámetros representados, aun siendo la curva de los argumentos de los multiplicadores característicos y el punto de degeneración angular **D** del mismo tipo en ambos casos (ver figuras 2.22 y 3.5).

3.3. Dinámica en el interior de las lenguas

Para estudiar la dinámica dentro de las lenguas hemos elegido varias secciones de Poincaré en dos cortes horizontales (en el plano ν-β) para la lengua 1:11, concretamente $\beta = 0.529$ y $\beta = 0.524$ (ver figura 3.8(a)). Este trabajo numérico ha sido llevado a cabo con el programa DSTOOL (ver Guckenheimer, Myers, Wicklin y Worfolk (1995)).

El primer corte (A-C) lo hacemos cerca del *tip* de la lengua de Arnold, pero por encima de la curva donde los multiplicadores de la órbita periódica repulsiva son iguales. Esta curva no aparece en esta figura porque es indistinguible de la frontera de la lengua, debido al estrecho rango de los parámetros. En este primer corte horizontal, para $\beta = 0.529$, las regiones A y C son las que están fuera de la lengua de Arnold (a la izquierda y a la derecha respectivamente). Concretamente, la sección de Poincaré correspondiente a la zona A (ver figura 3.8(b)) muestra que las trayectorias son repelidas en sentido contrario a las agujas del reloj desde la curva invariante, tanto por dentro como por fuera de ella. En particular, las trayectorias interiores van hacia una órbita periódica atractiva dentro del toro.

Cuando se cruza la frontera de la resonancia 1:11, en la zona B (ver figura 3.8(c)), un par de órbitas periódicas de periodo 11 aparece sobre el *toro* invariante. El conjunto invariante está formado ahora por las variedades estables de las órbitas periódicas (indicadas como S) junto con las órbitas periódicas repulsivas (de tipo nodo, indicadas por N). Finalmente, aumentando de nuevo ν, las órbitas periódicas silla y nodo se aproximan sobre el conjunto repulsivo invariante hasta que colapsan en otra bifurcación silla-nodo

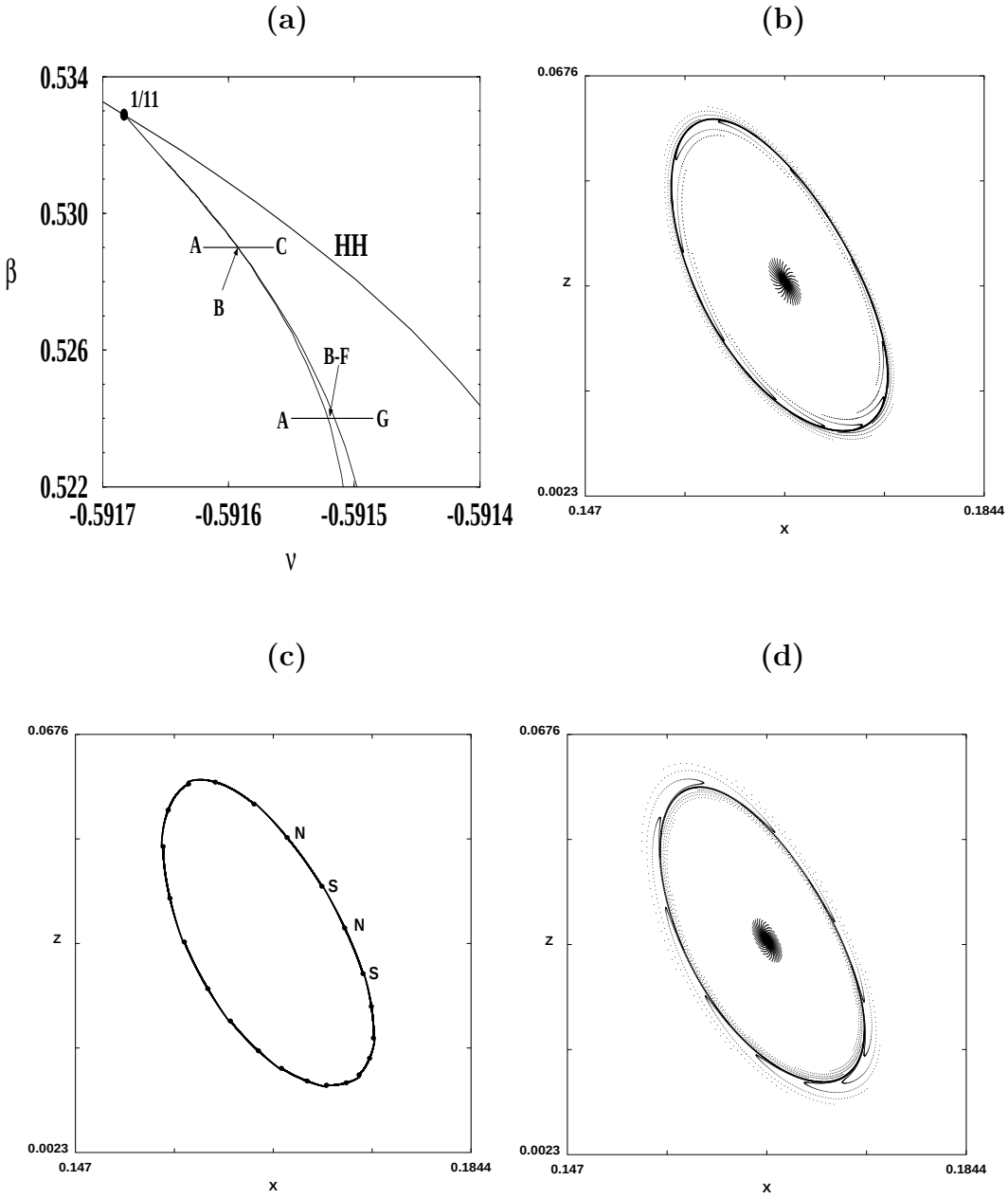


Figura 3.8: Para $\gamma = -0.6$. (a) Zoom del *tip* superior de la lengua de Arnold 1:11. Secciones de Poincaré con el plano $y = 0$, correspondiente al corte horizontal A-C, en la: (b) región A; (c) región B; (d) región C.

cuando cruzamos al otro lado de la lengua de resonancia. En la zona C la situación es similar a la de la zona A pero en este caso la rotación de las órbitas se produce en el sentido de las agujas del reloj (ver figura 3.8(d)). Estos son los comportamientos esperados en las proximidades del *tip* de las resonancias débiles (ver Aronson, Chory, Hall y McGeehee (1982)).

En el segundo corte horizontal, bajando al valor $\beta = 0.524$ en la lengua de Arnold, una mayor variedad de secciones de Poincaré aparece (A-G). A lo largo de este corte uniparamétrico dos zonas exteriores a la lengua aparecen, A y G, con comportamiento análogo al de las zonas A y C del primer corte. En la figura 3.9(a) mostramos un zoom del segundo corte de la figura 3.8(a). En este conjunto parcial de bifurcaciones de la lengua 1:11 vemos dos regiones muy estrechas C y E, donde existen tangencias homoclinas, **Ho1** y **Ho2**. Estas tangencias separan los distintos comportamientos encontrados en las regiones B, D y F.

En las figuras 3.9(b)-(f) aparecen las secciones de Poincaré que se obtienen al cortar con el plano $y = 0$ dentro de la lengua de Arnold 1:11, concretamente mostramos un zoom de la parte inferior del conjunto invariante repulsivo. Tres de ellos son estructuralmente estables (zonas B, D y F) y los otros dos son estructuralmente inestables puesto que están relacionados con enredos homoclinos (zonas C y E). En la sucesión mostrada podemos observar cómo las órbitas periódicas pasan de la parte interior (zona B) a la exterior (zona F) del conjunto invariante repulsivo que, de hecho, va perdiendo diferenciabilidad según se va moviendo el parámetro ν hacia el interior de la lengua.

Cuando se atraviesa la curva de bifurcaciones silla-nodo y se entra en la zona B (ver la figura 3.9(b)), dos órbitas periódicas aparecen, una silla S y la otra repulsiva de tipo nodo. Ésta última se convierte rápidamente en una órbita de tipo foco F, ya que la curva donde se produce la transición de nodo a foco está muy próxima a la curva de bifurcación $\mathbf{sn}_{11}$. La aparición de las dos órbitas periódicas se produce dentro del conjunto invariante repulsivo, y podemos ver en la figura 3.9(b) cómo la variedad inestable de la órbita periódica silla tiene confinada a la órbita periódica foco en su interior. Una situación análoga ocurre en la zona F (ver figura 3.9(f)) aunque en este caso las órbitas periódicas aparecen fuera del círculo invariante.

Aumentando el valor del parámetro ν entramos en la zona C (ver figura 3.9(c)) donde aparece una interacción homoclina entre las variedades de la órbita periódica silla. De esta forma desaparece el círculo invariante. Notemos que en este zoom no aparecen los pliegues de la variedad inestable de la órbita periódica silla cuando se aproxima a la órbita periódica silla adyacente.

La zona siguiente D (ver figura 3.9(d)) es la más ancha de las zonas interiores de la lengua de Arnold 1:11. Ahora la frontera de la cuenca de atracción de la órbita periódica estable, que estaba dentro del conjunto invariante repulsivo, está formada por las variedades estables de la órbita silla junto con la órbita periódica de tipo foco. En este caso el conjunto invariante repulsivo sigue estando presente, pero ha perdido su diferenciabilidad. Este comportamiento es análogo al obtenido en la región B para el primer corte, si bien en nuestro caso la órbita periódica repulsiva es de tipo foco en lugar de nodo.

Finalmente, en la zona E (ver figura 3.9(e)) encontramos otra conexión homoclina que,

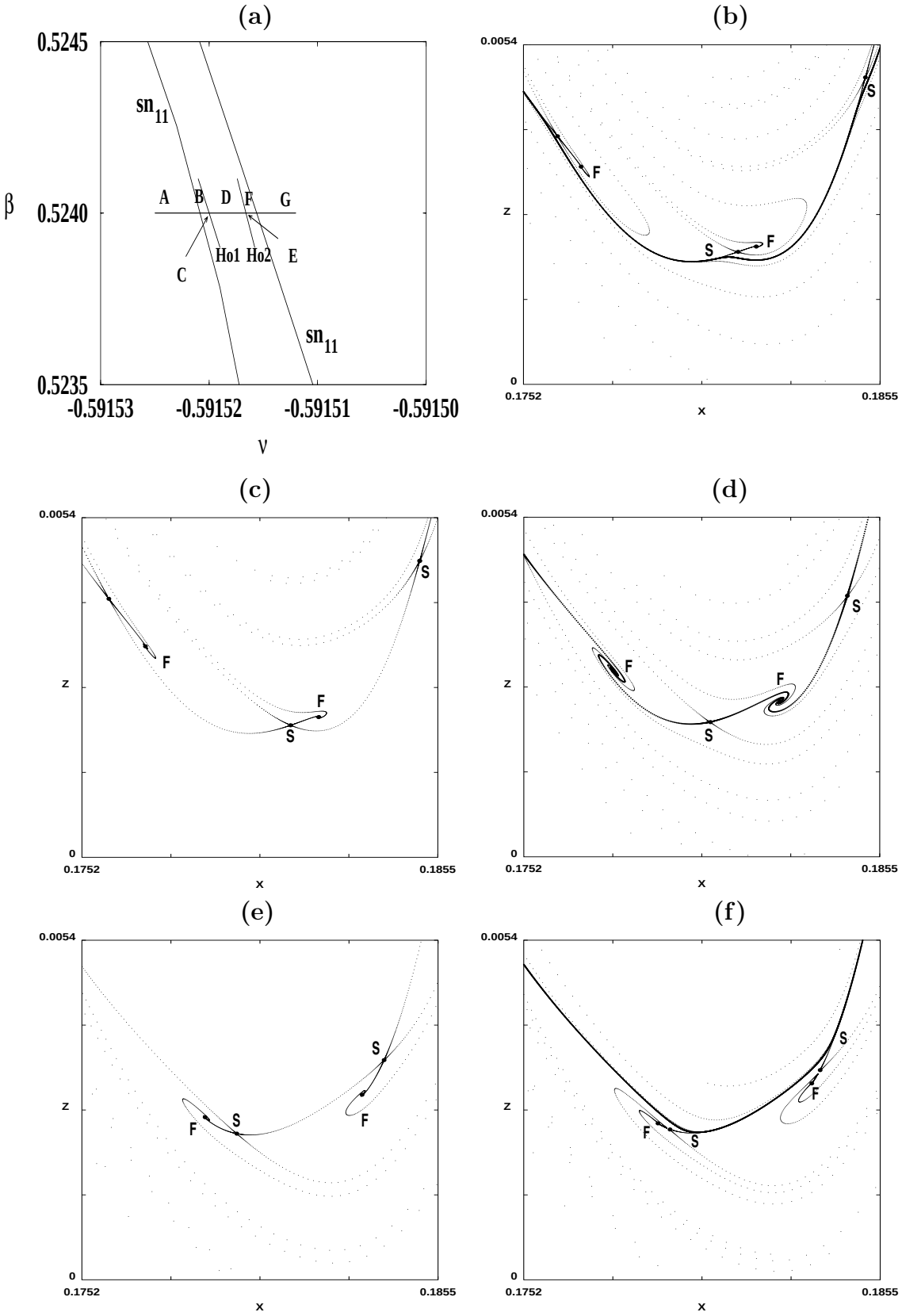


Figura 3.9: Para $\gamma = -0.6$. (a) Zoom de la lengua de Arnold 1:11 próxima a la sección A-G. Secciones de Poincaré (detalle de la parte baja del repulsor) con el plano $y = 0$, correspondiente a la sección A-G, en la región: (b) B; (c) C; (d) D; (e) E; (f) F.

probablemente, origina el círculo inestable invariante que observamos en las zonas F y G. Hagamos notar que las curvas **Ho1** y **Ho2** de la figura 3.9(a) son realmente regiones en el plano de parámetros ν-β. Esto es, después de la tangencia homoclina **Ho1**, a medida que el parámetro ν va variando, las variedades intersecan transversalmente generando una estructura geométrica compleja conocida como tangencia homoclina (ver, por ejemplo, Guckenheimer y Holmes (1997)). Tales bifurcaciones globales ocurren genéricamente sobre un intervalo de valores del paramétro, si bien en nuestro caso estas tangencias ocurren en un intervalo tan pequeño del parámetro ν que cae por debajo de la resolución computacional, razón por lo cual hemos representado estas bifurcaciones mediante una curva en el plano de parámetros. El comportamiento dinámico observado en este corte coincide con el obtenido para la resonancia 1:5 en la figura 7b de Frouzakis, Adomaitis y Kevrekidis (1991), en ausencia de una bifurcación silla-nodo de círculos invariantes. Hacemos notar que en nuestro caso no disponemos de una expresión analítica de las secciones de Poincaré mientras que Frouzakis, Adomaitis y Kevrekidis (1991) trabajan con un difeomorfismo.

Comentamos asimismo que, en nuestro corte, la secuencia de paso entre las regiones B-C-D-E-F tiene una cierta *simetría* respecto a la situación de la región central D. La diferencia entre la dinámica en las regiones C y E es el cambio en el sentido de rotación. Si comparamos el comportamiento encontrado en las regiones B y F observamos dicho cambio, además del sentido de rotación, en la posición relativa de las órbitas periódicas y del conjunto invariante repulsivo. Comparando la secuencia de paso entre las regiones F-E-D-C-B de nuestro corte con la representación esquemática de la estructura interna de bifurcaciones en una lengua de Arnold 1:p ($p \geq 5$) en la aplicación de Bogdanov (ver figura 20 en Arrowsmith, Cartwright, Lansbury y Place (1993)), ésta se correspondería con la secuencia de paso por las zonas $j' - i' - h - i - j$ descrita en el citado trabajo.

3.3.1. Evolución de las lenguas de Arnold

Para ver la evolución de la lengua de Arnold 1:11 vamos a mover el parámetro γ. Cuando γ disminuye detectamos, para $\gamma_c \approx -0.69205$, que la curva de bifurcación a toros **HH** colapsa con la curva de duplicación de periodo **PD** , correspondiente a la órbita periódica asimétrica surgida en una bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales, en un punto del cual surge una nueva curva de tipo parabólico de puntos de codimensión dos **TBPOS**.

Más concretamente, para $\gamma = -0.69217 < \gamma_c$ vemos en la figura 3.10(a) cómo la curva de bifurcación a toros **HH** se rompe en dos trozos. La primera parte de la curva de bifurcación a toros, **HH1**, une el punto de Hopf-pitchfork **HP** con el punto **TBPOS1** (donde la órbita periódica tiene un multiplicador de Floquet -1 doble no diagonalizable). Por otro lado, la segunda parte de la curva de bifurcación a toro, **HH2**, conecta los puntos **TBPOS2** y **A**. En estos puntos de codimensión dos la órbita periódica tiene un multiplicador de Floquet -1 doble no diagonalizable y $+1$ doble diagonalizable, respectivamente.

De hecho, **TBPOS1** y **TBPOS2** corresponden a bifurcaciones Takens-Bogdanov de tipo cúbico homoclino y, según podemos ver en la figura 3.11, al otro lado de la curva **PD** surge una nueva curva de bifurcación a toros $\mathbf{HH_2}$ que une ambos puntos (ver Kuznetsov (2004)). Este atractor toroidal está generado por la órbita periódica atractiva de *doble pulso* que surge cuando la órbita periódica atractiva interior al repulsor toroidal **HH**, atraviesa la curva **PD**. Disminuyendo nuevamente el valor del parámetro ν esta órbita periódica atractiva de *doble pulso* duplica nuevamente su periodo, dando lugar a una órbita atractiva de *cuádruple pulso* cuando atravesamos la curva $\mathbf{PD_2}$ de la figura 3.11.

La ruptura de la curva de bifurcación de toros **HH**, es la causante de la desaparición del punto de degeneración angular **D**, como puede verse en la figura 3.10(b), en la que hemos representado cómo evolucionan los multiplicadores de Floquet, de la órbita periódica que experimenta la bifurcación a toros, sobre la circunferencia unidad (argumento frente al parámetro β). Notemos que al mismo tiempo que desaparece el punto **D** surge un nuevo punto, al menos, de degeneración angular $\mathbf{D_2}$ sobre la curva $\mathbf{HH_2}$. Recordemos que el argumento toma su valor máximo, de 180 grados, en los puntos **TBPOS1** y **TBPOS2** extremos de la curva $\mathbf{HH_2}$. Este punto de degeneración angular sería un punto de tipo *banana split* (ver Peckham, Frouzakis y Kevrekidis (1995)), si bien queda por confirmar en el futuro que las lenguas de Arnold relacionadas con la curva $\mathbf{HH_2}$ tienen, en un entorno del punto $\mathbf{D_2}$, la forma sugerida en la figura 1(b) o 4(d_2) del citado trabajo.

Al ir disminuyendo el valor del parámetro γ los puntos **TBPOS1** y **TBPOS2** se van separando y las curvas $\mathbf{PD_2}$ y $\mathbf{HH_2}$ se van aproximando. Finalmente para $\gamma \approx -0.6946$ ambas curvas contactan y se repite nuevamente todo el proceso anterior. Es decir, surge una nueva curva de bifurcación a toros $\mathbf{HH_4}$ que genera un repulsor toroidal de *cuádruple pulso* y une dos nuevos puntos de bifurcación Takens-Bogdanov de órbitas periódicas $\mathbf{TBPOS1_2}$ y $\mathbf{TBPOS2_2}$ ...

En la figura 3.12 presentamos un conjunto parcial de bifurcaciones cualitativo, en el espacio de parámetros (ν, β, γ), que muestra cómo se rompen las curvas de bifurcaciones a toros y cómo a partir de esos valores críticos del parámetro γ surgen curvas de puntos de codimensión dos Takens-Bogdanov de tipo cúbico homoclino **TBPOS**. En dicha figura podemos observar también que el punto de degeneración angular **D** existe en el rango comprendido entre el valor del parámetro $\gamma_c \approx -0.451915$, para el cual se experimenta una degeneración no lineal de la bifurcación Hopf-pitchfork, y el valor $\gamma_{c_1} \approx -0.69205$ donde se rompe la curva **HH** en dos trozos. Asimismo, la curva $\mathbf{D_2}$ existe entre este último valor y $\gamma_{c_2} \approx -0.6946$, donde ahora es la curva $\mathbf{HH_2}$ la que nuevamente se rompe en dos trozos.

En efecto, un punto de codimensión tres Hopf-pitchfork degenerado **HPD** aparece, para $\gamma = \gamma_c$, sobre la curva **HP** cuando esta interseca con la curva donde la bifurcación de Hopf del origen se degenera **Hd**. Para $\gamma_{c_1} < \gamma < \gamma_c$, a un lado del punto **HPD**, nace una curva de puntos Hopf-silla-nodo de órbitas periódicas **A**. La superficie donde se experimenta la bifurcación a toros **HH** está limitada, en un primer momento, por las curvas **HP** y **A**. Puesto que los multiplicadores de Floquet tienen argumento cero sobre ambas curvas, una curva de puntos de degeneración angular **D** existe sobre la superficie de toros. Pero como el valor máximo del argumento aumenta según nos separamos del punto **HPD** (al ir disminuyendo γ), hay un punto donde la curva **D** finaliza (cuando el

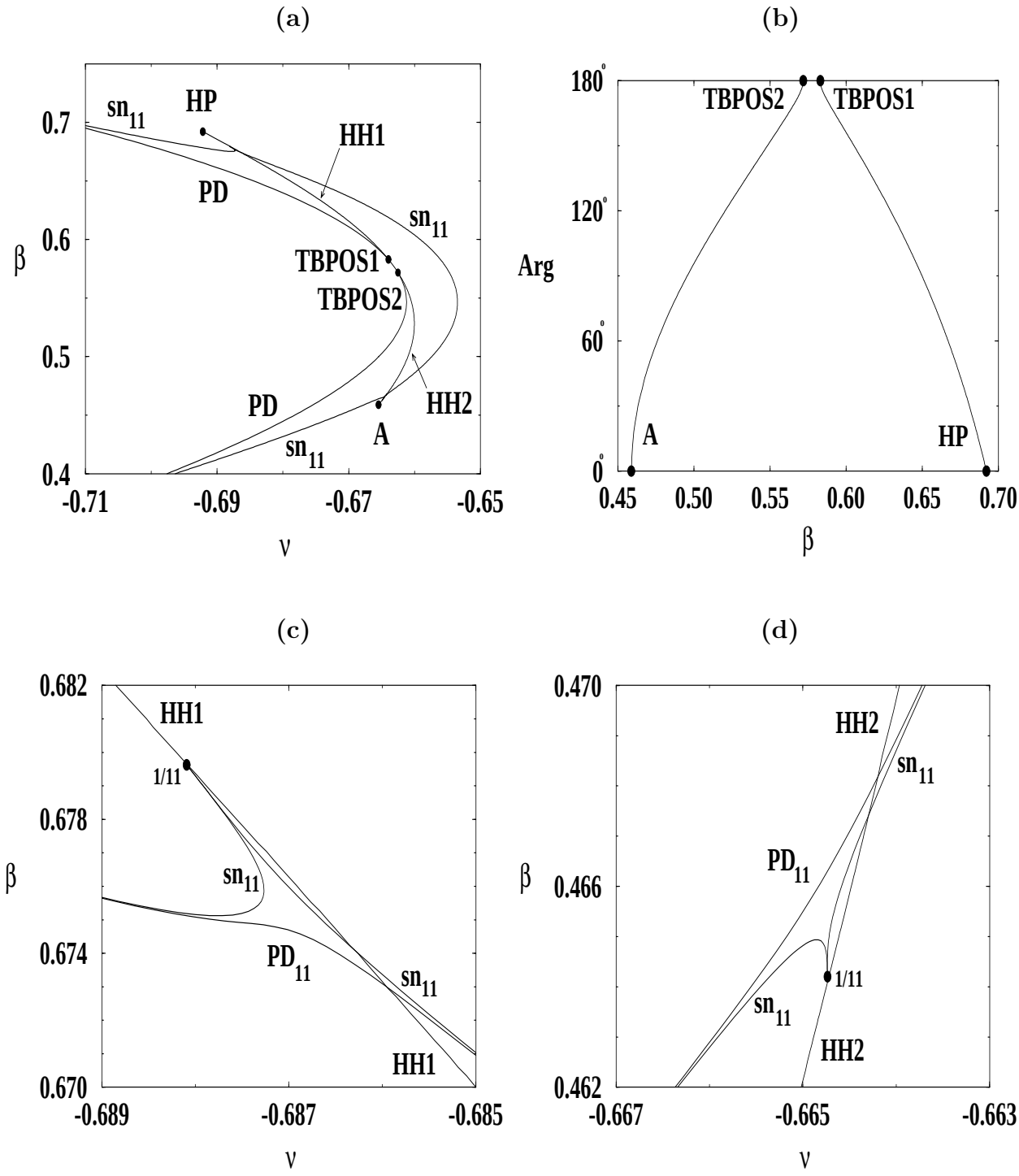


Figura 3.10: Para $\gamma = -0.69217$. (a) Conjunto parcial de bifurcaciones donde se observa cómo la curva de bifurcación a toros **HH** se ha roto en dos trozos. (b) Los argumentos de los multiplicadores de Floquet frente a β en las dos curvas de bifurcación a toros, con los puntos **TBPOS1** y **TBPOS2**. (c) Zoom del *tip* superior de la resonancia 1:11 sobre la curva **HH1**. (d) Zoom del *tip* inferior de la resonancia 1:11 sobre la curva **HH2**.

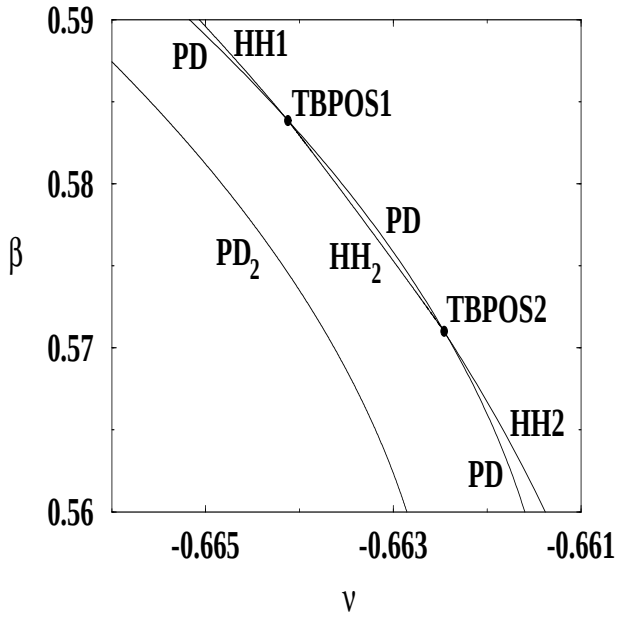


Figura 3.11: Para $\gamma = -0.69217$, conjunto parcial de bifurcaciones en un entorno de los puntos **TBPOS**.

máximo es 180 grados). Esta situación ocurre para $\gamma = \gamma_{c_1}$, momento en que la superficie **PD** (donde la órbita principal que nace de la curva de Hopf de los equilibrios no triviales **h** experimenta una bifurcación de duplicación de periodo), es tangente a la superficie donde tiene lugar la bifurcación a toros **HH**. A partir de ese valor del parámetro γ hay dos superficies de bifurcaciones a toros. Estas superficies están limitadas por dos curvas de puntos de bifurcación Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPOS**, y la curva de puntos **HP** en un caso y la de puntos **A** en el otro. De esta forma al hacer un corte por $\gamma = -0.69217$ aparecen los puntos **TBPOS1** y **TBPOS2** de la figura 3.10(a). Para los valores del parámetro $\gamma_{c_2} < \gamma < \gamma_{c_1}$ las dos curvas de puntos **TBPOS**, que surgen cuando $\gamma = \gamma_{c_1}$, hacen el papel de las curvas de puntos **HP** y **A**, en el sentido de que son los extremos de una curva de bifurcación a toros $\mathbf{HH_2}$. Dado que los multiplicadores de Floquet tienen argumento máximo (180 grados) sobre ambos puntos, **TBPOS1** y **TBPOS2**, una curva de puntos de degeneración angular $\mathbf{D_2}$, al menos, existe sobre la superficie de toros $\mathbf{HH_2}$. Finalmente para $\gamma = \gamma_{c_2}$ la superficie $\mathbf{PD_2}$, donde la órbita periódica repulsiva de *doble pulso* que surge de la curva **PD** experimenta una bifurcación de duplicación de periodo, es tangente a la superficie donde tiene lugar la bifurcación a toros $\mathbf{HH_2}$. A partir de este valor $\gamma = \gamma_{c_2}$ se vuelve a repetir nuevamente la secuencia de bifurcaciones anterior.

El convenio de signos y colores usados en la figura 3.12 es el siguiente: los círculos representan puntos de codimensión tres, los rombos puntos sobre la curva de Hopf–pitchfork **HP**, los cuadrados puntos sobre las curvas de Takens-Bogdanov **TBPOS**, los triángulos corresponden a puntos sobre la curva de Hopf-silla-nodo de órbitas periódicas **A** y los triángulos invertidos indican puntos sobre la curvas de degeneración angular **D**, $\mathbf{D_2}$ y $\mathbf{D_4}$.

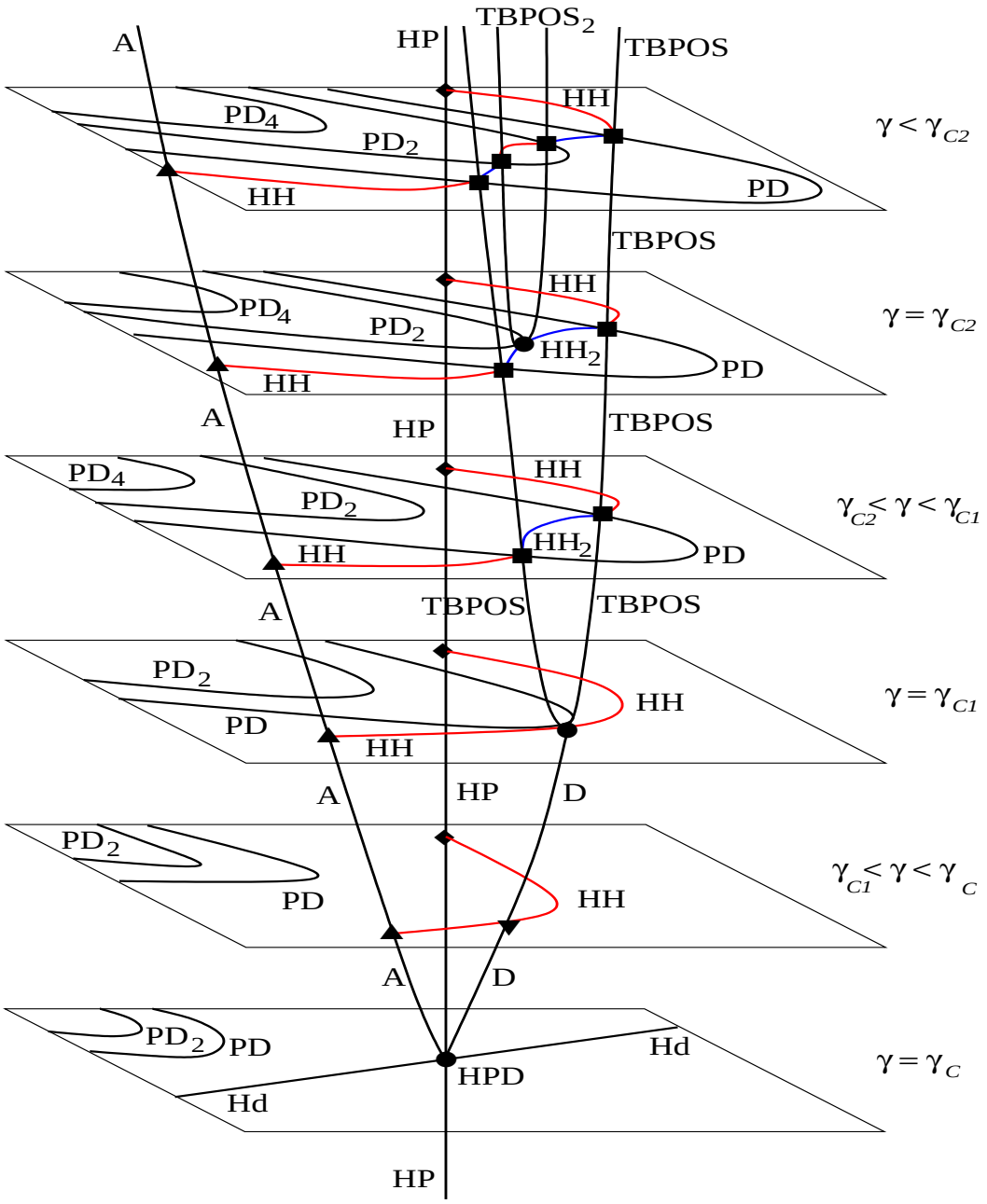


Figura 3.12: Conjunto parcial de bifurcaciones cualitativo, en el espacio de parámetros (ν, β, γ), de la resonancia 1:2. Usamos círculos para indicar los puntos de codimensión tres, rombos para los puntos de Hopf-pitchfork de la curva **HP**, cuadrados para los puntos de Takens-Bogdanov de la curva **TBPOS**, triángulos para los puntos de la curva de Hopf–silla-nodo de órbitas periódicas **A** y triángulos invertidos para los puntos de degeneración de las curvas **D**, $\mathbf{D_2}$ y $\mathbf{D_4}$. En color rojo aparecen las curvas de bifurcación a toros que generan un toro repulsivo y en color azul las que generan un toro atractivo.

Utilizamos el color rojo para representar las curvas de bifurcación a toros que generan un toro repulsivo y el color azul para las que generan un toro atractivo.

La información obtenida en el estudio del sistema (3.1) nos permitiría ahora ampliar el conjunto parcial de bifurcaciones de la figura 2.14 correspondiente a la ecuación de Chua (1.1). En efecto, recordemos que para la ecuación de Chua obtuvimos en el capítulo 2 (ver figura 2.14) un conjunto parcial de bifurcaciones, en un entorno del punto de codimensión tres **HPD**, similar al de la figura 3.12. Comparando ambas figuras se observa que el papel de la curva de puntos de codimensión dos **A** de nuestro caso es desempeñado allí por una curva de puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPO**. Al mover el parámetro de control α se observa en la figura 2.14 cómo esta última curva, y por tanto la curva de bifurcación a toros **HH**, existen a ambos lados del punto **HPD** debido a la forma de la misma. Como hemos evidenciado numéricamente el mecanismo de ruptura de la curva de bifurcación a toros **HH** es el mismo para los dos sistemas y está relacionado en ambos casos con la aparición de una curva, de forma parabólica, de puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas de tipo cúbico homoclino que no hemos representado en la figura 2.14. Tampoco aparece representada en dicha figura la curva de puntos de degeneración angular **D**, que surgiendo del punto **HPD** existe a ambos lados del citado punto para el sistema (1.1). Esto es debido a que el argumento de los multiplicadores de Floquet se anula en los puntos **TBPO** y **HP** (ver figura 2.22). Esta curva finaliza en el vértice de la curva parabólica de puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas de tipo cúbico homoclino.

Una vez que hemos observado cómo va cambiando el lugar geométrico donde se presentan las bifurcaciones a toros, como consecuencia de la presencia de bifurcaciones de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas, nos centramos en la evolución que experimentan las lenguas de Arnold cuando movemos el parámetro de control γ.

En las figuras 3.10(c)-(d) mostramos cómo la lengua de Arnold correspondiente a la resonancia 1:11 emerge de **HH1** y **HH2**, respectivamente. Observemos que la rama derecha de la curva de bifurcación silla-nodo que surge de la resonancia 1:11, a partir de la curva **HH1**, posteriormente corta a la citada curva (ver figura 3.10(c)). El mismo comentario es válido para la rama derecha de la curva que surge de **HH2** para la resonancia 1:11 (ver figura 3.10(d)). Ese cruce implica que las órbitas periódicas (de aproximadamente once veces el periodo de la órbita principal) existen a ambos lados de las curvas **HH1** y **HH2**. Este hecho no es consecuencia de la ruptura de la curva de bifurcación a toros (puesto que también ocurre, por ejemplo, para $\gamma = -0.65$ cuando hay una sola curva de bifurcación a toros) sino de la evolución de la curva **HH** y de la frontera de la zona de resonancia 1:11 cuando varía γ. Es decir, en el espacio triparamétrico (ν, β, γ) las superficies **HH** y $\mathbf{sn_{11}}$ intersecan independientemente de la colisión de la superficie **PD** con la **HH**.

La continuación de estas curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas $\mathbf{sn_{11}}$ muestra que las dos ramas mas cercanas a las curvas **HH1** y **HH2**, que salen de cada uno de los *tips*, están conectadas mientras que las otras dos ramas no lo están (ver figura 3.10(a)). Recordemos que para $\gamma = -0.6$ la lengua de Arnold 1:11 generaba dos órbitas periódicas en una región cerrada. Además en nuestro caso, para $\gamma = -0.62917$, la órbita periódica repulsiva que surge de la curva $\mathbf{sn_{11}}$ experimenta una bifurcación de duplicación

de periodo, cosa que no ocurría para $\gamma = -0.6$. Esta curva donde se experimenta la duplicación de periodo $\mathbf{PD_{11}}$ aparece en las figuras 3.10(c)-(d), pero no la hemos dibujado en la figura 3.10(a) por ser indistinguible, en el rango de dicha figura, de las curvas de bifurcación silla-nodo que delimitan la zona de resonancia 1:11.

Nuestra tarea será ahora describir el proceso de transición entre las situaciones encontradas para $\gamma = -0.69217$ y $\gamma = -0.6$, esto es, ver como las zonas de resonancia evolucionan de abiertas a cerradas. Para hacer esto vamos a incrementar el parámetro γ a partir del valor $\gamma = -0.69217$.

En este camino, para $\gamma = -0.60184$, vemos en la figura 3.13(a) como las dos ramas no conectadas entre si, que delimitan la zona de resonancia abierta $\mathbf{sn_{11}}$, se aproximan y al aumentar el valor del parámetro de control γ contactan, dando lugar a dos zonas de resonancia disjuntas. Estas dos zonas de resonancia se pueden ver en la figura 3.13(b) para $\gamma = -0.6018$. Observemos que las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas que limitan la zona de resonancia cerrada están relacionadas con la curva **HH**, mientras que la curva que delimita la zona abierta no lo está. Esta curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas $\mathbf{sn_{11}}$ está relacionada con la degeneración que presenta la conexión homoclina del origen y ya existía para $\gamma = -0.6$ (ver figura 3.3). De hecho, la zona de resonancia abierta $\mathbf{sn_{11}}$ existe incluso antes de que surja la zona de resonancia cerrada para $\gamma \approx -0.5957$.

El proceso anterior también lo experimenta la lengua de Arnold 2:11, según podemos ver en la figura 3.13, para un valor del parámetro $\gamma \in (-0.64352, -0.64351)$. Para $\gamma = -0.64351$ vemos en la figura 3.13(d) las zonas de resonancia abiertas delimitadas por la curvas $\mathbf{sn_5}$ y $\mathbf{sn_{2/11}}$. También se observan los tips, sobre la curva de toros **HH**, de los que surgen las lenguas de Arnold 2:11 cerrada y 1:6 abierta, para este valor del parámetro. Posteriormente para $\gamma = -0.64352$ ya se ha producido el contacto entre ambas zonas de resonancia y vemos en la figura 3.13(c) como la lengua de Arnold 2:11 es ahora una región abierta.

Estas evidencias numéricas nos llevan a conjeturar que el proceso detallado anteriormente para la lengua de Arnold 1:11, lo experimentan todas las lenguas de Arnold 1:p ($p \geq 5$), 2:q ($q \geq 11$), ... relacionadas con la curva de bifurcación a toros **HH** al ir variando el parámetro de control γ.

3.3.2. Bifurcaciones de Takens-Bogdanov

Recordemos que, para $\gamma = -0.6$, dentro de la lengua de Arnold 1:11 las dos órbitas periódicas existentes no experimentan ninguna bifurcación. Ambas son hiperbólicas, una de tipo silla y la otra repulsiva. Sin embargo, el análisis de las órbitas periódicas que surgen en la zona de resonancia abierta de la curva $\mathbf{sn_{11}}$, para el mismo valor de γ, muestra que una de ellas es silla y la otra atractiva. Además esta última experimenta una bifurcación de duplicación de periodo al atravesar la curva $\mathbf{PD_{11}}$ (ver figura 3.14(a)).

Obviamente, el cambio de estabilidad experimentado por una de las órbitas periódicas presente en las zonas de resonancia indica que, al variar el parámetro γ, alguna bifurcación adicional tiene que ocurrir sobre la curva de bifurcación silla-nodo $\mathbf{sn_{11}}$ que delimita la zona de resonancia abierta. Nos preguntamos si esta bifurcación es necesaria para que sea

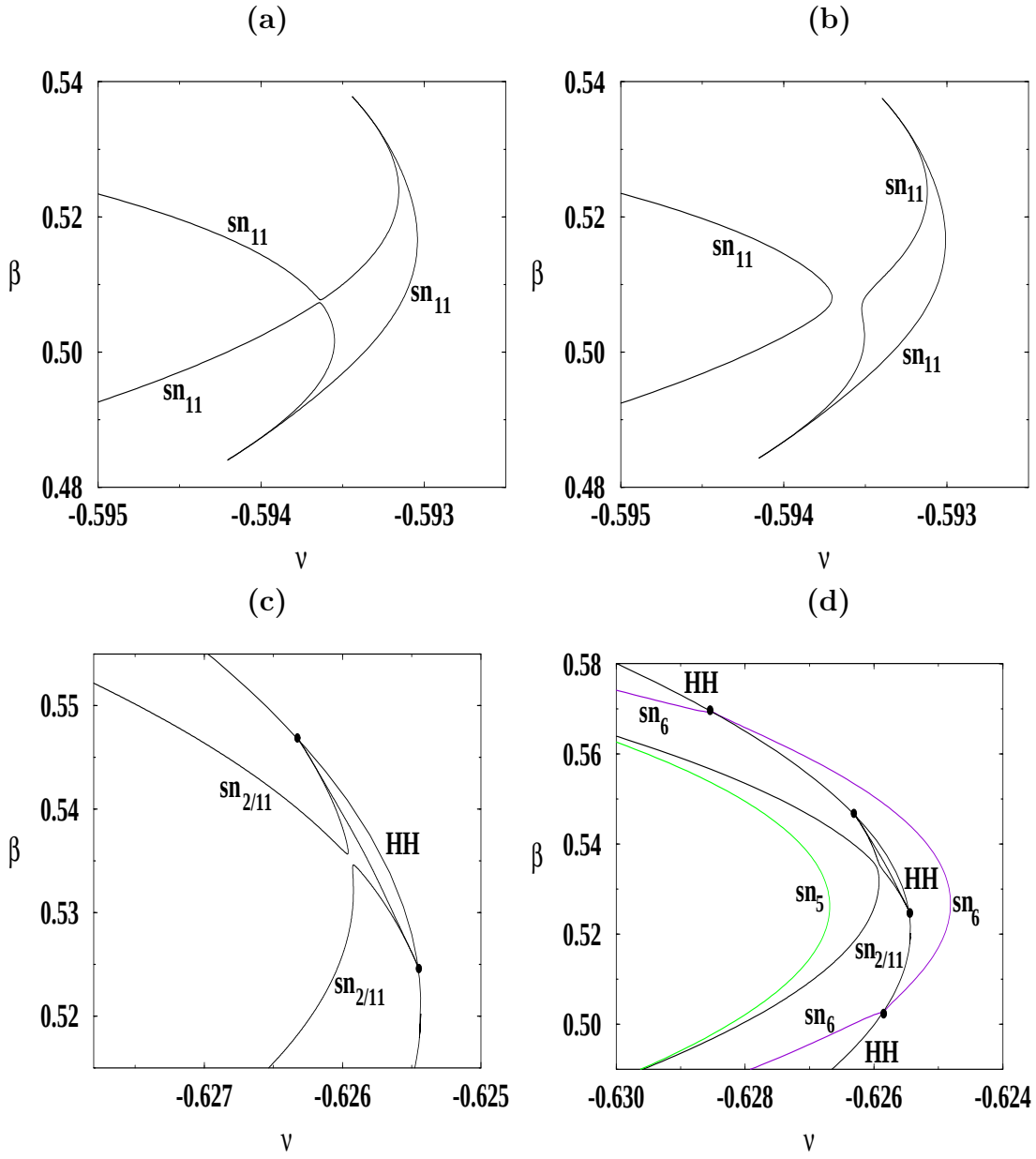


Figura 3.13: Lengua de Arnold de la resonancia 1:11 para: (a) $\gamma = -0.60184$; (b) $\gamma = -0.6018$. Lengua de Arnold de la resonancia 2:11 para: (c) $\gamma = -0.64352$; (d) $\gamma = -0.64351$, donde se incluyen además las zonas de resonancia 1:5 (color verde) y 1:6 (color lila).

posible el contacto entre las zonas abierta y cerrada de la resonancia 1:11. Al objeto de comprender esta situación investigamos el conjunto parcial de bifurcaciones dentro de la zona abierta para valores de γ próximos al valor donde se produce la unión entre ambas regiones.

Moviendo de nuevo el parámetro γ observamos en la figura 3.14(b) cómo, para $\gamma = -0.601285$, aparece en el plano de parámetros una curva cerrada de bifurcación a toros $\mathbf{HH_{11}}$. El conjunto invariante que surge en el interior de dicha curva cerrada es ahora atractivo, a diferencia de lo que ocurría con el toro principal **HH** que era repulsivo, ya que lo experimenta la órbita periódica atractiva de periodo 11 que surge de la curva $\mathbf{sn_{11}}$ (esta curva $\mathbf{HH_{11}}$ no existe para $\gamma = -0.60128$). A medida que γ decrece va aumentando la amplitud de la curva cerrada $\mathbf{HH_{11}}$, aproximándose a la curva de bifurcación silla-nodo $\mathbf{sn_{11}}$ que delimita la región abierta de resonancia 1:11. De esta forma al producirse el contacto entre ambas curvas se originan dos puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPO1** y **TBPO2** de tipo cuadrático (ver figura 3.14(c)). Posteriormente al disminuir el valor de γ, la curva de bifurcación a toros $\mathbf{HH_{11}}$ contacta con la curva de duplicación de periodo $\mathbf{PD_{11}}$ y se rompe en dos trozos $\mathbf{HH1_{11}}$ y $\mathbf{HH2_{11}}$. De esta manera dos nuevos puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPOS1** y **TBPOS2**, en este caso de tipo cúbico homoclino, aparecen. En la figura 3.14(d) vemos cómo ambas curvas $\mathbf{HH1_{11}}$ y $\mathbf{HH2_{11}}$ conectan dos puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas situados sobre la curva de bifurcación silla-nodo $\mathbf{sn_{11}}$ y sobre la curva de duplicación de periodo $\mathbf{PD_{11}}$.

La aparición de los puntos **TBPO1** y **TBPO2**, sobre la curva $\mathbf{sn_{11}}$, implica que una de las órbitas periódicas que surge del trozo de curva comprendido entre estos dos puntos sea de tipo repulsivo. Al ir disminuyendo el valor del parámetro γ, los puntos **TBPO1** y **TBPO2** se van separando, mientras que las dos zonas disjuntas de resonancia 1:11 se van acercando. Finalmente las dos regiones se unen por el trozo de curva comprendido entre los puntos **TBPO1** y **TBPO2**. En consecuencia podemos afirmar que es necesaria la existencia de puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas, sobre las zonas de resonancia abiertas, para que éstas puedan unirse con las zonas de resonancia cerradas que surgen de la curva de bifurcación a toros **HH**.

En la figura 3.15 presentamos un conjunto parcial de bifurcaciones cualitativo, en el espacio de parámetros (ν, β, γ), de la zona de resonancia abierta 1:11. En ella se observa cómo para un determinado valor del parámetro $\gamma_c \approx -0.601282$ surge una curva cerrada de bifurcaciones a toros (atractivos en este caso) entre las curvas $\mathbf{sn_{11}}$ y $\mathbf{PD_{11}}$. Notemos que el papel de las curvas **h** y **PPO**, como generadoras de la órbita periódica que da lugar al toro principal **HH** lo hace aquí la curva $\mathbf{sn_{11}}$. A partir del valor del parámetro $\gamma_{c_1} \approx -0.60132$, sobre la curva $\mathbf{sn_{11}}$ aparecen dos puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPO** que son los análogos a los puntos **HP** y **A**. Posteriormente la curva $\mathbf{HH_{11}}$ experimenta, al ir disminuyendo el valor del parámetro γ, una secuencia de bifurcaciones análoga a la experimentada por la curva $\mathbf{HH_2}$ en la resonancia 1:2. Esto implica que hay una curva de bifurcación a toros repulsiva $\mathbf{HH_{22}}$, no dibujada en la figura 3.14(d), que para ese valor de γ une los puntos **TBPOS1** y **TBPOS2** .

Como era de esperar, vemos en la figura 3.16(b) que también están presentes las bifurcaciones de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas, de los dos tipos **TBPO** y **TBPOS**,

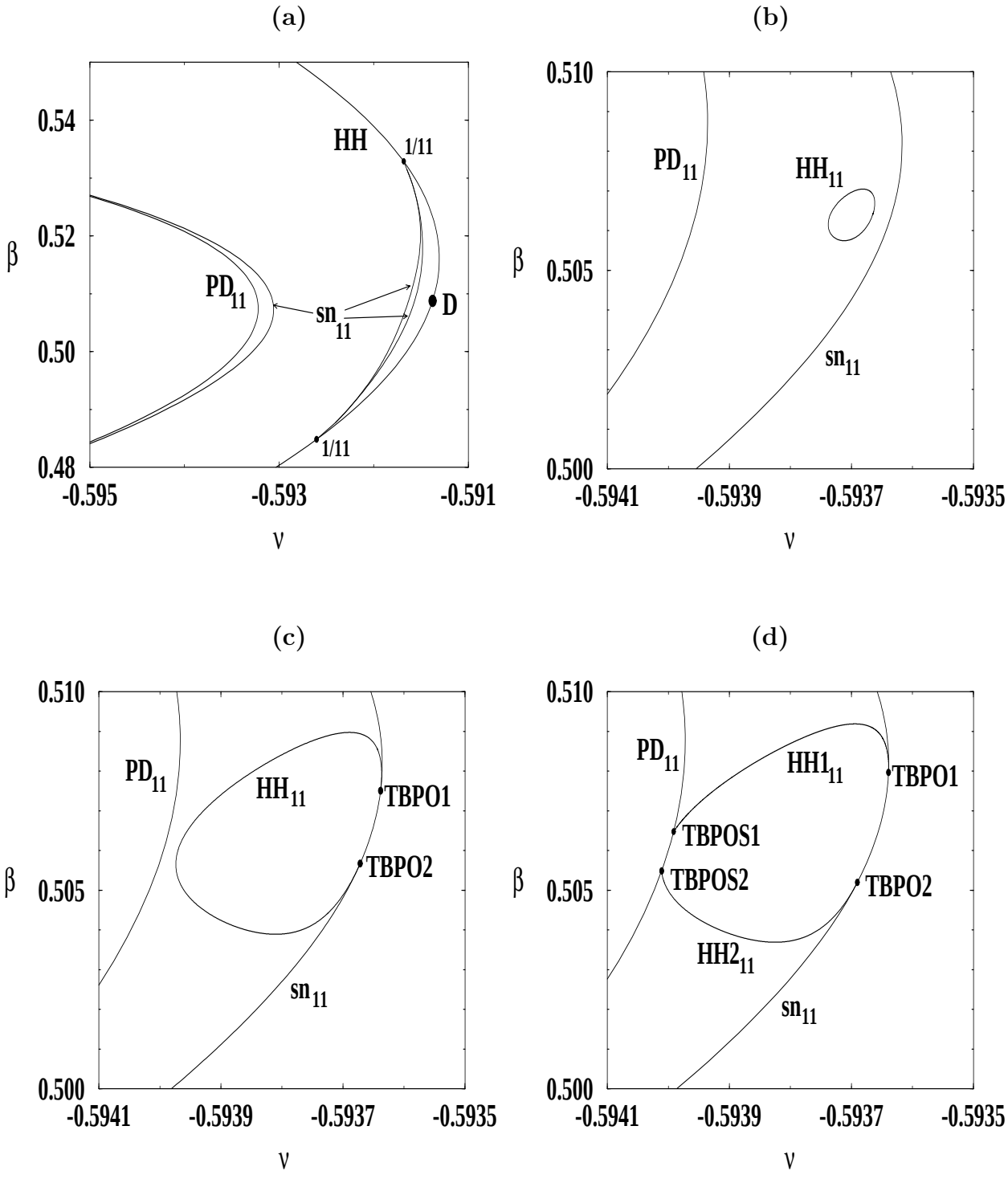


Figura 3.14: (a) Para $\gamma = -0.6$, zonas de resonancia 1:11. Conjunto parcial de bifurcaciones dentro de la zona de resonancia abierta 1:11 para: (b) $\gamma = -0.601285$; (c) $\gamma = -0.60134$; (d) $\gamma = -0.60135$.

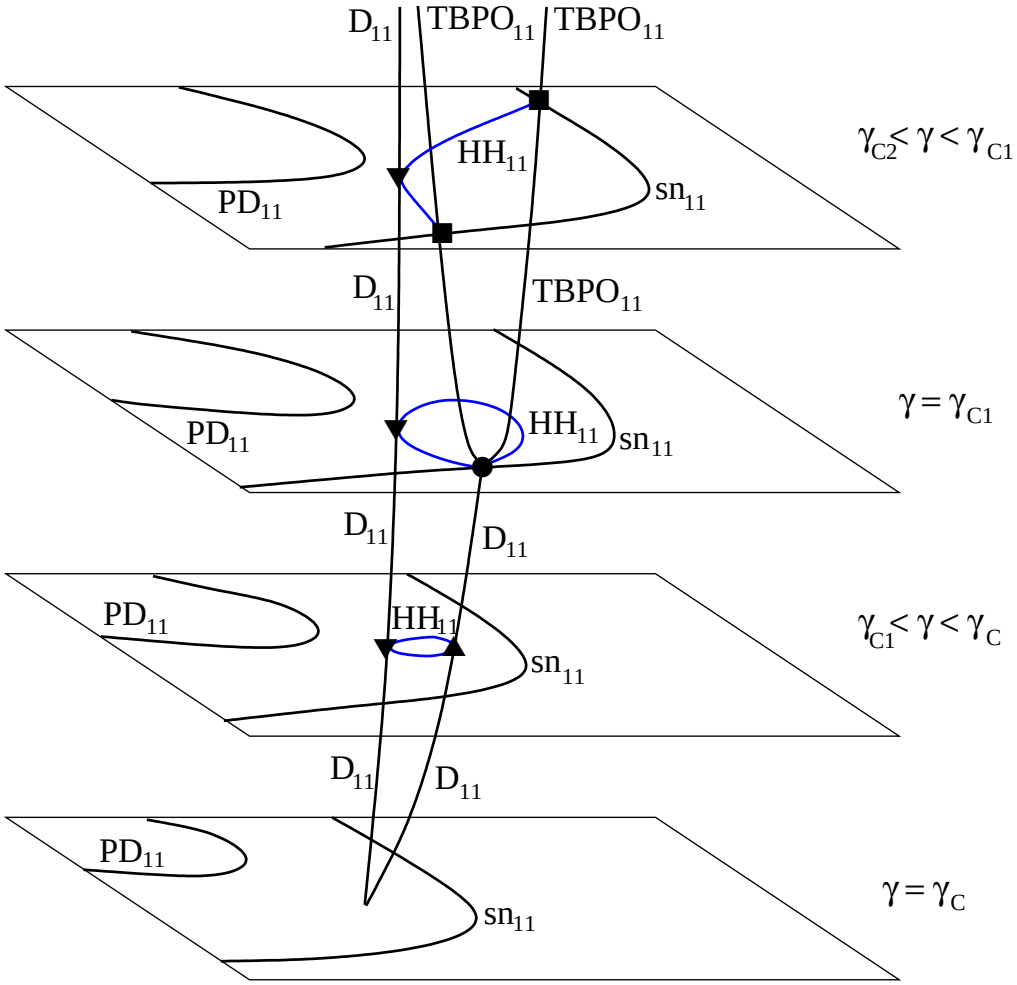


Figura 3.15: Conjunto parcial de bifurcaciones cualitativo, en el espacio de parámetros (ν, β, γ), de la resonancia 1:11. Usamos círculos para indicar los puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas de la curva $\mathbf{TBPO_{11}}$ y triángulos invertidos para los puntos de degeneración de la curva $\mathbf{D_{11}}$.

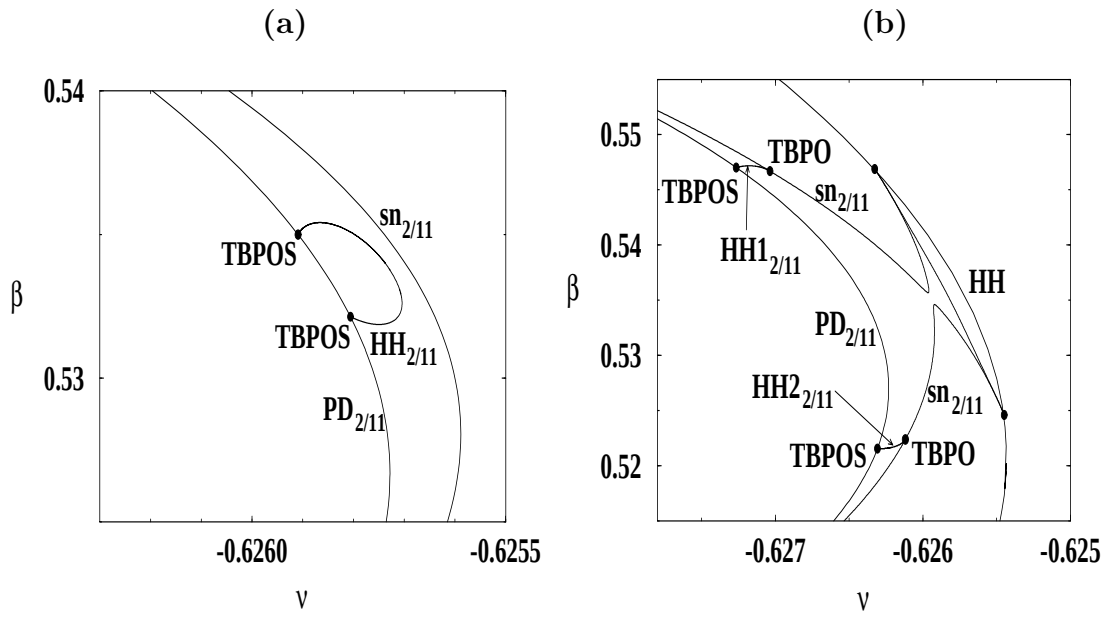


Figura 3.16: Conjunto parcial de bifurcaciones dentro de la zona de resonancia 2:11 para: (a) $\gamma = -0.64258$; (b) $\gamma = -0.64352$.

en la zona de resonancia $\mathbf{sn_{2/11}}$, si bien hay una pequeña diferencia. En efecto, en el caso de la resonancia 1:11 la curva de bifurcación a toros cerrada $\mathbf{HH_{11}}$ colapsa primero con la curva $\mathbf{sn_{11}}$ y después con la curva $\mathbf{PD_{11}}$, mientras que en la 2:11 la curva de bifurcación a toros cerrada $\mathbf{HH_{2/11}}$ colapsa en primer lugar con la curva de duplicación de periodo $\mathbf{PD_{2/11}}$ (ver figura 3.16(a)) y después con la curva de bifurcación silla-nodo $\mathbf{sn_{2/11}}$ (la misma secuencia de bifurcaciones se experimenta en la zona de resonancia abierta 1:12).

Nos preguntamos ahora si estas bifurcaciones también están presentes en las zonas de resonancia fuerte 1:3 y 1:4. Nos centraremos en la resonancia 1:3.

Recordemos que para $\gamma = -0.6$ de la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas $\mathbf{sn_3}$ surgen dos órbitas periódicas, una de tipo silla y otra atractiva. La continuación numérica de las curvas $\mathbf{sn_3}$ y $\mathbf{sn_4}$ de la figura 3.3 nos permite observar, en la figura 3.17(a), cómo para $\gamma = -0.675$ la curva $\mathbf{sn_3}$ está muy próxima a la curva de bifurcación a toros **HH** en el plano de parámetros (ν,β). Por contra, ya que el trozo de la curva $\mathbf{sn_4}$ presente en el rango de dicha figura está detrás de la curva **HH**, podemos afirmar que ambas curvas se cortan para este valor del parámetro γ. Además sobre la curva $\mathbf{PD}_3$, donde duplica periodo la órbita atractiva que surge de $\mathbf{sn_3}$, existen dos puntos de bifurcación de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPOS**, en este caso de tipo cúbico homoclino. Estos puntos están unidos por una curva de bifurcación a toros $\mathbf{HH_3}$ experimentada por la órbita periódica atractiva de *triple pulso*.

Al mover nuevamente el parámetro de control hasta $\gamma = -0.68$, vemos en la figura 3.17(b) que tanto las curvas que delimitan las zonas de resonancia 1:3 y 1:4, $\mathbf{sn_3}$ y $\mathbf{sn_4}$, como la curva $\mathbf{PD_3}$ cortan a la curva a toros **HH** en dos puntos. Además la curva a toros $\mathbf{HH_3}$ se ha roto en dos trozos, apareciendo dos nuevos puntos de bifurcación de

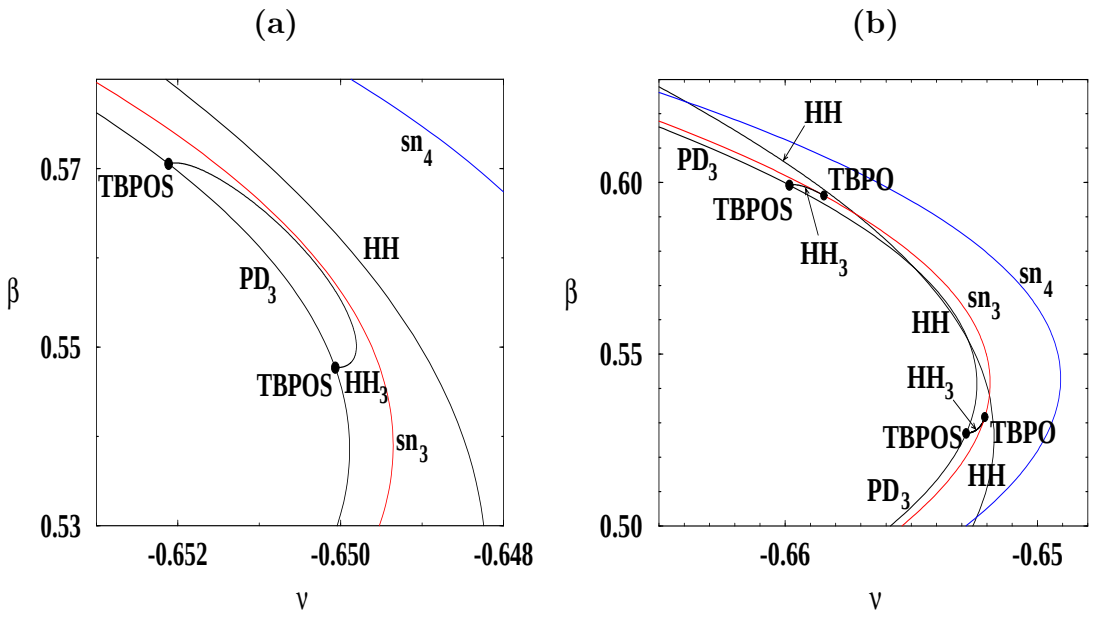


Figura 3.17: Conjunto parcial de bifurcaciones dentro de la zona de resonancia 1:3 para: (a) $\gamma = -0.675$; (b) $\gamma = -0.68$.

Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPO**, sobre la curva $\mathbf{sn_3}$, próximos a la curva **HH**. Precisamente la curva $\mathbf{sn_3}$ corta a la curva **HH** en dos puntos situados en el trozo de curva comprendido entre los dos puntos **TBPO**. Notemos que en este caso de la curva de bifurcación a toros **HH** no surgen dos tips que den lugar inicialmente a una zona de resonancia cerrada, como ocurría en el caso de las resonancias débiles.

Hemos comprobado que las bifurcaciones anteriores están presentes en la zona de resonancia 1:4. Recordamos que estas bifurcaciones también se experimentaban en la zona de resonancia 1:4 para la ecuación de Chua (1.1) (ver figura 2.25). La diferencia existente entre ambos casos, las ecuaciones (3.1) y (1.1), es que las órbitas periódicas y conjuntos invariantes que surgen al atravesar las curvas de bifurcación **HH**, $\mathbf{HH_4}$ y $\mathbf{sn_4}$ tienen estabilidad contraria.

En el trabajo de Peckham, Frouzakis y Kevrekidis (1995) se proponen varios escenarios posibles (en todos ellos aparecen bifurcaciones de Hopf secundaria de órbitas periódicas y en muchos están presentes puntos de Takens-Bogdanov) como consecuencia de la existencia de puntos de degeneración angular. En ese trabajo se plantea si hay algún modelo que presente tales comportamientos en relación con la curva de bifurcación a toros y sus lenguas de resonancia (ver las figuras 5(d)-(e) del trabajo citado). Pues bien, el modelo tridimensional autónomo que consideramos presenta, al menos, cuatro de las cinco situaciones posibles en la continuación global de una curva de bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas para una familia biparamétrica:

- La curva comienza y termina en dos puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov de tipo cuadrático (multiplicador de Floquet +1 doble no diagonalizable) (ver figura 3.14(c)).

- La curva existe entre dos puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov de tipo cúbico homoclino (multiplicador de Floquet -1 doble no diagonalizable) (ver figura 3.16(a) y 3.17(a)).
- La curva existe entre un punto de bifurcación de Takens-Bogdanov de tipo cuadrático y otro punto de bifurcación de Takens-Bogdanov de tipo cúbico homoclino (ver figura 3.14(d) y 3.18(b)).
- La curva es cerrada (ver figura 3.14(b)).

Una vez que hemos analizado en detalle la evolución de las lenguas de Arnold, viendo cómo pasan de cerradas a abiertas al mover el parámetro de control γ, y que hemos descrito cómo aparecen los puntos de bifurcación de Takens–Bogdanov de órbitas periódicas, vamos a describir el conjunto de bifurcaciones presente en un entorno de dichos puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov. Para ilustrar que este comportamiento dinámico es genérico para todas las resonancias débiles 1:p (no sólo para la 1:11) vamos a considerar ahora la resonancia 1:12. Además estas bifurcaciones de Takens–Bogdanov de órbitas periódicas tienen lugar en las zonas de resonancia abiertas, no en las zonas cerradas de *tipo banana*.

Para $\gamma = -0.6$ vimos en la figura 3.6 que la zona de resonancia 1:12 era la primera zona abierta de resonancia. Esto es debido a que el contacto entre las dos regiones de resonancia 1:12, la zona abierta y la zona cerrada, se ha producido para un valor del parámetro $\gamma > -0.6$ de manera análoga a la descrita para la resonancia 1:11. En la figura 3.18(a) mostramos la curva principal de bifurcaciones a toros **HH** y la lengua de Arnold correspondiente a la zona de resonancia 1:12, limitada por las tres ramas de la curva $\mathbf{sn_{12}}$. Vemos cómo para este valor del parámetro $\gamma = -0.6$ las curvas de bifurcaciones a toros $\mathbf{HH1_{12}}$ y $\mathbf{HH2_{12}}$ conectan las curvas de bifurcación silla-nodo $\mathbf{sn_{12}}$ con la curva de duplicación de periodo $\mathbf{PD_{12}}$, de manera análoga a lo que obtuvimos en la figura 3.14(d) para la zona abierta de resonancia 1:11.

Para ver claramente qué bifurcaciones están presentes, ampliamos en la figura 3.18(b) la región donde la curva $\mathbf{HH1_{12}}$ existe. En dicha figura observamos una cascada de bifurcaciones a toros $\mathbf{HH1_{12}}$, $\mathbf{HH1_{24}}$, ..., que conectan respectivamente, $\mathbf{sn_{12}}$ con $\mathbf{PD_{12}}$, $\mathbf{PD_{12}}$ con $\mathbf{PD_{24}}$, ... Por lo tanto hemos encontrado una cascada de bifurcaciones de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas. El primer punto $\mathbf{TB_{12}}$ es de tipo cuadrático, mientras que los restantes puntos **TBPOS1** situados sobre las curvas $\mathbf{PD_{12}}$, $\mathbf{PD_{24}}$, $\mathbf{PD_{48}}$,... son cúbicos de tipo homoclino. Será de interés en el futuro estudiar los diferentes atractores y repulsores que coexisten en esta región del plano de parámetros (ν,β). Como un primer resultado mostramos en la figura 3.18(c) la proyección sobre el plano x-z del conjunto invariante atractivo que aparece cuando se atraviesa la curva $\mathbf{HH1_{12}}$, de la figura 3.18(b), en sentido decreciente del parámetro β. Su desaparición da lugar a un atractor extraño que podemos ver, ampliando una de las doce intersecciones existentes de su sección de Poincaré con el plano $y = 0$, en la figura 3.18(d).

Recordamos finalmente que la existencia de esta cascada de curvas de bifurcación a toros **HH** y de duplicación de periodo **PD** en el interior de las zona de resonancia 1:12, también está presente en las resonancias fuertes. Vimos en el capítulo 2 que una secuencia

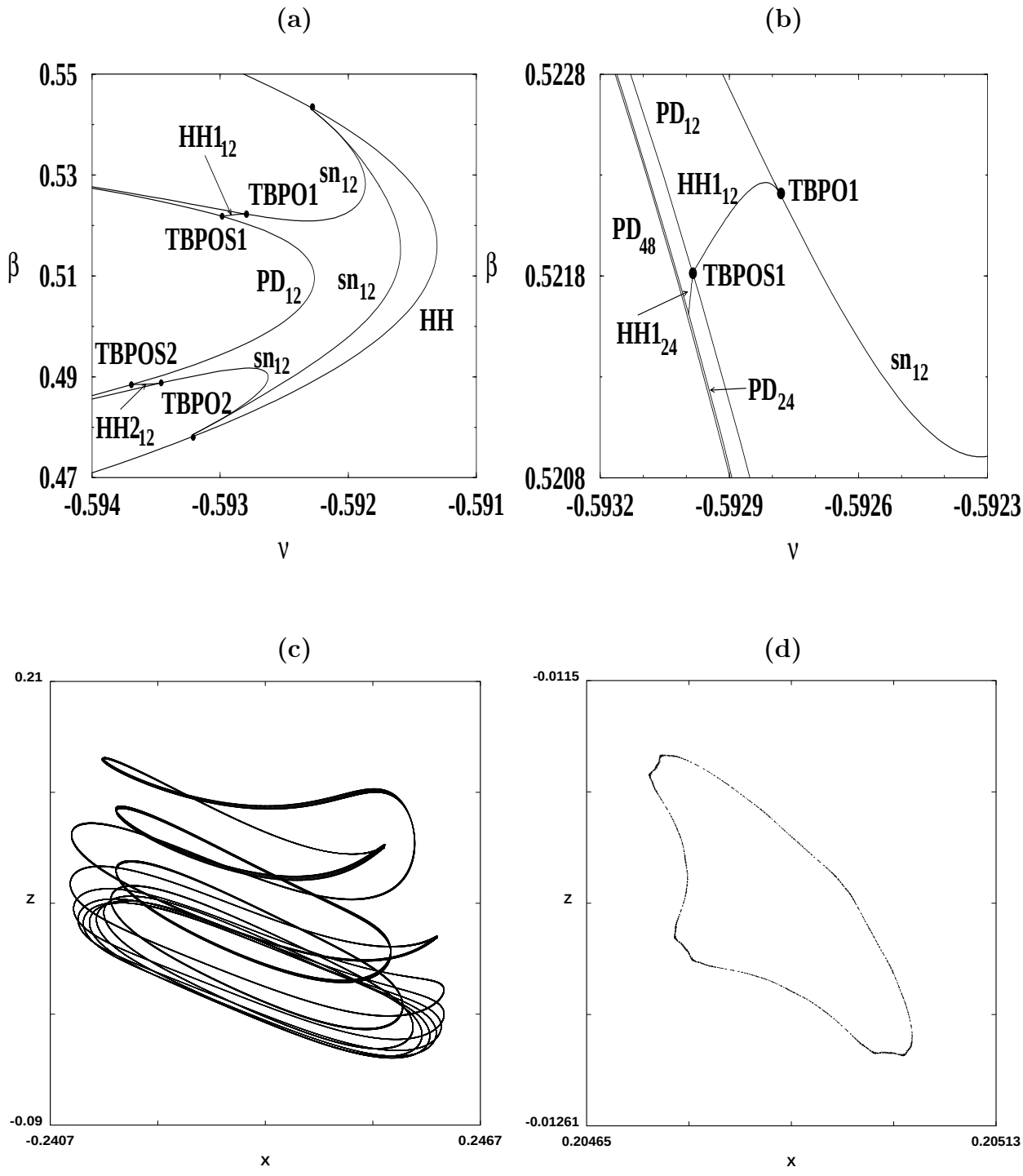


Figura 3.18: Para $\gamma = -0.6$: (a) Lenguas de Arnold para la resonancia 1:12. (b) Detalle dentro de la zona de resonancia 1:12 de la región superior. (c) Proyección sobre el plano x-z del toro 12T que existe para $\nu = -0.5929$, $\beta = 0.5221$. (d) Zoom de la sección de Poincaré con el plano $y = 0$ del atractor extraño que existe para $\nu = -0.5929$, $\beta = 0.52207$ (mostramos sólo una de las doce intersecciones).

análoga de curvas de bifurcación y de puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas de los dos tipos (cuadrático y cúbico homoclino), uniendo las curvas de bifurcación a toros **HH**, existen en el interior de las zonas de resonancia fuerte 1:2 y 1:4 para la ecuación de Chua (1.1) (ver figuras 2.15 y 2.25).

3.3.3. Conexiones Homoclinas

En esta parte final del capítulo mostraremos varios diagramas de bifurcaciones, de las órbitas periódicas que existen dentro de las zonas de resonancia 1:11 y 1:12, para $\gamma = -0.6$. En particular, estamos interesados en ver si alguna bifurcación global (conexión homoclina, ...) organiza tales diagramas.

En primer lugar consideramos los diagramas de bifurcaciones (periodo frente a ν) para $\gamma = -0.6$ y $\beta = 0.51$. En la figura 3.19(a) mostramos una isla *con forma de o* que se obtiene dentro de la zona cerrada de resonancia 1:11. De hecho, para cualquier valor de β que fijemos dentro de la zona cerrada, vamos a encontrar siempre una isla *con forma de o*.

Sin embargo, si consideramos para los mismos valores de γ y β el diagrama de bifurcaciones correspondiente a la zona abierta de resonancia 1:12 (ver Fig. 3.19(b)), vemos que las ramas de órbitas periódicas están organizadas por conexiones homoclinas de los equilibrios no triviales. El retrato de fases de estas órbitas homoclinas aparece en la figura 3.19(c).

Por otra parte, si representamos los diagramas de bifurcaciones del periodo frente a β (cortes verticales en el plano de parámetros ν-β) en la zona abierta de resonancias y si fijamos, por ejemplo, $\gamma = -0.6$ y $\nu = -0.61$, obtenemos una isla más complicada que aparece en la figura 3.19(d). Observamos varios pliegues debido a la presencia de otras curvas de bifurcación silla-nodo. Concretamente, cuatro curvas de bifurcaciones silla-nodo de órbitas de periodo 12 que, para este valor del parámetro, están todas dentro de la zona de resonancia 1:12. Recordemos que un diagrama de bifurcaciones similar obtuvimos en el capítulo segundo en relación a la zona de resonancia 1:4 (ver figura 2.27).

Un estudio detallado de la estructura de esta curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas en el interior de las resonancias fuertes 1:1 y 1:2, donde aparecen varias cúspides que clasificaremos de acuerdo a Broer, Simó y Tatjer (1998), la llevaremos a cabo en el capitulo cuarto de esta memoria.

Destacamos finalmente que este proceso de apertura de las lenguas de Arnold relacionadas con una curva de bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas y la consecuente cascada de curvas de bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas, curvas de duplicación de periodo, ... y puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas de los dos tipos (cuadrático y cúbico homoclino) uniendo las curvas de Hopf secundaria de órbitas periódicas, no sólo lo experimentan los sistemas con la propiedad de la simetría $\mathbb{Z}_2$.

En efecto, en el trabajo Freire, Gamero, Rodríguez-Luis y Algaba (2002) se analiza una degeneración lineal Hopf-cero para la ecuación de Rössler. En él se evidencia numéricamente la existencia de esta cascada de bifurcaciones para la resonancia 1:2, en relación con la curva de bifurcación a toros que surge de la degeneración lineal Hopf-cero (ver tam-

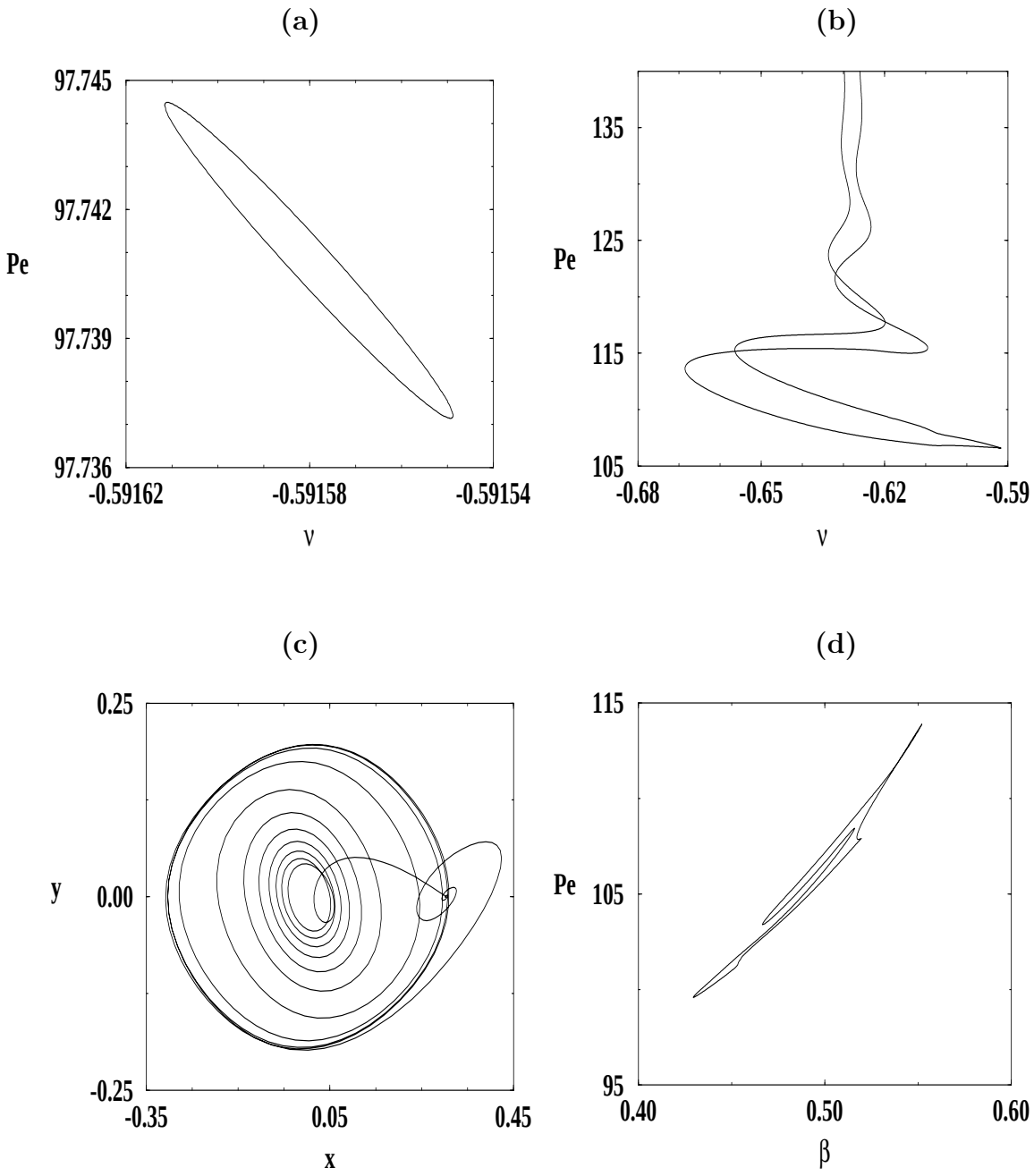


Figura 3.19: Para $\beta = 0.51$ y $\gamma = -0.6$: (a) Diagrama de bifurcaciones en la lengua de Arnold 1:11; (b) Diagrama de bifurcaciones en la lengua 1:12 organizada por dos conexiones homoclinas; (c) Retrato de fases de la órbita homoclina de los equilibrios no triviales que organiza la rama derecha de las órbitas periódicas en (b) ($\nu \approx -0.625911$). (d) Diagrama de bifurcaciones en la lengua 1:12 para $\nu = -0.61$, $\gamma = -0.6$.

bién Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (2007)). También en el capítulo 7 de esta memoria, donde se analiza la degeneración no lineal $a_1 = 0$ de la singularidad Hopf-cero, hemos evidenciado numéricamente, en una familia de circuitos electrónicos que presenta dicha degeneración y no tiene la propiedad de la simetría $\mathbb{Z}_2$, que se experimentan los mismos procesos anteriores (apertura de las lenguas y existencia de cascadas de bifurcaciones), en relación a las lenguas de Arnold y un punto de degeneración angular **D** (de tipo *banana*), sobre una curva de bifurcación a toros **HH** que surge de la degeneración lineal Hopf-cero **HZ** (ver Algaba, Gamero, García y Merino (2007)).

Esto nos lleva a conjeturar que este proceso, que permite la unión de las lenguas de Arnold que surgen de una curva de bifurcación a toros (sobre la que esté presente un punto de degeneración angular de tipo *banana*) y las zonas de resonancia (delimitadas por curvas de bifurcación silla-nodo del mismo tipo 1:p ($p \geq 5$), 2:q ($q \geq 11$),...) relacionadas con degeneraciones de las conexiones homoclinas de los equilibrios de un sistema, es genérico.

Capítulo 4

Degeneraciones de Conexiones Homoclinas

4.1. Introducción

Desde los trabajos pioneros de Shil'nikov (1965) y (1970) se sabe que las homoclinas son importantes centros organizadores de los sistemas dinámicos autónomos tridimensionales y que pueden conllevar la aparición de una rica conducta periódica y aperiódica.

Nuestro interés, en este capítulo, se centra en analizar la conducta de bifurcaciones homoclinas (de doble y triple pulso) situadas en zona Shil'nikov, relacionadas con la existencia de un punto de Belyakov, es decir, un punto donde el equilibrio pasa de silla-foco a silla-nodo, para sistemas con $\mathbb{Z}_2$–simetría. Hagamos previamente un pequeño repaso de los trabajos relacionados con este tema.

En Belyakov (1980) se analiza esta transición para un sistema tridimensional sin simetría, cuya homoclina principal está en la región de Shil'nikov, es decir cuando el índice silla $\delta < 1$. Construyendo la correspondiente aplicación de Poincaré demuestra la existencia de conjuntos infinitos numerables de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas, así como de homoclinas de doble pulso que surgen de dicho punto. En Kuznetsov, Feo y Rinaldi (2001) se ha probado que de dicho punto surgen también una infinidad de curvas de duplicación de periodo.

El trabajo de Gaspard (1983) aborda un estudio uniparamétrico para una homoclina, estando en zona Shil'nikov, cuando el equilibrio es silla-foco. Encuentra dos conjuntos numerables de curvas, correspondientes a la existencia de homoclinas de doble pulso, y prueba que una determinada razón entre ellas acumula de forma exponencial a la homoclina principal.

Posteriormente Belyakov (1984) estudia el problema, de codimensión dos, de una homoclina cuando el equilibrio es silla-foco y nos encontramos próximos a la frontera de la región de Shil'nikov, es decir cuando $\delta = 1$. Prueba la existencia nuevamente de una sucesión de homoclinas de doble pulso que ahora se unen en puntos que acumulan al punto de codimensión dos objeto de estudio. Justifica también la presencia, en torno a las homoclinas de doble pulso, de una sucesión de cúspides de sillas-nodo de órbitas periódicas. No presenta los cálculos pero indica gráficamente la existencia de homoclinas de triple pulso.

El caso en el que δ es próximo a cero fue estudiado también por Belyakov (1974), si bien en este caso las homoclinas de doble pulso finalizan en puntos distintos cuando $\delta = 0$.

En el mismo año Glendinning y Sparrow (1984) realizan un análisis uniparamétrico de una homoclina, en las mismas condiciones anteriores, y mediante el análisis de la aplicación de Poincaré obtienen el diagrama de bifurcaciones en torno a la homoclina principal. En dicho estudio detectan la presencia de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas y de duplicación de periodo de las mismas, mostrando que la estabilidad de las órbitas periódicas viene determinada por el valor de δ.

Más recientemente Gonchenko, Turaev, Gaspard y Nicolis (1997) completan el trabajo de Belyakov (1984) en relación a las homoclinas de doble y triple pulso, mostrando que subfamilias uniparamétricas de campos vectoriales transversales a la homoclina principal pueden ser tangentes a subfamilias de homoclinas de triple pulso, evidenciando una vez más la gran inestabilidad estructural de subfamilias uniparamétricas de campos vectoriales en el entorno de una homoclina silla-foco de tipo Shil'nikov.

En los sistemas que son invariantes al cambio de signo en las variables de estado, $(x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, -z)$, Glendinning (1984) muestra que a diferencia del caso general, donde la bifurcación homoclina da lugar a una única órbita periódica, en el caso de la $\mathbb{Z}_2$-simetría tres órbitas periódicas aparecen (un par de órbitas asimétricas a un lado del valor donde ocurre la bifurcación homoclina y una órbita simétrica en el otro lado). También aparecen bifurcaciones de ruptura de simetría relacionadas con las órbitas periódicas simétricas.

4.2. Estudio teórico

Consideremos un campo vectorial

$$\dot{x} \;=\; X_\mu(x), \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R}^3, \; \mu \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

cumpliendo:

- Tiene $\mathbb{Z}_2$-simetría, es decir, es invariante al cambio de signo $(x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, -z)$.
- El origen $(0, 0, 0)$ es un equilibrio de tipo silla–foco para cualquier μ, con autovalores $-\lambda \pm i\omega$, γ siendo $\lambda > 0, \omega > 0, \gamma > 0$, dependientes de μ

  $$\lambda(\mu) = \lambda + O(\mu), \quad \omega(\mu) = \omega + O(\mu), \quad \gamma(\mu) = \gamma + O(\mu).$$

  El índice silla

  $$\delta = \delta(\mu) = \frac{\lambda}{\gamma} + O(\mu),$$

  es menor que 1.
- La variedad inestable W^u del origen O es unidimensional, de manera que forma transversalmente un doble lazo homoclino para $\mu = 0$ (ver figura 4.1).

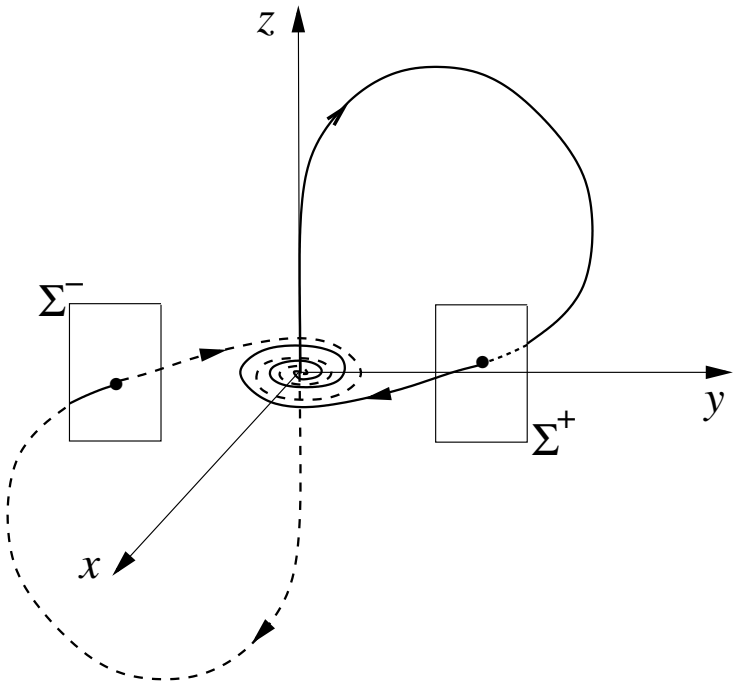


Figura 4.1: Construcción geométrica de las aplicaciones de retorno.

Las bifurcaciones de tales lazos homoclinos para campos vectoriales como (4.1), dependiente de un parámetro, han sido estudiadas en Glendinning (1984). En este caso, al romperse el doble lazo homoclino principal, un par de órbitas asimétricas surgen a un lado de $\mu = 0$ y una órbita simétrica del otro lado.

En ausencia de simetría, el estudio de las homoclinas de doble pulso ha sido realizado en Gaspard (1983). Si consideramos δ como un segundo parámetro de bifurcación, el estudio de las bifurcaciones de lazos homoclinos en campos vectoriales biparamétricos

$$\dot{x} = X_{\mu,\delta}(x), \tag{4.2}$$

donde no se cumple la propiedad de la $\mathbb{Z}_2$–simetría ha sido realizado en Belyakov (1984) y Gonchenko, Turaev, Gaspard y Nicolis (1997). Nuestro propósito es ver qué nuevos lazos homoclinos y qué bifurcaciones se presentan en los campos (4.2) donde sí se tiene la condición de invarianza al cambio de signo en las variables de estado.

4.2.1. Homoclinas de doble pulso

Comenzaremos con el estudio de las bifurcaciones de lazos homoclinos de doble pulso.

Es conocido (ver Homburg (2002)) que cerca de un equilibrio silla–foco el sistema (4.2) es C^∞-equivalente al sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda x - \omega y + O[||(x,y)||^3|z|], \\ \dot{y} &= \omega x - \lambda y + O[||(x,y)||^3|z|], \\ \dot{z} &= \gamma z. \end{aligned}$$

Usando una construcción estándar obtenemos las siguientes aplicaciones de Poincaré sobre los planos

$$\Sigma^+ = \{(x,y,z) : x = 0, |y - y_0| < \varepsilon, |z| < \varepsilon, y_0 > 0\},$$

y

$$\Sigma^- = \{(x,y,z) : x = 0, |y + y_0| < \varepsilon, |z| < \varepsilon, y_0 > 0\},$$

tomando $0 < \varepsilon << 1$ para que haya un solo corte con W^u. Notemos que escalando las variables de estado podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $y_0 = 1$.

Podemos ahora construir las aplicaciones de retorno siguientes:

$$T_1 : \Sigma^+ \longrightarrow \Sigma^+,$$

$$T_1(0,y,z) = (0,\bar{y},\bar{z}) \quad \text{con } z > 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{y} &= 1 + Ayz^\delta \cos(\Omega \ln z + \theta) + O(z^{2\delta}), \\ \bar{z} &= \mu - Byz^\delta \operatorname{sen}(\Omega \ln z) + O(z^{2\delta}), \end{aligned}$$

$$T_2 : \Sigma^- \longrightarrow \Sigma^+,$$

$$T_2(0,y,z) = (0,\bar{y},\bar{z}) \quad \text{con } y < 0, z > 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{y} &= 1 - A|y|z^\delta \cos(\Omega \ln z + \theta) + O(z^{2\delta}), \\ \bar{z} &= \mu + B|y|z^\delta \operatorname{sen}(\Omega \ln z) + O(z^{2\delta}), \end{aligned}$$

$$T_3 : \Sigma^+ \longrightarrow \Sigma^-$$

$$T_3(0,y,z) = (0,\bar{y},\bar{z}) \quad \text{con } y > 0, z < 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{y} &= -1 + Ay|z|^\delta \cos(\Omega \ln |z| + \theta) + O(|z|^{2\delta}), \\ \bar{z} &= -\mu - By|z|^\delta \operatorname{sen}(\Omega \ln |z|) + O(|z|^{2\delta}), \end{aligned}$$

$$T_4 : \Sigma^- \longrightarrow \Sigma^-$$

$$T_4(0,y,z) = (0,\bar{y},\bar{z}) \quad \text{con } y < 0, z < 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{y} &= -1 - A|y||z|^\delta \cos(\Omega \ln |z| + \theta) + O(|z|^{2\delta}), \\ \bar{z} &= -\mu + B|y||z|^\delta \operatorname{sen}(\Omega \ln |z|) + O(|z|^{2\delta}), \end{aligned}$$

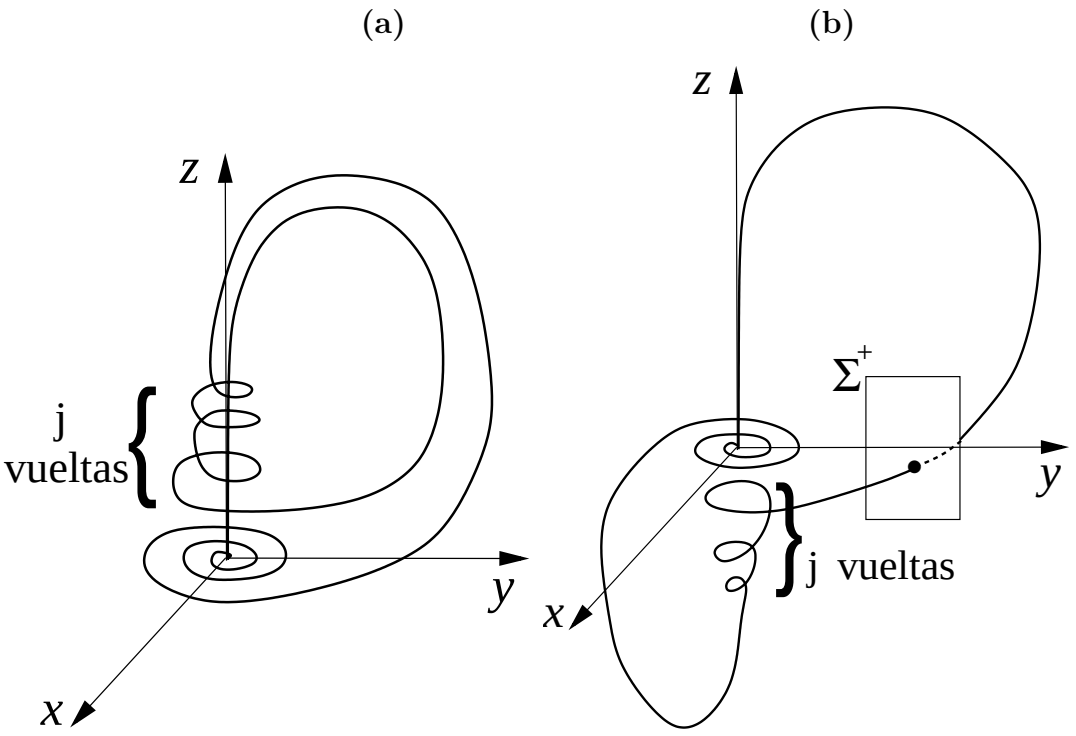


Figura 4.2: Órbitas homoclinas de doble pulso: (a)$\mathbf{H}_+^j$ para $\mu > 0$. (b) $\mathbf{H}_-^j$ para $\mu < 0$. Hemos representado únicamente uno de los dos lazos existentes debido a la simetría. El superíndice j denota el número de vueltas que la variedad unidimensional realiza entre las dos grandes vueltas antes de cerrarse en el origen. El subíndice $+$ (resp. $-$) indica que la variedad unidimensional, que siempre suponemos que surge hacia la zona $z > 0$, posteriormente realiza las j vueltas en la zona $z > 0$ (resp. $z < 0$).

siendo $A > 0$, $B > 0$, $\Omega = \omega/\gamma > 0$ y $\cos\theta \neq 0$ constantes. El estudio de las homoclinas de doble pulso para el caso no simétrico (ver figura 4.2), que existen para $\mu > 0$, ha sido realizado en Gaspard (1983), Belyakov (1984), Gonchenko, Turaev, Gaspard y Nicolis (1997). La simulación numérica realizada en la siguiente sección nos muestra que éstas se forman a partir de las órbitas periódicas de doble pulso que surgen en las bifurcaciones de duplicación de periodo que experimenta el par de órbitas asimétricas en su aproximación a la homoclina principal.

A continuación, vamos a obtener la expresión asintótica de las homoclinas de doble pulso que existen para $\mu < 0$. Es decir, las homoclinas que denotaremos por $\mathbf{H}_-^j$, donde con el superíndice j indicamos el número de vueltas que la variedad unidimensional del origen realiza entre las dos grandes vueltas antes de cerrarse. El subíndice $-$ nos indica que la variedad unidimensional, que siempre suponemos que surge hacia la zona $z > 0$, posteriormente realiza las j vueltas en la zona $z < 0$.

En $\mu < 0$ la variedad inestable del origen corta a la sección Σ^+ en un punto $(0, 1, \mu)$ y la condición de existencia de homoclina de doble pulso del tipo $\mathbf{H}_-$ se obtiene imponiendo

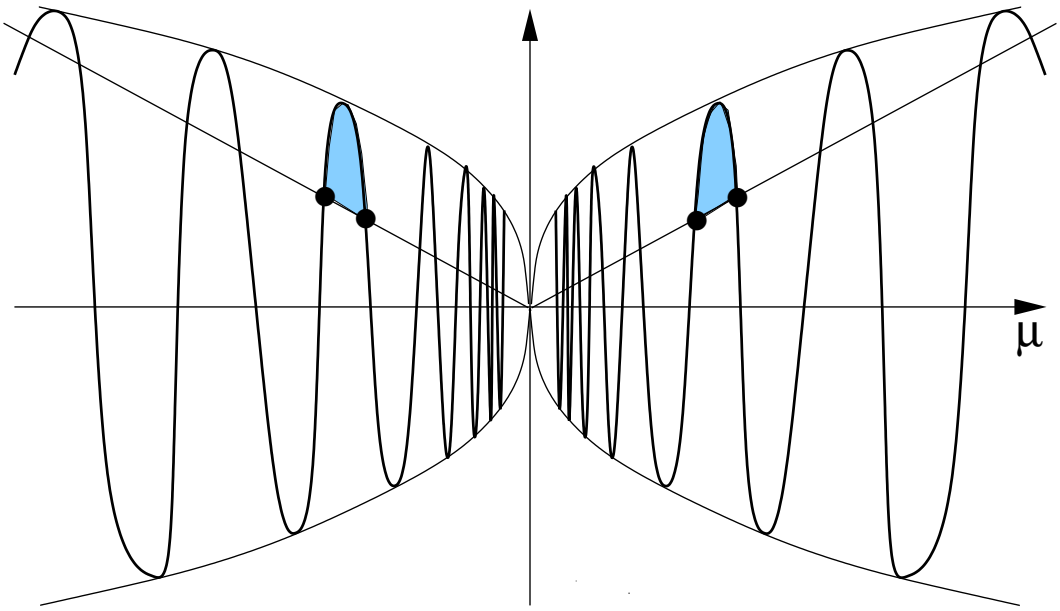


Figura 4.3: Construcción gráfica de las soluciones de la ecuación (4.3) para las homoclinas $\mathbf{H}_-^j$ y $\mathbf{H}_+^j$. La región donde $\bar{z} < 0$ están dibujadas en color azul.

que $T_3(0, 1, \mu)$ pertenezca a la variedad estable local del origen W^s_{loc}. Es decir,

$$\bar{z} = -\mu - B|\mu|^\delta \operatorname{sen}(\Omega \ln|\mu|) + O(|\mu|^{2\delta}) = 0,$$

de donde

$$\mu = -B|\mu|^\delta \operatorname{sen}(\Omega \ln|\mu|) + O(|\mu|^{2\delta}). \tag{4.3}$$

Para computar las raíces de esta ecuación y observando la representación gráfica de la figura 4.3 llamamos

$$\Omega \ln|\mu| = -2\pi j + \xi,$$

es decir,

$$|\mu| = e^{\frac{-2\pi j+\xi}{\Omega}}, \tag{4.4}$$

donde $\xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ y, dado que μ debe ser pequeño, j es un entero suficientemente grande.

Aquí se observa que la oscilación correspondiente a la j-ésima vuelta se encuentra más cerca de $\mu = 0$ cuando disminuye el valor de ω (téngase en cuenta que para $\omega = 0$ se tiene un punto de Belyakov).

En consecuencia la ecuación (4.3) queda

$$\operatorname{sen}\xi = \frac{1}{B}|\mu|^{1-\delta} + o\left(|\mu|^{2\delta}\right) = \frac{1}{B}e^{\frac{-2\pi j}{\Omega}(1-\delta)}e^{\frac{\xi(1-\delta)}{\Omega}} + o\left(e^{\frac{-2\pi j}{\Omega}(1-\delta)}\right). \tag{4.5}$$

Como $\delta < 1$, el término $e^{\frac{-2\pi j}{\Omega}(1-\delta)}$ es muy pequeño. Ahora bien, para asegurar que el segundo sumando de la ecuación (4.5) es de mayor orden que el primero, necesitamos imponer que $\delta > \frac{1}{2}$. En dicho caso, hay dos soluciones en el intervalo considerado

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \pi - \frac{1}{B} e^{\frac{-2\pi j}{\Omega}(1-\delta)} e^{\frac{\pi(1-\delta)}{\Omega}} + ..., \\ \xi_1 &= \frac{1}{B} e^{\frac{-2\pi j}{\Omega}(1-\delta)} + ... \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación (4.4) se obtiene la expresión asintótica correspondiente a las curvas de bifurcación donde existe una homoclina de doble pulso del tipo $\mathbf{H}^j_-$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^j_- &: \mu^j = -e^{\frac{-2\pi j}{\Omega}} \left[1 + \frac{1}{B\Omega} e^{\frac{-2\pi j}{\Omega}(1-\delta)} + ... \right], \\ \mathbf{H}^{j-\frac{1}{2}}_- &: \mu^{j-\frac{1}{2}} = -e^{\frac{\pi - 2\pi j}{\Omega}} \left[1 - \frac{1}{B\Omega} e^{\frac{\pi - 2\pi j}{\Omega}(1-\delta)} + ... \right]. \end{aligned}$$

Estas dos líneas de bifurcación se unen en un punto $\rho^j_-(\delta^j_*, \mu^j_*)$, donde se presenta un punto de retorno, esto es, una tangencia vertical en el plano (δ, μ) de forma que $\frac{d\delta}{d\mu} = 0$ en dicho punto. Resolviendo esta ecuación, en modo similar al desarrollado en Belyakov (1984), se obtiene para este caso

$$\begin{aligned} \delta^j_* &= 1 - \frac{\omega \ln B}{(-2\pi j + \frac{\pi}{2})\gamma} + o\left(\frac{1}{j}, \omega\right), \\ \mu^j_* &= -e^{\frac{(-2\pi j + \frac{\pi}{2})\gamma}{\omega}} \left(1 + o\left(\frac{1}{j}, \omega\right)\right), \end{aligned}$$

donde $\omega(\mu) = \omega + O(\mu)$. Notemos que los puntos ρ^j_- satisfacen

$$\lim_{j \to +\infty} \rho^j_-(\delta^j_*, \mu^j_*) = (1, 0).$$

El conjunto de bifurcaciones de la figura 4.4 (cuando $0 < B < 1$) nos muestra que, fijado un valor de $\omega > 0$, las homoclinas de doble pulso $\mathbf{H}^j_-$ están distribuidas simétricamente, a primer orden, con respecto a la homoclina principal en relación a las homoclinas $\mathbf{H}^j_+$ obtenidas en Gonchenko, Turaev, Gaspard y Nicolis (1997), y acumulan desde ambos lados a la homoclina principal ($\mu = 0$) de acuerdo a la razón

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{\mu^{j+\frac{1}{2},i} - \mu^{j,i}}{\mu^{j,i} - \mu^{j-\frac{1}{2},i}} = e^{-\frac{2\pi\gamma}{\omega}} \qquad i = 1, 2,$$

en concordancia con lo obtenido en Gaspard (1983).

La continuación numérica realizada en la siguiente sección evidencia que las homoclinas de doble pulso $\mathbf{H}^j_-$, situadas en $\mu < 0$, se obtienen a partir de las órbitas nacidas en las bifurcaciones de ruptura de simetría que la órbita periódica principal simétrica experimenta en su recorrido de aproximación a la homoclina principal. Hacemos notar que, a

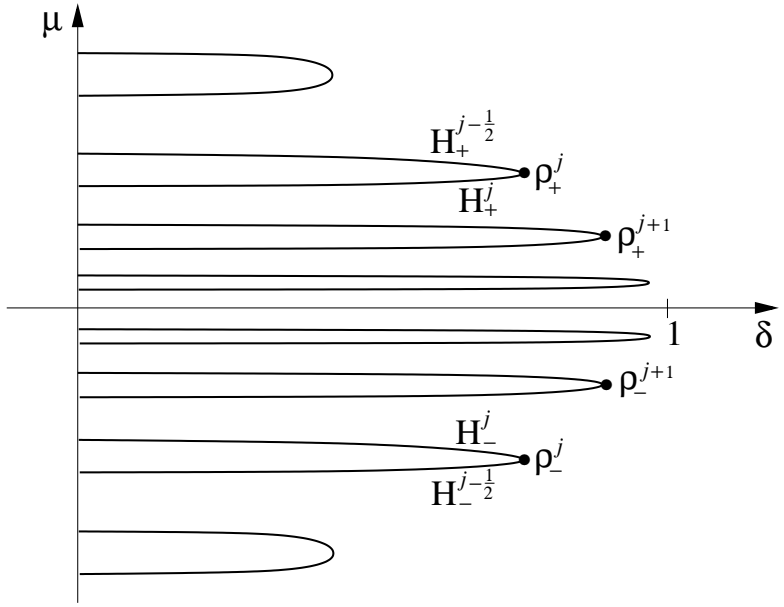


Figura 4.4: Conjunto parcial de bifurcaciones en el plano (δ, μ) de las conexiones homoclinas $\mathbf{H}_-^j$ y $\mathbf{H}_+^j$.

diferencia de lo que ocurre en los campos (4.2) cuando no se cumple la propiedad de la $\mathbb{Z}_2$–simetría, en nuestro caso en el interior de la región delimitada por las curvas de bifurcación $\mathbf{H}_+^{j-\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{H}_+^j$, así como las correspondientes a las homoclinas $\mathbf{H}_-^{j-\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{H}_-^j$, el sistema (4.2) sí tiene lazos homoclinos en su interior. En efecto, en el caso de las homoclinas $\mathbf{H}_-^j$ se puede observar en la figura 4.3 cómo $\bar{z} < 0$ en el interior de ella y, en consecuencia, la variedad unidimensional, que pasa por debajo de la W^s_{loc}, puede dar lugar a la existencia de homoclinas de triple pulso $\mathbf{H}_{--}^{j,k}$ en su interior, como veremos a continuación.

Notemos que si bien las expresiones asintóticas de las homoclinas $\mathbf{H}_-^{j-\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{H}_-^j$ son únicamente válidas para $\frac{1}{2} < \delta < 1$, sin embargo, la construcción gráfica de las soluciones de la ecuación (4.3) realizada en la figura 4.3, nos muestra que las citadas líneas de bifurcación existen para $0 < \delta < 1$. Los casos donde δ está próximo a los extremos 0 y 1, en ausencia de simetría han sido desarrollados en Belyakov (1974) y (1984), respectivamente.

4.2.2. Homoclinas de triple pulso

En nuestro caso, y debido a la $\mathbb{Z}_2$–simetría, podemos considerar cuatro tipos de homoclinas de triple pulso: $\mathbf{H}_{++}^{j,k}$, $\mathbf{H}_{+-}^{j,k}$, $\mathbf{H}_{-+}^{j,k}$, $\mathbf{H}_{--}^{j,k}$ que podemos ver representadas en la figura 4.5.

Hemos representado únicamente uno de los dos lazos existentes debido a la simetría. El primer superíndice j denota el número de vueltas que la variedad unidimensional del origen realiza entre la primera y la segunda gran vuelta, y k el número de vueltas que realiza entre la segunda gran vuelta y la vuelta de cierre en O. El subíndice $-+$ indica

que la variedad unidimensional, que suponemos siempre que surge hacia la zona $z > 0$, posteriormente pasa al semiespacio $z < 0$ donde realiza las primeras j vueltas, luego pasa a la zona $z > 0$ donde da otras k vueltas y, por último, se cierra en O.

El estudio y la disposición en el plano de parámetros (δ, μ) de las homoclinas de triple pulso $\mathbf{H}_{++}^{j,k}$ en relación a las homoclinas de doble pulso $\mathbf{H}_{+}^{j}$ ha sido realizado en Gonchenko, Turaev, Gaspard y Nicolis (1997). En nuestro caso lo que nos planteamos es hacer un estudio análogo en relación a las restantes homoclinas de triple pulso.

En el citado trabajo se muestra que entre dos bifurcaciones homoclinas consecutivas de doble pulso $\mathbf{H}_{+}^{j}$ y $\mathbf{H}_{+}^{j+\frac{1}{2}}$, ya que $\bar{z} > 0$, existen homoclinas de triple pulso $\mathbf{H}_{++}^{j,k}$. Además, en la región comprendida entre $\mathbf{H}_{+}^{j-\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{H}_{+}^{j}$, al ser $\bar{z} < 0$ (ver figura 4.3), no hay otras homoclinas que sean interiores a la región delimitada por estas homoclinas de doble pulso.

En nuestro caso y según indicamos anteriormente dentro de las homoclinas $\mathbf{H}_{-}^{j-\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{H}_{-}^{j}$, al ser $\bar{z} < 0$, sí pueden existir homoclinas del tipo $\mathbf{H}_{--}^{j,k}$. Mientras que entre dos homoclinas consecutivas del tipo $\mathbf{H}_{-}^{j}$ y $\mathbf{H}_{-}^{j+\frac{1}{2}}$, al ser $\bar{z} > 0$, pueden existir homoclinas del tipo $\mathbf{H}_{-+}^{j,k}$. Un estudio análogo para $\mu > 0$ nos muestra que, en condiciones de $\mathbb{Z}_2$–simetría, interior a las homoclinas $\mathbf{H}_{+}^{j-\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{H}_{+}^{j}$ hay homoclinas del tipo $\mathbf{H}_{+-}^{j,k}$. Ahora vamos a obtener las expresiones asintóticas de las líneas que definen las bifurcaciones homoclinas de triple pulso $\mathbf{H}_{--}^{j,k}$ situadas en el interior de las homoclinas de doble pulso $\mathbf{H}_{-}^{j-\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{H}_{-}^{j}$.

Como comentamos anteriormente, para $\mu < 0$, la variedad inestable del origen corta a la sección Σ^+ en un punto de coordenadas $(0, 1, \mu)$. La existencia de una homoclina de triple pulso del tipo $\mathbf{H}_{--}^{j,k}$ se obtiene imponiendo que el transformado de dicho punto

$$\Sigma^+ \xrightarrow{T_3} \Sigma^- \xrightarrow{T_4} \Sigma^-$$

$$(0, 1, \mu) \longrightarrow (T_4 \circ T_3)(0, 1, \mu),$$

pertenezca a la variedad estable local del origen.

En consecuencia, de las ecuaciones que definen a T_3 y T_4 se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{y} &= -1 + A|\mu|^{\delta} \cos(\Omega \ln|\mu| + \theta) + O(|\mu|^{2\delta}), \\ \bar{z} &= -\mu - B|\mu|^{\delta} \operatorname{sen}(\Omega \ln|\mu|) + O(|\mu|^{2\delta}), \\ 0 &= -\mu + B|\bar{z}|^{\delta} \operatorname{sen}(\Omega \ln|\bar{z}|) + O(|\bar{z}|^{2\delta}). \end{aligned}$$

Por tanto, las siguientes ecuaciones nos permiten obtener las curvas correspondientes a las homoclinas de triple pulso que buscamos

$$\begin{aligned} \bar{z} &= -\mu - B|\mu|^{\delta} \operatorname{sen}(\Omega \ln|\mu|) + O(|\mu|^{2\delta}), \\ \mu &= B|\bar{z}|^{\delta} \operatorname{sen}(\Omega \ln|\bar{z}|) + O(|\bar{z}|^{2\delta}). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Para resolver estas ecuaciones tomamos

$$\begin{aligned} \Omega \ln|\mu| &= -2\pi j + \xi, \quad \text{donde } \xi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \\ \Omega \ln|\bar{z}| &= -2\pi k + \eta, \quad \text{donde } \eta \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

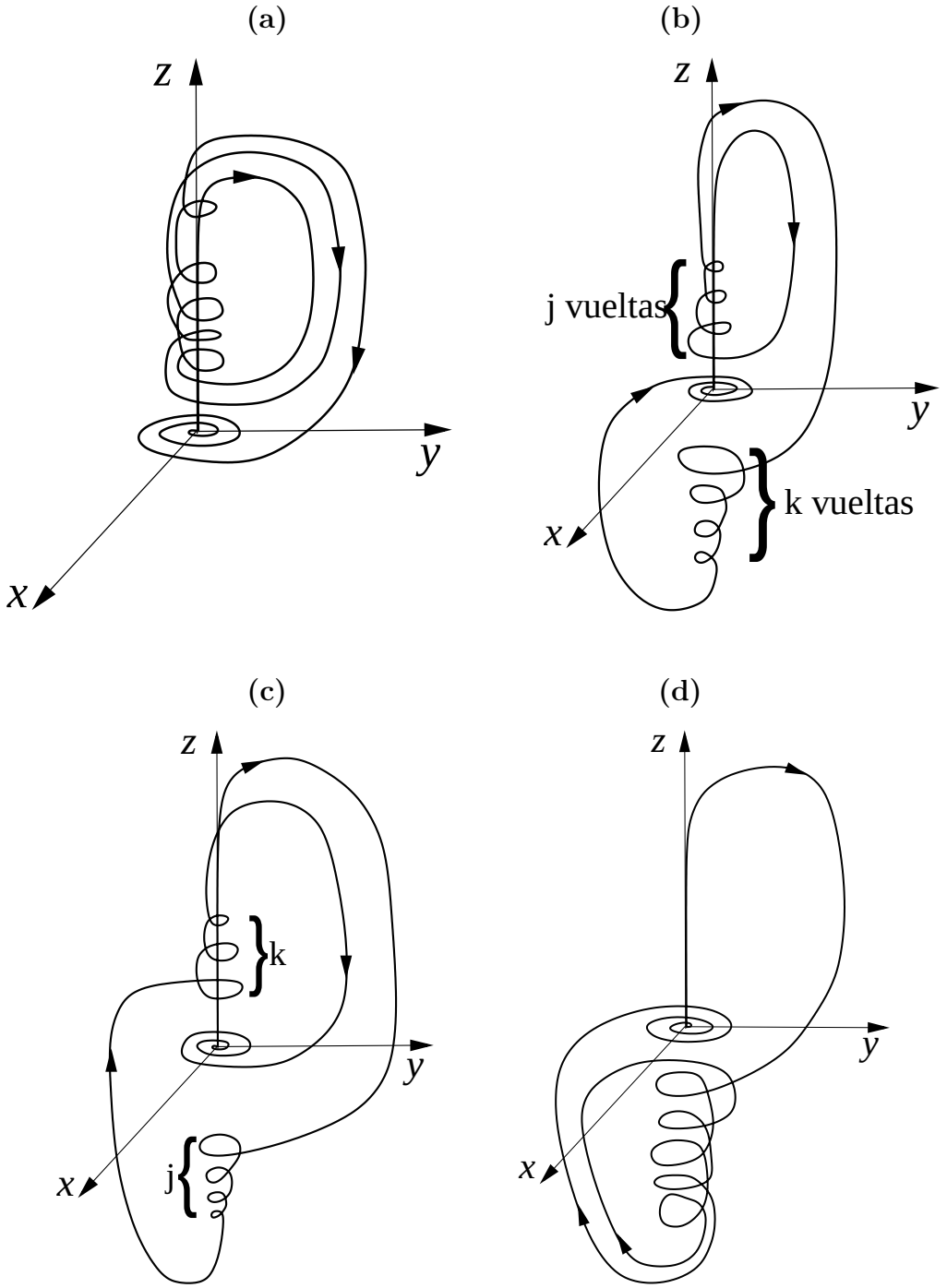


Figura 4.5: Órbitas homoclinas de triple pulso: (a) $\mathbf{H}^{j,k}_{++}$. (b) $\mathbf{H}^{j,k}_{+-}$. (c) $\mathbf{H}^{j,k}_{-+}$. (d) $\mathbf{H}^{j,k}_{--}$.

es decir

$$|\mu| = e^{\frac{-2\pi j+\xi}{\Omega}}, \qquad |\bar{z}| = e^{\frac{-2\pi k+\eta}{\Omega}},$$

de manera que las ecuaciones (4.6) se pueden escribir

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\xi &= \frac{1}{B}(-\mu-\bar{z})|\mu|^{-\delta} + O\left(|\mu|^{2\delta}\right) = \frac{1}{B}(|\mu|+\bar{z})|\mu|^{-\delta} + O\left(|\mu|^{2\delta}\right) \\ &= \frac{1}{B}\left(e^{\frac{-2\pi j+\xi}{\Omega}} + e^{\frac{-2\pi k+\eta}{\Omega}}\right) e^{\frac{\delta(2\pi j-\xi)}{\Omega}} + O\left(|\mu|^{2\delta}\right), \qquad (4.7) \\ \operatorname{sen}\eta &= -\frac{1}{B}|\mu||\bar{z}|^{-\delta} + O\left(|\bar{z}|^{2\delta}\right) = -\frac{1}{B}e^{\frac{2\pi(\delta k-j)}{\Omega}} e^{\frac{\xi-\delta\eta}{\Omega}} + O\left(|\bar{z}|^{2\delta}\right). \end{aligned}$$

Hay tres casos diferentes:

- Caso 1. Cuando $j = k$, el sistema anterior (4.7) puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\eta &= -\frac{1}{B}e^{\frac{-2\pi j(1-\delta)}{\Omega}} e^{\frac{\xi-\delta\eta}{\Omega}} + O\left(|\bar{z}|^{2\delta}\right), \\ \operatorname{sen}\xi &= \frac{1}{B}e^{\frac{-2\pi j(1-\delta)}{\Omega}} \left(e^{\frac{\xi}{\Omega}} + e^{\frac{\eta}{\Omega}}\right) e^{\frac{-\delta\xi}{\Omega}} + O\left(|\mu|^{2\delta}\right). \qquad (4.8) \end{aligned}$$

  Las soluciones de la primera ecuación en $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, siempre que j es suficientemente grande y para cada $\xi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, son dos exactamente

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\pi + \frac{1}{B}e^{\frac{-2\pi j(1-\delta)}{\Omega}} e^{\frac{\xi+\pi\delta}{\Omega}} + \ldots, \\ \eta_0 &= -\frac{1}{B}e^{\frac{-2\pi j(1-\delta)}{\Omega}} e^{\frac{\xi}{\Omega}} + \ldots \end{aligned}$$

  Si sustituimos $\eta = \eta_0$ en la segunda ecuación de (4.8) tenemos

$$\operatorname{sen}\xi = \frac{1}{B}e^{\frac{-2\pi j(1-\delta)}{\Omega}} \left(e^{\frac{\xi}{\Omega}} + 1 - \frac{1}{B\Omega}e^{\frac{-2\pi j(1-\delta)}{\Omega}} e^{\frac{\xi}{\Omega}} + \ldots\right) e^{\frac{-\delta\xi}{\Omega}} + \ldots,$$

  que tiene dos soluciones en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \xi_{01} &= \pi - \frac{1}{B}e^{\frac{-2\pi j(1-\delta)}{\Omega}} \left(1 + e^{\frac{\pi}{\Omega}}\right) e^{\frac{-\pi\delta}{\Omega}} + \ldots, \\ \xi_{00} &= \frac{2}{B}e^{\frac{-2\pi j(1-\delta)}{\Omega}} - \frac{1}{B^2\Omega}e^{\frac{-4\pi j(1-\delta)}{\Omega}} + \ldots \end{aligned}$$

  Estas dos ramas de bifurcación homoclina $\mu_{0,0}^{jj}$ y $\mu_{0,1}^{jj}$ se unen en el punto $(\delta_{0*}^{jj}, \mu_{0*}^{jj})$ dado por

$$\begin{aligned} \delta_{0*}^{jj} &= \frac{4j + \ln\left(\frac{B}{1+e^{\frac{\pi\gamma}{2\omega}}}\right)^{\frac{2\omega}{\pi\gamma}}}{4j-1} + \ldots, \\ \mu_{0*}^{jj} &= -e^{\frac{(-2\pi j+\frac{\pi}{2})\gamma}{\omega}}(1+\ldots). \end{aligned}$$

Estos puntos verifican, como ocurría en el caso de las homoclinas de doble pulso $\mathbf{H}^j_-$ con los puntos $\rho^j_0(\delta^j_*, \mu^j_*)$, que

$$\lim_{j\to+\infty} \rho^{jj}_0(\delta^{jj}_{0*}, \mu^{jj}_{0*}) = (1, 0).$$

Si sustituimos $\eta = \eta_1$ en la segunda ecuación de (4.8) tenemos

$$\operatorname{sen}\xi = \frac{1}{B} e^{\frac{-2\pi j(1-\delta)}{\Omega}} \left(e^{\frac{\xi}{\Omega}} + e^{\frac{-\pi}{\Omega}} \left(1 + \frac{1}{B\Omega} e^{\frac{-2\pi j(1-\delta)}{\Omega}} e^{\frac{\xi+\pi\delta}{\Omega}} + \ldots \right) \right) e^{\frac{-\delta\xi}{\Omega}},$$

que tiene también dos soluciones

$$\begin{aligned} \xi_{10} &= \frac{1}{B} e^{\frac{-2\pi j(1-\delta)}{\Omega}} \left(1 + e^{\frac{-\pi}{\Omega}} \right) + \ldots, \\ \xi_{11} &= \pi - \frac{1}{B} e^{\frac{-2\pi j(1-\delta)}{\Omega}} \left(1 + e^{\frac{-2\pi}{\Omega}} \right) e^{\frac{\pi(1-\delta)}{\Omega}} + \ldots \end{aligned}$$

Estas dos ramas se unen nuevamente en un punto donde hay tangencia vertical dado por

$$\begin{aligned} \delta^{jj}_{1*} &= \frac{4j + \ln\left(\frac{B}{e^{\frac{-\pi\gamma}{\omega}} + e^{\frac{\pi\gamma}{2\omega}}} \right)^{\frac{2\omega}{\pi\gamma}}}{4j - 1} + \ldots, \\ \mu^{jj}_{1*} &= -e^{\frac{(-2\pi j + \frac{\pi}{2})\gamma}{\omega}} (1 + \ldots), \end{aligned}$$

los cuales también verifican que acumulan al punto $(1, 0)$ del plano (δ, μ) cuando $j \to \infty$.

En consecuencia, cuando $j = k$ hay cuatro ramas de bifurcaciones homoclinas para cada entero j suficientemente grande. Estas cuatro ramas vienen dadas por la ecuación

$$\mu_{\alpha_1,\alpha_2} = -e^{\frac{-2\pi j}{\Omega}} e^{\frac{\xi_{\alpha_1,\alpha_2}}{\Omega}},$$

donde $\alpha_1, \alpha_2 = 0, 1$.

- Caso 2. Cuando $j > k$, el sistema (4.7) puede ser escrito en la forma

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\xi &= \frac{1}{B} e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(k-\delta j)} e^{\frac{\eta-\delta\xi}{\Omega}} \left(1 + e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(j-k)} e^{\frac{\xi-\eta}{\Omega}} \right) + \ldots, \\ \operatorname{sen}\eta &= -\frac{1}{B} e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(j-\delta k)} e^{\frac{\xi-\delta\eta}{\Omega}} + \ldots \end{aligned} \tag{4.9}$$

Como $\delta < 1$ y $k < j$, el coeficiente $e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(j-\delta k)}$ es muy pequeño. En consecuencia, la segunda ecuación de (4.9) tiene dos soluciones en $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ para cada $\xi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, a saber

$$\begin{aligned} \eta_0 &= -\frac{1}{B} e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(j-\delta k)} e^{\frac{\xi}{\Omega}} + \ldots, \\ \eta_1 &= -\pi + \frac{1}{B} e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(j-\delta k)} e^{\frac{\xi+\pi\delta}{\Omega}} + \ldots \end{aligned}$$

Al sustituir $\eta = \eta_0$ en la primera ecuación de (4.9) obtenemos

$$e^{\frac{\delta\xi}{\Omega}} \operatorname{sen}\xi \;\; = \;\; C(\delta,\xi), \tag{4.10}$$

donde

$$C(\delta,\xi) = \frac{1}{B} e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(k-\delta j)} \left(1 + e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(j-k)} e^{\frac{\xi}{\Omega}}\right) + \ldots > 0.$$

La ecuación (4.10) tiene dos soluciones cuando C es próximo a cero, es decir, cuando $k - \delta j$ es muy grande, que se corresponden con las dos ramas de las curvas de homoclinas $\mathbf{H}^{j,k}_{--0}$. Ambas soluciones se unen para un valor de C correspondiente al caso en el que k es próximo a δj. Al ser j, k grandes y $j > k$ la diferencia $j - k$ es muy grande. Por tanto, la función $C(\delta,\xi)$ es parecida a la línea recta

$$C(\delta,\xi) = \frac{1}{B} e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(k-\delta j)},$$

en el momento de la unión. Además, esa unión se produce cerca del máximo del miembro izquierdo de la ecuación (4.10)

$$\xi_{*0} = \pi - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\Omega}{\delta}\right).$$

Para encontrar el valor de δ que le corresponde sustituimos $\xi = \xi_{*0}$ en (4.10), obteniéndose

$$e^{\frac{\delta}{\Omega}\left(\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\delta}{\Omega}\right)} \frac{\Omega}{\sqrt{\delta^2+\Omega^2}} = \frac{1}{B} e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(k-\delta j)} + \ldots,$$

por lo tanto

$$\delta_{*0} = \frac{k}{j} + \frac{\tau}{j} + \ldots,$$

donde

$$\tau = \frac{1}{2\pi}\left[\Omega \ln\left(\frac{\Omega}{\sqrt{\delta^2+\Omega^2}}\right) + \delta\left(\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\Omega}{\delta}\right)\right].$$

En consecuencia, en el punto $\rho_0^{j,k}(\delta_{*0}^{j,k}, \mu_{*0}^{j,k})$ donde

$$\mu_{*0}^{j,k} = e^{\frac{-2\pi j}{\Omega}} e^{\frac{\xi_{*0}}{\Omega}},$$

la curva de conexiones homoclinas de triple pulso $\mathbf{H}^{j,k}_{--0}$ tiene tangente vertical.

Análogamente se obtienen las dos ramas de la conexión homoclina $\mathbf{H}^{j,k}_{--1}$ al sustituir $\eta = \eta_1$ en la primera ecuación de (4.9). El valor $\delta_{*1}^{j,k}$ donde dichas curvas se unen viene dado por:

$$\delta_{*1}^{j,k} = \frac{k}{j} + \frac{\tau + \frac{1}{2}}{j} + \ldots$$

- Caso 3. Si consideramos ahora que $j < k$, el sistema (4.7) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\xi &= \frac{1}{B}e^{\frac{-2\pi j}{\Omega}(1-\delta)}e^{\frac{\xi(1-\delta)}{\Omega}}\left(1+e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(k-j)}e^{\frac{\eta-\xi}{\Omega}}\right)+\ldots, \\ \operatorname{sen}\eta &= -\frac{1}{B}e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(j-\delta k)}e^{\frac{\xi-\delta\eta}{\Omega}}+\ldots \end{aligned} \tag{4.11}$$

En este caso la primera ecuación de (4.11) tiene dos soluciones en $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, ya que el factor $e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(j-\delta k)}$ es muy pequeño (pues $\delta<1$ y j es muy grande)

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{B}e^{\frac{-2\pi j}{\Omega}(1-\delta)}\left(1+e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(k-j)}e^{\frac{\eta}{\Omega}}\right)+\ldots, \\ \xi_1 &= \pi-\frac{1}{B}e^{\frac{-2\pi j}{\Omega}(1-\delta)}e^{\frac{\pi(1-\delta)}{\Omega}}\left(1+e^{\frac{-2\pi}{\Omega}(k-j)}e^{\frac{\eta-\pi}{\Omega}}\right)+\ldots \end{aligned}$$

Al sustituir $\xi=\xi_0$ en la segunda ecuación de (4.11), se obtienen de forma análoga al caso anterior, las dos ramas de las curvas de bifurcación homoclinas $\mathbf{H}^{j,k}_{--0}$. Estas dos ramas se unen en un punto de tangencia vertical que se obtiene de manera análoga al caso anterior, obteniéndose

$$\delta^{j,k}_{*0}=\frac{j}{k+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{k+\frac{1}{2}}+\ldots$$

De la misma forma, si sustituimos $\xi=\xi_1$ en la segunda ecuación de (4.11) se obtienen las dos ramas de las curvas de homoclinas $\mathbf{H}^{j,k}_{--1}$ que se unen para el valor

$$\delta^{j,k}_{*1}=\frac{j-\frac{1}{2}}{k+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{k+\frac{1}{2}}+\ldots$$

En la figura 4.6 podemos observar cómo, a primer orden, las curvas de conexiones homoclinas de doble y triple pulso están distribuidas, en el plano (δ,μ), simétricamente en relación a la homoclina principal.

4.3. Estudio numérico

Como modelo para validar alguno de nuestros resultados teóricos utilizaremos nuevamente la ecuación de Chua

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y-ax^3-cx), \\ \dot{y} &= x-y+z, \\ \dot{z} &= -\beta y-\gamma z. \end{aligned}$$

El estudio numérico de estas ecuaciones se realizará básicamente con el programa AUTO97 Doedel, Champneys, Fairgrieve, Kuznetsov, Sandstede y Wang (1998). Utilizaremos los resultados analíticos obtenidos para la ecuación de Chua en la sección 5.4 del capítulo

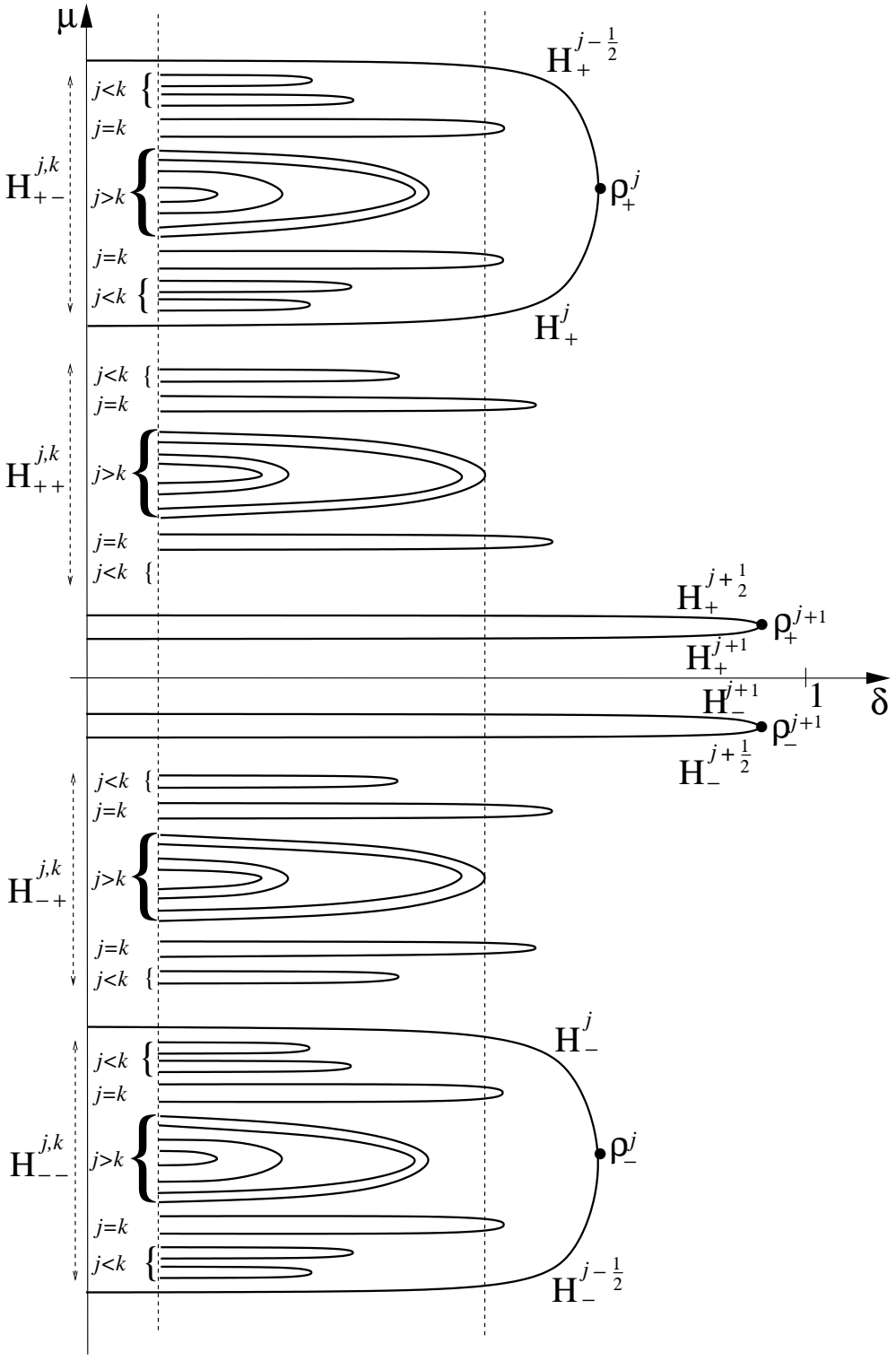


Figura 4.6: Conjunto parcial de bifurcaciones, en el plano (δ, μ), de las conexiones homoclinas $\mathbf{H}_-^j$, $\mathbf{H}_+^j$, $\mathbf{H}_{++}^{j,k}$, $\mathbf{H}_{+-}^{j,k}$, $\mathbf{H}_{-+}^{j,k}$ and $\mathbf{H}_{--}^{j,k}$.

cinco. En base a ellos tomaremos β, c y α como parámetros de bifurcación y fijaremos los otros dos, a saber $a = -1$ y $\gamma = 0.3 > 0$, en concordancia con los estudios numéricos realizados en los capítulos anteriores.

En particular, para los valores de a y γ fijados anteriormente, detectamos en la sección 1.6 del capítulo 1 la presencia de una bifurcación de Takens-Bogdanov degenerada, de tipo homoclino, **TBD** (para los valores críticos $\alpha_c \approx -1.08132$, $\beta_c \approx 0.00434$, $c_c \approx 0.98573$) y una degeneración lineal triple–cero del origen **TZ** (cuando $\alpha_c = -1.373125$, $\beta_c = 0.016875$ y $c_c \approx 0.946746$).

En la figura 4.7, hemos dibujado la proyección sobre el plano (α, β) de algunas de las curvas de bifurcación que surgen del punto **TZ**:

- La curva donde las conexiones homoclinas del origen tienen un autovalor real doble, **Hd1a**, sobre la cual tiene lugar la transición del origen de equilibrio silla a silla–foco (linea discontinua). Como en este caso el autovalor doble no es *determinante* (recordamos que un autovalor es llamado *determinante* cuando es el autovalor mas cercano del eje imaginario) en un entorno del punto **TZ**, la bifurcación homoclina permanece dócil (Champneys y Kuznetsov 1994) y como consecuencia los ciclos límites solo pueden bifurcar de la rama principal de conexiones homoclinas. El punto donde acaba la curva **Hd1a**, $\alpha \approx -1.0886237$, $\beta \approx 0.0036546$, $c \approx 1.011682$, es un nuevo punto de codimensión tres **THD1**. En este punto los autovalores son de la forma $(-\lambda,-\lambda,\lambda)$ con $\lambda \approx 0.198658$. Al otro lado del punto **THD1**, una nueva curva **Hd1b** emerge. Notemos que el autovalor doble es ahora determinante y por lo tanto, el conjunto de bifurcaciones contiene ahora un número infinito de curvas de bifurcación que surgen del punto de bifurcación, de codimensión dos, **Hd1b** (ver Belyakov (1980)).

- La curva **Hd2** donde, siendo el origen un equilibrio silla–foco, las variedades estable e inestable son resonantes ($\delta = 1$). Esta curva finaliza en el punto de codimensión tres **THD1**.

- La curva **Hd3** donde, siendo el origen un equilibrio silla–foco, se anula la divergencia del campo vectorial (1.1) en el origen. Esta curva finaliza en el punto de codimensión tres **THD3**, situado sobre la curva **Hd1b**, para $\alpha \approx -1.181399$, $\beta \approx 0.000698$, $c \approx 1.10039$. En este punto los autovalores son de la forma $\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$ con $\lambda \approx 0.52650$.

Cuando $\alpha = -1.3$ (ver figura 4.8), un punto de bifurcación de Takens-Bogdanov de tipo homoclino **TB** (para $\beta \approx 0.014106$, $c \approx 0.95509$) existe sobre la curva **PI** donde una bifurcación pitchfork del origen ocurre. Además, cuatro nuevas curvas emergen desde **TB** (ver, por ejemplo, Guckenheimer y Holmes (1997), Kuznetsov (2004)): **ho**, una curva donde los equilibrios no triviales experimentan una bifurcación de Hopf supercrítica (y un par de órbitas periódicas asimétricas surgen); **Ho**, correspondiente a una bifurcación de Hopf subcrítica del origen (y una órbita periódica simétrica surge); **H**, una curva de conexiones homoclinas del origen y **SN** que corresponde a una curva de bifurcación silla–nodo de órbitas periódicas simétricas.

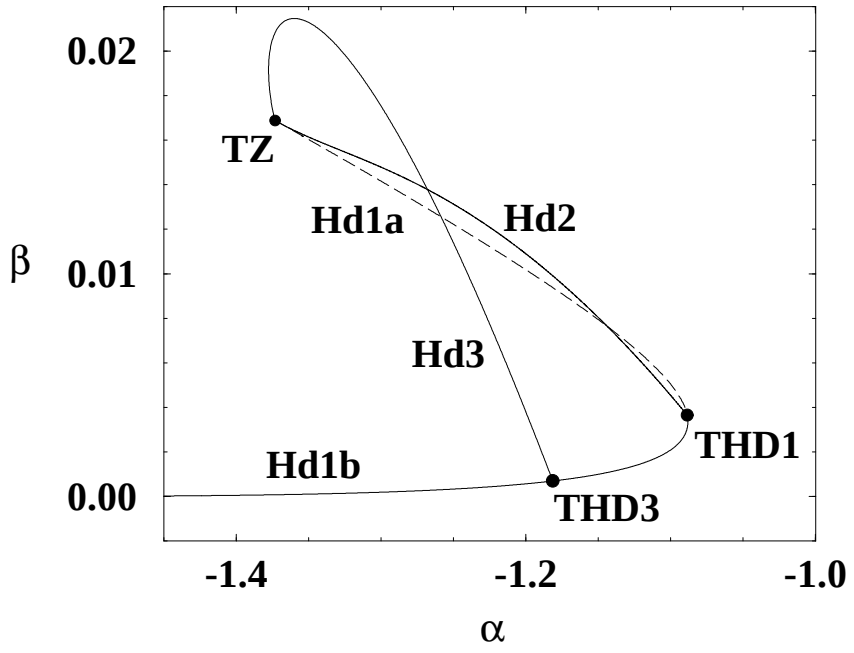


Figura 4.7: Proyección de las curvas de órbitas homoclinas degeneradas **Hd1a**, **Hd1b**, **Hd2**, **Hd3** sobre el plano (α, β) para $a = -1$, $\gamma = 0.3$.

También aparece, sobre la curva **ho**, un punto de degeneración de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales **hod**, para $\beta \approx 0.02226$, $c \approx 0.96$. Desde este punto una curva de bifurcación silla–nodo de órbitas periódicas asimétricas **sn** emerge. Ambas curvas de bifurcación silla–nodo, **SN** y **sn**, finalizan en el punto de degeneración **Hd1b** y delimitan la región de existencia, en el plano de parámetros (β, c), de otras curvas de bifurcación que también surgen desde el citado punto **Hd1b**.

La curva principal de conexiones homoclinas **H**, que surge del punto de bifurcación de Takens-Bogdanov del origen **TB** cuando el origen es un equilibrio de tipo silla, presenta algunas degeneraciones (ver figura 4.8). La primera de ellas, **Hd1a**, es causada por la transición del origen de silla a silla–foco, para $\beta \approx 0.01416$, $c \approx 0.95498$ muy cerca del punto **TB** (por esta razón no aparece representada en la figura 4.9 (b)). Como el autovalor doble no es determinante, para estos valores de los parámetros, la bifurcación homoclina permanece dócil.

Si denotamos por $(\rho \pm i\omega, \lambda)$ los autovalores del equilibrio en el origen, con $\rho < 0$ y $\lambda > 0$, la segunda degeneración sobre la curva **H**, que denotamos por **Hd2** y ocurre para $\beta \approx 0.01479$, $c \approx 0.95433$, se produce cuando $\delta = \left|\dfrac{\rho}{\lambda}\right| = 1$ (autovalores resonantes). La transición de órbita homoclina dócil a caótica se produce en este punto. A continuación, para $\beta \approx 0.01754$, $c = 1$, una nueva degeneración aparece, **Hd3**, cuando $\delta = \dfrac{1}{2}$ (divergencia cero).

La última degeneración que hemos detectado sobre la curva **H**, **Hd1b**, para $\beta \approx 0.00019$, $c \approx 1.15523$, es debida a la transición de silla–foco a silla del equilibrio en el

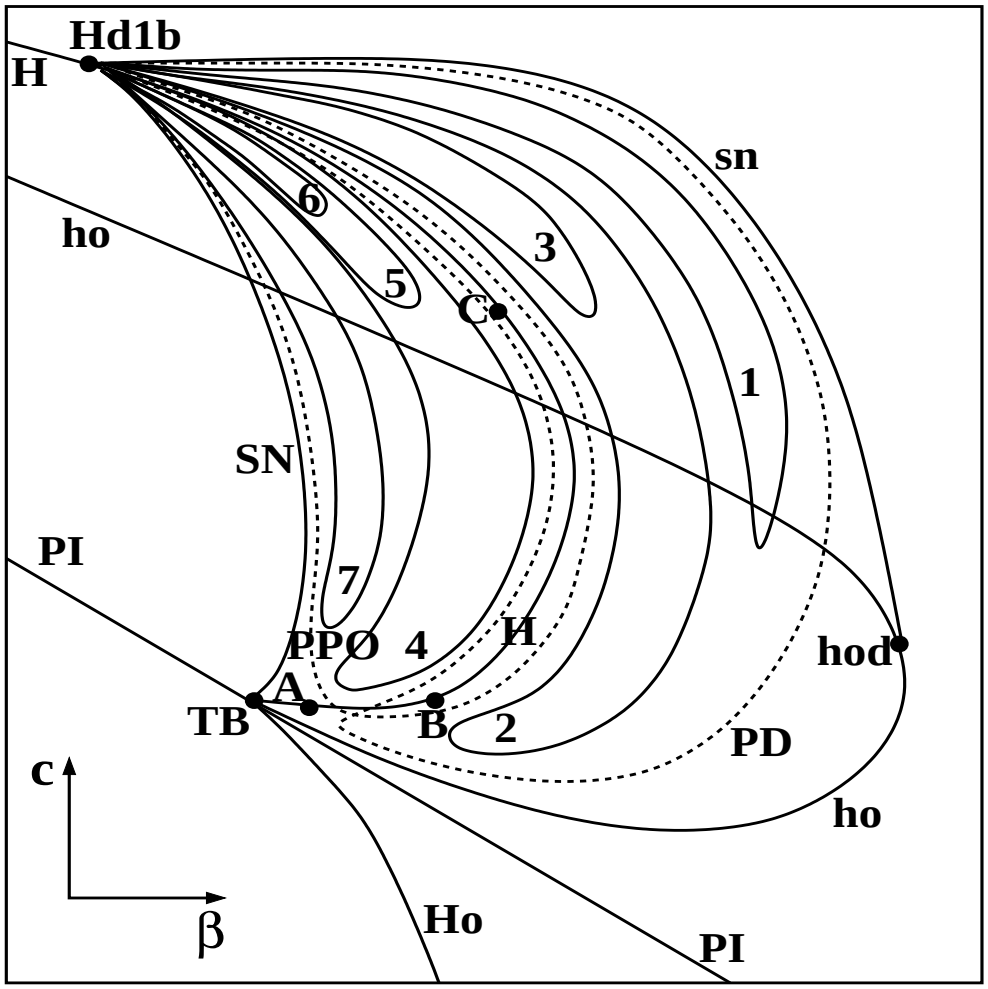


Figura 4.8: Conjunto de bifurcación cualitativo para $a = -1$, $\alpha = -1.3$, $\gamma = 0.3$. **A** corresponde al punto **Hd1a**, **B** es el punto **Hd2** y **C** indica el punto **Hd3**. Varias curvas están numeradas de acuerdo a la siguiente notación: **1** para $\mathbf{H}_{++}$, **2** para $\mathbf{H}_{+}$, **3** para $\mathbf{H}_{+-}$, **4** para $\mathbf{H}_{-}$, **5** para $\mathbf{H}_{--}$, **6** para $\mathbf{H}_{---}$, **7** para $\mathbf{H}_{-+}$.

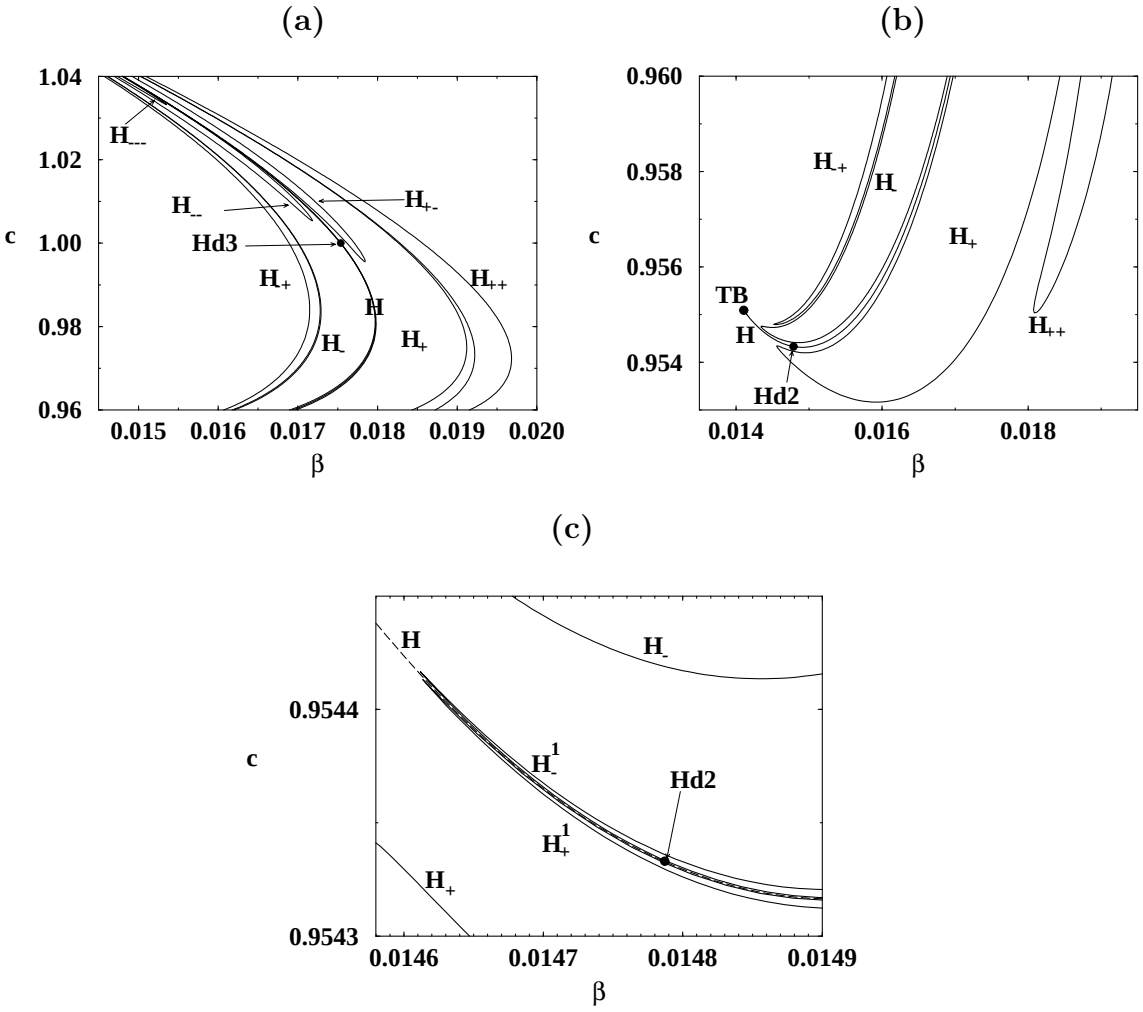


Figura 4.9: Para $a = -1$, $\alpha = -1.3$, $\gamma = 0.3$: (a)-(c) Detalles del conjunto parcial de bifurcaciones correspondiente a las conexiones homoclinas del origen presentes en la figura 4.8.

origen. Desde este punto (ver figura 4.8) infinitas curvas de bifurcación surgen: silla-nodo de órbitas periódicas (tanto simétricas **SN** como asimétricas **sn**); duplicación de periodo de las órbitas periódicas asimétricas **PD**; pitchfork de órbitas periódicas simétricas **PPO**, así como órbitas homoclinas del origen, de diferentes pulsos, todas con forma de banana (ver Algaba, Merino, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (2003)). Algunas de estas curvas de conexiones homoclinas aparecen en la figura 4.9 (a)-(c).

Para distinguir las conexiones homoclinas de diferentes pulsos usaremos subíndices, indicando con ellos tanto el orden como el número de veces que la proyección sobre el plano xz de la variedad unidimensional del origen rodea a cada uno de los equilibrios no triviales $P^+(-x,-y,z)$ y $P^-(x,y,-z)$ donde $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Por ejemplo, la conexión homoclina $\mathbf{H}_{--}$ representa una homoclina de triple pulso del origen cuya proyección sobre el plano xz, de la variedad unidimensional, rodea en primer lugar al

equilibrio P^+ y después dos veces al equilibrio P^-. Análogamente, la proyección sobre el plano xz de la variedad unidimensional de una conexión homoclina del tipo $\mathbf{H}_{+-}$ rodea en primer lugar dos veces al equilibrio P^+ y después una vez al equilibrio P^-. En la figura 4.10 hemos representado la proyección sobre el plano xz de los cuatro tipos de conexiones homoclinas de triple pulso, para los valores de los parámetros β y c correspondientes al mínimo que presentan dichas curvas de conexiones homoclinas en el rango de la figura 4.9, así como la proyección de los puntos de equilibrios no triviales P^+ y P^-.

Notemos que por simplicidad únicamente nos referiremos a una de las conexiones homoclinas, de cada pareja que hay presente en las ecuaciones (1.1), debido a la propiedad de $\mathbb{Z}_2$-simetría. En concreto aquella que su variedad unidimensional del origen rodea en primer lugar al equilibrio P^+, razón por la cual no hemos incluido el signo + como primer subíndice en las conexiones homoclinas anteriores .

Aquí estudiamos las conexiones homoclinas del origen relacionadas con las órbitas periódicas de gran amplitud (las que rodean, al menos una vez, a cada equilibrio no trivial) y las órbitas periódicas de pequeña amplitud (las que únicamente rodean a un equilibrio no trivial). Concretamente, la continuación numérica de la rama de las órbitas periódicas de gran amplitud que surge desde la primera (segunda) bifurcación de ruptura de simetría que experimentan las órbitas periódicas simétricas, nacidas en la bifurcación de Hopf del equilibrio en el origen **Ho** para $\beta = 0.016$ y $c \approx 0.08226$ (ver figura 4.12 (a)), nos muestra que ellas se *contonean* en torno a la rama izquierda (derecha) de la conexión homoclina $\mathbf{H}_-$ de la figura 4.8.

Las órbitas periódicas que surgen de la tercera y cuarta bifurcación de ruptura de simetría finalizan en otro punto de la curva de conexiones homoclinas $\mathbf{H}_-^{\mathbf{1}}$, que tiene forma de banana y se encuentra situada entre las curvas de conexiones homoclinas $\mathbf{H}$ y $\mathbf{H}_-$ (ver la figura 4.9 (c)). Notemos que el punto de retorno donde se unen las dos ramas de la conexión homoclina $\mathbf{H}_-^{\mathbf{1}}$ esta más cerca del punto **Hd2** (donde tiene lugar la degeneración $\delta = 1$ de la homoclina principal $\mathbf{H}$) que el punto de retorno correspondiente a la conexión homoclina $\mathbf{H}_-$. Además, $\mathbf{H}_-^{\mathbf{1}}$ es el primer elemento de la sucesión de conexiones homoclinas $\{\mathbf{H}_-^{\mathbf{j}}\}$ introducidas en la sección anterior.

Para mostrar la diferencia entre las conexiones homoclinas correspondientes a las curvas denotadas por $\mathbf{H}_-^{\mathbf{1}}$ y $\mathbf{H}_-$, hemos dibujado en la figura 4.11(a)-(c), para $c = 0.98$, la proyección sobre el plano xz de ambos tipos de órbitas correspondientes a una de las órbitas que se encuentran situadas en la rama derecha de cada una las citadas curvas. En el caso de la conexión homoclina $\mathbf{H}_-^{\mathbf{1}}$, la variedad unidimensional del origen rodea en primer lugar al equilibrio no trivial P^+, después rodea una vez al origen y finalmente da otra vuelta al equilibrio no trivial P^-. Notemos que, sin embargo, la conexión homoclina $\mathbf{H}_-$ no rodea al origen antes de cerrarse dando una vuelta al equilibrio P^-.

Las órbitas periódicas asimétricas, de pequeña amplitud, que surgen en la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales **ho**, para $\beta = 0.016$ y $c \approx 1.01275$ (ver figura 4.12 (b)), presentan varias bifurcaciones de duplicación de periodo en su camino de aproximación a la curva de conexiones homoclinas $\mathbf{H}$. Las órbitas periódicas que surgen en la primera duplicación de periodo se *contonean* alrededor de la rama derecha de la curva $\mathbf{H}_+$ de la figura 4.8, mientras que las órbitas que emergen en la segunda duplicación de periodo lo hacen en torno a la rama izquierda de $\mathbf{H}_+$.

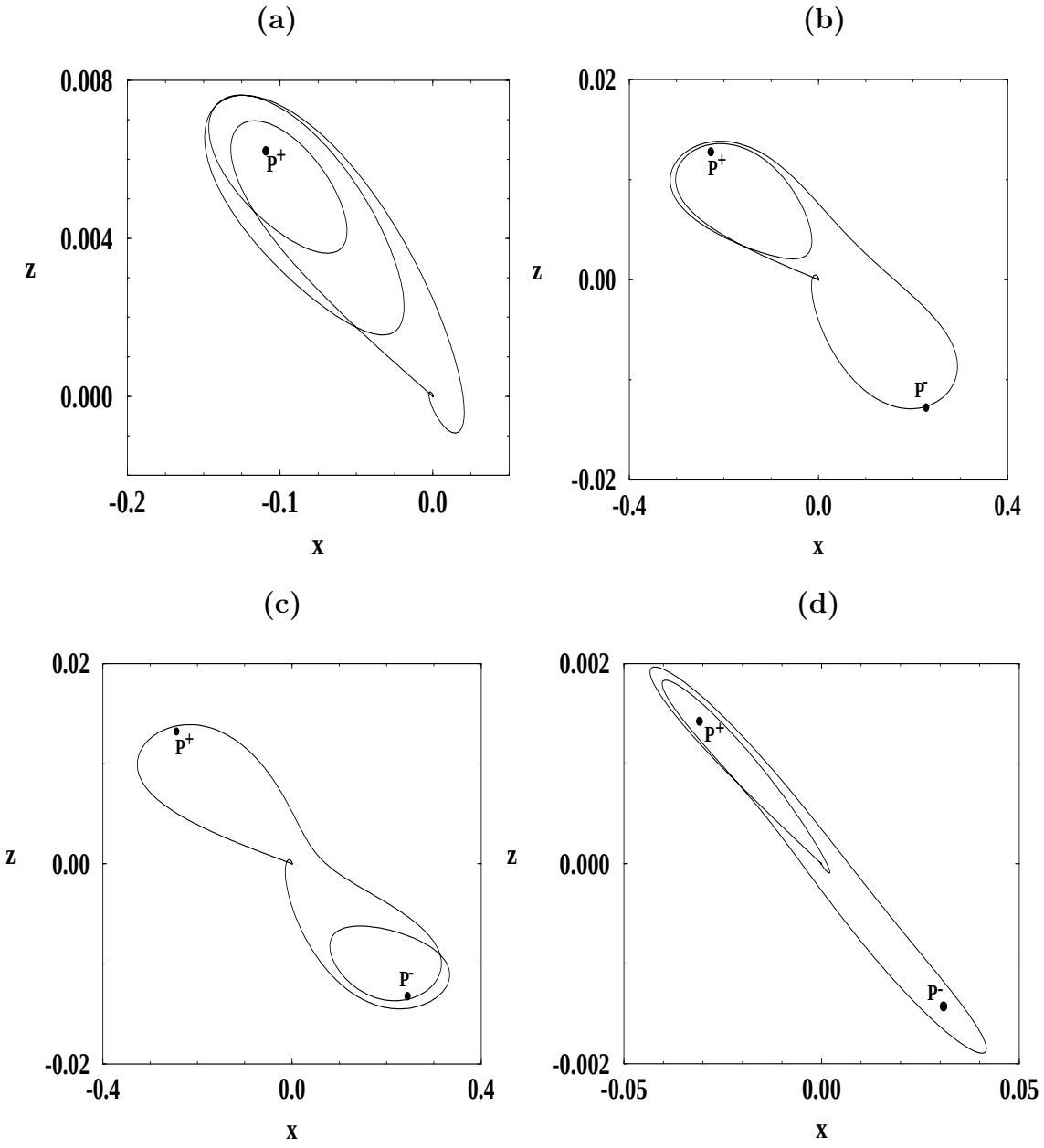


Figura 4.10: Para $a = -1$, $\alpha = -1.3$, $\gamma = 0.3$, y los valores de β y c correspondientes a los puntos de retroceso en la figura 4.9, proyección sobre el plano (x, z) de las conexiones homoclinas de triple pulso: (a) $\mathbf{H}_{++}$. (b) $\mathbf{H}_{+-}$. (c) $\mathbf{H}_{--}$. (d) $\mathbf{H}_{-+}$.

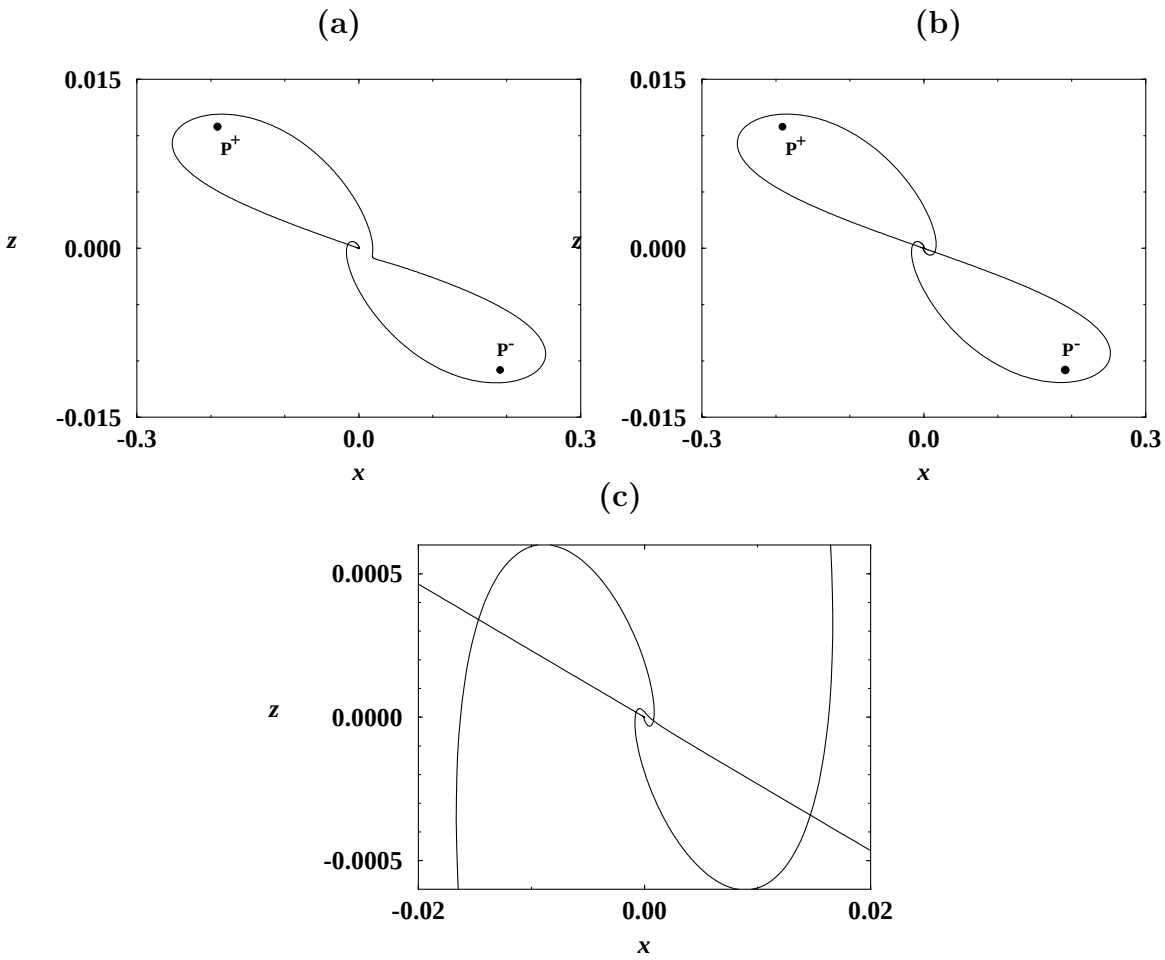


Figura 4.11: Para $a = -1$, $\alpha = -1.3$, $\gamma = 0.3$, $c = 0.98$, proyección sobre el plano (x, z) de las conexiones homoclinas de doble pulso: (a) $\mathbf{H}_-$ para $\beta \approx 0.017968$. (b) $\mathbf{H}^{\mathbf{1}}_-$ para $\beta \approx 0.017974$. (c) Zoom de (b) en un entorno del origen.

Análogamente, las órbitas periódicas que surgen en la tercera y cuarta duplicación de periodo finalizan en otra conexión homoclina $\mathbf{H}^{\mathbf{1}}_+$. Esta curva de conexiones homoclinas tiene, en el plano de parámetros (β, c), forma de banana y está situada entre las curvas de conexiones homoclinas $\mathbf{H}$ y $\mathbf{H}_+$. El punto de retorno de dicha curva se encuentra más próximo al punto **Hd2**, que el correspondiente al de la curva de conexiones homoclinas $\mathbf{H}_+$. Además, la conexión homoclina $\mathbf{H}^{\mathbf{1}}_+$ es el primer elemento de la sucesión de conexiones homoclinas $\{\mathbf{H}^{\mathbf{j}}_+\}$ introducidas en la sección anterior.

Como podemos observar en el conjunto de bifurcaciones de la Fig. 4.8, todas las curvas de conexiones homoclinas que comienzan con la secuencia +... están situadas a la derecha de la curva de homoclinas $\mathbf{H}$, y las curvas que lo hacen con la secuencia −... están situadas a la izquierda de la curva $\mathbf{H}$. También se observa que hay curvas de conexiones homoclinas de triple pulso que son interiores a las curvas de doble pulso (por ejemplo, $\mathbf{H}_{+-}$ es interior a $\mathbf{H}_+$) y otras que no lo son (por ejemplo, $\mathbf{H}_{-+}$ no es interior a ninguna de las curvas de homoclinas principales de doble pulso $\mathbf{H}_+$ y $\mathbf{H}_-$), lo que está en concordancia con los

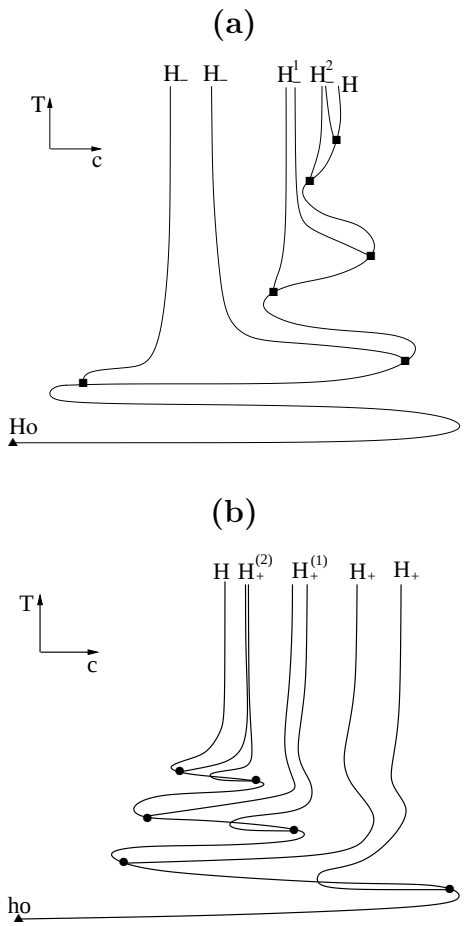


Figura 4.12: Para $a = -1$, $\alpha = -1.3$, $\beta = 0.016$, $\gamma = 0.3$, diagramas de bifurcaciones cualitativos (periodo frente al parámetro c) de las órbitas periódicas que nacen en la bifurcación de Hopf: (a) Del origen **Ho** para $c \approx 0.08226$. (b) De los equilibrios no triviales **ho** para $c \approx 1.01275$. Los cuadrados indican los puntos donde tienen lugar las bifurcaciones de ruptura de simetría y los círculos corresponden a las bifurcaciones de duplicación de periodo.

resultados teóricos obtenidos en la sección anterior.

Aunque el estudio teórico realizado es válido únicamente cuando los superíndices (j, k) de la sucesión de curvas homoclinas son muy grandes, estos resultados son también válidos aun en el caso en que los superíndices (j, k) sean pequeños, como sucede en los casos que numéricamente hemos mostrado aquí. Para encontrar conexiones homoclinas con j y k pequeños, es suficiente con aproximarnos al punto de Belyakov haciendo tender $\omega \to 0$.

La segunda parte de nuestro estudio numérico la centraremos en analizar cómo estas conexiones homoclinas de uno, dos y tres pulsos, están relacionadas con las órbitas periódicas que surgen de las lenguas de Arnold 1:1, 1:2 a través de las cúspides de órbitas periódicas que existen en su interior (ver Algaba, García, Merino y Maestre (2001)). Los resultados obtenidos en dicho estudio vamos a compararlos con los encontrados en el trabajo de Broer, Simó y Tatjer (1998) donde se propone una aplicación, denominada

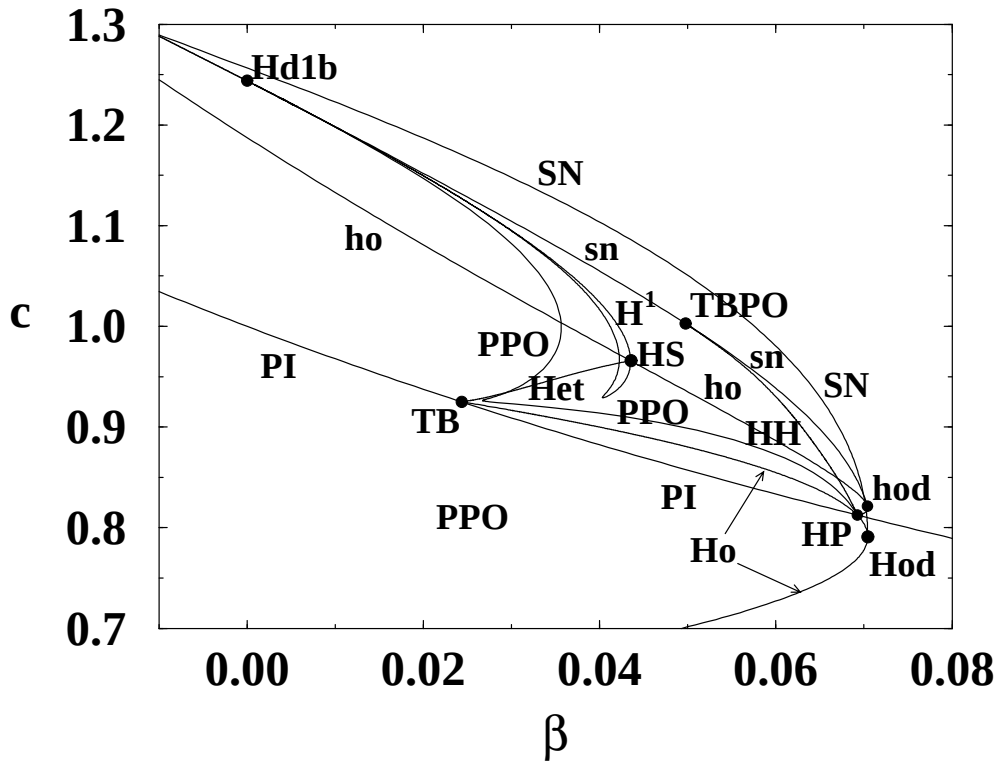


Figura 4.13: Conjunto parcial de bifurcaciones de las ecuaciones (1.1) con $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$.

fattened Arnold map, como modelo representativo de la aplicación retorno cerca de una bifurcación homoclina. Dicha aplicación, un difeomorfismo disipativo en el anillo, presenta periodicidad, cuasiperiodicidad y caos.

Para ello consideramos nuevamente el conjunto de bifurcaciones de las ecuaciones (1.1) para $\alpha = -1.6$, al otro lado del valor crítico $\alpha_c = -1.373125$ donde tiene lugar la degeneración lineal triple-cero del origen **TZ**, con objeto de que exista la curva de bifurcación a toros **HH**. Para este valor de α ya obtuvimos en el capítulo 2 un conjunto parcial de bifurcaciones (ver figura 2.17), si bien ahora lo hemos completado incluyendo en el conjunto de bifurcaciones de la figura 4.13 la curva de conexiones homoclinas del origen $\mathbf{H^1}$, donde el exponente indica ahora el tipo de resonancia al que va asociado la conexión homoclina (en este caso la resonancia 1:1).

Se observa en dicha figura que, a este lado del punto **TZ** ($\alpha < \alpha_c$), la curva de conexiones homoclinas del origen no está relacionada con la bifurcación de Takens-Bogdanov **TB**. En efecto, de dicho punto surge ahora una curva de conexiones heteroclinas de los equilibrios no triviales **Het**, que finaliza en un punto de bifurcación Hopf-Shil'nikov **HS** (ver Champneys y Rodríguez-Luis (1999)) situado sobre la curva de Hopf **ho**. Esto implica un cambio en la forma de la curva de conexiones homoclinas del origen, ya que ahora tiene forma de U. En efecto, para este valor del parámetro $\alpha = -1.6$ la curva de conexiones homoclinas de un pulso **H**, y la rama izquierda de la curva de conexiones homoclinas

de doble pulso $\mathbf{H}_-$ de la figura 4.9, que denotamos por $\mathbf{H}^{\mathbf{i}}_-$, están unidas, dando lugar a la nueva curva de conexiones homoclinas del origen $\mathbf{H^1}$. En el capítulo 5 estudiaremos detalladamente este proceso de reorganización que experimentan las curvas de conexiones homoclinas al pasar el parámetro por el valor correspondiente a la degeneración lineal triple–cero del origen **TZ**. No obstante sobre la rama derecha de esta curva sigue estando presente la degeneración **Hd1b** de la figura 4.8, donde tiene lugar la transición de silla a silla–foco del equilibrio en el origen cuando nos movemos, a lo largo de la misma, en sentido decreciente del parámetro c.

Del punto **Hd1b** surgen, la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas asimétricas **sn** (resonancia 1:1 para la curva a toros **HH**), y la curva **PPO** donde se experimenta una bifurcación pitchfork, de ruptura de simetría, de las órbitas periódicas simétricas. En la figura 4.14 representamos, además de la curva de bifurcación a toros **HH** que une los puntos **HP** y **TBPO**, las curvas que delimitan las lenguas de Arnold del tipo 1:2 (color verde) y 1:3 (color marrón), no incluidas en el conjunto de bifurcaciones de la figura anterior, que serán objeto de estudio. Nótese que estas zonas de resonancia ya existían, antes de que apareciese la curva de bifurcación a toros **HH**, como zonas de resonancia generadas por las conexiones homoclinas del tipo $\mathbf{H}_+$ y $\mathbf{H}_{++}$ respectivamente, y hemos comprobado que al ir disminuyendo el valor del parámetro α estas curvas intersecan con la curva **HH**. Es decir a diferencia de lo que ocurre con las resonancias débiles no existe una zona de resonancia fuerte que esté generada por la curva **HH** y que posteriormente, al ir variando el parámetro α se una con una zona de resonancia generada por la homoclina **H**. Esto está en concordancia con lo obtenido en el capítulo anterior, en relación a las resonancias fuertes, en el oscilador de tipo van der Pol-Duffing modificado que analizamos. Recordemos, según vimos en el capítulo 2, que para este valor del parámetro $\alpha = -1.6$ la resonancia 1:3 no cortaba a la curva de bifurcación a toros **HH**, pero sí lo hacían las restantes resonancias de la forma 1:p con $p \geq 4$ (ver figura 2.23).

Dado que en el rango de la ventana de la figura 4.13 la curva de conexiones homoclinas $\mathbf{H^1}$ es de tipo Shil'nikov, es decir $\delta < 1$, sabemos (ver Gaspard, Kapral y Nicolis (1984), Glendinning y Sparrow (1984), Glendinning (1984)) que la citada curva de conexiones homoclinas organiza una infinidad de curvas de bifurcación subsidiarias de codimensión uno (silla-nodo de órbitas periódicas simétricas y asimétricas que son las resonancias de la curva de conexiones homoclinas) y puntos de codimensión dos (cúspides de órbitas periódicas simétricas y asimétricas).

En la figura 4.15 se representa un conjunto parcial de bifurcaciones en un entorno del punto de retorno de la curva de conexiones homoclinas del origen (en color azul), en el que se muestran las primeras curvas de bifurcación silla-nodo tanto de las órbitas periódicas asimétricas (en color negro) como de las órbitas periódicas simétricas (en color rojo) relacionadas con ella. Se observa que hay dos tipos de curvas de bifurcación silla-nodo, las que constan de una única rama (indicadas con las etiquetas **2**, **4** y **6** en color negro y rojo) y las que se componen de tres ramas unidas por dos puntos de bifurcación cúspide de órbitas periódicas (indicadas con las etiquetas **1**, **3** y **5** en color rojo y negro). Notemos que para cada uno de los tipos de curva se cumple que las correspondientes a las órbitas periódicas simétricas se van alternando con las curvas correspondientes a las órbitas periódicas asimétricas. En dicha figura aparece también la curva de conexiones

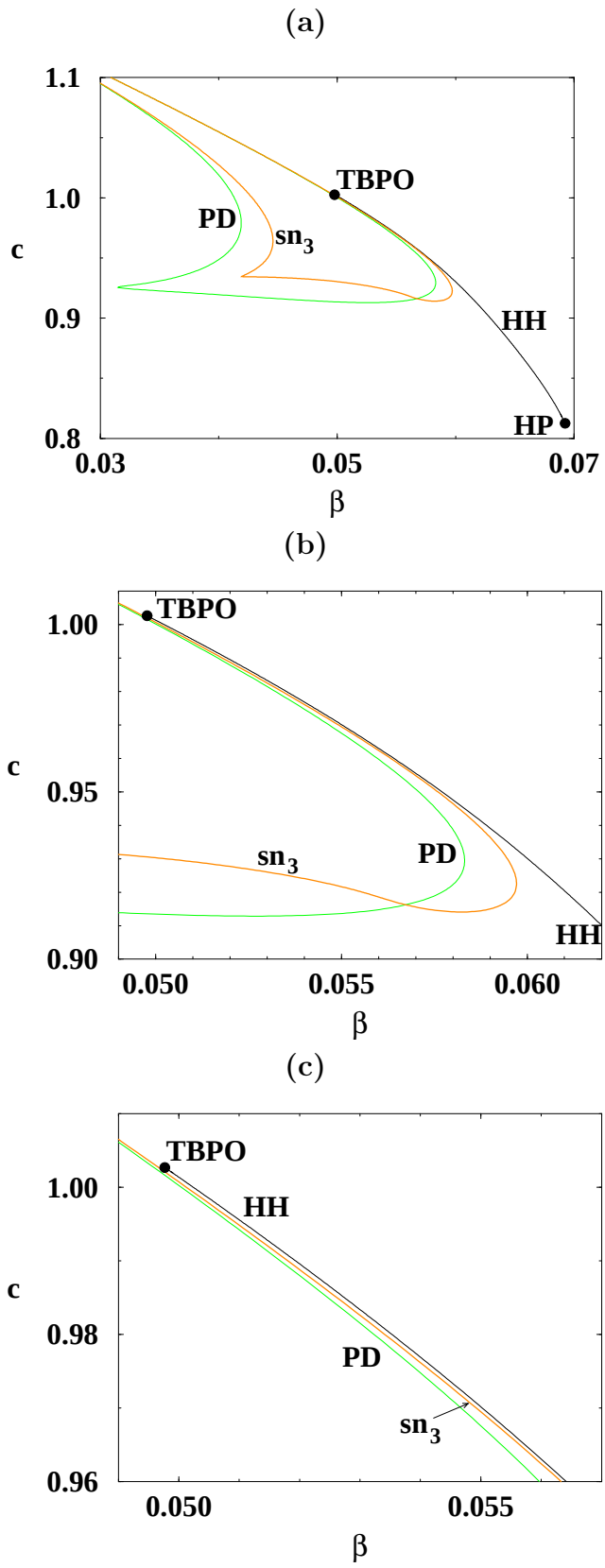


Figura 4.14: Conjunto parcial de bifurcaciones de las ecuaciones (1.1) con $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$: (a) Curva de bifurcación a toros **HH** y sillas-nodo de órbitas periódicas correspondientes a las lenguas de Arnold 1:2 (**PD** color verde) y 1:3 ($\mathbf{sn_3}$ color marrón). (b) Zoom de (a). (c) Zoom de (b).

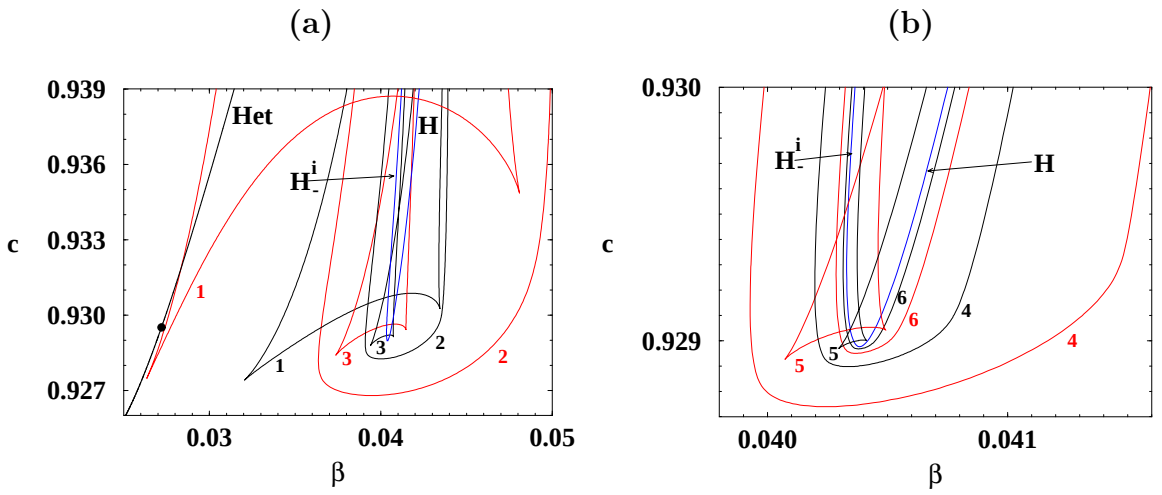


Figura 4.15: Para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$: (a) Conjunto parcial de bifurcaciones en un entorno de la conexión homoclina $\mathbf{H^1}$ ($\mathbf{H^i_-} \bigcup \mathbf{H}$). (b) Zoom de (a).

heteroclinas de los equilibrios no triviales **Het** y sobre ella el punto en el que se presenta la degeneración $\delta = 1$. Como consecuencia (ver Blázquez y Tuma (1996)), en un entorno de este punto existe una sucesión infinita de cúspides de curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas, de las cuales la cúspide izquierda de la curva **1** constituye el primer elemento de la sucesión (con la misma notación **1** podemos ver en la figura 4.22, la segunda cúspide de la sucesión anterior).

El diagrama de bifurcaciones de la figura 4.16(a), para $c = 0.929$, nos muestra que de la curva de bifurcación silla-nodo **SN** surgen dos órbitas periódicas simétricas, una de las cuales (la de mayor periodo) está relacionada con la conexión heteroclina **Het**. Las dos órbitas periódicas asimétricas que surgen de la curva de bifurcación silla-nodo **sn**, desaparecen en la curva de bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales **ho**, y en la curva de bifurcación pitchfork **PPO** que experimentan las órbitas periódicas simétricas. Nótese que en el citado diagrama hay dos bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas, denotadas como **1** y **1i** (**1**, **1i**), que corresponden respectivamente a la rama izquierda y la rama central (la que une las dos cúspides) de la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas asimétricas (simétricas) etiquetada como **1** (**1**) en la figura 4.15(a).

Para este mismo valor del parámetro c vemos en la figura 4.16(b) cómo el diagrama de bifurcación, de las órbitas periódicas simétricas (asimétricas), que surgen de las curvas de bifurcación **2** y **4** (**2** y **4**) en la figura 4.15, son curvas cerradas con forma de isla. Si bien esas órbitas periódicas simétricas (asimétricas), interaccionan con las que surgen de las ramas derecha e izquierda de la curva de bifurcación silla-nodo **3** (**3**), en el primer caso, y de la curva de bifurcación **5** (**5**) en el segundo. Un proceso similar, de creación y destrucción de islas de órbitas periódicas en otro oscilador electrónico con la propiedad de la $\mathbb{Z}_2$-simetría, ha sido analizado en Fernández-Sánchez, Freire y Rodríguez-Luis (1997).

Por contra las órbitas periódicas simétricas (asimétricas), que surgen de la curva de bifurcación silla-nodo denotada como **6** (**6**) en la figura 4.15(b), están organizadas por la

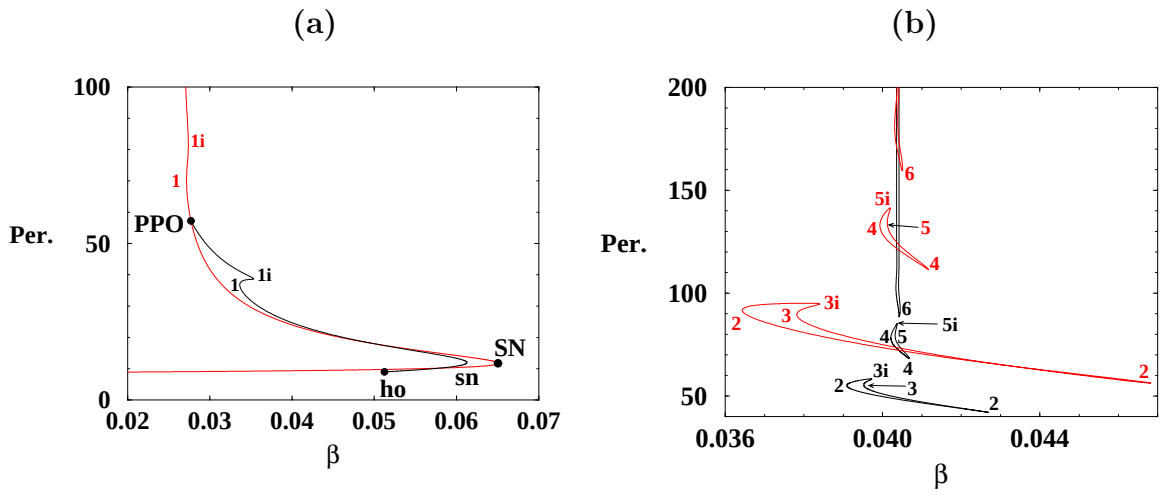


Figura 4.16: Para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$, $c = 0.929$, diagrama de bifurcaciones de las órbitas periódicas relacionadas con: (a) La conexión heteroclina **Het**. (b) La conexión homoclina $\mathbf{H^1}$.

conexión homoclina del origen. En la figura 4.17 representamos la proyección, en el plano xz, de una de las órbitas periódicas asimétricas que surgen de la curva **sn** y de la isla de menor periodo presentes en la figura 4.16. Siguiendo la notación utilizada para las conexiones homoclinas del origen, denotaremos estas órbitas asimétricas por $\mathbf{A}_+$, indicando con ello que su proyección en el plano xz rodea una vez al equilibrio $P^+(-x, -y, z)$ donde $x > 0, y > 0, z > 0$. Notemos como cada una de ellas, al aumentar el periodo, da una vuelta más alrededor del origen antes de cerrarse. Lo mismo sucede con las órbitas periódicas simétricas, relacionadas con $\mathbf{H^1}$, al aumentar el periodo. Recordemos que la rama derecha **H** de dicha conexión homoclina genera una órbita asimétrica del tipo $\mathbf{A}_+$ y una órbita simétrica que denotaremos $\mathbf{S}_{+-}$, ya que la proyección sobre el plano xz de la órbita periódica rodea una vez a cada equilibrio no trivial (ver Glendinning (1984)).

Al ir aumentando el valor del parámetro c cada una de las dos islas de órbitas periódicas, tanto simétricas como asimétricas, presentes en la figura 4.16(b) se va uniendo con las ramas de las órbitas periódicas, simétricas y asimétricas, organizadas por la conexión homoclina del origen. Esta unión ocurre, por ejemplo, para $c \approx 0.929003$ con la isla donde aparecen las órbitas periódicas asimétricas de mayor periodo $\mathbf{4}, \mathbf{5}$ y para $c \approx 0.9292035$ en el caso de la isla donde aparecen las órbitas periódicas asimétricas de menor periodo $\mathbf{2}, \mathbf{3}$, siguiendo un proceso análogo al que detallamos a continuación para las órbitas periódicas asimétricas que surgen de la resonancia 1:1, la curva **sn**.

Cuando fijamos $c = 0.9307$ en la figura 4.15(a) se observa, en la figura 4.18(a), que cortamos dos veces (etiquetas **1i** y **1d**) a la rama central de la curva **1**. El diagrama de las órbitas periódicas asimétricas que surgen de la resonancia 1:1 es similar al obtenido en el primer corte, para $c = 0.929$ (ver figura 4.16(a)), y en él están presentes las órbitas periódicas que surgen de la cúspide izquierda en la curva **1** (etiquetas **1** y **1i**). Las órbitas periódicas que surgen de la cúspide derecha en la curva **1** (etiquetas **1d** y **1**) están organizadas por la misma curva de conexiones homoclinas del origen que la de la figura 4.16(b).

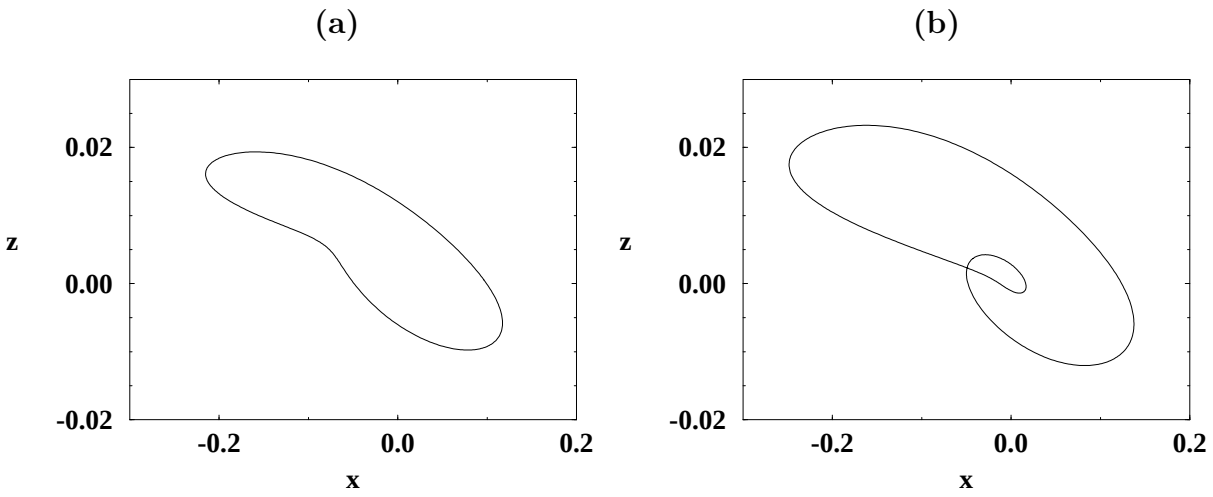


Figura 4.17: Para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$, $c = 0.929$, proyección sobre el plano xz de las órbitas periódicas asimétricas del tipo $\mathbf{A}_+$ de la figura 4.15(a) para: (a) $\beta \approx 0.035315$ en la curva **1**. (b) $\beta \approx 0.039726$ en la curva **3**.

En la figura 4.18(b) se observa que lo mismo sucede con las órbitas periódicas simétricas cuando $c = 0.937$.

Si ahora tomamos un valor de c, en la figura 4.15, por encima de la rama central que une las dos cúspides de la curva de bifurcación silla-nodo **1** se observa, en la figura 4.18(b), que la órbita periódica inestable de tipo silla que surge de la resonancia 1:1 desaparece en la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales **ho** y la órbita atractiva en la rama derecha, denotada por **H**, de la curva de conexiones homoclinas del origen $\mathbf{H^1}$. Por contra, la órbita periódica repulsiva que emerge de la curva de bifurcación pitchfork **PPO** está organizada por la rama izquierda $\mathbf{H^i_-}$, de la curva de conexiones homoclinas del origen. Nótese que las órbitas periódicas que surgen de la curva **sn** y de la rama de conexiones homoclinas **H** son del mismo tipo $\mathbf{A}_+$, si bien se diferencian en el número de vueltas que dan en torno al origen; como también lo son las órbitas periódicas que surgen de la curva **PPO** y de la rama de conexiones homoclinas $\mathbf{H^i_-}$, a saber del tipo $\mathbf{A}_{+-}$ (su proyección en el plano xz rodea una vez al equilibrio $P^+(-x,-y,z)$ y otra al equilibrio $P^-(x,y,-z)$).

En resumen, para que la órbita periódica atractiva (repulsiva) asimétrica que surge de la resonancia 1:1 (de la curva **PPO**), del tipo $\mathbf{A}_+$ (del tipo $\mathbf{A}_{+-}$), esté organizada por la rama de un pulso **H** (de doble pulso $\mathbf{H^i_-}$), de la curva de conexiones homoclinas del origen $\mathbf{H^1}$, es necesaria la existencia de una curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas asimétricas **1** con dos puntos de cúspide sobre ella.

Lo mismo ocurre, debido a la existencia de la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas **1** de la figura 4.15(a), con la órbita periódica silla que surge de la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódica **SN** (ver figura 4.19). En efecto, dicha órbita simétrica pasa de estar relacionada con la conexión heteroclina **Het** a relacionarse con la rama de un pulso **H** de la conexión homoclina del origen $\mathbf{H^1}$. Recordemos que la rama derecha **H** de dicha conexión homoclina genera órbitas simétricas del tipo $\mathbf{S}_{+-}$, al igual que las órbitas periódicas que surgen de la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas

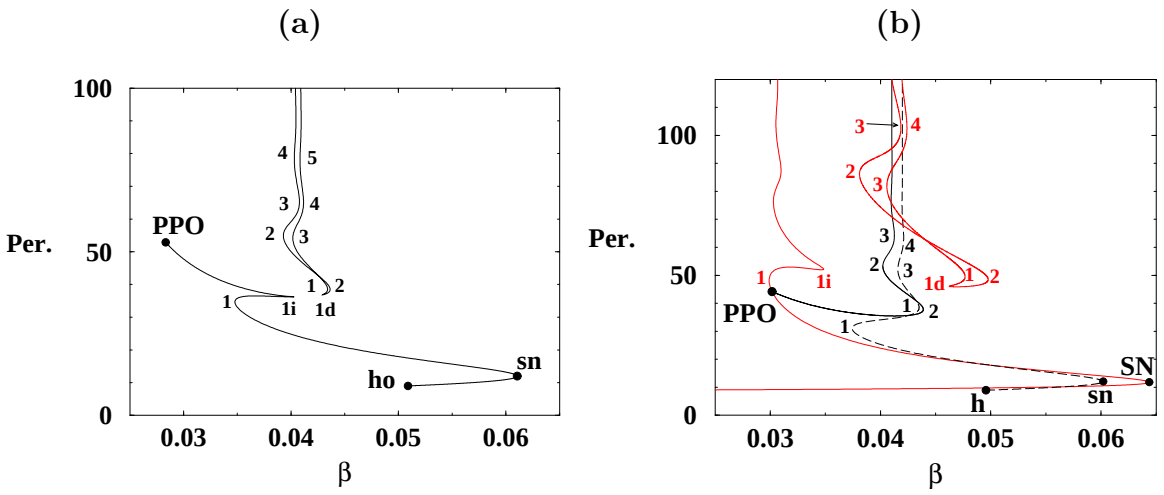


Figura 4.18: Para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$, diagrama de bifurcaciones de las órbitas periódicas: (a) Asimétricas cuando $c = 0.9307$. (b) Asimétricas y simétricas cuando $c = 0.937$.

periódicas **SN**. Por otro lado, las órbitas periódicas simétricas que nacen de la rama de doble pulso $\mathbf{H}^{\mathbf{i}}_{-}$, que son del tipo $\mathbf{S}_{+--+}$ (la proyección sobre el plano xz de la órbita periódica rodea dos veces a cada equilibrio no trivial), y las que surgen de la conexión heteroclina **Het** también están conectadas, lo cual también era de esperar. En efecto, la proyección sobre el plano xz de las órbitas periódicas simétricas que aparecen en el diagrama de bifurcaciones de la figura 4.19, en relación a la conexión heteroclina **Het** (representada con trazo continuo), cumple que al ir disminuyendo el periodo, va disminuyendo el número de vueltas (aproximadamente una vuelta por cada par de bifurcaciones silla-nodo consecutivas del diagrama) que la órbita periódica da en torno a cada equilibrio no trivial. En particular la órbita periódica que surge de la bifurcación silla-nodo de menor periodo en el citado diagrama, también es del tipo $\mathbf{S}_{+--+}$.

A continuación, y al objeto de comparar nuestros resultados con los obtenidos en el trabajo de Broer, Simó y Tatjer (1998) donde se lleva a cabo un estudio numérico de las cúspides interiores a las lenguas relacionadas con el difeomorfismo propuesto como modelo, clasificamos algunas de las cúspides de órbitas periódicas presentes en el interior de la zona de resonancia 1:1. En nuestro caso las dos cúspides presentes en la curva de bifurcación silla-nodo **1** (la que permite conectar la órbita periódica atractiva que surge de la curva **sn** con la rama **H** de la conexión homoclina del origen $\mathbf{H^1}$) son áreas del mismo tipo *croos-road*, según mostramos en la figura 4.20. En efecto, las curvas donde duplican periodo las órbitas que surgen de la rama derecha y de la rama central de la curva de bifurcación silla-nodo **1** son distintas y ambas son curvas donde también duplican periodo, según el valor del parámetro c, las órbitas periódicas asimétricas que surgen de la curva **PPO**. Notemos que una de estas dos curvas de duplicación de periodo es la curva **PD** (resonancia 1:2) que analizaremos a continuación. Las mismas características presenta la cúspide formada por la unión de la rama derecha y la rama central de la curva **1**, siendo ahora la curva de bifurcación silla-nodo **2** la que hace el papel de la curva **PPO**. En la

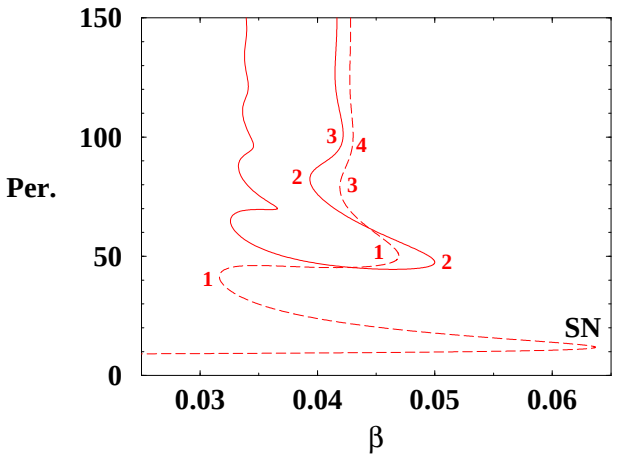


Figura 4.19: Para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$, $c = 0.945$, diagrama de bifurcaciones de las órbitas periódicas simétricas.

misma figura 4.20 se observa que las dos cúspides presentes en la curva **1**, correspondiente a órbitas periódicas simétricas, son del mismo tipo.

Al analizar las restantes cúspides de órbitas periódicas, presentes en las curvas de bifurcación silla-nodo **3**, **5**, ... (**3,5,...**), hemos observado que aparecen los cuatro tipos de áreas analizados en el trabajo Broer, Simó y Tatjer (1998), en relación a las cúspides interiores a la resonancia 1:1, a saber: *croos-road*, *saddle*, *spring* y *dovetail*.

En el citado trabajo se muestra cómo al mover un determinado parámetro de control se producen transiciones, a través de bifurcaciones de codimensión tres, que permiten pasar de un tipo de área a otro (ver figuras 32 a 34 del citado trabajo). En nuestro caso, para evidenciar estas transiciones en las curvas de bifurcación silla-nodo asimétricas relacionadas con la resonancia 1:1 hemos continuado en el parámetro α, aproximándonos al valor donde tiene lugar la degeneración triple-cero, las ramas derecha e izquierda de las curvas **1** y **2** de la figura 4.20. Como se observa en la figura 4.21(a), para $\alpha = -1.4015$, aparecen tres curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas. La curva **2** no ha variado sustancialmente y sigue estando relacionada con conexiones homoclinas del tipo $\mathbf{H}_-$, pero las ramas derecha e izquierda de la curva **1** forman parte ahora, de dos curvas diferentes de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas, si bien siguen relacionadas con la homoclina principal **H**. Lo mismo sucede con la curva **2** para $\alpha = -1.4013$ (ver figura 4.21(b)). Estas transiciones son causadas principalmente por bifurcaciones swallowtail y también por la colisión de dos puntos de cúspide de órbitas periódicas.

En la figura 4.22 presentamos un conjunto parcial de bifurcaciones en el interior de la resonancia delimitada por la curva **PD** de la figura 4.14. En este caso las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas etiquetadas como **2** y **3** tienen características similares a las curvas **1** y **2**, de la figura 4.15, relacionadas con la resonancia 1:1. También se observa la presencia de tres curvas de conexiones homoclinas del origen dibujadas en color azul. Una de ellas, dibujada con trozo discontinuo e interior a otra conexión homoclina, es la curva $\mathbf{H^1}$ que aparece en la figura 4.15. Las otras dos conexiones homoclinas, que tienen

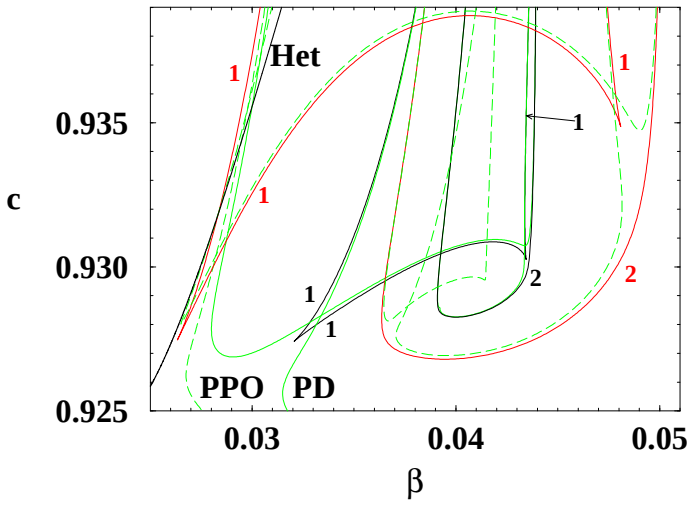


Figura 4.20: Conjunto parcial de bifurcaciones de las ecuaciones (1.1) con $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$. Las líneas continuas en color verde son las curvas donde duplican periodo las órbitas periódicas asimétricas que surgen de las curvas **PPO**, **1** y **2**. Las líneas discontinuas en color verde son las curvas donde se produce una bifurcación pitchfork (de ruptura de simetría) de las órbitas que surgen de las curvas **1** y **2**.

su punto de retorno en el plano de parámetros cerca de la cúspide derecha de las curvas **2** y **4**, son conexiones homoclinas de doble y triple pulso. En efecto, la conexión homoclina denotada por $\mathbf{H_1^2}$ en la figura 4.22, es la unión de la rama izquierda de las conexiones homoclinas denotadas por $\mathbf{H}_{-+}$ y $\mathbf{H}_{+}$ en la figura 4.9. La otra conexión homoclina, que denotaremos por $\mathbf{H_2^2}$, es la unión de la rama derecha de las homoclinas denotadas por $\mathbf{H}_{+-}$ y $\mathbf{H}_{+}$ en la citada figura. Notemos que, en el conjunto de bifurcaciones de la figura 4.22, hay una única curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas asimétricas **1**, que consta de dos ramas unidas por una cúspide. Posteriormente veremos cómo las órbitas periódicas que nacen de ella nos van a permitir relacionar las órbitas periódicas que surgen de las curvas de bifurcación silla-nodo **2** (primer elemento de la sucesión de curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas que existen en torno a la curva de conexiones homoclinas $\mathbf{H_1^2}$) y **4** (idem en torno a la curva de conexiones homoclinas $\mathbf{H_2^2}$). Como consecuencia de ello se conectan las órbitas periódicas de triple pulso que surgen de la rama izquierda de las conexiones homoclinas $\mathbf{H_1^2}$ y $\mathbf{H_2^2}$ (ver figura 4.24(b)).

En el rango de la ventana de la figura 4.22(a) las dos nuevas curvas de conexiones homoclinas presentes $\mathbf{H_1^2}$ y $\mathbf{H_2^2}$, dibujadas en color azul con trazo continuo, son de tipo Shil'nikov, es decir cumplen que $\delta < 1$. Sin embargo en la citada figura sólo hemos representado, por simplicidad, las dos primeras curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas relacionadas con estas conexiones homoclinas (**2**,**3**) y (**4**,**5**) respectivamente, a diferencia de la figura 4.15 donde representamos las seis primeras curvas de bifurcación silla-nodo asociadas con la conexión homoclina $\mathbf{H^1}$ de la citada figura.

Los diagramas de bifurcaciones de la figura 4.23 son similares a los obtenidos, para la resonancia 1:1, en la figura 4.18. En ellos se observa cómo la rama central de la curva de

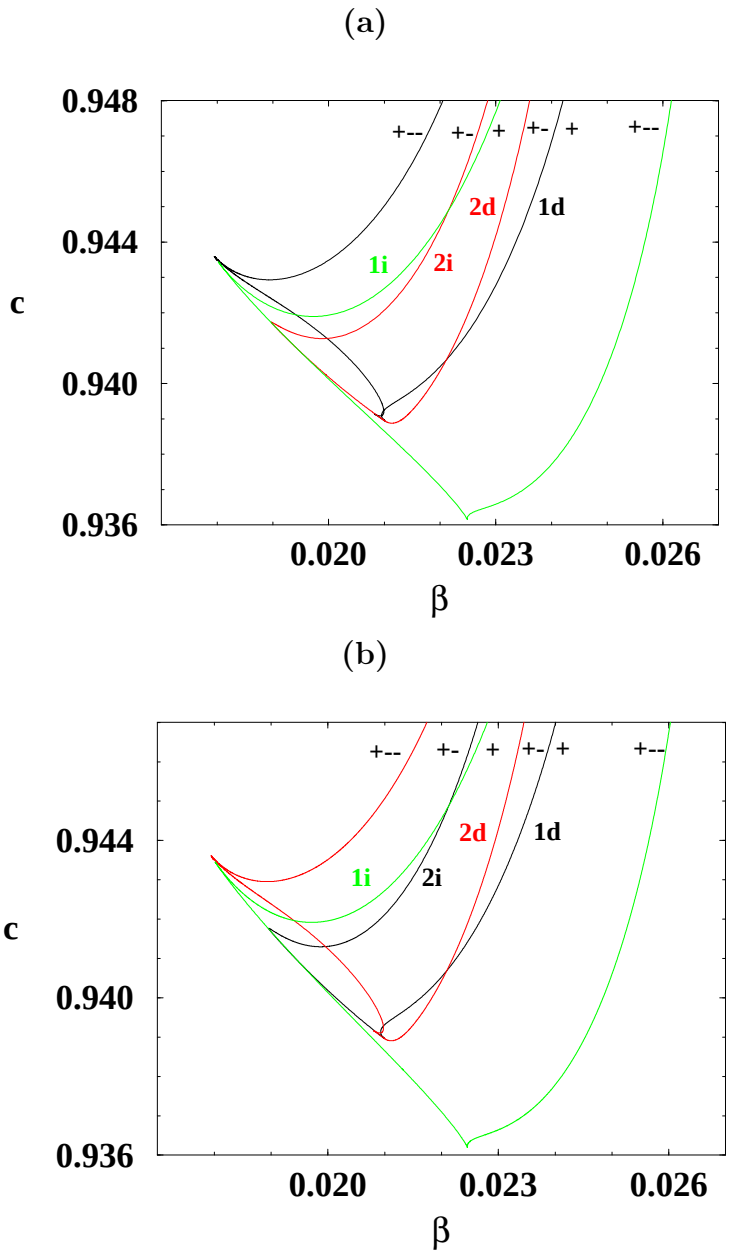


Figura 4.21: Para $a = -1$, $\gamma = 0.3$ conjunto parcial de bifurcaciones de las ecuaciones (1.1): (a) Cuando $\alpha = -1.4015$, donde se muestran las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas asimétricas denotadas como **1** y **2** en la figura 4.20. (b) Ídem cuando $\alpha = -1.4013$. Los signos indican el tipo de órbita periódica asimétrica $\mathbf{A}_{+}$,$\mathbf{A}_{+-}$,..., que surgen de cada una de ellas para $c > 0.948$.

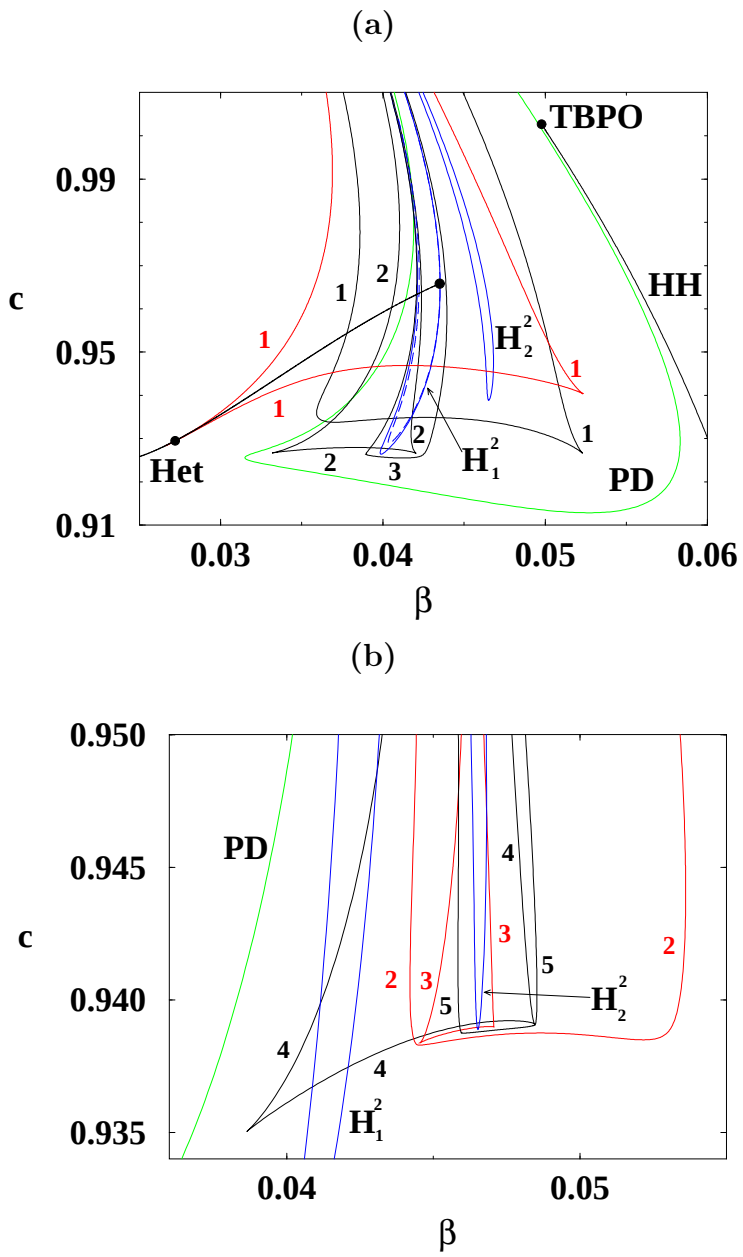


Figura 4.22: Para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$ conjunto parcial de bifurcaciones de las ecuaciones (1.1): (a) Con las curvas de bifurcación a toros **HH** (color negro), duplicación de periodo **PD** (color verde), sillas-nodo de órbitas periódicas asimétricas **1**, **2** y **3** (color negro), silla-nodo de órbitas periódicas simétricas **1** (color rojo), conexiones heteroclinas de los equilibrios no triviales **Het** (color negro) y conexiones homoclinas del origen $\mathbf{H^1}$ (en color azul con trazo discontinuo), $\mathbf{H_1^2}$ y $\mathbf{H_2^2}$ (en color azul con trazo continuo). (b) En un entorno de la conexión homoclina $\mathbf{H_2^2}$ con las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas asimétricas **4** y **5** (color negro) y silla-nodo de órbitas periódicas simétricas **2** y **3** (color rojo).

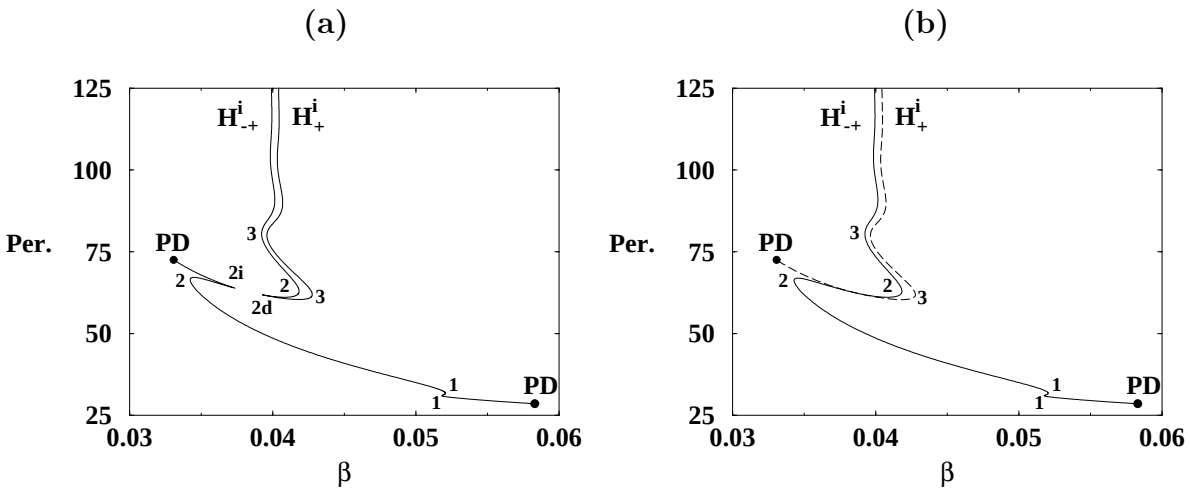


Figura 4.23: Para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$, diagrama de bifurcaciones de las órbitas periódicas asimétricas que surgen de la curva **PD** cuando: (a) $c = 0.9279$. (b) $c = 0.928$.

bifurcación silla-nodo **2** (la que une las dos cúspides) permite a las órbitas periódicas que surgen de la curva de duplicación de periodo **PD**, unidas para los valores situados por debajo del máximo del parámetro c en dicha rama, relacionarse con las dos ramas, $\mathbf{H^i_{-+}}$ y $\mathbf{H^i_{+}}$, de la curva de conexiones homoclinas del origen $\mathbf{H^2_1}$.

En concreto, la órbita periódica repulsiva que surge en la figura 4.23(b) del punto **PD** para $\beta \approx 0.0583$, está organizada por la rama $\mathbf{H^i_{-+}}$ de la conexión homoclina del origen $\mathbf{H^2_1}$. La rama derecha $\mathbf{H^i_{+}}$ de esta conexión homoclina, es la que organiza la órbita periódica repulsiva que surge del punto **PD** para $\beta \approx 0.03315$, representada con trazo discontinuo en la citada figura.

Al fijar $c = 0.9392$ vemos en la figura 4.24(a) cómo el diagrama de bifurcaciones, relativo a las órbitas periódicas que surgen del punto **PD** situado a la izquierda, no ha variado sustancialmente. Sin embargo, en el diagrama correspondiente a la órbita periódica que comienza en el punto **PD** situado a la derecha, aparecen ahora las órbitas periódicas relacionadas con la cúspide izquierda de la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas **4** de la figura 4.22. Al mismo tiempo las órbitas periódicas que surgen de las dos ramas que conforman la cúspide derecha de la curva **4**, están relacionadas con la homoclina del origen $\mathbf{H^2_1}$ presente en el conjunto de bifurcaciones de la citada figura.

Cuando tomamos $c = 0.94$ se observa en la figura 4.24(b) cómo las dos órbitas periódicas asimétricas repulsivas del tipo $\mathbf{A_{++}}$, que surgen de la zona de resonancia 1:2 (curva **PD**), están relacionadas cada una de ellas con la rama de doble pulso de las conexiones homoclinas del origen $\mathbf{H^2_1}$ y $\mathbf{H^2_2}$ más próximas a cada una de ellas, las cuales también generan órbitas del mismo tipo. Por otro lado las órbitas periódicas asimétricas que surgen de las ramas de triple pulso $\mathbf{H^i_{-+}}$ y $\mathbf{H^d_{+-}}$, de las conexiones homoclinas $\mathbf{H^2_1}$ y $\mathbf{H^2_2}$ (representadas en trazo continuo), también están relacionadas ya que son del tipo $\mathbf{A_{+-+}}$ y $\mathbf{A_{++-}}$ (la proyección en el plano xz de ambas órbitas rodea dos veces al equilibrio $P^+(-x,-y,z)$ y una al equilibrio $P^-(x,y,-z)$). Hemos comprobado que para los valores de $c > 0.94$, no cambian sustancialmente los diagramas de bifurcaciones de las órbitas

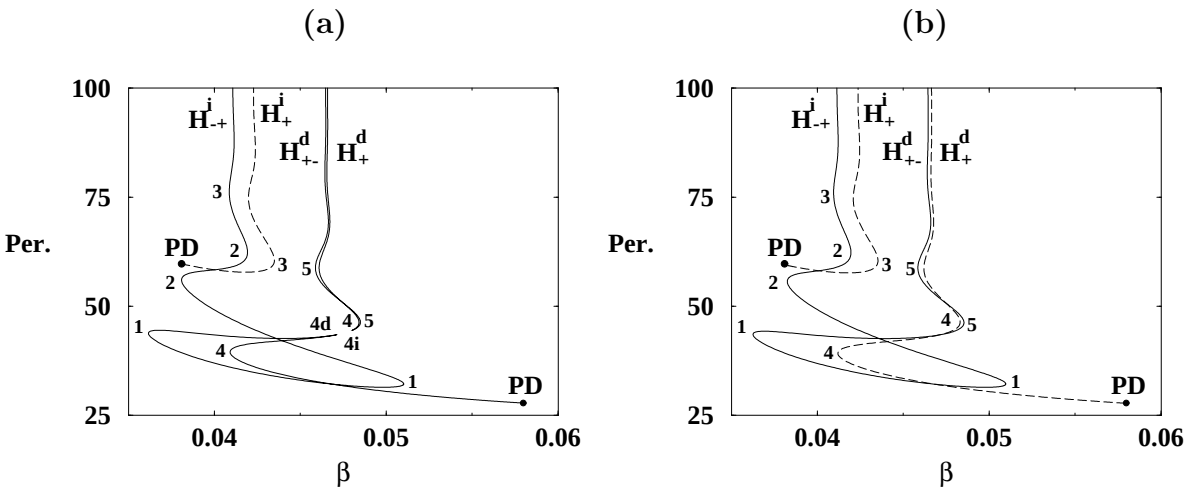


Figura 4.24: Para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$, diagrama de bifurcaciones de las órbitas periódicas asimétricas cuando: (a) $c = 0.9392$. (b) $c = 0.94$.

periódicas que surgen de la curva **PD**.

En resumen, para que las órbitas periódicas repulsivas de periodo doble que surgen de la resonancia 1:2, para un mismo valor del parámetro c, estén organizadas por las ramas de doble pulso $\mathbf{H^i_+}$ y $\mathbf{H^d_+}$, de las curvas de conexiones homoclinas del origen $\mathbf{H^2_1}$ y $\mathbf{H^2_2}$, es necesaria la existencia de tres curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas **2**, **4** y **1**. Las dos primeras curvas tienen dos puntos de bifurcación cúspide sobre cada una de ellas, y la última (que permite relacionar las órbitas periódicas que surgen de **2** y **4**) un único punto de tipo cúspide sobre ella.

Por otro lado, el diagrama de bifurcaciones de las órbitas periódicas simétricas que surgen de la curva de conexiones homoclinas $\mathbf{H^2_2}$ para $c = 0.945$, es similar al de las órbitas periódicas simétricas que surgían de la curva $\mathbf{H^1}$ (comparar las figuras 4.18(b) y 4.25(a)). En efecto, en la figura 4.25 podemos ver cómo la curva de órbitas periódicas silla-nodo **1** de la figura 4.22(a), permite a las órbitas periódicas simétricas que surgen de la curva de conexiones heteroclinas **Het** y de la rama de triple pulso $\mathbf{H^d_{+-}}$ estar conectadas.

Esto era de esperar, de acuerdo al proceso comentado en relación a las órbitas simétricas para la resonancia 1:1, ya que las órbitas periódicas que surgen de esta última conexión homoclina son del tipo $\mathbf{S}_{++---+}$ (la proyección sobre el plano xz de la órbita periódica rodea tres veces a cada equilibrio no trivial); al igual que ocurre con las órbitas periódicas que surgen de la bifurcación silla-nodo de menor periodo proveniente de la conexión heteroclina (representado con trazo rojo continuo).

Este cambio permite (ver figura 4.25(b)) que se relacionen las órbitas simétricas que surgen de las ramas de doble pulso, $\mathbf{H^i_-}$ y $\mathbf{H^d_+}$, de las curvas de homoclinas $\mathbf{H^1}$ y $\mathbf{H^2_2}$, respectivamente (diagrama representado en color azul con trazo discontinuo). En efecto, las órbitas simétricas que surgen de cada una de ellas rodean dos veces a cada equilibrio no trivial, ya que son del tipo $\mathbf{S}_{+--+}$ y $\mathbf{S}_{++--}$, respectivamente. Por contra no cambia el diagrama de bifurcaciones, representado en color rojo con trazo discontinuo, relativo a la órbitas periódicas que surgen de la curva **SN** (comparar con el de la figura 4.19).

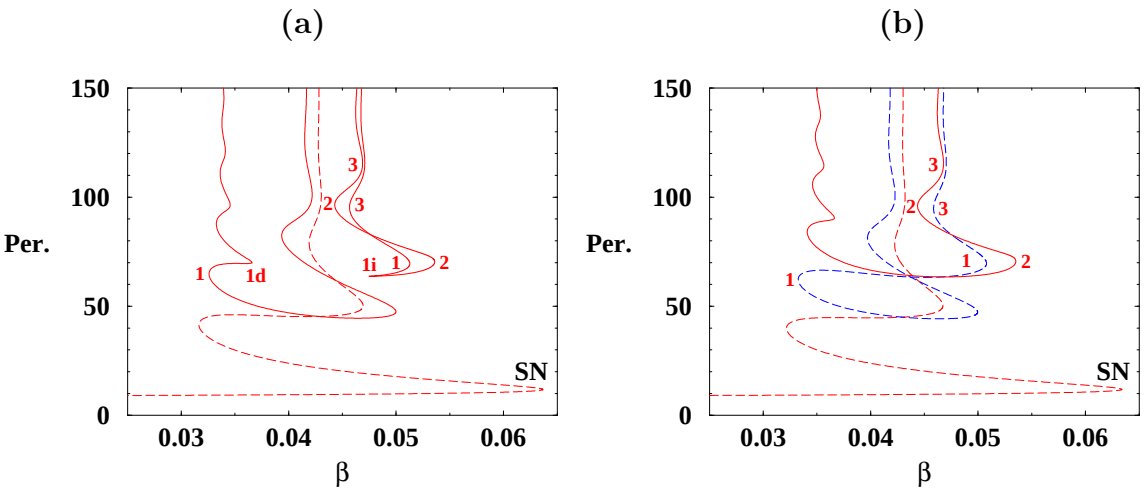


Figura 4.25: Para $a = -1$, $\alpha = -1.6$, $\gamma = 0.3$, diagrama de bifurcaciones de las órbitas periódicas simétricas cuando: (a) $c = 0.945$. (b) $c = 0.948$.

Finalmente hacemos notar que hemos comprobado, con relación al tipo de cúspides existentes en el interior de la zona de resonancia 1:2, que también aparecen los cuatro mismos tipos de áreas existentes en la zona de resonancia 1:1.

Capítulo 5

Notas sobre la Bifurcación Triple Cero

5.1. Introducción

Una cuestión importante para comprender la dinámica de los sistemas parametrizados de sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales es la determinación de centros organizadores, así como las bifurcaciones que éstos presentan (ver, por ejemplo, Guckenheimer y Holmes (1997); Nayfeh y Balachandran (1995) ; Wiggins (2003); Kuznetsov (2004) como referencias generales). La combinación de herramientas analíticas y numéricas es necesaria usualmente, debido a la existencia de un complejo escenario de bifurcaciones.

Por otro lado sabemos que muchos sistemas físicos están modelados por ecuaciones que presentan $\mathbb{Z}_2$-simetría. En estos sistemas, y la ecuación de Chua es un prototipo de ellos, la simetría juega un papel central que afecta directamente a la dinámica. Una primera consecuencia es que el origen es siempre un punto de equilibrio. Las bifurcaciones locales más simples que este punto de equilibrio puede experimentar son de codimensión uno: pitchfork (involucrando únicamente equilibrios) y Hopf (permitiendo comportamiento periódico).

Además también pueden aparecer bifurcaciones locales correspondientes a casos de codimensión dos: Takens-Bogdanov e interacción Hopf-pitchfork. Esta última ha sido estudiada, para la ecuación de Chua, en el capítulo dos de la presente memoria. Notemos que la búsqueda de bifurcaciones de codimensión alta es de interés ya que su presencia garantiza, genéricamente, la existencia de bifurcaciones de menor codimensión.

Nuestro objetivo en este capítulo es revelar algunos aspectos asociados con el comportamiento, desde el punto de vista de las bifurcaciones, que exhibe la ecuación de Chua cerca de la bifurcación triple-cero. Esta última es una degeneración lineal de codimensión tres, cuyo análisis está lejos de ser completado analíticamente, aun en las situaciones más simples y sin la simetría (ver Dumortier, Ibáñez y Kokubu (2001); Freire, Gamero, Rodríguez-Luis y Algaba (2002) y sus referencias). En este camino comenzamos obteniendo, en la segunda sección, la forma normal más simple para la degeneración lineal triple-cero.

En la tercera sección de este capítulo realizaremos el análisis de bifurcaciones de un despliegue triparamétrico, correspondiente a una degeneración lineal con un autovalor triple-cero, para sistemas que tienen la propiedad de la $\mathbb{Z}_2$-simetría. Llevaremos a cabo un estudio de las bifurcaciones locales de codimensión dos de los puntos de equilibrio,

Takens-Bogdanov y Hopf-cero, mostrando que éstas son no degeneradas.

Al objeto de aplicar los resultados obtenidos, nos interesamos en la sección cuarta por el estudio de un conjunto de sistemas generales y el análisis de un sistema concreto que actúa como paradigma de aquel conjunto. Ésta es la situación en el caso de algunos sistemas de control $\mathbb{Z}_2$-simétricos y la ecuación de Chua. Concretando, en el análisis que llevaremos a cabo en la cuarta sección de este capítulo, escribiremos la ecuación de Chua, mediante un cambio lineal, como una forma canónica de control para sistemas tridimensionales sujetos a una ley de retroalimentación no lineal, satisfaciendo algunas hipótesis que serán especificadas más adelante. En este sentido, podemos entender que la ecuación de Chua es un modelo de este tipo de sistemas de control.

Realizaremos el análisis de bifurcaciones para los sistemas de control canónicos tridimensionales y luego, la información obtenida será utilizada para explicar algunas bifurcaciones en la ecuación de Chua. En particular, varios fenómenos relacionados con movimientos periódicos y cuasiperiódicos pueden ser explicados analíticamente por nuestro estudio. Toda la información numérica que nosotros podamos obtener sobre la ecuación de Chua será una valiosa guía para orientar el estudio teórico de la degeneración triple-cero.

En la última sección de este capítulo, realizaremos un estudio numérico detallado de la ecuación de Chua cerca de las dos bifurcaciones de equilibrio, de codimensión tres, estudiadas analíticamente en la sección anterior (bifurcación de Takens-Bogdanov degenerada y degeneración triple-cero). Este estudio numérico nos permite dar una importante información acerca de otras bifurcaciones de codimensión dos y tres, de conexiones globales y de órbitas periódicas. En efecto, varias conexiones homoclinas de codimensión tres detectadas aquí, por lo que conocemos, no han sido estudiadas ni analítica ni numéricamente.

5.2. Análisis de la forma normal

Consideremos un sistema tridimensional, invariante al cambio de signo en las variables de estado $(x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, -z)$, que tiene un equilibrio en el origen con un autovalor cero triple de multiplicidad geométrica uno. Eligiendo un sistema de coordenadas adecuado, el sistema puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + f(x, y, z), \\ \dot{y} &= z + g(x, y, z), \\ \dot{z} &= h(x, y, z), \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde f, g, h son funciones que contienen términos no lineales de grado impar, es decir, cumpliendo $f(-x, -y, -z) = -f(x, y, z)$, $\quad g(-x, -y, -z) = -g(x, y, z)$, $h(-x, -y, -z) = -h(x, y, z)$.

Proposición 5.2.1 *Supongamos que el sistema (5.1) satisface que* $\dfrac{\partial^3 h}{\partial x^3}(0,0,0) \neq 0$. *Entonces, este sistema es* C^∞*-equivalente al sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= A_1 x^3 + A_2 x^2 y + A_3 x^2 z + A_4 x z^2 + A_5 y^3 + B_1 x^4 y + B_2 x^2 z^3 + O(|x,y,z|^7), \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde los coeficientes viene dados por

$$A_1 = \frac{1}{6}\, h_{xxx}, \qquad A_2 = \frac{1}{2}\,(g_{xxx} + h_{xxy}), \qquad A_3 = \frac{1}{2}\,(f_{xxx} + g_{xxy} + h_{xxz}),$$

$$\begin{aligned} A_4 = \frac{1}{h_{xxx}} \Big(& \frac{1}{2}\, f_{xxx}^2 + f_{xxx}\, g_{xxy} + \frac{1}{2}\, f_{xxx}\, h_{xxz} + \frac{1}{4}\, f_{xxx}\, h_{xyy} + \frac{1}{2}\, f_{xxz}\, h_{xxx} - \frac{1}{4}\, f_{xyy}\, h_{xxx} \\ & + \frac{1}{2}\, g_{xxy}^2 + \frac{1}{2}\, g_{xxy}\, h_{xxz} + \frac{1}{2}\, g_{xxy}\, h_{xyy} + \frac{1}{2}\, g_{xyz}\, h_{xxx} - \frac{1}{4}\, g_{yyy}\, h_{xxx} + \frac{1}{2}\, h_{xxx}\, h_{xzz} \\ & - \frac{1}{4}\, h_{xxx}\, h_{yyz} + \frac{1}{4}\, h_{xxz}\, h_{xyy} \Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_5 = -\frac{2}{3\, h_{xxx}} \Big(& \frac{1}{2}\, f_{xxx}\, g_{xxx} + \frac{2}{3}\, f_{xxx}\, h_{xxy} - \frac{1}{6}\, f_{xxy}\, h_{xxx} + \frac{7}{12}\, g_{xxx}\, g_{xxy} + \frac{1}{6}\, g_{xxx}\, h_{xxz} \\ & + \frac{1}{3}\, g_{xxx}\, h_{xyy} + \frac{1}{2}\, g_{xxy}\, h_{xxy} + \frac{1}{3}\, g_{xxz}\, h_{xxx} - \frac{1}{4}\, g_{xyy}\, h_{xxx} + \frac{1}{2}\, h_{xxx}\, h_{xyz} \\ & - \frac{1}{4}\, h_{xxx}\, h_{yyy} + \frac{1}{4}\, h_{xxy}\, h_{xyy} - \frac{1}{60}\, h_{xxxxx} \Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 = -\frac{1}{36\, h_{xxx}} \Big(& \frac{23}{2}\, f_{xxx}\, g_{xxx}^2 + \frac{47}{6}\, f_{xxx}\, g_{xxx}\, h_{xxy} + 15\, f_{xxx}\, g_{xxy}\, h_{xxx} + 17\, f_{xxx}\, h_{xxx}\, h_{xxz} \\ & + 2\, f_{xxx}\, h_{xxx}\, h_{xyy} - \frac{14}{3}\, f_{xxx}\, h_{xxy}^2 - \frac{71}{6}\, f_{xxy}\, g_{xxx}\, h_{xxx} - 17\, f_{xxz}\, h_{xxx}^2 \\ & + \frac{8}{3}\, f_{xxy}\, h_{xxx}\, h_{xxy} + 4\, f_{xyy}\, h_{xxx}^2 - \frac{3}{2}\, g_{xxxxx}\, h_{xxx} + \frac{23}{30}\, g_{xxx}\, h_{xxxxx} \\ & + \frac{23}{3}\, g_{xxx}^2\, g_{xxy} - \frac{23}{3}\, g_{xxx}^2\, h_{xxz} + \frac{23}{12}\, g_{xxx}^2\, h_{xyy} + \frac{67}{6}\, g_{xxx}\, g_{xxy}\, h_{xxy} \\ & + \frac{115}{6}\, g_{xxx}\, g_{xxz}\, h_{xxx} - 2\, g_{xxx}\, g_{xyy}\, h_{xxx} + 7\, g_{xxx}\, h_{xxx}\, h_{xyz} - \frac{26}{3}\, g_{xxx}\, h_{xxy}\, h_{xxz} \\ & + \frac{41}{12}\, g_{xxx}\, h_{xxy}\, h_{xyy} - \frac{15}{2}\, g_{xxy}^2\, h_{xxx} + 17\, g_{xxy}\, h_{xxx}\, h_{xxz} - \frac{43}{4}\, g_{xxy}\, h_{xxx}\, h_{xyy} \\ & + 4\, g_{xxy}\, h_{xxy}^2 - \frac{7}{3}\, g_{xxz}\, h_{xxx}\, h_{xxy} - 2\, g_{xyy}\, h_{xxx}\, h_{xxy} - 2\, g_{xyz}\, h_{xxx}^2 + 2\, g_{yyy}\, h_{xxx}^2 \\ & + \frac{13}{15}\, h_{xxxxx}\, h_{xxy} - \frac{3}{2}\, h_{xxxxy}\, h_{xxx} + 2\, h_{xxx}^2\, h_{yyz} - 2\, h_{xxx}\, h_{xxy}\, h_{xyz} \\ & + 4\, h_{xxx}\, h_{xxz}\, h_{xyy} - \frac{37}{8}\, h_{xxx}\, h_{xyy}^2 + 2\, h_{xxy}^2 h_{xyy} \Big), \end{aligned}$$

$$B_2 = -\frac{1}{825\, h_{xxx}^3}\, P(f^{n)}, g^{n)}, h^{n)}),$$

siendo P una función polinómica, que omitimos debido a su extensión, donde $n = 3, 5$ y las derivadas de las funciones f, g, h están calculadas en el origen.

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar al sistema (5.1) le realizamos una reparametrización del tiempo mediante el cambio

$$\frac{dt}{dT} = 1 + \beta_1\, x^2 + \beta_2\, y^2,$$

así como un cambio lineal en las variables de estado dado por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Notemos que la matriz de la transformación lineal anterior conmuta con la matriz de la linealización del sistema (5.1), de modo que la parte lineal se conserva.

A continuación, para computar la forma normal a quinto orden, utilizamos el algoritmo desarrollado en Algaba, Freire y Gamero (2001), obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= a_1x^3 + a_2x^2y + a_3x^2z + a_4xz^2 + a_5y^3 + a_6xy^2 + b_1x^4y + b_2x^2z^3 + b_3x^5 + b_4x^3y^2 + ..., \end{aligned} \tag{5.3}$$

siendo

$$a_1 = \frac{1}{6}\, h_{xxx} = A_1, \qquad a_2 = \frac{1}{2}\,(g_{xxx} + h_{xxy}) = A_2, \qquad a_3 = \frac{1}{2}\,(f_{xxx} + g_{xxy} + h_{xxz}) = A_3,$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\left(-f_{xxx}\,\delta + f_{xxz} - \frac{1}{2}\, f_{xyy} - g_{xxy}\,\delta + g_{xyz} - \frac{1}{2}\, g_{yyy} - h_{xxz}\,\delta + h_{xzz} - \frac{1}{2}\, h_{yyz}\right),$$

$$a_5 = \frac{1}{3}\left(g_{xxx}\,\delta - g_{xxz} + \frac{1}{2}\, g_{xyy} + h_{xxy}\,\delta - h_{xyz} + \frac{1}{2}\, h_{yyy} + 2\,\beta_1\right),$$

$$a_6 = f_{xxx} + g_{xxy} + h_{xxx}\,\delta + \frac{1}{2} h_{xyy}, \quad b_1 = P_1(f^{n)}, g^{n)}, h^{n)}), \quad b_2 = P_2(f^{n)}, g^{n)}, h^{n)}),$$

$$b_3 = a_1\beta_1 + P_3(f^{n)}, g^{n)}, h^{n)}), \quad b_4 = a_1^2\beta_2 + P_4(f^{n)}, g^{n)}, h^{n)}),$$

siendo P_1, P_2, P_3, P_4, funciones polinómicas, que omitimos debido a su extensión, con $n = 3, 5$. En consecuencia tomando

$$\delta = -\frac{1}{h_{xxx}}\left(f_{xxx} + g_{xxy} + \frac{1}{2}\, h_{xyy}\right),$$

conseguimos anular el coeficiente a_6, en el caso $h_{xxx} \neq 0$, correspondiente al término xy^2 de la forma normal (5.3). En la misma hipótesis también podemos anular los coeficientes b_3 y b_4, correspondientes a los términos x^5, x^3y^2, eligiendo

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{6\,h_{xxx}}\left(f_{xxy}\,h_{xxx} + g_{xxz}\,h_{xxx} - f_{xxx}\,h_{xxy} - \frac{1}{2}\,g_{xxx}\,g_{xxy} - g_{xxx}\,h_{xxz}\right.\\ &\quad \left. -\frac{1}{2}\,g_{xxx}\,h_{xyy} + \frac{1}{10}\,h_{xxxxx}\right), \qquad \beta_2 = \frac{36}{h_{xxx}^2}\,P(f^{n)}, g^{n)}, h^{n)}),\end{aligned}$$

donde P es una función polinómica, que omitimos debido a su extensión, con $n = 3, 5$. Sustituyendo estos valores de δ, β_1, β_2 en la expresión de a_4 y de a_5 se obtendrían los coeficientes A_4 y A_5 de la forma normal (5.2); de la misma forma se obtienen los coeficientes B_1 y B_2.

Notemos que, de acuerdo a la expresión del coeficiente a_5, es posible elegir β_1 para anular el término y^3 en la forma normal (5.2), sin embargo hemos preferido elegir β_1 para anular el término x^5 de la forma normal (5.3). ■

Proposición 5.2.2 *Supongamos que el sistema (5.1) satisface que* $\dfrac{\partial^3 h}{\partial x^3}(0,0,0) = 0$ *(es decir el coeficiente* A_1 *de la forma normal (5.2) es cero), y que se dan la condiciones de no degeneración* $A_2 \neq 0$, $A_4 \neq 3A_3$, *y* $A_4 \neq \dfrac{8}{5}A_3$. *Entonces, el sistema (5.1) es* C^∞*-equivalente al sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= A_2x^2y + A_3x^2z + A_4xy^2 + A_5xz^2 + B_1x^5 + B_2x^4z + B_3x^3y^2 + O(|x,y,z|^7),\end{aligned} \tag{5.4}$$

donde los coeficientes A_2 *y* A_3 *coinciden con los de (5.2),*

$$A_4 = f_{xxx} + g_{xxy} + \frac{1}{2}\,h_{xyy},$$

$$B_1 = \frac{1}{12}\left(f_{xxx}\,g_{xxx} - f_{xxx}\,h_{xxy} + \frac{1}{2}\,g_{xxx}\,g_{xxy} - g_{xxx}\,h_{xxz} + \frac{1}{10}\,h_{xxxxx}\right),$$

y omitimos los restantes coeficientes debido a su extensión; estando las derivadas de las funciones f, g, h *calculadas en el origen.*

Demostración:

En primer lugar al sistema (5.1) le realizamos una reparametrización del tiempo mediante el cambio

$$\frac{dt}{dT} = 1 + \beta_1\,x^2,$$

así como un cambio lineal en las variables de estado dado por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Notemos que la matriz de la transformación lineal anterior conmuta con la matriz de la linealización del sistema (5.1), de modo que la parte lineal se conserva.

A continuación, para computar la forma normal a quinto orden, utilizamos el algoritmo desarrollado en Algaba, Freire y Gamero (2001), obteniéndose

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= a_2x^2y + a_3x^2z + a_4xy^2 + a_5xz^2 + a_6y^3 + b_1x^5 + b_2x^4y + b_3x^4z + b_4x^3y^2 \\ &\quad + b_5x^3z^2 + b_6x^2z^3 + b_7xy^4 + ..., \end{aligned} \tag{5.5}$$

siendo

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(g_{xxx} + h_{xxy}\right) = A_2, \qquad a_3 = \frac{1}{2}\left(f_{xxx} + g_{xxy} + h_{xxz}\right) = A_3,$$

$$a_4 = f_{xxx} + g_{xxy} + \frac{1}{2}\,h_{xyy} = A_4,$$

$$a_5 = \frac{1}{2}\left(\left(f_{xxz} - \frac{1}{2}\,f_{xyy} + g_{xyz} - \frac{1}{2}\,g_{yyy} + h_{xzz} - \frac{1}{2}\,h_{yyz}\right) - a_3\,\delta\right),$$

$$a_6 = \frac{1}{3}\left(\left(-g_{xxz} + \frac{1}{2}\,g_{xyy} + \frac{1}{2}\,h_{yyy} - h_{xyz}\right) + 2\,a_2\,\delta + 2\,\beta_1\right),$$

$$b_1 = \frac{1}{12}\left(f_{xxx}\,g_{xxx} - f_{xxx}\,h_{xxy} + \frac{1}{2}\,g_{xxx}\,g_{xxy} - g_{xxx}\,h_{xxz} + \frac{1}{10}\,h_{xxxxx}\right) = B_1,$$

$$b_2 = -\frac{26}{9}\,a_2\,\beta_1 + \frac{4}{9}\,a_2^2\,\delta + P_1(f,g,h)$$

$$b_3 = P_2(f,g,h,\beta_1,\delta), \quad b_4 = P_3(f,g,h,\beta_1,\delta), \quad b_5 = P_4(f,g,h,\beta_1,\delta,\gamma_1k_1,\gamma_2k_2),$$

$$b_6 = P_5(f,g,h,\beta_1,\delta,k_2,-\gamma_1k_3), \quad b_7 = P_6(f,g,h,\beta_1,\delta,\gamma_3k_1,\gamma_4k_2),$$

siendo P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 funciones polinómicas, que omitimos debido a su extensión, con $n = 3, 5$ y donde

$$\gamma_1 = \frac{2}{3}\,\left(8a_3 - 5a_4\right), \quad \gamma_2 = \frac{3}{2}\,a_3 - \frac{1}{9}\,a_4, \quad \gamma_3 = -\frac{8}{3}\,\left(8a_3 - 5a_4\right), \quad \gamma_4 = 3a_3 - \frac{23}{9}a_4.$$

En consecuencia, tomando

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\,g_{xxz} - \frac{1}{4}\,g_{xyy} - \frac{1}{4}\,h_{yyy} + \frac{1}{2}\,h_{xyz} - a_2\,\delta,$$

conseguimos anular el coeficiente a_6, correspondiente al término y^3, de la forma normal (5.5). Por otro lado, una vez sustituido este valor de β_1 en el coeficiente b_2, si suponemos que $a_2 = A_2 \neq 0$, tomando

$$\delta = -\frac{1}{10\,a_2^2}\left(\frac{13\,a_2}{3}\,\left(-g_{xxz} + \frac{1}{2}\,g_{xyy} + \frac{1}{2}\,h_{yyy} - h_{xyz}\right) + 3 + P_1(f,g,h)\right),$$

podemos anular el coeficiente b_2, correspondiente al término x^4y, de la forma normal (5.5).

También es posible anular el coeficiente b_6, correspondiente al término x^2z^3 de la forma normal (5.5), si imponemos que $8a_3 - 5a_4 = 8A_3 - 5A_4 \neq 0$. Esto es debido a que esta expresión aparece, dentro del coeficiente b_6, multiplicando al parámetro k_3 asociado al elemento $z^2(x, y, z)^t$ del núcleo del operador homológico. De la misma forma podemos anular simultáneamente, utilizando los parámetros k_1 y k_2 asociados a los elementos de núcleo $(y^2 - 2xz)(x, y, z)^t$, $(y^2 - 2xz)(x, 0, -z)^t + (y^2 - 2xz)(y, z, 0)^t$, los coeficientes b_5 y b_7, correspondientes a los términos x^3z^2, xy^4 de la forma normal (5.5), si imponemos que se cumpla

$$\begin{vmatrix} -\frac{8}{3}(8a_3 - 5a_4) & 3a_3 - \frac{23}{9}a_4 \\ \frac{2}{3}(8a_3 - 5a_4) & \frac{3}{2}a_3 - \frac{1}{9}a_4 \end{vmatrix} = -2(3a_3 - a_4)(8a_3 - 5a_4) \neq 0.$$

■

5.3. Bifurcaciones locales de codimensión dos

Vamos a suponer inicialmente que $A_1 \neq 0$, en dicho caso consideramos el despliegue triparamétrico de la forma normal (5.2), truncado a primer orden en los parámetros y a orden cinco en las variables de estado, dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 z + A_1 x^3 + A_2 x^2 y + A_3 x^2 z + A_4 x z^2 + A_5 y^3 + B_1 x^4 y + B_2 x^2 z^3. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Hay varias bifurcaciones, organizadas en torno al valor crítico $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$. Para estudiar estas bifurcaciones, consideramos la matriz de la linealización en el origen

$$M(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

cuyo polinomio característico viene dado por $P_M(\lambda) = \lambda^3 - \varepsilon_3\lambda^2 - \varepsilon_2\lambda - \varepsilon_1 = 0$. Se pueden dar los siguientes casos de no hiperbolicidad, que hemos recogido en la siguiente proposición.

Proposición 5.3.1 *Si $A_1 \neq 0$, el equilibrio del origen para el sistema (5.6) es estable cuando $\varepsilon_2 < 0$, $\varepsilon_3 < 0$, $-\varepsilon_2\varepsilon_3 < \varepsilon_1 < 0$ y presenta las siguientes degeneraciones lineales:*

1. *Una bifurcación pitchfork o tridente (un autovalor cero simple y los dos restantes con parte real no nula) para los valores $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_3 \neq 0$.*

   Cuando $\varepsilon_1 A_1 < 0$, esta bifurcación hace aparecer dos equilibrios simétricos respecto del origen (equilibrios no triviales) en $\left(\pm\sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{A_1}}, 0, 0\right)$.

2. *Una bifurcación de Hopf (dos autovalores imaginarios puros y un tercero no nulo) del origen en la superficie* $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2\varepsilon_3$, $\varepsilon_3 \neq 0$, $\varepsilon_2 < 0$*; y de los equilibrios no triviales en la superficie* $2\,\varepsilon_1 - \left(\varepsilon_2 - \dfrac{A_2}{A_1}\,\varepsilon_1 + \dfrac{B_1}{A_1^2}\,\varepsilon_1^2\right)\left(\varepsilon_3 - \dfrac{A_3}{A_1}\,\varepsilon_1\right) = 0$, $\varepsilon_3 \neq \dfrac{A_3}{A_1}\,\varepsilon_1$, $A_1^2\varepsilon_2 - A_1A_2\varepsilon_1 + B_1\varepsilon_1^2 < 0$.

3. *Una bifurcación de Takens-Bogdanov (un autovalor cero doble y un tercero no nulo) para* $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 \neq 0$.

4. *Una bifurcación Hopf-pitchfork (dos autovalores imaginarios puros y el tercero nulo) para* $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_2 < 0$.

5. *Una bifurcación triple-cero (correspondiente a un autovalor cero triple) para* $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$.

En las subsecciones siguientes analizaremos las degeneraciones lineales de codimensión dos Takens-Bogdanov y Hopf-pitchfork.

5.3.1. Bifurcación de Takens-Bogdanov

Suponemos ahora que, en términos de los coeficientes del polinomio característico $P_M(\lambda)$, se cumple que $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ y $p_1 \neq 0$. En dicho caso el equilibrio trivial del sistema (5.6) tiene un doble autovalor cero y un tercer autovalor no nulo. Para estudiar esta degeneración lineal de codimensión dos, tomamos $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ como parámetros de bifurcación y fijamos $\varepsilon_3 \neq 0$. Vamos a considerar el sistema (5.6) truncado a tercer orden.

A continuación suspendemos el sistema, considerando $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ como nuevas variables de estado, añadiendo las ecuaciones $\dot{\varepsilon_1} = 0$, $\dot{\varepsilon_2} = 0$. En este caso el sistema suspendido podemos escribirlo

$$\dot{u} = A\,u + \Psi(u)\,b,$$

donde

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\Psi(u) = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + A_1 x^3 + A_2 x^2 y + A_3 x^2 z + A_4 x z^2 + A_5 y^3.$$

Si denotamos por

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varepsilon_3} & -\frac{1}{\varepsilon_3^2} & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_3^3} \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon_3} & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_3^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

el cambio lineal de variables $u = Pv$ nos permite escribir el sistema suspendido en la forma

$$\dot{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} v + \Psi(Pv) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

La variedad de centro para este último sistema la podemos escribir

$$y_1 = h(x_1, x_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = a(\varepsilon_1, \varepsilon_2)x_1 + b(\varepsilon_1, \varepsilon_2)x_2 + O(|x_1, x_2|^3),$$

y el sistema reducido sobre la variedad de centro es

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi(Pv) \end{pmatrix}, \\ \dot{\varepsilon}_1 = 0, \\ \dot{\varepsilon}_2 = 0. \end{array}$$

Considerando, para los coeficientes de y_1, los siguientes desarrollos

$$a(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = a_{00} + a_{10}\varepsilon_1 + a_{01}\varepsilon_2 + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|^2), \quad b(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = b_{00} + b_{10}\varepsilon_1 + b_{01}\varepsilon_2 + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|^2),$$

e imponiendo que la derivada $\dot{y_1}$, coincida con la última ecuación del sistema suspendido, $\dot{y_1} = \varepsilon_3(y_1 + \Psi(Pv))$, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 a_{00} &= 0, \\ -\varepsilon_3^3 + \varepsilon_3 a_{00} + \varepsilon_3^4 a_{10} - a_{00}b_{00} + \varepsilon_3^2 b_{00} &= 0, \\ \varepsilon_3^2 a_{00} - \varepsilon_3 a_{00} b_{00} + \varepsilon_3^4 a_{01} &= 0, \\ \varepsilon_3 b_{00} &= 0, \\ -\varepsilon_3^2 - \varepsilon_3^3 a_{10} - b_{00}^2 + 2\varepsilon_3 b_{00} + \varepsilon_3^4 b_{10} &= 0, \\ -\varepsilon_3^3 - \varepsilon_3^3 a_{01} - \varepsilon_3 b_{00}^2 + 2\varepsilon_3^2 b_{00} + \varepsilon_3^4 b_{01} &= 0, \end{aligned}$$

cuya resolución nos da la aproximación a la variedad de centro

$$y_1 = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|^2)\right) x_1 + \left(\frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_3^2} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|^2)\right) x_2 + O(|x_1, x_2|^3).$$

A partir de ella obtenemos el sistema reducido a tercer orden

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \left(-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|^2)\right) x_1 + \left(-\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3^2} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|^2)\right) x_2 \\
&\quad + \left(-\frac{A_1}{\varepsilon_3^3} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|)\right) x_1^3 + \left(-\frac{3A_1 + \varepsilon_3 A_2}{\varepsilon_3^4} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|)\right) x_1^2 x_2 \\
&\quad + \left(-\frac{3A_1 + 2\varepsilon_3 A_2}{\varepsilon_3^5} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|)\right) x_1 x_2^2 + \left(-\frac{A_1 + \varepsilon_3 A_2 + \varepsilon_3^3 A_5}{\varepsilon_3^6} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|)\right) x_2^3.
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando el algoritmo desarrollado en Gamero, Freire y Ponce (1991), obtenemos la forma normal estándar

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \left(-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|^2)\right) x_1 + \left(-\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3^2} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|^2)\right) x_2 \\
&\quad + \left(-\frac{A_1}{\varepsilon_3^3} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|)\right) x_1^3 + \left(-\frac{3A_1 + \varepsilon_3 A_2}{\varepsilon_3^4} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|)\right) x_1^2 x_2.
\end{aligned}$$

En consecuencia, dado que $A_1 \neq 0$, se tiene que el coeficiente de x_1^3 no se anula nunca. Si $A_2 = 0$, o bien siendo $A_2 \neq 0$ es $\varepsilon_3 \neq -\dfrac{3A_1}{A_2}$, tampoco se anula el coeficiente de $x_1^2 x_2$, y como consecuencia la bifurcación de Takens-Bogdanov es no degenerada. Si $A_2 \neq 0$ una degeneración no lineal de la bifurcación de Takens-Bogdanov, de codimensión tres, ocurre cuando se anula el coeficiente de $x_1^2 x_2$; a saber

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = -\frac{3A_1}{A_2} \neq 0.$$

En el caso no degenerado, haciendo el escalado

$$X = \alpha x_1, \quad Y = \beta x_2, \quad T = \frac{\alpha}{\beta} t,$$

donde

$$\alpha = \sqrt{\frac{(3A_1 + \varepsilon_3 A_2)^2}{|\varepsilon_3^5 A_1|}}, \quad \beta = (3A_1 + \varepsilon_3 A_2)\sqrt{\frac{(3A_1 + \varepsilon_3 A_2)^2}{|\varepsilon_3^7 A_1^3|}},$$

el sistema adopta la forma

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= Y, \\
\dot{Y} &= \mu_1 X + \mu_2 Y + \operatorname{sgn}(a_3) X^3 - X^2 Y,
\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}\mu_1 &= -\frac{\varepsilon_1(3A_1+\varepsilon_3A_2)^2}{\varepsilon_3^3A_1^2}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^2),\ \mu_2=-\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2\varepsilon_3)(3A_1+\varepsilon_3A_2)}{|\varepsilon_3^3A_1|}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^2),\\ a_3 &= -\frac{A_1}{\varepsilon_3^3}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\varepsilon_3 \neq -\dfrac{3A_1}{A_2}$ la bifurcación de Takens-Bogdanov no degenerada, es de tipo heteroclino cuando $\varepsilon_3A_1<0$, mientras que si $\varepsilon_3A_1>0$ es de tipo homoclino.

Como es conocido hay varias curvas de bifurcación presentes en el plano de parámetros $\mu_1-\mu_2$ del sistema anterior (ver Guckenheimer y Holmes (1997); Chow, Li y Wang (1994)):

- En el caso heteroclino $\varepsilon_3A_1<0 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(a_3)=+1$:
  - Una bifurcación pitchfork del origen para $\mu_1=0$, $\mu_2\neq 0$. Dos nuevos equilibrios $(\pm\sqrt{-\mu_1},0)$, aparecen cuando $\mu_1<0$.
  - Una bifurcación de Hopf del equilibrio en el origen para $\mu_2=0$, $\mu_1<0$. Esta bifurcación de Hopf es supercrítica si $\varepsilon_3<0$ y subcrítica si $\varepsilon_3>0$.
  - Una curva de conexiones heteroclinas de los equilibrios no triviales para $\mu_2=-\dfrac{1}{5}\,\mu_1+O(\mu_1^{3/2}),\quad \mu_1<0$. En el plano X-Y las conexiones heteroclinas son atractivas. Como el tercer autovalor, el cual determina el comportamiento fuera de la variedad de centro es ε_3, concluimos que las conexiones heteroclinas son repulsivas si $\varepsilon_3>0$ y completamente atractivas si $\varepsilon_3<0$.
- En el caso homoclino $\varepsilon_3A_1>0 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(a_3)=-1$:
  - Una bifurcación pitchfork del origen para $\mu_1=0$. Dos nuevos equilibrios $(\pm\sqrt{\mu_1},0)$, aparecen cuando $\mu_1>0$.
  - Una bifurcación de Hopf del equilibrio en el origen para $\mu_2=0$, $\mu_1<0$. Esta bifurcación de Hopf es supercrítica si $\varepsilon_3<0$ y subcrítica si $\varepsilon_3>0$.
  - Una bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales para $\mu_2=\mu_1+O(\mu_1^2)$, $\mu_1>0$. Esta bifurcación de Hopf es supercrítica si $\varepsilon_3<0$ y subcrítica si $\varepsilon_3>0$.
  - Una curva de conexiones homoclinas del origen para $\mu_2=\dfrac{4}{5}\,\mu_1+O(\mu_1^{3/2})$, $\mu_1>0$. Las conexiones homoclinas son repulsivas si $\varepsilon_3>0$ y completamente atractivas si $\varepsilon_3<0$.
  - Una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas para $\mu_2=c\mu_1+O(\mu_1^{3/2})$, $\mu_1>0, c\approx 0.752$.

Trasladando la información anterior a la familia triparamétrica (5.6) se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 5.3.2 *Consideremos el sistema (5.6) con* $A_1 \neq 0, \quad 3A_1 + A_2\,\varepsilon_3 \neq 0$. *Entonces, para los valores críticos* $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, *tenemos una bifurcación de Takens-Bogdanov no degenerada. La singularidad es de tipo silla cuando* $\varepsilon_3 A_1 < 0$ *y de tipo foco si* $\varepsilon_3 A_1 > 0$, *y de ella emergen las siguientes curvas de bifurcación:*

- *En el caso heteroclino* ($\varepsilon_3 A_1 < 0$)*:*
  - *Una bifurcación pitchfork del origen para* $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_3 \neq 0$. *Dos nuevos equilibrios* $\left(\pm\sqrt{-\dfrac{\varepsilon_1}{A_1}}, 0, 0\right)$, *aparecen cuando* $\varepsilon_1 A_1 < 0$.
  - *Una bifurcación de Hopf del equilibrio en el origen para* $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2\varepsilon_3$, $\varepsilon_3 \neq 0$, $\varepsilon_2 < 0$. *Esta bifurcación de Hopf es supercrítica si* $\varepsilon_3 < 0$ *y subcrítica si* $\varepsilon_3 > 0$.
  - *Una curva de conexiones heteroclinas de los equilibrios no triviales para* $\varepsilon_2 = -\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{2}{\varepsilon_3} - \dfrac{A_2}{A_1}\right)\varepsilon_1 + O(\varepsilon_1^{3/2}), \quad \varepsilon_1\varepsilon_3 > 0$. *Las conexiones heteroclinas son repulsivas si* $\varepsilon_3 > 0$ *y atractivas si* $\varepsilon_3 < 0$.

- *En el caso homoclino* ($\varepsilon_3 A_1 > 0$)*:*
  - *Una bifurcación pitchfork del origen para* $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_3 \neq 0$. *Dos nuevos equilibrios* $\left(\pm\sqrt{-\dfrac{\varepsilon_1}{A_1}}, 0, 0\right)$, *aparecen cuando* $\varepsilon_1 A_1 < 0$.
  - *Una bifurcación de Hopf del equilibrio en el origen para* $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2\varepsilon_3$, $\varepsilon_3 \neq 0$, $\varepsilon_2 < 0$. *Esta bifurcación de Hopf es supercrítica si* $\varepsilon_3 < 0$ *y subcrítica si* $\varepsilon_3 > 0$.
  - *Una bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales para los valores* $\varepsilon_2 = \left(\dfrac{2}{\varepsilon_3} + \dfrac{A_2}{A_1}\right)\varepsilon_1 + O(\varepsilon_1^2), \quad \varepsilon_3 \neq 0$, $\varepsilon_1\varepsilon_3 < 0$. *Esta bifurcación de Hopf es supercrítica si* $\varepsilon_3 < 0$ *y subcrítica si* $\varepsilon_3 > 0$.
  - *Una curva de conexiones homoclinas del origen para* $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{7}{\varepsilon_3} + \dfrac{4A_2}{A_1}\right)\varepsilon_1 + O(\varepsilon_1^{3/2}), \quad \varepsilon_1\varepsilon_3 < 0$. *Las conexiones homoclinas son repulsivas si* $\varepsilon_3 > 0$ *y atractivas si* $\varepsilon_3 < 0$.
  - *Una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas para los valores* $\varepsilon_2 = \left(\dfrac{3c-1}{\varepsilon_3} + \dfrac{cA_2}{A_1}\right)\varepsilon_1 + O(\varepsilon_1^{3/2}), \quad \varepsilon_1\varepsilon_3 < 0$, $c \approx 0.752$.

Nota. Las bifurcaciones pitchfork del origen y Hopf del origen aquí obtenidas están en completa concordancia con las expresiones que aparecen en la proposición 5.3.1. Con respecto a la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales $(x_\pm, 0, 0)$, hemos obtenido una aproximación (comparar con la que aparece en la proposición 5.3.1 sabiendo que $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll \varepsilon_3$).

En el caso de ser $A_2 \neq 0$, $\varepsilon_3 = -\dfrac{3A_1}{A_2}$, para saber si la degeneración no lineal es de codimensión tres, debemos considerar el sistema (5.6) truncado a orden cinco. Repitiendo los cálculos anteriores con la función

$$\Psi(u) = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + A_1 x^3 + A_2 x^2 y + A_3 x^2 z + A_4 x z^2 + A_5 y^3 + B_1 x^4 y + B_2 x^2 z^3,$$

se obtiene como ecuación de la variedad de centro a orden tres

$$\begin{aligned} y_1 \;=\; & \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} - \frac{3\,\varepsilon_1^2 + 2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varepsilon_3^4} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^3)\right) x_1 + \left(\frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_3^2}\right. \\ & \left. - \frac{7\,\varepsilon_1^2 + 8\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + 2\,\varepsilon_3^2\,\varepsilon_2^2}{\varepsilon_3^5} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^3)\right) x_2 + \left(\frac{A_1}{\varepsilon_3^3} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|)\right) x_1^3 \\ & + \left(\frac{6A_1 + \varepsilon_3 A_2}{\varepsilon_3^4} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|)\right) x_1^2 x_2 + \left(\frac{15A_1 + 4\varepsilon_3 A_2}{\varepsilon_3^5} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|)\right) x_1 x_2^2 \\ & + \left(\frac{16A_1 + 5\varepsilon_3 A_2 + \varepsilon_3^3 A_5}{\varepsilon_3^6} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|)\right) x_2^3 + O(|x_1,x_2|^5), \end{aligned}$$

y la forma normal del sistema reducido a orden cinco viene dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 \;=\; & x_2, \\ \dot{x}_2 \;=\; & \left(-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} + \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varepsilon_3^4} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^3)\right) x_1 + \left(-\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3^2} + \frac{2\,\varepsilon_1^2 + 3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \varepsilon_3^2\,\varepsilon_2^2}{\varepsilon_3^5}\right. \\ & \left. + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^3)\right) x_2 + \left(-\frac{A_1}{\varepsilon_3^3} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|\right) x_1^3 + \left(-\frac{3A_1 + \varepsilon_3 A_2}{\varepsilon_3^4} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|)\right) x_1^2 x_2 \\ & + \left(\frac{A_1(3A_1 + \varepsilon_3 A_2 + \varepsilon_3^2 A_3)}{\varepsilon_3^8} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|)\right) x_1^5 \\ & + \left(\frac{24A_1^2 + 13\varepsilon_3 A_1 A_2 + 8\varepsilon_3^2 A_1 A_3 + \varepsilon_3^2 A_2^2 + \varepsilon_3^3 A_2 A_3 - \varepsilon_3^4 B_1}{\varepsilon_3^9} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|)\right) x_1^4 x_2. \end{aligned}$$

Notemos que al ser $A_1, A_2 \neq 0$, si hacemos $\varepsilon_3 = -\dfrac{3A_1}{A_2}$, el coeficiente de x_1^5 queda $\dfrac{1}{729}\dfrac{A_2^6 A_3}{A_1^5}$, y el coeficiente de $x_1^4 x_2$ viene dado por

$$\frac{1}{6561}\frac{(27A_1^2 B_1 - 15A_1 A_2^2 A_3 + 2A_2^4)A_2^5}{A_1^7}.$$

Por tanto, si se cumple que $A_3 \neq 0$, $27A_1^2 B_1 - 15A_1 A_2^2 A_3 + 2A_2^4 \neq 0$, no se anulan los coeficientes de los términos de grado cinco y, como consecuencia, no se presenta una degeneración de mayor orden en la citada bifurcación de Takens-Bogdanov.

De todas formas, dado que el coeficiente de x^3 es distinto de cero, es posible anular el término x^5 en la forma normal. En efecto, si en la forma normal del sistema reducido hacemos la reparametrización del tiempo $\dfrac{dt}{dT} = 1 + A\,x_1^2$, donde

$$A = \left(\frac{3A_1 + \varepsilon_3 A_2 + \varepsilon_3^2 A_3}{\varepsilon_3^5} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|\right)$$

calculando la forma normal, a orden cinco, obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2,\\
\dot{x}_2 &= \left(-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}+\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varepsilon_3^4}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^3)\right)x_1+\left(-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3^2}\right.\\
&\quad\left.+\frac{2\,\varepsilon_1^2+3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2+\varepsilon_3^2\,\varepsilon_2^2}{\varepsilon_3^5}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^3)\right)x_2+\left(-\frac{A_1}{\varepsilon_3^3}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|\right)x_1^3\\
&\quad+\left(-\frac{3A_1+\varepsilon_3A_2}{\varepsilon_3^4}+\frac{3(5\,A_1+2\,\varepsilon_3\,A_2+\varepsilon_3^2\,A_3)\varepsilon_1}{\varepsilon_3^7}+\frac{(6\,A_1+\varepsilon_3\,A_2)\varepsilon_2}{\varepsilon_3^6}\right.\\
&\quad\left.+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^2)\right)x_1^2x_2+\left(\frac{15A_1^2+7\varepsilon_3A_1A_2+5\varepsilon_3^2A_1A_3-\varepsilon_3^4B_1}{\varepsilon_3^9}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|)\right)x_1^4x_2.
\end{aligned}$$

Hacemos notar que si hacemos $\varepsilon_3=-\dfrac{3A_1}{A_2}$, el coeficiente de $x_1^4x_2$ es el mismo que obtuvimos anteriormente. Por tanto, supuesto que se tiene la misma condición genérica $27A_1^2B_1-15A_1A_2^2A_3+2A_2^4\neq 0$, no se anula el coeficiente del término de grado cinco y como consecuencia no se presenta una degeneración de mayor orden en la citada bifurcación de Takens-Bogdanov.

Para analizar la degeneración no lineal de codimensión tres, que se obtiene para

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=0,\quad \varepsilon_3=-\frac{3A_1}{A_2},$$

realizamos el escalado $X=\alpha x_1,\qquad Y=\beta x_2,\qquad T=\dfrac{\alpha}{\beta}t.$

Si denotamos $B=15A_1^2+7\varepsilon_3A_1A_2+5\,\varepsilon_3^2A_1A_3-\varepsilon_3^4B_1,\quad \varepsilon_3^*=3\,A_1+\varepsilon_3\,A_2$, los coeficientes vienen dados por

$$\alpha=\sqrt[6]{\frac{B^2}{|\varepsilon_3^{15}\,A_1|}},\quad \beta=\operatorname{sgn}(\varepsilon_3\,B)\sqrt[6]{\frac{B^4}{|\varepsilon_3^{21}A_1^5|}},$$

y el sistema adopta la forma

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= Y,\\
\dot{Y} &= \mu_1X+\mu_2Y+\operatorname{sgn}(a_3)X^3+\mu_3X^2Y+X^4Y,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \sqrt[3]{\frac{B^2}{A_1^4}}\left(-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3^3}+\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varepsilon_3^6}\right)+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3^*|^3)\\
\mu_2 &= \operatorname{sgn}(\varepsilon_3\,B)\sqrt[3]{\frac{B}{A_1^2}}\left(-\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_3\,\varepsilon_2)}{\varepsilon_3^3}+\frac{2\,\varepsilon_1^2+3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2+\varepsilon_3^2\,\varepsilon_2^2}{\varepsilon_3^6}\right)+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3^*|^3),\\
\mu_3 &= \operatorname{sgn}(\varepsilon_3\,B)\sqrt[3]{\frac{1}{A_1\,B}}\left(\frac{(A_2+3\,\varepsilon_3\,A_3)\,\varepsilon_1}{\varepsilon_3^2}-\frac{A_2\,\varepsilon_2}{\varepsilon_3}-\varepsilon_3^*\right)+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3^*|^2),\\
a_3 &= -\frac{A_1}{\varepsilon_3^3}.
\end{aligned}$$

El análisis de bifurcaciones de esta familia triparamétrica se puede ver en Li y Rousseau (1990), Rodríguez-Luis, Freire y Ponce (1991). Desde el citado punto de codimensión tres, varias bifurcaciones de codimensión dos surgen:

- En el caso $\varepsilon_3 A_1 > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(a_3) = -1$:
  - Una bifurcación de Takens-Bogdanov no degenerada para $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\mu_3 \neq 0$.
  - Una bifurcación de Hopf degenerada del equilibrio en el origen para los valores $\mu_2 = \mu_3 = 0$, $\mu_1 < 0$.
  - Una bifurcación de Hopf degenerada de los equilibrios no triviales sobre $\mu_3 = 0$, $\mu_2 = -\mu_1^2$, $\mu_1 > 0$.
  - Una conexión homoclina degenerada (traza cero del equilibrio trivial), en primera aproximación, sobre $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = -\dfrac{8}{7}\,\mu_1$, $\mu_1 > 0$.
  - Una bifurcación cúspide de sillas-nodo de órbitas periódicas dada, en primera aproximación, por $\mu_2 \approx 1.5713\mu_1^2$, $\mu_3 \approx -3.3484\mu_1$, $\mu_1 > 0$.
- En el caso $\varepsilon_3 A_1 < 0 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(a_3) = +1$:
  - Una bifurcación de Hopf degenerada del equilibrio en el origen para los valores $\mu_2 = \mu_3 = 0$, $\mu_1 < 0$.
  - Una conexión heteroclina degenerada (traza cero de los equilibrios no triviales), en primera aproximación, sobre $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = \dfrac{3}{7}\,\mu_1$, $\mu_1 < 0$.

Para facilitar la notación, a la hora de trasladar la información anterior a la familia triparamétrica (5.6), denotamos $C = \sqrt[3]{\dfrac{B}{A_1^2}}$.

Proposición 5.3.3 *Consideremos el sistema (5.6) con $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$. Entonces, para los valores críticos $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3^* = 0$, tenemos una bifurcación de Takens-Bogdanov degenerada. La singularidad es de tipo silla cuando $\varepsilon_3 A_1 < 0$ y de tipo foco si $\varepsilon_3 A_1 > 0$, y de ella emergen las siguientes curvas de bifurcación:*

- *En el caso $\varepsilon_3 A_1 > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(a_3) = -1$:*
  - *Una bifurcación de Takens-Bogdanov no degenerada para los valores de los parámetros $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3^* \neq 0$.*
  - *Una bifurcación de Hopf degenerada del equilibrio en el origen para los valores*
    $\varepsilon_2 = -\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} + \dfrac{2\,\varepsilon_1^2 + 3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \varepsilon_3^2\,\varepsilon_2^2}{\varepsilon_3^4} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3^*|^3)$,
    $\varepsilon_3^* = \dfrac{(A_2 + 3\,\varepsilon_3\,A_3)\,\varepsilon_1 - A_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_2}{\varepsilon_3^2} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3^*|^2)$, $\varepsilon_1\varepsilon_3 > 0$.

- *Una bifurcación de Hopf degenerada de los equilibrios no triviales sobre* $-\varepsilon_3^3\,\varepsilon_1-\varepsilon_3^4\,\varepsilon_2+(2+\mathrm{sgn}(\varepsilon_3)\,|C^3|)\,\varepsilon_1^2+3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2+\varepsilon_3^2\,\varepsilon_2^2+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3^*|^3)=0$, $\varepsilon_3^*=\dfrac{(A_2+3\,\varepsilon_3\,A_3)\,\varepsilon_1-A_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_2}{\varepsilon_3^2}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3^*|^2)$, $\varepsilon_1\varepsilon_3<0$.
- *Una conexión homoclina degenerada (traza cero del equilibrio), en primera aproximación, sobre* $\varepsilon_2=-\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}+\dfrac{2\,\varepsilon_1^2+3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2+\varepsilon_3^2\,\varepsilon_2^2}{\varepsilon_3^4}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3^*|^3)$, $\varepsilon_3^*=-\dfrac{(8\,\mathrm{sgn}(\varepsilon_3)\,A_1\,|C^3|-7\,\varepsilon_3\,A_2-21\,\varepsilon_3^2\,A_3)\,\varepsilon_1}{7\,\varepsilon_3^3}-\dfrac{A_2\,\varepsilon_2}{\varepsilon_3}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3^*|^2)$, $\varepsilon_1\varepsilon_3<0$.
- *Una bifurcación cúspide de sillas-nodo de órbitas periódicas dada, en primera aproximación, por* $-\varepsilon_3^3\,\varepsilon_1-\varepsilon_3^4\,\varepsilon_2+(2-1.5713\,\mathrm{sgn}(\varepsilon_3)\,|C^3|)\,\varepsilon_1^2+3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2+\varepsilon_3^2\,\varepsilon_2^2+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3^*|^3)\approx 0$,
  $\varepsilon_3^*\approx-\dfrac{(3.3484\,\mathrm{sgn}(\varepsilon_3)\,A_1\,|C^3|-\varepsilon_3\,A_2-3\,\varepsilon_3^2\,A_3)\,\varepsilon_1}{\varepsilon_3^3}-\dfrac{A_2\,\varepsilon_2}{\varepsilon_3}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3^*|^2)$, $\varepsilon_1\varepsilon_3<0$.

▪ *En el caso* $\varepsilon_3 A_1<0\Leftrightarrow \mathrm{sgn}(a_3)=+1$*:*

- *Una bifurcación de Takens-Bogdanov no degenerada para los valores de los parámetros* $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$, $\varepsilon_3^*\neq 0$.
- *Una bifurcación de Hopf degenerada del equilibrio en el origen para los valores* $\varepsilon_2=-\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}+\dfrac{2\,\varepsilon_1^2+3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2+\varepsilon_3^2\,\varepsilon_2^2}{\varepsilon_3^4}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3^*|^3)$,
  $\varepsilon_3^*=\dfrac{(A_2+3\,\varepsilon_3\,A_3)\,\varepsilon_1-A_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_2}{\varepsilon_3^2}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3^*|^2)$, $\varepsilon_1\varepsilon_3>0$.
- *Una conexión heteroclina degenerada (traza cero de los equilibrios no triviales), en primera aproximación, sobre* $\varepsilon_2=-\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}+\dfrac{2\,\varepsilon_1^2+3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2+\varepsilon_3^2\,\varepsilon_2^2}{\varepsilon_3^4}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3^*|^3)$, $\varepsilon_3^*=\dfrac{(3\,\mathrm{sgn}(\varepsilon_3)\,A_1\,|C^3|+7\,\varepsilon_3\,A_2+21\,\varepsilon_3^2\,A_3)\,\varepsilon_1}{7\,\varepsilon_3^3}-\dfrac{A_2\,\varepsilon_2}{\varepsilon_3}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3^*|^2)$, $\varepsilon_1\varepsilon_3>0$.

Para finalizar el análisis de la bifurcación de Takens-Bogdanov estudiamos a continuación qué sucede cuando nos encontramos en el caso degenerado $A_1=0$, supuesto que $A_2\neq 0$, $A_4\neq 3A_3$, $A_4\neq\dfrac{8}{5}A_3$. En dicho caso, de acuerdo a la proposición (5.2.2), vamos a considerar el despliegue triparamétrico de la forma normal (5.4), truncado a primer orden en los parámetros y a orden cinco en las variables de estado, dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= z,\\ \dot{z} &= \varepsilon_1 x+\varepsilon_2 y+\varepsilon_3 z+\varepsilon_4 x^3+A_2x^2y+A_3x^2z+A_4xy^2+A_5xz^2+B_1x^5+B_2x^4z\\ &\quad +B_3x^3y^2.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Al ser la matriz de la linealización en el origen de este sistema la misma del caso no degenerado (5.7), se podría enunciar una proposición similar a la 5.3.1, en relación a las degeneraciones lineales que se presentan en torno al valor crítico $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, si bien es este caso los equilibrios no triviales tienen de expresión

$$\left(\pm \sqrt{\frac{-\varepsilon_4 \pm \sqrt{\varepsilon_4^2 - 4\, B_1\, \varepsilon_1}}{2\, B_1}}, 0, 0 \right),$$

donde si $\varepsilon_1 < 0$ y $\varepsilon_4, B_1 > 0$ debemos tomar el signo $+$ en la raíz del numerador y si $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_4, B_1 < 0$ debemos tomar el signo $-$ en la citada raíz.

Suponemos ahora que los coeficientes del polinomio característico $P_M(\lambda)$, de la matriz de la linealización, cumplen que $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ y $p_1 \neq 0$. En dicho caso el equilibrio trivial del sistema (5.8) tiene un autovalor cero doble y un tercer autovalor no nulo. Para estudiar esta degeneración lineal de codimensión dos, tomamos $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ como parámetros de bifurcación y fijamos $\varepsilon_3, \varepsilon_4 \neq 0$. Vamos a considerar el sistema (5.8) truncado a tercer orden.

El sistema suspendido podemos escribirlo

$$\dot{u} = A\, u + \Psi(u)\, b,$$

donde

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\Psi(u) = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_4 x^3 + A_2 x^2 y + A_3 x^2 z + A_4 x y^2 + A_5 x z^2.$$

Realizando el mismo cambio lineal de variables anterior $u = Pv$, podemos escribir el sistema suspendido en la forma

$$\dot{v} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} v + \Psi(Pv) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

La variedad de centro, a orden uno, para este último sistema es la misma que en el caso no degenerado $A_1 \neq 0$, a saber

$$y_1 = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|^2) \right) x_1 + \left(\frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_3^2} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|^2) \right) x_2 + O(|x_1, x_2|^3),$$

y el sistema reducido a tercer orden es

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \left(-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^2)\right) x_1 + \left(-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3^2} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^2)\right) x_2 \\
&\quad + \left(-\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3^3} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|\right) x_1^3 + \left(-\frac{3\varepsilon_4+\varepsilon_3 A_2}{\varepsilon_3^4} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|)\right) x_1^2 x_2 \\
&\quad + \left(-\frac{3\varepsilon_4+2\varepsilon_3 A_2+\varepsilon_3^2 A_4}{\varepsilon_3^5} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|)\right) x_1 x_2^2 \\
&\quad + \left(-\frac{\varepsilon_4+\varepsilon_3 A_2+\varepsilon_3^2 A_4}{\varepsilon_3^6} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|)\right) x_2^3.
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando el algoritmo de formas normales, obtenemos la forma normal estándar

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \left(-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^2)\right) x_1 + \left(-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3^2} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^2)\right) x_2 \\
&\quad + \left(-\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3^3} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|\right) x_1^3 + \left(-\frac{3\varepsilon_4+\varepsilon_3 A_2}{\varepsilon_3^4} + O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|)\right) x_1^2 x_2.
\end{aligned}$$

En consecuencia, dado que $A_2 \neq 0$, si $\varepsilon_3 \neq -\dfrac{3\varepsilon_4}{A_2}$ y $\varepsilon_4 \neq 0$, la bifurcación de Takens-Bogdanov es no degenerada, ya que los coeficientes de la forma normal no se anulan, y por tanto no hay degeneraciones no lineales.

Una codimensión tres, degeneración no lineal de la bifurcación de Takens-Bogdanov, ocurre cuando se anula el coeficiente de x_1^3, a saber, cuando

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_4 = 0, \quad \varepsilon_3 \neq 0,$$

ya que en este caso el coeficiente de $x_1^2 x_2$ es distinto de cero.

También se presenta otra codimensión tres cuando se anula el coeficiente de $x_1^2 x_2$, a saber, cuando

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = -\frac{3\varepsilon_4}{A_2}, \quad \varepsilon_4 \neq 0.$$

Notar que en este último caso $\dfrac{A_2^3}{27\varepsilon_4^2}$, coeficiente de x_1^3, es distinto de cero.

En el caso no degenerado, $\varepsilon_3 \neq -\dfrac{3\varepsilon_4}{A_2}$ y $\varepsilon_4 \neq 0$, tendríamos un resultado similar al obtenido en la proposición 5.3.2.

En el caso de ser $\varepsilon_4 = 0$ o bien $\varepsilon_3 = -\dfrac{3\,\varepsilon_4}{A_2}$ debemos, para estudiar esta degeneración no lineal de codimensión tres, considerar el sistema (5.8).

Repitiendo los cálculos anteriores con la función

$$\Psi(u) = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_4 x^3 + A_2 x^2 y + A_3 x^2 z + A_4 x y^2 + A_5 x z^2 + B_1 x^5 + B_2 x^4 z + B_3 x^3 y^2.$$

se obtiene la forma normal a orden cinco

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \left(-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|^2)\right) x_1 + \left(-\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3^2} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|^2)\right) x_2 \\
&\quad + \left(-\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3^3} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|)\right) x_1^3 + \left(-\frac{3\varepsilon_4 + \varepsilon_3 A_2}{\varepsilon_3^4} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|)\right) x_1^2 x_2 \\
&\quad + \left(\frac{-B_1\varepsilon_3^3 + A_3\varepsilon_3^2\varepsilon_4 + A_2\varepsilon_3\varepsilon_4 + 3\varepsilon_4^2}{\varepsilon_3^8} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|)\right) x_1^5 \\
&+ \left(\frac{-5B_1\varepsilon_3^3 + A_2A_3\varepsilon_3^3 + A_2^2\varepsilon_3^2 + 8A_3\varepsilon_3^2\varepsilon_4 + 2A_4\varepsilon_3^2\varepsilon_4 + 13A_2\varepsilon_3\varepsilon_4 + 24\varepsilon_4^2}{\varepsilon_3^9} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|)\right) x_1^4 x_2.
\end{aligned}$$

Notemos que al ser $A_2 \neq 0$, si hacemos $\varepsilon_4 = 0, \ \ \varepsilon_3 \neq 0$, el coeficiente de x_1^5 es $-\dfrac{B_1}{\varepsilon_3^5}$, y el coeficiente de $x_1^4 x_2$ es $\dfrac{-5B_1\varepsilon_3 + A_2A_3\varepsilon_3 + A_2^2}{\varepsilon_3^7}$, por lo que bajo las condiciones $B_1 \neq 0$, $-5B_1\varepsilon_3 + A_2A_3\varepsilon_3 + A_2^2 \neq 0$, no se anulan los coeficientes de los términos de grado cinco y como consecuencia, no se presenta una degeneración de mayor orden en la bifurcación de Takens-Bogdanov.

Por contra, si hacemos $\varepsilon_3 = -\dfrac{3\,\varepsilon_4}{A_2}, \ \ \varepsilon_4 \neq 0$, el coeficiente de x_1^5 es $\dfrac{A_2^5(A_2A_3 + 3\,B_1)}{729\,\varepsilon_4^5}$, y el coeficiente de $x_1^4 x_2$ es $-\dfrac{A_2^6(-2\,A_2^3 + 15A_2A_3\varepsilon_4 + 6A_2A_4\varepsilon_4 + 45B_1\varepsilon_4)}{6561\,\varepsilon_4^7}$. Por lo tanto, si $A_2A_3 + 3\,B_1 \neq 0$, $-2\,A_2^3 + 15A_2A_3\varepsilon_4 + 6A_2A_4\varepsilon_4 + 45B_1\varepsilon_4 \neq 0$, no se anulan los coeficientes de los términos de grado cinco y, como consecuencia, no se presenta una degeneración de mayor orden en la bifurcación de Takens-Bogdanov.

Para la primera degeneración $\varepsilon_1 = 0, \ \ \varepsilon_2 = 0, \ \ \varepsilon_3 = -\dfrac{3\,\varepsilon_4}{A_2}, \ \ \varepsilon_4 \neq 0$, se obtiene un resultado similar al de la proposición 5.3.3.

Para la segunda degeneración, $\varepsilon_1 = 0, \ \ \varepsilon_2 = 0, \ \ \varepsilon_4 = 0, \ \ \varepsilon_3 \neq 0$, dado que el coeficiente de $x_1^2 x_2$ es distinto de cero podemos anular el término $x_1^4 x_2$ en la forma normal. En efecto, si en la forma normal del sistema reducido hacemos la reparametrización del tiempo $\dfrac{dt}{dT} = 1 + A\,x_1^2$, donde

$$A = \left(\frac{\varepsilon_3^3 A_2A_3 + \varepsilon_3^2 A_2^2 - 5\varepsilon_3^3 B_1 + 13\varepsilon_3 A_2\varepsilon_4 + 8\varepsilon_3^2 A_3\varepsilon_4 + 2\varepsilon_3^2 A_4\varepsilon_4 + 24\varepsilon_4^2}{\varepsilon_3^5\,(\varepsilon_3 A_2 + 3\varepsilon_4)} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|\right),$$

calculando la forma normal, a orden cinco, obtenemos

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \left(-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}+\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varepsilon_3^4}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^3)\right)x_1+\left(-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3^2}+\frac{2\,\varepsilon_1^2+3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2+\varepsilon_3^2\,\varepsilon_2^2}{\varepsilon_3^5}\right.\\ &\left.+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^3)\right)x_2+\left(-\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3^3}+\frac{(5\,\varepsilon_3^3B_1-6\,\varepsilon_3A_2\varepsilon_4-5\,\varepsilon_3^2A_3\varepsilon_4-2\,\varepsilon_3^2A_4\varepsilon_4-12\,\varepsilon_4^2)\varepsilon_1}{\varepsilon_3^4}\right.\\ &\left.+\frac{\varepsilon_4\varepsilon_2}{\varepsilon_3^5}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|^2)\right)x_1^3+\left(-\frac{\varepsilon_3A_2+3\,\varepsilon_4}{\varepsilon_3^4}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|)\right)x_1^2x_2\\ &+\left(-\frac{\varepsilon_3^4A_2B_1+7\,\varepsilon_3A_2\varepsilon_4^2+2\,\varepsilon_3^2A_4\varepsilon_4^2-2\,\varepsilon_3^3B_1\varepsilon_4+5\,\varepsilon_3^2A_3\varepsilon_4^2+15\,\varepsilon_4^3}{\varepsilon_3^8\,(\varepsilon_3A_2+3\,\varepsilon_4)}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2|)\right)x_1^5.\end{aligned}$$

Hacemos notar que si hacemos $\varepsilon_4=0$, el coeficiente de x_1^5 es el mismo que obtuvimos anteriormente. Por tanto, supuesto que se tiene la misma condición genérica $B_1\neq 0$, no se anula el coeficiente del término de grado cinco y como consecuencia no se presenta una degeneración de mayor orden en la citada bifurcación de Takens-Bogdanov.

Para analizar la degeneración no lineal de codimensión tres, que se obtiene para

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_4=0,\quad \varepsilon_3\neq 0,$$

mediante el escalado

$$X=\alpha x_1,\qquad Y=\beta x_2,\qquad T=\frac{\alpha}{\beta}t,$$

donde, denotando por b al coeficiente del término $x_1^2x_2$ y por a al coeficiente del término x_1^5 en la forma normal anterior, es

$$\alpha=1,\quad \beta=-\frac{1}{b},$$

el sistema adopta la forma

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y,\\ \dot{Y} &= \mu_1X+\mu_2Y+\mu_3X^3-X^2Y+\frac{a}{b^2}\,X^5,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mu_1 &= -\frac{\varepsilon_3^5\,\varepsilon_1}{A_2^2}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_4|^2),\\ \mu_2 &= -\frac{\varepsilon_3\,\varepsilon_1+\varepsilon_3^2\,\varepsilon_2}{A_2}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_4|^2),\\ \mu_3 &= \frac{5\,\varepsilon_3^5\,B_1\,\varepsilon_1-\varepsilon_3^3\,\varepsilon_4}{A_2^2}+O(|\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_4|^2).\end{aligned}$$

El estudio cualitativo de esta familia plana ha sido realizado en Dangelmayr y Wegelin (1991).

5.3.2. Bifurcación Hopf-pitchfork

La bifurcación Hopf-pitchfork, que corresponde al caso en que los autovalores de la matriz de la linealización en el origen son $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ y $\lambda_3 = 0$, se presenta cuando imponemos, en los coeficientes del polinomio característico $P_M(\lambda)$, las condiciones $p_1 = p_3 = 0$, $p_2 > 0$. En nuestro caso, ocurre cuando $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_2 = -\omega_0^2 < 0$. Para estudiar esta degeneración lineal de codimensión dos, tomamos $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ como parámetros de bifurcación y fijamos ε_2, suponiendo inicialmente que $A_1 \neq 0$.

A continuación suspendemos el sistema (5.6), considerando $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ como nuevas variables de estado, añadiendo las ecuaciones $\dot{\varepsilon_1} = 0$, $\dot{\varepsilon_3} = 0$. En este caso el sistema suspendido podemos escribirlo como

$$\dot{u} = A\,u + \Psi(u)\,b,$$

donde

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\Psi(u) = \varepsilon_1 x + \varepsilon_3 z + A_1 x^3 + A_2 x^2 y + A_3 x^2 z + A_4 x z^2 + A_5 y^3 + B_1 x^4 y + B_2 x^2 z^3.$$

Ahora realizamos el cambio de variables lineal $u = Pv$, siendo

$$v = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\omega_0} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema transformado es

$$\dot{v} \;=\; Jv + \Psi(Pv)\,P^{-1}b, \tag{5.9}$$

donde

$$J = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & -\omega_0 & & & \\ \omega_0 & 0 & & & \\ \hline & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Finalmente, usando C^∞-equivalencia (ver Algaba, Freire y Gamero (1998)), obtenemos la siguiente forma normal a orden cinco, que expresamos en coordenadas cilíndricas

$$\dot{r} \;=\; -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\varepsilon_3}{2\,(-\varepsilon_2)^{\frac{3}{2}}}\,r - \frac{3\,a_1}{8(-\varepsilon_2)^{\frac{5}{2}}}\,r^3 - \frac{a_2}{2(-\varepsilon_2)^{\frac{3}{2}}}\,r\,z^2,$$

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \frac{\varepsilon_1}{(-\varepsilon_2)^{\frac{3}{2}}}\, z + \frac{b_1}{2(-\varepsilon_2)^{\frac{5}{2}}}\, r^2 z + \frac{b_2}{(-\varepsilon_2)^{\frac{3}{2}}}\, z^3 + \widetilde{k}\, z^5, \\ \dot{\theta} &= 1 + O(|r,z|^2),\end{aligned} \tag{5.10}$$

donde

$$\begin{aligned}a_1 &= A_1 + A_3\varepsilon_2 + A_4\varepsilon_2^2, \quad a_2 = 3A_1 + A_3\varepsilon_2, \quad b_1 = 3A_1 + 2A_3\varepsilon_2 + A_4\varepsilon_2^2, \quad b_2 = A_1, \\ \widetilde{k} &= [-858\, A_1^3A_2A_3 - (222\, A_1A_2A_4 - 990\, A_1A_3A_5 + 1846\, A_2A_3^2)\, A_1^2\varepsilon_2 \\ &\quad -(203\, A_1A_2A_3A_4 + 1762\, A_2A_3^3 - 162\, A_1A_3^2A_5 - 5490\, A_1^2A_4A_5)\, A_1\varepsilon_2^2 \\ &\quad -(2110\, A_1A_2A_3^2A_4 - 1806\, A_1^2A_2A_4^2 + 242\, A_1A_3^3A_5 - 4551\, A_1^2A_3A_4A_5 \\ &\quad +534\, A_2A_3^4 + 1080\, A_1^3B_2)\, \varepsilon_2^3 + (5\, A_1A_2A_3A_4^2 + 1018\, A_1A_3^2A_4A_5 - 696\, A_1^2A_3B_2 \\ &\quad +498\, A_1^2A_4^2A_5 - 1133\, A_2A_3^3A_4 - 38\, A_3^4A_5)\, \varepsilon_2^4 + (108\, A_1A_2A_4^3 + 151\, A_1A_3A_4^2A_5 \\ &\quad -112\, A_1A_3^2B_2 + 1020\, A_1^2A_4B_2 - 739\, A_2A_3^2A_4^2 + 97\, A_3^3A_4A_5)\, \varepsilon_2^5 + (760\, A_1A_4B_2 \\ &\quad -180\, A_2A_4^3 + 31\, A_3A_4^2A_5 - 16\, A_3^2B_2)\, A_3\varepsilon_2^6 + (180\, A_1A_4 + 100\, A_3^2)\, A_4B_2\varepsilon_2^7 \\ &\quad +36\, A_3A_4^2B_2\varepsilon_2^8]\frac{A_1}{12a_1b_1(75A_1^2 + 78A_1A_3\varepsilon_2 + (27A_1A_4 + 19A_3^2)\varepsilon_2^2 + 11A_3A_4\varepsilon_2^3)(-\varepsilon_2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

En consecuencia, dado que $A_1 \neq 0$, para $\varepsilon_2 \approx 0$ no se presentan degeneraciones no lineales de la bifurcación Hopf-pitchfork. En este caso, omitiendo la componente azimutal y haciendo el escalado

$$R = \alpha r, \qquad Z = \beta z, \qquad T = \gamma t,$$

donde

$$\alpha = \sqrt{\frac{3|a_1|}{8(-\varepsilon_2)^{\frac{5}{2}}}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{|b_2|}{(-\varepsilon_2)^{\frac{3}{2}}}}, \quad \gamma = \operatorname{sgn}(-a_1),$$

la familia plana adopta la forma

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R(\mu_1 + R^2 + bZ^2), \\ \dot{Z} &= Z(\mu_2 + cR^2 + dZ^2 + kZ^4),\end{aligned} \tag{5.11}$$

donde

$$\mu_1 = \operatorname{sgn}(A_1)\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\varepsilon_3}{2\,(-\varepsilon_2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \mu_2 = -\operatorname{sgn}(A_1)\frac{\varepsilon_1}{(-\varepsilon_2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$b = \operatorname{sgn}(a_1a_2)\left|\frac{a_2}{2\,b_2}\right|, \quad c = \operatorname{sgn}(-a_1b_1)\left|\frac{4\,b_1}{3\,a_1}\right|, \quad d = \operatorname{sgn}(-a_1b_2), \quad k = \operatorname{sgn}(a_1)\frac{\varepsilon_2^3\,\widetilde{k}}{b_2^2}.$$

Para ver el tipo topológico de la singularidad Hopf-pitchfork, calculamos d y los signos de los coeficientes b, c, y $d - bc$, para $\varepsilon_2 \approx 0$.

$$d = \operatorname{sgn}(-(A_1 + A_3\varepsilon_2 + A_4\varepsilon_2^2)\, A_1) = \operatorname{sgn}(-A_1^2 + O(|\varepsilon_2|)) = -1,$$

$$\mathrm{sgn}(b) = \mathrm{sgn}((A_1 + A_3\varepsilon_2 + A_4\varepsilon_2^2)(3A_1 + A_3\varepsilon_2)) = \mathrm{sgn}(3\,A_1^2 + O(|\varepsilon_2|)) = +1,$$
$$\mathrm{sgn}(c) = \mathrm{sgn}(-(A_1 + A_3\varepsilon_2 + A_4\varepsilon_2^2)(3A_1 + 2A_3\varepsilon_2 + A_4\varepsilon_2^2)) = \mathrm{sgn}(-3\,A_1^2 + O(|\varepsilon_2|)) = -1,$$
$$\mathrm{sgn}(d - bc) = \mathrm{sgn}\ \left(-1 + \mathrm{sgn}(a_2 b_1)\left|\frac{2\,a_2 b_1}{3\,a_1 b_2}\right|\right) = \mathrm{sgn}(-1 + 6 + O(|\varepsilon_2|)) = +1.$$

Se observa que los valores de los coeficientes A_1, A_3, A_4 no juegan ningún papel en la determinación del tipo de la singularidad. En consecuencia se cumple

Proposición 5.3.4 *El tipo topológico de la singularidad Hopf-pitchfork para el sistema (5.6) está determinado a tercer orden y corresponde al caso VIa, siguiendo la notación de Guckenheimer y Holmes (1997), [Sec. 7.5].*

Como es conocido (ver Guckenheimer y Holmes (1997); Chow, Li y Wang (1994)) hay varias curvas de bifurcación presentes en el plano de parámetros μ_1 - μ_2 del sistema anterior:

- Una bifurcación pitchfork del origen para $\mu_1 = 0$, $\mu_2 \neq 0$. Dos nuevos equilibrios, sobre el eje R, de coordenadas $(\pm\sqrt{-\mu_1}, 0)$, aparecen cuando $\mu_1 < 0$.

- Una bifurcación pitchfork del origen para $\mu_2 = 0$, $\mu_1 \neq 0$. Dos nuevos equilibrios, sobre el eje Z, de coordenadas $(0, \pm\sqrt{\mu_2 + k\,\mu_2^2 + ...})$, aparecen cuando $\mu_2 > 0$.

- Una bifurcación transcrítica del equilibrio situado en el eje R, para los valores $\mu_2 = c\,\mu_1$, $\mu_1 < 0$. Esta bifurcación da lugar al equilibrio, fuera de los ejes,
$$\left(\sqrt{\frac{\mu_1 + b\,\mu_2}{-1 - b\,c} + b\,k\frac{(c\,\mu_1 - \mu_2)^2}{(-1 - b\,c)^3} + ...}, \sqrt{\frac{c\,\mu_1 - \mu_2}{-1 - b\,c} - k\,\frac{(c\,\mu_1 - \mu_2)^2}{(-1 - b\,c)^3} + ...}\right),$$
que existe cuando $-\dfrac{\mu_1}{b} < \mu_2 < c\,\mu_1$. Si $\mu_2 > \dfrac{(-1 + c)\,\mu_1}{1 + b}$ este equilibrio es un foco repulsivo (atractivo en caso contrario).

- Una bifurcación transcrítica del equilibrio situado en el eje Z, para los valores $\mu_2 = -\dfrac{\mu_1}{b} - k\,\dfrac{\mu_1^2}{b^2} + O(\mu_1^3)$, $\mu_1 < 0$. De ella surge el mismo equilibrio anterior, cuando $\mu_2 > -\dfrac{\mu_1}{b}$.

- Una bifurcación de Hopf, del equilibrio situado fuera de los ejes, para los valores $\mu_2 = \dfrac{(-1 + c)\,\mu_1}{1 + b} + k\,\dfrac{(1 - b + 2b\,c)\,\mu_1^2}{(1 + b)^3} + O(|\mu_1^3|)$, cuando $\mu_1 < 0$. Si $\mathrm{sgn}(k) < 0$, la órbita periódica que surge, cuando $\mu_2 > \dfrac{(-1 + c)\,\mu_1}{1 + b}$, es atractiva. En caso contrario, $\mathrm{sgn}(k) > 0$, la órbita periódica que nace cuando $\mu_2 < \dfrac{(-1 + c)\,\mu_1}{1 + b}$ es repulsiva.

- Una curva de conexiones heteroclinas, de los equilibrios no triviales situados sobre los ejes, para $\mu_2 = \dfrac{(-1 + c)\,\mu_1}{1 + b} - \dfrac{\mathrm{sgn}(k)\,b\,(1 + b\,c)^3\,\mu_1^2}{(-b + 2\,b\,c + c)(1 + b)^3} + O(|\mu_1^3|)$, $\mu_1 < 0$. Estas conexiones heteroclinas son estables si $\mathrm{sgn}(k) < 0$ e inestables si $\mathrm{sgn}(k) > 0$.

Al incluir la componente azimutal, y recuperar los parámetros originales, obtendremos información útil acerca de la bifurcación Hopf-pitchfork presente en la familia triparamétrica (5.6). En la siguiente proposición recogemos estos resultados.

Proposición 5.3.5 *Consideremos el sistema (5.6) con $A_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 < 0$. Entonces, para los valores críticos $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$, tenemos una bifurcación Hopf-pitchfork no degenerada, de la que emergen las siguientes curvas de bifurcación:*

- *Una bifurcación pitchfork del origen para $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_3 \neq 0$. Dos nuevos equilibrios $\left(\pm\sqrt{-\dfrac{\varepsilon_1}{A_1}}, 0, 0\right)$ aparecen cuando $\varepsilon_1 A_1 < 0$.*
- *Una bifurcación de Hopf del equilibrio en el origen para $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2\,\varepsilon_3$, $\varepsilon_3 \neq 0$. Esta bifurcación de Hopf es supercrítica si $\varepsilon_3 < 0$ y subcrítica si $\varepsilon_3 > 0$.*
- *Una bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales para los valores $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon_2\,\varepsilon_3}{2} - \dfrac{A_3\,\varepsilon_2^2\,\varepsilon_3}{4\,A_1} + O(|\varepsilon_2, \varepsilon_3|^4)$.*
- *Una bifurcación pitchfork de órbitas periódicas, donde se rompe la simetría de las órbitas periódicas que surgen de la Hopf del origen, para los valores $\varepsilon_1 = -\dfrac{6\,A_1\,\varepsilon_3}{A_3} - \dfrac{2\,(3\,A_1\,A_4 + 2\,A_3^2)\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3}{A_3^2} + O(|\varepsilon_2, \varepsilon_3|^3)$.*
- *Una bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas para los valores $\varepsilon_1 = \dfrac{3\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3}{2} - \dfrac{A_3\,\varepsilon_2^2\,\varepsilon_3}{3\,A_1} + O(|\varepsilon_2, \varepsilon_3|^4)$. Esta bifurcación da lugar a un toro invariante.*
- *Conexiones globales (homoclinas y heteroclinas) de los equilibrios en una región exponencialmente pequeña en torno a la curva $\varepsilon_3 = \dfrac{2\,\varepsilon_1}{3\,\varepsilon_2} + \mathrm{sgn}(A_1)\dfrac{16\,\varepsilon_1^2}{475\,(-\varepsilon_2)^{(5/2)}} + \dfrac{4\,A_3\,\varepsilon_1}{45\,A_1} + O(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|^2)$.*

Nota. La bifurcación pitchfork del origen, Hopf del origen y Hopf de los equilibrios no triviales $(x_\pm, 0, 0)$ aquí obtenidas están en concordancia con la expresiones que aparecen en la proposición 5.3.1.

Para finalizar el análisis de la bifurcación Hopf-pitchfork estudiamos a continuación qué sucede cuando nos encontramos en el caso degenerado $A_1 = 0$, supuesto que $A_2 \neq 0$, $A_4 \neq 3A_3$, $A_4 \neq \dfrac{8}{5}A_3$. En dicho caso, de acuerdo a la proposición (5.2.2) vamos a considerar el despliegue triparamétrico de la forma normal (5.4), truncado a primer orden en los parámetros y a orden cinco en las variables de estado, dado por

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y,\\
\dot{y} &= z,\\
\dot{z} &= \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 z + \varepsilon_4 x^3 + A_2 x^2 y + A_3 x^2 z + A_4 x y^2 + A_5 x z^2 + B_1 x^5 + B_2 x^4 z\\
&\quad + B_3 x^3 y^2.
\end{aligned}$$

Al igual que en el caso no degenerado la bifurcación se presenta cuando $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_2 = -\omega_0^2 < 0$. Para estudiar esta degeneración lineal de codimensión dos, tomamos $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ como parámetros de bifurcación y fijamos $\varepsilon_2, \varepsilon_4 \neq 0$. En este caso el sistema suspendido, del sistema anterior, lo podemos escribir

$$\dot{u} = A\,u + \Psi(u)\,b,$$

donde

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(u) = \varepsilon_1 x + \varepsilon_3 z + \varepsilon_4 x^3 + A_2 x^2 y + A_3 x^2 z + A_4 x y^2 + A_5 x z^2 + B_1 x^5 + B_2 x^4 z + B_3 x^3 y^2.$$

Realizando el mismo cambio de variables del caso anterior y usando C^∞-equivalencia (ver Algaba, Freire y Gamero (1998)), obtenemos la siguiente forma normal a orden tres, en coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\varepsilon_3}{2(-\varepsilon_2)^{\frac{3}{2}}}\, r - \frac{a_1}{8(-\varepsilon_2)^{\frac{5}{2}}}\, r^3 - \frac{a_2}{2(-\varepsilon_2)^{\frac{3}{2}}}\, r\, z^2, \\ \dot{z} &= \frac{\varepsilon_1}{(-\varepsilon_2)^{\frac{3}{2}}}\, z + \frac{b_1}{2(-\varepsilon_2)^{\frac{5}{2}}}\, r^2 z + \frac{b_2}{(-\varepsilon_2)^{\frac{3}{2}}}\, z^3, \\ \dot{\theta} &= 1 + O(|r,z|^2), \end{aligned}$$

donde

$$a_1 = 3\varepsilon_4 + (3A_3 - A_4)\,\varepsilon_2 + 3A_5\varepsilon_2^2, \quad a_2 = 3\varepsilon_4 + A_3\varepsilon_2,$$

$$b_1 = 3\varepsilon_4 + (2A_3 - A_4)\,\varepsilon_2 + A_5\varepsilon_2^2, \quad b_2 = \varepsilon_4.$$

Notemos que en este caso sí pueden presentarse diversas degeneraciones no lineales de la bifurcación Hopf-pitchfork, en un entorno de la degeneración lineal triple-cero.

En efecto, una primera degeneración en los términos no lineales ocurre cuando se anula el coeficiente de a_1 de la forma normal (ver Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*a*)). Esto se cumple para los valores

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_3 = 0, \qquad \varepsilon_4 = \frac{(A_4 - 3A_3)\varepsilon_2}{3} - A_5\varepsilon_2^2.$$

Hemos comprobado que para este valor de ε_4 el coeficiente $a_2 \neq 0$, y por tanto no se presenta una degeneración simultánea de ambos coeficientes.

Otra degeneración no lineal se experimenta cuando se anula el coeficiente de a_2 (ver Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (2000)), en los valores

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_3 = 0, \qquad \varepsilon_4 = -\frac{A_3\varepsilon_2}{3}.$$

La tercera posible degeneración de los términos no lineales de orden tres en la forma normal, se experimenta cuando $\Delta = -a_1 b_2 + 2a_2 b_1 = 0$ (ver Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*b*)). En nuestro caso

$$\Delta = 2A_3A_5\varepsilon_2^3 + (2A_3(2A_3 - A_4) + 3A_5\varepsilon_4)\varepsilon_2^2 + 5(3A_3 - A_4)\varepsilon_4\varepsilon_2 + 15\varepsilon_4^2.$$

Esta ecuación de segundo grado en ε_4 tiene dos soluciones reales próximas a cero siempre que $-3A_3^2 - 6A_3A_4 + 5A_4^2 > 0$.

Finalmente si consideramos $\varepsilon_4 = 0$ el coeficiente $b_2 = 0$, y supuesto que $\mathbf{A}_3 \neq 0$, los coeficientes a_1, $a_2 \neq 0$. Si suponemos además que $A_4 \neq 2A_3$ o bien $A_5 \neq 0$, se cumple que $\Delta \neq 0$ y, en consecuencia, no se experimentan degeneraciones en este caso.

5.3.3. Bifurcación triple-cero

Finalmente la bifurcación triple-cero, correspondiente al caso de un autovalor cero triple en la matriz de la linealización en el origen, surge de imponer las tres condiciones $p_1 = p_2 = p_3 = 0$. Considerando nuevamente el despliegue triparamétrico

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y,\\
\dot{y} &= z,\\
\dot{z} &= \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 z + A_1x^3 + A_2x^2y + A_3x^2z + A_4xz^2 + A_5y^3 + B_1x^4y + B_2x^2z^3,
\end{aligned}$$

hemos encontrado varias bifurcaciones organizadas en torno a los valores críticos $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, pero también debemos esperar la presencia de bifurcaciones que no han sido detectadas en nuestro análisis local. En efecto, el *blowing-up*

$$T = \varepsilon^2 t,\ X = \varepsilon^{-3}x,\ Y = \varepsilon^{-5}y,\ Z = \varepsilon^{-7}z,\ \nu_1 = \varepsilon^{-6}\varepsilon_1,\ \nu_2 = \varepsilon^{-4}\varepsilon_2,\ \nu_3 = \varepsilon^{-2}\varepsilon_3,$$

nos permite escribir el sistema anterior en la forma

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= Y,\\
\dot{Y} &= Z,\\
\dot{Z} &= \nu_1 X + \nu_2 Y + \nu_3 Z + A_1X^3 + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Poniendo $\varepsilon = 0$, obtenemos un sistema simple cuyo estudio proporcionará varias bifurcaciones que están contenidas, en embrión, en el unfolding triparamétrico de la forma normal de la singularidad triple-cero. Este resultado ha sido posteriormente obtenido por Sieber y Krauskopf (2004), al estudiar la ecuación del movimiento de un péndulo invertido con control retardado. En el citado trabajo se muestra que una codimensión tres, correspondiente a un autovalor triple-cero, actúa como centro organizador de la dinámica.

5.4. Sistemas de control: forma normal y bifurcaciones locales

Vamos ahora a aplicar los resultados teóricos obtenidos en la segunda sección a una amplia clase de sistemas dinámicos de interés, para determinar si presentan algunas de

las degeneraciones analizadas en la sección tercera. A saber, consideremos el sistema de control tridimensional (ver la figura 5.1) dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \tag{5.13}$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$, representa las variable de estado, y $b \in \mathbb{R}^3$ es constante, estando sujeto a una retroalimentación no lineal $u = -\phi(y)$, con ϕ una función impar de la variable de salida y que suponemos de la forma

$$y(t) = c^T x, \quad c \in \mathbb{R}^3, \tag{5.14}$$

es decir, una combinación lineal de las variables de estado.

Supondremos que el origen para el sistema de control (5.13) - (5.14) es localmente asintóticamente estable (esto es, la matriz $A - bc^T$ es de Hurwitz), y también que el par (A, b) es *controlable*, es decir,

$$< b, Ab, A^2b >= \mathbb{R}^3.$$

En este caso, el sistema de control (5.13)–(5.14) (ver Barnett y Cameron (1985)) se puede reducir a su forma canónica de control

$$\dot{x} = Ax - \phi(c^T x)b, \tag{5.15}$$

donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \; \phi(t) = t^3 + bt^5, \; c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hemos incluido un término de quinto grado en ϕ, bt^5, ya que realizaremos el análisis de la forma normal a quinto orden.

Si en el sistema (5.15) suponemos que $c_1 \neq 0$ (en otro caso tenemos una singularidad plana), podemos usar la proposición 5.2.1 para obtener su forma normal a orden cinco

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= A_1 x^3 + A_2 x^2 y + A_3 x^2 z + A_4 x z^2 + A_5 y^3 + B_1 x^4 y + B_2 x^2 z^3, \end{aligned}$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$A_1 = -c_1^3, \quad A_2 = -3\, c_1^2\, c_2, \quad A_3 = -3\, c_1^2\, c_3, \quad A_4 = -3\, c_1\, c_3^2, \quad A_5 = 2\, c_1\, c_2\, c_3 + \frac{2\, c_1^2\, b}{9},$$

$$B_1 = -\frac{(152\, c_1^2\, b + 288\, c_1\, c_2\, c_3 - 189\, c_2^3)\, c_1^2\, c_2}{72},$$

$$B_2 = -\frac{(1521 c_1 c_2^5 c_3 + 1791 c_1^2 c_2^3 c_3^2 + 92 c_1^2 c_2^4 b + 2412 c_1^3 c_2 c_3^3 - 478 c_1^3 c_2^2 c_3 b + 1728 c_1^4 c_3^2 b - 576 c_2^7) c_3}{3300\, c_1^2}.$$

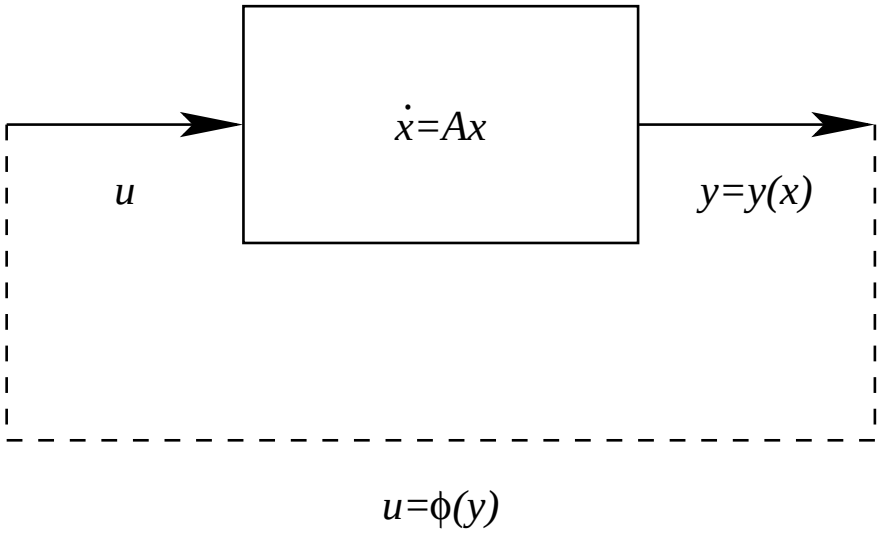


Figura 5.1: Sistema de control con retroalimentación.

En este caso particular, los coeficientes de la reparametrización en el tiempo y del cambio lineal en las variables de estado realizados en la demostración toman los valores:

$$\beta_1 = \frac{c_1^2\, b}{3}, \quad \beta_2 = \frac{54\, c_1\, c_2^3\, c_3 - 36\, c_1^2\, c_2\, c_3^2 - 18\, c_1^2\, c_2^2\, b - 584\, c_1^3\, c_3\, b - 81\, c_2^5}{660\, c_1^2}, \quad \delta = -\frac{c_2^2}{2\, c_1^2}.$$

En consecuencia, de acuerdo con las proposiciones 5.3.1 a 5.3.5, se obtiene el siguiente

Corolario 5.4.1 *Consideremos el sistema (5.15) con $c_1 \neq 0$. El equilibrio del origen presenta las siguientes degeneraciones:*

- *Una bifurcación pitchfork para los valores $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_3 \neq 0$. Cuando $c_1\, \varepsilon_1 > 0$, esta bifurcación hace aparecer dos equilibrios simétricos respecto del origen (equilibrios no triviales) en $\left(\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{c_1^3}}, 0, 0\right)$.*

- *Una bifurcación de Hopf del origen en la superficie $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2\varepsilon_3$, $\varepsilon_3 \neq 0$, $\varepsilon_2 < 0$; y de los equilibrios no triviales en la superficie*

$$2\,\varepsilon_1 - \left(\varepsilon_2 - \frac{3\, c_2}{c_1}\,\varepsilon_1 + \frac{(-152\, c_1^2\, b - 288\, c_1\, c_2\, c_3 + 189\, c_2^3)\, c_2}{72\, c_1^4}\,\varepsilon_1^2\right)\left(\varepsilon_3 - \frac{3\, c_3}{c_1}\,\varepsilon_1\right) = 0,$$

$$\varepsilon_3 \neq \frac{3\, c_3}{c_1}\,\varepsilon_1, -216\, c_1^3\, c_2\, \varepsilon_1 + 72\, c_1^4\, \varepsilon_2 + (-152\, c_1^2\, b - 288\, c_1\, c_2\, c_3 + 189\, c_2^3)\, c_2\, \varepsilon_1^2 < 0.$$

- *Si $c_2 = 0$ o bien $\varepsilon_3 \neq -\frac{c_1}{c_2}$, una bifurcación de Takens-Bogdanov no degenerada para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 \neq 0$. Esta bifurcación es de tipo homoclino si $c_1\varepsilon_3 < 0$ y heteroclino en caso contrario.*

- *Si $c_2 \neq 0$, una bifurcación de Takens-Bogdanov degenerada, debido a la anulación del coeficiente x^2y en la forma normal, cuando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = -\dfrac{c_1}{c_2}$.*
- *Si $\varepsilon_2 \approx 0$, una bifurcación Hopf-pitchfork no degenerada para los valores de los parámetros $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_2 < 0$. El tipo topológico de esta singularidad corresponde al caso VIa.*
- *Una bifurcación triple-cero (correspondiente a un autovalor cero triple) para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$.*

Un modelo concreto de los sistemas de control estudiados lo podemos encontrar en la ecuación de Chua con una no linealidad cúbica, obtenida en Pivka, Wu y Huang (1996)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - ax^3 - cx), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z. \end{aligned}$$

Para escribir estas ecuaciones en la forma apropiada, supondremos que $\beta \neq 0$ (si $\beta = 0$ el sistema anterior está desacoplado) y realizamos la siguiente transformación lineal

$$\begin{aligned} \beta x &= -(\beta + \gamma)X - (\gamma + 1)Y - Z, \\ \beta y &= -\gamma X - Y, \\ z &= X. \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones (1.1) queda ahora en la forma

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Y, \\ \dot{Y} &= Z, \\ \dot{Z} &= \varepsilon_1 X + \varepsilon_2 Y + \varepsilon_3 Z - \phi(X, Y, Z), \end{aligned} \tag{5.16}$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha(\gamma - c\beta - c\gamma), \\ \varepsilon_2 &= \alpha - c\alpha - c\alpha\gamma - \beta - \gamma, \\ \varepsilon_3 &= -(c\alpha + \gamma + 1), \\ \phi(X, Y, Z) &= \frac{a\alpha}{\beta^2}\left((\beta + \gamma)X + (\gamma + 1)Y + Z\right)^3. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Notemos que, si bien nuestro estudio teórico sería también válido si la no linealidad estuviera modelada por una función polinómica impar de grado cinco, en nuestro caso $b = 0$.

Eligiendo adecuadamente los parámetros se observa que (5.15) está en concordancia con (5.16). A saber, ε_1, ε_2 y ε_3 son los mismos que los de la expresión (5.17) y

$$c_1 = \sqrt[3]{\frac{a\alpha}{\beta^2}}(\beta + \gamma), \quad c_2 = \sqrt[3]{\frac{a\alpha}{\beta^2}}(\gamma + 1), \quad c_3 = \sqrt[3]{\frac{a\alpha}{\beta^2}}, \quad b = 0. \tag{5.18}$$

Notemos que al ser $a = \pm 1$, $\alpha \neq 0$, $\beta + \gamma \neq 0$ se cumple que $c_1 \neq 0$, $c_3 \neq 0$; mientras que $c_2 = 0 \Leftrightarrow \gamma = -1$. Recordemos que si $\alpha = 0$ el sistema sería lineal, y si $\beta + \gamma = 0$ hay una singularidad plana.

Podemos ahora, utilizando el corolario 5.4.1 y los valores de los parámetros dados en (5.17), verificar las expresiones obtenidas, en la proposición 1.3.1 del capítulo uno de la presente memoria, para las degeneraciones lineales del origen correspondientes al sistema (1.1).

En particular ratificamos que, si $c_2 = 0 \Leftrightarrow \gamma = -1$, la bifurcación de Takens-Bogdanov analizada en la sección 1.6 del capítulo uno era no degenerada, mientras que si $\gamma \neq -1$ se presentaba una degeneración no lineal de la bifurcación de Takens-Bogdanov, debido a la anulación del coeficiente $x^2 y$ en la correspondiente forma normal.

Si bien cuando $\varepsilon_2 \approx 0$ (cerca de la degeneración lineal triple-cero **TZ**), el corolario 5.4.1 nos indica que la bifurcación Hopf-pitchfork es no degenerada, cuando $\varepsilon_2 \ll 0$ la bifurcación **HP** puede presentar degeneraciones no lineales. De acuerdo a los resultados obtenidos en el capítulo segundo de esta memoria, la bifurcación Hopf-pitchfork de las ecuaciones (1.1) experimentaba una degeneración no lineal, sobre la curva **HPD** (ver figura 2.1), debido a la anulación simultánea de los coeficientes a_1 y a_2 en la forma normal. Podemos ahora, utilizando las expresiones obtenidas para los coeficientes de la forma normal (5.10), verificar la ecuación calculada para esta curva **HPD**, de expresión $\alpha + (1 + \gamma)^2 = 0$, donde se experimentaba la citada degeneración. En efecto, dado que el coeficiente a_2 en la forma normal a orden cinco del sistema (5.6) para el estudio de la singularidad Hopf-pitchfork venía dado por $a_2 = 3A_1 + A_3\varepsilon_2$, y teniendo en cuenta los valores de los coeficientes A_1 y A_2 para el sistema (1.1), así como las expresiones (5.18) y (5.17), tenemos que $a_2 = 3\frac{a\,\alpha}{\beta^2}(\beta+\gamma)^3 + 3\frac{a\,\alpha}{\beta^2}(\beta+\gamma)^2(\alpha - \alpha c(1+\gamma) - \beta - \gamma)$. En consecuencia dado que $a, \alpha, \beta + \gamma \neq 0$, se cumple que $a_2 = 0 \Leftrightarrow (1 - c(1+\gamma)) = 0$. Finalmente teniendo en cuenta que en la degeneración se cumple $\varepsilon_3 = -(c\,\alpha + \gamma + 1) = 0$, se deduce que $c = -\dfrac{1+\gamma}{\alpha}$. Sustituyendo dicho valor de c en la ecuación $1 - c(1+\gamma) = 0$ se obtiene la ecuación de la curva **HPD**.

5.5. Estudio numérico

En esta sección partimos de los resultados analíticos obtenidos en la sección anterior. En nuestro estudio numérico de la ecuación de Chua (1.1), realizado básicamente con AUTO97 (ver Doedel, Champneys, Fairgrieve, Kuznetsov, Sandstede y Wang (1998)), tomaremos β, c y α como parámetros de bifurcación y fijaremos los otros dos, a saber $a = -1$, $\gamma = 0.3 > 0$, en concordancia con los capítulos anteriores y al objeto de completar los estudios numéricos previos. En efecto, recordemos que de acuerdo a la figura 1.13 del capítulo uno, en el estudio numérico llevado a cabo en el capítulo dos sobre las ecuaciones (1.1), realizamos un corte para $\gamma = 0.3$, que nos permitió, variando el parámetro α, pasar de la zona 20 a la zona 21 en la figura 1.13. Ahora pretendemos, para el mismo valor de γ, pasar de la zona 23 a la zona 22 y finalmente de esta a la zona 21, moviendo el parámetro α. De esta forma pretendemos encontrar numéricamente las curvas de bifurcación detectadas

en nuestro estudio teórico, al mismo tiempo que aparecerán bifurcaciones globales de codimensión dos y tres que pondrán en evidencia la compleja dinámica de las ecuaciones (1.1) en el rango de parámetros considerado.

Nuestra estrategia será pues la siguiente, realizaremos cortes $\alpha = constante$ en el espacio tridimensional de parámetros, en las vecindades de las dos bifurcaciones de equilibrio de codimensión tres detectadas analíticamente que son de nuestro interés. Concretamente, para los valores de a y γ fijados, una bifurcación de Takens-Bogdanov degenerada de tipo heteroclino **TBD1** ocurre para los valores críticos $\alpha_{\mathbf{TBD1}} \approx 2.64132$, $\beta_{\mathbf{TBD1}} \approx 1.86566$ y $c_{\mathbf{TBD1}} \approx 0.138526$, si bien esta bifurcación no es de nuestro interés ya que está relacionada (para $\gamma = 0.3$) con el paso de la zona 26 a la zona 25 en la figura 1.13. La bifurcación de Takens-Bogdanov degenerada de tipo homoclino en la que estamos interesados, **TBD2** tiene lugar para los valores $\alpha_{\mathbf{TBD2}} \approx -1.08132$, $\beta_{\mathbf{TBD2}} \approx 0.00434$ y $c_{\mathbf{TBD2}} \approx 0.98573$. Notemos que para obtener estos valores críticos de ambas degeneraciones, **TBD1** y **TBD2**, es suficiente imponer que se cumplan las condiciones del corolario 5.4.1 en los coeficientes correspondientes a la ecuación de Chua dados por (5.17) y (5.18). También se puede comprobar que para la primera degeneración, **TBD1**, se cumple que $c_1\,\varepsilon_3 > 0$ (la bifurcación de Takens-Bogdanov que experimenta la degeneración es de tipo heteroclino) y lo contrario ocurre para la degeneración **TBD2** (es de tipo homoclino). Además imponiendo que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ en los coeficientes dados en (5.17), se obtiene que el origen tiene un autovalor triple cero cuando los parámetros satisfacen las relaciones

$$\alpha = -\frac{(1+\gamma)^3}{1+2\gamma}, \quad \beta = \frac{\gamma^3}{1+2\gamma}, \quad c = \frac{1+2\gamma}{(1+\gamma)^2},$$

para $\gamma \neq 0, -1/2, -1$. Nótese que estas relaciones coinciden con las obtenidas en la subsección 1.5.3 del capítulo uno. En consecuencia, dado que $\gamma = 0.3$, la degeneración lineal **TZ** ocurre para los valores $\alpha_{\mathbf{TZ}} = -1.373125$, $\beta_{\mathbf{TZ}} = 0.016875$ y $c_{\mathbf{TZ}} \approx 0.9467$.

En primer lugar hacemos dos cortes $\alpha =$*constante* a ambos lados de la bifurcación de Takens-Bogdanov degenerada de tipo homoclino. Como ésta ocurre para el valor $\alpha_{\mathbf{TBD2}} \approx -1.08132$, mostraremos en el plano de parámetros (β, c) los conjuntos de bifurcaciones para $\alpha = -0.8$ (correspondiente a la zona 23 de la figura 1.13 del capítulo uno) y $\alpha = -1.2$ (correspondiente a la zona 22 de la citada figura).

En la figura 5.2(a), para $\alpha = -0.8$, se observa que la curva donde tiene lugar una bifurcación pitchfork del origen **PI** consta de dos ramas. En efecto, ambas ramas tienen a la recta $\beta = -\gamma = -0.3$ como asíntota vertical. La ecuación de esta curva, que se obtiene al imponer $\varepsilon_1 = 0$ en (5.17), viene dada por

$$c = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}\ .$$

Sobre cada una de las ramas de la curva **PI**, existe un punto de degeneración de Takens-Bogdanov del equilibrio en el origen, que denotamos **TB**, siendo de tipo heteroclino el situado en la rama izquierda y de tipo homoclino el que se encuentra en la rama derecha.

Del punto de codimensión dos **TB** de tipo heteroclino dos nuevas curvas surgen: **H**, correspondiente a una bifurcación de Hopf supercrítica del origen (donde una órbita periódica simétrica nace) y **Het**, correspondiente a una conexión heteroclina de los equili-

brios no triviales, donde desaparece la órbita periódica simétrica que surge de la curva **H**. Notemos que la curva **H** conecta ambos puntos de Takens-Bogdanov **TB**.

Otras tres curvas surgen del punto **TB** de tipo homoclino (ver la figura 5.2(b)): **h**, una curva donde el equilibrio no trivial sufre una bifurcación de Hopf subcrítica (y un par de órbitas periódicas asimétricas nacen); **Ho**, una curva de conexiones homoclinas del origen y **SN** correspondiente a una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas. La curva **SN** termina en un nuevo punto de codimensión dos, **Hodif**, situado sobre la curva **Ho**, para $\beta \approx -0.0514$ y $c \approx 1.3783$. Este punto corresponde a una degeneración de la conexión homoclina conocida como *inclinación flip*. Notar que las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas son denotadas con letras mayúsculas y las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas asimétricas con letras minúsculas.

Una inclinación flip está relacionada con un cambio en la orientación de la variedad estable invariante del equilibrio en el origen, debido a la violación de la llamada propiedad de inclinación fuerte (ver Shil'nikov (1969), Deng (1993)). En nuestro caso, como en tal punto los tres autovalores de la matriz de linealización en el origen de (1.1) son $\lambda^{ss} \approx -0.686$, $\lambda^{s} \approx -0.086$ y $\lambda^{u} \approx 0.575$, es de esperar una estructura de bifurcaciones muy complicada, que implica una región donde existen herraduras y también la presencia de órbitas periódicas y órbitas homoclinas, de cualquier período, en un entorno de dicho punto.

Ahora fijamos $\alpha = -1.2$ (ver la figura 5.3), para obtener el conjunto de bifurcaciones al otro lado del punto donde tiene lugar la degeneración de Takens-Bogdanov **TB**. Como podemos ver en la figura 5.3, el conjunto de bifurcaciones ahora es mucho más complicado que el anterior (ver la figura 5.2).

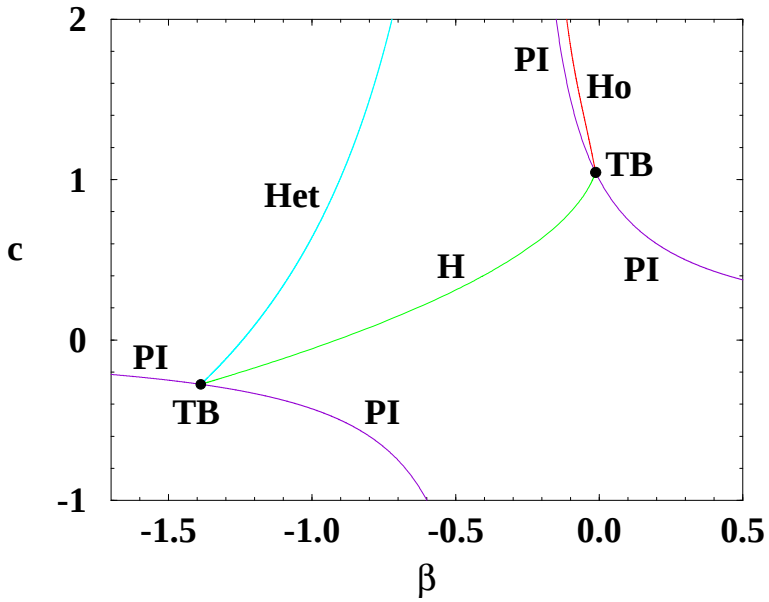
El conjunto de bifurcaciones completo, en una vecindad de una bifurcación de Takens-Bogdanov degenerada de tipo de homoclino, puede ser encontrado en Li y Rousseau (1990), Rodríguez-Luis, Freire y Ponce (1991). Entonces, además del punto no degenerado **TBD2**, cuatro nuevos puntos de bifurcación de codimensión dos están presentes: una bifurcación de Hopf degenerada del origen **Hd**, una bifurcación de Hopf degenerada del equilibrio no trivial **hd**, una cúspide de sillas-nodo de órbitas periódicas **CU** y una conexión homoclina degenerada **Hod2a**. Pero en el conjunto de bifurcaciones sólo dos de estos puntos aparecen, **Hd** y **hd** (una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas **SN**, surge del punto **Hd** y una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas asimétricas **sn** comienza en el punto **hd**), mientras que **CU** y **Hod2a** no están presentes. Para encontrarlos tendremos que considerar conjuntos de bifurcaciones para valores de α más próximos a $\alpha_c \approx -1.08132$, donde la bifurcación de Takens-Bogdanov degenerada ocurre. Esto lo haremos más tarde.

5.5.1. Conexión homoclina principal y sus degeneraciones

Vamos a realizar un análisis numérico detallado de las degeneraciones que aparecen en la conexión homoclina principal, para explicar el conjunto de bifurcaciones de la figura 5.3.

La curva de conexiones homoclinas principal **Ho**, que surge del punto **TB** cuando el origen es un equilibrio de tipo silla, presenta algunas degeneraciones no deducidas del estudio analítico de bifurcaciones locales realizado en la sección 5.3. La primera, **Hod1a**,

(a)



(b)

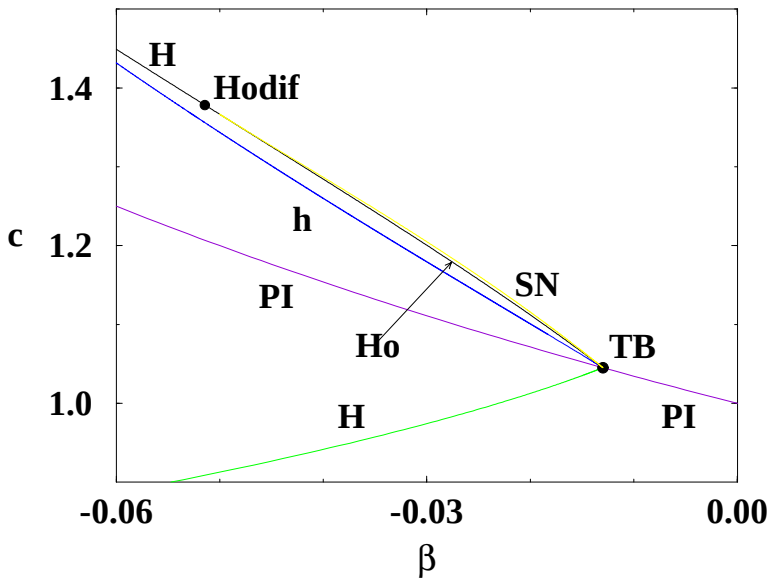


Figura 5.2: (a) Conjunto parcial de bifurcaciones para $\alpha = -0.8$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$. (b) Zoom de la región donde la bifurcación de Takens-Bogdanov del origen de tipo homoclino **TB** aparece.

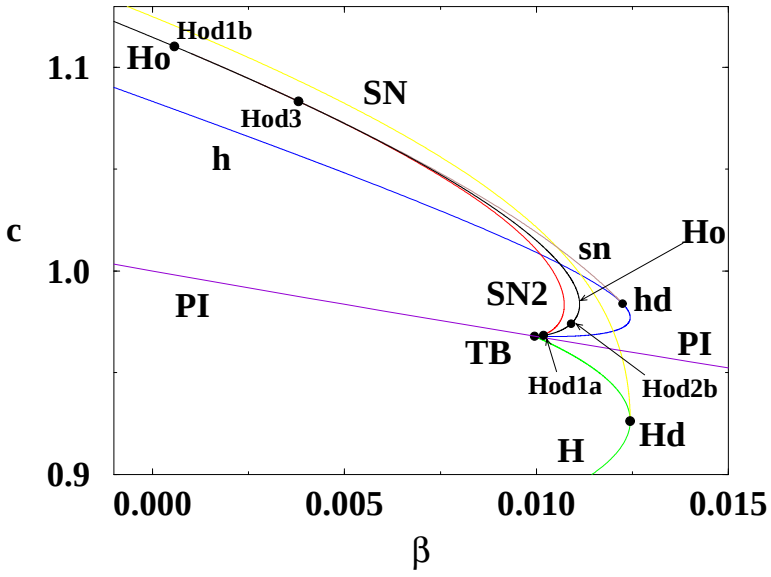


Figura 5.3: Conjunto parcial de bifurcaciones para $\alpha = -1.2$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$.

es causada por la transición del equilibrio en el origen de silla a silla-foco, para $\beta \approx 0.01018$, $c \approx 0.9683$. Ya que el autovalor doble no es determinante (un autovalor se dice *determinante* si es el autovalor más cercano al eje imaginario) la bifurcación homoclina permanece *dócil* (ver Champneys y Kuznetsov (1994)).

Si denotamos por $(\rho \pm i\omega, \lambda)$ los autovalores del equilibrio trivial, la segunda degeneración sobre **Ho**, **Hod2b**, que ocurre para $\beta \approx 0.0109$, $c \approx 0.974$ se produce cuando $\delta = \left|\frac{\rho}{\lambda}\right| = 1$ (autovalores resonantes). La transición de órbita homoclina dócil a órbita homoclina *caótica* ocurre en este punto.

A continuación, para $\beta \approx 0.0038$, $c \approx 1.083$, una nueva degeneración **Hod3** aparece cuando $\delta = \frac{1}{2}$ (divergencia cero). La última degeneración que hemos detectado en el rango de parámetros mostrado en la figura 5.3, **Hod1b**, cuando $\beta \approx 0.00057$, $c \approx 1.11$, es causado por la transición de silla-foco a silla del equilibrio en el origen. En esta última degeneración es donde las curvas **SN2** y **sn** finalizan, ya que ahora el autovalor doble sí es determinante.

Fuera del rango de la figura 5.3 aparece una quinta degeneración sobre la curva **Ho**, el punto **Hodif**, para $\beta \approx -0.0245$, $c \approx 1.278$. Este nuevo punto de degeneración *inclinación flip* (degeneración que también estaba presente en el primer corte, para $\alpha = -0.8$, en la figura 5.2(b)) es el punto donde termina la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas **SN**. Notar que para $\alpha = -1.2$ el punto **Hodif** está conectado, vía **SN**, con **Hd** mientras que para $\alpha = -0.8$ el punto **Hodif** está unido, vía **SN**, con **TB**. No obstante el diagrama de bifurcaciones de la figura 5.4, correspondiente a la órbita periódica atractiva que surge de la curva de conexiones heteroclinas **Het** fuera del rango de la ventana (ver figura 5.2(a)), nos muestra que las curvas **SN** y **SN2** aún no estando unidas mediante una cúspide, comparten una órbita periódica silla, al igual que las siguientes curvas de

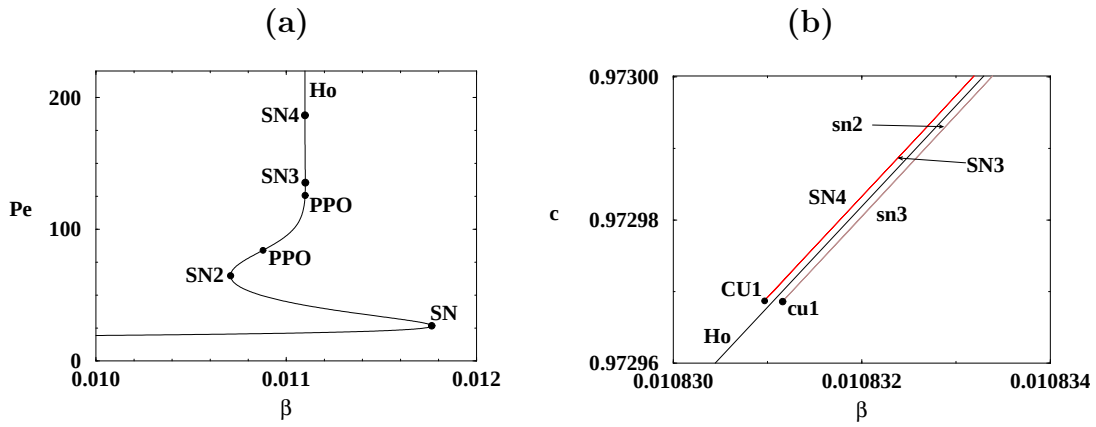


Figura 5.4: Para $\alpha = -1.2$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$: (a) Diagrama de bifurcaciones (β frente al periodo) de las órbitas periódicas simétricas para $c = 0.98$; (b) Conjunto parcial de bifurcaciones mostrando la primera cúspide, de las órbitas periódicas simétricas **CU1** y de las órbitas periódicas asimétricas **cu1**, que acumulan al punto **Hod2b** de la curva **Ho**.

bifurcación silla-nodo **SN3** y **SN4** del diagrama. Un diagrama de bifurcaciones similar (cambiando las bifurcaciones pitchfork de ruptura de simetría **PPO**, que experimentan las órbitas simétricas, por las de duplicación de periodo **PD** de las órbitas asimétricas) presentan las órbitas periódicas de tipo silla, que surge de la curva de Hopf de los equilibrios no triviales **h**, en su camino de aproximación a la homoclina principal **Ho**. La continuación numérica de estas curvas de bifurcación (sillas-nodo, pitchfork y duplicación de periodo) sugiere que todas ellas emergen desde el punto de degeneración **Hod1b** de la conexión homoclina **Ho**. En la figura 5.4(b) se observa cómo las curvas de bifurcación silla-nodo, correspondientes a las órbitas periódicas simétricas **SN3** y **SN4** (asimétricas **sn2** y **sn3**), forman la primera cúspide **CU1** (respectivamente **cu1**) de la sucesión de cúspides que acumulan a ambos lados de la degeneración **Hod2b** (ver Khibnik, Roose y Chua (1993)).

Ya que el equilibrio en el origen es de tipo silla-foco en el punto **Hod2b**, en lugar de tipo silla, es evidente que nuevas degeneraciones sobre la curva de conexiones homoclinas deben existir entre los dos valores de α considerados ($\alpha = -0.8$ y $\alpha = -1.2$), más específicamente, entre $\alpha = -1.2$ y $\alpha_{\mathbf{TBD2}} \approx -1.08132$. Para analizar estos nuevos puntos de bifurcaciones globales de codimensión dos, continuamos en el espacio de parámetros (α, β, c) las curvas de conexiones homoclinas degeneradas de codimensión dos. Comenzamos esta continuación a partir de los puntos degenerados sobre la curva **Ho** obtenidos para $\alpha = -1.2$, en el rango de parámetros de la figura 5.3, a saber, **Hod1a**, **Hod1b**, **Hod2b** y **Hod3**.

De este modo, en la figura 5.5, se muestra la proyección de las citadas curvas sobre el plano de parámetros (α, β). Podemos ver cómo varias curvas surgen del punto donde tiene lugar la degeneración triple-cero **TZ**:

- La curva de órbitas homoclinas con un autovalor real doble, **Hod1a**, donde la transición del origen de tipo silla a silla-foco ocurre (la línea azul discontinua). Ya que

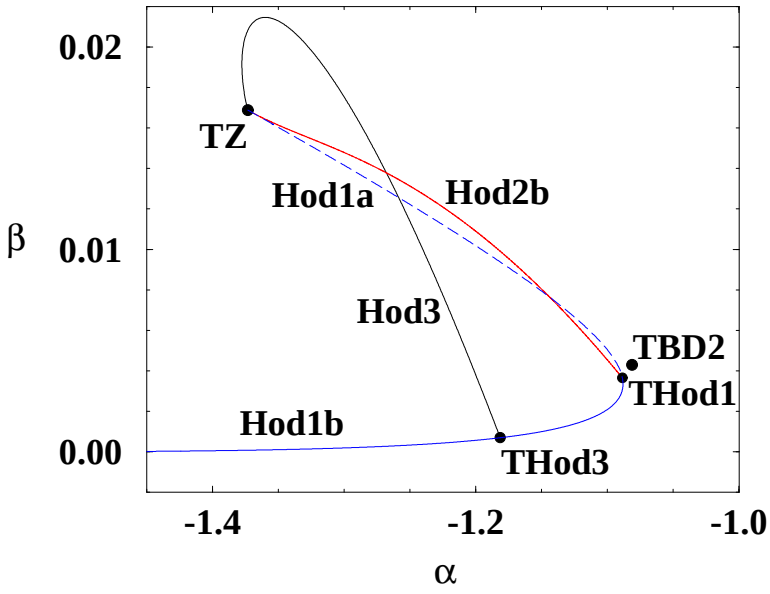


Figura 5.5: Proyección de las curvas de órbitas homoclinas degeneradas sobre el plano (α, β) para $\gamma = 0.3$, $a = -1$.

el autovalor doble no es determinante en los alrededores del punto **TZ**, la bifurcación homoclina permanece *dócil* y el conjunto de bifurcaciones no contiene curvas de bifurcación de las cuales puedan surgir otros ciclos límite que no sea la rama de conexiones homoclinas primaria. El punto final de la curva **Hod1a** es un nuevo punto de codimensión tres **THod1**, para $\alpha \approx -1.0886237$, $\beta \approx 0.0036546$, $c \approx 1.011682$, ya que los valores propios son de la forma $(-\lambda,-\lambda,\lambda)$ con $\lambda \approx 0.198658$. Del otro lado de **THod1**, una curva **Hod1b** (la línea azul continua) surge. Ahora el autovalor doble es determinante y por lo tanto, el conjunto de bifurcaciones contiene un número infinito de curvas de bifurcación que surgen del punto de bifurcación de codimensión dos **Hod1b** (ver Belyakov (1980)). Además, un nuevo punto de codimensión tres, **THod3**, aparece sobre la curva **Hod1b**, para $\alpha \approx -1.181399$, $\beta \approx 0.000698$, $c \approx 1.10039$, cuando los valores propios son de la forma $\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$ con $\lambda \approx 0.52650$. Notar que la curva **Hod1b** termina en su intersección con el plano $\beta = 0$, para $\alpha \approx -1.574576$, $c \approx 1.238043$, donde el sistema (1.1) está desacoplado y los valores propios del origen son ($-\gamma = -0.3$,$-\gamma = -0.3$,$\lambda \approx 1.249392$). Para los valores negativos de β otra rama de la curva **Hod1b** también existe.

- la curva **Hod2b** (la línea roja) donde, siendo el origen un equilibrio de tipo silla-foco, los autovalores líderes estables e inestables son resonantes. Esta curva termina en el punto de codimensión tres **THod1**.

- la curva **Hod3** (la línea negra) donde, siendo el origen un equilibrio de tipo silla-foco, la divergencia del campo vectorial (1.1) se anula en el origen. Esta curva termina en el punto de codimensión tres **THod3**.

Entonces hemos obtenido varios resultados importantes. Primero, tres curvas de conexiones homoclinas de codimensión dos surgen del punto de degeneración triple-cero **TZ**. Segundo, dos nuevos centros organizadores de codimensión tres han sido detectados: **THod1** (donde el origen tiene una transición de foco a nodo y al mismo tiempo $\delta = 1$) y **THod3** (donde el origen tiene una transición de foco a nodo y al mismo tiempo $\delta = 1/2$). Finalmente, hemos mostrado que ambos puntos de codimensión tres están unidos, con la degeneración lineal triple-cero, a través de las curvas de conexiones homoclinas degeneradas.

Pero una pregunta importante está abierta en este momento: ¿el punto de Takens-Bogdanov degenerado **TBD2** está conectado con los otros puntos de codimension tres (**TZ**,**THod1**,**THod3**) vía alguna curva de conexiones homoclinas degeneradas? (recordemos que hasta este momento no hemos encontrado la conexión homoclinia degenerada que según la teoría debe surgir del punto **TBD2**). Esperamos que esta curva de conexión homoclinas degeneradas una los puntos **TBD2** y **THod1**. Entonces para encontrar esta curva de conexiones homoclinas degeneradas, vamos a tomar un valor de α comprendido entre $\alpha_{\mathbf{THod1}} \approx -1.0886237$ y $\alpha_{\mathbf{TBD2}} \approx -1.08132$, a saber $\alpha = -1.085$.

Para este último valor de α (ver la figura 5.6), la conexión homoclina **Ho** que surge atractiva del punto **TB** cambia a repulsiva cuando esta cruza el punto de degeneración **Hod2a** (la degeneración predicha por el análisis local del punto de Takens-Bogdanov degenerado **TBD2**). Por consiguiente, dos curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas surgen del punto **Hod2a**, entrando en la región donde la conexión homoclina es repulsiva ($\delta < 1$), una de órbitas periódicas simétricas, **SN** (que surgía del punto **TB** en la figura 5.2), y otra de órbitas periódicas asimétricas, **sn2**. Esta última curva colapsa en una cúspide, **cu**, con la curva silla-nodo de órbitas periódicas asimétricas, **sn**, que surge del punto donde tiene lugar una degeneración de la bifurcación Hopf de los equilibrios no triviales, **ho**. Además, las curvas de silla-nodo de órbitas periódicas simétricas, **SN2** y **SN3**, colapsan en otra cúspide **CU**, predicha en el análisis local del punto de Takens-Bogdanov degenerado **TBD2**.

Obsérvese que numéricamente ya hemos encontrado todo el comportamiento de bifurcaciones predicho analíticamente para el punto de Takens-Bogdanov degenerado **TBD2**, a saber las curvas de codimension dos **TB**, **Hd**, **hd**, **Hod2a** y **CU**.

De otra parte, la degeneración inclinación flip **Hodif** también está presente, siendo el punto donde finaliza la curva **SN**. Notar que la curva de puntos **cu**, donde tiene lugar una bifurcación cúspide de órbitas periódicas asimétricas, no está relacionada con la degeneración **TBD2**, por lo tanto otro punto de bifurcación de codimensión tres debe existir entre $\alpha = -1.085$ y $\alpha_{\mathbf{TBD2}}$, siendo este punto donde nace la curva de puntos **cu**.

Ahora continuamos en tres parámetros la curva de puntos **hd**, donde tiene lugar una bifurcación de Hopf degenerada de los equilibrios no triviales, y la curva de puntos **Hod2a**, donde el origen es un equilibrio de tipo silla y las variedades líderes estables e inestables están en resonancia. Como se observa en la figura 5.7 la curva de puntos **Hod2a** existe entre los puntos de codimensión tres **TBD2** y **THod2**. Esta figura completa la figura 5.5, añadiendo las curvas que surgen del punto **TBD2**; si bien en este caso hemos dibujado la proyección de las curvas sobre el plano α-c de cara a una mejor visualización. Notar que, en este caso particular, la curva de puntos **hd** existe a ambos lados del punto de

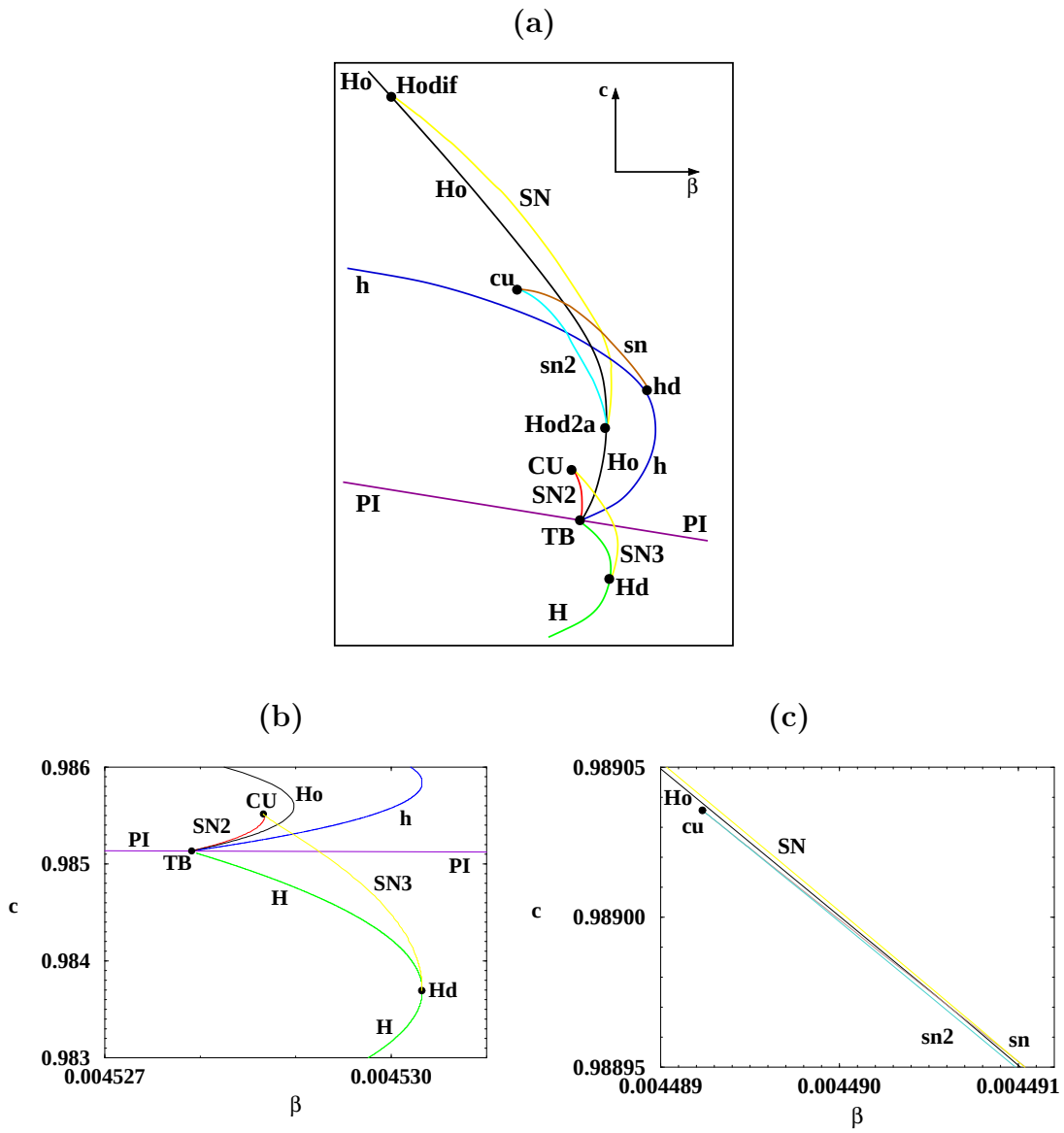


Figura 5.6: Conjunto parcial de bifurcaciones para $\alpha = -1.085$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$: (a) dibujo cualitativo; (b) zoom en un entorno del punto **TB**; (c) zoom en un entorno de la cúspide **cu**.

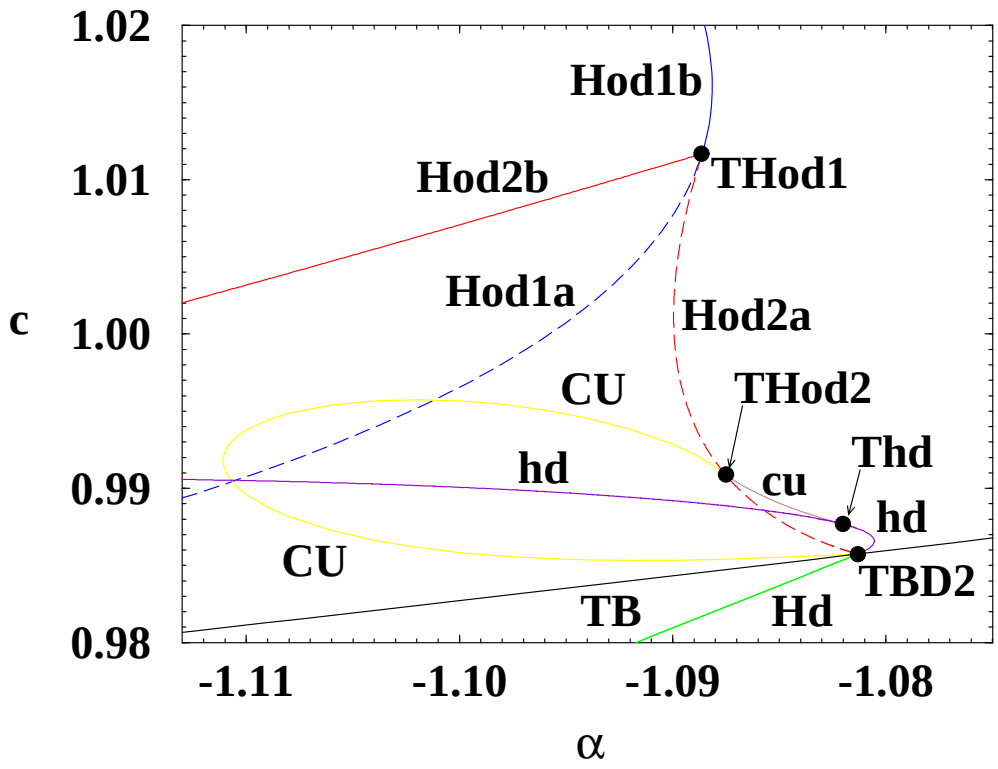


Figura 5.7: Detalle, en un entorno del punto de Takens-Bogdanov degenerado **TBD2**, de la proyección sobre el plano (α, c) de la curva de órbitas homoclinas degeneradas para $\gamma = 0.3$, $a = -1$.

codimensión tres **TBD2**, debido a la existencia de un punto de retorno sobre la misma.

Obsérvese que la continuación numérica de la curva de puntos **cu** nos ha permitido detectar un nuevo punto de bifurcación de codimensión tres, **THod2**, para los valores $\alpha \approx -1.0875$, $\beta \approx 0.00457$, $c \approx 0.9909$. En este punto, simultáneamente se cumple que $\delta = 1$ y $a = 1$, donde a es el coeficiente de la siguiente aplicación retorno de Poincaré: $x \to \varepsilon + a|x|^{\delta}$. Notemos que los casos $a > 1$ y $a < 1$ han sido estudiados en Khibnik, Roose y Chua (1993), y la degeneración de codimensión tres citada en Roussarie y Rousseau (1996).

Precisamente las curvas de cúspides **CU** y **cu** emergen desde el punto **THod2**. Estas cúspides de órbitas periódicas son las que permiten la transición de las curvas de silla-nodo de órbitas periódicas **sn** y **SN**, que surgen del punto de degeneración **Hod2a**, cuando cruzamos el punto de codimensión tres **THod2**. En efecto, las curvas **SN** y **sn2** surgen del punto **Hod2a** hacia la región de Shil'nikov ($\delta < 1$, cuando $0 < a < 1$) como podemos ver en la figura 5.6, mientras que al otro lado del punto de codimensión tres (ver la figura 5.8), las curvas **SN4** y **sn** surgen del punto **Hod2a** hacia la región *dócil* ($\delta > 1$, cuando $a > 1$) de la bifurcación homoclina.

A diferencia de la curva de puntos **CU**, que como predice la teoría finaliza en el punto **TBD2**, la curva de puntos **cu** desaparece en un nuevo punto de codimensión tres

Thd, donde una degeneración de segundo orden, de la bifurcación Hopf de los equilibrios no triviales, ocurre para $\alpha \approx -1.08202$, $\beta \approx 0.00436$, $c \approx 0.98768$. Es conocido que desde el punto **Thd**, localmente, una única curva de cúspides **cu** surge (ver, por ejemplo, Arrowsmith y Place (1990)). La curva de puntos **hod** finaliza, fuera del rango de la ventana mostrado en la figura 5.7, en el punto **HPD** para $\alpha = -1.69$, $\beta = 0.09$, $c \approx 0.76923$, donde tiene lugar una bifurcación Hopf-pitchfork degenerada del origen que fue analizada en el capítulo dos de esta memoria (ver la figura 2.17). La curva de puntos **Hod**, donde se presenta una degeneración de primer orden de la bifurcación Hopf del origen, también pasa por el punto **HPD**, si bien en este caso existe otra rama de la citada curva al otro lado del punto **HPD** (ver las figuras 2.17 y 2.16 del capítulo dos).

Recordemos que según los resultados teóricos obtenidos en la sección 1.4 del capítulo uno, no existe ningún valor de los parámetros de las ecuaciones (1.1) para los que la degeneración de la bifurcación Hopf del origen sea de segundo orden. Pero de acuerdo a lo obtenido en la sección 1.4 del citado capítulo, sí podían existir en el caso de la bifurcación de Hopf de los equilibrios no triviales. Además de acuerdo al proceso allí descrito, al fijar $\gamma = 0.3$, se deducen las coordenadas del punto **Thd** en el espacio triparamétrico (α, β, c).

La proximidad de los puntos de codimensión tres **TBD2**, **Thd** y **THod2**, nos puede hacer pensar en la existencia de un punto de Takens-Bogdanov doblemente degenerado (ver Rousseau (1990), Freire, Pizarro y Rodríguez-Luis (1999)). Hemos analizado esta posibilidad en la expresión analítica de la bifurcación de Takens-Bogdanov, pero tal punto de codimensión cuatro no puede darse para la ecuación de Chua (1.1) en el espacio de cuatro parámetros $(\alpha, \beta, \gamma, c)$.

Nuestro siguiente paso es obtener el conjunto de bifurcaciones en un entorno de los puntos de bifurcación homoclina de codimensión tres **THod2** y **THod1**. Un primer corte, para $\alpha = -1.085$ a la derecha del punto **THod2**, lo podemos ver en la figura 5.6. Para los restantes cortes elegimos un valor de α entre $\alpha_{\mathbf{THod2}} \approx -1.0875$ y $\alpha_{\mathbf{THod1}} \approx -1.0886237$ (a saber, $\alpha = -1.0885$) y otro menor que $\alpha_{\mathbf{THod1}}$ (a saber, $\alpha = -1.0895$).

En la figura 5.8 mostramos un conjunto parcial de bifurcaciones en $\alpha = -1.0885$. Si comparamos esta figura con la figura 5.6 se observan las siguientes diferencias. En primer lugar, un punto de cúspide de órbitas periódicas simétricas, **CU**, aparece en lugar de la cúspide **cu** (de órbitas periódicas asimétricas). Observemos en la figura 5.7 cómo, dentro del rango de existencia de la curva **CU**, para cada valor que fijemos $\alpha < \alpha_{\mathbf{THod2}}$ hay dos cortes con la citada curva, mientras que sólo hay uno cuando $\alpha > \alpha_{\mathbf{THod2}}$ (en este último caso, una intersección con la curva de puntos **cu** también ocurre). Este cambio de cúspides es una consecuencia, según hemos comentado anteriormente, del cambio en la dirección hacia donde nacen las dos curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas que surgen del punto **Hod2a**. Notemos que además ya no tiene lugar la conexión entre los puntos de codimensión dos **Hodif** y **Hod2a** vía la curva **SN**.

La segunda diferencia importante entre los conjuntos de bifurcaciones de las figuras 5.8 y 5.6 es la existencia de dos puntos **Hod1b** sobre la curva de conexiones homoclinas **Ho**. La aparición de estos dos puntos es debida a la forma que tiene la curva **Hod1b** cerca del punto **THod1** (ver la figura 5.7). De acuerdo a Belyakov (1980), para sistemas tridimensionales sin simetría, desde cada uno de estos puntos donde la conexión homoclina tiene un autovalor real doble determinante surgen dos haces, consistente cada uno de ellos

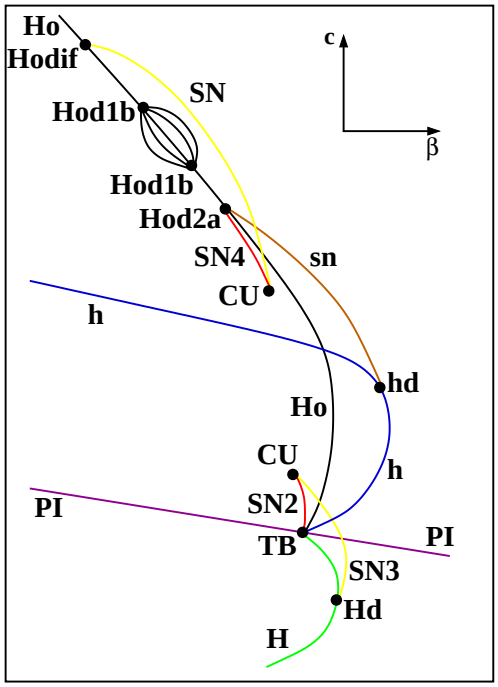


Figura 5.8: Conjunto cualitativo de bifurcaciones para los valores $\alpha = -1.0885$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$.

en un número infinito de curvas de bifurcación, que corresponden a conexiones homoclinas de distintos pulsos (según hemos observado en el capítulo cuatro de esta memoria) y silla-nodo de órbitas periódicas. También, en el caso no simétrico, es conocido (ver Kuznetsov, Feo y Rinaldi (2001)) que del citado punto de degeneración surgen un número infinito de curvas de duplicación de periodo. Debido a la $\mathbb{Z}_2$-simetría que la ecuación de Chua (1.1) tiene, es de esperar también un número infinito de curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas y curvas de ruptura de simetría de estas órbitas periódicas simétricas. En el dibujo cualitativo de la figura 5.8, hemos representado algunas de estas curvas que existen entre los dos puntos **Hd1b** situados sobre la curva **Ho**.

El conjunto de bifurcaciones a la izquierda del valor $\alpha_{\mathbf{THod1}}$ se muestra en la figura 5.9 para $\alpha = -1.0895$. En este caso aparecen dos puntos **Hod2a** como consecuencia del punto de retorno que tiene la citada curva (ver la figura 5.7). Al mismo tiempo, uno de los puntos **Hod1b** ha desaparecido y dos nuevos puntos de degeneración sobre la curva de conexiones homoclinas **Ho** surgen, a saber **Hod1a** y **Hod2b**. La presencia del punto **Hod2b** implica en el caso no simétrico (ver Belyakov (1984)) la existencia de varias series infinitas de curvas de bifurcación de codimensión uno (órbitas homoclinas y silla-nodo de órbitas periódicas con cúspides **cu1**) que acumulan de forma compleja sobre el punto **Hod2b**. Además, otras infinitas series de curvas de bifurcación de codimensión uno, que corresponden a conexiones homoclinas de doble pulso, triple pulso, ... están presentes (ver Gonchenko, Turaev, Gaspard y Nicolis (1997)). En el caso simétrico también aparecen singularidades de tipo cúspide **CU1** sobre las curvas de silla-nodo de órbitas periódicas

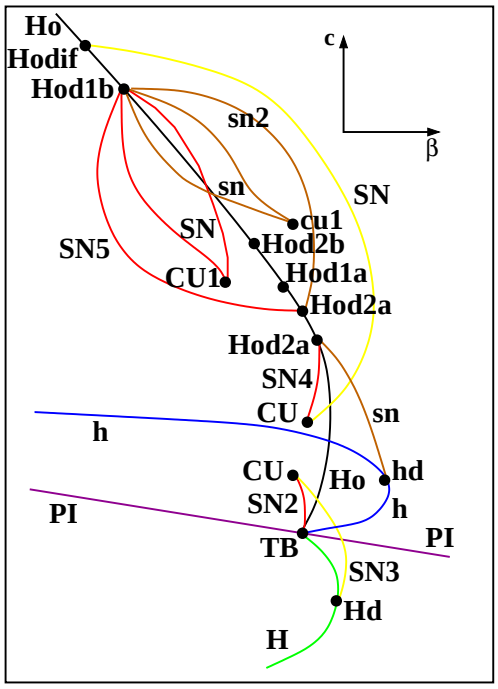


Figura 5.9: Conjunto cualitativo de bifurcaciones para los valores $\alpha = -1.0895$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$.

simétricas **SN** (ver Khibnik, Roose y Chua (1993)) y una mayor riqueza de conexiones homoclinas de doble pulso, triple pulso, ... está presente, según se desprende del capítulo cuatro de esta memoria (ver Algaba, Merino y Rodríguez-Luis (2005)).

Disminuyendo nuevamente el valor del parámetro α, para $\alpha \approx -1.089958$ (punto de retorno de la curva **Hod2a** en la figura 5.7), los dos puntos **Hod2a** colapsan y desaparecen. En ese momento las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas asimétricas **sn** y **sn2** se unen y dan lugar a una única curva de bifurcación que conecta los puntos **hd** y **Hod1b** (de esta forma surge la curva **sn** de la figura 5.3). También, en ese momento, se unen las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas **SN4** y **SN5** conectando el punto de cúspide **CU** con el punto **Hod1b**.

Finalmente, para $\alpha \approx -1.11105$ (punto de retorno de la curva **CU** en la figura 5.7), los dos puntos de cúspide **CU** también colapsan y desaparecen permitiendo que se unan, por un lado las curvas de bifurcación silla-nodo **SN2** y la que surge del punto **Hod1b** (dando lugar a la curva que denotamos por **SN2** en la figura 5.3), y por otro lado las curvas de bifurcación silla-nodo **SN** y **SN3** de la figura 5.9 (dando lugar a la curva que denotamos por **SN** en la figura 5.3). De esta forma hemos explicado, detalladamente, cómo surgen todas las degeneraciones que están presentes en la figura 5.3. Podemos ahora completar la figura 5.5 y concluir que hay curvas de bifurcación, de conexiones globales de codimensión dos, que unen los puntos de codimensión tres **TBD2** y **TZ** (ver figura 5.10).

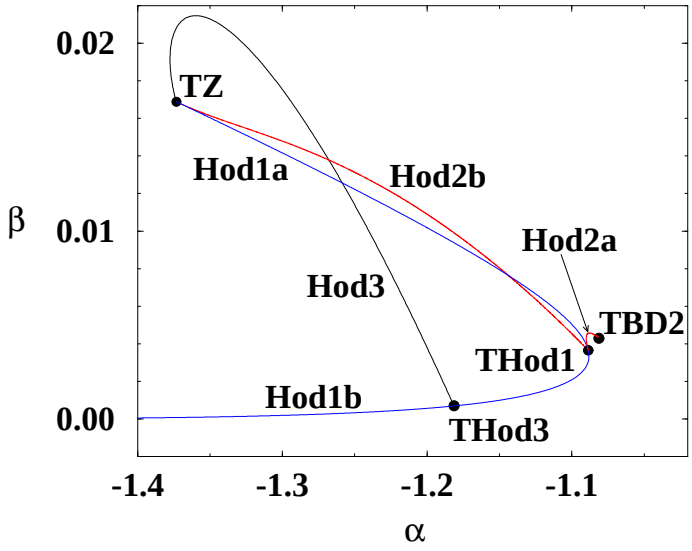


Figura 5.10: Proyección de las curvas de órbitas homoclinas degeneradas sobre el plano (α, β) para $\gamma = 0.3$, $a = -1$.

5.5.2. Conexión heteroclina principal y sus degeneraciones

Para pasar de la zona 22 a la zona 21 en la figura 1.13, haremos un corte $\alpha =$*constante* al otro lado de la bifurcación triple-cero. De esta forma pretendemos encontrar numéricamente las curvas de bifurcación detectadas en nuestro estudio teórico, al mismo tiempo que aparecerán nuevas bifurcaciones globales de codimensión dos y tres que estudiaremos numéricamente. Este estudio nos permitirá seguir completando el conjunto parcial de bifurcaciones de la figura 5.10, viendo qué relación tienen con las conexiones globales ya obtenidas y los puntos de degeneración analizados.

Dado que la degeneración lineal triple-cero se experimenta para el valor del parámetro $\alpha_{\mathbf{TZ}} = -1.373125$, mostraremos en el plano de parámetros (β, c) un conjunto parcial de bifurcaciones para $\alpha = -1.41$. Como podemos ver en la figura 5.11(a) desde el punto **TB**, dos curvas emergen: **H**, correspondiente a una bifurcación de Hopf subcrítica del origen (de donde surge una órbita periódica simétrica) y **Het**, una curva de conexiones heteroclinas que finaliza en el punto **TP**. Un punto–T (ver figura 5.11(c)) es una conexión heteroclina de codimensión dos donde las variedades unidimensionales de los dos equilibrios silla están conectadas, y el lazo heteroclino se cierra con la intersección de sus variedades bidimensionales (ver Glendinning y Sparrow (1986); Bykov (1993); Fernández-Sánchez, Freire y Rodríguez-Luis (2002)).

Del punto de bifurcación Hopf-pitchfork **HP** (del tipo VIa en concordancia con lo obtenido en el corolario 5.4.1) tres nuevas curvas emergen: **h**, correspondiente a una bifurcación de Hopf supercrítica de los equilibrios no triviales (de donde surgen un par de órbitas periódicas asimétricas); **PPO**, correspondiente a una bifurcación pitchfork de órbitas periódicas simétricas (de donde surgen un par de órbitas periódicas asimétricas repulsivas); **HH**, una curva de Hopf secundaria de órbitas periódicas (donde nace un toro invariante atractivo) que finaliza en el punto **TBPO** donde se experimenta una bifur-

cación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas. Este punto está situado sobre la curva **PD** donde experimentan una bifurcación de duplicación de periodo las órbitas asimétricas que surgen de la curva de Hopf de los equilibrios no triviales **h**.

Hacemos notar que las curvas **PPO** y **PD** se aproximan al punto **TB** y después se separan de dicho punto. Así mismo para este valor del parámetro siguen estando presentes las curvas de bifurcación silla-nodo, de órbitas periódicas asimétricas **sn** (que comienza en el punto de codimensión dos **hd**) y de órbitas periódicas simétricas **SN** (en el punto **Hd**), de la figura 5.3; si bien esta última curva no la hemos dibujado en la figura 5.11(a) por simplicidad en la misma. También es de destacar que la curva de conexiones homoclinas del origen **Ho** no está relacionada, para este valor de los parámetros, ni con el punto **TB** (lo que está justificado teóricamente) ni con el punto **TP** que encierra en su interior. Este proceso por el cual las órbitas de conexiones homoclinas y heteroclinas, que surgen del punto **TP**, acaban estando relacionadas con el punto de bifurcación de Takens-Bogdanov **TB** lo estudiaremos posteriormente.

La curva de conexiones heteroclinas **Het**, que emerge desde el punto **TB**, presenta algunas degeneraciones no deducidas del estudio analítico realizado en las secciones anteriores (ver figura 5.11(b)). Para analizarlas denotaremos por $(\rho' \pm i\omega', \lambda')$ los autovalores de los equilibrios no triviales y $\delta' = \left|\dfrac{\rho'}{\lambda'}\right|$. La primera de ellas, **Hetd1**, es causada por la transición de los equilibrios no triviales de silla a silla-foco; al ser el autovalor doble no determinante ($\delta' > 1$) la bifurcación heteroclina permanece *dócil* (ver Champneys y Kuznetsov (1994)) y de la curva **Het** emerge una única órbita periódica simétrica repulsiva.

La segunda degeneración, **Hetd2**, sobre la curva **Het** se experimenta cuando $\delta' = 1$ (autovalores resonantes), ello implica la existencia de una infinidad de cúspides de órbitas periódicas simétricas que acumulan, desde un lado de la curva **Het**, al punto **Hetd2** (ver Blázquez y Tuma (1996)). En la figura 5.11(b) podemos ver la primera de ellas. Recordar que para $\alpha = -1.6$, las dos primeras cúspides de la sucesión anterior ya se mostraron en el capítulo cuarto de esta memoria (ver figuras 4.15, 4.20 y 4.22). La transición de conexión heteroclina *dócil* a *caótica* ocurre en este punto. La última degeneración que hemos detectado, antes de finalizar en el punto **TP**, aparece cuando $\delta' = \dfrac{1}{2}$ (divergencia nula). Recordemos que esta degeneración está relacionada con la existencia de puntos de codimension dos de tipo **A** (donde se presenta una bifurcación doblemente degenerada de órbitas periódicas simétricas por la aparición simultánea de una bifurcación silla-nodo y pitchfork), permitiendo el cambio de estabilidad de las órbitas periódicas simétricas relacionadas con ella (ver Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*b*)).

Para ver de dónde surgen estas curvas de conexiones globales de codimensión dos continuamos las mismas, en el espacio de parámetros (α, β, c), comenzando en las degeneraciones situadas sobre la curva **Het** de la figura 5.11(b). De esta forma, utilizando la información obtenida del conjunto de bifurcaciones para $\alpha = -1.41$, completaremos la figura 5.10. Como podemos ver en la figura 5.12, del punto triple-cero **TZ**, al margen de la curva de bifurcación no degenerada de Takens-Bogdanov de equilibrio **TB**, surgen las nuevas curvas (en relación a la figura 5.10):

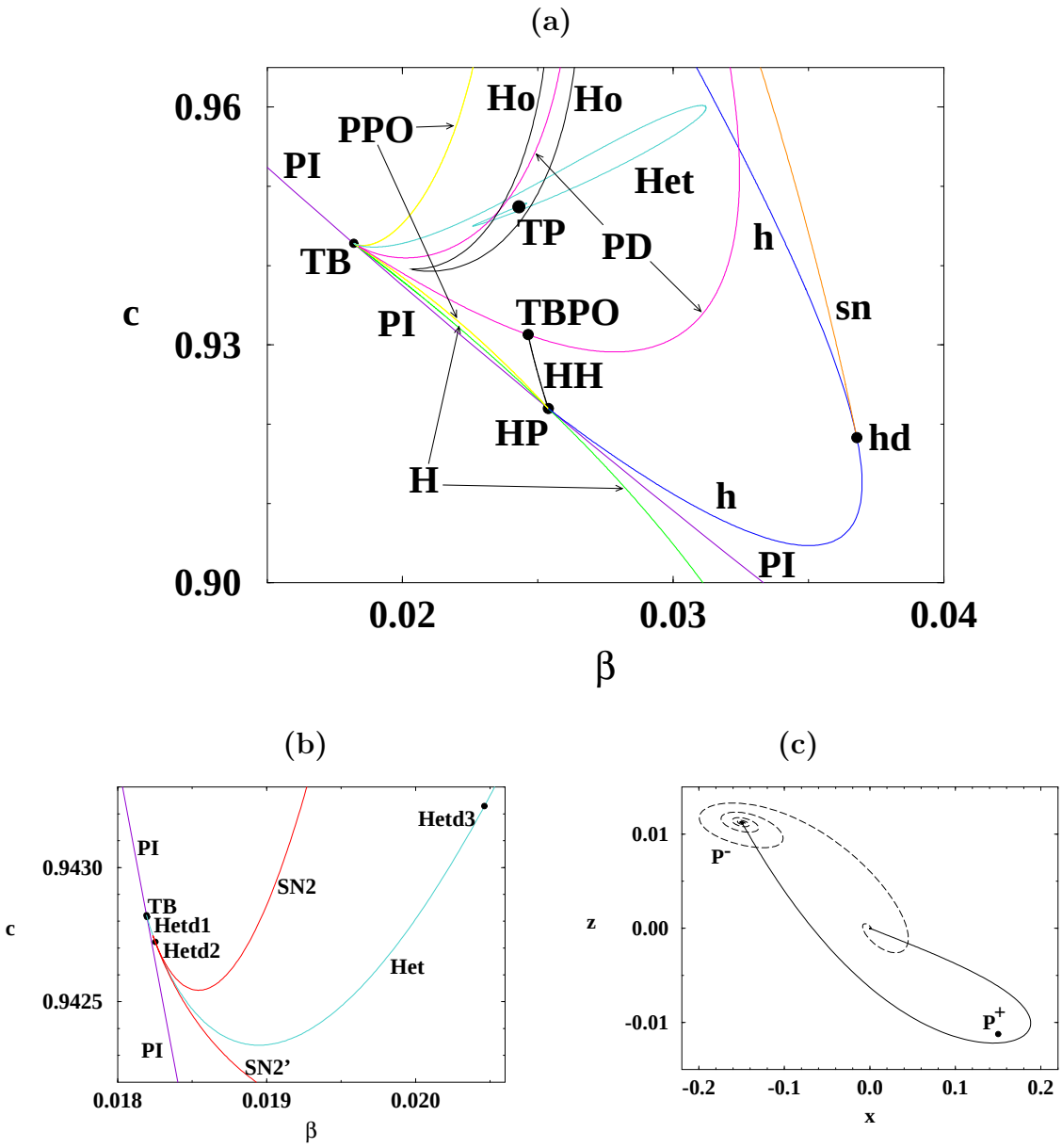


Figura 5.11: Para $\alpha = -1.41$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$: (a) Conjunto parcial de bifurcaciones. (b) Curva de conexiones heteroclinas **Het**, en un entorno de la degeneración de Takens-Bogdanov del origen **TB**, donde aparecen sus degeneraciones y la primera cúspide de órbitas periódicas simétricas asociada a la degeneración **Hetd2**. (c) Punto-T **TP** que existe para $\beta \approx 0.02430$, $c \approx 0.94742$. La línea continua corresponde a la variedad unidimensional y la discontinua a la variedad bidimensional.

- **TP**, curva de puntos–T donde tiene lugar una conexión heteroclina de codimensión dos. Esta curva finaliza, fuera del rango de la figura 5.12, en un nuevo punto de codimensión tres **TPh** (para $\alpha \approx -1.65494$, $\beta \approx 0.04851$, $c \approx 0.95789$) cuando la curva **TP** interseta con la superficie de Hopf de los equilibrios no triviales **h** (ver Fernández-Sánchez, Freire y Rodríguez-Luis (2008)). Notemos que esta curva presenta una falta de transversalidad, con respecto al parámetro α, en los valores $\alpha \approx -1.34156$, $\beta \approx 0.01654$, $c \approx 0.94906$. Las implicaciones que se derivan de ello, en particular sobre las curvas de bifurcación asociadas a la curva **TP**, serán estudiadas en el capítulo sexto de esta memoria (ver Algaba, Fernández-Sánchez, Freire, Merino y Rodríguez-Luis (2002); Algaba, Merino, Fernández-Sánchez y Rodríguez-Luis (2006); Algaba, Fernández-Sánchez, Merino y Rodríguez-Luis (2009)).

- **HP**, curva donde se experimenta una bifurcación Hopf-pitchfork de equilibrios no degenerada, del tipo VIa siguiendo la notación de Guckenheimer y Holmes (1997),[Sec. 7.5].

- **Hetd1**, curva de conexiones heteroclinas donde los equilibrios no triviales tienen un autovalor real doble, y experimentan la transición de silla a silla-foco (línea azul). Puesto que el autovalor doble no es determinante ($\delta' > 1$) en un entorno del punto **TZ**, la bifurcación heteroclina permanece *dócil* y de la misma surge un único ciclo límite simétrico repulsivo. Esta curva desempeña un papel análogo al de la curva **Hod1a**.

- **Hetd2**, curva donde siendo los equilibrios no triviales de tipo silla-foco, los autovalores líderes estable e inestable están en resonancia (línea roja). Esta curva desempeña un papel análogo al de la curva **Hod2b**.

- **Hetd3** curva donde siendo los equilibrios no triviales de tipo silla-foco, la divergencia del campo vectorial (1.1) se anula en el equilibrio (línea verde). Esta curva desempeña un papel análogo al de la curva **Hod3**.

5.5.3. Evolución de la conexiones globales en un entorno del triple-cero

Pretendemos ahora estudiar qué relación existe entre las conexiones globales que surgen de la bifurcación de Takens-Bogdanov, en las proximidades del punto **TZ**, y las que surgen de la curva de puntos–T **TP** (ver Algaba, Merino y Rodríguez-Luis (2009)). Sabemos de nuestro análisis teórico que para $\alpha < \alpha_{\mathbf{TZ}} = -1.373125$ del punto **TB** surge localmente una conexión heteroclina de los equilibrios no triviales no degenerada, mientras que si $\alpha > \alpha_{\mathbf{TZ}} = -1.373125$ surge una conexión homoclina del origen no degenerada. En los conjuntos de bifurcaciones de las figuras 4.8 y 4.9, del capítulo cuatro para $\alpha = -1.3$, se mostraba cómo del punto **TB** nace la curva de conexiones homoclinas del origen **H**. Asimismo del punto de degeneración sobre ella **Hd1b** surge una sucesión de curvas de conexiones homoclinas del origen de distinto pulso, a la izquierda de la curva **H**, todas

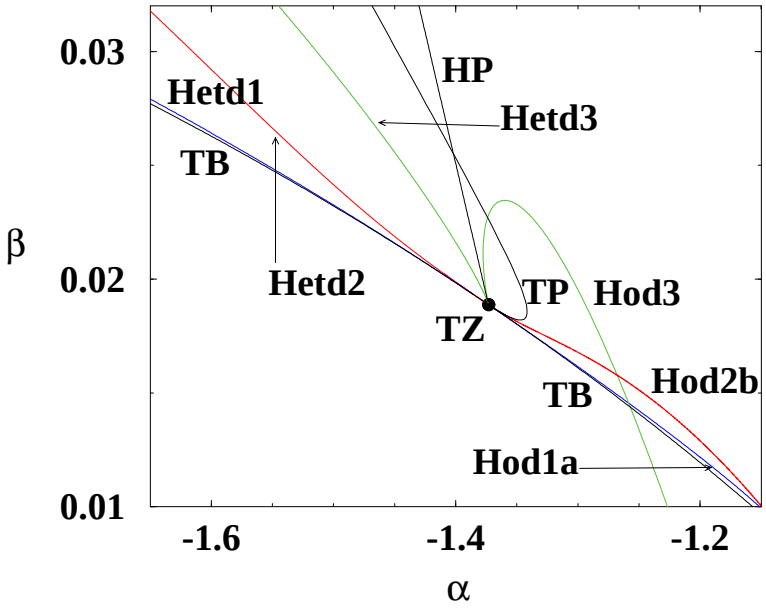


Figura 5.12: Proyección de las curvas de bifurcación de Takens-Bogdanov **TB**, Hopf-pitchfork **HP**, puntos–T **TP**, y de órbitas homoclinas degeneradas del origen **Hod1a**, **Hod2b**, **Hod3** y de conexiones heteroclinas degeneradas **Hetd1**, **Hetd2**, **Hetd3** sobre el plano (α, β) para $\gamma = 0.3$, $a = -1$.

ellas cerradas y encajadas. En las figuras citadas representamos las curvas de conexiones homoclinas $\mathbf{H}_{-}$ (de doble pulso), $\mathbf{H}_{--}$ (de triple pulso), y $\mathbf{H}_{---}$ (de cuádruple pulso).

Para encontrar las conexiones globales que surgen de un punto de la curva **TP**, dado que esta curva tiene una falta de transversalidad en el valor $\alpha \approx -1.34156$, realizamos un conjunto parcial de bifurcaciones para $\alpha = -1.3435$. En la figura 5.13(a) se observa cómo para dicho valor del parámetro hay una única curva de conexiones homoclinas del origen **HTP**, que une los dos puntos **TP**. Hacemos notar que para este valor del parámetro α siguen estando presentes las curvas de conexiones homoclinas, relacionadas con el punto de degeneración **Hd1b**, que aparecían para $\alpha = -1.3$; a saber: $\mathbf{H}_{-}$ (de doble pulso), $\mathbf{H}_{--}$ (de triple pulso), y $\mathbf{H}_{---}$ (de cuádruple pulso), si bien al ir disminuyendo el valor de α el punto de retroceso de las dos primeras curvas de conexiones homoclinas se va aproximando al punto de degeneración **Hd2** ($\delta = 1$) de la curva de conexiones homoclinas **H**. De esta manera cuando surge la curva de conexiones homoclinas del origen **HTP** (para $\alpha \approx -1.34156$) es interior a la curva cerrada $\mathbf{H}_{--}$. Recordemos que una conexión homoclina del origen de triple pulso $\mathbf{H}_{--}$, de acuerdo a la notación usada en el capítulo cuatro, cumple que la proyección en el plano xz de su variedad unidimensional, rodea en primer lugar al equilibrio no trivial $P^{+}(-x, -y, z)$ y después dos veces al equilibrio no trivial $P^{-}(x, y, -z)$ con $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ (ver figura 4.10 del capítulo cuatro).

Es importante destacar que cada una de las curvas cerradas de conexiones homoclinas que surgen del punto **Hd1b** son de un pulso concreto, mayor cuanto más interiores son, y no cambia cuando movemos el parámetro de control α; mientras que en la única curva de conexiones homoclinas del origen que une los dos puntos **TP**, que tiene conexiones

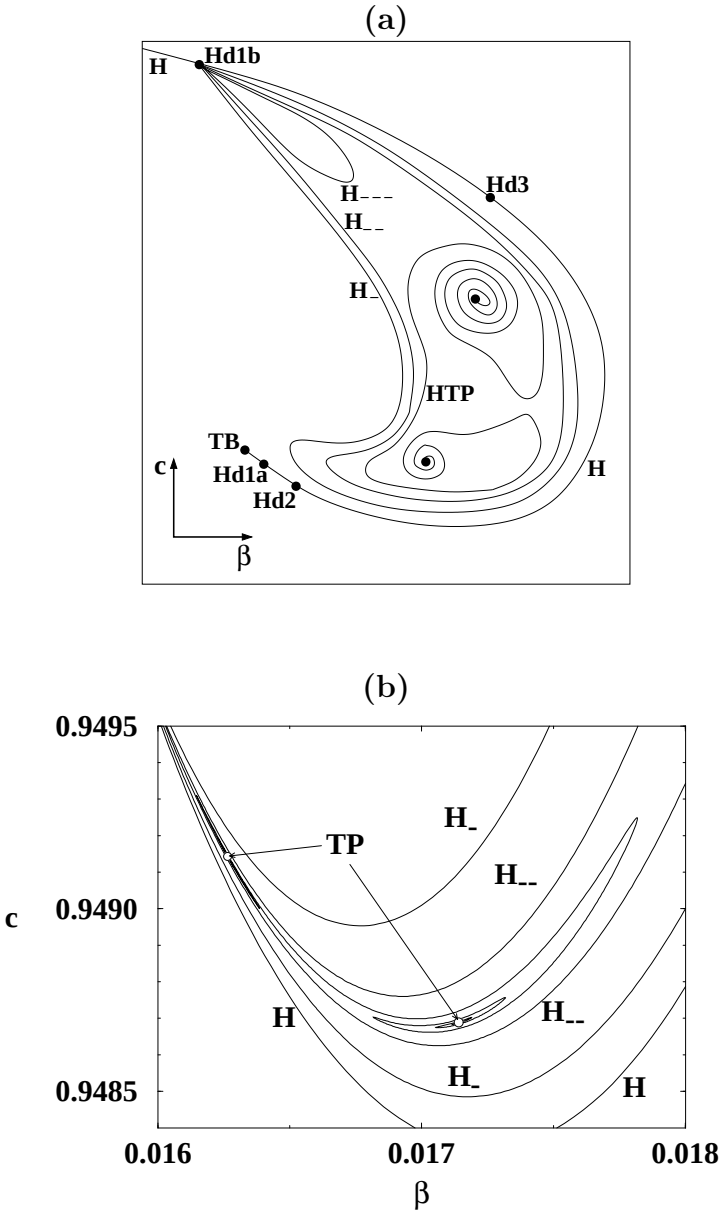


Figura 5.13: Para $\alpha = -1.3435$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$: (a) Conjunto parcial de bifurcaciones cualitativo. (b) Conjunto parcial de bifurcaciones, en un entorno de los dos puntos–T **TP**.

homoclinas de distintos pulsos, van apareciendo nuevas conexiones homoclinas de menor pulso, al variar la curva **HTP** en el plano de parámetros (β, c), cuando disminuimos el valor de α. En efecto, es conocido que cuando la curva **HTP** incrementa el número de vueltas en torno al punto **TP**, en el plano de parámetros, en paralelo se incrementa el número de vueltas que una conexión homoclina de la citada curva da, en el espacio de fases, en torno al equilibrio no trivial (ver Fernández-Sánchez, Freire y Rodríguez-Luis (2002); Algaba, Fernández-Sánchez, Freire, Merino y Rodríguez-Luis (2002)). Por otra parte es claro que debido a la forma de la conexión heteroclina presente en el punto **TP** (ver figura 5.11(c)), la curva de conexiones homoclinas del origen **HTP** que surge de ella está relacionada con conexiones homoclinas grandes, que rodean una vez al equilibrio P^+ y las restantes vueltas las dan al equilibrio P^-. Como consecuencia cuando existe esta curva **HTP** se encuentra situada a la izquierda de la conexión homoclina principal **H**, lugar donde se encuentran las conexiones homoclinas del origen del tipo $\mathbf{H}_{---}$..., siendo éstas las únicas homoclinas del origen con las que se relaciona, como veremos posteriormente.

Como también sabemos del punto **TP** surge una curva de conexiones homoclinas **HN** y de conexiones heteroclinas de los equilibrios no triviales **Het**, que no hemos representado en la figura 5.13 por simplicidad en la misma (ver Algaba, Merino, Fernández-Sánchez y Rodríguez-Luis (2003)), con características similares (ver figura 5.16(c)-(d)); si bien cuando la curva de conexiones heteroclinas **Het** incrementa el número de vueltas que da en torno al punto **TP**, en el plano de parámetros, lo que se incrementa ahora es el número de vueltas que las variedades unidimensionales de los equilibrios no triviales dan en torno al origen, en el espacio de fases, antes de cerrarse. Estas curvas, al igual que la curva **HTP**, no presentan degeneraciones para este valor del parámetro. En efecto, denotando como anteriormente $\delta' = \left|\dfrac{\rho'}{\lambda'}\right|$, en todos los puntos de ambas curvas se cumple que $0 < \delta' < \dfrac{1}{2}$ con $\lambda' < 0$, $\rho' > 0$. Pero al ser $\delta' < 1$ sabemos (ver Glendinning y Sparrow (1984); Blázquez y Tuma (1996)) que una infinidad de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas están presentes en los *wiggles* correspondientes a dichas conexiones globales. En particular estas órbitas periódicas grandes son simétricas, en el caso de una órbita heteroclina, y asimétricas para una homoclina de los equilibrios no triviales.

En la siguiente figura 5.14, para $\alpha = -1.3465$, podemos observar cómo la curva cerrada de conexiones homoclinas $\mathbf{H}_{--}$, que surge del punto **Hd1b**, se ha roto y sus dos ramas, izquierda $\mathbf{H}^{\mathbf{i}}_{--}$ y derecha $\mathbf{H}^{\mathbf{d}}_{--}$, finalizan ahora en dos puntos–T de la curva **TP**. De esta manera se produce una interacción entre la curva de conexiones homoclinas del origen, que surge de cada uno de los puntos–T, y la curva de conexiones homoclinas del origen del tipo $\mathbf{H}_{--}$, que surge del punto **Hd1b**. Este proceso permite ahora que, en las dos ramas de la curva $\mathbf{H}_{--}$, haya conexiones homoclinas de distinto pulso y que los puntos de codimensión dos **Hd1b** y **TP** estén unidos por estas dos ramas de conexiones homoclinas del origen.

Esta interacción ha sido posible porque la curva de conexiones homoclinas del origen **HTP**, concretamente el trozo de curva que une a las dos espirales que surgen de cada uno de los puntos–T, al disminuir el valor de α se va aproximando a la rama derecha de la curva de conexiones homoclinas del origen $\mathbf{H}_{--}$, contactando con ella para un valor

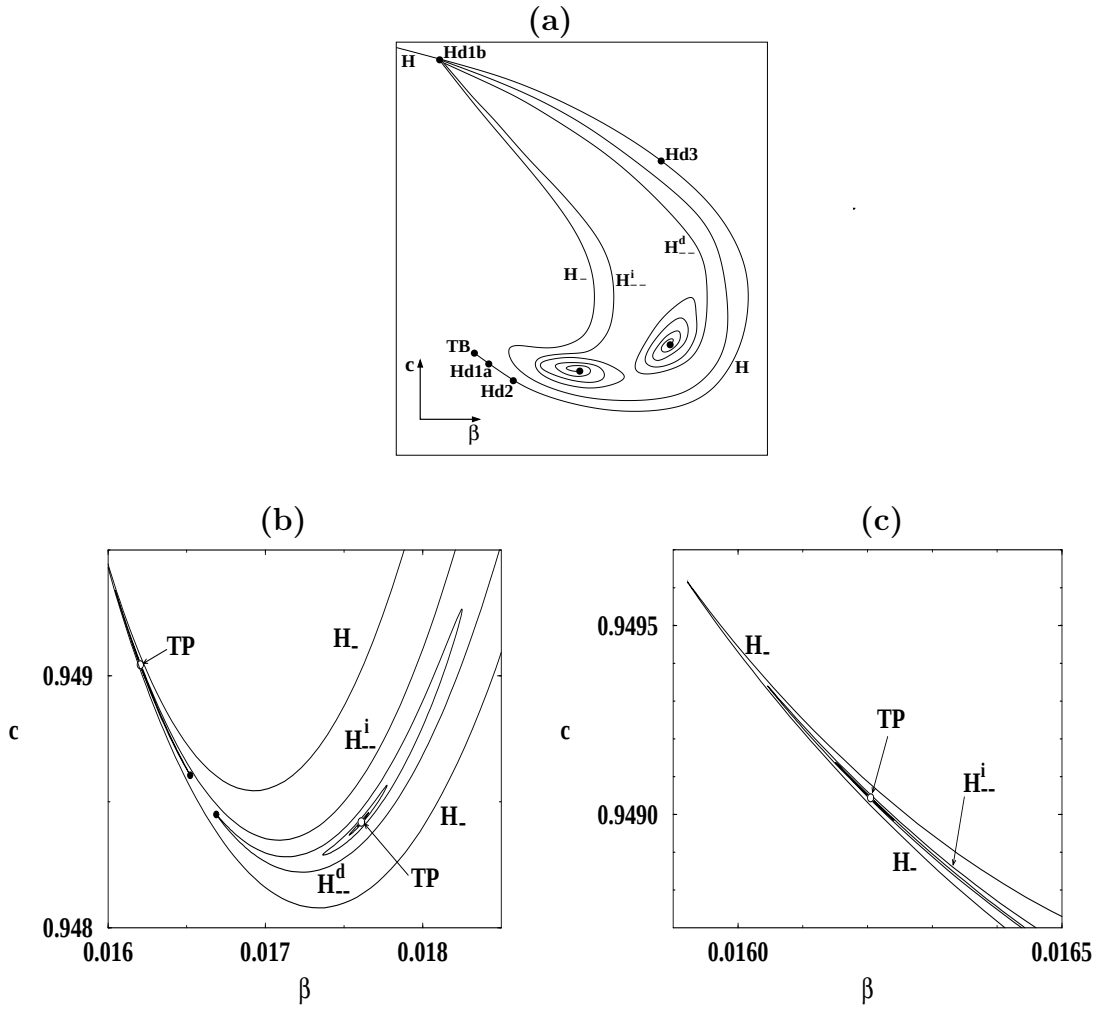


Figura 5.14: Para $\alpha = -1.3465$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$: (a) Conjunto parcial de bifurcaciones cualitativo. (b)-(c) Detalles del conjunto parcial de bifurcaciones en un entorno de los puntos–T **TP**.

de α comprendido entre $\alpha = -1.3435$ y $\alpha = -1.3465$. Notemos que todo este proceso ha ocurrido en el interior de la conexión homoclina del origen de doble pulso $\mathbf{H}_{-}$.

Al ir disminuyendo el valor del parámetro α los dos puntos negros de la figura 5.14(b), situados sobre cada una de las dos ramas que la conexión homoclina $\mathbf{H}_{--}$ tiene para ese valor, se van separando debido a que va disminuyendo la amplitud de las oscilaciones que ambas curvas de conexiones homoclinas del origen realizan en su camino de aproximación a los puntos–T de los que surgen **TP**. Al mismo tiempo la conexión homoclina del origen $\mathbf{H}^{\mathbf{i}}_{--}$ se va aproximando, en la zona del plano de parámetros (β, c) comprendida entre los dos puntos citados, a la rama derecha $\mathbf{H}^{\mathbf{d}}_{-}$, de la curva cerrada de conexiones homoclinas $\mathbf{H}_{-}$, evidenciando que el proceso anterior (de interacción entre las homoclinas del origen que surgen de los puntos **TP** y **Hd1b**) se va a repetir nuevamente.

En efecto, para $\alpha = -1.3569$, podemos ver en la figura 5.15 cómo este proceso se

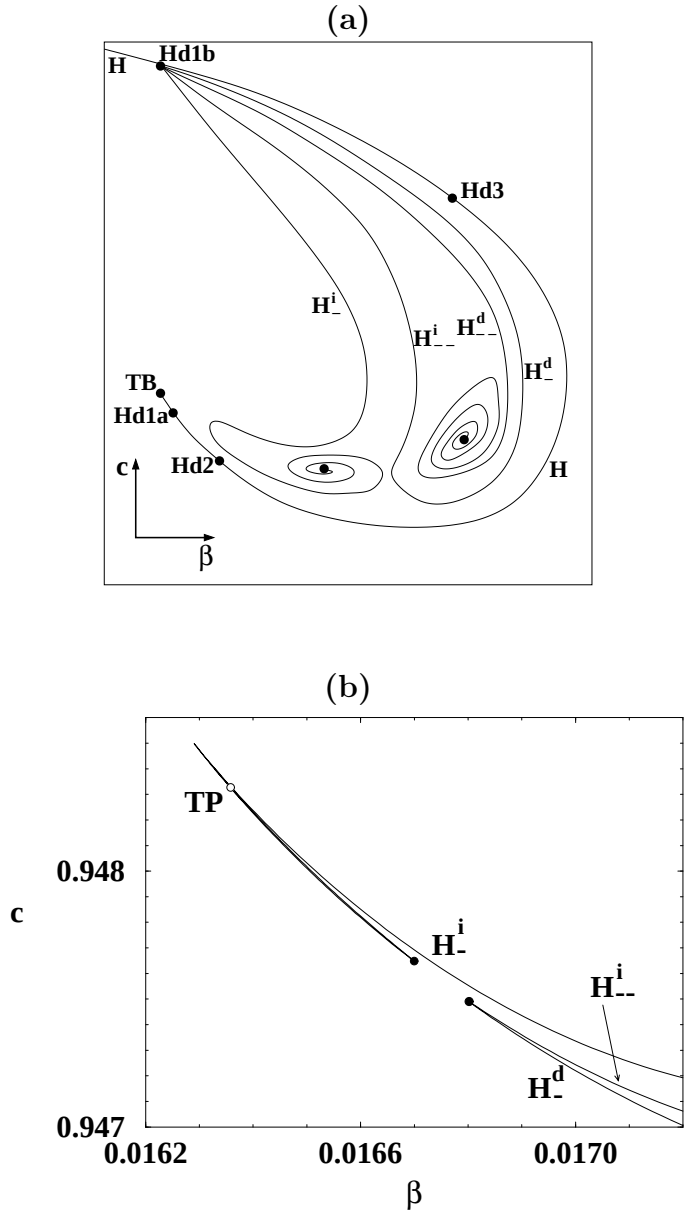


Figura 5.15: Para $\alpha = -1.3569$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$: (a) Conjunto parcial de bifurcaciones cualitativo. (b) Conjunto parcial de bifurcaciones en un entorno del punto–T situado a la izquierda **TP**.

ha repetido nuevamente, hecho que queda reflejado más claramente en la figura 5.16(a)-(b), para $\alpha = -1.36$. Como podemos observar se ha roto la curva cerrada de conexiones homoclinas del origen $\mathbf{H_}$. Esto permite que la conexión homoclina del origen $\mathbf{H^i_-}$, que surge del punto **TP** más próximo al punto donde tiene lugar la bifurcación de Takens-Bogdanov **TB**, quede ahora libre en el plano de parámetros, es decir, no encerrada en ninguna curva de conexiones homoclinas del origen. Al mismo tiempo se ha creado una nueva curva cerrada de conexiones homoclinas del origen que, surgiendo del punto **Hd1b**, encierra en su interior a la curva de conexiones homoclinas del origen que surge del punto **TP** más lejano del punto **TB**. Notemos que este nueva curva cerrada de conexiones homoclinas del origen no tiene las mismas características que las anteriores que surgen del punto **Hd1b** (por ejemplo $\mathbf{H_}$ and $\mathbf{H__}$ para $\alpha = -1.3435$), ya que ahora las conexiones homoclinas que están cerca del punto **Hd1b**, donde surgen cada una de sus dos ramas $\mathbf{H^i_{--}}$ y $\mathbf{H^d_-}$, son conexiones homoclinas de distinto pulso (doble en la rama derecha y de triple pulso en la rama izquierda). Esto es así porque al alejarnos del punto **Hd1b**, sobre la rama $\mathbf{H^i_{--}}$, el retrato de fases de estas conexiones homoclinas nos mostraría que se va perdiendo una de las vueltas que la variedad unidimensional del origen da en torno al equilibrio no trivial antes de cerrarse nuevamente.

Por otro lado las curvas de conexiones homoclinas **HN** y heteroclinas **Het** de los equilibrios no triviales, que unen ambos puntos **TP** (ver figura 5.16(c)-(d)), no cambian cualitativamente al ir variando el parámetro α desde el valor para el que surgen hasta el valor para el que ocurre la degeneración **TZ**. Estas conexiones globales no presentan ninguna degeneración ya que siempre cumplen que $0 < \delta' < \dfrac{1}{2}$.

De acuerdo a lo obtenido en la figura 5.12, en relación a la continuación numérica de la curva de degeneración ($\delta = 1$) de la conexión homoclina principal **H** y de la curva de conexiones heteroclinas degeneradas **TP**, al mover el parámetro α acercándonos a la degeneración lineal triple- cero del origen **TZ**, ambos puntos se van acercando entre sí y al mismo tiempo se aproximan al punto donde tiene lugar la bifurcación de Takens-Bogdanov del origen **TB**; de manera que va disminuyendo la zona del espacio de parámetros donde la conexión homoclina principal **H**, que surge del punto **TB**, es atractiva. Recordemos que de acuerdo a lo obtenido en la sección 5.3, la curva de conexiones homoclinas **H** surge repulsiva ($\delta < 1$) antes de que ocurriera la degeneración de Takens-Bogdanov del origen **TBD** de tipo homoclino, y a partir de entonces la curva **H** surge del punto **TB** atractiva, hasta que experimenta la degeneración $\delta = 1$. Una vez que atravesamos, al disminuir el parámetro α, la degeneración lineal triple-cero **TZ**, que ocurre para $\alpha_{TZ} = -1.373125$, la conexión homoclina del origen **H** deja de estar relacionada con la bifurcación de Takens-Bogdanov del origen **TB**, que pasa a ser de tipo heteroclino.

En efecto, para $\alpha = -1.38$, podemos ver en la figura 5.17 que ahora es la curva de conexiones heteroclinas de los equilibrios no triviales **Het** (curva con trazo discontinuo), la que surge de dicho punto de codimension dos **TB**. Dicha curva presenta ahora varias degeneraciones cuando surge del citado punto, la primera de ellas es el paso de silla a silla-foco de los equilibrios no triviales **Hetd1**, si bien al ser $\delta' > 1$ de la conexión heteroclina sólo bifurca una órbita periódica simétrica atractiva. La siguiente degeneración **Hetd2** se produce cuando $\delta' = 1$ (autovalores resonantes), esto implica la existencia de una

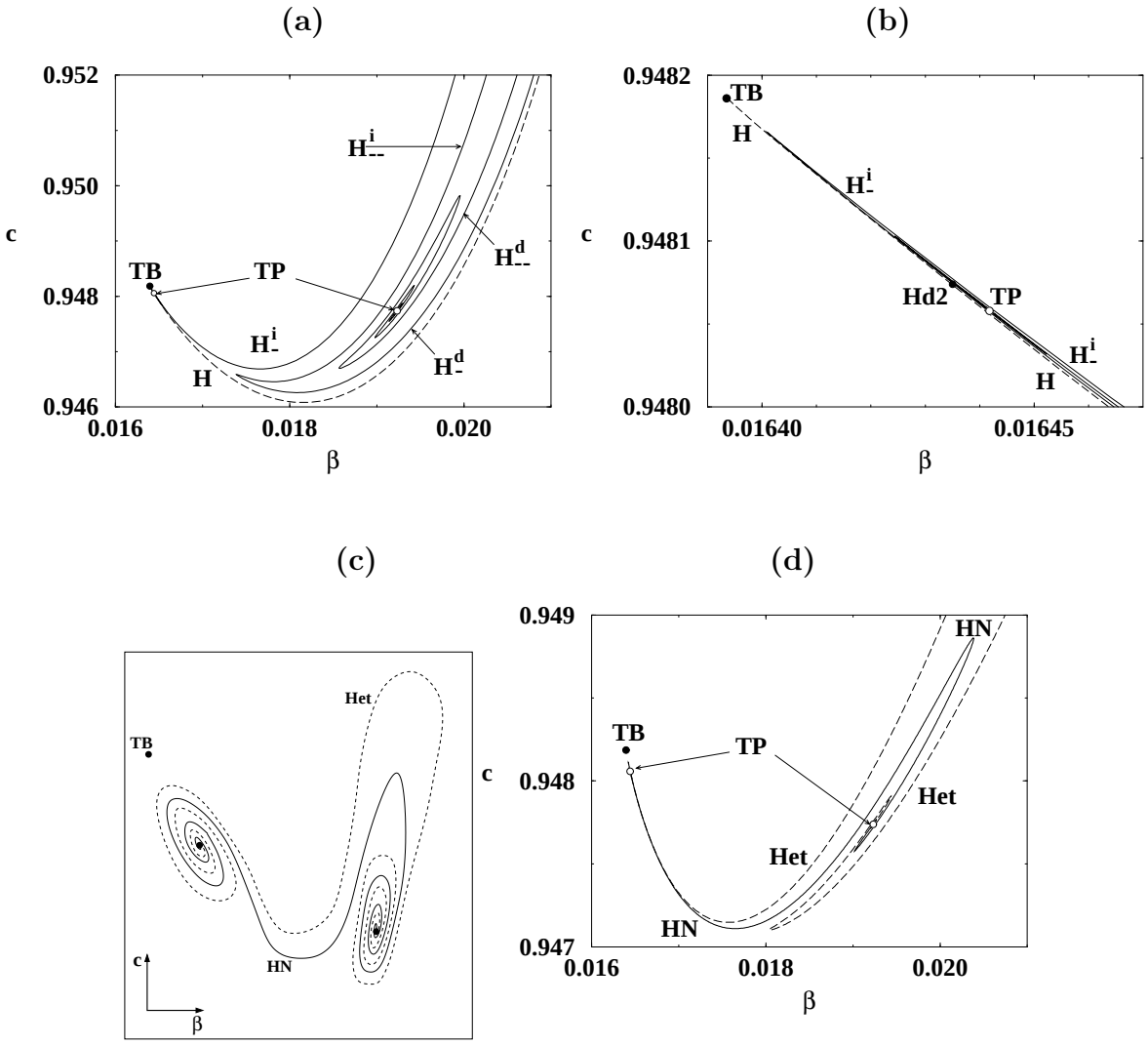


Figura 5.16: Para $\alpha = -1.36$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$: (a) Conjunto parcial de bifurcaciones, donde utilizamos una línea discontinua para representar la homoclina principal **H**. (b) Zoom en un entorno del punto–T **TP** más próximo al punto **TB**. (c-d) Curvas de conexiones homoclinas **HN** y heteroclinas **Het** de los equilibrios no triviales, que surgen de los puntos–T **TP**, donde utilizamos línea continua para representar la curva **HN** y discontinua para la **Het**.

sucesión de cúspides, de curvas de bifurcación sillas-nodo de orbitas periódicas simétricas, que acumulan a un lado de la curva **Het** en el punto **Hetd2**. Ambas degeneraciones se producen, para este valor del parámetro, muy cerca del punto **TB** (ver figura 5.17(a)) siendo por ello que no los hemos representado en el conjunto numérico de bifurcaciones de la figura 5.17(b). A continuación, para $\beta \approx 0.0177$, $c \approx 0.9453$, aparece la degeneración **Hetd3** cuando $\delta' = \frac{1}{2}$, lo que implica un cambio en la estabilidad de las orbitas periódicas simétricas asociadas al *wiggle* de la conexión heteroclina. Por ultimo la curva termina oscilando, sin mas degeneraciones sobre ella, en torno al único punto–T que existe para este valor del parámetro. Como se observa estas degeneraciones son las mismas que están presentes en la curva de conexiones heteroclinas **Het**, de la figura 5.11, para $\alpha = -1.41$.

La curva correspondiente a las conexiones homoclinas de los equilibrios no triviales **HN**, que surge del único punto–T que la curva **TP** tiene para este valor de α, aparece ahora conectada con otra curva de conexiones homoclinas de los equilibrios no triviales según se observa en la figura 5.17(a)-(b). Esta curva de conexiones homoclinas de los equilibrios no triviales surge de otro punto–T, **TP2**, cuya proyección sobre el plano xz podemos observar en la figura 5.17(c). Como podemos ver (comparar con la figura 5.11) ahora la variedad unidimensional del origen rodea al equilibrio P^- antes de finalizar en el equilibrio P^+. La continuación numérica, en el espacio triparamétrico (α, β, c), de este punto–T nos genera una nueva curva de puntos–T, **TP2**, que tiene características similares a la curva **TP**, ya que surge del punto **TZ** y también presenta una falta de transversalidad en el parámetro α (ver figura 5.19), en los valores $\alpha \approx -1.34289$, $\beta \approx 0.01659$, $c \approx 0.94893$. Debido a esa falta de transversalidad se cumple, por ejemplo para $\alpha = -1.36$, que la curva de conexiones homoclinas de los equilibrios no triviales que surge de ambos puntos–T de la curva **TP2** estén unidas; análogamente a lo que ocurría con la curva **HN** para los valores del parámetro α mayores que $\alpha_{TZ} = -1.373125$ (ver figura 5.16(c)-(d)). Al finalizar las dos curvas **TP** y **TP2** en el punto de codimension tres **TZ**, se posibilita que las dos curvas de conexiones homoclinas de los equilibrios no triviales, que surgen de las curvas de puntos–T **TP** y **TP2**, estén unidas para los valores del parámetro α situado al otro lado del valor donde se produce la citada degeneración. Al mismo tiempo vemos como ahora si aparecen dos degeneraciones **HNd3**, del mismo tipo, sobre la curva de conexiones homoclinas de los equilibrios no triviales **HN**; para $\beta \approx 0.017726$, $c \approx 0.945301$ en la rama superior y para $\beta \approx 0.017729$, $c \approx 0.945289$ en la rama inferior, debido a que en estos puntos $\delta' = \frac{1}{2}$, lo que implica un cambio en la estabilidad de las orbitas periódicas asimétricas asociadas al *wiggle* de la conexión homoclina de los equilibrios no triviales.

También la rama de las conexiones homoclinas del origen de doble pulso $\mathbf{H^i_{_}}$ deja de estar relacionada con el punto–T del que surgía anteriormente, al desaparecer este. Lo que ocurre con las curvas de homoclinas del origen, **H** y $\mathbf{H^i_{_}}$, lo podemos observar en la figura 5.17(d) donde vemos como la existencia del punto **TZ** permite que tenga lugar otro fenómeno global por el cual ambas conexiones homoclinas, de un pulso y de doble pulso (ver figura 5.17(e)-(f)), se unen y forman un nueva curva cerrada de conexiones homoclinas del origen que encierra en su interior a las conexiones homoclinas $\mathbf{H^d_{_}}$, $\mathbf{H^i_{__}}$, $\mathbf{H^d_{__}}$, así como a la que surge del punto **TP**. Estas conexiones homoclinas del origen son repulsivas en todo el espacio de parámetros, ya que en todos los puntos de estas curvas

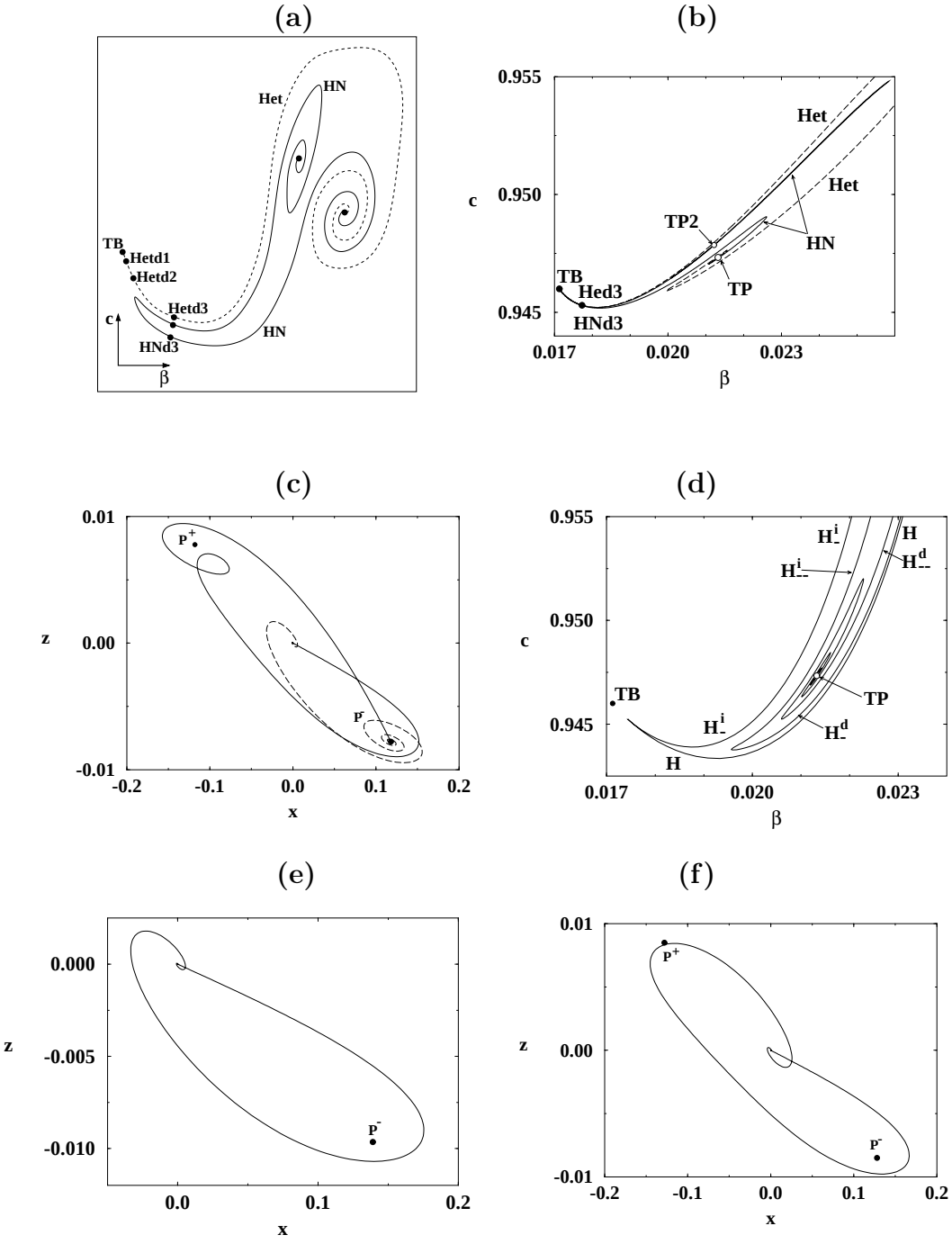


Figura 5.17: Para $\alpha = -1.38$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$: (a) Conjunto parcial de bifurcaciones cualitativo. (b) Detalle del conjunto anterior. (c) Proyección sobre el plano xz del punto–T **TP2** para $\beta \approx 0.02121$, $c \approx 0.94785$. (d) Conjunto parcial de bifurcaciones relativo a las conexiones homoclinas del origen. (e) Para $c = 0.95$ proyección sobre el plano xz de las conexiones homoclinas del origen **H** para $\beta \approx 0.02235$. (f) Ídem de las conexiones homoclinas del origen $\mathbf{H}^{\mathbf{i}}_{-}$ para $\beta \approx 0.02134$.

se cumple que $0 < \delta < \frac{1}{2}$, aunque para valores más cercanos al punto **TZ** se experimenta la degeneración $\delta = \frac{1}{2}$ debido a la forma de la curva **Hod3** (ver figura 5.12).

Notemos que de todas las conexiones homoclinas presentes en las figuras 4.8 y 4.9, del capítulo cuatro para $\alpha = -1.3$, o bien de la figura 5.13(a), para $\alpha = -1.3435$, únicamente la curva de conexiones homoclinas cerradas $\mathbf{H}_{---}$, no ha intervenido en los procesos anteriores. Sin embargo, cuando seguimos disminuyendo el valor del parámetro α observamos en la figura 5.18(a), para $\alpha = -1.416$, que el máximo de la primera espiral que la curva de conexiones homoclinas $\mathbf{H}^{\mathbf{d}}_{--}$ da en torno al punto **TP**, se encuentra ahora muy próximo al mínimo de la curva cerrada de conexiones homoclinas del origen $\mathbf{H}_{---}$ que surge del punto **Hd1b**. Recordemos además que si bien la homoclina $\mathbf{H}^{\mathbf{d}}_{--}$ surge del punto **Hd1b** siendo del tipo **xzz**, al ir *espiralando* en torno al punto **TP** donde finaliza, va aumentando el número de vueltas (aproximadamente una en cada espiral) que la variedad unidimensional del origen da en torno al equilibrio no trivial antes de cerrarse, por lo que en ambos puntos, máximo y mínimo, las dos conexiones homoclinas del origen son del mismo tipo $\mathbf{H}_{---}$. De esta forma al disminuir α ambas curvas contactan y, para $\alpha = -1.417$, se observa en la figura 5.18(b) cómo se repite nuevamente el proceso de creación de una curva de conexiones homoclinas con la misma característica anterior. En efecto, la curva cerrada que se ha formado tiene en su rama izquierda conexiones homoclinas de cuádruple pulso del tipo $\mathbf{H}_{---}$ y en su rama derecha conexiones homoclinas de triple pulso del tipo $\mathbf{H}_{--}$. En el interior de esta curva cerrada de conexiones homoclinas del origen queda ahora encerrada la conexión homoclina del origen que surge del punto **Hd1b** y finaliza en el punto **TP**.

Hemos comprobado que este mismo proceso anterior se repite nuevamente para $\alpha = -1.464$, interviniendo en este caso una curva de conexiones homoclinas del tipo $\mathbf{H}_{----}$ que también surge del punto **Hd1b**. Nótese que al ir alejándonos del punto **TZ**, cuando variamos el parámetro α, este proceso implica que va disminuyendo el número de oscilaciones que la curva de conexiones homoclinas del origen experimenta antes de finalizar en el punto **TP**.

Como anteriormente comentamos la curva de puntos **TP** desaparece en un nuevo punto de codimensión tres **TPh** (para $\alpha \approx -1.65494$, $\beta \approx 0.04851$, $c \approx 0.95789$) cuando interseca con la superficie de Hopf de los equilibrios no triviales **h** (ver Fernández-Sánchez, Freire y Rodríguez-Luis (2008)). Finalmente hemos realizado la continuación numérica en el espacio de parámetros (α, β, c), de los puntos de codimensión dos **HNd3**, de conexiones homoclinas de los equilibrios no triviales, y del punto **TP2**, que aparecen en la figura 5.17 para $\alpha = -1.38$. La proyección de tales curvas en el plano (α, β), junto con las de la figura 5.12, se muestran en la figura 5.19.

Hacemos notar que la existencia de este tipo de curvas de conexiones homoclinas, es decir, curvas de conexiones homoclinas donde a cada lado del mínimo de la curva podemos encontrar conexiones homoclinas de distinto pulso, ha sido observada en otros sistemas como el sistema de Rössler (ver Gaspard, Kapral y Nicolis (1984)), el oscilador de Colpitts (ver De Feo, Maggio y Kennedy (2000)), en ondas viajeras solución de la ecuación de FitzHugh - Nagumo y en un sistema hamiltoniano de cuarto orden que aparece como un modelo para olas (ver Oldeman, Champneys y Krauskopf (2003)). El proceso anterior

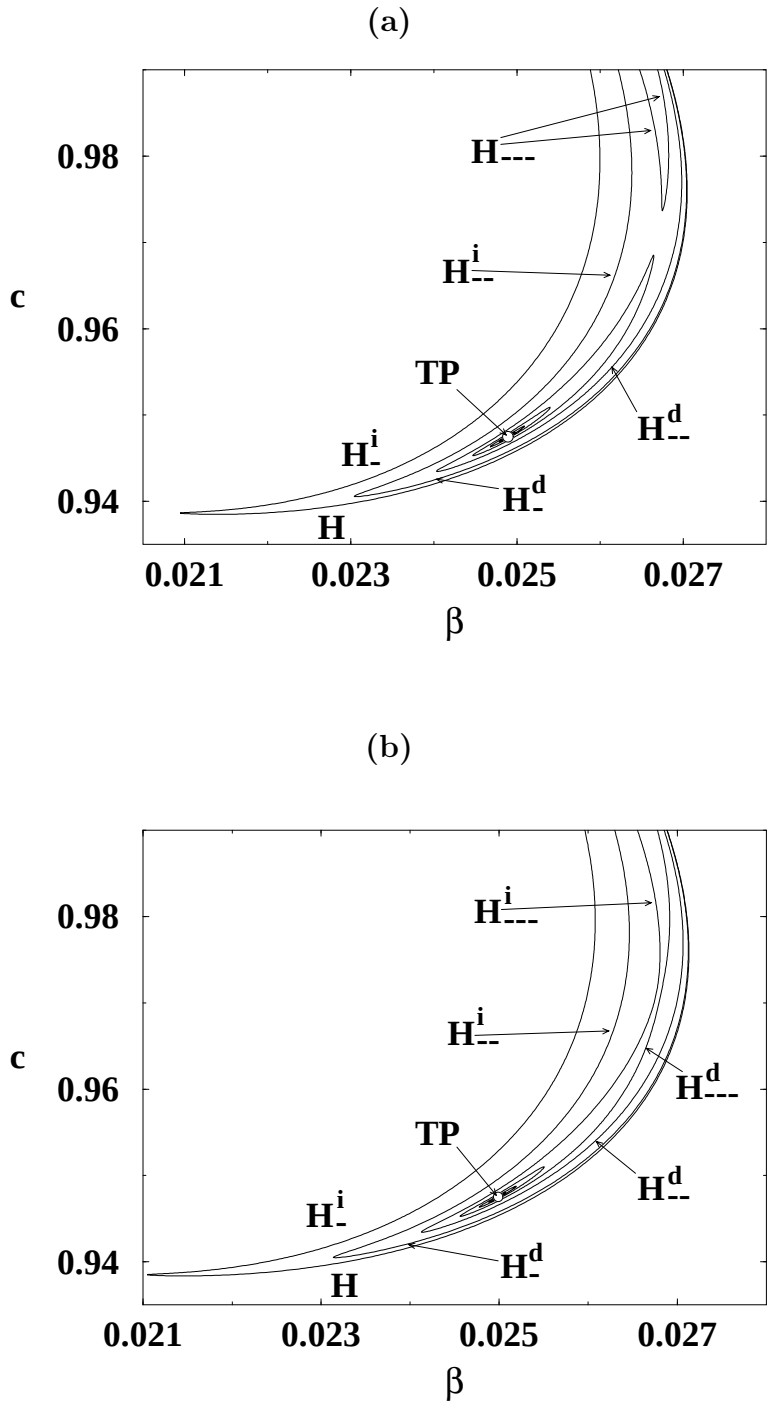


Figura 5.18: Para $\gamma = 0.3$, $a = -1$ conjunto parcial de bifurcaciones para: (a) $\alpha = -1.416$; (b) $\alpha = -1.417$.

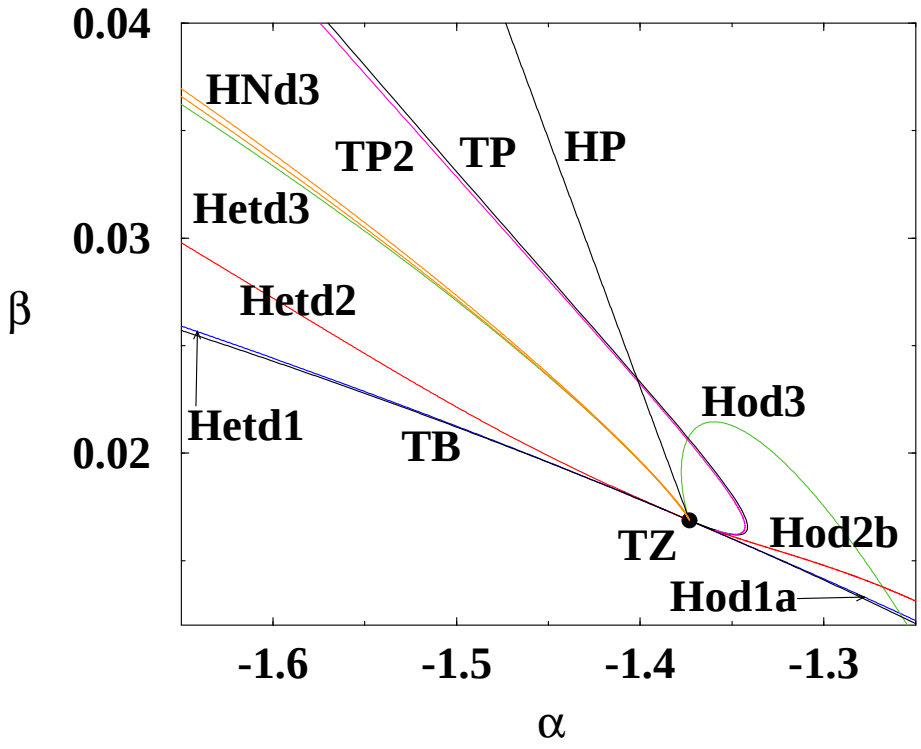


Figura 5.19: Para $\gamma = 0.3$, $a = -1$, proyección de las curvas de bifurcación de Takens-Bogdanov **TB**, Hopf-pitchfork **HP**, puntos–T **TP**, **TP2**, y de órbitas homoclinas degeneradas, del origen **Hod1a**, **Hod2b**, **Hod3**, de los equilibrios no triviales **HNd3** y de conexiones heteroclinas degeneradas **Hetd1**, **Hetd2**, **Hetd3** sobre el plano (α, β).

nos muestra un camino por el cual se obtienen conexiones homoclinas que presentan esas características. Al mismo tiempo el estudio numérico anterior evidencia que hay curvas de puntos–T que están relacionadas con la degeneración lineal triple-cero.

Finalmente estudiamos la existencia de curvas de bifurcación a toros **HH**, en relación con las órbitas periódicas asimétricas tanto pequeñas (rodean a un equilibrio), como grandes (rodean a los tres equilibrios) en un entorno de la degeneración triple-cero **TZ**.

En efecto, en la figura 2.14 del capítulo 2 mostramos cómo la curva de bifurcación a toros **HH**, que surge del punto Hopf-pirchfork **HP**, se rompe en dos trozos al disminuir el valor del parámetro α (ver figura 2.15 para $\alpha = -1.57$), cuando dicha curva contacta con la curva **PD**, donde duplican periodo las órbitas periódicas asimétricas pequeñas que surgen de la curva **sn**. Una de estas ramas, la que nace del punto **HP**, desaparece al pasar por la bifurcación triple-cero (para $\alpha_{\mathbf{TZ}} = -1.373125$), pero la otra rama sigue existiendo. Hemos comprobado numéricamente que para $\alpha = -1.3$, sobre la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas asimétricas **sn**, aparece todavía un punto de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPO** (para $\beta \approx 0.00436$, $c \approx 1.1271$), del cual surge la única rama de la curva de bifurcación a toros **HH** que existe para este valor del parámetro, que finaliza en un punto **TBPOS** sobre la curva **PD**. Recordamos que los puntos de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas

TBPO y **TBPOS** son cualitativamente diferentes. El primero de ellos corresponde a un multiplicador de Floquet doble $+1$ no diagonalizable de una órbita periódica (resonancia fuerte 1:1), mientras que el segundo **TBPOS** tiene un multiplicador de Floquet doble -1 no diagonalizable (resonancia fuerte 1:2).

Conjeturamos que si seguimos disminuyendo el valor del parámetro α, hasta $\alpha_{\mathbf{THod3}} \approx -1.181399$, estas dos curvas de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPO** y **TBPOS** desaparecen en el punto de codimensión tres **THod3**, situado sobre la curva de degeneración **Hd1b** de la conexiones homoclinas principales **Ho**. Esto permite que cambie, a la largo de toda la curva **sn**, la estabilidad de una de las órbitas periódicas que surgen de la misma. En efecto, para el valor $\alpha = -1.1 > \alpha_{\mathbf{THod3}}$ las órbitas periódicas que surgen de la curva **sn** son de tipo silla y atractivas, mientras que para el valor del parámetro $\alpha = -1.8$ (por debajo del valor del parámetro α donde la curva **TBPO** presenta una falta de transversalidad) las órbitas periódicas que nacen de ella son de tipo silla y repulsivas.

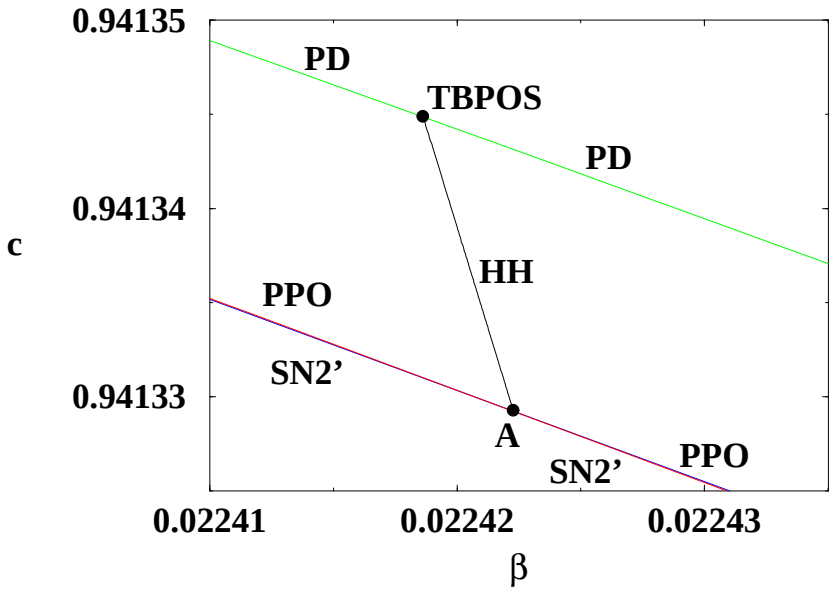


Figura 5.20: Para $\alpha = -1.41$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$, conjunto parcial de bifurcaciones.

Ahora miramos en las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas, para ver si también sobre ellas está presente un punto de tipo **A**, del que surja una curva de bifurcación a toros relacionada con la bifurcación triple-cero. Partimos de las curvas de bifurcación silla-nodo que conforman la primera cúspide de órbitas periódicas asociada a la degeneración **Hetd2** (donde $\delta' = 1$), de la conexión heteroclina **Het**, presentes en la figura 5.11. Como observamos en la figura 5.20, efectivamente sobre la rama **SN2′** hemos localizado un punto de bifurcación **A** (ver Algaba, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (1999*b*)) por donde pasan simultáneamente la bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas **SN2′** y la curva **PPO** de bifurcación pitchfork de órbitas periódicas donde rompen su simetría las órbitas periódicas que surgen de ella. Recordemos que esta bifurcación corresponde a un multiplicador de Floquet doble $+1$ diagonalizable de las órbitas

periódicas simétricas que surgen de la curva **SN2′**.

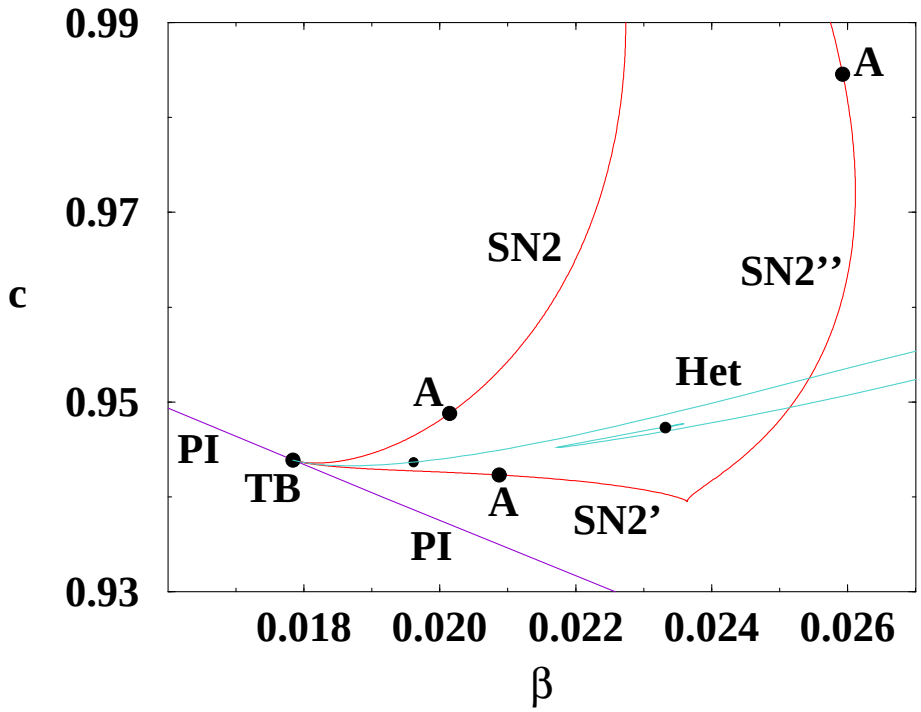


Figura 5.21: Para $\alpha = -1.4$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$ conjunto parcial de bifurcaciones.

Al disminuir el valor del parámetro α, acercándonos al valor donde tiene lugar la degeneración lineal triple-cero, se observa en la figura 5.21 que sobre la curva **SN**2, rama izquierda de la primera cúspide asociada a la degeneración **Hetd2** de la heteroclina **Het**, también existen puntos de bifurcación del tipo **A**. Para ilustrar el rico comportamiento dinámico, en un entorno de la curva de bifurcación a toros que surge del citado punto, mostramos en la figura 5.22 varias secciones de Poincaré con el plano $y = 0$. En esta figura se puede ver el escenario que se presenta después de la ruptura del toro invariante, así como una órbita periódica de 17 pulsos. Un zoom de esta órbita periódica nos permite observar una resonancia del tipo 1:5, que surge cuando dicha órbita experimenta una nueva bifurcación a toros.

En la figura 5.21, además del punto **A** dibujado sobre la curva **SN**2, existe fuera del rango de la misma (para $\beta \approx 0.0131$, $c \approx 1.1093$), otro punto **A** con las mismas características. En dicha figura hemos representado también los puntos **A** que existen sobre las otras dos ramas de sillas-nodo **SN2′** y **SN2″**; así como la curva de conexiones heteroclinas **Het**, que surge del punto **TB** y finaliza en el punto **TP**. Sobre ella hemos dibujado el punto donde tiene lugar la degeneración **Hetd3** (donde $\delta' = \frac{1}{2}$).

Si disminuimos aún más el valor del parámetro hasta $\alpha = -1.35$, al otro lado del punto donde tiene lugar la degeneración triple-cero **TZ**, hemos encontrado que sobre la curva **SN2**, que sabemos nace del punto **TB** y finaliza sobre el punto de degeneración **Hod1b** de la conexión homoclina principal **Ho** para estos valores de los parámetros, sigue

existiendo el punto **A** (para $\beta \approx 0.0080$, $c \approx 1.1230$) que estaba fuera del rango en la figura 5.21. Por contra ha dejado de existir el punto **A** más próximo al punto **TB**.

Estas evidencias numéricas nos llevan a conjeturar que ocurre un proceso análogo al anterior, en relación a las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas simétricas que surgen del punto **Hod1b**. Por ello conjeturamos que si seguimos disminuyendo el valor del parámetro α hasta $\alpha_{\mathbf{THod3}} \approx -1.181399$, la curva de puntos donde se experimenta una bifurcación doblemente degenerada de órbitas periódicas simétricas **A**, situada sobre la superficie de bifurcación silla-nodo **SN2**, desaparece en el punto de codimensión tres **THod3**. Esto permite que cambie, a lo largo de toda la curva **SN2**, la estabilidad de una de las órbitas periódicas que surgen de la misma.

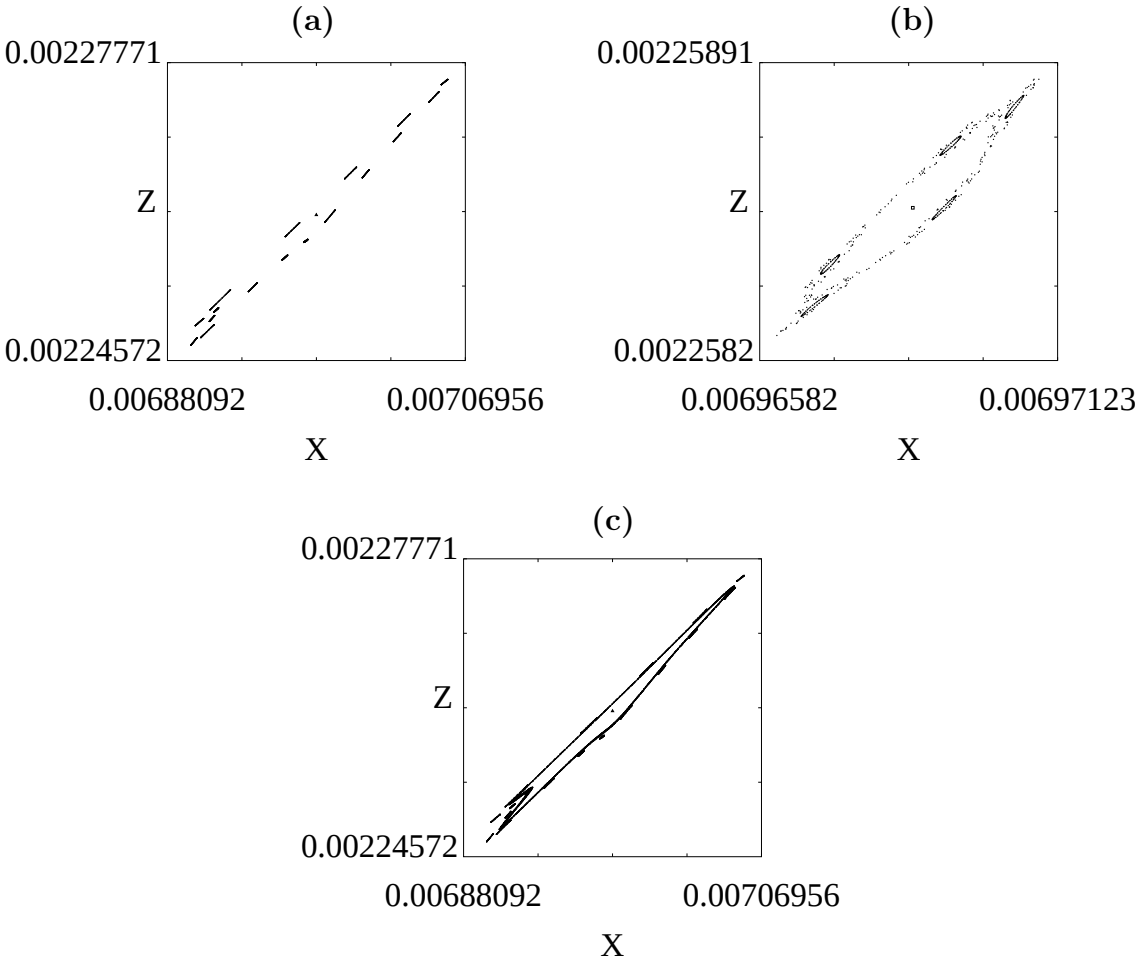


Figura 5.22: Para $\alpha = -1.4$, $\gamma = 0.3$, $\beta = 0.02014852$, $c = 0.948797$, $a = -1$, secciones de Poincaré con el plano $y = 0$ de: (a) Una órbita periódica de 17 pulsos. (b) Zoom de (b) donde vemos que ha experimentado una bifurcación toros y una resonancia del tipo 1:5 aparece. (c) Escenario después de la ruptura del toro.

De esta manera, mediante la figura 5.23, completamos la figura 2.14 mostrada en el capítulo 2.

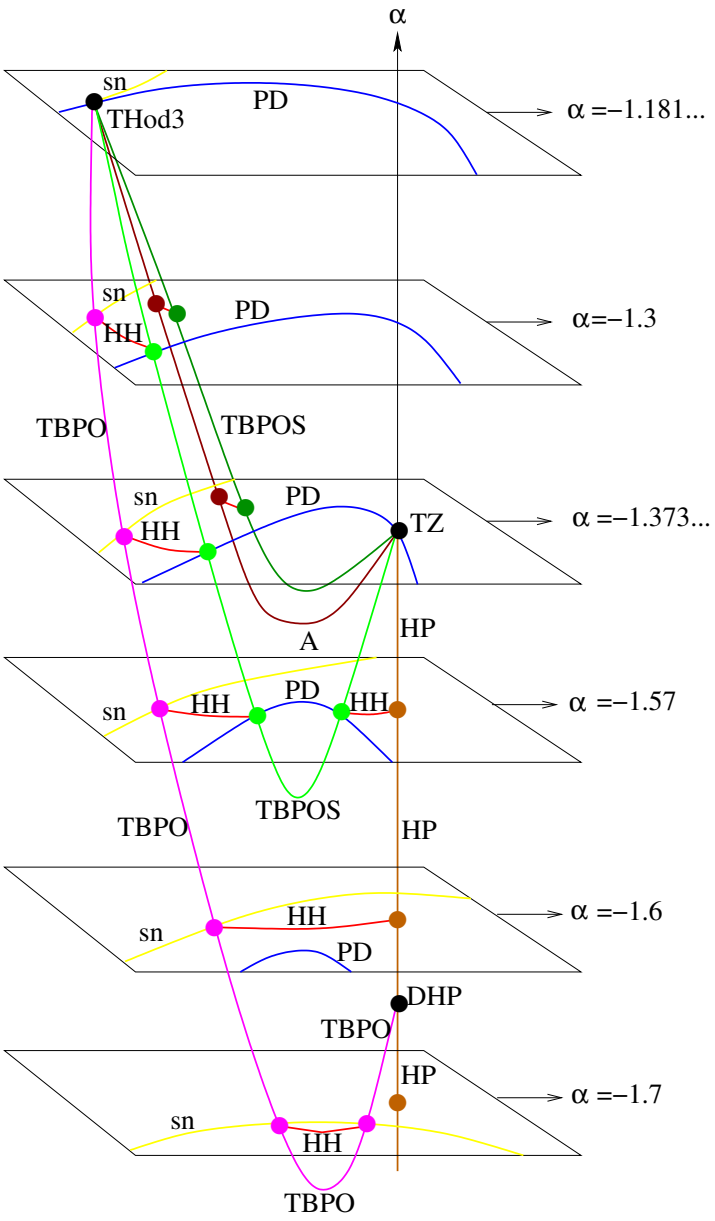


Figura 5.23: Secciones planas del conjunto de bifurcaciones para las ecuaciones (1.1) con $a = -1$, $\gamma = 0.3$ y diversos valores de α, mostrando las diferentes formas que presenta la curva de bifurcación Hopf secundaria de órbitas periódicas **HH** (curva a toros). También hemos dibujado la curva de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPO** que surge del punto **HPD**, donde tiene lugar la degeneración de la bifurcación Hopf-pitchfork, y la curva de bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPOS** que surge del punto **TZ**, donde tiene lugar la degeneración triple-cero. Ambas curvas finalizan en el punto de codimensión tres **THod3**. Notemos que el punto **TBPO** está sobre la curva **sn** mientras que el punto **TBPOS** está sobre la curva de duplicación de periodo **PD**. También se observa como la curva de Hopf secundaria **HH** se rompe en dos ramas cuando interseca con la curva **PD**. El mismo comportamiento presenta la curva de Hopf secundaria relacionada con la curva de puntos **A**. Esta curva también une los puntos **THod3** y **TZ**.

Capítulo 6

Cúspides de Órbitas Periódicas cerca de un Punto-T No Transversal

6.1. Introducción

Como ya hemos visto a lo largo de esta memoria, y resulta habitual en el estudio de los sistemas dinámicos, la combinación de técnicas analíticas y numéricas resulta necesaria para poder describir parte del comportamiento complejo que presenta el problema que estemos analizando. Así, para complementar los resultados teóricos, puede hacerse continuación numérica en un parámetro (diagrama de bifurcaciones) o en dos o más parámetros (conjunto de bifurcaciones).

Cuando se lleva a cabo esta continuación, a veces encontramos curvas cerradas. Por ejemplo, la presencia de *isolas* (curvas cerradas aisladas) en diagramas de bifurcación de órbitas periódicas ha sido detectada, en relación con curvas de bifurcación de Hopf, por Doedel, Keller y Kernévez (1991). La aparición de una isola depende de la elección del parámetro de bifurcación como de la forma de la curva de bifurcación.

Una isola típica, con forma de o, aparece al moverse dentro de las zonas de resonancia próximas a la zona donde la lengua de Arnold emerge (ver el capítulo 3 de esta memoria).

Otro clase de isolas de un cierto tipo de órbitas periódicas ha sido detectada en un circuito electrónico (ver Fernández-Sánchez, Freire y Rodríguez-Luis (1997)). En ese trabajo, se muestra su mecanismo de formación y su existencia se asocia con bifurcaciones de cúspide y con conexiones homoclinas tipo Shil'nikov.

En otros trabajos, algunos tipos de isolas están organizados por bifurcaciones/tangencias homoclinas. Así, Hirschberg y Laing (1995) mostraron que órbitas periódicas primarias permanecen en una infinidad de isolas en las proximidades de una tangencia homoclina a una órbita periódica. También Champneys y Rodríguez-Luis (1999) encontraron, desplegando una bifurcación Shil'nikov-Hopf no transversal, un número infinito de *isolas* de órbitas periódicas.

La existencia de curvas cerradas de bifurcaciones globales (homoclinas y heteroclinas) en la ecuación de Chua (1.1) fue puesta de manifiesto en Algaba, Merino, Fernández-Sánchez y Rodríguez-Luis (2003). En este trabajo, el mecanismo de formación/destrucción de tales curvas, cuando se mueve un tercer parámetro, está descrito cualitativamente y

se relaciona con la falta de transversalidad de una curva de puntos–T en un espacio paramétrico tridimensional.

La construcción de un modelo teórico que justifica dicho comportamiento y demuestra la conjetura planteada en el trabajo anterior, sobre la presencia de infinitas curvas cerradas de bifurcaciones globales (conexiones homoclinas a un equilibrio en el punto donde se produce la citada falta de transversalidad), se desarrolla en Algaba, Fernández-Sánchez, Freire, Merino y Rodríguez-Luis (2002). En este trabajo, la presencia del mismo fenómeno se muestra en el oscilador de van der Pol-Duffing modificado gobernado por las ecuaciones (3.1).

Esta falta de transversalidad aparece también en otros modelos estudiados recientemente: un péndulo invertido con control retroalimentado con retardo (Sieber y Krauskopf (2004)), un modelo para pulsos solitarios en medio excitable de reacción-difusión (ver Homburg y Natiello (2005)) y varios modelos relacionados con un láser (ver Wieczorek y Krauskopf (2005), Krauskopf y Oldeman (2006) y sus referencias).

Precisamente en Wieczorek y Krauskopf (2005), plantean la necesidad de realizar un estudio detallado, desde el punto de vista de la teoría de bifurcaciones, de un punto–T no transversal.

En este capítulo vamos a responder parcialmente a este objetivo estudiando la estructura de órbitas periódicas y sus degeneraciones en las proximidades de una falta de transversalidad en una curva de puntos–T. Así, extenderemos el estudio teórico de las conexiones homoclinas que se realizó en Algaba, Fernández-Sánchez, Freire, Merino y Rodríguez-Luis (2002). Además, para validar los resultados obtenidos en nuestro modelo, los vamos a confrontar con los obtenidos en la ecuación de Chua (1.1).

En el trabajo Algaba, Merino, Fernández-Sánchez y Rodríguez-Luis (2003) detectamos numéricamente la existencia de curvas cerradas de bifurcaciones globales (conexiones homoclinas y heteroclinas) en la ecuación de Chua. Asimismo describimos cualitativamente el mecanismo de formación/destrucción de tales curvas, relacionando este fenómeno con la falta de transversalidad de una curva de puntos–T, en el espacio tridimensional de parámetros, surgiendo de una degeneración lineal triple-cero que experimenta el origen (ver Algaba, Merino, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (2003)).

Como continuación de los dos trabajos anteriores nos planteamos ahora detectar numéricamente en la ecuación de Chua la presencia de otras curvas de bifurcación, básicamente silla-nodos de órbitas periódicas, relacionadas con el mismo fenómeno y comprobar que su disposición y evolución en el plano de parámetros coincide plenamente con el obtenido en el estudio numérico realizado en nuestro modelo teórico.

6.2. Planteamiento del modelo

Muchos de los modelos desarrollados para estudiar puntos–T y sus bifurcaciones se basan en aplicaciones de Poincaré (ver Glendinning y Sparrow (1986); Bykov (1993); Fernández-Sánchez, Freire y Rodríguez-Luis (2002)). Recordemos que existen otros enfoques alternativos para estudiar las bifurcaciones globales, tales como la construcción de la ecuación variacional alrededor de la conexión global y su análisis mediante el método de reducción de Lyapunov-Schmidt (ver Lin (1990)).

Los puntos–T pueden ser de distintos tipos dependiendo de la configuración de los equilibrios involucrados en el ciclo heteroclino. El punto–T no transversal que vamos a estudiar corresponde a un ciclo heteroclino entre dos equilibrios silla-foco (ver figura 6.1). Así, supondremos que, en un entorno del espacio de parámetros donde el punto–T no transversal aparece, el sistema considerado tiene, al menos, dos puntos de equilibrio, Q_1 y Q_2, ambos silla-foco. Además, asumiremos que el equilibrio Q_1 tiene una variedad inestable unidimensional y una estable bidimensional mientras que Q_2 tiene una variedad inestable bidimensional y una estable unidimensional. Para los valores de los parámetros donde el punto–T existe, los equilibrios están conectados de la siguiente manera: la variedad inestable unidimensional de Q_1 y la variedad estable unidimensional de Q_2 son la misma órbita mientras que las variedades bidimensionales, estable la de Q_1 e inestable la de Q_2, tienen, al menos, una intersección transversal, que denominaremos *órbita de cierre*.

Eligiendo coordenadas apropiadas (ver Glendinning y Sparrow (1986); Bykov (1993); Fernández-Sánchez, Freire y Rodríguez-Luis (2002)), (x, y, z) cerca de Q_1 y (X, Y, Z) cerca de Q_2, el sistema, aproximado por su linealización, puede escribirse como

$$\begin{cases} \dot{x} = -px - \omega y, \\ \dot{y} = \omega x - py, \\ \dot{z} = \lambda z, \end{cases} \qquad \text{o} \qquad \begin{cases} \dot{X} = PX - \Omega Y, \\ \dot{Y} = \Omega X + PY, \\ \dot{Z} = -\Lambda Z, \end{cases} \tag{6.1}$$

en un entorno del equilibrio Q_1 o, respectivamente, Q_2. Las configuraciones descritas de Q_1 y Q_2 se obtienen para valores positivos de los parámetros Λ, λ, P y p y para valores no negativos de Ω y ω. Observemos que para cualquier equilibrio silla-foco existe un cambio local de clase C^1, de coordenadas y del tiempo, tal que, en esas coordenadas, el flujo es lineal en un entorno del equilibrio (ver Hartman (1960); Belitskii (1973)).

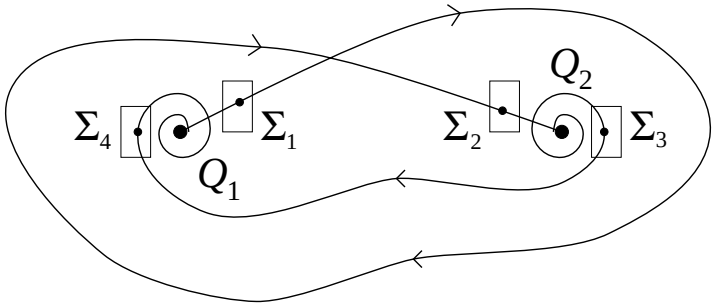


Figura 6.1: Diagrama esquemático de un ciclo heteroclino (punto–T) en el espacio de fases tridimensional.

Usando estas nuevas coordenadas, es posible elegir las cuatro secciones transversales siguientes:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{(x,y,z);\ z=h\}\,,\\ \Sigma_2 &= \{(X,Y,Z);\ Z=H\}\,,\\ \Sigma_3 &= \{(X,Y,Z);\ Y=0,\ H\geq Z>0\}\,,\\ \Sigma_4 &= \{(x,y,z);\ y=0,\ h\geq z>0\}\,,\end{aligned}$$

donde h y H son números pequeños positivos (ver Fig. 6.1).

Nótese que la órbita de cierre tiene infinitos puntos de intersección con Σ_4 y Σ_3. Eligiendo dos valores positivos x_0 y X_0, fijamos dos de esas intersecciones, $(x_0,0,0)\in\Sigma_4$ y $(X_0,0,0)\in\Sigma_3$, y dos entornos suficientemente pequeños alrededor de ellos para evitar varias intersecciones. Suponemos que x_0 y X_0 no dependen de los otros parámetros, al menos para valores de los parámetros cercanos a los del punto–T no transversal.

Es fácil probar que las cuatro secciones Σ_1, Σ_2, Σ_3 y Σ_4 son transversales al flujo en entornos de $(0,0,h)$, $(0,0,H)$, $(X_0,0,0)$ y $(x_0,0,0)$, respectivamente.

Del análisis llevado a cabo en Algaba, Fernández-Sánchez, Freire, Merino y Rodríguez-Luis (2002) es posible obtener las ecuaciones de las aplicaciones parciales entre las secciones transversales. En las proximidades de Q_1 y Q_2, usando la aproximación lineal al flujo (6.1) obtenemos, respectivamente, las expresiones de las aplicaciones T_1 y T_3. La primera, $T_1:\Sigma_4\to\Sigma_1$, viene dada por $T_1(x,0,z)=(x',y',h)$, donde

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xz^{\delta}h^{-\delta}\cos\left(\theta\log z+\phi\right)\\ xz^{\delta}h^{-\delta}\sin\left(\theta\log z+\phi\right)\end{pmatrix},$$

$\delta=p/\lambda$, $\theta=-\omega/\lambda$, $\phi=(\omega/\lambda)\log h$. La otra, $T_3:\Sigma_3\to\Sigma_2$, queda definida mediante $T_3(X,0,Z)=(X',Y',H)$, donde

$$\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}XZ^{\Delta}H^{-\Delta}\cos\left(\Theta\log Z+\Phi\right)\\ XZ^{\Delta}H^{-\Delta}\sin\left(\Theta\log Z+\Phi\right)\end{pmatrix},$$

$\Delta=P/\Lambda$, $\Theta=\Omega/\Lambda$ y $\Phi=(-\Omega/\Lambda)\log H$.

Cerca de la órbita de cierre, puesto que la aplicación entre Σ_3 y Σ_4 es un difeomorfismo, puede escribirse como un desarrollo de Taylor alrededor de $(X,Z)=(X_0,0)$. Además, podemos eliminar los términos de mayor orden puesto que no afectarán, en los cálculos, a los de orden más bajo. Así, $T_4(X,0,Z)=(x,0,z)$ donde

$$\begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X-X_0\\Z\end{pmatrix},$$

con $AD-BC\neq 0$. Además, con esta expresión de T_4, es fácil probar que la condición de transversalidad para la intersección de las variedades invariantes bidimensionales viene dada por $C\neq 0$.

La última componente de la aplicación de Poincaré global $T_2 : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, se obtiene, tal como se hizo para T_4, tomando sólo los primeros términos del desarrollo de Taylor. Además, vamos a suponer que la no transversalidad del punto–T afecta sólo a la aplicación T_2. Esto es razonable porque esta componente describe el comportamiento de las órbitas cerca de las variedades unidimensionales de los equilibrios y determina si estas variedades van a intersecar (correspondiendo a un punto–T) o no. Con esta suposición podemos escribir $T_2(x', y', 0) = (X', Y', 0)$ donde

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2^2 - \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

con $ad - bc \neq 0$.

El siguiente teorema fue probado en Algaba, Fernández-Sánchez, Freire, Merino y Rodríguez-Luis (2002):

Teorema 6.2.1 *En un entorno del origen del espacio de parámetros (d_1, d_2, μ), la localización de la intersección de las variedades unidimensionales de los equilibrios Q_1 y Q_2 viene dada por*

$$\begin{cases} d_1 &= 0, \\ \mu &= d_2^2. \end{cases} \tag{6.2}$$

Por tanto, parece una buena idea elegir d_1, d_2 y μ como parámetros para desplegar la bifurcación bajo estudio (los cuales podemos suponer, como en Fernández-Sánchez, Freire y Rodríguez-Luis (2002), que son independientes de los otros parámetros $\delta, \Delta, \theta, \Theta, \ldots$).

De hecho, μ puede ser considerado como el parámetro que describe la no transversalidad, porque los valores de μ determinan la existencia de 0 ($\mu < 0$), 1 ($\mu = 0$) o 2 ($\mu > 0$) intersecciones entre las variedades unidimensionales de los equilibrios Q_1 y Q_2. Esto, unido a que el parámetro C sea no nulo, se convierte en un resultado de existencia de puntos–T en el plano de parámetros (d_1, d_2), que nos permite situar el punto–T no transversal en el origen del espacio de parámetros, en el vértice de una parábola de puntos–T.

El modelo descrito fue usado en Algaba, Fernández-Sánchez, Freire, Merino y Rodríguez-Luis (2002) para estudiar las bifurcaciones globales organizadas por el punto–T no transversal en un entorno del espacio de parámetros. Más precisamente, los objetos estudiados fueron las órbitas homoclinas de Q_1 que pasan cerca de Q_2, cuyas ecuaciones son:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X_0 - \dfrac{D}{C} Z) Z^{\Delta} H^{-\Delta} \cos\left(\Theta \log Z + \Phi\right) \\ \pm \sqrt{\mu + (X_0 - \dfrac{D}{C} Z) Z^{\Delta} H^{-\Delta} \sin\left(\Theta \log Z + \Phi\right)} \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Así, la existencia de curvas de conexiones homoclinas de Q_1 en el plano (d_1, d_2), para diferentes valores de μ, viene determinada por el signo del argumento de la raíz cuadrada,

$$f(Z) = \mu + \left(X_0 - \frac{D}{C} Z\right) Z^{\Delta} H^{-\Delta} \sin\left(\Theta \log Z + \Phi\right).$$

El análisis de esta función conduce al siguiente teorema (ver Algaba, Fernández-Sánchez, Freire, Merino y Rodríguez-Luis (2002)):

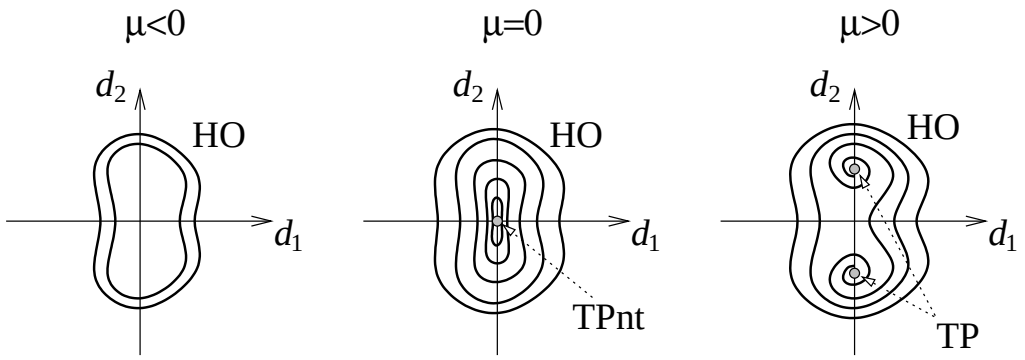


Figura 6.2: Dibujo cualitativo de las curvas de órbitas homoclinas de Q_1 (HO) en el plano (d_1, d_2), para diferentes valores de μ. Los puntos grises indican puntos–T (TP) y puntos–T no transversales (TPnt).

Teorema 6.2.2 *Cerca de $(d_1, d_2) = (0, 0)$, la posición de las conexiones homoclinas de Q_1 viene dada por las ecuaciones paramétricas (6.3). Tres casos diferentes pueden darse para valores de μ próximos a cero:*

1. *Si $\mu < 0$ entonces cualquier entorno acotado de $(d_1, d_2) = (0, 0)$ puede contener sólo un número finito de curvas cerradas de conexiones homoclinas de Q_1. Este número tiende a infinito a medida que $\mu \to 0$.*

2. *Si $\mu = 0$ entonces cualquier entorno de $(d_1, d_2) = (0, 0)$ contiene una cantidad infinito numerable de curvas cerradas de conexiones homoclinas de Q_1 contenidas unas dentro de otras y situadas alrededor de $(d_1, d_2) = (0, 0)$.*

3. *Si $\mu > 0$ entonces hay dos curvas espirales de conexiones homoclinas de Q_1 que tienden, cuando $Z \to 0$, a cada uno de los dos puntos–T, cuyas coordenadas son $(d_1, d_2) = (0, \pm\sqrt{\mu})$. Estas dos curvas aparecen unidas y rodeadas por un número finito de curvas cerradas de conexiones homoclinas de Q_1. Este número tiende a infinito a medida que $\mu \to 0$.*

Las diferentes situaciones que aparecen en el teorema se muestran en la figura 6.2.

Obsérvese que el análisis de las conexiones homoclinas de Q_2 que pasan cerca de Q_1 (que también se pueden encontrar cerca de un punto–T no transversal) es similar. Las ecuaciones que se obtienen son

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_0 + \dfrac{A}{C}z)z^{\delta}h^{-\delta}\left(a\cos\left(\theta\log z + \phi\right) + b\sin\left(\theta\log z + \phi\right)\right) \\ \pm\sqrt{\mu - (x_0 + \dfrac{A}{C}z)z^{\delta}h^{-\delta}\left(a\cos\left(\theta\log z + \phi\right) + b\sin\left(\theta\log z + \phi\right)\right)} \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

El estudio del signo del argumento de la raíz cuadrada permite llegar a un teorema de existencia de dichas conexiones globales, cuyas afirmaciones son similares a las del teorema 6.2.2.

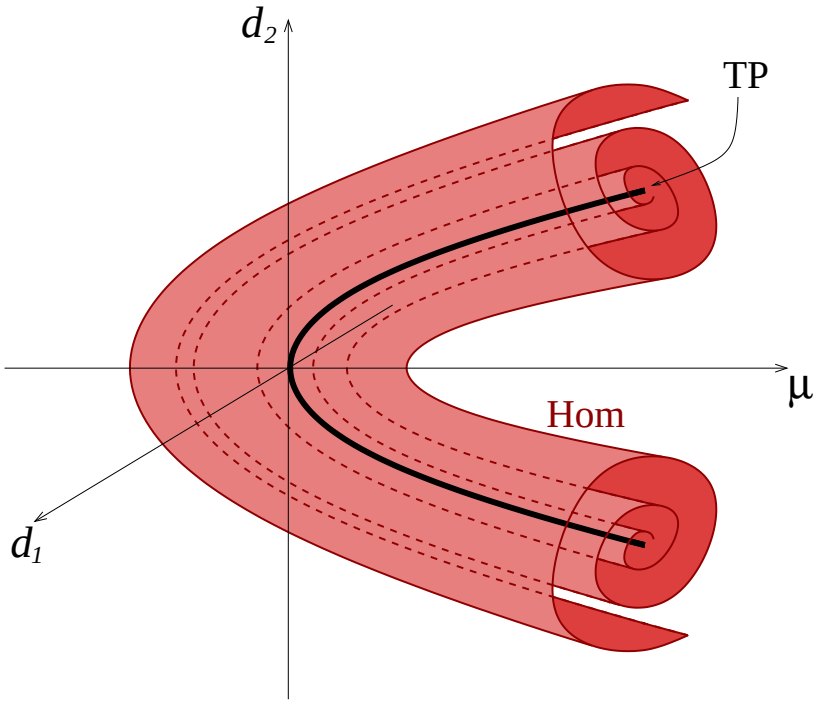


Figura 6.3: Superficie de órbitas homoclinas de Q_1, HO, en el espacio de parámetros (d_1, d_2, μ), alrededor de la curva de puntos–T, TP.

6.3. Análisis del modelo: órbitas periódicas principales y sus bifurcaciones

Los excelentes resultados obtenidos en Algaba, Fernández-Sánchez, Freire, Merino y Rodríguez-Luis (2002) para las conexiones homoclinas del equilibrio Q_1 son una buena motivación para analizar las bifurcaciones de órbitas periódicas usando el mismo modelo de primer orden. Además, los resultados obtenidos en ese trabajo podrían esperarse, en cierto sentido, porque la superficie de conexiones homoclinas alrededor de la curva de puntos–T, en el espacio de parámetros tridimensional, tiene una estructura *simple*: si la curva de puntos–T fuera una línea recta podríamos pensar en la superficie de conexiones homoclinas como un cilindro espiral a su alrededor; plegando la curva de puntos–T la superficie se plegará de la misma forma (ver figura 6.3). Las curvas obtenidas de la intersección entre esta superficie y las secciones paralelas μ = constante pueden visualizarse fácilmente y se corresponden a las mostradas en la figura 6.2.

Por el contrario, las superficies, curvas o puntos de bifurcaciones de órbitas periódicas (sillas-nodo, duplicación de periodo, etc.) no pueden ser imaginadas fácilmente, incluso usando un razonamiento similar al de las conexiones homoclinas. Así, una buena prueba para el modelo será la comparación entre los resultados que obtengamos de él sobre bifurcaciones de órbitas periódicas y las computaciones numéricas que hagamos sobre algún sistema, en particular lo haremos con la ecuación de Chua (1.1) (ver Algaba, Merino,

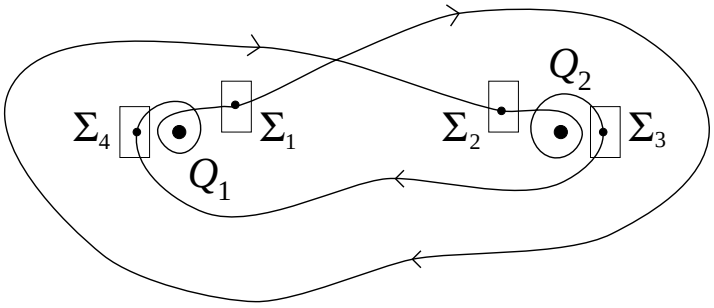


Figura 6.4: Órbita periódica relacionada con un punto–T.

Fernández-Sánchez y Rodríguez-Luis (2006)).

6.3.1. Órbitas periódicas principales

Un ciclo heteroclino punto–T organiza una estructura muy rica de órbitas periódicas. En concreto, queremos analizar un tipo particular de estas órbitas (ver figura 6.4). Las llamaremos órbitas periódicas *principales* y corresponden a puntos fijos de la aplicación $T_2 \circ T_1 \circ T_4 \circ T_3^{-1}$ o, de forma alternativa, a soluciones $(X, 0, Z)$ del sistema $T_2(T_1(T_4(Z))) = T_3(Z)$.

Por tanto, consideremos un punto $(X, 0, Z) \in \Sigma_3$ que pertenezca a la órbita periódica. De las ecuaciones de T_4 es posible obtener x y X en términos de z y Z:

$$x = x_0 + \frac{1}{C}(Az + (BC - AD)Z) \quad \text{y} \quad X = X_0 + \frac{1}{C}(z - DZ).$$

Así, el punto $(X, 0, Z)$ es transformado por T_4 en el punto

$$(x_0 + \frac{1}{C}(Az + (BC - AD)Z), 0, z) \in \Sigma_4.$$

Ahora, aplicando este punto con T_1 obtenemos un punto $(x', y', h) \in \Sigma_1$, donde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = [x_0 + \frac{1}{C}(Az + (BC - AD)Z)]z^{\delta}h^{-\delta} \begin{pmatrix} \cos(\theta \log z + \phi) \\ \sin(\theta \log z + \phi) \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

La imagen bajo T_2 es un punto $(X', Y', H) \in \Sigma_2$ tal que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2^2 - \mu \end{pmatrix} \\ &+ [x_0 + \frac{1}{C}(Az + (BC - AD)Z)]z^{\delta}h^{-\delta} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta \log z + \phi) \\ \sin(\theta \log z + \phi) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Por otra parte, aplicando $(X, 0, Z) = (X_0 + \frac{1}{C}(z - DZ), 0, Z)$ con T_3, obtenemos el punto $(X', Y', H) \in \Sigma_2$ donde

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = [X_0 + \frac{1}{C}(z - DZ)]Z^{\Delta}H^{-\Delta} \begin{pmatrix} \cos(\Theta \log Z + \Phi) \\ \sin(\Theta \log Z + \Phi) \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

De las ecuaciones (6.6) y (6.7) tenemos dos expresiones diferentes para X' e Y'. El sistema tendrá una órbita periódica si ambas expresiones coinciden. Este razonamiento permite probar el siguiente teorema:

Teorema 6.3.1 *Fijando un punto (d_1, d_2, μ) del espacio de parámetros, una órbita periódica principal del sistema tiene que intersecar con Σ_3 y Σ_4, respectivamente, en dos puntos $(X, 0, Z)$ y $(x, 0, z)$, donde*

$$x = x_0 + \frac{1}{C}(Az + (BC - AD)Z), \quad X = X_0 + \frac{1}{C}(z - DZ), \tag{6.8}$$

y

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2^2 - \mu \end{pmatrix} &= [X_0 + \frac{1}{C}(z - DZ)]Z^{\Delta}H^{-\Delta}\begin{pmatrix} \cos(\Theta \log Z + \Phi) \\ \sin(\Theta \log Z + \Phi) \end{pmatrix} \\ &- [x_0 + \frac{1}{C}(Az + (BC - AD)Z)]z^{\delta}h^{-\delta}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta \log z + \phi) \\ \sin(\theta \log z + \phi) \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{6.9}$$

El sistema (6.9) es una relación entre los parámetros principales (d_1, d_2, μ) y las variables z y Z. De cualquier solución de la ecuación (6.9), las otras coordenadas (x, X, ...) de las intersecciones entre la órbita periódica y las secciones transversales del flujo pueden obtenerse por medio de las ecuaciones (6.5), (6.6) y (6.8).

Una primera forma de entender el sistema (6.9) es analizar sus soluciones cerca de las curvas de conexiones homoclinas (ver Gaspard, Kapral y Nicolis (1984)); de hecho, las ecuaciones para estas conexiones globales, (6.3) y (6.4), pueden ser reconocidas como términos de la ecuación (6.9). Seleccionamos la curva de conexiones homoclinas de Q_1 y un razonamiento análogo será válido para la curva de conexiones homoclinas de Q_2.

Por tanto, supongamos que fijamos μ y que consideramos un punto $\bar{P} = (\bar{d_1}, \bar{d_2})$ de la curva de conexiones homoclinas de Q_1, con $\bar{d_2} > 0$ (el caso negativo es análogo y el caso nulo se considerará más adelante). De la ecuación (6.3), corresponde a un cierto valor positivo $Z = \bar{Z}$. Cuando se fija este valor en (6.9), una curva de órbitas periódicas, parametrizada por z, es obtenida en el plano (d_1, d_2):

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} + [X_0 + \frac{1}{C}(z - D\bar{Z})]\bar{Z}^{\Delta}H^{-\Delta}\begin{pmatrix} \cos\left(\Theta \log \bar{Z} + \Phi\right) \\ \sin\left(\Theta \log \bar{Z} + \Phi\right) \end{pmatrix} \\ &- [x_0 + \frac{1}{C}(Az + (BC - AD)\bar{Z})]z^{\delta}h^{-\delta}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta \log z + \phi) \\ \sin(\theta \log z + \phi) \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Observemos que, para obtener ecuaciones más sencillas, hemos mostrado la segunda ecuación para d_2^2 en lugar de para d_2. En cualquier caso, como $\bar{d_2}$ es positivo, solamente consideramos la rama positiva de la raíz cuadrada correspondiente.

Varias conclusiones se deducen de un primer estudio de la ecuación (6.10). Obviamente, la curva tiende a $\bar{P} = (\bar{d_1}, \bar{d_2})$ cuando z tiende a 0 pero, dependiendo de los valores de δ, su forma puede variar. Aproximando por los términos de orden bajo, dos casos aparecen.

Para $\delta < 1$, tenemos

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \bar{d_1} \\ \bar{d_2^2} \end{pmatrix} - \left[x_0 + \frac{BC - AD}{C}\bar{Z}\right] z^{\delta}h^{-\delta}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta \log z + \phi) \\ \sin(\theta \log z + \phi) \end{pmatrix},$$

hasta orden $o(z^\delta)$. El primer término del miembro derecho corresponde al punto $\bar{P}$ y el segundo es una parametrización de una espiral logarítmica deformada. Tomando raíz cuadrada en las segundas componentes de los vectores de ambos miembros de la ecuación obtenemos una espiral logarítmica deformada parabólicamente alrededor de $\bar{P}$.

Para $\delta > 1$, la ecuación (6.10) puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{C} z \bar{Z}^{\Delta} H^{-\Delta} \begin{pmatrix} \cos\left(\Theta \log \bar{Z} + \Phi\right) \\ \sin\left(\Theta \log \bar{Z} + \Phi\right) \end{pmatrix}$$

hasta orden $o(z)$. Tomando raíz cuadrada en las segundas componentes de los vectores de ambos miembros de la ecuación obtenemos una curva parabólica que llega a $\bar{P}$ para $z = 0$ (si $\cos\left(\Theta \log \bar{Z} + \Phi\right) = 0$, las curvas son líneas rectas verticales mientras que, si $\sin\left(\Theta \log \bar{Z} + \Phi\right) = 0$, son rectas horizontales). Si $C > 0$ la curva apunta, cuando z tiende a 0, a la región rodeada por la curva de conexiones homoclinas de Q_1, mientras si $C < 0$ apunta a la dirección opuesta.

El teorema siguiente resume los resultados anteriores:

Teorema 6.3.2 *Consideremos un punto $\bar{P} = (\bar{d}_1, \bar{d}_2)$ de la curva de conexiones homoclinas de Q_1, con $\bar{d}_2 > 0$, que corresponde a un valor $Z = \bar{Z}$. Fijando este valor en la ecuación (6.9), se obtiene una curva de órbitas periódicas principales, parametrizada por z:*

1. *Para $\delta < 1$ la curva es, hasta orden $o(z^\delta)$, una espiral logarítmica deformada parabólicamente que tiende a $\bar{P}$ cuando z tiende a 0.*

2. *Para $\delta > 1$ la curva es, hasta orden $o(z)$, un segmento de una curva parabólica que tiende a $\bar{P}$ cuando z tiende a 0.*

Para completar el estudio de las curvas de órbitas periódicas cerca de las curvas de conexiones homoclinas, conviene hacer algunos comentarios a este teorema.

El teorema describe la forma local de las curvas. Es evidente que, cuando z aumenta, los términos de orden superior van a cambiar esta forma, y pueden aparecer oscilaciones. Esta es la razón por la cual puede haber curvas de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas cerca del punto–T incluso en el caso en que $\delta > 1$.

Si el punto $\bar{P}$ se elige muy próximo a $d_2 = 0$, entonces hay interacciones entre la curva obtenida para las órbitas periódicas y su simétrica. Así, pueden aparecer curvas cerradas cerca de la curva de conexiones homoclinas. Además, si $\bar{P}$ se elige con $d_2 = 0$, todas las curvas correspondientes de órbitas periódicas en las proximidades de $\bar{P}$ serán cerradas.

Si un valor $Z = \bar{Z}$ se fija en la ecuación (6.3), el discriminante de la raíz cuadrada de dicha ecuación es negativo para valores de μ por debajo de un valor crítico μ_Z. Esto significa que no corresponde a ningún punto de la curva de conexiones homoclinas de Q_1. Incluso en este caso, si μ está suficientemente próximo a μ_Z, existirá un resto de curvas cerradas de órbitas periódicas que desaparecen a medida que $\mu_Z - \mu$ aumenta.

6.3.2. Bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas principales

Desde ahora vamos a suponer que los respectivos índices silla de los equilibrios verifican $\delta < 1$ y $\Delta < 1$. Es decir, ambos equilibrios verifican la condición de Shil'nikov.

Para derivar las ecuaciones de las bifurcaciones silla-nodo de las órbitas periódicas principales vamos a definir

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} M_1(z,Z;d_1,d_2,\mu) \\ M_2(z,Z;d_1,d_2,\mu)\end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2^2-\mu\end{pmatrix} \\ &+ [X_0+\frac{1}{C}(z-DZ)]Z^{\Delta}H^{-\Delta}\begin{pmatrix}\cos(\Theta\log Z+\Phi)\\ \sin(\Theta\log Z+\Phi)\end{pmatrix} \\ &- [x_0+\frac{1}{C}(Az+(BC-AD)Z)]z^{\delta}h^{-\delta}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta\log z+\phi)\\ \sin(\theta\log z+\phi)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{6.11}$$

Así, el sistema de ecuaciones para las órbitas periódicas principales es

$$\begin{pmatrix} M_1(z,Z;d_1,d_2,\mu) \\ M_2(z,Z;d_1,d_2,\mu)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

Una bifurcación silla-nodo para este sistema aparece cuando (z,Z) no puede ser determinado únicamente como funciones de (d_1,d_2,μ) a partir de las ecuaciones (6.12). Esto significa que el jacobiano correspondiente se anula:

$$J(z,Z)=\det\begin{pmatrix}M_{1z} & M_{1Z}\\ M_{2z} & M_{2Z}\end{pmatrix} = M_{1z}M_{2Z}-M_{1Z}M_{2z}=0, \tag{6.13}$$

donde los subíndices z y Z indican las derivadas parciales correspondientes. Nótese que la ecuación (6.13) es solamente una condición necesaria para tener una bifurcación silla-nodo.

Una vez que las derivadas se desarrollan, la ecuación (6.13) puede escribirse como

$$\begin{aligned}0=J(z,Z)=x_0X_0h^{-\delta}H^{-\Delta}z^{\delta-1}Z^{\Delta-1}[\ &\vartheta_1\cos(\Theta\log Z+\Phi)\ \sin(\theta\log z+\phi)\\ &+\vartheta_2\cos(\Theta\log Z+\Phi)\cos(\theta\log z+\phi)\\ &+\vartheta_3\ \sin(\Theta\log Z+\Phi)\ \sin(\theta\log z+\phi)\\ &+\vartheta_4\ \sin(\Theta\log Z+\Phi)\cos(\theta\log z+\phi)\ ]+\cdots,\end{aligned} \tag{6.14}$$

donde los puntos suspensivos indican términos de orden superior y

$$\begin{pmatrix}\vartheta_1\\ \vartheta_2\\ \vartheta_3\\ \vartheta_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\theta\Theta & \delta\Theta & \Delta\theta & -\delta\Delta\\ \delta\Theta & \theta\Theta & -\delta\Delta & -\Delta\theta\\ -\Delta\theta & \delta\Delta & -\theta\Theta & \delta\Theta\\ \delta\Delta & \Delta\theta & \delta\Theta & \theta\Theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}.$$

Observemos que los coeficientes ϑ_i, con $i=1,2,3,4$, se obtienen como una transformación lineal no singular de a, b, c y d, puesto que

$$\det\begin{pmatrix}-\theta\Theta & \delta\Theta & \Delta\theta & -\delta\Delta\\ \delta\Theta & \theta\Theta & -\delta\Delta & -\Delta\theta\\ -\Delta\theta & \delta\Delta & -\theta\Theta & \delta\Theta\\ \delta\Delta & \Delta\theta & \delta\Theta & \theta\Theta\end{pmatrix} = (\delta^2+\theta^2)^2(\Delta^2+\Theta^2)^2\neq 0.$$

Por otro lado, los coeficientes también varían

$$\vartheta_1\vartheta_4 - \vartheta_2\vartheta_3 = (\delta^2+\theta^2)(\Delta^2+\Theta^2)(bc-ad) \neq 0. \tag{6.15}$$

Por lo tanto, $\vartheta_1\vartheta_4 - \vartheta_2\vartheta_3$ y $bc-ad$ tienen el mismo signo.

Un detalle importante es que la ecuación (6.13) no depende de los parámetros (d_1, d_2, μ). Así, vamos a estudiar la existencia de soluciones de la ecuación (6.13) en el plano de las variables (z, Z).

Las bifurcaciones globales se localizan fácilmente en el plano (z, Z): el ciclo heteroclino punto–T es el origen y las conexiones homoclinas de Q_1 y Q_2 corresponden, respectivamente, a $z = 0$, $Z > 0$ y a $Z = 0$, $z > 0$.

Las soluciones (z, Z) de la ecuación (6.13), pueden organizarse, dependiendo del signo de $\theta\Theta(ad-bc)$ en dos tipos de curvas que vamos a describir a continuación.

Resolviendo la ecuación (6.14) para z, obtenemos

$$z = \exp\left(\frac{1}{\theta}\left[\frac{\pi}{2} + l_1\pi - \phi + \operatorname{arctg}\left(\frac{\vartheta_1\cos(\Theta\log Z+\Phi)+\vartheta_3\,\sin(\Theta\log Z+\Phi)}{\vartheta_2\cos(\Theta\log Z+\Phi)+\vartheta_4\,\sin(\Theta\log Z+\Phi)}\right)\right]\right) \cdot(1+\cdots), \tag{6.16}$$

donde l_1 es un entero cualquiera y los puntos suspensivos representan a los términos que tienden a cero cuando (z, Z) tiende a $(0, 0)$.

Cada valor entero de l_1 determina, a primer orden, una curva con discontinuidades en

$$Z_{l_2} = \exp\left(\frac{1}{\Theta}\left[l_2\pi - \Phi - \operatorname{arctg}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_4}\right)\right]\right),$$

donde $l_2 \in \mathbb{Z}$. Cada parte de dicha curva entre dos discontinuidades consecutivas corresponde a una función creciente o decreciente (dependiendo del signo de $\theta\Theta(ad-bc)$) cuyos valores máximo y mínimo vienen dados, respectivamente, por $z = \exp\left([(l_1+1)\pi - \phi]/\theta\right)$ y $z = \exp\left((l_1\pi-\phi)/\theta\right)$. Uniendo trozos de curvas para valores consecutivos de l_1 es posible obtener curvas continuas.

Para ser más preciso, tomando l_1 como una función de Z de la siguiente manera

$$l_1(Z) = m_1 + \operatorname{sg}(ad-bc)\ \mathrm{E}\left(\frac{1}{\pi}\left[\Theta\log Z + \Phi + \operatorname{arctg}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_4}\right)\right]\right), \tag{6.17}$$

donde $\mathrm{E}(\cdot)$ representa la función parte entera y $m_1 \in \mathbb{Z}$, y sustituyendo $l_1 = l_1(Z)$ en la ecuación (6.16) obtenemos, para cada valor de m_1, una curva continua en el plano (z, Z) cuyo desarrollo asintótico a primer orden viene dado por

$$z = \exp\left(\frac{1}{\theta}\left[\frac{\pi}{2} + l_1(Z)\pi - \phi + \operatorname{arctg}\left(\frac{\vartheta_1\cos(\Theta\log Z+\Phi)+\vartheta_3\,\sin(\Theta\log Z+\Phi)}{\vartheta_2\cos(\Theta\log Z+\Phi)+\vartheta_4\,\sin(\Theta\log Z+\Phi)}\right)\right]\right). \tag{6.18}$$

Dependiendo del signo de $\theta\Theta(ad-bc)$ las curvas definidas por la ecuación (6.18) tienen diferentes formas: si $\theta\Theta(ad-bc) > 0$ entonces las curvas tienden al origen (es decir, al punto–T) como funciones tipo-parábola (con oscilaciones); si $\theta\Theta(ad-bc) < 0$ las curvas

van de un eje a otro como tipo-hipérbola (con oscilaciones). El siguiente estudio se ha realizado suponiendo que $\theta\Theta(ad-bc)>0$ porque esta es la situación que aparece en la simulación numérica que presentaremos de la ecuación de Chua.

Para completar el análisis de las bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas en el plano (z,Z) hay que tener en cuenta un detalle importante: no toda solución (z,Z) de la ecuación (6.13) corresponde a una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas porque, una vez que se obtiene una solución (z,Z) de la ecuación (6.13), tiene que sustituirse en la ecuación (6.9) para obtener los valores correspondientes de los parámetros principales y esto sólo puede hacerse si la segunda ecuación de (6.9) puede resolverse para d_2. Esto es, solamente si la función

$$\begin{aligned}\mathrm{disc}(z,Z;\mu) &= \mu + [X_0+\frac{1}{C}(z-DZ)]Z^{\Delta}H^{-\Delta}\sin\left(\Theta\log Z+\Phi\right)\\ &-[x_0+\frac{1}{C}(Az+(BC-AD)Z)]z^{\delta}h^{-\delta}\left(c\cos\left(\theta\log z+\phi\right)+d\sin\left(\theta\log z+\phi\right)\right),\end{aligned} \tag{6.19}$$

no es negativa.

A partir de ahora definimos la *región admisible para el parámetro* μ como el subconjunto del plano (z,Z) dado por

$$\mathcal{AR}_{\mu}=\left\{(z,Z)\in\overline{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}\ :\ \mathrm{disc}(z,Z;\mu)\geq 0\right\}.$$

Llamaremos *región inadmisible para el parámetro* μ al subconjunto complementario,

$$\mathcal{IR}_{\mu}=\overline{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}\setminus\mathcal{AR}_{\mu}.$$

Para cada valor del parámetro μ la ecuación $\mathrm{disc}(z,Z;\mu)=0$ determina curvas límite del plano (z,Z) donde $d_2=0$. Normalmente, una curva de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas cruzará algunas de esas curvas límite pasando de $\mathcal{AR}_{\mu}$ a $\mathcal{IR}_{\mu}$, o viceversa. Las partes de las curvas de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas que pertenecen a $\mathcal{AR}_{\mu}$ conducen a dos curvas en el plano de parámetros (d_1,d_2) que son simétricas con respecto a $d_2=0$. Los puntos donde estas curvas de bifurcación intersecan las curvas límite $\mathrm{disc}(z,Z;\mu)=0$ van a corresponder a las uniones entre las curvas simétricas en $d_2=0$.

Analizaremos ahora, brevemente, las diferentes regiones $\mathcal{AR}_{\mu}$ y $\mathcal{IR}_{\mu}$ que pueden obtenerse para diferentes valores de μ.

Si $\mu>0$, el origen pertenece a $\mathcal{AR}_{\mu}$; la función $\mathrm{disc}(z,Z;\mu)$ es positiva para valores de (z,Z) próximos al origen mientras que puede ser negativa para valores mayores de (z,Z). Para separar aproximadamente el origen y $\mathcal{IR}_{\mu}$, podemos sustituir las funciones trigonométricas de $\mathrm{disc}(z,Z;\mu)$ por sus valores máximos. La curva límite de esta aproximación, en el plano (z,Z), viene dada por

$$\mu=\left([X_0+\frac{1}{C}(z-DZ)]Z^{\Delta}H^{-\Delta}+[x_0+\frac{1}{C}(Az+(BC-AD)Z)]z^{\delta}h^{-\delta}\sqrt{c^2+d^2}\right). \tag{6.20}$$

Fijando $z=0$ (que corresponde a la curva de conexiones homoclinas de Q_1 en el plano (z,Z)) en la ecuación (6.19), obtenemos

$$\mu=-[X_0-\frac{D}{C}Z]Z^{\Delta}H^{-\Delta}\sin\left(\Theta\log Z+\Phi\right). \tag{6.21}$$

El miembro derecho es una función oscilatoria cuya amplitud está acotada por

$$\mu = [X_0 - \frac{D}{C}Z]Z^{\Delta}H^{-\Delta}. \tag{6.22}$$

A medida que Z aumenta, hay un valor Z^* para el que se satisface la ecuación (6.22). Por tanto, la función dada por la ecuación (6.21) se anula en una sucesión de valores mayores que Z^*. Esto significa que, sobre la curva de conexiones homoclinas de Q_1, hay intervalos que pertenecen a $\mathcal{IR}_\mu$ para $Z > Z^*$. Para valores pequeños de μ, este fenómeno está próximo al origen y puede considerarse una consecuencia del punto–T no transversal.

De forma análoga, fijando $Z = 0$ (curva de conexiones homoclinas de Q_2 en el plano (z, Z)) en la ecuación (6.20) se obtiene

$$\mu = [x_0 + \frac{A}{C}z]z^{\delta}h^{-\delta}\left(c\cos\left(\theta\log z + \phi\right) + d\sin\left(\theta\log z + \phi\right)\right), \tag{6.23}$$

que corresponde a una curva oscilatoria cuya amplitud está acotada por

$$\mu = [x_0 + \frac{A}{C}z]z^{\delta}h^{-\delta}\sqrt{c^2 + d^2}. \tag{6.24}$$

Para valores pequeños de μ, existe un valor z^* para el que se verifica la ecuación (6.24) y puede ser considerado como una cota inferior para los intervalos de $Z = 0$ que pertenecen a $\mathcal{IR}_\mu$.

Si $\mu = 0$, la función $\mathrm{disc}(z, Z; 0)$ se anula en el origen. Así, debido a los términos oscilatorios de la ecuación (6.19), cada entorno del origen interseca con ambas regiones $\mathcal{AR}_0$ y $\mathcal{IR}_0$.

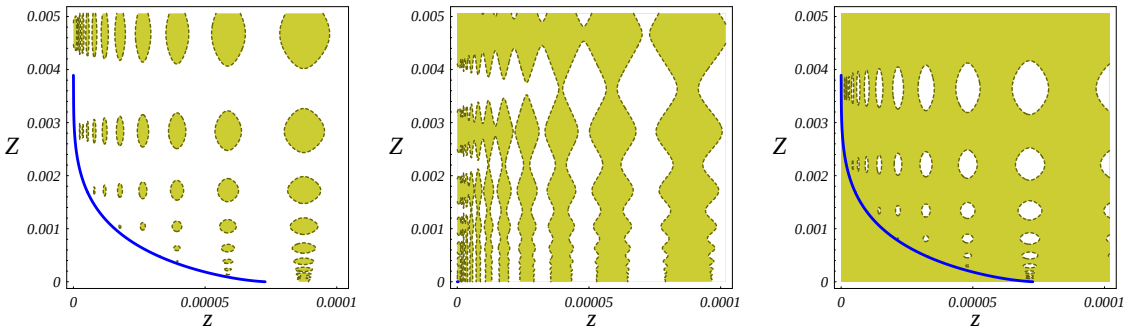
Para $\mu < 0$, el origen pertenece a $\mathcal{IR}_\mu$; la función $\mathrm{disc}(z, Z; \mu)$ es negativa para valores de (z, Z) próximos al origen mientras que es positiva en algunas regiones correspondientes a valores mayores de (z, Z). Intercambiando $\mathcal{IR}_\mu$ y $\mathcal{AR}_\mu$, la situación es similar a la del caso positivo: puede obtenerse una curva límite que separa el origen y $\mathcal{AR}_\mu$.

Con el objetivo de mostrar estos casos, fijamos los siguientes valores de los parámetros no principales del modelo teórico:

$$\begin{array}{l} a = 1,\ b = 2,\ c = 1,\ d = 1,\ A = -1,\ B = 1,\ C = -2,\ D = 1, \\ p = 0.3,\ \lambda = 1,\ \omega = -5\pi,\ P = 0.7,\ \Lambda = 1,\ \Omega = -4\pi, \\ x_0 = 0.01,\ X_0 = 0.01,\ h = 0.05,\ H = 0.05. \end{array} \tag{6.25}$$

Estos valores han sido elegidos para verificar la condición de transversalidad entre las variedades bidimensionales, $C \neq 0$, y para obtener una aplicación de Poincaré que preserve la orientación. No asumiremos más restricciones adicionales. Observemos que, con esta elección de los parámetros, los valores de las constantes de Shil'nikov de los dos equilibrios Q_1 y Q_2 son, respectivamente, $\delta = 0.3$ y $\Delta = 0.7$. Eligiendo ahora $\mu = 0.002$, $\mu = 0$ y $\mu = -0.002$, los tres casos previos aparecen (ver figura 6.5).

Un resultado importante es que existe una relación entre las curvas de bifurcaciones silla-nodo en el espacio de coordenadas (z, Z) y los puntos en que $\mathrm{disc}(z, Z; \mu)$ se anula. Como hemos visto en la figura 6.5, los conjuntos $\mathcal{AR}_\mu$ y $\mathcal{IR}_\mu$ se organizan como *islas* o



$\mu = 0.002$ $\mu = 0$ $\mu = -0.002$

Figura 6.5: Regiones $\mathcal{AR}_\mu$ (blanca) y $\mathcal{IR}_\mu$ (sombreada) en el plano (z, Z), obtenidas a partir del modelo teórico para los valores de los parámetros especificados en (6.25). Las tres figuras corresponden a $\mu = 0.002$, $\mu = 0$ y $\mu = -0.002$. La curva límite dada por (6.20) se muestra para $\mu = 0.002$ y $\mu = 0$.

agujeros que varían (creciendo, colapsando, uniéndose, ...) cuando μ cambia. Concretamente, cuando μ decrece, los puntos de los que surgen las diferentes partes de $\mathcal{IR}_\mu$ son mínimos locales, los puntos donde desaparece $\mathcal{AR}_\mu$ son máximos locales y los puntos en los que dos *islas* o *agujeros* de $\mathcal{AR}_\mu$ o $\mathcal{IR}_\mu$ tienen un contacto, corresponden a puntos de silla de $\mathrm{disc}(z, Z; \mu)$.

En los puntos estacionarios de $\mathrm{disc}(z, Z; \mu)$ el gradiente (M_{2z}, M_{2Z}) se anula. Obviamente, esto implica que $J = 0$, y prueba el siguiente resultado:

Proposición 6.3.3 *En el plano de coordenadas (z, Z), los puntos estacionarios de la función* $\mathrm{disc}(z, Z; \mu)$ *se encuentran en curvas de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas.*

En el análisis numérico del modelo teórico, la proposición 6.3.3 juega un papel muy importante porque permite la comprensión del mecanismo completo de creación/destrucción de curvas cerradas de bifurcaciones silla-nodo.

6.3.3. Bifurcaciones cúspide

Una condición necesaria para la aparición de una bifurcación cúspide de órbitas periódicas en una curva de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas (ver Gaspard, Kapral y Nicolis (1984), Fernández-Sánchez (2002)) es que el vector tangente de la curva se anule. Esto es, consideremos una curva parametrizada de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas

$$(z, Z) = (z(s), Z(s)), \tag{6.26}$$

y la curva correspondiente en el plano de parámetros (d_1, d_2)

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1(z(s), Z(s)) \\ d_2(z(s), Z(s)) \end{pmatrix},$$

que se obtiene de (6.9). El vector tangente de esta curva se anula si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial d_1}{\partial z} z'(s) + \dfrac{\partial d_1}{\partial Z} Z'(s) = 0, \\ \dfrac{\partial d_2}{\partial z} z'(s) + \dfrac{\partial d_2}{\partial Z} Z'(s) = 0. \end{cases} \tag{6.27}$$

De las ecuaciones (6.9) y (6.11) es evidente que las derivadas de d_1 y M_1, con respecto a z y Z, coinciden. En el caso de d_2, usando la notación de (6.19), estas derivadas vienen dadas por

$$2d_2(z,Z;\mu)\frac{\partial d_2}{\partial z}(z,Z;\mu) = \mathrm{disc}_z(z,Z;\mu) \quad \text{y} \quad 2d_2(z,Z;\mu)\frac{\partial d_2}{\partial Z}(z,Z;\mu) = \mathrm{disc}_Z(z,Z;\mu).$$

Puesto que las derivadas de $\mathrm{disc}(z,Z;\mu)$ con respecto a z y Z coinciden con las derivadas correspondientes de M_2, cuando $\mathrm{disc}(z,Z;\mu)$ no se anula (es decir, d_2 no se anula), el sistema (6.27) es equivalente a

$$\begin{cases} M_{1z} z'(s) + M_{1Z} Z'(s) = 0, \\ M_{2z} z'(s) + M_{2Z} Z'(s) = 0, \end{cases}$$

que significa que los vectores (M_{1z}, M_{1Z}) y (M_{2z}, M_{2Z}) son ortogonales a $(z'(s), Z'(s))$.

Sustituyendo la ecuación (6.26) en la de silla-nodo (6.13) y derivando respecto al parámetro s se obtiene la condición siguiente

$$J_z z'(s) + J_Z Z'(s) = 0.$$

Así, los vectores (J_z, J_Z), (M_{1z}, M_{1Z}) y (M_{2z}, M_{2Z}) son paralelos en el caso en que no se anulen. En nuestro análisis, esto corresponde al conjunto siguiente de condiciones:

$$J = M_{1z}M_{2Z} - M_{1Z}M_{2z} = 0, \tag{6.28}$$

$$J_1 = J_Z M_{1z} - J_z M_{1Z} = 0, \tag{6.29}$$

$$J_2 = J_Z M_{2z} - J_z M_{2Z} = 0. \tag{6.30}$$

Notemos que la condición (6.28), condición necesaria para bifurcaciones silla-nodo dada en la ecuación (6.13), puede verificarse de dos formas distintas. La no trivial se da cuando (M_{1z}, M_{1Z}) y (M_{2z}, M_{2Z}) son vectores no nulos paralelos. En este caso, las ecuaciones (6.29) y (6.30) son equivalentes. La forma trivial de verificarse la ecuación (6.28) ocurre cuando uno de los vectores, (M_{1z}, M_{1Z}) o (M_{2z}, M_{2Z}), se anula.

Los puntos donde (M_{1z}, M_{1Z}) o (M_{2z}, M_{2Z}) son vectores nulos corresponden a situaciones especiales cuyo significado matemático comentaremos más adelante. A partir de ahora, para el estudio del caso genérico, vamos a suponer que (M_{1z}, M_{1Z}) y (M_{2z}, M_{2Z}) no se anulan y, por lo tanto, las ecuaciones (6.29) y (6.30) son equivalentes. Por este motivo, estudiaremos sólo la ecuación (6.29).

Una vez que las derivadas han sido obtenidas, la ecuación (6.29) puede escribirse como

$$
\begin{aligned}
&-x_0^2 X_0 h^{-2\delta} H^{-\Delta} z^{2\delta-2} Z^{\Delta-2} \left[(a\delta+b\theta)\cos(\theta\log z+\phi)+(b\delta-a\theta)\sin(\theta\log z+\phi)\right]\\
&\cdot\Big(\vartheta_{13}\cos(\Theta\log Z+\Phi)\sin(\theta\log z+\phi)+\vartheta_{31}\sin(\Theta\log Z+\Phi)\sin(\theta\log z+\phi)\\
&\quad+\vartheta_{24}\cos(\Theta\log Z+\Phi)\cos(\theta\log z+\phi)+\vartheta_{42}\sin(\Theta\log Z+\Phi)\cos(\theta\log z+\phi)\Big)\\
&-x_0 X_0^2 h^{-\delta} H^{-2\Delta} z^{\delta-2} Z^{2\Delta-2}\left[\Delta\cos(\Theta\log Z+\Phi)-\Theta\sin(\Theta\log Z+\Phi)\right]\\
&\cdot\Big(\vartheta_{12}\cos(\Theta\log Z+\Phi)\sin(\theta\log z+\phi)+\vartheta_{21}\cos(\Theta\log Z+\Phi)\cos(\theta\log z+\phi)\\
&\quad+\vartheta_{34}\sin(\Theta\log Z+\Phi)\sin(\theta\log z+\phi)+\vartheta_{43}\sin(\Theta\log Z+\Phi)\cos(\theta\log z+\phi)\Big)\\
&+\cdots=0,
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

donde los puntos suspensivos representan a los términos de orden superior y los nuevos coeficientes vienen dados por

$$
\begin{pmatrix}\vartheta_{13}\\ \vartheta_{31}\\ \vartheta_{24}\\ \vartheta_{42}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta-1 & \Theta & 0 & 0\\ -\Theta & \Delta-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Delta-1 & \Theta\\ 0 & 0 & -\Theta & \Delta-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vartheta_1\\ \vartheta_3\\ \vartheta_2\\ \vartheta_4\end{pmatrix},
$$

y

$$
\begin{pmatrix}\vartheta_{12}\\ \vartheta_{21}\\ \vartheta_{34}\\ \vartheta_{43}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta-1 & -\theta & 0 & 0\\ \theta & \delta-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \delta-1 & -\theta\\ 0 & 0 & \theta & \delta-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vartheta_1\\ \vartheta_2\\ \vartheta_3\\ \vartheta_4\end{pmatrix}.
$$

Obsérvese que ambas matrices son no singulares.

Si sustituimos el valor de z dado por la ecuación (6.18) en la ecuación (6.31), después de tediosos cálculos, es posible obtener un sistema equivalente, a primer orden, a (6.28)-(6.29). Este sistema aparece escrito en el siguiente teorema:

Teorema 6.3.4 *Si (M_{2z}, M_{2Z}) no se anula, entonces las condiciones (6.28)-(6.30) son equivalentes, a primer orden, a*

$$
\begin{cases}
X_0 H^{-\Delta}(-1)^{l_1(Z)}\mathrm{sg}(\vartheta_2\cos(\Theta\log Z+\Phi)+\vartheta_4\,\sin(\Theta\log Z+\Phi))\\
\cdot\left\|\begin{pmatrix}\vartheta_1\cos(\Theta\log Z+\Phi)+\vartheta_3\,\sin(\Theta\log Z+\Phi)\\ \vartheta_2\cos(\Theta\log Z+\Phi)+\vartheta_4\,\sin(\Theta\log Z+\Phi)\end{pmatrix}\right\|_2^3\theta Z^{\Delta}\\
=-x_0 h^{-\delta}\Theta(\delta^2+\theta^2)(ad-bc)(\vartheta_3\vartheta_2-\vartheta_1\vartheta_4)\\
\quad\cdot\exp\left(\dfrac{\delta}{\theta}\left(\dfrac{\pi}{2}+l_1(Z)\pi-\phi+\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\vartheta_1\cos(\Theta\log Z+\Phi)+\vartheta_3\,\sin(\Theta\log Z+\Phi)}{\vartheta_2\cos(\Theta\log Z+\Phi)+\vartheta_4\,\sin(\Theta\log Z+\Phi)}\right)\right)\right),\\
\\
z=\exp\left(\dfrac{1}{\theta}\left(\dfrac{\pi}{2}+l_1(Z)\pi-\phi+\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\vartheta_1\cos(\Theta\log Z+\Phi)+\vartheta_3\,\sin(\Theta\log Z+\Phi)}{\vartheta_2\cos(\Theta\log Z+\Phi)+\vartheta_4\,\sin(\Theta\log Z+\Phi)}\right)\right)\right),
\end{cases}
\tag{6.32}
$$

donde

$$l_1(Z) = m_1 + \mathrm{sg}(ad - bc)\ \mathrm{E}\left(\frac{1}{\pi}\left(\Theta \log Z + \Phi + \mathrm{arctg}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_4}\right)\right)\right),$$

y m_1 *es cualquier entero, y* $\mathrm{E}(\cdot)$ *representa la función parte entera.*

Destaquemos que la primera ecuación del sistema (6.32) no depende de z. Por tanto, puede resolverse para Z y sustituirse en la segunda ecuación para obtener z.

Por otra parte, si comparamos los signos de los dos miembros de la primera ecuación de (6.32) es muy fácil ver que sólo puede tener una solución para valores alternativos de m_1, porque el término derecho tiene signo constante para cada entero m_1 mientras que el signo del miembro izquierdo cambia. Por tanto, fijando un valor de m_1, estamos eligiendo una curva de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas en el plano (z, Z) y si existe una bifurcación de cúspide en un punto de esta curva, entonces no existen puntos de cúspide sobre las curvas correspondientes a $m_1 + 1$ y $m_1 - 1$.

Asumiendo que el valor de m_1 verifica que los signos de ambos lados de la primera igualdad del sistema (6.32) son los mismos, la existencia de soluciones de esta ecuación puede probarse analizando por separado ambos miembros. El izquierdo corresponde a una función potencial de Z de exponente Δ cuyo aspecto es modificado por una función oscilatoria acotada. El miembro derecho corresponde a una deformación oscilatoria de una función potencial de Z de exponente $\delta\Theta\mathrm{sg}(ad - bc)/\theta$. Es obvio que si ambos exponentes son diferentes, la ecuación va a tener, al menos, una solución.

Destaquemos que el análisis anterior es válido a primer orden para valores de (z, Z) próximos al origen. Resulta trivial extenderlo a las ecuaciones originales teniendo en cuenta los términos de orden superior. De esta manera, obtenemos el siguiente teorema de existencia:

Teorema 6.3.5 *Supongamos que se verifica* $\Delta\theta \neq \mathrm{sg}(ad-bc)\delta\Theta$. *Entonces, en un entorno del origen del plano* (z, Z), *el sistema (6.28)-(6.30) tiene soluciones.*

Destaquemos que para cada valor fijo de μ, una solución del sistema (6.28)-(6.30) corresponde a un par de bifurcaciones de cúspide en el plano (d_1, d_2) con tal de que pertenezca a la región admisible y que (M_{2z}, M_{2Z}) no se anule.

Ahora, vamos a probar una relación entre tangencias, en el plano de coordenadas (z, Z), de curvas de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas y curvas solución de $\mathrm{disc}(z, Z; \mu) = 0$ y colisiones, en el plano de parámetros (d_1, d_2), en puntos de bifurcación de cúspide donde $d_2 = 0$. Este comportamiento lo observaremos después, en el estudio numérico del modelo teórico, como un mecanismo de creación/destrucción de curvas cerradas de bifurcaciones silla-nodo.

Como sabemos, los puntos estacionarios de la función $\mathrm{disc}(z, Z; \mu)$ aparecen para $(M_{2z}, M_{2Z}) = (0, 0)$. En este caso, se verifican (6.28) y (6.30), aunque (6.29) no tiene por qué satisfacerse. En otras palabras, si un punto de intersección entre una curva de bifurcaciones silla-nodo y una curva solución de $\mathrm{disc}(z, Z; \mu) = 0$ es, al mismo tiempo, un punto estacionario de $\mathrm{disc}(z, Z; \mu)$, entonces no tiene que ser un punto de cúspide en el plano de parámetros (d_1, d_2).

Por el contrario, si una curva de bifurcaciones silla-nodo y una curva solución de $\mathrm{disc}(z, Z; \mu) = 0$ tienen una intersección no transversal que no es un punto estacionario de $\mathrm{disc}(z, Z; \mu)$, entonces satisface las ecuaciones (6.28)-(6.30), tal como la siguiente proposición muestra:

Proposición 6.3.6 *Supongamos que, en el espacio de coordenadas (z, Z), una curva de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas y una curva solución de* $\mathrm{disc}(z, Z; \mu) = 0$ *tiene una intersección no transversal en un punto $(z, Z) = (z_0, Z_0)$ para un cierto valor de μ. Si, además, (z_0, Z_0) no es un punto estacionario de* $\mathrm{disc}(z, Z; \mu)$*, entonces se verifican las ecuaciones (6.28)-(6.30).*

Primero, se satisface (6.28) porque el punto de intersección pertenece a la curva de bifurcaciones silla-nodo. Segundo, en (z_0, Z_0), los vectores (J_z, J_Z) y (M_{2z}, M_{2Z}) son, respectivamente, perpendiculares a $J = 0$ y a $\mathrm{disc}(z, Z; \mu) = 0$. Es decir, en el punto de tangencia son vectores paralelos y se verifica (6.30). Tercero, como el punto de intersección no es un punto estacionario de $\mathrm{disc}(z, Z; \mu)$, entonces (M_{2z}, M_{2Z}) no se anula. Así, la condición (6.29) se verifica automáticamente porque es equivalente a (6.30). Esto concluye la prueba de la proposición 6.3.6.

Los resultados proporcionados por la proposición 6.3.6 pueden trasladarse directamente al plano de parámetros (d_1, d_2). Por una parte, un punto que satisface $\mathrm{disc}(z, Z; \mu) = 0$ se localiza sobre $d_2 = 0$ y, como sabemos, el plano de parámetros completo es simétrico con respecto a este eje. Por otra parte, si este punto verifica también (6.28)-(6.30), entonces, genéricamente, es una bifurcación de cúspide de órbitas periódicas (nótese que algunas condiciones adicionales de degeneración pueden dar lugar a situaciones de codimensión tres o superior, tales como cúspides degeneradas y bifurcaciones de *swallowtail*). Además, en el caso genérico, esta bifurcación de cúspide estará situada en $d_2 = 0$ y, debido a la simetría, habrá un par de bifurcaciones de cúspide coexistiendo en ese punto.

Establezcamos estos últimos resultados en el teorema siguiente, cuya prueba es obvia a partir de la proposición 6.3.6:

Teorema 6.3.7 *Supongamos que, en el plano de coordenadas (z, Z), una curva de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas y una curva solución de* $\mathrm{disc}(z, Z; \mu) = 0$ *tienen una intersección no transversal en un punto $(z, Z) = (z_0, Z_0)$ para un cierto valor de μ. Además, asumamos que (z_0, Z_0) no es un punto estacionario de* $\mathrm{disc}(z, Z; \mu)$*. Entonces, genéricamente, en el plano de parámetros (d_1, d_2), dos bifurcaciones de cúspide de órbitas periódicas, simétricas respecto de $d_2 = 0$, colapsan en un punto $(d_{10}, 0)$, donde d_{10} se obtiene sustituyendo (z_0, Z_0) en la ecuación (6.9).*

6.3.4. Estudio numérico del modelo

Para acabar el estudio del modelo, vamos a analizar las curvas de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas dadas por (6.13). Varias configuraciones de estas curvas, relacionadas con la falta de transversalidad de la curva de puntos–T, van a ser puestas de manifiesto: desde la creación/destrucción de curvas cerradas, de dos maneras diferentes, a la aparición de bifurcaciones de cúspide de órbitas periódicas.

Este comportamiento va a ser analizado mostrando una secuencia de figuras correspondientes a distintos valores de μ. Siendo más precisos, fijaremos un valor positivo y pequeño de μ y, mientras va disminuyendo hasta valores negativos, varias curvas de bifurcaciones serán analizadas.

Comenzamos describiendo el proceso necesario para realizar este estudio numérico. En primer lugar, es necesario fijar los valores de los parámetros secundarios. Tomaremos para ello los valores dados en (6.25). Segundo, una región del plano de coordenadas (z, Z) (próxima al origen) es seleccionada. Varias curvas de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas, soluciones de (6.13), pueden ser detectadas ahí. Como dijimos anteriormente, estas curvas no cambian cuando μ varía, así, pueden ser obtenidas por continuación y por tanto, usadas para cada valor de μ. La única diferencia es que, a medida que μ disminuye, la región $\mathcal{IR}_\mu$ crece. Como consecuencia de esto, las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas desaparecen al disminuir μ. En tercer lugar, las curvas tienen que ser representadas en el plano de parámetros (d_1, d_2). Para hacer esto, debemos eliminar los intervalos de la curvas previamente continuadas que estén situados en $\mathcal{IR}_\mu$. Así, las partes restantes de las curvas se llevan al plano de parámetros (d_1, d_2) mediante la ecuación (6.9).

Las curvas de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas están organizadas, en el plano de coordenadas (z, Z), como una sucesión de curvas tipo-parábola (con oscilaciones) que tienden al origen. Estas curvas, una vez que son trasladadas al plano de parámetros (d_1, d_2), pueden exhibir bifurcaciones de cúspide. Normalmente, dependiendo de los valores de los parámetros, las cúspides aparecen solamente cuando las curvas de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas atraviesan una región concreta del plano (z, Z). Esta región puede ser entendida (ver Fernández-Sánchez (2002)) como el límite entre la zona donde las órbitas periódicas están relacionadas con la conexión homoclina de Q_1 y la zona donde corresponden a la homoclina de Q_2. En Fernández-Sánchez (2002) también se prueba que, si dos curvas consecutivas son seleccionadas, una de ellas tiene cúspides en el plano (d_1, d_2), y la otra no.

La posición relativa de las curvas de bifurcaciones silla-nodo en el plano (z, Z), respecto a las curvas de conexiones homoclinas, puede trasladarse fácilmente al plano de parámetros (d_1, d_2). Por ejemplo, cuanto más próxima está una curva al eje $z = 0$, más próxima está esa curva a la de conexiones homoclinas de Q_1 en el plano de parámetros (d_1, d_2). Además, curvas consecutivas en el plano de coordenadas (z, Z) están situadas a ambos lados de la curva de conexiones homoclinas en el plano (d_1, d_2) (igual que ocurre en Gaspard, Kapral y Nicolis (1984)), dividiendo el conjunto de curvas en dos tipos dependiendo del lado de la curva de conexiones homoclinas en que se encuentran. De esta forma, una curva del plano (z, Z) rodea, en el plano (d_1, d_2), a toda curva del mismo tipo que esté más próxima al eje $z = 0$. Las mismas ideas son válidas para las curvas de bifurcaciones silla-nodo cerca de la curva de conexiones homoclinas de Q_2.

Las curvas de bifurcaciones silla-nodo son, en el plano de parámetros (d_1, d_2), curvas de tipo espiral cuyas formas recuerdan a la forma de la curva de conexiones homoclinas de uno de los equilibrios. Supongamos que corresponde a Q_1. Como cada espiral rodea una infinidad de espirales del mismo tipo, en la región acotada por dos espiras consecutivas de una curva de bifurcaciones silla-nodo, una espira de cada una de las otras curvas se mantiene. Esto explica que, entre un contacto de una de las espiras de una curva con el

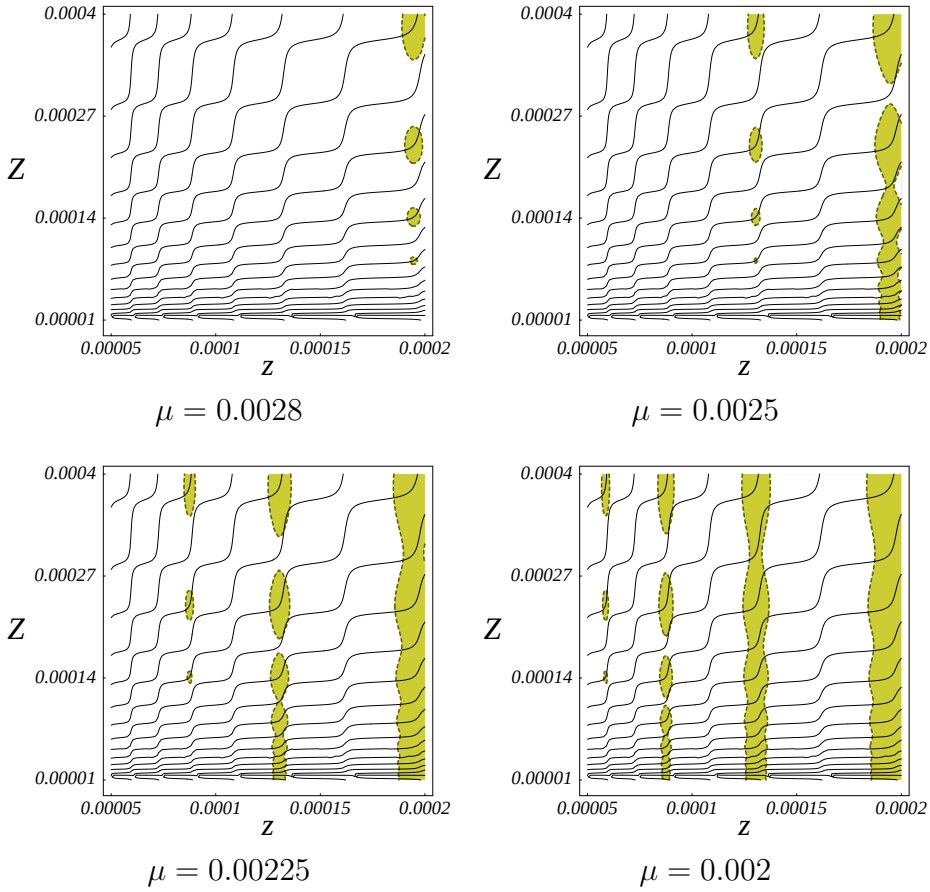
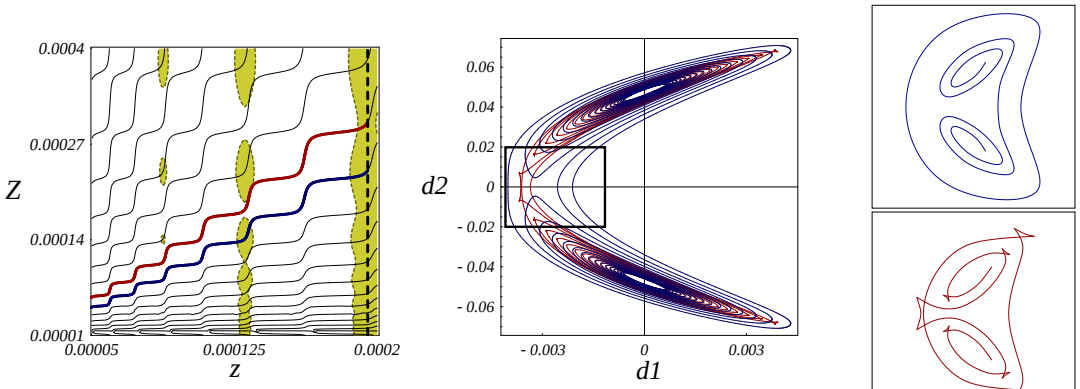


Figura 6.6: Aparición de nuevos subconjuntos de $\mathcal{IR}_\mu$, en el plano de coordenadas (z, Z), cuando μ tiende a 0 tomando valores positivos.

eje $d_2 = 0$ y el contacto de la nueva espira de la misma curva con el mismo eje, el resto de las curvas también tienen que tocar a dicho eje.

En la figura 6.6, aparece este fenómeno tal como se observa en el plano de coordenadas (z, Z), para curvas cuya forma recuerda a la curva de conexiones homoclinas para Q_1. Un contacto entre una curva de bifurcaciones silla-nodo con $d_2 = 0$ se corresponde, en el plano (z, Z), con una intersección entre una curva solución de $J = 0$ y una curva solución de $\mathrm{disc}(\mathrm{z}, \mathrm{Z}; \mu) = 0$. A medida que μ decrece, aparecen nuevos subconjuntos de $\mathcal{IR}_\mu$, lo que significa que nuevos contactos entre curvas de bifurcación de silla-nodo y $d_2 = 0$ se dan en el plano (d_1, d_2). La aparición de estos subconjuntos está organizada de la siguiente manera: aparecen verticalmente para valores de Z que tienden a 0 a medida que μ disminuye y, una vez que cada curva ha intersecado, nuevos subconjuntos aparecen verticalmente para un valor pequeño de z. Este proceso se repite una y otra vez, una infinidad de veces, hasta que se llega a $\mu = 0$. Nótese que el mismo fenómeno puede ser observado para curvas próximas a la curva de conexiones homoclinas de Q_2 aunque, en este caso, el orden será de derecha a izquierda y de arriba a abajo.

Teniendo en cuenta todos los razonamientos anteriores, para realizar el estudio numéri-



(a) (b) (c)

Figura 6.7: Para $\mu = 0.00226$ y los valores de los parámetros dados en (6.25): (a) Detalle de las curvas de bifurcaciones silla-nodo en la región del plano de coordenadas (z, Z) donde se realiza el análisis numérico. Dos de ellas (de trazo más grueso) han sido seleccionadas. También se muestra la region $\mathcal{IR}_\mu$ (sombreada). (b) Las curvas de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas seleccionadas en el plano de parámetros (d_1, d_2). (c) Dibujo esquemático de los dos pares de curvas (con y sin cúspides) que aparecen en (b).

co, sólo se seleccionan dos curvas consecutivas (en el plano de coordenadas (z, Z)). Con objeto de mostrar la riqueza de bifurcaciones existente, han sido obtenidas, por continuación, en una región donde una de ellas exhibe bifurcaciones de cúspide. En la figura 6.7(a), mostramos, para $\mu = 0.00226$, las curvas de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas en la región del plano de coordenadas (z, Z) donde se realiza el análisis numérico. Las curvas seleccionadas son las más gruesas, el valor donde el proceso de continuación comenzó se indica con una línea discontinua y el conjunto $\mathcal{IR}_\mu$ aparece sombreado.

La figura 6.7(b) se obtiene trasladando ambas curvas al plano de parámetros (d_1, d_2). Notemos que el par de curvas seleccionado en el plano (z, Z) da origen a cuatro curvas en el plano de parámetros (d_1, d_2). Dos de ellas son curvas cerradas que corresponden a las partes de las curvas en el plano (z, Z) contenidas en $\mathcal{AR}_\mu$ y delimitadas por dos intersecciones consecutivas con $\mathrm{disc}(\mathrm{z}, \mathrm{Z}; \mu) = 0$ (aproximadamente, para valores de z entre 0.00013 y 0.00019). Las otras dos son curvas biespirales alrededor de dos puntos–T simétricos y corresponden, en el plano de coordenadas (z, Z), a las partes de las curvas seleccionadas que tienden al origen.

Para conseguir entender con más profundidad el fenómeno de creación/destrucción de curvas de bifurcación no podemos analizar una región del plano de coordenadas (z, Z) mayor que la mostrada en la figura 6.7(a). Por el contrario, vamos a presentar zonas más pequeñas alrededor de los fenómenos interesantes y solamente mostraremos la curva cuya forma experimenta un cambio estructural. De la misma manera, para evitar la aparición de muchas curvas diferentes, sólo consideramos una zona pequeña del plano de parámetros (d_1, d_2).

Comencemos con la evolución de una curva sin bifurcaciones de cúspide, que es más

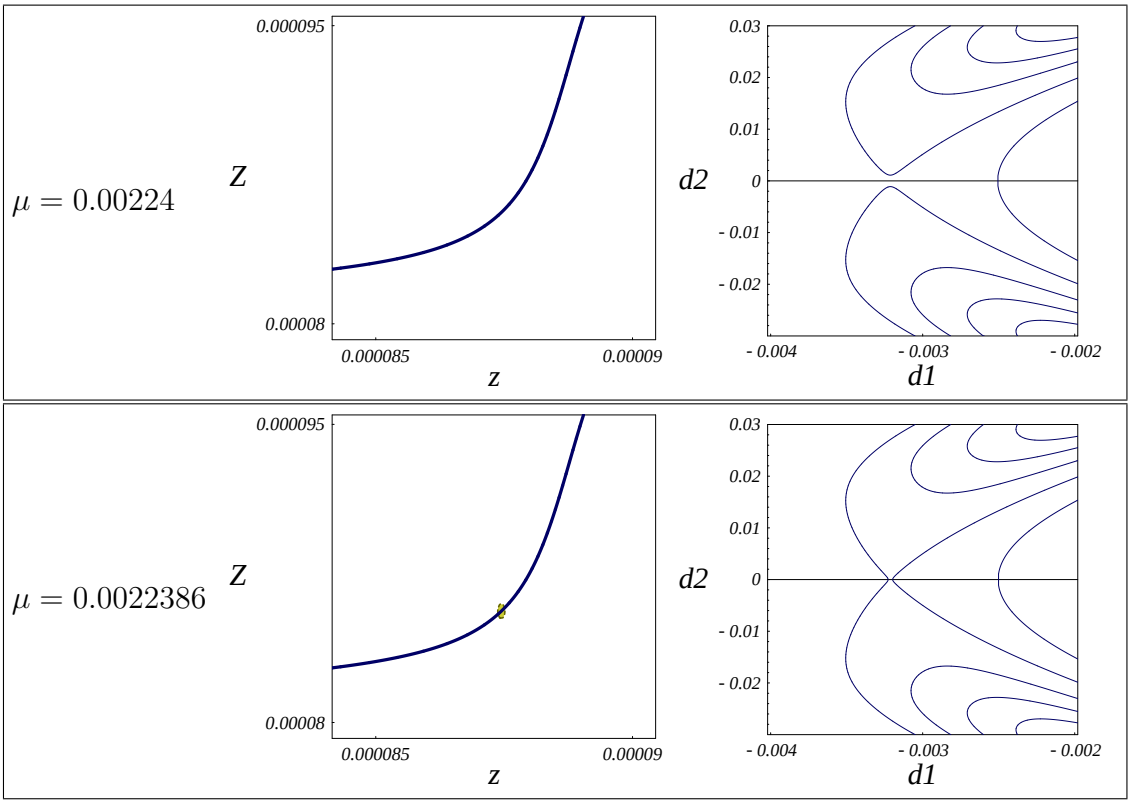


Figura 6.8: Para valores positivos de μ creación de una curva cerrada, de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas, sin cúspides.

fácil de analizar.

En la figura 6.8, se muestra la transición de $\mu = 0.00224$ a $\mu = 0.0022386$. Para el primer valor, la región seleccionada del plano de coordenadas (z, Z) está completamente contenida en el conjunto $\mathcal{AR}_\mu$. En el plano de parámetros (d_1, d_2) hay una curva espiral doble simétrica. Uno de los lazos de la espiral (junto con su simétrico) pasa muy cerca del eje $d_2 = 0$. Para el segundo valor de μ, una pequeña *isla* de $\mathcal{IR}_\mu$ interseca con la curva de bifurcaciones silla-nodo en el plano (z, Z). El efecto que conlleva en el plano de parámetros (d_1, d_2) es la división de la curva anterior en dos partes: una curva cerrada y el resto de la curva espiral doble simétrica. Este mecanismo de creación de curvas cerradas es análogo al del caso de conexiones homoclinas (ver Algaba, Fernández-Sánchez, Freire, Merino y Rodríguez-Luis (2002)). Notemos que, de la figura 6.8 y como consecuencia directa de la proposición 6.3.3, los puntos de los que $\mathcal{IR}_\mu$ aparece, están sobre la curva de bifurcaciones silla-nodo. Así, la aparición de una nueva *isla* de $\mathcal{IR}_\mu$, implica la creación de una nueva curva cerrada de bifurcaciones silla-nodo en el plano de parámetros (d_1, d_2).

Ahora, vamos a describir brevemente el mecanismo de creación/destrucción de curvas cerradas de bifurcaciones silla-nodo en la presencia de cúspides. Así, consideramos de nuevo la pequeña zona de $\mathcal{IR}_\mu$, que crece cuando disminuye μ. De esta forma, va a intersecar con la siguiente curva de bifurcaciones silla-nodo tal como se muestra en la

figura 6.9 para los valores $\mu = 0.00205$ (sin intersección), $\mu = 0.002025$ (tangencia) y $\mu = 0.002$ (dos intersecciones). Tras este proceso, aparece una nueva curva cerrada en el plano de parámetros (d_1, d_2) pero, en este caso, involucra una colisión entre dos bifurcaciones de cúspide simétricas (ver teorema 6.3.7).

Siguiendo la secuencia, a medida que la *isla* de $\mathcal{IR}_\mu$ aumenta de tamaño, termina uniéndose con otros subconjuntos de $\mathcal{IR}_\mu$. Esta unión ocurre, en un punto de silla, aproximadamente para $\mu = 0.001988058$ (ver figura 6.10). Desde ese valor, una nueva curva cerrada aparece en el plano de parámetros (d_1, d_2). En este caso la curva es pequeña y tiene dos cúspides. El mecanismo de su desaparición, una nueva tangencia con la curva de bifurcaciones silla-nodo, se ilustra con otros dos valores, $\mu = 0.001987$ y $\mu = 0.0019815$.

Éste es el proceso completo que las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas experimentan cuando μ decrece, tomando valores positivos. Este mecanismo se repite una y otra vez sobre la curva para valores más pequeños de (z, Z) cuando μ tiende a 0. Así, para $\mu = 0$, cada curva del plano de coordenadas (z, Z) da una infinidad de curvas cerradas en el plano de parámetros (d_1, d_2).

Para valores negativos de μ, las curvas van desapareciendo gradualmente. El mecanismo es mostrado parcialmente en la figura 6.11 para el caso de curvas con cúspides, aunque, en el plano de parámetros (d_1, d_2), una curva cerrada sin cúspides está también representada para cada valor de μ. Comencemos con $\mu = -0.00208$. Primero, debido a la colisión entre dos cúspides simétricas relacionadas con una tangencia en el plano de coordenadas (z, Z) (aproximadamente para $\mu = -0.002093$), una pequeña curva cerrada se crea (para $\mu = -0.002097$ en la figura 6.11) en el plano de parámetros (d_1, d_2). Segundo, a medida que μ decrece, la curva se hace más pequeña hasta que desaparece, correspondiendo a un punto de silla en el plano de coordenadas (z, Z) (aproximadamente para $\mu = -0.00209872$). Tercero, la otra curva cerrada desaparece cuando ocurre una nueva tangencia en el plano de coordenadas (z, Z). Esta última situación no aparece reflejada en la figura 6.11.

El mecanismo de destrucción de curvas sin cúspides no ha sido ilustrado porque es muy simple: las curvas desaparecen porque se hacen cada vez más pequeñas hasta que colapsan. Esta desaparición se produce para máximos de $\mathrm{disc}(\mathrm{z}, \mathrm{Z}; \mu)$.

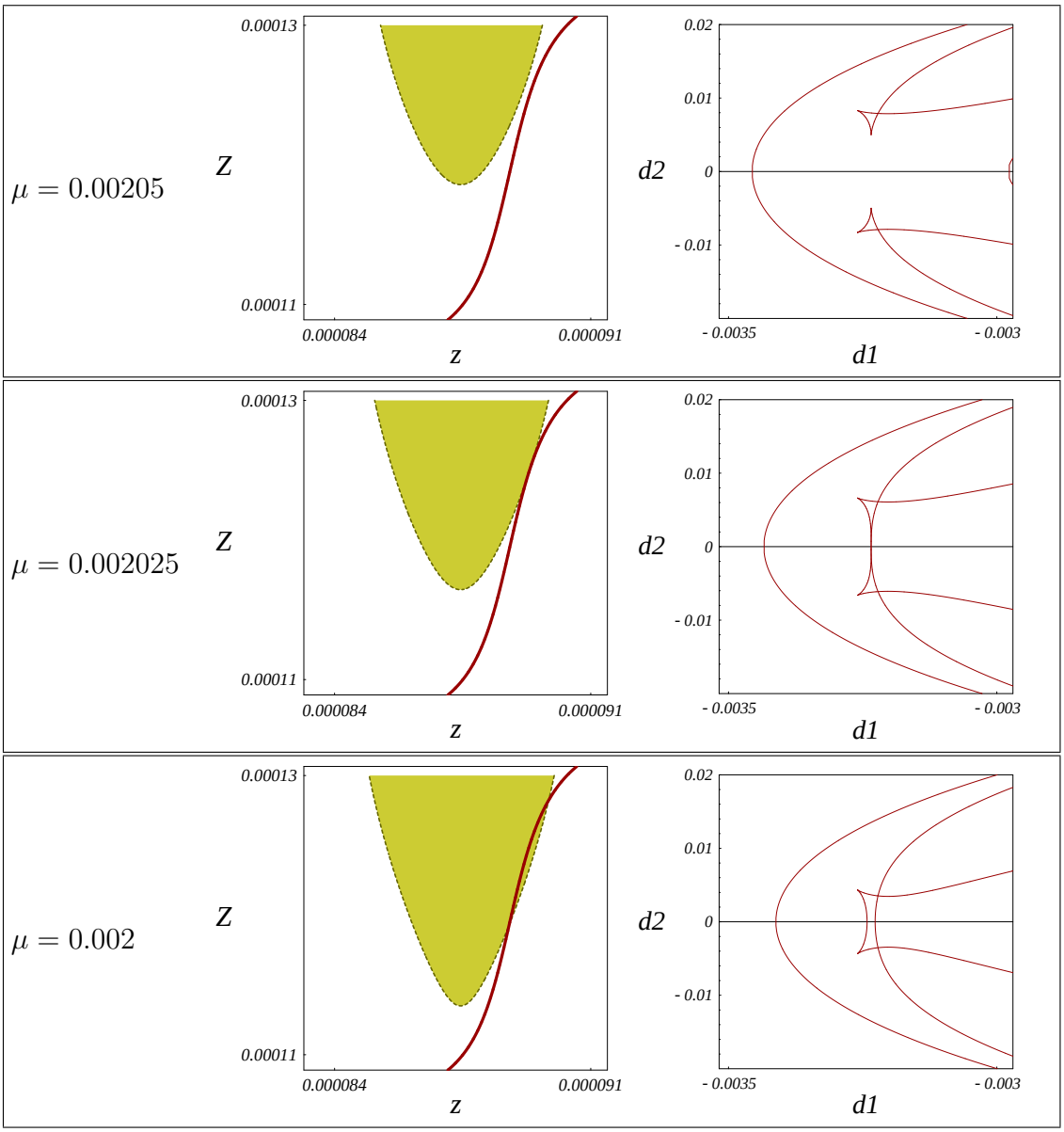


Figura 6.9: Para valores positivos de μ creación (por colisión entre dos bifurcaciones de cúspide simétricas) de una curva cerrada de bifurcaciones silla-nodo de órbitas periódicas.

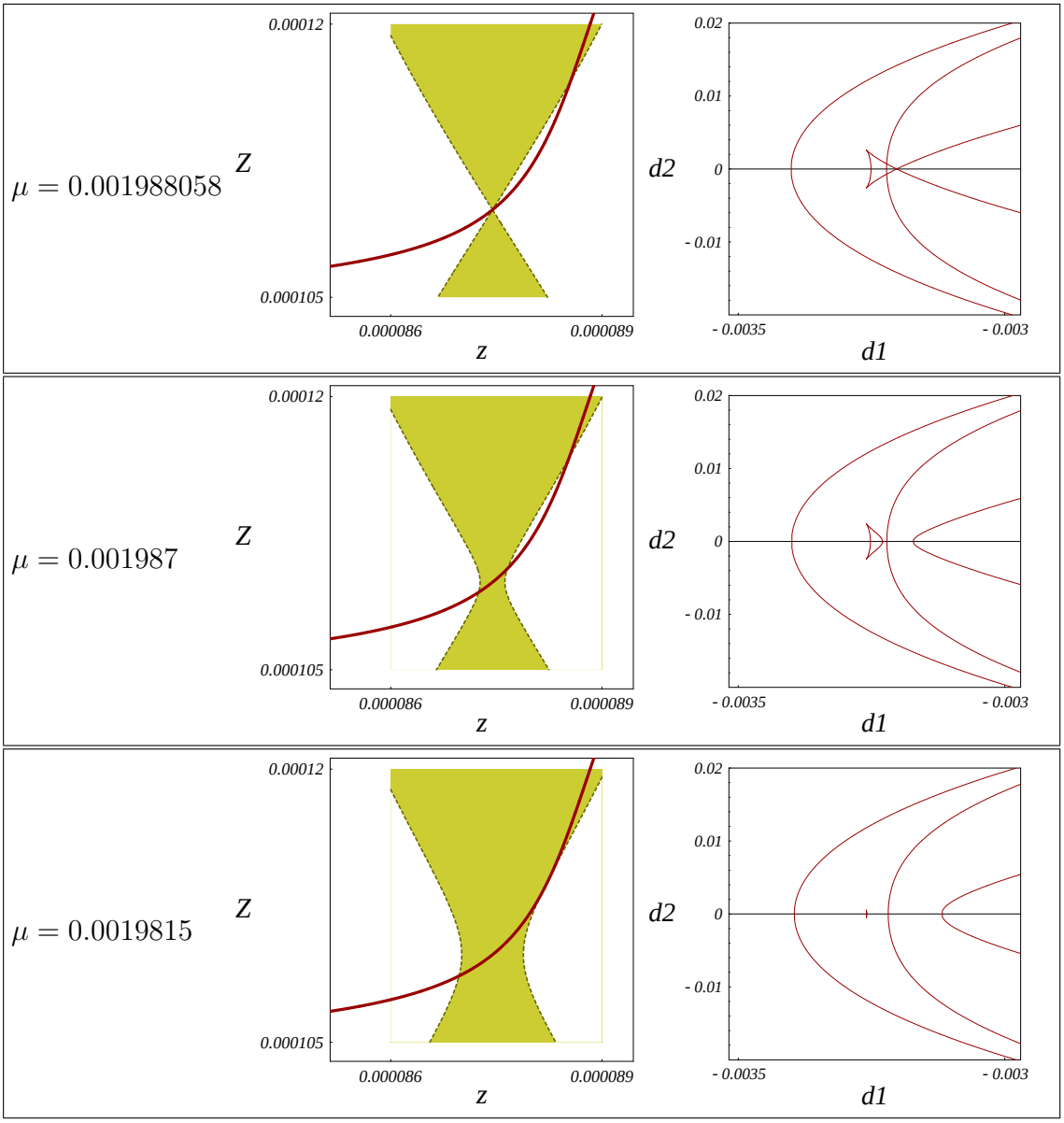


Figura 6.10: Para valores positivos de μ creación (por un contacto no transversal sin cúspides) y destrucción (en un *isola center*) de una curva cerrada de bifurcaciones silla-nodo para curvas con cúspides.

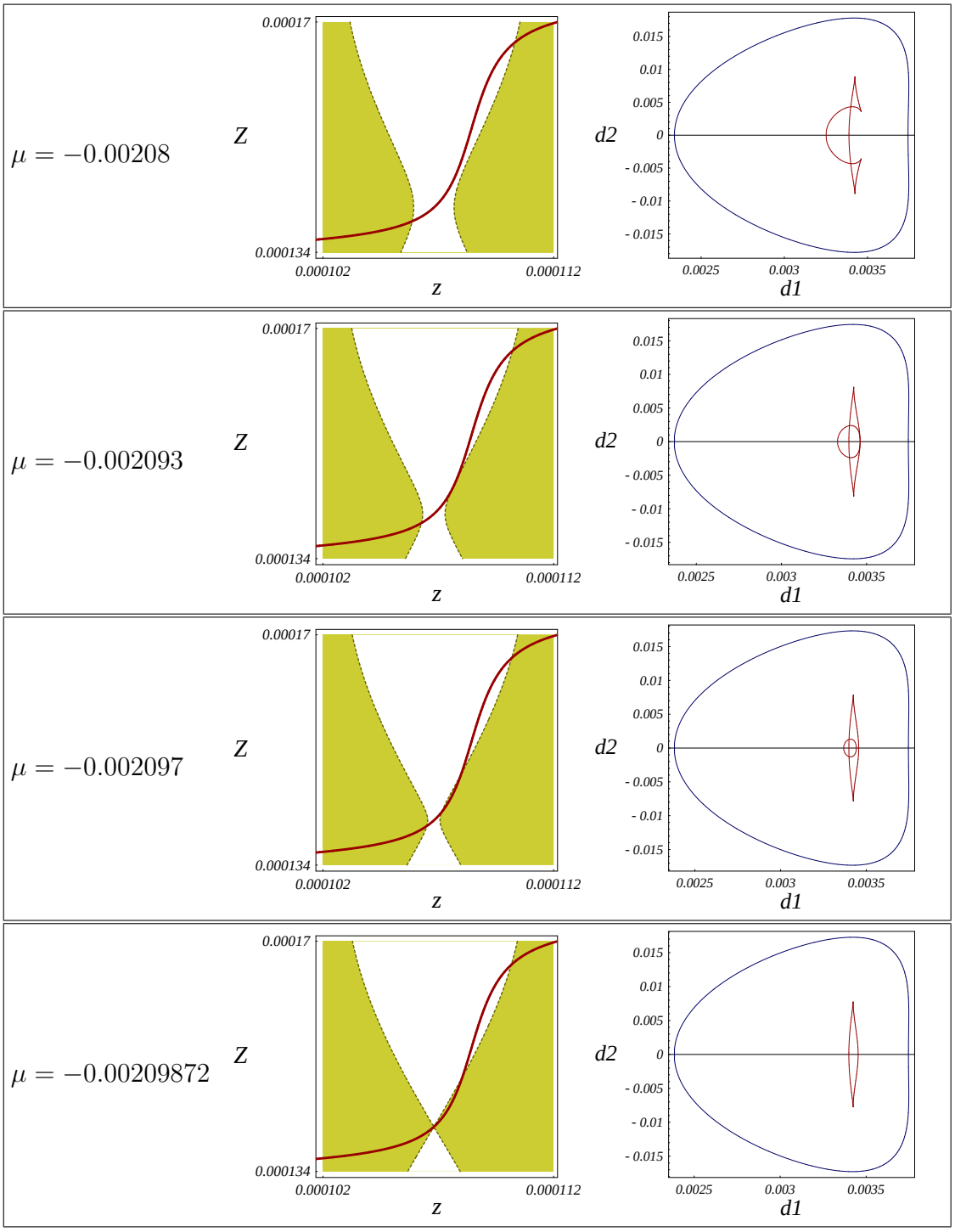


Figura 6.11: Para valores negativos de μ creación (por una colisión entre dos bifurcaciones de cúspide simétricas) y destrucción (en un *isola centre*) de una curva cerrada de bifurcaciones silla-nodo para curvas con bifurcaciones de cúspide. La curva mayor es de bifurcaciones silla-nodo sin cúspides. El par de curvas, en el plano (d_1, d_2), que aparece todavía para $\mu = -0.00209872$, desaparece en dos *isola centres* para valores más pequeños de μ.

6.4. Aplicación a la ecuación de Chua

El estudio numérico que hacemos de la ecuación de Chua (1.1), publicado en Algaba, Merino, Fernández-Sánchez y Rodríguez-Luis (2006), se ha llevado a cabo con la ayuda de AUTO (ver Doedel, Champneys, Fairgrieve, Kuznetsov, Sandstede y Wang (1998)). De acuerdo con otros trabajos previos (ver Algaba, Fernández-Sánchez, Freire, Merino y Rodríguez-Luis (2002), Algaba, Merino, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (2003), Algaba, Merino, Fernández-Sánchez y Rodríguez-Luis (2003)), tomamos β, c y α como parámetros de bifurcación y fijamos los otros dos, $a = -1$, $\gamma = 0.3 > 0$.

En el capítulo 5 mostramos, en la figura 5.12, la proyección sobre el plano (α, β) de una curva de puntos–T, **TP**, obtenida por continuación numérica en el espacio triparamétrico (α, β, c). Esta curva nace de un punto de degeneración lineal triple-cero del equilibrio del origen **TZ**, que existe para $\alpha = -1.373125$, $\beta = 0.016875$ y $c \approx 0.946746$ (ver Algaba, Merino, Freire, Gamero y Rodríguez-Luis (2003) para más detalles). La curva tiene **TP** tiene un pliegue, es decir, presenta una falta de transversalidad respecto del parámetro α (se da un máximo para $\alpha_c \approx -1.34156$). Se sabe (ver Fernández-Sánchez, Freire y Rodríguez-Luis (2002)) que de un punto–T en un sistema $\mathbb{Z}_2$-simétrico salen dos tipos de conexiones homoclinas: una del origen Q_1 y la otra de cada uno de los equilibrios no triviales $Q_2^+(x, y, -z)$ y $Q_2^-(-x, -y, z)$, donde consideramos $x > 0$, $y > 0$ y $z > 0$.

Para $\alpha = -1.342$, mostramos en la figura 6.12 una curva cerrada de conexiones homoclinas del origen **HO** y otra que corresponde a órbitas homoclinas de los equilibrios no triviales **HN** (representadas con trazo continuo en la figura 6.12(a) y con trazo discontinuo en 6.12(b)). Ambas conexiones homoclinas tienen la particularidad de ser las únicas con forma de islas cerradas que existen, para ese valor del parámetro α, como consecuencia de la falta de transversalidad de la curva **TP**. En el interior de cada una de ellas coexisten otras ramas abiertas, de homoclinas del origen y de los equilibrios no triviales, que son las que conectan los dos puntos–T existentes para dicho valor de α.

Los tres equilibrios existentes en esta región, el origen Q_1 y los dos equilibrios no triviales, Q_2^+ y Q_2^-, son de tipo silla-foco. Si llamamos $(\lambda, -p \pm i\omega)$ a los autovalores del origen y $(-\Lambda, P \pm i\Omega)$ a los de los equilibrios no triviales (coincidentes en nuestro caso debido a la simetría de la ecuación (1.1)) y llamamos $\delta = \frac{p}{\lambda}$ y $\Delta = \frac{P}{\Lambda}$ (donde $p, P, \lambda, \Lambda > 0$) se cumple que $\frac{1}{2} < \delta < 1$ y $0 < \Delta < \frac{1}{2}$ respectivamente, en todos los puntos de las curvas de conexiones homoclinas **HO** y **HN**, en la figura 6.12. En consecuencia, al estar situadas ambas conexiones homoclinas en la zona Shil'nikov ($\delta < 1, \Delta < 1$) tenemos garantizada la existencia de curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas en torno a ellas, tanto órbitas simétricas como asimétricas como consecuencia de la $\mathbb{Z}_2$-simetría que la ecuación de Chua presenta (ver Glendinning (1984)).

En el trabajo Algaba, Merino, Fernández-Sánchez y Rodríguez-Luis (2006) analizamos las curvas de bifurcación silla-nodo de las órbitas periódicas asimétricas, para ver si estaban relacionadas con los puntos–T y su evolución al mover el parámetro de control α. Este parámetro de la simulación numérica va a representar al parámetro μ del modelo teórico.

El diagrama de bifurcaciones de la figura 6.13, para $\beta = 0.017$, nos muestra que las órbitas periódicas asimétricas, que surgen de la rama inferior de ambas curvas de conexiones homoclinas **HN** y **HO**, están relacionadas. Por continuación numérica, en el

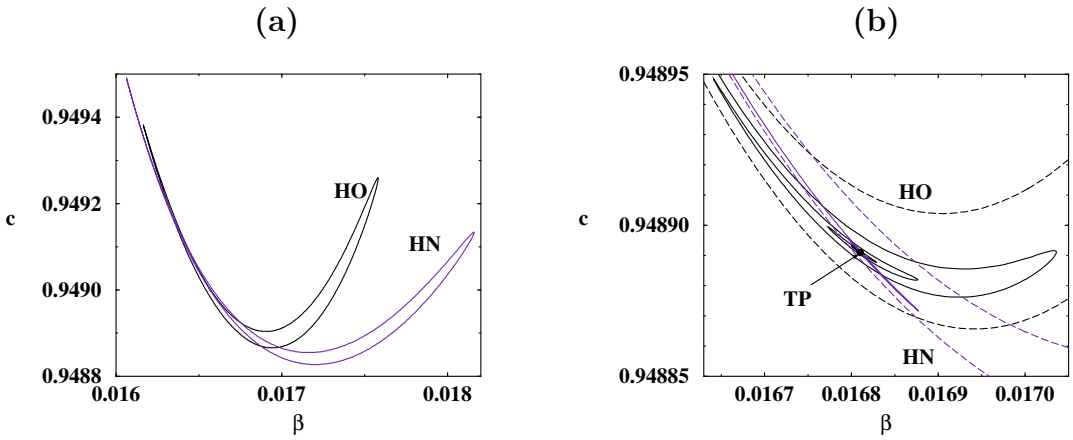


Figura 6.12: Para $\alpha = -1.342$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$: (a) Curvas cerradas de conexiones homoclinas del origen **HO** (curva de color negro) y de los equilibrios no triviales **HN** (curva de color lila). (b) Zoom de (a) en las proximidades de uno de los puntos–T (el que corresponde al mayor valor de β en la figura 5.12). Hemos incluido dos nuevas curvas abiertas de conexiones homoclinas del origen **HO** (curva continua de color negro) y de los equilibrios no triviales **HN** (curva continua de color lila) que unen ambos puntos–T **TP**.

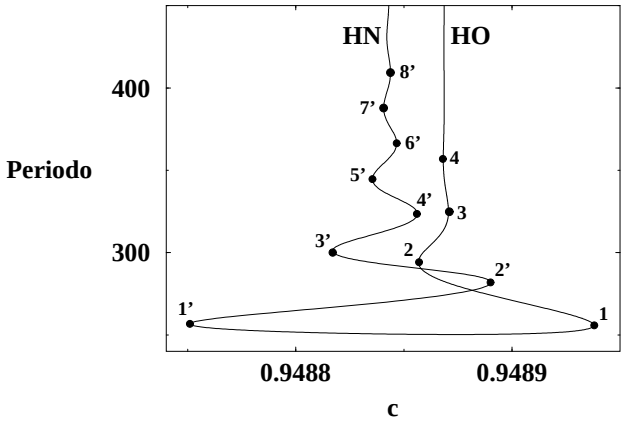


Figura 6.13: Para $\beta = 0.017$, $\alpha = -1.342$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$, diagrama parcial de bifurcaciones (c frente al periodo) de las órbitas periódicas asimétricas.

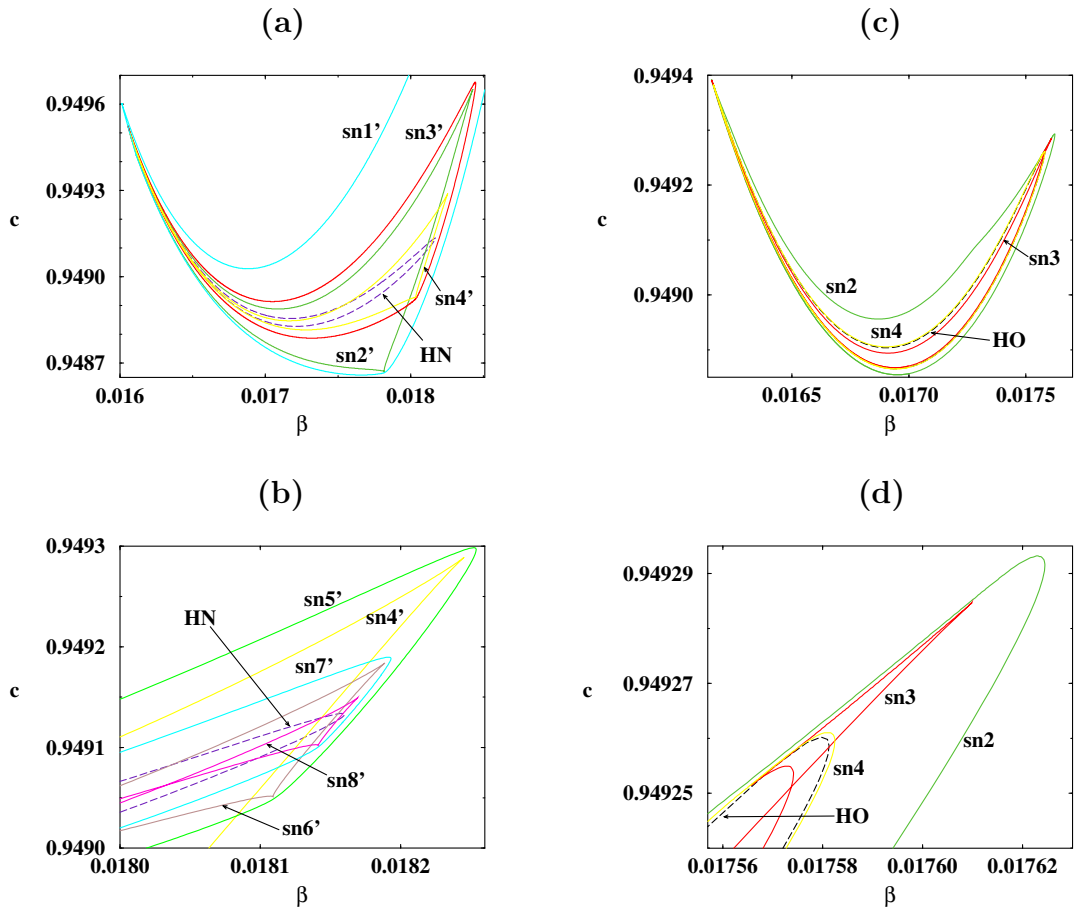


Figura 6.14: Para $\alpha = -1.342$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$: (a) Curvas de bifurcación cerradas: conexiones homoclinas de los equilibrios no triviales **HN** (trazo discontinuo) y las silla-nodo **sn1′**, **sn2′**, **sn3′** y **sn4′** (trazo continuo) que corresponden a las etiquetas **1′**, **2′**, **3′** y **4′**, respectivamente, de la figura 6.13. (b) Zoom de (a) en un entorno del *turning point* derecho de la curva de conexiones homoclinas **HN**. También hemos representado parcialmente las cuatro curvas cerradas de silla-nodo **sn5′**, **sn6′**, **sn7′** y **sn8′** que corresponden, respectivamente, a las etiquetas **5′**, **6′**, **7′** y **8′** de la figura 6.13. (c) Curvas de bifurcación cerradas: conexiones homoclinas del origen **HO** (trazo discontinuo) y las curvas de silla-nodo **sn2**, **sn3** y **sn4** (trazo continuo) que corresponden, respectivamente, a las etiquetas **2**, **3** y **4** de la figura 6.13. (d) Zoom de (c) en un entorno del *turning point* derecho de la curva de conexiones homoclinas **HO**.

plano de parámetros (β, c), de algunas de las órbitas etiquetadas en la figura 6.13, se obtienen las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas de la figura 6.14.

Si analizamos las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas que rodean a cada una de las conexiones homoclinas, **HN** y **HO** de la figura 6.14, se observa que son muy semejantes y que podemos encontrar dos configuraciones distintas. Las curvas etiquetadas como **sn1′**, **sn3′**, **sn5′**, **sn7′**, ..., constituyen una sucesión de curvas cerradas encajadas suaves que se van aproximando cada vez más a la curva de conexiones homoclinas **HN**, acumulando a los dos pliegues de la curva de conexiones homoclinas desde fuera hacia adentro. Por contra las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas **sn2′**, **sn4′**, **sn6′**, **sn8′**, ..., constituyen una sucesión de curvas cerradas que presentan un par de cúspides de órbitas periódicas en cada uno de los extremos de la curva, los cuales se van aproximando cada vez más entre sí, acumulando a los dos pliegues de la curva de conexiones homoclinas **HN**, pero en sentido contrario, desde dentro hacia fuera.

Vamos a comparar la evolución de estas curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas, con las obtenidas en la simulación numérica del modelo teórico, cuando movemos el parámetro de control desde valores de $\alpha < \alpha_c$ (equivalente, de acuerdo a las figuras 6.3 y 5.12, a tomar valores $\mu > 0$ en el modelo teórico) hasta valores de $\alpha > \alpha_c$ ($\mu < 0$ en el modelo teórico).

En la figura 6.15 se observa cómo tiene lugar, entre los valores $\alpha = -1.343099599$ y $\alpha = -1.3430042255$, la primera de las transiciones analizadas en el estudio numérico de nuestro modelo teórico. Para el primero de los valores del parámetro, las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas denotadas por **sn2** y **sn3** en la figura 6.14 son ahora curvas abiertas, razón por la cual las denotamos **sn2o** y **sn3o**, y conectan cada uno de los dos puntos–T **TP** existentes para dicho valor del parámetro. La curva **sn2o** no presenta cúspides de órbitas periódicas, mientras que la curva de bifurcación **sn3o** presenta un par de cúspides en cada *turning point* que realiza antes de finalizar en los dos puntos **TP**. A su vez, estas cúspides están situadas cerca de los *turning points* que presenta la conexión homoclina del origen cuando va oscilando en torno a cada uno de los puntos–T de los que surge. En el modelo teórico, esta configuración, de las curvas de bifurcación silla-nodo **sn2o** y **sn3o**, correspondería a la obtenida para el valor del parámetro $\mu = 0.00224$ en la figura 6.8 y $\mu = 0.00205$ en la figura 6.9 respectivamente.

Al aumentar el valor del parámetro, para $\alpha = -1.3430042255$, podemos ver en la figura 6.15(d,e,f) cómo, debido a un contacto no transversal, la curva anterior de bifurcación silla-nodo **sn2o** se ha separado en dos ramas, una cerrada **sn2c** y otra abierta, que surge de los dos puntos **TP** que denotamos nuevamente por **sn2o**, en concordancia con lo obtenido en la figura 6.8 del modelo teórico para $\mu = 0.0022386$. Notemos que este proceso es el mismo que experimentaban, al ir variando el parámetro de control α, las curvas de conexiones heteroclinas entre los equilibrios Q_2^+ y Q_2^-, homoclinas del origen Q_1 y homoclinas de los equilibrios no triviales (ver Algaba, Merino, Fernández-Sánchez y Rodríguez-Luis (2003), Algaba, Fernández-Sánchez, Freire, Merino y Rodríguez-Luis (2002)). En el espacio tridimensional (α, β, c) tendríamos, para estas superficies de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas **sn2o**, **sn4o**, ..., una disposición en torno a la curva **TP** similar a la que presentan las superficies de órbitas homoclinas en la figura 6.3. Por otra parte la curva **sn3o** no ha cambiado cualitativamente, aunque se observa en el dibujo de la figura

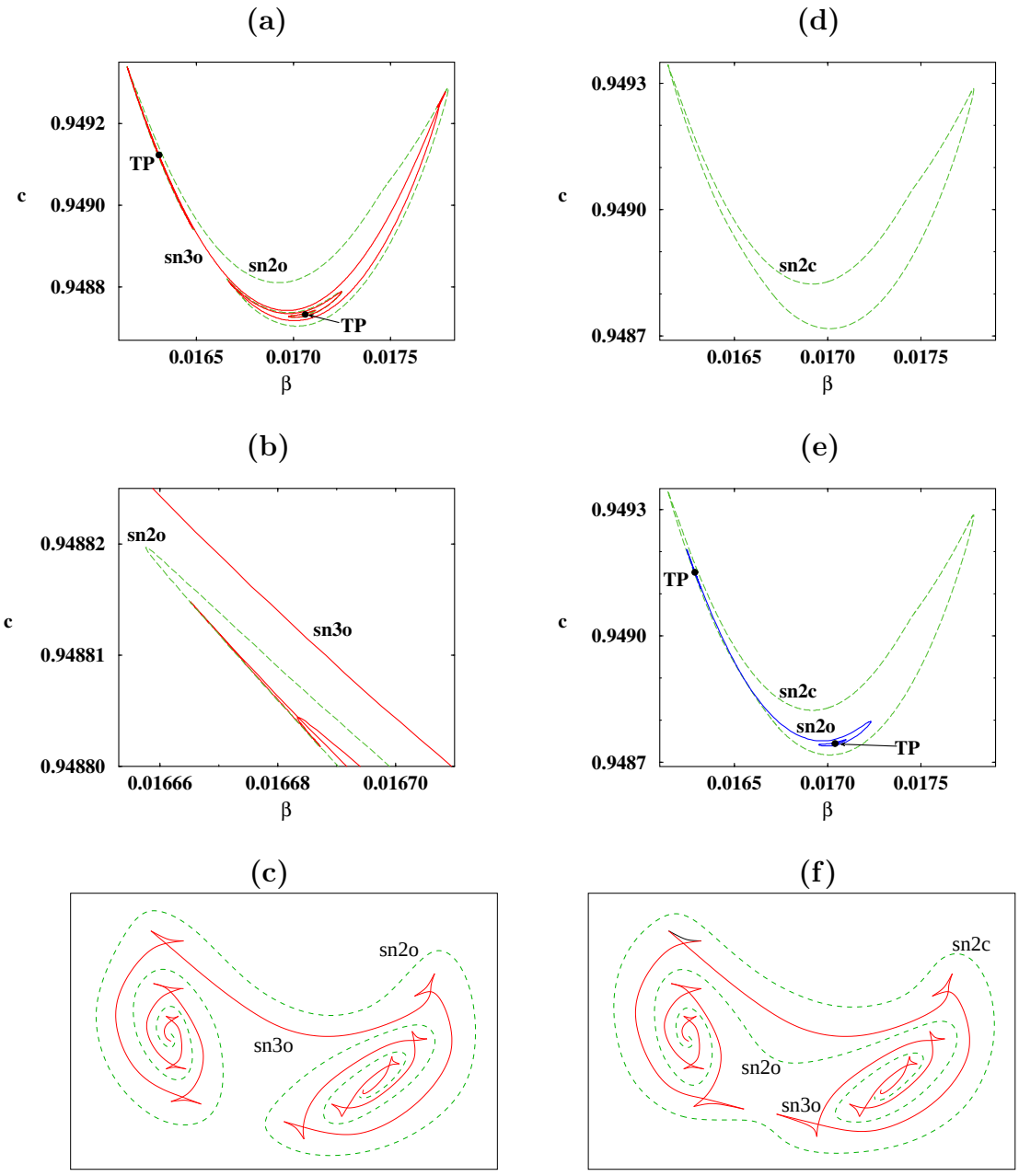


Figura 6.15: Para $\gamma = 0.3$, $a = -1$: (a) Curvas de bifurcación silla-nodo **sn2o** y **sn3o** para $\alpha = -1.343099599$. (b) Zoom de (a). (c) Dibujo cualitativo de las curvas **sn2o** y **sn3o** para $\alpha = -1.343099599$. (d) Curva de bifurcación silla-nodo **sn2c** para $\alpha = -1.3430042255$. (e) Curvas de bifurcación silla-nodo **sn2o** y **sn2c** for $\alpha = -1.3430042255$. (f) Dibujo cualitativo de las curvas **sn2o**, **sn2c** y **sn3o** para $\alpha = -1.3430042255$.

6.15(f) cómo esta disminución del valor del parámetro α implica que dos de las cúspides de órbitas periódicas presentes en esta curva están más cercanas, en concordancia con lo que sucede en el modelo propuesto cuando disminuye el valor de μ (ver, por ejemplo, la figura 6.9).

El proceso anterior se repite nuevamente con la curva de bifurcación silla-nodo **sn2o** de la figura 6.15(e,f), al ir disminuyendo el valor del parámetro α, y es el que experimentan todas las curvas de bifurcación silla-nodo que no presentan cúspides **sn2o**, **sn4o**, ... Concretamente, primero lo experimenta la curva **sn4o**, para un valor entre $\alpha = -1.3430042255$ y $\alpha = -1.3429682306$ y, posteriormente, es la curva **sn2o** la que repite este proceso (para un valor entre $\alpha = -1.342$ y $\alpha = -1.3419$). Esto está en concordancia con lo que ocurre en la experimentación numérica del modelo teórico, donde las RI_μ van surgiendo, fijada una curva concreta en el plano (z, Z), sobre las restantes curvas antes de que vuelva a surgir otra RI_μ sobre la curva prefijada.

Al acercarnos al valor crítico del parámetro α_c se repite, con la curva de bifurcación **sn3o**, lo que anteriormente ocurrió con la curva de bifurcación silla-nodo **sn2o**. En efecto, para $\alpha = -1.3429682306$ vemos en la figura 6.16(a,b,c) cómo la curva **sn3o**, al colapsar dos de las cúspides de órbitas periódicas presentes en ella, se rompe en dos trozos, dando lugar a una curva cerrada (similar a la obtenida en la figura 6.15(d,e,f)) con únicamente dos cúspides en cada uno de los extremos de ella y otra rama abierta **sn3o** que une los dos puntos–T existentes. En el modelo teórico esta situación se presenta para el valor $\mu = 0.002$ de la figura 6.9.

Para el valor $\alpha = -1.342967$ observamos, en la figura 6.16(d,e,f), cómo la rama abierta de la curva **sn3o**, que une los dos puntos–T **TP**, se ha descompuesto a su vez en dos nuevas curvas. Una cerrada, **sn3c**, que presenta una única cúspide de órbitas periódicas en cada uno de sus dos extremos, y otra rama abierta **sn3o** que sigue uniendo ambos puntos **TP**. Esta última es del mismo tipo que la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas **sn3o** presente para $\alpha = -1.343099599$ en la figura 6.15, y es ella la que, al mover nuevamente el parámetro, repite el proceso anterior. Esta disposición se corresponde con la de la Fig. 6.10 del modelo propuesto para $\mu = 0.001987$. Finalmente la rama cerrada en forma de isla, de la curva **sn3c** en la figura 6.16(d,e,f), no está presente en el plano de parámetros (β, c) para el valor $\alpha = -1.3429$.

Éste es el camino por el que las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas, que tienen cúspides, pasan de ser abiertas, estando todas ellas relacionadas con los dos puntos–T **TP**, a ser curvas cerradas, al ir aproximándose los dos puntos **TP** entre sí cuando nos acercarnos al valor crítico α_c.

Si nos situamos ahora al otro lado del valor crítico, es decir, para valores de $\alpha > \alpha_c$ ($\mu < 0$ en el modelo teórico), sabemos (ver Algaba, Fernández-Sánchez, Freire, Merino y Rodríguez-Luis (2002)) que, si bien han desaparecido los dos puntos–T **TP**, existen aún un número finito de curvas cerradas de conexiones homoclinas relacionadas con dichos puntos, como podemos ver en la figura 6.17(c,d). Para $\alpha = -1.33815$ podemos observar en la figura 6.17(a,b) que las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas **sn2c** y **sn3c** están en una disposición similar a la de la figura 6.14 para $\alpha = -1.342$, si bien ha disminuido el rango de los parámetros donde existen, lo que conlleva que las dos cúspides de órbitas periódicas más próximas de la curva **sn3c** se aproximen cada vez más. En el

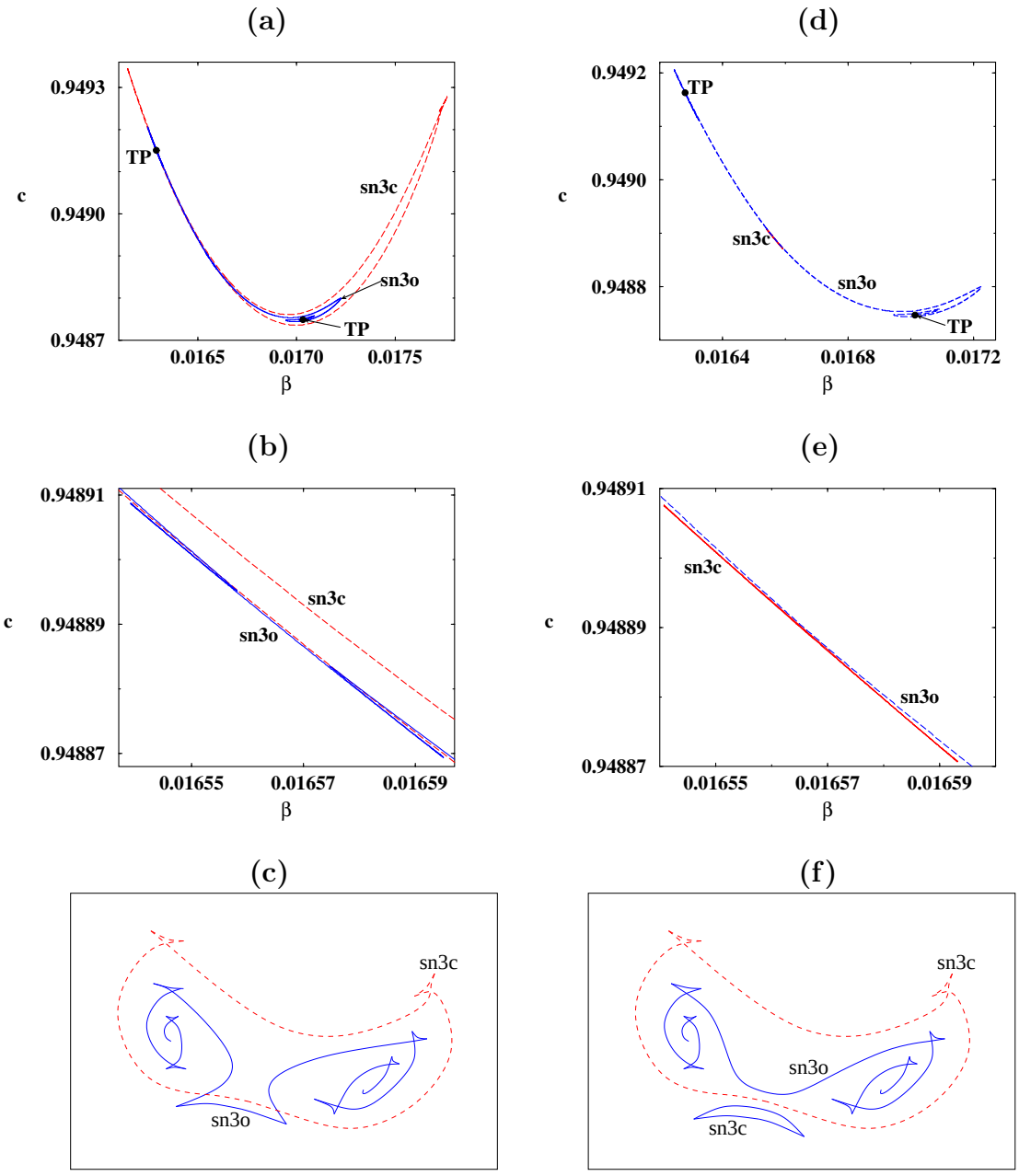


Figura 6.16: Para $\gamma = 0.3$, $a = -1$: (a) Curvas de bifurcación silla-nodo **sn3o** y **sn3c** para $\alpha = -1.3429682306$. (b) Zoom de (a). (c) Dibujo cualitativo de las curvas **sn3o** y **sn3c** para $\alpha = -1.3429682306$. (d) Curvas de bifurcación silla-nodo **sn3o** y **sn3c** para $\alpha = -1.342967$. (e) Zoom de (d). (f) Dibujo cualitativo de las dos ramas cerradas de **sn3c** y de la rama abierta de **sn3o** para $\alpha = -1.342967$.

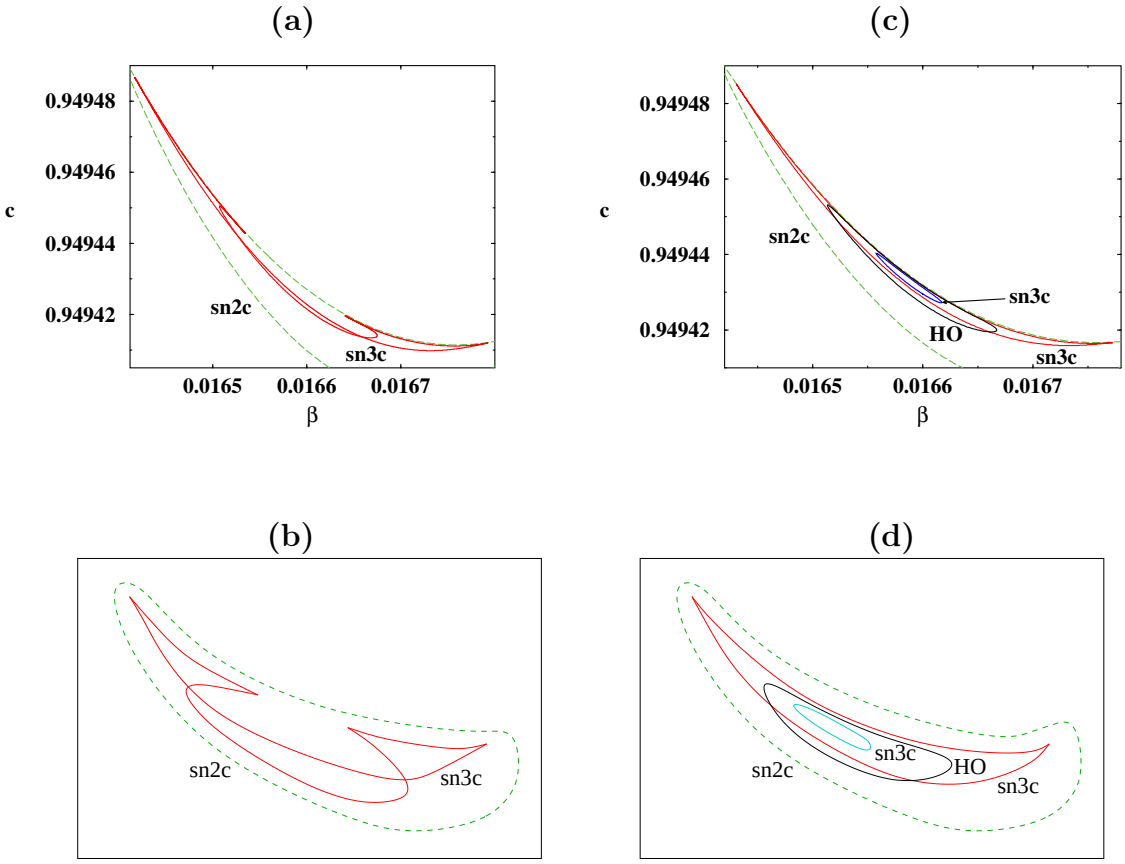


Figura 6.17: Para $\gamma = 0.3$, $a = -1$: (a) Curvas de bifurcación silla-nodo **sn2c** y **sn3c** para $\alpha = -1.33815$. (b) Dibujo cualitativo de las curvas **sn2c** y **sn3c** para $\alpha = -1.33815$. (c) Curvas de bifurcación **HO**, **sn2c** y **sn3c** para $\alpha = -1.3381$. (d) Dibujo cualitativo de las curvas **HO**, **sn2c** y **sn3c** para $\alpha = -1.3381$.

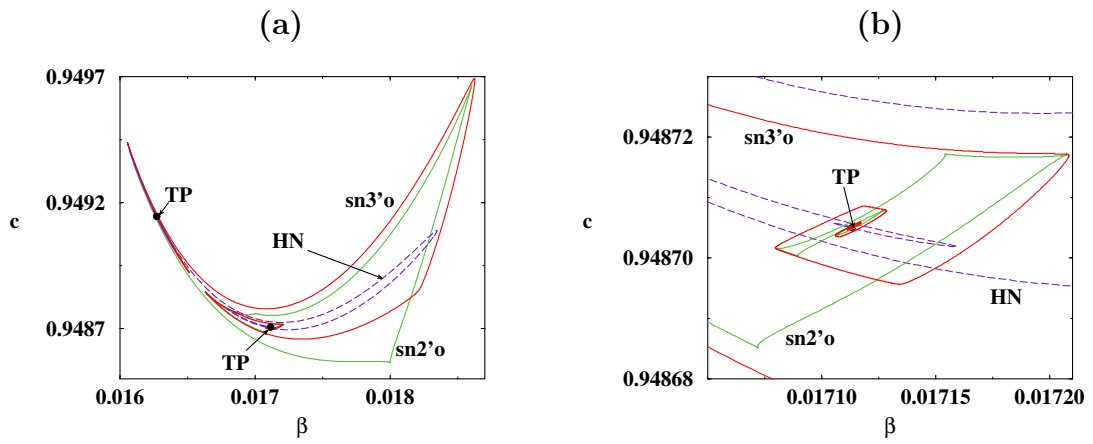


Figura 6.18: Para $\alpha = -1.34335$, $\gamma = 0.3$, $a = -1$: (a) Conjunto parcial de bifurcaciones. (b) Zoom de (a) en las proximidades del punto–T derecho **TP**.

modelo teórico esta situación se presenta para $\mu = -0.00208$ en la figura 6.11. Una vez que colapsan estas dos cúspides, mediante la misma bifurcación anterior, la curva cerrada de bifurcación silla-nodo **sn3c** se descompone en dos curvas cerradas (ver figura 6.17(c,d) para $\alpha = -1.3381$), una sin cúspides y otra que presenta una cúspide de órbitas periódicas en cada uno de sus extremos, ambas denotadas por **sn3c**, lo que está en concordancia con la Fig. 6.11 para $\mu = -0.002097$. Finalmente, cada una de estas curvas cerradas, **HO**, **sn3c** y **sn2c**, va desapareciendo al ir disminuyendo el valor del parámetro α.

Obsérvese que, a diferencia de lo que ocurre en el espacio tridimensional (α, β, c) con las superficies de bifurcación silla-nodo del tipo **sn**2o, sobre las superficies de bifurcación silla-nodo del tipo **sn**3o existen varias curvas de cúspides de órbitas periódicas que, debido a la forma espiral de estas superficies, presentan falta de transversalidad, unas para valores $\alpha < \alpha_c$ y otras para valores $\alpha > \alpha_c$.

Para confirmar que este proceso es genérico, hemos comprobado que también está presente en las curvas de bifurcación silla-nodo **sn2′**, **sn3′**, ..., relacionadas con las conexiones homoclinas de los equilibrios no triviales **HNT**. Así, vemos en la figura 6.18, cómo estas curvas, que eran cerradas en la figura 6.14, for $\alpha = -1.342$, son ahora abiertas y están relacionadas con los puntos–T, para $\alpha = -1.34335$.

Finalmente, resumimos el proceso que hemos descrito, en la figura 6.19. A medida que el parámetro de control α varía, las curvas de bifurcación silla-nodo asociadas a las conexiones homoclinas que parten del punto–T evolucionan: pasan de abiertas, y uniendo con forma espiral los dos puntos–T, a cerradas (tanto las curvas que no tienen cúspides, **sn2o**, como las curvas **sn3o** que sí las tienen).

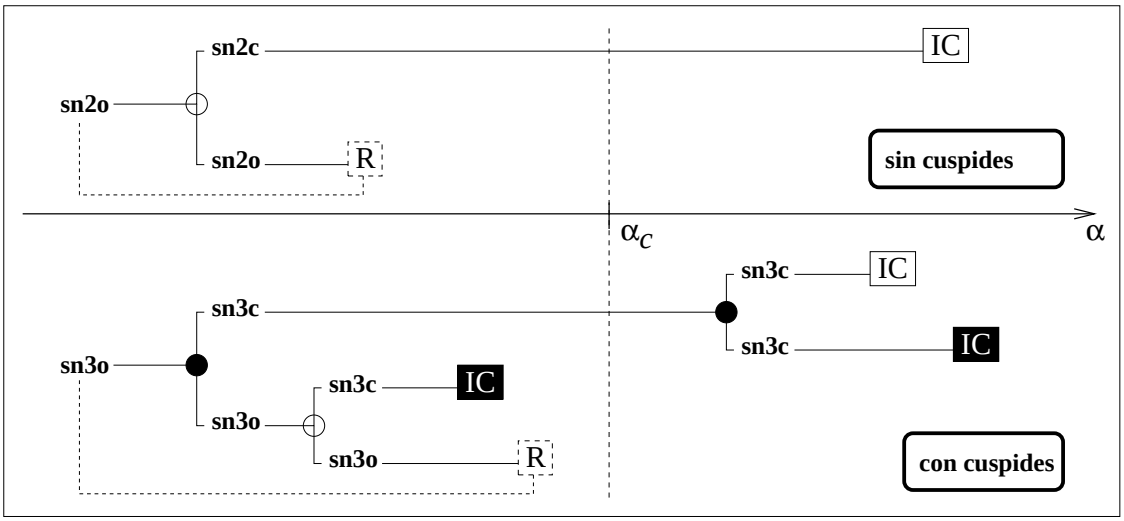


Figura 6.19: Descripción esquemática de la creación/destrucción de curvas cerradas de bifurcaciones silla-nodo a medida que α aumenta. Los nombres **sn2** y **sn3** indican curvas sin o con cúspides, respectivamente. Las últimas letras **o** y **c** significan, respectivamente, curva abierta y cerrada. Los círculos señalan la creación de curvas cerradas que involucran (relleno negro) o no (blanco) la colisión de dos cúspides simétricas. La desaparición de curvas en *isola centres* se denota por `IC` en un cuadrado negro o blanco (si involucra o no cúspides, respectivamente). La letra `R` significa que la curva exhibe de nuevo el mismo proceso.

Capítulo 7

Análisis de una Degeneración de la Bifurcación Hopf-Silla-Nodo

7.1. Introducción

La teoría local de bifurcaciones es una herramienta muy importante en el conocimiento del comportamiento dinámico de familias de sistemas dinámicos. Utiliza varias técnicas que simplifican un sistema dinámico dado (en su dimensión y también en su expresión analítica) transformándolo en un sistema canónico cuyo estudio proporciona información interesante para el sistema original. Nuestro estudio aplica estas simplificaciones usando el método de las variedades de centro y formas normales para el sistema reducido. El análisis de las bifurcaciones locales da una primera idea del conjunto de bifurcaciones en torno a la posición del equilibrio, y es muy útil como guía en el uso de un adecuado método numérico.

En el caso de bifurcaciones de equilibrios de sistemas tridimensionales de codimensión dos teniendo un cero y un par de autovalores imaginarios puros, el análisis de bifurcaciones se basa en la simetría de giro de la forma normal. Esto nos permite reducir el estudio a un sistema plano, el cuál puede ser entendido como una aproximación local de la aplicación de Poincaré del sistema original considerando el flujo dos-dimensional en el semiplano de la derecha.

Más concretamente, en el estudio de la bifurcación Hopf-silla-nodo no degenerada, reducimos el problema al siguiente despliegue biparamétrico de la forma normal para la singularidad Hopf-silla-nodo en coordenadas cilíndricas (ver, por ejemplo Guckenheimer y Holmes (1997))

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \mu_1\rho + a_1\rho z + \cdots, \\ \dot{z} &= \mu_2 + b_1\rho^2 + b_2 z^2 + \cdots, \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + \cdots, \end{aligned}$$

donde algunas condiciones de no degeneración sobre el campo son impuestas. Concretamente los coeficientes a_1, b_1, b_2 se suponen diferentes de cero. En este capítulo, seguiremos la notación de Guckenheimer y Holmes (1997), y los cuatro casos no degenerados que pueden aparecer son etiquetados con números romanos.

Han sido ya estudiados varios casos de degeneraciones no lineales: Langford (1987); Dangelmayr y Wegelin (1991); Krauskopf y Rousseau (1997). El caso de la familia que vamos a estudiar ($a_1 = 0$) está incluido en el estudiado por Dangelmayr y Wegelin (1991), donde una degeneración de codimensión cuatro es estudiada. Sin embargo, en este trabajo no se analizan todas las situaciones que pueden aparecer. Destacamos que nuestro estudio teórico de esta degeneración de codimensión tres prueba la existencia y localiza varias bifurcaciones globales no descritas por estos autores (aunque en el caso considerado por Krauskopf y Rousseau (1997), algunas de estas bifurcaciones son detectadas).

Incluimos el estudio de un caso que se presenta en el circuito electrónico representado en la figura 7.3, el cual es diseñado acoplando dos circuitos simples: uno de ellos es lineal con dos ramas y el otro es unidimensional con un elemento no lineal, el cual es modelado por un polinomio de tercer grado. La idea de acoplar sistemas simples nos lleva a conseguir sistemas con un comportamiento dinámico complejo: un amplio escenario de bifurcaciones aparece debido a la existencia de varias degeneraciones de equilibrio, las cuales varían de un autovalor cero simple a una degeneración del tipo triple-cero (ver Algaba, Freire, Gamero y García (2004); Algaba, Gamero y Rodríguez-Luis (2005)).

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. En la próxima sección consideramos el estudio teórico de un caso degenerado de la bifurcación Hopf-silla-nodo: en primer lugar mostramos que la singularidad está determinada bajo perturbaciones de orden superior; más tarde estudiamos un despliegue de codimensión tres de la singularidad plana (obtenida eliminando la componente angular), donde conectamos los casos no degenerados I$\longleftrightarrow$IIa, III$\longleftrightarrow$IVa,b (siguiendo la notación de Guckenheimer y Holmes (1997)). Hay que hacer notar que algunos problemas que aparecen en el caso no degenerado IIa son resueltos en el caso degenerado: la órbita periódica que nace en la bifurcación de Hopf (la cual crece sin medida en el caso no degenerado) está limitada debido a la presencia de una bifurcación de órbitas periódicas del tipo Takens-Bogdanov.

Además de los casos de bifurcaciones no degeneradas de codimensión dos, hemos de indicar la aparición de otras bifurcaciones: la anteriormente mencionada bifurcación de Takens-Bogdanov, y varios tipos de conexiones globales. En el Apéndice 7.4 incluimos las demostraciones de las diferentes bifurcaciones globales dadas en la Sección 7.2. Las implicaciones para el flujo tridimensional son consideradas en la subsección 7.2.4. Aquí, volvemos al escenario tridimensional (incluyendo la componente angular) utilizando la conocida relación que existe entre los flujos bidimensional y tridimensional: equilibrios sobre el eje z siguen siendo equilibrios en el flujo tridimensional, sin embargo equilibrios fuera del eje z son órbitas periódicas y soluciones periódicas en el flujo bidimensional equivalen a toros invariantes en el flujo tridimensional.

Finalmente, en la Sección 7.3, tratamos un caso correspondiente a un modelo de un circuito electrónico autónomo tridimensional, que consta de una inductancia L_1, dos capacitores C, C_2, dos resistencias R_1, R_2 y una conductancia no lineal con voltaje $i(V)$.

Hacemos notar que las ideas presentadas en este capítulo proporcionan un procedimiento analítico para detectar varios tipos de degeneraciones de órbitas periódicas, incluyendo varios tipos de bifurcaciones de órbitas periódicas del tipo Takens-Bogdanov.

Nuestro estudio también nos permite predecir fenómenos de resonancia sobre los toros invariantes que aparecen en la bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas. En

particular, nos permite detectar degeneraciones angulares. También son obtenidos algunos aspectos relacionados con la forma de la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas que sirve para acotar las zonas de resonancia.

7.2. Una degeneración no lineal de la bifurcación Hopf-silla-nodo

Nuestro primer objetivo es el estudio analítico de un caso degenerado de la bifurcación Hopf-silla-nodo el cual comprende los casos no degenerados I⟷IIa, III⟷IVa,b (siguiendo la notación de Guckenheimer y Holmes (1997)). Recordemos que en el caso no degenerado IIa, las órbitas periódicas que nacen en la bifurcación de Hopf crecen y salen de cualquier pequeño entorno del equilibrio. En consecuencia, el análisis local del sistema plano asociado es incompleto. Sin embargo, en nuestro caso degenerado, la existencia de esta órbita periódica está limitada debido a la presencia de una órbita homoclina relativa a una bifurcación de Takens-Bogdanov lo que completa el análisis local.

Comenzamos recordando algunos hechos de la bifurcación Hopf-silla-nodo no degenerada que pueden ser encontrados, por ejemplo, en Guckenheimer y Holmes (1997); Chow, Li y Wang (1994); Kuznetsov (2004); Wiggins (2003).

Una idea básica en este estudio es el uso de la forma normal más simple para la singularidad Hopf-silla-nodo, la cual puede ser encontrada en Algaba, Freire y Gamero (1998), donde se muestra un algoritmo para calcular dicha forma normal. En este trabajo, se obtiene la siguiente forma normal en coordenadas cilíndricas ($X = \rho\cos\theta, Y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$)

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= a_1\rho z + a_2\rho z^2 + a_3\rho^3 + \cdots, \\ \dot{z} &= b_1\rho^2 + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots, \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + c_1 z + c_2\rho^2 + c_3 z^2 + \cdots. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Tomando la variable angular como el tiempo, reducimos el problema al siguiente problema plano

$$\begin{aligned} \rho' &= a_1\rho z + a_2\rho z^2 + a_3\rho^3 + \cdots, \\ z' &= b_1\rho^2 + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4\rho^2 z + \cdots. \end{aligned} \tag{7.2}$$

El caso no degenerado impone las siguientes condiciones sobre la forma normal (7.1): $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ y $a_1 \neq b_1$, y aparecen hasta cuatro casos para el despliegue biparamétrico de la singularidad. Hay algunos trabajos dedicados a analizar algunas degeneraciones: el caso $b_2 = 0$ ha sido considerado por Langford (1987) en la bifurcación Hopf-histéresis; Krauskopf y Rousseau (1997) estudió el caso $b_1 = 0$; y un caso de codimensión cuatro, correspondiente a $a_1 = b_2 = 0$, ha sido considerado por Dangelmayr y Wegelin (1991).

Nuestro objetivo es estudiar el caso degenerado $a_1 = 0$ (que junta en uno solo los casos no degenerados I ⟷ IIa, III ⟷ IVa,b siguiendo la clasificación de Guckenheimer y Holmes (1997)). Este caso está incluido en el considerado por Dangelmayr y Wegelin

(1991), pero este trabajo no estudia todas las posibles situaciones que pueden aparecer y se ocupa principalmente de aspectos numéricos. En particular, probamos la presencia de varias bifurcaciones no detectadas por estos autores (correspondientes a diferentes tipos de conexiones heteroclinas), y también aportamos resultados teóricos sobre la existencia, unicidad y localización de las curvas de bifurcación.

En nuestro análisis suponemos algunas condiciones de no degeneración sobre el sistema (7.2). Concretamente supondremos $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Es fácil mostrar que utilizando un adecuado escalado, podemos conseguir $b_1 = b = \pm 1$, $b_2 = -1$. Más aún, tomando la variable $r = \rho^2$, llegamos a

$$\begin{aligned} r' &= 2a_2 r z^2 + 2a_3 r^2 + \cdots, \\ z' &= br - z^2 + b_3 z^3 + b_4 r z + \cdots. \end{aligned}$$

La forma normal más simple bajo equivalencia para este tipo de sistemas ha sido considerada en Algaba, Freire, Gamero y García (2003), utilizando técnicas de desarrollos casi-homogéneos de campos vectoriales. La mencionada forma normal es

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sum_{l=2}^{\infty} \tilde{c}_l r^l + \sum_{l=2}^{\infty} \tilde{a}_l r^l z, \\ \dot{z} &= br - z^2. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Bajo la hipótesis adicional $\tilde{c}_2 \neq 0$, podemos conseguir mayores simplificaciones de la anterior forma normal, obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^2 + \sum_{l=2}^{\infty} \tilde{a}_l r^l z, \\ \dot{z} &= br - z^2. \end{aligned} \tag{7.4}$$

7.2.1. Estudio de la singularidad

En esta subsección estudiamos la determinación del sistema (7.4) truncado a segundo orden, esto es, probaremos que

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^2, \\ \dot{z} &= br - z^2, \end{aligned} \tag{7.5}$$

y el sistema (7.4) son cualitativamente equivalentes.

El eje $r = 0$ es invariante para el sistema (7.4), y la dinámica sobre el eje está dada localmente por $\dot{z} = -z^2$, la cual está determinada.

Para estudiar la dinámica en un entorno del origen con $r > 0$, aplicamos el *blow-up* casi homogéneo r-direccional (ver Andronov, Leontovich, Gordon y Maier (1970); Dumortier (1991)) dado por $r = u, z = u\bar{z}$.

El sistema (7.4) se transforma en

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u^2 + \sum_{l=2}^{\infty} \tilde{a}_l u^l \bar{z}, \\ \dot{\bar{z}} &= b - u\bar{z} - u\bar{z}^2 - \sum_{l=2}^{\infty} \tilde{a}_l u^{l-1} \bar{z}^2.\end{aligned}$$

Como $b = \pm 1$, concluimos que no existen equilibrios sobre el eje $u = 0$.

A continuación aplicamos un *blow-up* casi homogéneo en la dirección del eje z dado por $r = u^2\bar{r}$, $z = u$. El sistema obtenido

$$\begin{aligned}\dot{\bar{r}} &= \bar{r}^2 u^2 + \sum_{l=2}^{\infty} \tilde{a}_l \bar{r}^l u^{2l-1} - 2b\bar{r}^2 u + 2\bar{r}u, \\ \dot{u} &= b\bar{r}u^2 - u^2,\end{aligned}$$

es equivalente a

$$\begin{aligned}\dot{\bar{r}} &= \bar{r}\left(-2(b\bar{r}-1) + \bar{r}u + \sum_{l=2}^{\infty} \tilde{a}_l \bar{r}^{l-1} u^{2l-2}\right), \\ \dot{u} &= u\,(b\bar{r}-1)\,.\end{aligned}$$

En este caso ambos ejes son invariantes. La dinámica sobre $u = 0$ está controlada por $\dot{\bar{r}} = -2\bar{r}\,(b\bar{r}-1)$; y la dinámica sobre $\bar{r} = 0$ está dada por $\dot{u} = -u$. En el eje $\bar{r} = 0$ hay únicamente un equilibrio, el origen. Con respecto al eje $u = 0$, además del equilibrio en el origen, en el caso $b = +1$, aparece otro equilibrio en el punto $(1, 0)$.

El estudio de estos equilibrios nos permite afirmar que:

- El equilibrio en el origen es un silla hiperbólico.
- En el caso $b = +1$, la matriz de la parte lineal en el equilibrio $(1, 0)$ es $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En consecuencia, es un equilibrio semihiperbólico, cuya variedad de centro está dada localmente por $\bar{r} = 1 - \dfrac{1}{2}u + \mathcal{O}(u^2)$. El sistema reducido sobre la variedad de centro es $\dot{u} = -\dfrac{1}{2}u^2 + \mathcal{O}(u^3)$. Por tanto, este equilibrio está determinado topológicamente con respecto a perturbaciones de orden superior.

En resumen, el sistema (7.5) está determinado para perturbaciones que dejen el eje $r = 0$ invariante. Los diferentes retratos de fases para la singularidad, obtenidos por medio del correspondiente *blow-down*, son presentados en la figura 7.1.

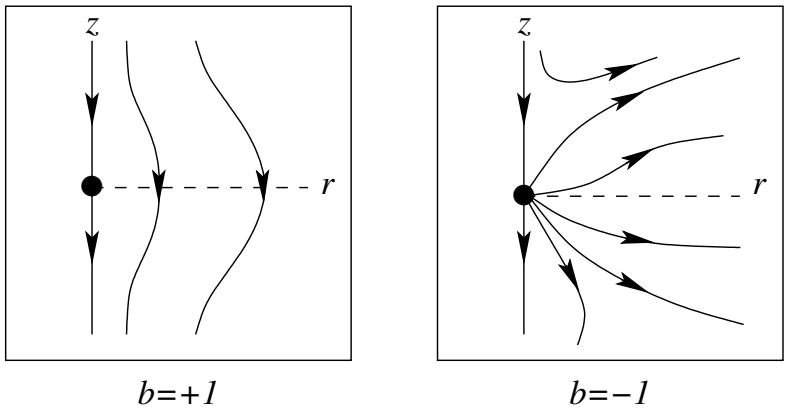


Figura 7.1: Diferentes configuraciones de la singularidad (7.5).

7.2.2. Estudio de un despliegue de codimensión tres

A continuación analizamos el siguiente despliegue triparamétrico del sistema (7.5)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r\left(\mu_1 + \mu_3 z + r\right), \\ \dot{z} &= \mu_2 + br - z^2. \end{aligned} \tag{7.6}$$

En primer lugar calculamos sus equilibrios:

- Sobre el eje $r = 0$, los equilibrios son:

$$(0, Z_+) = (0, +\sqrt{\mu_2}), \qquad (0, Z_-) = (0, -\sqrt{\mu_2}),$$

  siempre que $\mu_2 \geq 0$.

- Fuera del eje $r = 0$, los equilibrios son:

$$\begin{aligned} (R_1, Z_1) &= \left(-\mu_1 - \mu_3 Z_1, \frac{-b\mu_3 + \sqrt{\mu_3^2 + 4(\mu_2 - b\mu_1)}}{2}\right), \\ (R_2, Z_2) &= \left(-\mu_1 - \mu_3 Z_2, \frac{-b\mu_3 - \sqrt{\mu_3^2 + 4(\mu_2 - b\mu_1)}}{2}\right). \end{aligned} \tag{7.7}$$

  Estos equilibrios deben ser considerados únicamente cuando los parámetros satisfacen $\mu_3^2 + 4(\mu_2 - b\mu_1) \geq 0$ y dan lugar a coordenadas R_1, R_2 no negativas.

Para describir la estabilidad y las diferentes bifurcaciones que experimentan estos equilibrios, consideramos las matrices de la parte lineal del sistema en dichos equilibrios:

- Para el equilibrio $(0, Z_\pm)$, la mencionada matriz es

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \pm \mu_3\sqrt{\mu_2} & 0 \\ b & \mp 2\sqrt{\mu_2} \end{pmatrix}.$$

  Sus autovalores son $\lambda_1 = \mu_1 \pm \mu_3\sqrt{\mu_2}$, $\lambda_2 = \mp 2\sqrt{\mu_2}$, por lo tanto:

- Sobre la superficie $SN_1 = \{\mu_2 = 0\}$ hay una bifurcación silla-nodo, donde ambos equilibrios se unen y desaparecen. No hay equilibrios para $\mu_2 < 0$, mientras que para $\mu_2 > 0$ encontramos:
  - $(0, Z_+)$ es un nodo estable para $\mu_1 + \mu_3\sqrt{\mu_2} < 0$, o un silla en otro caso.
  - $(0, Z_-)$ es un nodo inestable para $\mu_1 - \mu_3\sqrt{\mu_2} > 0$, o un silla en otro caso.
- Sobre la superficie $T_\pm = \{\mu_1^2 - \mu_3^2\mu_2 = 0\}$ existe una bifurcación transcrítica. La variedad de centro asociada al equilibrio $(0, Z_\pm)$ está dada por $z = \mp\sqrt{\mu_2} - \dfrac{b\mu_3}{2\mu_1}r + \mathcal{O}(r, \varepsilon_\pm)^2$, donde $\varepsilon_\pm = \mu_1 \pm \mu_3\sqrt{\mu_2}$, y el sistema reducido sobre la variedad de centro es $\dot{r} = r\left(\varepsilon_\pm + \dfrac{2\mu_1 - b\mu_3^2}{2\mu_1}r\right)$, el cual tiene un equilibrio en $r = \dfrac{2\mu_1\varepsilon_\mp}{2\mu_1 - b\mu_3^2} > 0$, supuesto que $2\mu_1 - b\mu_3^2 \neq 0$. En consecuencia:
  - El equilibrio $(0, Z_+)$ experimenta una bifurcación transcrítica en

    $$T_+ = \left\{\mu_1^2 - \mu_3^2\mu_2 = 0, \mu_1\mu_3 < 0, 2\mu_1 - b\mu_3^2 \neq 0\right\}.$$

    Es supercrítica si $\operatorname{sgn}(2\mu_1 - b\mu_3^2) \neq \operatorname{sgn}(\mu_1)$, y subcrítica si $\operatorname{sgn}(2\mu_1 - b\mu_3^2) = \operatorname{sgn}(\mu_1)$. Una bifurcación transcrítica degenerada ocurre en

    $$DT_+ = \left\{\mu_1^2 - \mu_3^2\mu_2 = 0, \mu_1\mu_3 < 0, 2\mu_1 - b\mu_3^2 = 0\right\}.$$

  - El equilibrio $(0, Z_-)$ experimenta una bifurcación transcrítica en

    $$T_- = \left\{\mu_1^2 - \mu_3^2\mu_2 = 0, \mu_1\mu_3 > 0, 2\mu_1 - b\mu_3^2 \neq 0\right\}.$$

    Es supercrítica si $\operatorname{sgn}(2\mu_1 - b\mu_3^2) \neq \operatorname{sgn}(\mu_1)$, y subcrítica si $\operatorname{sgn}(2\mu_1 - b\mu_3^2) = \operatorname{sgn}(\mu_1)$. Una bifurcación transcrítica degenerada ocurre en

    $$DT_- = \left\{\mu_1^2 - \mu_3^2\mu_2 = 0, \mu_1\mu_3 > 0, 2\mu_1 - b\mu_3^2 = 0\right\}.$$

- Para el equilibrio (R_k, Z_k), $k = 1, 2$, la matriz de la parte lineal del sistema en dicho equilibrio es

  $$\begin{pmatrix} R_k & \mu_3 R_k \\ b & -2Z_k \end{pmatrix}.$$

  Su determinante y traza son:

  $$\begin{aligned} \text{Det} &= -R_k(2Z_k + b\mu_3) = (-1)^k R_k\sqrt{\mu_3^2 + 4(\mu_2 - b\mu_1)}, \\ \text{Tr} &= R_k - 2Z_k. \end{aligned}$$

  Entonces:

  - El equilibrio (R_1, Z_1), si existe, es un silla.
  - El equilibrio (R_2, Z_2), si existe, es un nodo o un foco. Es inestable para $R_2 - 2Z_2 = -\mu_1 - (\mu_3 + 2)Z_2 > 0$, o estable en otro caso.

Más aún, las siguientes bifurcaciones aparecen:

- Hay una bifurcación silla-nodo en $SN_2 = \left\{\mu_2 = b\mu_1 - \frac{\mu_3^2}{4}, \mu_1 < \frac{b\mu_3^2}{2}\right\}$ (la inecuación aparece al imponer la condición $R_k > 0$). En este caso el equilibrio (R_1, Z_1) y (R_2, Z_2) se unen y desaparecen.
- Hay una bifurcación de Hopf para el equilibrio (R_2, Z_2) en

$$h = \left\{\mu_2 = \frac{\mu_1}{\mu_3 + 2}\left(\frac{\mu_1}{\mu_3 + 2} + 2b\right), \quad \frac{b\mu_3(\mu_3 + 2)}{2} < \mu_1 < 0\right\}.$$

  La matriz de la parte lineal del sistema en dicho equilibrio, para este valor crítico, tiene los autovalores $\pm\omega_0 i$, con $\omega_0^2 = -R_2(R_2 + b\mu_3) = \mu_3^2 + 4(\mu_2 - b\mu_1)$. En particular, la condición $b\mu_3 < -R_2 < 0$ debe ser satisfecha. Con un procedimiento estándar de formas normales se obtiene la expresión del primer coeficiente de la forma normal de Hopf

$$\frac{b\mu_1}{2\omega_0^2(\mu_3 + 2)^2}\left(\mu_1 + b(\mu_3 + 2)\right).$$

  Es fácil probar que, tomando los parámetros próximos a cero, este coeficiente es negativo y por tanto, la bifurcación de Hopf es supercrítica, dando origen a un ciclo límite estable (ver Guckenheimer y Holmes (1997)). Más aún, la unicidad de este ciclo límite para esta clase de sistemas se sigue de Chow, Li y Wang (1989) o bien de Zhang y Zhao (1993).
- Hay una bifurcación de Takens-Bogdanov en

$$TB = \left\{\mu_1 = \frac{\mu_3(\mu_3 + 2)}{2}, \mu_2 = \frac{\mu_3(\mu_3 + 4)}{4}, b\mu_3 < 0\right\}.$$

  Notemos que, para estos valores, $R_1 = R_2 = -b\mu_3$, $Z_1 = Z_2 = -\frac{b\mu_3}{2}$.
  En este caso podemos también aplicar el procedimiento de formas normales (trasladando el equilibrio al origen, posteriormente hacemos una transformación lineal que lleva la parte lineal a su forma canónica de Jordan y utilizamos algoritmos de álgebra computacional ver Gamero, Freire y Ponce (1991)). La forma normal de Takens-Bogdanov es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -b\mu_3 x_1^2 - (\mu_3 + 2)x_1 x_2 + \cdots. \end{aligned}$$

  Como $b\mu_3 < 0$, obtenemos que la bifurcación de Takens-Bogdanov es no degenerada. En particular, podemos afirmar que existen tres superficies de bifurcaciones en el espacio de parámetros tridimensional: la silla-nodo SN_2, la bifurcación de Hopf h y la superficie de conexiones homoclinas que nacen de la curva TB. El análisis de las conexiones globales será el objetivo de la siguiente subsección.

7.2.3. Bifurcaciones globales

Además de las bifurcaciones locales previamente estudiadas, hay varios tipos de conexiones globales en el despliegue triparamétrico (7.6). En el Apéndice 7.4 probaremos lo siguiente:

- Sea el sistema (7.6) con $b = -1$. Entonces, existe una función $\mu_2 = \Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3)$, tal que a lo largo de la curva

$$A = \left\{ \mu_2 = \Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3),\ \mu_1 = -\mu_3\sqrt{\Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3)}, \mu_3 > 0 \right\},$$

  hay una órbita heteroclina que nace cuando la variedad de centro del equilibrio silla semihiperbólico $(0, Z_+)$ coincide con la variedad estable del equilibrio silla hiperbólico $(0, Z_-)$. Más aún, $\dfrac{\mu_3^2(\mu_3+2)^2}{4(\mu_3+1)^2} < \Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3) < 4\mu_3^2$ (ver Lema 7.4.1).

- Sea el sistema (7.6) con $b = -1$. Entonces, existe una función $\mu_1 = \Phi_{\text{het}}(\mu_2, \mu_3)$ tal que sobre la superficie

$$R = \{\mu_1 = \Phi_{\text{het}}(\mu_2, \mu_3),\ \mu_3 > 0,\ 0 < \mu_2 < \Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3)\},$$

  hay una órbita heteroclina entre los dos equilibrios sillas hiperbólicos $(0, Z_+)$ y $(0, Z_-)$. Más aún, $-\mu_3\sqrt{\mu_2} < \Phi_{\text{het}}(\mu_2, \mu_3) < \mu_3\sqrt{\mu_2}$ (ver Lema 7.4.2).

- Sea el sistema (7.6) con $b = +1$. Entonces, existe una función $\mu_1 = \Phi_{\text{hom}+}(\mu_2, \mu_3)$, tal que sobre la superficie

$$L = \left\{ \mu_1 = \Phi_{\text{hom}+}(\mu_2, \mu_3),\ \mu_3 < 0,\ \frac{\mu_3(\mu_3+4)}{4} < \mu_2 < 0 \right\},$$

  hay una conexión homoclina para el equilibrio (R_1, Z_1). Más aún, esta función cumple $\mu_2 - \mu_3^2(\mu_3+1) < \Phi_{\text{hom}+}(\mu_2, \mu_3) < b(\mu_3+2)(-1+\sqrt{1+\mu_2})$. Estos resultados se pueden encontrar en el Lema 7.4.4.

- Sea el sistema (7.6) con $b = -1$. Entonces, existe una función $\mu_1 = \Phi_{\text{hom}-}(\mu_2, \mu_3)$, tal que sobre la superficie

$$L = \left\{ \mu_1 = \Phi_{\text{hom}-}(\mu_2, \mu_3),\ \mu_3 > 0,\ \Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3) < \mu_2 < \frac{\mu_3(\mu_3+4)}{4} \right\},$$

  hay una conexión homoclina para el equilibrio (R_1, Z_1). Más aún, esta función cumple $-\mu_2 - \dfrac{\mu_3^2}{4} < \Phi_{\text{hom}-}(\mu_2, \mu_3) < -\mu_3\sqrt{\mu_2}$. Estos resultados se pueden encontrar en el Lema 7.4.5.

- Sea el sistema (7.6) con $b = -1$. Entonces, existe una función $\mu_1 = \Phi_J(\mu_2, \mu_3)$, tal que sobre la superficie

$$J = \left\{ \mu_1 = \Phi_J(\mu_2, \mu_3),\ \mu_3 > 0,\ \Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3) < \mu_2 < \frac{\mu_3(\mu_3+4)}{4} \right\},$$

  hay una órbita heteroclina que conecta el equilibrio (R_1, Z_1) con el equilibrio tipo silla $(0, Z_-)$. Más aún, esta función satisface $\Phi_{\text{hom}-}(\mu_2, \mu_3) < \Phi_J(\mu_2, \mu_3) < -\mu_3\sqrt{\mu_2}$. Estos resultados se pueden encontrar en el Lema 7.4.6.

La información anterior nos permite dibujar el conjunto de bifurcaciones de la figura 7.2. Estos conjuntos de bifurcaciones son obtenidos mediante la intersección del espacio triparamétrico con una esfera (centrada en la singularidad de codimensión tres), y deformándola en un plano.

7.2.4. Implicaciones para el sistema tridimensional

Teniendo en cuenta el correspondiente cambio que se origina cuando incluimos la componente angular: los equilibrios en el eje z siguen siendo equilibrios en el sistema tridimensional, equilibrios fuera del eje z equivalen a soluciones periódicas en el sistema tridimensional, soluciones periódicas se convierten en toros invariantes y conexiones globales entre equilibrios equivalen a conexiones globales entre equilibrios y/u órbitas periódicas.

Teniendo en cuenta estas relaciones, podemos resumir las bifurcaciones para el sistema tridimensional:

- La bifurcación silla-nodo de equilibrios SN_1 corresponde a otro silla-nodo de equilibrios que denotaremos **SN**.

- Las bifurcaciones transcríticas $T_\pm$ corresponden a una bifurcación de Hopf de equilibrios $\mathbf{h}_\pm$.

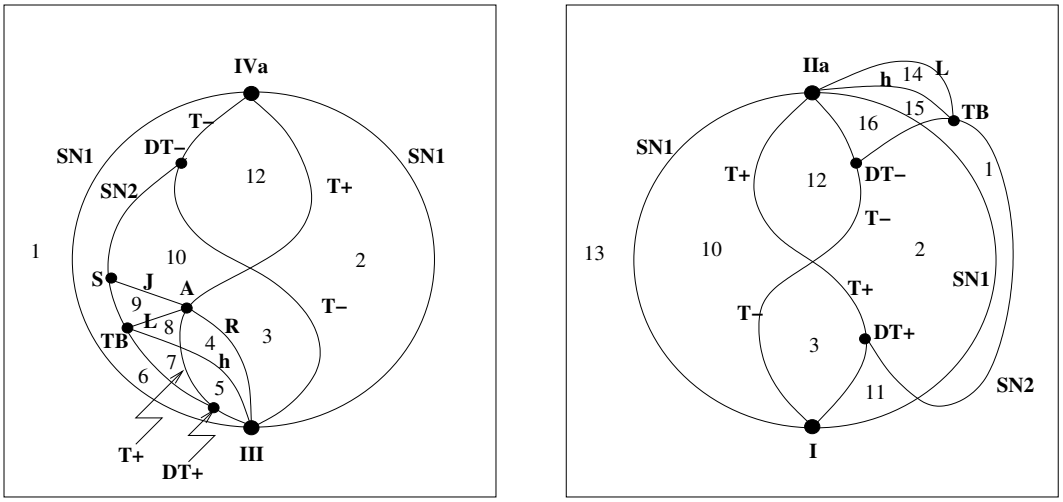
- Las bifurcaciones transcríticas degeneradas $DT_\pm$ corresponden a bifurcaciones de Hopf degeneradas de equilibrios $\mathbf{hd}_\pm$.

- La bifurcación silla-nodo de equilibrio SN_2 corresponde a una bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas **sn**.

- La bifurcación de Hopf de equilibrios h corresponde a una bifurcación secundaria de Hopf de órbitas periódicas (bifurcación a toros) **HH**.

- La bifurcación de Takens-Bogdanov de equilibrios TB corresponde a una bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas **TBPO**.

- En lo que se refiere a las conexiones globales de la familia plana, éstas equivalen a varios tipos de conexiones entre equilibrios y/u órbitas periódicas.



b=−1 *b=+1*

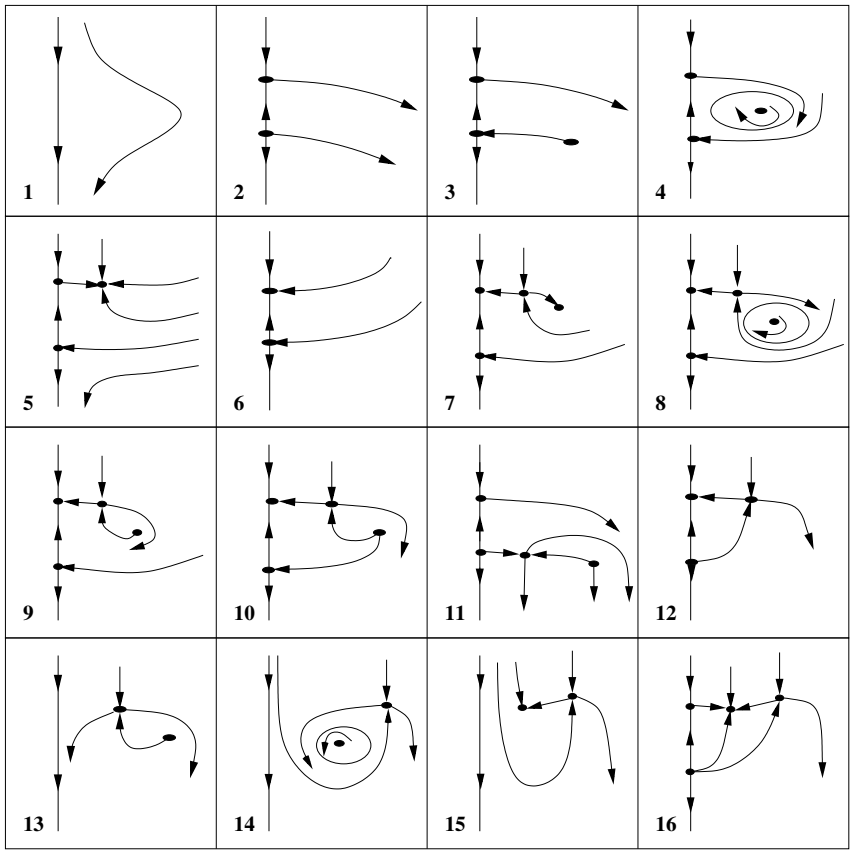


Figura 7.2: Representación plana del conjunto de bifurcaciones para el sistema (7.6), obtenida a través de la intersección del espacio paramétrico tridimensional con una esfera y deformando la intersección en un plano. El retrato de fases en cada zona aparece incluido debajo.

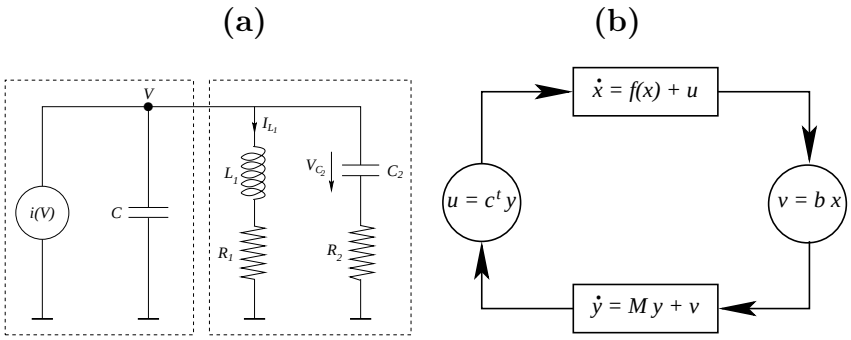


Figura 7.3: Dibujo esquemático del circuito electrónico y su representación como un par de subsistemas simples acoplados.

Otro hecho importante está relacionado con el efecto de los términos de orden superior que no hemos considerado en el procedimiento de la forma normal. Estos elementos afectan al flujo sobre el toro y sobre las conexiones globales que aparecen en la familia plana. En general, el comportamiento sobre el toro invariante, cuando incluimos los términos eliminados, será distinto debido al fenómeno de *phase-locking*. Más aún, en el sistema truncado, el toro se rompe en una superficie esférica recubierta con órbitas que unen dos equilibrios o en una órbita homoclina asociada a una órbita periódica. Esta situación desaparece añadiendo términos de orden superior. Por tanto, debemos esperar una estructura compleja de heteroclinas y también un comportamiento homoclino asociado a equilibrios y órbitas periódicas (puntos–T, Hopf-Shil'nikov, etc.).

7.3. Estudio numérico de un oscilador electrónico

En esta sección nos planteamos comprobar numéricamente las bifurcaciones previamente estudiadas, que se experimentan en un oscilador electrónico autónomo. Este circuito está esquemáticamente representado en la figura 7.3(a). Es obtenido acoplando dos circuitos simples. Uno de ellos es lineal con dos ramas (la primera de ellas consta de una inductancia L_1 y una resistencia R_1, y la segunda de un condensador C_2 y una resistencia R_2), el otro circuito es unidimensional con un condensador C y una conductancia con voltaje $i(V)$, que modelamos por un polinomio de tercer grado

$$i(V) = A_0 - A_1 V + A_3 V^3, \quad \text{con} \quad A_0, A_1, A_3 > 0.$$

Esto se corresponde con un circuito de van der Pol que tiene una no linealidad cúbica, donde hemos incluido un término constante para tener en cuenta las imperfecciones en el dispositivo. Aplicando las leyes de Kirchhoff y tomando como variables de estado el voltaje sobre el condensador y la corriente que atraviesa la inductancia L_1, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$CV' \;=\; -i(V) - I_{L_1} - \frac{V - V_{C_2}}{R_2},$$

$$\begin{aligned} L_1 {I_{L_1}}' &= V - R_1 I_{L_1}, \\ C_2 {V_{C_2}}' &= \frac{V - V_{C_2}}{R_2}. \end{aligned}$$

Para adimensionalizar las variables y los parámetros consideramos

$$t = \omega T, \quad V = \kappa x, \quad I_{L_1} = \frac{\kappa}{L_1 \omega} y_1, \quad V_{C_2} = \kappa y_2, \quad \text{siendo} \quad \omega = \frac{1}{R_2 C_2}, \quad \kappa^3 = \frac{A_0}{2A_3}.$$

Denotando por $' = \dfrac{d}{dt}$ y por $\dot{} = \dfrac{d}{dT}$, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) - \beta y_1 + r y_2, \\ \dot{y}_1 &= x - \alpha y_1, \\ \dot{y}_2 &= x - y_2, \end{aligned} \tag{7.8}$$

donde

$$\begin{aligned} r &= \frac{C_2}{C} \geq 0, \quad \alpha = \frac{R_1}{L_1 \omega} \geq 0, \quad \beta = \frac{1}{C \omega^2 L_1} > 0, \\ f(x) &= -\gamma_0 + \mu x - \frac{\gamma_0}{2} x^3, \quad \text{con} \quad \gamma_0 = \frac{A_0}{C \omega \kappa}, \quad \mu = r\left(A_1 R_2 - 1\right). \end{aligned}$$

Este último sistema está incluido en una amplia familia de sistemas de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + c^t y, \\ \dot{y} &= bx + My, \end{aligned} \tag{7.9}$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^2$, M es una matriz 2×2 y $b, c \in \mathbb{R}^2$. Como se muestra en la figura 7.3(b), este tipo de sistemas representa un par de subsistemas linealmente interconectados (uno de ellos lineal), donde las salidas de ambos subsistemas: $u = c^t y$ y $v = bx$, dependen linealmente de las variables de estado (ver Algaba, Freire, Gamero y García (2004)).

En nuestro caso tenemos

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} -\beta \\ r \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\Delta = \det(M) = \alpha$. Por ahora podemos suponer $\alpha \neq 0$, y por tanto hemos conseguido aislar el equilibrio $(\bar{x}, \bar{y})$, obtenido de

$$f(\bar{x}) = (c^t M^{-1} b)\bar{x}, \quad \bar{y} = -\bar{x} M^{-1} b. \tag{7.10}$$

Si denotamos $\sigma = \dfrac{\beta}{\alpha} - r - \mu + \dfrac{3}{2}\gamma_0$, los equilibrios del sistema (7.8) son $\left(\bar{x}, \dfrac{\bar{x}}{\alpha}, \bar{x}\right)$ donde $\bar{x}$ satisface

$$\gamma_0 + \left(\frac{\beta}{\alpha} - r - \mu\right)\overline{x} + \frac{\gamma_0}{2}\overline{x}^3 = \sigma + \sigma(\overline{x} - 1) + 3\gamma_0 \frac{(\overline{x} - 1)^2}{2!} + 3\gamma_0 \frac{(\overline{x} - 1)^3}{3!} = 0. \tag{7.11}$$

En consecuencia, una bifurcación silla-nodo de equilibrios **SN** tiene lugar para $\sigma = 0$. Para $\sigma < 0$, hay dos equilibrios $\mathbf{Eq}_{\pm}$, los cuales colapsan en $\sigma = 0$ y desaparecen para $\sigma > 0$ en un entorno de $(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \left(1, \frac{1}{\alpha}, 1\right)$.

Como $\bar{x}$ es obtenido como intersección de la cúbica $z = f(x)$ con una línea recta que pasa por el origen y de pendiente $c^t M^{-1} b$, podemos garantizar la presencia de otro equilibrio, el cual está lejos del anterior y puede ser omitido en nuestro estudio local.

El siguiente estudio es válido no solamente para el sistema (7.8) sino también para la familia de sistemas acoplados (7.9). Trasladando el equilibrio $(\bar{x}, \bar{y})$ al origen y usando una adecuada transformación lineal (ver Algaba, Freire, Gamero y García (2004)) conseguimos escribir el sistema en la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} a & 1 & 0 \\ \hline c^t b & \tau & 1 \\ -\Delta c^t M^{-1} b & -\Delta & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + g(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.12}$$

donde

$$a = f'(\bar{x}), \quad \tau = Tr(M), \quad g(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2!} x^2 + \frac{f'''(\bar{x})}{3!} x^3.$$

El polinomio característico de la matriz de linealización en el equilibrio es

$$\lambda^3 - (a+\tau)\lambda^2 + (\Delta + a\tau - c^t b)\lambda - \Delta(a - c^t M^{-1} b),$$

por tanto hay una degeneración Hopf-silla-nodo si

$$a + \tau = 0, \quad a = c^t M^{-1} b, \quad \Delta + a\tau - c^t b > 0. \tag{7.13}$$

En resumen, el equilibrio $(\bar{x}, \bar{y})$ experimenta una degeneración Hopf-silla-nodo para el valor crítico

$$a + \tau = 0, \quad a = c^t M^{-1} b, \tag{7.14}$$

siempre que $\Delta - a^2 - c^t b > 0$, o de forma equivalente $\Delta > c^t (I + M^{-1} b c^t M^{-1}) b$. Bajo estas hipótesis, la matriz de linealización en el equilibrio tiene los autovalores $0, \pm i\omega_0$, siendo

$$\omega_0 = \sqrt{\Delta - a^2 - c^t b} > 0.$$

Para computar la forma normal para estos valores de los parámetros, llevamos la matriz de la linealización en (7.12) a su forma canónica de Jordan por medio de la siguiente transformación lineal

$$\begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \omega_0 & -a & -a \\ 0 & -\Delta & \omega_0^2 - \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

obteniendo

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + g(Y+Z) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \tag{7.15}$$

donde

$$k_1 = \frac{a}{\omega_0}, \quad k_2 = \frac{\Delta - \omega_0^2}{\omega_0^2}, \quad k_3 = \frac{\Delta}{\omega_0^2}.$$

Una vez que la parte lineal ha sido normalizada, utilizamos el algoritmo dado en Algaba, Freire y Gamero (1998) para obtener la forma normal (7.1) donde las expresiones para los coeficientes de segundo orden son

$$a_1 = \frac{\omega_0^2 - \Delta}{2\omega_0^2} f''(\bar{x}), \quad b_1 = \frac{\Delta}{4\omega_0^2} f''(\bar{x}), \quad b_2 = \frac{\Delta}{2\omega_0^2} f''(\bar{x}), \quad c_1 = -\frac{a}{2\omega_0} f''(\bar{x}).$$

Notemos que $b_1 \neq 0$, y también $b_2 \neq 0$, pero una degeneración no lineal, correspondiente a la anulación de a_1 se produce para

$$\Delta = \omega_0^2 \Leftrightarrow c^t b + a^2 = 0.$$

Ahora podemos clasificar los casos no degenerados de la bifurcación Hopf-silla-nodo. Siguiendo la notación de Guckenheimer y Holmes (1997), para $\Delta \neq \omega_0^2$, encontramos:

- Si $\operatorname{sgn}(c^t b + a^2) = \operatorname{sgn}(\Delta)$, estamos en el caso III.
- Si $\operatorname{sgn}(c^t b + a^2) \neq \operatorname{sgn}(\Delta)$, estamos en el caso IV. De hecho, si $-1 < \dfrac{c^t b + a^2}{\Delta} < 0$ estamos en el caso IVa y si $\dfrac{c^t b + a^2}{\Delta} < -1$ estamos en el caso IVb.

El estudio de las bifurcaciones en los valores degenerados, esto es $\Delta = \omega_0^2$, necesita el cálculo de la forma normal a orden superior. A continuación presentamos la expresión para los coeficientes de tercer grado de la forma normal más simple bajo $\mathcal{C}^\infty$-equivalencia (ver Algaba, Freire y Gamero (1998))

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{7a}{32\omega_0^2} f''(\bar{x})^2, \quad b_1 = \frac{1}{4} f''(\bar{x}), \quad b_2 = \frac{1}{2} f''(\bar{x}),$$
$$b_3 = \frac{2\omega_0^2 f'''(\bar{x}) + 3a f''(\bar{x})^2 (2 + \omega_0)}{12\omega_0^2}, \quad c_1 = -\frac{a}{2\omega_0} f''(\bar{x}), \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0.$$

Con el objetivo de obtener información sobre las bifurcaciones en torno a este bifurcación degenerada, consideramos el siguiente despliegue triparamétrico para el sistema plano obtenido truncando a tercer grado la forma normal anterior y eliminando la componente angular

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 z + a_3 \rho^2), \\ \dot{z} &= \varepsilon_2 + b_1 \rho^2 + b_2 z^2 + b_3 z^3, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{(a+\tau)\omega_0^2 - 2\Delta(a - c^t M^{-1} b)}{2\omega_0^2} + \mathcal{O}\left(|a+\tau, a - c^t M^{-1} b|^3\right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{\Delta^2 (a - c^t M^{-1} b)^2}{2 f''(\bar{x}) \omega_0^4} + \mathcal{O}\left(|a+\tau, a - c^t M^{-1} b|^3\right), \\ \varepsilon_3 &= \frac{\omega_0^2 - \Delta}{2\omega_0^2} f''(\bar{x}) + \mathcal{O}\left(|\varepsilon_1, \varepsilon_2|\right). \end{aligned}$$

Estas expresiones son las ya conocidas para conseguir resultados numéricos cerca de la bifurcación Hopf-silla-nodo degenerada de codimensión tres para el caso estudiado.

En resumen, el equilibrio $(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \left(1, \frac{1}{\alpha}, 1\right)$ del sistema electrónico (7.8) experimenta una bifurcación Hopf-silla-nodo en

$$\mu_c = \alpha + 1 + \frac{3}{2}\gamma_0,\ \beta_c = \alpha\left(\alpha + r + 1\right),\ \alpha r - r - 1 > 0.$$

En este caso, el equilibrio tiene los autovalores $0, \pm i\omega_0$, con $\omega_0^2 = \alpha r - r - 1$. Finalmente, la bifurcación Hopf-silla-nodo se degenera para los valores críticos

$$\mu_c = \frac{2r}{r-1} + \frac{3}{2}\gamma_0,\ \alpha_c = \frac{r+1}{r-1},\ \beta_c = \frac{r(r+1)^2}{(r-1)^2},\ r > 1,$$

siendo $\omega_0^2 = \dfrac{r+1}{r-1}$.

La computación numérica ha sido realizada con AUTO97 (ver Doedel, Champneys, Fairgrieve, Kuznetsov, Sandstede y Wang (1998)), fijando los valores de los parámetros $r = 2,\ \gamma_0 = 2$, en este caso los valores críticos vienen dados por

$$\mu_c = 7, \alpha_c = 3, \beta_c = 18.$$

Presentamos conjuntos de bifurcación planos para $\alpha = 3.5$ (ver figura 7.4) y $\alpha = 2.29$ (ver figura 7.5), respectivamente. Estos valores, realizados a ambos lados del valor crítico α_c, están próximos al valor donde se experimenta la bifurcación Hopf-silla-nodo degenerada de codimensión tres.

Notemos que todos los elementos que aparecen han sido previamente detectados en el estudio teórico. En el primer caso ($\alpha = 3.5$), podemos ver:

- La bifurcación silla-nodo **SN** donde surge el equilibrio $\mathbf{Eq}_{\pm}$.
- La bifurcación Hopf subcrítica $\mathbf{h}_+$ del equilibrio $\mathbf{Eq}_+$.
- La bifurcación de Hopf supercrítica $\mathbf{h}_-$ del equilibrio $\mathbf{Eq}_-$.
- La bifurcación de Hopf degenerada $\mathbf{hd}_-$. Después de este punto, la bifurcación de Hopf $\mathbf{h}_-$ es subcrítica.
- La bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas **sn**, que sale del punto $\mathbf{hd}_-$.

En el segundo caso ($\alpha = 2.29$), aparecen las siguientes bifurcaciones:

- La bifurcación silla-nodo **SN**.
- La bifurcación Hopf supercrítica $\mathbf{h}_+$ del equilibrio $\mathbf{Eq}_+$.
- La bifurcación Hopf subcrítica $\mathbf{h}_-$ del equilibrio $\mathbf{Eq}_-$.
- La bifurcación Hopf degenerada $\mathbf{hd}_+$. Después de este punto, la bifurcación de Hopf $\mathbf{h}_+$ se convierte en subcrítica.

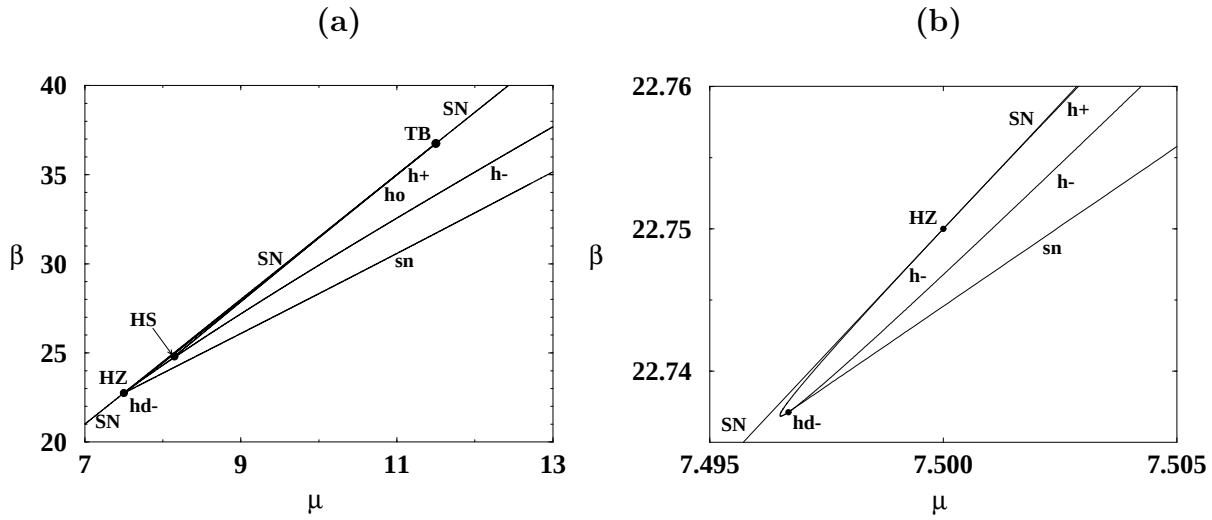


Figura 7.4: Para $\alpha = 3.5$, $r = 2$: (a) Conjunto parcial de bifurcaciones del sistema (7.8). (b) Zoom de (a) en un entorno del punto **HZ**.

- La bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas **sn**.
- La bifurcación secundaria de Hopf de órbitas periódicas **HH**.
- La bifurcación de órbitas periódicas de tipo Takens-Bogdanov **TBPO**.

También en las figuras 7.4 y 7.5, hay una bifurcación de Takens-Bogdanov de equilibrio **TB** (no asociado con la bifurcación Hopf-silla-nodo degenerada que estamos estudiando), desde la cuál nace una curva de conexiones homoclinas **ho**. En ambos casos, la curva **ho** finaliza cuando se encuentra con la bifurcación de Hopf $\mathbf{h}_+$, dando lugar a una bifurcación Hopf-Shil'nikov **HS** (ver Hirschberg y Knobloch (1993)). Notemos que la curva de bifurcación de Hopf conecta los puntos **TB** y **HZ**.

A continuación, nos ocupamos del comportamiento de las bifurcaciones asociadas a los fenómenos de resonancia sobre el toro que aparecen en la bifurcación de Hopf secundaria **HH**. Las órbitas periódicas que nacen de esta bifurcación tienen periodo $T \approx \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. Estas órbitas tienen un par de multiplicadores de Floquet conjugados sobre el círculo unidad. Cuando nos movemos a lo largo de la curva **HH** (la cual está limitada en sus extremos por los puntos **HZ** y **TBPO**), los argumentos de los multiplicadores de Floquet varían como se muestra en la figura 7.6 para $\alpha = 2.29$, $r = 2$.

Esto nos permite predecir fenómenos de resonancia sobre **HH** (que ocurren cuando los multiplicadores de Floquet atraviesan el círculo unidad). Concretamente, como en este caso particular el argumento es siempre menor que 52 grados, podemos esperar la presencia de resonancias de orden 1:7 y superior.

En el plano de parámetros μ-β, existe un punto $\mathbf{D} \approx (6.3375, 12.1822)$, donde el argumento deja de variar de forma monótona (ver figura 7.6). Esta degeneración angular determina algunos aspectos asociados a la forma de las curvas de bifurcación silla-nodo de

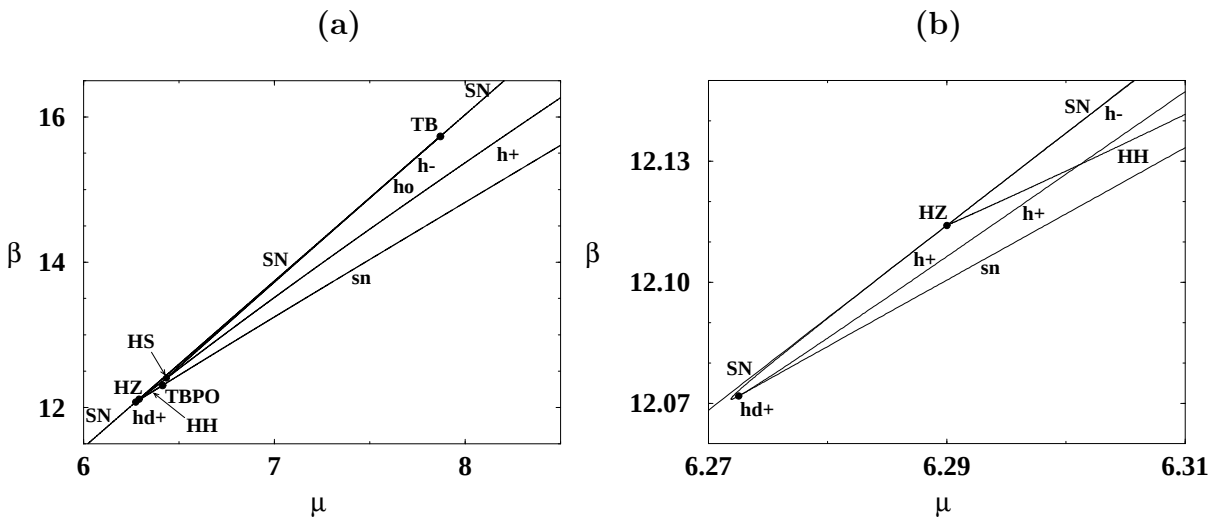


Figura 7.5: Para $\alpha = 2.29$, $r = 2$: (a) Conjunto parcial de bifurcaciones del sistema (7.8). (b) Zoom de (a) en un entorno del punto **HZ**.

órbitas periódicas que delimitan las zonas de resonancia: éstas tienen una forma particular denominada *banana* en Peckham, Frouzakis y Kevrekidis (1995).

En la figura 7.7 (para $\alpha = 2.29$, $r = 2$), hemos dibujado las curvas de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas $\mathbf{sn}_2, \ldots, \mathbf{sn}_8$ correspondientes a resonancias 1:2 a 1:8. Varias de estas curvas no están asociadas a la bifurcación de Hopf secundaria **HH**. En este caso particular, las resonancias del tipo 1:2 a 1:6 están relacionadas con la curva de conexiones homoclinas **ho** y las curvas $\mathbf{sn}_2, \ldots, \mathbf{sn}_6$ tienen forma de parábolas. Las órbitas periódicas relacionadas con estas curvas tienen un comportamiento asintótico asociado a conexiones homoclinas, correspondiente al equilibrio $\mathbf{Eq}_-$, de diferentes pulsos (ver figura 7.8).

En nuestro caso, las zonas de resonancia *banana* se originan para la zona de resonancia 1:7 (ver figura 7.9(a)-(b)). Notemos que la curva $\mathbf{sn}_7$, de bifurcación silla-nodo de las órbitas periódicas de siete pulsos, tiene dos ramas que unen un par de puntos (*tips*) localizados sobre la curva **HH** (cada *tip* se localiza a un lado de la degeneración angular **D**). En la figura 7.9(a)-(b) podemos ver una tercera rama de la curva $\mathbf{sn}_7$, con forma parabólica la cual está asociada al comportamiento homoclino. Dentro de la zona de resonancia de tipo *banana* hay un par de órbitas periódicas de siete pulsos, una es silla y la otra es atractiva. Numéricamente hemos comprobado que estas órbitas periódicas no experimentan ninguna bifurcación dentro de la zona de resonancia donde existen.

Las zonas de resonancia abiertas se presentan para las resonancias 1:8, 1:9, ... (ver la figura 7.9(c)-(d) correspondiente a la resonancia 1:8). En este caso podemos ver cómo la curva $\mathbf{sn}_8$, de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas de ocho pulsos, consta de tres ramas que delimitan la zona de resonancia: una rama uniendo ambos *tips*, y dos ramas abiertas, cada una de ellas empezando en cado uno de los dos *tips*. Dentro de esta zona de resonancia abiertas hay órbitas periódicas con diferente estabilidad: atractiva, silla y repulsiva. Además estas órbitas periódicas experimentan diferentes bifurcaciones, en particular se produce el fenómeno de *merging* de diferentes zonas de resonancias (ver

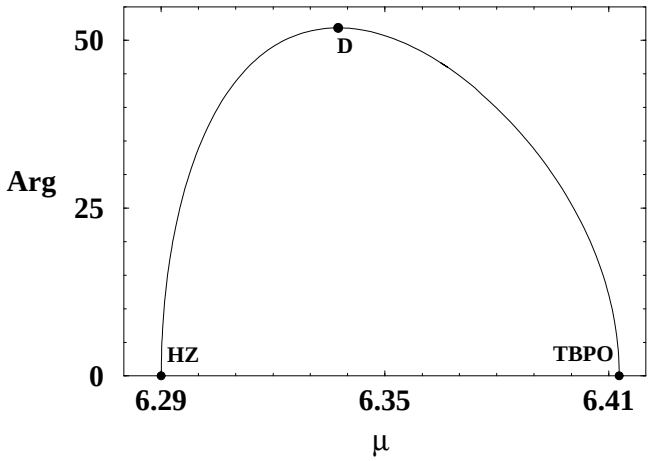


Figura 7.6: Para $\alpha = 2.29$, $r = 2$, evolución del argumento de los multiplicadores de Floquet (en grados) cuando nos movemos a lo largo de la curva **HH**.

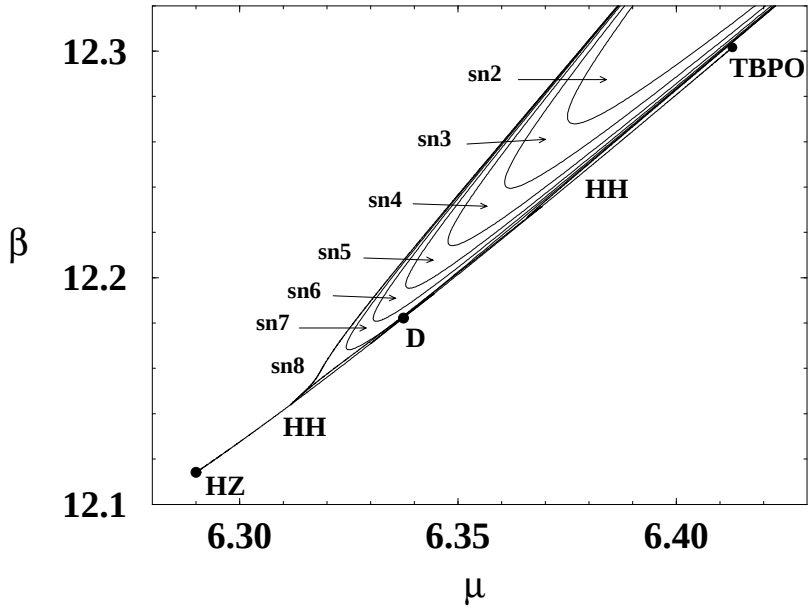


Figura 7.7: Conjunto parcial de bifurcaciones para $\alpha = 2.29$, $r = 2$, mostrando la curva de bifurcación de órbitas periódicas de Hopf secundaria **HH** y las curvas de bifurcación de órbitas periódicas de tipo silla-nodo correspondientes a las resonancias 1:2, 1:3, 1:4, 1:5, 1:6, 1:7 y 1:8.

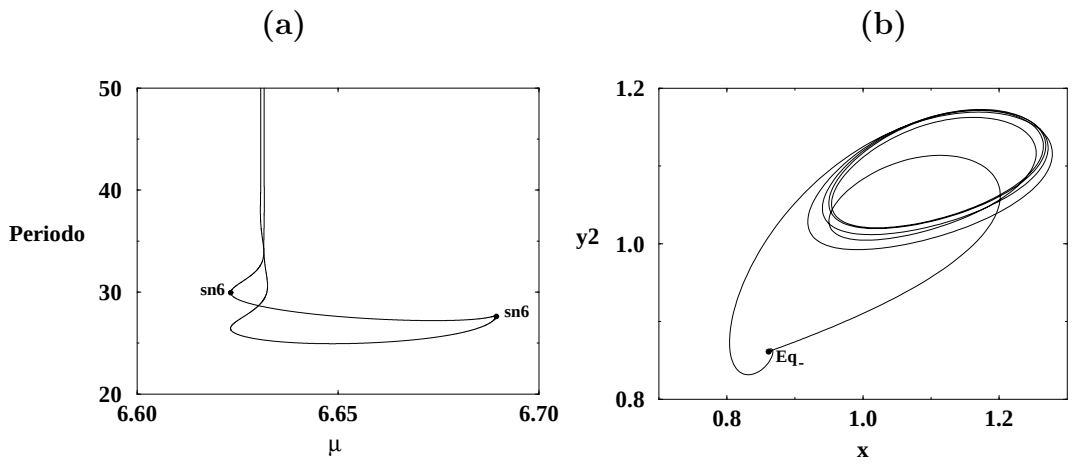


Figura 7.8: (a) Diagrama de bifurcaciones para $\alpha = 2.29$, $r = 2$, $\beta = 12.75$, correspondiente a la curva de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas $\mathbf{sn}_6$. (b) Proyección sobre el plano x-y_2 de una órbita periódica del sistema (7.8) con $\alpha = 2.29$, $r = 2$, $\beta = 12.75$, $\mu = 6.631593776$, dentro de la zona de resonancia 1:6, próxima a los valores de los parámetros donde ocurre la conexión homoclina.

Kirk (1993)), cómo se observa en el diagrama de bifurcación de la figura 7.10.

En la figura 7.11 mostramos cómo la zona de resonancia cerrada 1:7, que es de tipo *banana* para $\alpha = 2.29$, cambia al disminuir el valor del parámetro y se convierte en una zona de resonancia abierta para $\alpha = 2.289$.

Como anteriormente comentamos, para $\alpha = 2.29$, la curva $\mathbf{sn}_7$ tiene varias ramas. Un estudio numérico detallado muestra que, sobre la rama con forma parabólica asociada al comportamiento homoclino, hay dos puntos de codimensión dos $\mathbf{TBPO}_7$ correspondientes a dos bifurcaciones de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas (esta degeneración corresponde a un doble multiplicador de Floquet $+1$ no diagonalizable). A partir del punto $\mathbf{TBPO}_7$, nace una curva $\mathbf{HH}_7$ de bifurcación de Hopf secundaria de órbitas periódicas de siete pulsos. La curva $\mathbf{HH}_7$ finaliza cuando interseca con la curva $\mathbf{PD}_7$, donde duplican periodo las órbitas que surgen de la curva $\mathbf{sn}_7$. En este punto de intersección se experimenta otra bifurcación de Takens-Bogdanov de órbitas periódicas $\mathbf{TBPO}_7'$, que corresponde en este caso a un doble multiplicador de Floquet -1 no diagonalizable.

Estas bifurcaciones adicionales ($\mathbf{TBPO}_7$ y $\mathbf{PD}_7$) no están asociadas a la degeneración Hopf-silla-nodo que estamos estudiando sino a una degeneración triple-cero (ver Algaba, Freire, Gamero y García (2004)).

Al disminuir el valor del parámetro a $\alpha = 2.289$, la rama parabólica de la curva $\mathbf{sn}_7$ (que delimita la zona de resonancia abierta) se une con la rama superior de la curva que delimita la zona cerrada de tipo *banana*, dando origen a un par de ramas abiertas que surgen de cada uno de los *tips*. Notemos que para estos valores de α, las bifurcaciones de órbitas periódicas de Takens-Bogdanov $\mathbf{TBPO}_7$, $\mathbf{TBPO}_7'$, de Hopf secundaria $\mathbf{HH}_7$ y de duplicación de periodo $\mathbf{PD}_7$ aún existen. En la figura 7.12 presentamos una sección de Poincaré en el plano $y_2 = 1.015$ de un toro $\mathbf{HH}_7$ invariante, de siete pulsos, obtenido para valores de los parámetros próximos a $\mathbf{HH}_7$; a saber $\alpha = 2.29, \beta = 12.175, \mu = 6.325549$.

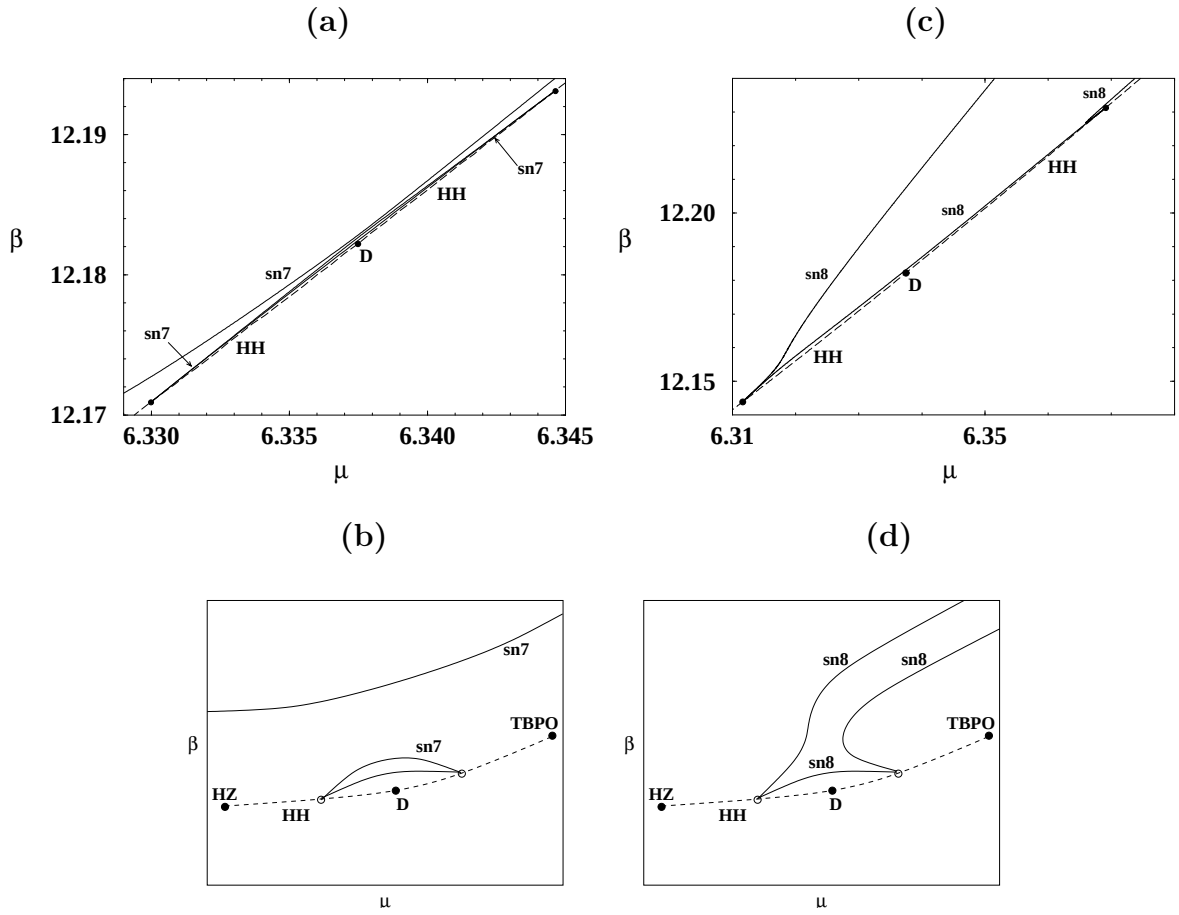


Figura 7.9: Para $\alpha = 2.29$, $r = 2$, conjunto parcial de bifurcaciones mostrando la curva de órbitas periódicas Hopf secundaria **HH** y la curva de órbitas periódicas silla-nodo: (a) $\mathbf{sn}_7$. (c) $\mathbf{sn}_8$. (b) Dibujo cualitativo de (a). (d) Dibujo cualitativo de (b).

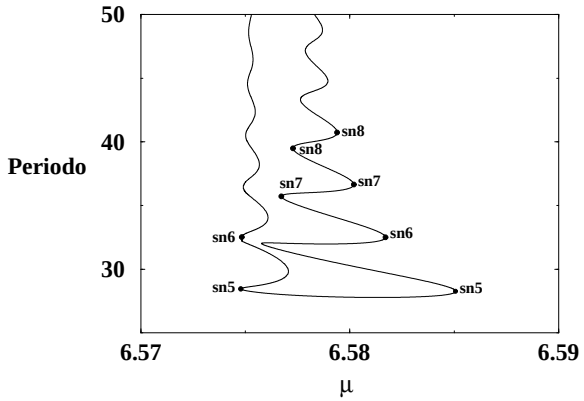


Figura 7.10: Para $\alpha = 2.29$, $r = 2$, $\beta = 12.75$, diagrama de bifurcaciones dentro de la zona de resonancia abierta 1:8.

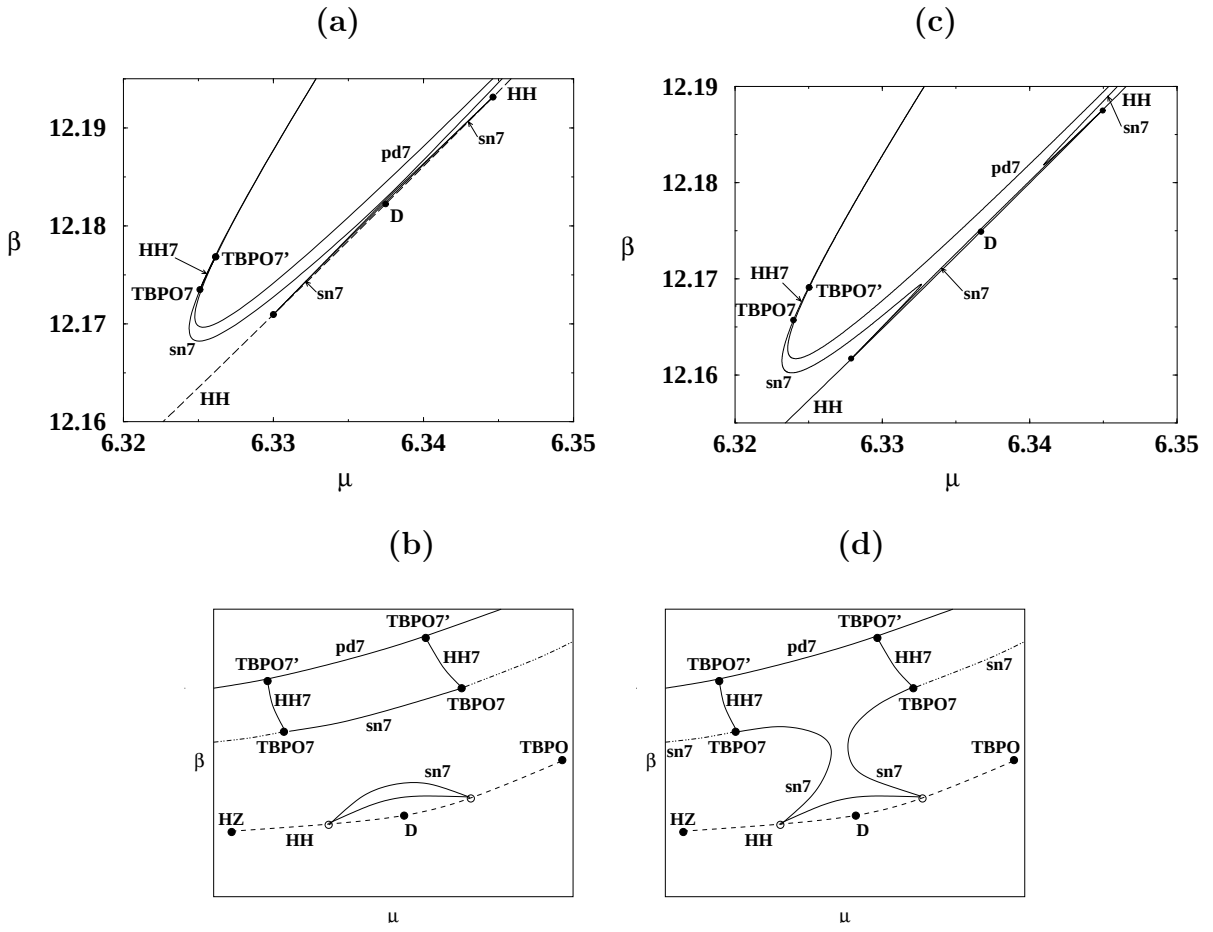


Figura 7.11: Para $r = 2$, conjunto parcial de bifurcaciones mostrando la evolución de la zona de resonancia 1:7 cerrada (de tipo *banana*) a abierta: (a) Para $\alpha = 2.29$. (b) Para $\alpha = 2.289$. (c) Dibujo cualitativo de (a). (d) Dibujo cualitativo de (b).

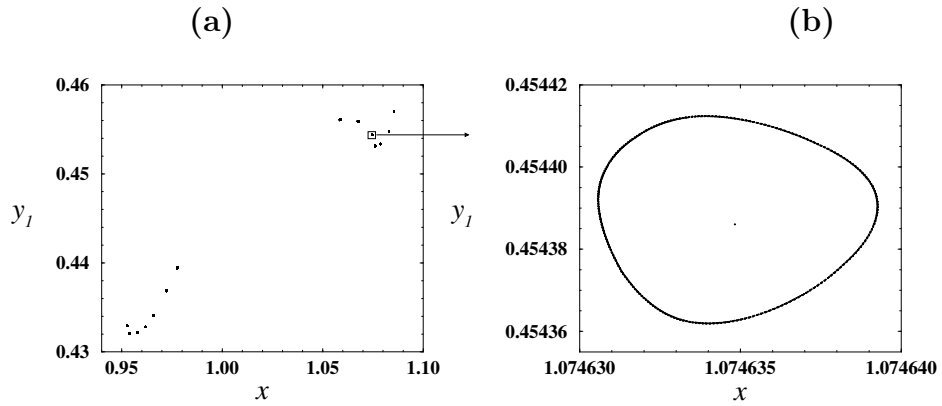


Figura 7.12: Para los valores $\alpha = 2.29, \beta = 12.174999, \mu = 6.325548995$, sección de Poincaré, en el plano $y_2 = 1.015$, de un toro invariante de siete pulsos obtenido sobre la curva $\mathbf{HH}_7$.

7.4. Apéndice

En esta sección incluimos las demostraciones de los resultados incluidos en la subsección 7.2.3, relativos a diferentes tipos de conexiones globales en el despliegue triparamétrico (7.6).

7.4.1. Conexiones heteroclinas degeneradas

Consideramos aquí el sistema con $b = -1$ y $\mu_3 > 0$. A lo largo de la bifurcación transcrítica ($\mu_1 = -\mu_3\sqrt{\mu_2}$, $\mu_1 \leq 0$), el sistema (7.6) resulta

$$\begin{aligned} \dot{r} &= P(r,z) = r(-\mu_3\sqrt{\mu_2} + \mu_3 z + r), \\ \dot{z} &= Q(r,z) = \mu_2 - r - z^2. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Sus equilibrios son $(0, Z_\pm) = (0, \pm\sqrt{\mu_2})$ y $(R_2, Z_2) = (\mu_3(2\sqrt{\mu_2} - \mu_3), \mu_3 - \sqrt{\mu_2})$ (suponiendo $\sqrt{\mu_2} > \mu_3/2$). Los equilibrios experimentan las siguientes bifurcaciones:

- Una bifurcación silla-nodo de los equilibrios $(0, Z_\pm)$ en $SN_1 \equiv \{\mu_2 = 0\}$.
- Una bifurcación transcrítica para el equilibrio $(0, Z_+) = (R_2, Z_2)$ en $T_- \equiv \left\{\sqrt{\mu_2} = \dfrac{\mu_3}{2}\right\}$.
- Una bifurcación de Hopf para el equilibrio (R_2, Z_2) en $h \equiv \left\{\mu_2 = \dfrac{\mu_3^2(\mu_3+2)^2}{4(\mu_3+1)^2}\right\}$.

El siguiente resultado prueba la existencia de conexiones heteroclinas en este caso:

Lema 7.4.1 *Consideremos el sistema (7.16) con $\mu_2 > 0$. Existe una función $\mu_2 = \Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3)$, definida para $\mu_3 > 0$, tal que para los valores de los parámetros $\mu_2 = \Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3)$, el sistema presenta una órbita heteroclina conectando la variedad de centro del equilibrio de tipo silla semihiperbólico $(0, Z_+)$ y el equilibrio silla hiperbólico $(0, Z_-)$. Más aún, $\dfrac{\mu_3^2}{4} < \Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3) < 4\mu_3^2$.*

Demostración:

Consideremos la línea recta de isoclinas verticales $-\mu_3\sqrt{\mu_2} + \mu_3 z + r = 0$. Sobre esta línea recta, consideramos los puntos $\mathbf{A} = (r_+, z_+)$ y $\mathbf{B} = (r_-, z_-)$ correspondientes respectivamente a la intersección con la variedad de centro del equilibrio $(0, Z_+)$, y la variedad estable de $(0, Z_-)$ (ver figura 7.13). Vamos a denotar $d = z_+ - z_-$.

Tenemos las siguientes propiedades:

- Para el valor del parámetro $\mu_2 = \dfrac{\mu_3^2}{4}$, el equilibrio (R_2, Z_2) colapsa con $(0, Z_+)$. Entonces tomando $\mu_2 > \dfrac{\mu_3^2}{4}$ pero suficientemente próximo, ambos equilibrios son el mismo equilibrio, de esta forma $d > 0$ (ver figura 7.13(a)).

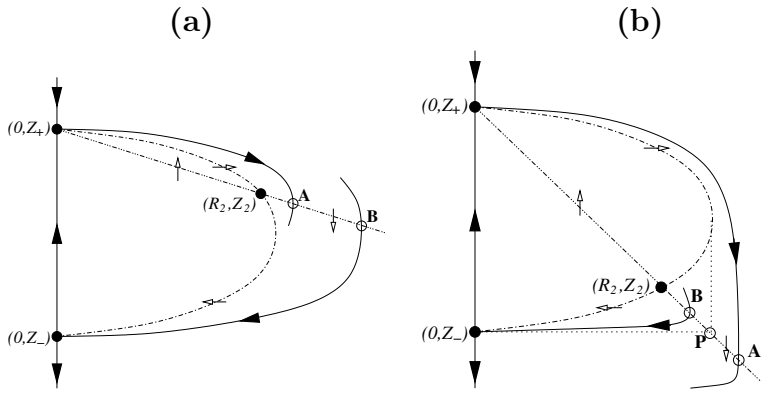


Figura 7.13: Posición relativa de las variedades de centro de $(0, Z_+)$ y la variedad estable de $(0, Z_-)$: (a) Tomando $\mu_2 > \frac{\mu_3^2}{4}$ y $\mu_2 \approx \frac{\mu_3^2}{4}$. (b) Tomando $\mu_2 = 4\mu_3^2$.

- Para el valor del parámetro $\mu_2 = 4\mu_3^2$, la línea recta $r = \mu_2$, $z = -\sqrt{\mu_2}$ corta la línea recta de isoclinas verticales $z = -\dfrac{1}{\mu_3} r + \sqrt{\mu_2}$ en un punto $\mathbf{P} = (4\mu_3^2, -2\mu_3)$. Como se muestra en la figura 7.13(b), el punto **A** está localizado debajo de **P**, mientras que el punto **B** está localizado por encima de él. Entonces, tenemos que $d < 0$.

- Para $\mu_2 > 0$ fijado, y debido a la continuidad respecto a los parámetros, podemos afirmar la existencia de un valor de μ_3, cumpliendo $\frac{1}{2}\sqrt{\mu_2} < \mu_3 < 2\sqrt{\mu_2}$, tal que $d = 0$.

- Para probar que el anterior valor de μ_3 es único, utilizamos

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \dfrac{\partial P}{\partial \mu_3} & \dfrac{\partial Q}{\partial \mu_3} \end{vmatrix} = -Q\frac{\partial P}{\partial \mu_3} = -r(z - \sqrt{\mu_2})(\mu_2 - r - z^2) < 0.$$

  Esto significa que estamos tratando con una familia uniparamétrica de campos vectoriales girados (*rotated vector fields*) (ver Andronov, Leontovich, Gordon y Maier (1970); Perko (2003)). Así, incrementando el valor de μ_3 (conservando fijo μ_2), el equilibrio $(0, Z_\pm)$ permanece fijo y el campo vectorial gira en el sentido de las agujas del reloj. Entonces la función $d(\mu_3)$ es estrictamente monótona y su raíz es única.

Para obtener la estimación de la función $\mu_2 = \Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3)$, utilizamos el hecho de que la bifurcación heteroclina tiene lugar por encima de la bifurcación de Hopf, por tanto $\dfrac{\mu_3^2}{4} < \mu_3^2 \approx \dfrac{\mu_3^2(\mu_3+2)^2}{4(\mu_3+1)^2} < \Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3) < 4\mu_3^2$. ■

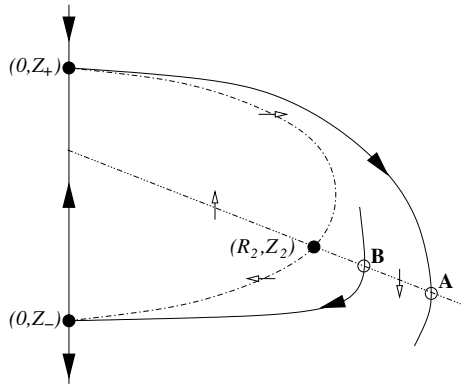


Figura 7.14: Posición relativa de la variedad inestable de $(0, Z_+)$ y la variedad estable de $(0, Z_-)$ para los valores $\mu_1 < \mu_3\sqrt{\mu_2}$ y $\mu_1 \approx \mu_3\sqrt{\mu_2}$.

7.4.2. Conexiones heteroclinas no degeneradas

En esta subsección estudiamos la existencia de una conexión heteroclina no degenerada que une los equilibrios $(0, Z_\pm)$ del sistema (7.6) con $b = -1$.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= P(r,z) = r\left(\mu_1 + \mu_3 z + r\right), \\ \dot{z} &= Q(r,z) = \mu_2 - r - z^2. \end{aligned}$$

Lema 7.4.2 *Consideramos el sistema (7.6) con $b = -1$. Existe entonces una función $\mu_1 = \Phi_{\rm het}(\mu_2, \mu_3)$, definida para $\mu_3 > 0$, $0 < \mu_2 < \Phi_{\rm hetdeg}(\mu_3)$, tal que para los valores de los parámetros $\mu_1 = \Phi_{\rm het}(\mu_2, \mu_3)$, el sistema presenta una órbita heteroclina que conecta los equilibrios silla hiperbólicos $(0, Z_+)$ y $(0, Z_-)$. Más aún, $-\mu_3\sqrt{\mu_2} < \Phi_{\rm het}(\mu_2, \mu_3) < \mu_3\sqrt{\mu_2}$.*

Demostración:

Como en la demostración del lema anterior, consideramos las líneas rectas de isoclinas verticales $\mu_1 + \mu_3 z + r = 0$. Sobre esta línea recta, tomamos los puntos $\mathbf{A} = (r_+, z_+)$ y $\mathbf{B} = (r_-, z_-)$ correspondientes a la variedad inestable de $(0, Z_+)$ y a la variedad estable del equilibrio $(0, Z_-)$, respectivamente (ver la figura 7.14). Denotamos $d = z_+ - z_-$. Entonces se tiene:

- Por el Lema 7.4.1, obtenemos que $d > 0$ para los valores de los parámetros $\mu_1 = -\mu_3\sqrt{\mu_2}$, $\mu_2 < \Phi_{\rm hetdeg}(\mu_3)$.
- Tomando $\mu_1 < \mu_3\sqrt{\mu_2}$ pero suficientemente próximo, la variedad estable del equilibrio $(0, Z_-)$ está conectada con el equilibrio (R_2, Z_2), y por tanto $d < 0$ (ver figura 7.14).
- Para cada $\mu_3 > 0$ y $\mu_2 > 0$, debido a la continuidad respecto de los parámetros, deducimos que existe μ_1, cumpliendo $-\mu_3\sqrt{\mu_2} < \mu_1 < \mu_3\sqrt{\mu_2}$, para el cual $d = 0$.

- Para probar que este valor de μ_1 es único, utilizamos que las variedades estable e inestable del equilibrio $(0, Z_\pm)$ están localizadas en la zona donde $Q < 0$, de esta forma

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \dfrac{\partial P}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial Q}{\partial \mu_1} \end{vmatrix} = -Q\frac{\partial P}{\partial \mu_1} = -r\left(\mu_2 - r - z^2\right) > 0.$$

  De nuevo es una familia uniparamétrica de campos vectoriales girados. Conservando $\mu_2 > 0$ y $\mu_3 > 0$ fijos e incrementando μ_1, el equilibrio $(0, Z_\pm)$ permanece fijo y el campo vectorial gira en el sentido contrario a las agujas del reloj. En consecuencia, d es una función de μ_1 estrictamente monótona y por tanto su raíz es única.

■

7.4.3. Conexiones homoclinas

Ahora estudiaremos las bifurcaciones homoclinas para el equilibrio (R_1, Z_1). En primer lugar mostramos que, para ambos casos $b = \pm 1$, como mucho esta bifurcación puede ocurrir para un único valor del parámetro μ_1 (fijados μ_2, μ_3). Posteriormente estudiaremos su existencia.

Lema 7.4.3 *Consideremos el sistema (7.6) con $b\mu_3 < 0$. Si existe un valor de μ_1 para el cual el sistema experimenta una bifurcación homoclina para el equilibrio (R_1, Z_1), entonces este valor es único.*

Demostración:

Aplicamos al sistema (7.6) la transformación

$$x = z + \frac{b\mu_3}{2}, \quad y = \mu_2 + br - z^2,$$

y tomando como parámetros

$$\mu_1 = \nu_1, \quad \mu_2 = b\nu_1 + \nu_2, \quad \mu_3 = \nu_3,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) = y, \\ \dot{y} &= Q(x, y) = R(x, y)S(x, y) - 2xy + b\nu_3 y, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} R(x, y) &= by + bx^2 - \nu_3 x - \nu_1 - b\nu_2 + \frac{b\nu_3^2}{4}, \\ S(x, y) &= y + x^2 - \nu_2 - \frac{\nu_3^2}{4}. \end{aligned}$$

- El eje invariante $r = 0$ se ha transformado en la parábola $R(x, y) = 0$. El equilibrio fuera del eje invariante se ha transformado en $(x_0^{\pm}, 0) = \left(\pm\sqrt{\nu_2 + \frac{\nu_3^2}{4}}, 0 \right)$, y están localizados en la región $R(x, y) > 0$. Es fácil probar que $(x_0^+, 0)$ es siempre un silla, mientras que $(x_0^-, 0)$ es un foco o un nodo.

- Es también fácil probar que la pendiente del autoespacio estable del equilibrio silla $(x_0^+, 0)$ es menor que la pendiente de la curva $S(x, y) = 0$ en este punto. Entonces, la variedad estable del equilibrio $(x_0^+, 0)$ está localizada en la zona $S(x, y) > 0$ para $y > 0$. En consecuencia, tomando valores de los parámetros suficientemente próximos a aquéllos en los que la homoclina exista, la variedad estable del equilibrio $(x_0^+, 0)$ cortará a la línea recta de isoclinas verticales $y = 0$ en un punto etiquetado como **B** en la figura 7.15.

  Análogamente se puede demostrar que la variedad inestable del equilibrio $(x_0^+, 0)$ cortará a la mencionada línea recta en un punto etiquetado como **A**.

- Como tenemos $b\nu_3 < 0$, se cumple que

$$\operatorname{sgn}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y} \right) \cdot (P, Q) \right) = \operatorname{sgn}\left(2xy + Q\right) = \operatorname{sgn}\left(-b\nu_3 y\right) = \operatorname{sgn}(y),$$

  en $S(x, y) = 0$. Entonces, cuando cruzamos la curva $S(x, y) = 0$, el flujo sigue la dirección indicada en la figura 7.15, es decir: en el trozo de curva $S(x, y) = 0, y > 0$, el flujo apunta hacia la zona $S(x, y) < 0$; mientras en el trozo $S(x, y) = 0, y < 0$ apunta hacia la zona $S(x, y) > 0$.

- Utilizando que

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \dfrac{\partial P}{\partial \nu_1} & \dfrac{\partial Q}{\partial \nu_1} \end{vmatrix} = -yS(x, y),$$

  deducimos que: si $yS(x, y) > 0$, el campo vectorial gira en el sentido de las agujas del reloj al incrementar ν_1; mientras que la rotación es en el sentido contrario a las agujas del reloj en la zona $yS(x, y) < 0$.

- Por tanto, la componente x del punto **B** disminuye y la correspondiente del punto **A** aumenta cuando incrementamos ν_1. Así la distancia entre los puntos **A** y **B**, como una función de ν_1, tiene al menos una raíz.

■

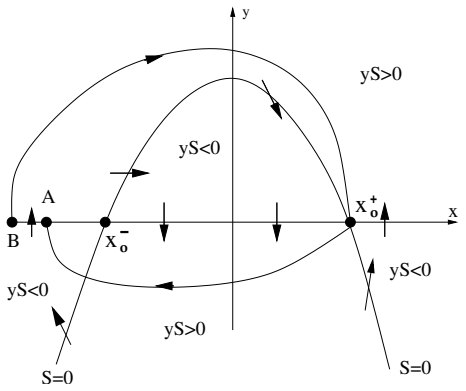


Figura 7.15: Posición relativa de la variedad estable e inestable del equilibrio $(x_0^+, 0)$ para los valores de los parámetros cercanos al valor donde se experimenta la bifurcación homoclina.

Lema 7.4.4 *Consideremos el sistema (7.6) con $b = +1$. Existe entonces una función $\mu_1 = \Phi_{\mathrm{hom}+}(\mu_2, \mu_3)$, definida para $\mu_3 < 0$, $\dfrac{\mu_3(\mu_3+4)}{4} < \mu_2 < 0$, tal que para los valores de los parámetros $\mu_1 = \Phi_{\mathrm{hom}+}(\mu_2, \mu_3)$, el sistema presenta una órbita homoclina del equilibrio silla (R_1, Z_1). Más aún, esta función satisface*

$$\mu_2 - \mu_3^2(\mu_3+1) < \mu_1 < \mu_1^{\mathbf{h}}, \tag{7.17}$$

donde $\mu_1^{\mathbf{h}} = b(\mu_3+2)(-1+\sqrt{1+\mu_2})$ es el valor de μ_1 correspondiente a la bifurcación de Hopf **h**. *También se cumple que $\Phi_{\mathrm{hom}+}\left(\mu_2^{\mathbf{TB}}, \mu_3\right) = \mu_1^{\mathbf{TB}}$, y $\Phi_{\mathrm{hom}+}(0, \mu_3) = 0$.*

Demostración:

Como mostramos en la figura 7.16, consideramos sobre la línea recta de isoclinas verticales $\mu_1 + \mu_3 z + r = 0$ los puntos $\mathbf{A} = (r_+, z_+)$ y $\mathbf{B} = (r_-, z_-)$ correspondientes, respectivamente, a las variedades inestable y estable del equilibrio (R_1, Z_1). Denotamos $d = r_+ - r_-$. Entonces tenemos:

- Para el valor del parámetro $\mu_1 = \mu_2 - \mu_3^2(\mu_3+1)$, las dos líneas $r = -\mu_2$ y $z = -Z_1$ cortan a la línea recta de isoclinas verticales $z = -\frac{1}{\mu_3} z + \sqrt{\mu_2}$ en un punto $\mathbf{P} = \left(-\mu_2, \dfrac{\mu_2}{\mu_3} + \sqrt{\mu_2}\right)$.

  Como se muestra en la figura 7.16(a), el punto **A** está localizado debajo de **P**, mientras que el punto **B** se encuentra por encima; por lo tanto $d < 0$.

- En $\mu_1 = \mu_1^{\mathbf{h}}$, la variedad inestable del equilibrio silla (R_1, Z_1) está conectado con el foco atractivo débil (R_2, Z_2), girando lás órbitas en el sentido contrario a la agujas del reloj en un entorno de este equilibrio.

  Como se muestra en la figura 7.16(b), el punto **B** debe estar situado por debajo del punto **A**; por lo tanto $d > 0$.

- Debido a la continuidad respecto a los parámetros, para cada $\mu_2 < 0$, $\mu_3 < 0$ fijos, existe un valor de μ_1 cumpliendo (7.17) tal que $d = 0$. Más aún, este valor es único por el Lema 7.4.3.

- En el plano μ_2–μ_3, una curva de conexiones homoclinas nace del punto de bifurcación de Takens-Bogdanov. Debido a la unicidad, obtenemos que $\Phi_{\mathrm{hom}+}\left(\mu_2^{\mathbf{TB}}, \mu_3\right) = \mu_1^{\mathbf{TB}}$.

- Si tomamos los valores de los parámetros sobre la curva $\mathbf{SN}_1 \equiv \{\mu_2 = 0\}$, con $\mu_1 < 0$, los equilibrios $(0, Z_\pm)$ colapsan en el origen, el cual es un silla-nodo (con una variedad estable). Por otra parte, (R_1, Z_1) es un equilibrio silla y (R_2, Z_2) es un foco o un nodo repulsivo.

  Como se muestra en la figura 7.16(c), la variedad estable de (R_1, Z_1) está conectada con (R_2, Z_2). La variedad inestable está también conectada con el origen. Entonces, los puntos **A** y **B** están situados como se muestra en la figura 7.16(c), de esta forma $d < 0$. Como la bifurcación homoclina únicamente ocurre en la superficie silla-nodo en la singularidad (esto es, para $\mu_1 = \mu_2 = 0$), se tiene que $\Phi_{\mathrm{hom}+}(0, \mu_3) = 0$.

■

Lema 7.4.5 *Consideremos el sistema (7.6) con $b = -1$. Existe entonces una función $\mu_1 = \Phi_{\mathrm{hom}-}(\mu_2, \mu_3)$, definida para $\mu_3 > 0$, $\Phi_{\mathrm{hetdeg}}(\mu_3) < \mu_2 < \mu_2^{\mathbf{TB}}$, tal que para el valor de los parámetros $\mu_1 = \Phi_{\mathrm{hom}-}(\mu_2, \mu_3)$ el sistema tiene una órbita homoclina del equilibrio (R_1, Z_1). Además, esta función satisface*

$$-\mu_2 - \frac{\mu_3^2}{4} < \Phi_{\mathrm{hom}-}(\mu_2, \mu_3) < -\mu_3\sqrt{\mu_2}. \tag{7.18}$$

Se cumple que $\Phi_{\mathrm{hom}-}\left(\mu_2^{\mathbf{TB}}, \mu_3\right) = \mu_1^{\mathbf{TB}}$, y $\Phi_{\mathrm{hom}-}\left(\Phi_{\mathrm{hetdeg}}(\mu_3), \mu_3\right) = -\mu_3\sqrt{\Phi_{\mathrm{hetdeg}}(\mu_3)}$.

Demostración:

Sobre la línea recta de isoclinas verticales $\mu_1 + \mu_3 z + r = 0$, vamos a considerar los puntos $\mathbf{A} = (r_+, z_+)$ y $\mathbf{B} = (r_-, z_-)$, correspondientes a las variedades inestable y estable respectivamente, del equilibrio silla (R_1, Z_1). Denotamos $d = z_+ - z_-$. Se tiene:

- Como se prueba en el Lema 7.4.1, para los valores de los parámetros sobre la superficie donde se experimenta la bifurcación transcrítica $\mu_1 = -\mu_3\sqrt{\mu_2}$, $\mu_2 < \Phi_{\mathrm{hetdeg}}(\mu_3)$, el punto **A** está situado por encima del punto **B** (porque en este caso, los equilibrios $(0, Z_-)$ y (R_1, Z_1) colapsan, ver figura 7.17(a)). Por tanto, para $\mu_1 < -\mu_3\sqrt{\mu_2}$ y suficientemente próximos, la variedad estable del equilibrio (R_1, Z_1) se encuentra encerrada en la región delimitada por la unión del eje invariante y la variedad estable de $(0, Z_-)$ (ver figura 7.17(b)); por tanto $d > 0$.

- Para $\mu_1 > \mu_1^{\mathbf{SN}_2} = -\mu_2 - \dfrac{\mu_3^2}{4}$ suficientemente próximo, la variedad estable de (R_1, Z_1) está conectada con el equilibrio (R_2, Z_2) (ver figura 7.17(c)), y se tiene que $d < 0$.

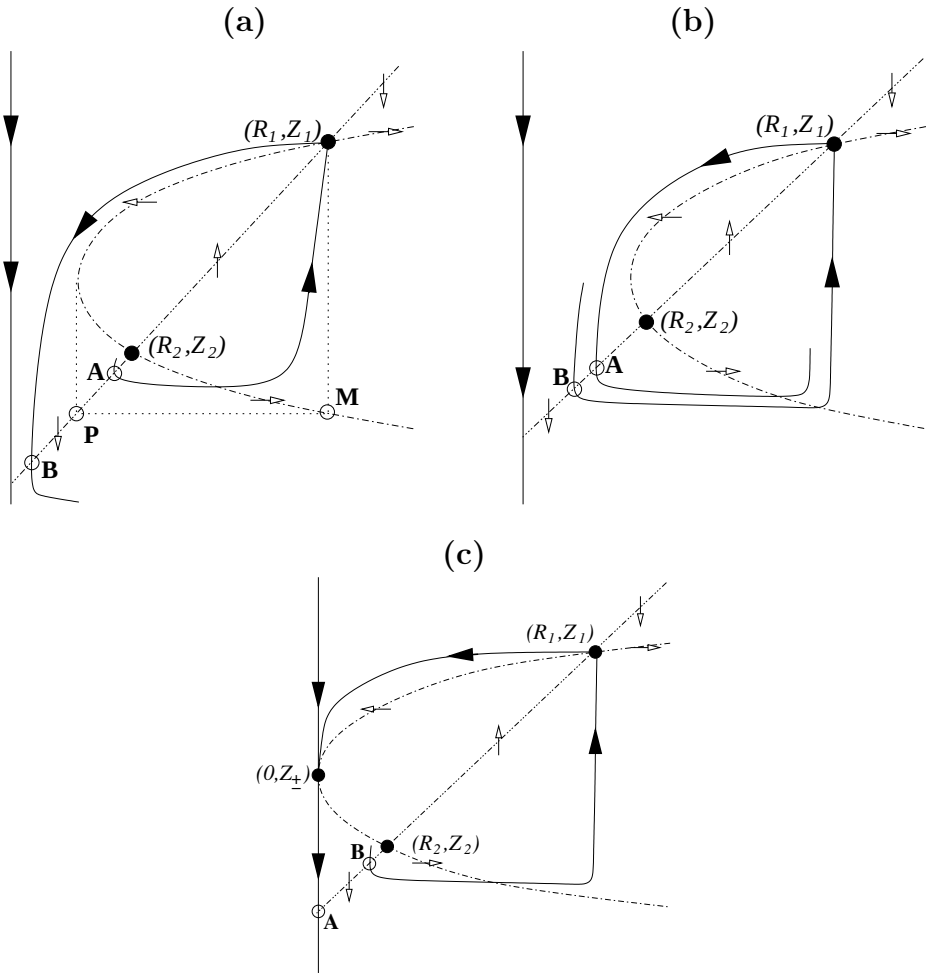


Figura 7.16: Posiciones relativas de las variedades estable e inestable de (R_1, Z_1) para: (a) $\mu_1 = \mu_2 - \mu_3^2(\mu_3 + 1)$. (b) $\mu_1 = b(\mu_3 + 2)(-1 + \sqrt{1 + \mu_2})$. (c) $\mu_2 = 0$, $\mu_1 < 0$.

- Utilizando la continuidad con respecto de los parámetros obtenemos que, para cada $\mu_3 > 0$, $\mu_2 > 0$, existe un valor de μ_1 tal que $d = 0$. Más aún, por el Lema 7.4.3 deducimos que este valor es único.

- Hay una bifurcación homoclina que nace del punto de bifurcación de Takens-Bogdanov. Por la unicidad se tiene que $\Phi_{\mathrm{hom}-}\left(\mu_2^{\mathbf{TB}}, \mu_3\right) = \mu_1^{\mathbf{TB}}$. La última igualdad de nuestra afirmación se obtiene por la unicidad de la curva de conexiones heteroclinas, y utilizando que ésta nace cuando la posición de la homoclina se acerca a la bifurcación transcrítica.

■

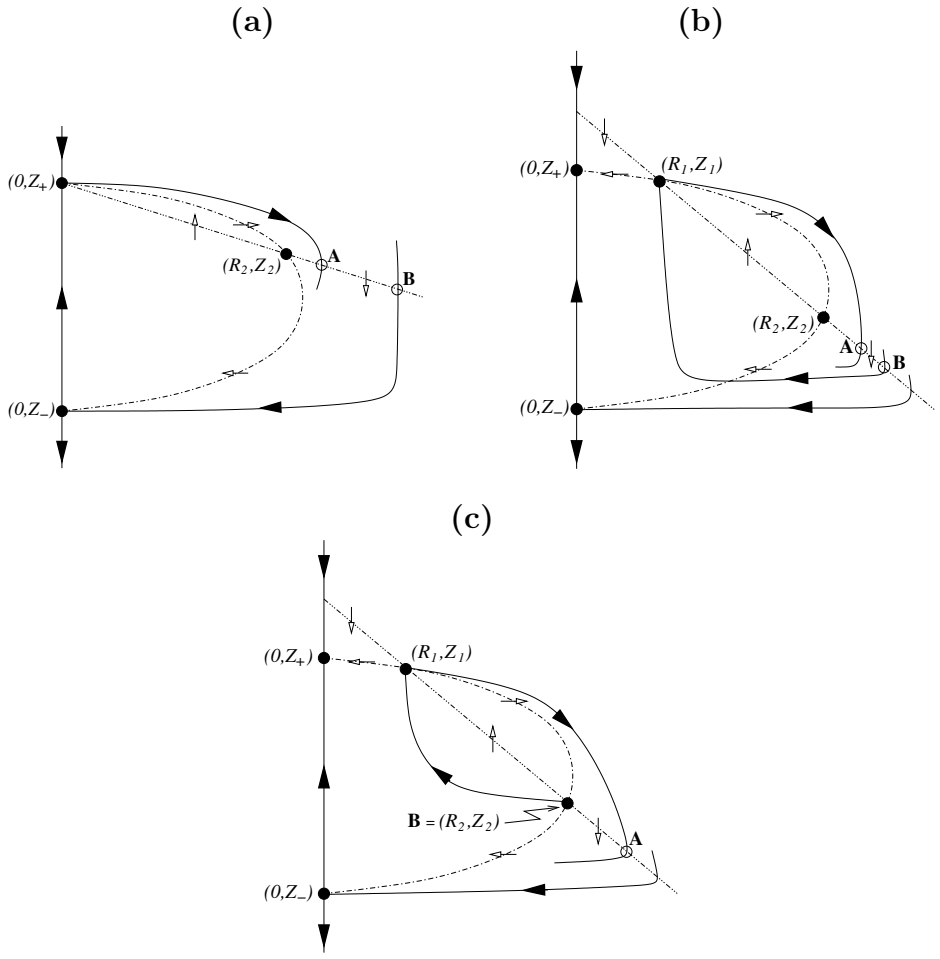


Figura 7.17: Posiciones relativas de las variedades estable e inestable de (R_1, Z_1) para: (a) $\mu_1 = -\mu_3\sqrt{\mu_2}$, $\mu_2 < \Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3)$. (b) $\mu_1 < \mu_3\sqrt{\mu_2}$, $\mu_1 \approx \mu_3\sqrt{\mu_2}$. (c) $\mu_1 > -\mu_2 - \dfrac{\mu_3^2}{4}$, $\mu_1 \approx -\mu_2 - \dfrac{\mu_3^2}{4}$.

7.4.4. Conexiones globales del tipo J

Lema 7.4.6 *Consideremos el sistema (7.6) con $b = -1$. Existe entonces una función $\mu_1 = \Phi_J(\mu_2, \mu_3)$, definida para $\mu_3 > 0$, $\Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3) < \mu_2 < \mu_2^{\mathbf{TB}}$, tal que para el valor de los parámetros $\mu_1 = \Phi_J(\mu_2, \mu_3)$, el sistema presenta una órbita heteroclina que conecta el equilibrio silla (R_1, Z_1) con el equilibrio silla $(0, Z_-)$. Además esta función satisface*

$$\Phi_{\text{hom}-}(\mu_2, \mu_3) < \Phi_J(\mu_2, \mu_3) < -\mu_3\sqrt{\mu_2}. \tag{7.19}$$

También se cumple que $\Phi_J(\Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3), \mu_3) = -\mu_3\sqrt{\Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3)}$.

Demostración:

Sobre la línea recta de isoclinas verticales $\mu_1 + \mu_3 z + r = 0$, consideramos los puntos $\mathbf{A} = (r_+, z_+)$ y $B = (r_-, z_-)$ localizados respectivamente sobre la variedad inestable de (R_1, Z_1) y la variedad estable de $(0, Z_-)$. Denotamos $d = z_+ - z_-$.

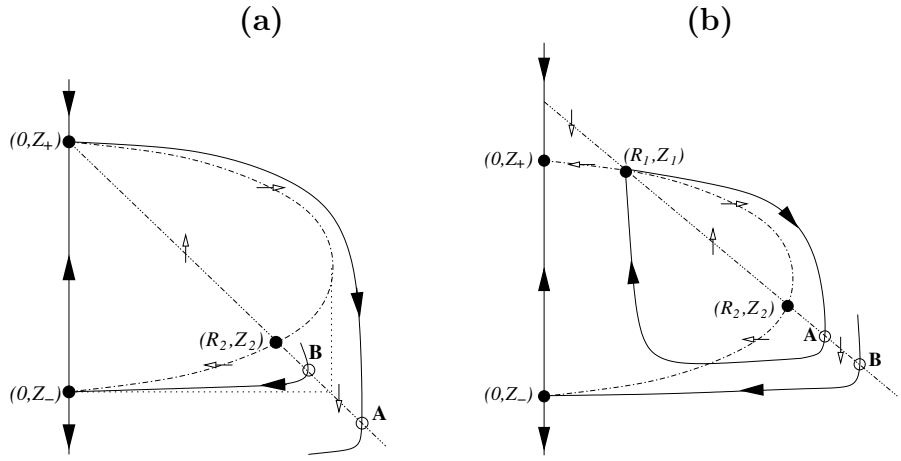


Figura 7.18: Posiciones relativas de la variedad inestable de (R_1, Z_1) y la variedad estable de $(0, Z_-)$ para: (a) $\mu_1 = -\mu_3\sqrt{\mu_2}$, $\Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3) < \mu_2$. (b) $\mu_1 = \Phi_{\text{hom}-}(\mu_2, \mu_3)$.

- Sobre la superficie donde se experimenta la bifurcación transcrítica $\mu_1 = -\mu_3\sqrt{\mu_2}$, siempre que $\Phi_{\text{hetdeg}}(\mu_3) < \mu_2$, el equilibrio (R_1, Z_1) colapsa con $(0, Z_+)$. Por el Lema 7.4.1, el punto **A** está situado debajo de **B** (ver figura 7.18(a)); por tanto $d < 0$.

- Para los valores de los parámetros sobre la superficie de conexiones homoclinas $\mu_1 = \Phi_{\text{hom}-}(\mu_2, \mu_3)$, la variedad estable de $(0, Z_-)$ es exterior a la órbita homoclina de (R_1, Z_1) (ver figura 7.18(b)); por tanto $d > 0$.

- Usando la continuidad respecto de los parámetros obtenemos que, para cada $\mu_3 > 0$, $\mu_2 > 0$, existe un valor de μ_1 tal que $d = 0$. La unicidad de este valor se puede obtener de la misma forma que en el Lema 7.4.2.

■

Bibliografía

Algaba, A. (1996), Formas hipernormales y bifurcaciones en sistemas planos y tridimensionales, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.

Algaba, A., Fernández-Sánchez, F., Freire, E., Merino, M. y Rodríguez-Luis, A. J. (2002), 'Nontransversal curves of T-points: a source of closed curves of global bifurcations', *Physics Letters A* **303**, 204–211.

Algaba, A., Fernández-Sánchez, F., Merino, M. y Rodríguez-Luis, A. J. (2009), 'Structure of cusp bifurcations of periodic orbits near a non-transversal T-point'. Enviado para su publicación a Physics Letters A.

Algaba, A., Freire, E., Gamero, E. y García, C. (2003), 'Quasi-homogeneous normal forms for null linear part', *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A. Mathematical Analysis* **10**, 247–261.

Algaba, A., Freire, E., Gamero, E. y García, C. (2004), 'An algorithm for computing quasi-homogeneous formal normal forms under equivalence', *Acta Applicandae Mathematicae* **80**, 335–35.

Algaba, A., Freire, E., Gamero, E. y Rodríguez-Luis, A. J. (1998), 'Analysis of Hopf and Takens-Bogdanov bifurcations in a modified van der Pol-Duffing oscillator', *Nonlinear Dynamics* **16**, 369–404.

Algaba, A., Freire, E., Gamero, E. y Rodríguez-Luis, A. J. (1999*a*), 'On a codimension-three unfolding of the interaction of degenerate Hopf and pitchfork bifurcations', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **9**, 1333–1362.

Algaba, A., Freire, E., Gamero, E. y Rodríguez-Luis, A. J. (1999*b*), 'A three-parameter study of a degenerate case of the Hopf-pitchfork bifurcation', *Nonlinearity* **12**, 1177–1206.

Algaba, A., Freire, E., Gamero, E. y Rodríguez-Luis, A. J. (2000), 'A tame-degenerate Hopf-pitchfork bifurcation in a modified van der Pol-Duffing oscillator', *Nonlinear Dynamics* **22**, 249–269.

Algaba, A., Freire, E., Gamero, E. y Rodríguez-Luis, A. J. (2007), 'Resonances of periodic orbits in Rössler system in presence of a triple-zero bifurcation', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **17**, 1997–2008.

Algaba, A., Freire, E. y Gamero, E. (1998), 'Hypernormal form for the Hopf-zero bifurcation', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **8**, 1857–1887.

Algaba, A., Freire, E. y Gamero, E. (2001), 'Characterizing and computing normal forms using Lie transforms: A survey', *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems* **8**, 449–475.

Algaba, A., Gamero, E., García, C. y Merino, M. (2007), 'A degenerate Hopf-saddle-node bifurcation analysis in a family of electronic circuits', *Nonlinear Dynamics* **48**, 55–76.

Algaba, A., Gamero, E. y Rodríguez-Luis, A. J. (2005), 'A bifurcation analysis of a simple electronic circuit', *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **10**, 169–178.

Algaba, A., García, C., Merino, M. y Maestre, M. (2001), 'Cusps in a strong resonancies organizated for a degenerate Takens-Bogdanov in the Chua's equations', *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences* **E84-A**, 2138–2144.

Algaba, A., Merino, M., Fernández-Sánchez, F. y Rodríguez-Luis, A. J. (2003), 'Closed curves of global bifurcations in Chua's equation: a mechanism for their formation', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **13**, 609–616.

Algaba, A., Merino, M., Fernández-Sánchez, F. y Rodríguez-Luis, A. J. (2006), 'Open-to-closed curves of saddle-node bifurcations of periodic orbits near a nontransversal T-point in Chua's equation', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **16**, 2637–2647.

Algaba, A., Merino, M., Freire, E., Gamero, E. y Rodríguez-Luis, A. J. (2003), 'Some results on Chua's equation near a triple-zero linear degeneracy', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **13**, 583–608.

Algaba, A., Merino, M. y Rodríguez-Luis, A. J. (1999), 'Evolution of Arnold's tongues in a $\mathbb{Z}_2$-symmetric electronic circuit', *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences* **E82-A**, 1714–1721.

Algaba, A., Merino, M. y Rodríguez-Luis, A. J. (2001), 'Takens-Bogdanov bifurcations of periodic orbits and Arnold's tongues in a three-dimensional electronic model', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **11**, 513–531.

Algaba, A., Merino, M. y Rodríguez-Luis, A. J. (2005), 'Homoclinic connections near a Belyakov point in Chua's equation', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **15**, 1239–1252.

Algaba, A., Merino, M. y Rodríguez-Luis, A. J. (2009), 'Homoclinic interactions between T-points and a degenerate homoclinic connection near a triple-zero linear degeneracy in Chua's equation'. Preprint.

Andronov, A., Leontovich, E., Gordon, I. y Maier, A. (1970), *Qualitative Theory of Second Order Dynamics Systems*, John Wiley, New York.

Arnold, V. I. (1983), *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

Aronson, D. G., Chory, M. A., Hall, G. R. y McGeehee, R. P. (1982), 'Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane: A computer assisted study', *Commun. Math. Phys.* **83**, 303–354.

Arrowsmith, D. K., Cartwright, J. H., Lansbury, A. y Place, C. M. (1993), 'The Bogdanov map: Bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **3**, 803–842.

Arrowsmith, J. y Place, C. M. (1990), *An Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge.

Barnett, S. y Cameron, R. G. (1985), *Introduction to Mathematical Control Theory*, Clarendon Press, Oxford.

Belitskii, G. R. (1973), 'Functional equations and conjugacy of local diffeomorphisms of a finite smoothness class', *Journal of Applied Functional Analysis* **7**, 268–277.

Belyakov, L. A. (1974), 'A case of the generation of a periodic motion with homoclinic curves', *Akademiya Nauk SSSR. Matematicheskie Zametki* **15**, 336–341.

Belyakov, L. A. (1980), 'The bifurcation set in a system with a homoclinic saddle curve', *Akademiya Nauk SSSR. Matematicheskie Zametki* **28**, 910–916.

Belyakov, L. A. (1984), 'Bifurcation of systems with homoclinic curve of a saddle-focus with saddle quantity zero', *Akademiya Nauk SSSR. Matematicheskie Zametki* **36**, 838–843.

Blázquez, M. y Tuma, E. (1996), 'Chaotic behavior of orbits close to a heteroclinic contour', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **6**, 69–79.

Broer, H., Roussarie, R. y Simó, C. (1993), On the Bogdanov–Takens bifurcation for planar diffeomorphisms, *in* S. Perelló y Solà-Morales, eds, 'Proceedings of Equadiff'91', pp. 81–92.

Broer, H., Simó, C. y Tatjer, J. C. (1998), 'Towards global models near homoclinic tangencies of dissipative diffeomorphisms', *Nonlinearity* **11**, 667–770.

Bykov, V. V. (1993), 'The bifurcations of separatrix contours and chaos', *Physica D* **62**, 290–299.

Champneys, A. R., Kirk, V., Knobloch, E., Oldeman, B. y Rademacher, J. (2009), 'Unfolding a tangent equilibrium-to-periodic heteroclinic cycle'. Preprint.

Champneys, A. R. y Kuznetsov, Y. A. (1994), 'Numerical detection and continuation of codimension-two homoclinic bifurcations', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **4**, 785–822.

Champneys, A. R. y Rodríguez-Luis, A. J. (1999), 'The non-transverse Shil'nikov-Hopf bifurcation; uncoupling of homoclinic orbits and homoclinic tangencies', *Physica D* **128**, 130–158.

Chow, S., Li, C. y Wang, D. (1989), 'Uniqueness of periodic orbits of some vector fields with codimension two singularities', *Journal of Differential Equations* **77**, 231–253.

Chow, S., Li, C. y Wang, D. (1994), *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*, Cambridge University Press, Cambridge.

Chua, L. O., Komuro, M. y Matsumoto, T. (1986), 'The double scroll family', *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **CAS-33**, 1072–1118.

Dangelmayr, G. y Wegelin, M. (1991), On a codimension-four bifurcation occurring in optical bistability, *in* 'Singularity theory and its applications, Part II (Coventry, 1988/1989)', Vol. 1463 of *Lecture Notes in Math.*, Springer, Berlin, pp. 107–121.

De Feo, O., Maggio, G. M. y Kennedy, M. P. (2000), 'The Colpitts oscillator: Families of periodic solutions and their bifurcations', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10**, 935–958.

Deng, B. (1993), 'Homoclinic twisting bifurcations and cusp horseshoe map', *Journal of Dynamics and Differential Equations* **5**, 417–467.

Devaney, R. L. (1986), *An Introduction to Chaotic Dynamics*, Benjamin/Cummings, Menlo Park.

Doedel, E., Champneys, A. R., Fairgrieve, T., Kuznetsov, Y., Sandstede, B. y Wang, X. (1998), AUTO97: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont), Technical report.

Doedel, E., Keller, H. B. y Kernévez, J. P. (1991), 'Numerical analysis and control of bifurcation problems (I) Bifurcation in finite dimensions', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **1**, 493–520.

Dumortier, F. (1991), 'Local study of planar vector fields: Singularities and their unfolding', *Structures in Dynamics, Studies in Math. Physics* **2**, 161–242.

Dumortier, F., Ibáñez, S. y Kokubu, H. (2001), 'New aspects in the unfolding of the nilpotent singularity of codimension three', *Dynamical Systems* **16**, 63–95.

Fernández-Sánchez, F. (2002), Comportamiento dinámico y de bifurcaciones en algunas conexiones globales de equilibrios en sistemas tridimensionales, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.

Fernández-Sánchez, F., Freire, E. y Rodríguez-Luis, A. J. (1997), 'Isolas, cusps and global bifurcations in an electronic oscillator', *Dynamics and Stability of Systems* **12**, 319–336.

Fernández-Sánchez, F., Freire, E. y Rodríguez-Luis, A. J. (2002), 'T-points in a $\mathbb{Z}_2$-symmetric electronic oscillator. (I) Analysis', *Nonlinear Dynamics* **28**, 53–69.

Fernández-Sánchez, F., Freire, E. y Rodríguez-Luis, A. J. (2008), 'Analysis of the T–point–Hopf bifurcation', *Physica D* **237**, 292–305.

Freire, E., Franquelo, L. G. y Aracil, J. (1984), 'Periodicity and chaos in an autonomous electronic system', *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **CAS-31**, 237–247.

Freire, E., Gamero, E., Rodríguez-Luis, A. J. y Algaba, A. (2002), 'A note on the triple-zero linear degeneracy: Normal forms, dynamical and bifurcation behaviours of an unfolding', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **12**, 2799–2820.

Freire, E., Gamero, E. y Ponce, E. (1989), *An Algorithm for Symbolic Computation of Hopf Bifurcation*, Springer-Verlag, New York.

Freire, E., Pizarro, L. y Rodríguez-Luis, A. J. (1999), 'Analytical and numerical study of a four-parameter family of mechanical oscillators', *Mechanics Research Communications* **26**, 253–259.

Freire, E., Rodríguez-Luis, A. J., Gamero, E. y Ponce, E. (1993), 'A case study for homoclinic chaos in an autonomous electronic circuit. A trip from Takens–Bogdanov to Hopf–Shil'nikov', *Physica D* **62**, 230–253.

Frouzakis, C. E., Adomaitis, R. A. y Kevrekidis, I. G. (1991), 'Resonance phenomena in an adaptively-controlled system', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **1**, 83–106.

Gamero, E. (1990), Computación simbólica y bifurcaciones de sistemas dinámicos, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.

Gamero, E., Freire, E. y Ponce, E. (1991), 'Normal forms for planar systems with nilpotent linear part', *Int. Ser. Num. Math.* **97**, 123–127.

Gaspard, P. (1983), 'Generation of a countable set of homoclinic flows through bifurcation', *Physics Letters A* **97**, 1–4.

Gaspard, P., Kapral, R. y Nicolis, G. (1984), 'Bifurcation phenomena near homoclinic systems: A two-parameter analysis', *Journal of Statistical Physics* **35**, 697–727.

Glendinning, P. (1984), 'Bifurcations near homoclinic orbits with symmetry', *Physics Letters A* **103**, 163–166.

Glendinning, P. y Sparrow, C. (1984), 'Local and global behaviour near homoclinic orbits', *Journal of Statistical Physics* **35**, 645–696.

Glendinning, P. y Sparrow, C. (1986), 'T-points: A codimension two heteroclinic bifurcation', *Journal of Statistical Physics* **43**, 479–488.

Gomes, S. G. M. y King, G. P. (1992), 'Bistable chaos. II. Bifurcation analysis', *Physical Review A* **46**, 3100–3110.

Gonchenko, S. V., Turaev, D. V., Gaspard, P. y Nicolis, G. (1997), 'Complexity in the bifurcation structure of homoclinic loops to a saddle-focus', *Nonlinearity* **10**, 409–423.

Guckenheimer, J., Myers, M. R., Wicklin, F. J. y Worfolk, P. A. (1995), DSTOOL: A dynamical system toolkit with a interactive graphical interface, reference manual, Center for Applied Mathematics, Cornell University.

Guckenheimer, J. y Holmes, P. (1997), *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Vol. 42 of *Series on Nonlinear Science*, Springer-Verlag, New York.

Hartman, P. (1960), 'On local homeomorphisms of Euclidean spaces', *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* **5**, 220–241.

Healey, J. J., Broomhead, K. A., Cliffe, R., Jones, R. y Mullin, T. (1991), 'The origins of chaos in a modified van der Pol oscillator', *Physica D* **48**, 322–339.

Hirschberg, P. y Knobloch, E. (1993), 'Shil'nikov–Hopf bifurcation', *Physica D* **62**, 202–216.

Hirschberg, P. y Laing, C. (1995), 'Sucessive homoclinic tangencies to a limit cycle', *Physica D* **89**, 1–14.

Homburg, A. J. (2002), 'Periodic attractors, strange attractors and hyperbolic dynamics near homoclinic orbits to saddle-focus equilibria', *Nonlinearity* **15**, 1029–1050.

Homburg, A. y Natiello, M. A. (2005), 'Accumulations of T-points in a model for solitary pulses in an excitable reaction-diffusion medium', *Physica D* **201**, 212–229.

Huang, A., Pivka, L., Wu, C. W. y Franz, M. (1996), 'Chua's equation witch cubic nonlinearity', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **6**, 2175–2222.

Khibnik, A., Roose, D. y Chua, L. O. (1993), 'On periodic orbits and homoclinic bifurcations in Chua's circuit with a smooth nonlinearity', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **3**, 363–384.

Kirk, V. (1991), 'Breaking of symmetry in the saddle-node Hopf bifurcation', *Physics Letters A* **A154**, 243–248.

Kirk, V. (1993), 'Merging of resonance tongues', *Physica D* **66**, 267–281.

Kirk, V. y Rucklidge, A. (2008), 'The effect of symmetry breaking on the dynamics near a structurally stable heteroclinic cycle between equilibria and a periodic orbit', *Dynamical Systems* **23**, 42–74.

Krauskopf, B. y Oldeman, B. (2006), 'Bifurcation of global reinjection orbits near a saddle-node Hopf bifurcation', *Nonlinearity* **19**, 2149–2167.

Krauskopf, B. y Rousseau, C. (1997), 'Codimension three unfoldings of reflectionally symmetric planar vector fields', *Nonlinearity* **10**, 1115–1150.

Kuznetsov, Y. A. (2004), *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Vol. 112 of *Series on Nonlinear Science*, Springer-Verlag, New York.

Kuznetsov, Y. A., Feo, O. D. y Rinaldi, S. (2001), 'Belyakov homoclinic bifurcations in a tritrophic food chain model', *SIAM Journal on Applied Math.* **62**, 462–487.

Kuznetsov, Y. A., Muratori, S. y Rinaldi, S. (1992), 'Bifurcations and chaos in a periodic predator-prey model', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **2**, 117–128.

Langford, W. F. (1987), Hopf bifurcation at a hysteresis point, *in* 'Differential equations : qualitative theory, Vol. I, II (Szeged, 1984)', Vol. 47 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, North-Holland, Amsterdam, pp. 649–686.

Li, C. y Rousseau, C. (1989), 'A system with three limit cycles appearing in a Hopf bifurcation and dying in a homoclinic bifurcation: the cusp of order 4', *Journal of Differential Equations* **79**, 132–167.

Li, C. y Rousseau, C. (1990), 'Codimension 2 symmetric homoclinic bifurcations and application to 1:2 resonance', *Canadian Journal of Mathematics* **42**, 191–212.

Lin, X. B. (1990), 'Using Melnikov's method to solve Shilnikov's problems', *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **116A**, 295–325.

Madan, R., ed. (1993), *Chua's circuit: a paradigm for chaos*, Vol. 1 of *World Scientific Series on Nonlinear Science, Series B*, World Scientific, Singapur.

Matsumoto, T. A. (1984), 'A chaotic attractor from Chua's circuit', *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **CAS-31**, 1055–1058.

Matsumoto, T. A., Chua, L. O. y Komuro, M. (1985), 'The double scroll', *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **CAS-32**, 797–818.

Matsumoto, T. A., Chua, L. O. y Tokunaga, R. (1987), 'Chaos via torus breakdown', *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **CAS-34**, 240–253.

Messias, M., Braga, D. y Mello, L. (2009), 'Degenerate Hopf bifurcations in Chua's system', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **19**, 497–515.

Moiola, J. L. y Chua, L. O. (1999), 'Hopf bifurcations and degeneracies in Chua's circuit–a perspective from a frequency domain approach', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **9**, 295–303.

Nayfeh, A. H. y Balachandran, B. (1995), *Applied Nonlinear Dynamics*, Nonlinear Science, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Oldeman, B. E., Champneys, A. R. y Krauskopf, B. (2003), 'Homoclinic branch switching', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **13**, 2977–2999.

Peckham, B. B., Frouzakis, C. E. y Kevrekidis, I. G. (1995), 'Bananas and banana splits: A parametric degeneracy in the Hopf bifurcation for maps', *SIAM Journal on Mathematical Analysis.* **26**, 190–217.

Perko, L. (2003), *Differential equations and dynamical systems*, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York.

Pivka, L., Wu, C. W. y Huang, A. (1996), 'Lorenz equation and Chua's equation', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **6**, 2443–2489.

Rodríguez-Luis, A. J. (1991), Bifurcaciones multiparamétricas en osciladores autónomos, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.

Rodríguez-Luis, A. J., Freire, E. y Ponce, E. (1991), On a codimension 3 bifurcation arising in an autonomous electronic circuit, *in* 'Bifurcation and Chaos: Analysis, Algorithms, Applications. International Series of Numerical Mathematics. Vol. 97. (Birkäuser, Basel)', pp. 301–306.

Roussarie, R. y Rousseau, C. (1996), 'Almost planar homoclinic loops in $\mathbb{R}^3$', *Journal of Differential Equations* **126**, 1–47.

Rousseau, C. (1990), Universal unfolding of a singularity of a symmetric vector field C^∞-equivalent to $y\frac{\partial}{\partial x} + (\pm x^3 \pm x^6 y)\frac{\partial}{\partial y}$, *in* 'Bifurcations of Planar Vector Fields. J.-P. Françoise and R. Roussarie (eds.) Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1455. (Springer, Berlin)', pp. 334–355.

Shil'nikov, L. P. (1965), 'A case of the existence of a countable number of periodic motions', *Soviet Mathematics Doklady* **16**, 163–166.

Shil'nikov, L. P. (1969), 'On a new type of bifurcation of multidimensional dynamical systems', *Soviet Mathematics Doklady* **10**, 1368–1371.

Shil'nikov, L. P. (1970), 'A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type', *Math. USSR Sbornik* **10**, 91–102.

Shinriki, R., Yamamoto, M. y Mori, S. A. (1979), 'A simultaneous asynchronous oscillator with both nonlinear positive and negative conductances connected in series', *Proceedings of the IEEE* **67**, 322–324.

Shinriki, R., Yamamoto, M. y Mori, S. A. (1981), 'Multimode oscillations in a modified van der Pol oscillator containing a positive nonlinear conductance', *Proceedings of the IEEE* **69**, 394–395.

Sieber, J. y Krauskopf, B. (2004), 'Bifurcation analysis of an inverted pendulum with delayed feedback control near a triple-zero eigenvalue singularity', *Nonlinearity* **17**, 85–103.

Ushiki, S. (1984), 'Normal forms for singularities of vector fields', *Japan Journal of Applieds Mathematics* **1**, 1–37.

van der Pol, B. y van der Mark, J. (1927), 'Frequency demultiplication', *Nature* **120**, 363–364.

Wieczorek, S. y Krauskopf, B. (2005), 'Bifurcations of n-homoclinic orbits in optically injected lasers', *Nonlinearity* **18**, 1095–1120.

Wiggins, S. (2003), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Vol. 2 of *Texts in Applied Mathematics*, Springer, New York.

Zhang, P. G. y Zhao, S. Q. (1993), 'Existence and uniqueness of limit cycles for a class of normal form equations with codimension two singularities', *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **172**, 191–204.

Zhong, G. Q. y Ayrom, F. (1985), 'Experimental confirmation of chaos from Chua's circuit', *International Journal of Circuit Theory and Applications* **13**, 93–98.