

# Universidad de Huelva

Departamento de Métodos Cuantitativos para la  
Economía y la Empresa, Estadística e Investigación  
Operativa



**Construcción de distribuciones a priori no informativas y  
estimación de modelos de espacio de estados no lineales  
: aplicación a la evaluación de recursos pesqueros  
mediante técnicas bayesianas**

**Memoria para optar al grado de doctora  
presentada por:**

**Isabel Serrano Czaia**

Fecha de lectura: 8 de febrero de 2016

Bajo la dirección del doctor:

Juan José García del Hoyo

**Huelva, 2016**





**Universidad  
de Huelva**

## **TESIS DOCTORAL**

**CONSTRUCCIÓN DE DISTRIBUCIONES A PRIORI NO  
INFORMATIVAS Y ESTIMACIÓN DE MODELOS DE  
ESPACIO DE ESTADOS NO LINEALES**

**Aplicación a la evaluación de recursos pesqueros  
mediante técnicas bayesianas**

**Tesis doctoral presentada por  
Isabel Serrano Czaia**

**Dirigida por:  
Dr. D. Juan José García del Hoyo**

2015

**A Vicente,  
Isabel y Sara**

## **INDICE**

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>1. DINÁMICA DE POBLACIONES EXPLOTADAS: MODELIZACIÓN</b>	<b>7</b>
1.1 Rendimiento máximo sostenible	11
1.2 Formulación de modelos sobre la dinámica de las poblaciones explotadas	15
1.3 Modelos descriptivos o agregados	21
1.3.1 Modelo General de Producción de Schaefer	22
1.3.2 Otros modelos descriptivos	30
1.4 Modelos Analíticos	31
1.4.1 Modelo de Beverton-Holt	32
1.4.2 Otros modelos analíticos	35
1.5 Modelos Stock – Reclutamiento	37
1.5.1 Funciones stock-reclutamiento	39

<b>2. DISTRIBUCIONES A PRIORI NO INFORMATIVAS: Jeffreys y Zellner</b>	<b>45</b>
2.1 Medidas de información y análisis bayesiano	46
2.2 Medida de Información de Fisher	51
2.1.1 Propiedades de la Información de Fisher	57
2.3 Entropía o Medida de Información de Shannon	62
2.3.1 Propiedades de la Medida de Información de Shannon	65
2.4 Distribuciones no informativas. Regla de Jeffreys	67
2.5 Distribuciones no informativas. Regla de Zellner	70
2.5.1 MDIP para parámetros comunes a distintas funciones de densidad	77
2.5.2 MDIP para un conjunto de observaciones	78
2.5.3 MDIP ante transformaciones inyectivas	80
2.6 Relación entre la función de densidad a priori de Jeffreys y las MDIP	80

<b>3. MODELOS BAYESIANOS APLICADOS A LA GESTIÓN DE PESQUERÍAS – DISTRIBUCIONES INICIALES</b>	<b>83</b>
3.1 Metodología estadística	86
3.1.1 Modelo estado-medida	86
3.2.1 Muestreo de Gibbs	89
3.2 Distribuciones iniciales mínimo informativas y no informativas asociadas a los parámetros	94
3.2.1 Determinación de la distribución inicial de los parámetros cuando existe información previa	95
3.2.2 Determinación de la distribución inicial de los parámetros cuando no existe información previa	101
3.2.3 Determinación de la distribución inicial de los parámetros de la ecuación de estado $\theta_1 = (\alpha, \beta, h_w)$ con el método de Jeffreys	102
3.2.4 Determinación de la distribución inicial de los parámetros de la ecuación de estado, $\theta_1 = (\alpha, \beta, h_w)$ con el método de Zellner	109
3.2.5 Determinación de la distribución inicial de los parámetros de la ecuación de medida u observación, $\theta_2 = (q, h_v)$ , aplicando la regla de Jeffreys	118
3.2.6 Determinación de la distribución inicial de los parámetros de la ecuación de medida u observación, $\theta_2 = (q, h_v)$ , según el método de Zellner	122
3.2.7 Resumen de las distribuciones iniciales mínimo informativas y no informativas asociadas a los parámetros de las ecuaciones de estado y medida	

<b>4. APLICACIÓN DEL MODELO DE CUSHING CON PARÁMETROS AMBIENTALES</b>	<b>131</b>
4.1 Modelo de Cushing con parámetros ambientales aplicado a datos de la pesquería de la caballa en el caladero de la Región Suratlántica Española	131
4.2 Modelo de Cushing con parámetros ambientales aplicado a datos de la pesquería del boquerón en el Mar de Alborán	134
4.3 Modelo estado-medida con la función de Cushing. Distribuciones condicionales completas	138
4.4 Distribuciones a posteriori	141
4.4.1 Densidad condicional de la biomasa inicial. Generación de valores de $X_0$	142
4.4.2 Densidad condicional de las biomosas intermedias. Generación de valores de $X_t$ , para $t=1,2,\dots,T-1$	144
4.4.3 Densidad condicional de la biomasa final. Generación de valores de $X_T$	147
4.4.4 Densidad condicional del parámetro $\alpha_{mt}$ , para $t=1,\dots,T$ . Generación de valores de $\alpha_{mt}$	148
4.4.5 Densidad condicional del parámetro $\beta_{mt}$ , para $t=1,\dots,T$ . Generación de valores de $\beta_{mt}$	150
4.4.6 Densidad condicional del parámetro de la ecuación de captura.	152
4.4.7 Densidad condicional del parámetro de la precisión Asociada a los errores de proceso y observación.	158

4.5	Resultados de la estimación	160
4.5.1	Resultados para los parámetros de la ecuación de biomasa. Modelo de Cushing aplicado a los datos de caballa	160
4.5.2	Resultados para los parámetros de la ecuación de capturas. Modelo de Cushing aplicado a los datos del boquerón	164
	<b>CONCLUSIONES</b>	167
	<b>ANEXO I</b>	171
	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	173

## LISTADO DE FIGURAS

### 1. Dinámica de poblaciones explotadas: modelización

<b>Figura 1.1.</b> Pautas en la investigación pesquera.	8
<b>Figura 1.2.</b> Relación teórica entre las capturas y el esfuerzo de pesca	12
<b>Figura 1.3.</b> Relación teórica entre la captura (C) y la captura por unidad de esfuerzo (CPUE), respecto al esfuerzo de pesca (E) y puntos de rendimiento máximo sostenible (RMS).	14
<b>Figura 1.4.</b> Modelo de Russell para predecir la población capturable	17
<b>Figura 1.5.</b> Tasa de crecimiento y trayectoria del stock no explotado según el modelo de Schaefer (1954)	24
<b>Figura 1.6.</b> Crecimiento del stock explotado a esfuerzo constante	26
<b>Figura 1.7.</b> Curva esfuerzo rendimiento (1.12) y RMS en el modelo de Schaefer	28
<b>Figura 1.8.</b> Esquema general de un modelo <i>stock</i> -reclutamiento	38
<b>Figura 1.9.</b> Relación <i>stock</i> -reclutamiento de Beverton-Holt	40

<b>Figura 1.10.</b> Función <i>stock</i> -reclutamiento de Ricker	41
<b>Figura 1.11.</b> Modelo <i>stock</i> -reclutamiento de Cushing	42

## **2. Distribuciones a priori no informativas: Jeffreys y Zellner**

<b>Figura 2.1:</b> Inputs y Outputs para cualquier tratamiento de la información	49
--	----

## **4. Aplicación del modelo de Cushing con parámetros ambientales**

<b>Figura 4.1.</b> Evolución de las capturas de caballa en Punta Umbría y la temperatura media de las máximas con un retardo temporal de dos años	133
<b>Figura 4.2.</b> Evolución del esfuerzo y la CPUE de la pesquería de boquerón	136
<b>Figura 4.3.</b> Densidad inicial y final del parámetro $\alpha_0$ . Distribución inicial uniforme.	162
<b>Figura 4.4.</b> Densidad inicial y final del parámetro $\alpha_1$ . Distribución inicial uniforme.	162
<b>Figura 4.5.</b> Densidad inicial y final del parámetro $\beta$ . Distribución inicial uniforme.	163
<b>Figura 4.6.</b> Densidad inicial y final del parámetro $q$ cuando la distribución inicial es la de Jeffreys.	165
<b>Figura 4.7.</b> Densidad inicial y final del parámetro $q$ cuando la distribución inicial es la de Zellner.	165
<b>Figura 4.8.</b> Densidad inicial y final del parámetro $q$ cuando la distribución inicial es la Normal	166

## LISTADO DE TABLAS

### 2. Distribuciones a priori no informativas: jeffreys y zellner

<b>Tabla 2.1.</b> MDIP caso general parámetros localización y escala	75
--	----

### 3. Modelos bayesianos aplicados a la gestión de pesquerías – Distribuciones iniciales

<b>Tabla 3.1:</b> Distribuciones iniciales asociadas a los parámetros $\alpha$ y $\beta$	126
--	-----

<b>Tabla 3.2:</b> Distribuciones iniciales asociadas a los parámetros $\alpha$ y $\beta$ , por el método de Zellner suponiendo invarianza parcial	127
---	-----

<b>Tabla 3.3:</b> Distribuciones iniciales asociadas al coeficiente de capturabilidad $q$	128
---	-----

### 4. Aplicación del modelo de Cushing con parámetros ambientales

<b>Tabla 4.1.</b> Resultados finales de los parámetros de ecuación de biomاسas, suponiendo una distribución inicial uniforme	161
--	-----

<b>Tabla 4.2.</b> Resultados finales de los parámetros de ecuación de biomاسas, suponiendo una distribución inicial normal	161
--	-----

<b>Tabla 4.3.</b> Resultados finales de los parámetros de ecuación de biomاسas. González Galán (2004).	162
<b>Tabla 4.4.</b> Resultados finales del parámetro de la ecuación de capturas, coeficiente de capturabilidad $q$ .	164

## **ANEXO I**

<b>TablaA.1.1.</b> Capturas, Esfuerzo observado en la pesquería del boquerón y Temperaturas SST Julio y Cociente SST Febrero y Julio.	171
<b>Tabla A.1.2</b> Capturas, Esfuerzo observado en la pesquería de caballa en la Región Suratlántica Española y Temperatura media de las máximas de la temporada de pesca con un retardo de dos años.	172

## INTRODUCCIÓN

La estimación bayesiana de modelos de espacio de estados es un área activa de investigación en el campo de la evaluación de recursos pesqueros y cuya principal característica es la inobservabilidad de la dimensión del stock en cada momento. Este enfoque trata de estimar un modelo de espacio de estados, que en general será no lineal, diseñado para describir la dinámica de una población explotada, describiendo de forma natural la incertidumbre que hay acerca de parámetros claves de la población.

La aproximación bayesiana determina las probabilidades de hipótesis alternativas usando información que proviene del stock en cuestión, y que aparece en la forma de la función de verosimilitud asociada a los datos disponibles, sin embargo, como objeción a este enfoque, la aplicabilidad del método reside en la disponibilidad de distribuciones a priori de los parámetros y de la biomasa inicial, y de la posibilidad de obtener las distribuciones condicionales completas mediante la aplicación del Teorema de Bayes.

Con respecto a las distribuciones a priori, se puede hablar de dos tipos de distribuciones: informativas y no informativas. Box y Tiao (1973) definen una distribución a priori no informativa – también llamadas de referencia - como aquella que proporciona muy poca información en relación al experimento que se esté estudiando, es decir, se pretende dejar que los datos hablen por sí mismos sin establecer un juicio previo sobre cuál va a ser su comportamiento, el problema que suelen presentar estas distribuciones es que son muy sensibles a los sistemas de medida.

Por otra parte, una distribución a priori informativa permite incorporar información disponible sobre el comportamiento del stock, por ejemplo, a partir de otros estudios estadísticos con stocks de similares características, que no están basados en la información muestral que se quiere analizar, o por la propia valoraciones de expertos<sup>1</sup>, con lo que puede que su definición influya en los resultados que vayan a obtenerse.

No hay un consenso en cuanto al uso de uno u otro tipo de distribuciones, algunos autores recomiendan tomarlas no informativas por defecto (Walters y Ludwig, 1994), mientras que otros consideran que, siempre que sea posible debe incluirse el conocimiento histórico o la experiencia con otros stocks a la hora de determinarlas, por ejemplo Punt y Hilborn (1997).

Entre las técnicas que se utilizan para construir distribuciones a priori no informativas podemos citar a Jeffreys (1967), Zellner (1971), Box y Tiao (1973) o Bernardo (1979).

---

<sup>1</sup> Por ejemplo IWC (1995)

El propósito de este trabajo es abordar el problema de la elección de una distribución a priori no informativa, aplicando un criterio formal o lo más objetivo posible, y que sea adecuada para que, una vez elegidos los modelos que describen la dinámica asociada a los recursos pesqueros, se puedan realizar análisis bayesianos paramétricos. Para cumplir este propósito hemos optado por dividir este trabajo en cuatro capítulos. En el primero se realiza una descripción de los modelos dinámicos que tratan de explicar la evolución de los recursos pesqueros para llegar a modelos formulados en tiempo discreto que permitan la aplicación de las técnicas bayesiana.

En el segundo capítulo abordamos la descripción de los métodos de determinación de distribuciones iniciales no informativas que se puedan aplicar a bases de datos finitas, veremos de forma resumida la técnica de Jeffreys (1967), que se basa en la información de Fisher (1922) para determinar las distribuciones a priori, y desarrollaremos con más extensión la técnica de Zellner (1971, 1977, 1996, 1997), que se basa en la utilización de la entropía o medida de información de Shannon (1948). De Shannon también tendremos en cuenta el *método de máxima entropía* por el que determina distribuciones iniciales mínimo informativas, y que serán las más indicadas cuando queramos realizar estimaciones de las variables inobservables, pero partiendo de información inicial sobre los parámetros referida a su valor esperado y a su precisión.

Ya en el tercer capítulo nos planteamos técnicas bayesiana para estimar los parámetros de modelos concretos donde se combinan funciones de crecimiento de la pesquería (relaciones stock-reclutamiento) con funciones que caracterizan la influencia de la actividad humana sobre la pesquería (funciones

de capturas). Vamos a determinar las distribuciones iniciales no informativas o mínimo informativas según las condiciones de partida, aplicando los métodos descritos en el capítulo 2. Las funciones de stock-reclutamiento que consideraremos son las desarrolladas por Ricker (1954), Beverton-Holt (1957) y Cushing (1971).

Una vez definidas las distribuciones a priori se estiman los parámetros mediante una técnica basada en los métodos bayesianos conocida como Muestreo de Gibbs, que es una modificación del algoritmo de Metropolis (1953), desarrollado por Geman y Geman (1984). Posteriormente Tanner y Wong (1987) y Gelfand y Smith (1990) han hecho extensivo su uso para la resolución de diversos problemas en un entorno bayesiano.

Entre las diversas aplicaciones sobre la estimación de modelos estado-medida no lineales asociados a la evolución de recursos pesqueros cabe destacar las que han desarrollado García del Hoyo (1995), García Ordaz (1999) o González Galán (2004) que incorpora datos ambientales en los modelos de reclutamiento del stock de la caballa en la Región Suratlántica Española. En este sentido, los datos que finalmente hemos utilizado en la aplicación provienen de los trabajos desarrollados por García del Hoyo (2007) y González Galán (2004) dada la imposibilidad de acceder a series de datos de gestión de pesquerías de las especies que nos interesan a partir de 2007.

Por último, este trabajo se cierra con un apartado de conclusiones donde se recogen los resultados de la investigación, así como las líneas futuras de trabajo que pretendemos seguir.

Quiero agradecer especialmente a Profesor García del Hoyo, Director y Maestro de esta investigación, su ayuda para enfocar esta investigación así como el apoyo y la confianza en mí. Los errores u omisiones de este trabajo son de mi exclusiva responsabilidad.

También quiero agradecer el apoyo de los compañeros del Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, Estadística e Investigación Operativa de la universidad de Huelva, en especial a María Dolores González Galán y a Mónica Ortega Moreno, por su apoyo y ayuda para realizar este trabajo.

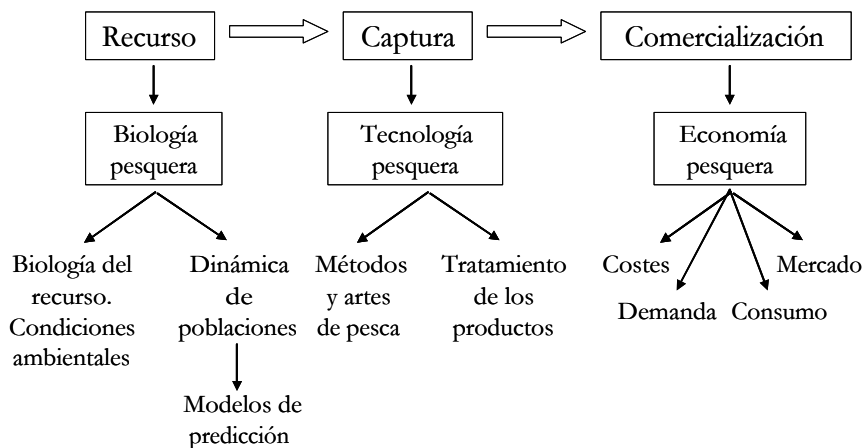
# **DINÁMICA DE POBLACIONES EXPLOTADAS: MODELIZACIÓN**

# **1**

La aplicación de los métodos de investigación científica al conocimiento de los recursos marinos conforma una ciencia cuyo fin último es conocer de qué manera cambian estos recursos en su distribución y composición, y los efectos de estos cambios sobre las capturas y, como consecuencia, sobre la propia evolución del recurso por una parte, y sobre el perfil económico y social del sector de población que se dedica a la actividad pesquera por otra.

Esta ciencia, que también se denomina “investigación pesquera”, considera la pesca como un sistema total, estudiando no solamente las características biológicas del recurso natural que se explota y la influencia del medio ambiente donde se desarrolla, sino que también se toman en cuenta las actividades relacionadas con las técnicas que se emplean para la captura, elaboración y almacenamiento de los productos, lo que en conjunto se recoge como investigación en tecnología pesquera. Se añaden además las investigaciones relativas a la economía pesquera, cuyo objetivo consiste en determinar la rentabilidad asociada a la actividad pesquera, incluyendo el análisis de los costes asociados a dicha actividad, así como del mercado real y potencial de los productos finales (figura 1.1).

El contenido de este capítulo se incluye en la investigación relativa a la biología pesquera. De forma general estos estudios están orientados a entender el ciclo de vida del recurso, para poder establecer *dónde, cuándo* y *cuánto* se puede pescar, y así calcular los niveles admisibles de captura de cada stock y poder predecir los cambios que se producen en la disponibilidad del recurso.



**Figura 1.1.** Pautas en la investigación pesquera.

La descripción dinámica de una población explotada se realiza mediante modelos matemáticos que intentan resolver, de forma cuantitativa, el problema de la estimación de la máxima captura de equilibrio.

Inicialmente los modelos que se han formulado para conocer la dinámica de las poblaciones explotadas utilizaban una única fuente de datos, por ejemplo, el análisis de población virtual (VPA) era el preferido si

se disponía de una serie lo suficientemente amplia de datos de capturas por edad.

Cuando se puede contar con más de una fuente de datos, también se utilizan múltiples métodos de evaluación de las pesquerías, y se comparan los resultados, un caso sería comparar los resultados del análisis virtual de poblaciones (VPA), que utiliza datos de capturas por edad, con los que se obtienen a partir de los modelos de producción de Schaefer, que se basan en datos de esfuerzo pesquero y capturas.

Otras veces, los resultados de algunos métodos se utilizan como inputs para otros métodos, las estimaciones con un análisis VPA se pueden aplicar para calcular datos de stock y reclutamiento, que se usan en los análisis de stock-reclutamiento, o los parámetros de crecimiento que se obtienen con el análisis de crecimiento de individuos marcados se utilizan en los análisis de rendimiento por recluta.

A pesar de hay conexiones entre los métodos de valoración de las pesquerías, hasta muy recientemente no se han combinado para desarrollar otros modelos más complejos, un ejemplo de ello está en los métodos iniciales de análisis de población virtual (VPA) (Gulland, 1965; Pope, 1972) que asumían que los datos de captura por edad contaban con un error que se consideraba despreciable, pero no usaban la información que podrían haber añadido al analizar varias cohortes simultáneamente.

El desarrollo de métodos estadísticos que combinan varias fuentes de información en un único análisis comenzó en el contexto de los análisis

de las capturas por edad (Fournier and Archibald, 1982; Deriso et al., 1985; Gavaris, 1988; Methot, 1990) y es lo que Maunder y Punt (2013) denominan “Análisis Integrado”.

Por otro lado, cada vez es más común el uso de técnicas bayesianas (García del Hoyo, 1995; Punt and Hilborn, 1997; McAllister and Kirkwood, 1998; González Galán, 2004). Los métodos bayesianos pueden utilizar la información que no es específica de la población que está siendo evaluada, sino que puede incorporar la de otras poblaciones y especies, o contar con la opinión de expertos. Esta información se incluye, por lo general, como distribuciones de probabilidad a priori o previa para los parámetros del modelo.

La estimación a partir de técnicas bayesianas se ha aplicado a partir de la mayoría de los modelos de evaluación de pesquerías, como el modelo de equilibrio de Schaefer (Hoenig et al., 1994), los modelos de stock-reclutamiento (García del Hoyo, 1995; González Galán, 2004), el modelo dinámico de Schaefer (McAllister y Kirkwood, 1998), el modelo de Pella-Tomlinson (Maunder et al., 2000), VPA (Walters and Punt, 1994), Análisis de reducción de stocks (McAllister et al., 1994), modelos de diferencias con un retardo (Meyer and Millar, 1999), modelos estadísticos de capturas por talla (longitud) (Punt and Kennedy, 1997), o modelos estadísticos de capturas por edad (McAllister y Ianelli, 1997; Maunder y Starr, 2001; Parma, 2001).

Los métodos que se han utilizado para generar distribuciones iniciales para los parámetros pueden incluir modelos demográficos

(Maunder, 2003b; McAllister et al., 2001), Meta-analyses (Hilborn and Liermann, 1998; Myers et al., 1999), o valoraciones de expertos (IWC, 1995). Según Punt y Hilborn (1997) las distribuciones a priori, por lo menos para algunos parámetros, pueden asumirse como no-informativas.

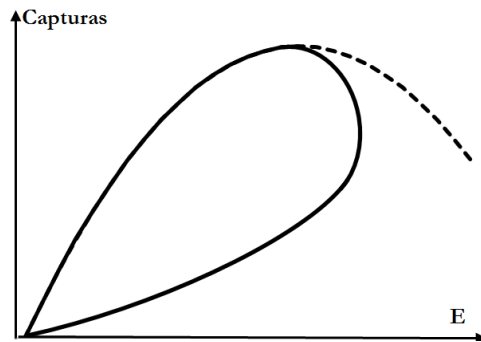
El uso de técnicas bayesianas también permite tener en cuenta la incertidumbre que hay sobre la estructura de las poblaciones bajo análisis (Sainsbury, 1988; Patterson, 1999; Parma, 2001; Brandon and Wade, 2006).

En este primer capítulo presentamos una síntesis de los modelos básicos que explican la dinámica de las poblaciones pesqueras, realizando un desarrollo algo amplio en relación a los modelos de *stock-reclutamiento*.

### **1.1. Rendimiento máximo sostenible.**

Una de las características de las poblaciones marinas es que son recursos renovables, con lo cual la incorporación de nuevos individuos, producto de la reproducción de las especies, compensa las pérdidas causadas por la mortalidad que les afecta. Hay que tener en cuenta que el equilibrio natural de las especies se ve afectado por la explotación pesquera, que produce un nuevo equilibrio en el sistema, pero dejando el nivel de recursos inferior al natural. La diferencia entre el equilibrio natural y el producido por la acción del hombre depende del grado de eficacia y la intensidad de la actividad pesquera.

Si los niveles de esfuerzo o intensidad pesquera son muy elevados, la biomasa se puede situar en niveles críticos, de manera que la capacidad de renovación de la población sea demasiado pequeña como para poder soportar las pérdidas generadas por la actividad de la pesca, llevando al colapso a la pesquería. Llegados a este extremo, aunque se experimenten disminuciones del esfuerzo de pesca no es posible obtener los mismos valores de captura que antes de la sobreexplotación del stock (figura 1.2).



**Figura 1.2.** Relación teórica entre las capturas y el esfuerzo de pesca (E)<sup>1</sup>.

En cuanto al esfuerzo pesquero, determinarlo y cuantificarlo no es nada sencillo ya que estará vinculado al tipo de pesquería que se está analizando así como al método de pesca que se aplique, teniendo esto en cuenta puede medirse por el número de barcos que componen la flota, por el número de pescadores, por el número de días de pesca, por el número de anzuelos o por otras variables medibles. Como ejemplos de valoración

---

<sup>1</sup> La relación en forma de bucle demuestra cómo la intensidad de pesca tan elevada provoca que la población pierda la capacidad de autorenovación y sigue una tendencia decreciente, a pesar de que el esfuerzo de pesca disminuya, con lo se obtienen capturas menores a las obtenidas con el mismo esfuerzo antes de la sobrepesca del stock (Clark, 1990, p.20)

del esfuerzo pesquero pueden consultarse Gulland (1983), Ricker(1975) o González Galán (2004)<sup>2</sup>

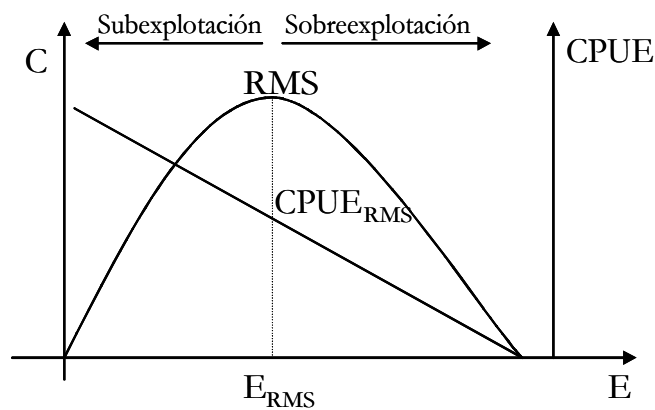
El principal objetivo de la gestión de las pesquerías es sostener o conservar las producciones y los beneficios que se obtienen con la explotación pesquera a lo largo del tiempo. Dado que los recursos explotados son renovables, el primer paso debe estar encaminado a mantener las poblaciones en unos niveles lo suficientemente elevados como para asegurar la autorenovación. Con este fin se han desarrollado algunos métodos con el objetivo de determinar las políticas de explotación óptimas de forma que puedan situar al stock de recursos en un nivel de equilibrio tal que, permaneciendo constante, genere la mayor captura posible. A esta captura se le llama *captura o rendimiento máximo sostenible*.

El concepto de *Rendimiento Máximo Sostenible* (RMS) está basado en un modelo de crecimiento biológico que supone que para cualquier población dada que esté por debajo de un cierto nivel, existe un excedente de producción que puede ser capturado indefinidamente sin que se altere el nivel de stock de la población. Si no se captura este excedente, se produce un incremento en el nivel de stock llegando a aproximarse al tamaño máximo de población que admite el medio y para el que el excedente es nulo. La aplicación de esfuerzos mayores al del nivel del RMS provoca la sobreexplotación del stock, mientras que con esfuerzos menores el stock se encontraría subexplotado (figura1.3).

---

<sup>2</sup> Realiza un amplio análisis para determinar el esfuerzo pesquero sobre la pesquería de la caballa durante el período 1973 a 2000 en la Región Suratlántica Española. pp 129-162.

Considerando que el excedente de producción es igual al rendimiento sostenible para cada nivel de población, se llega a que el RMS se logra en el nivel de población donde el excedente es el máximo posible, es decir, el nivel donde la tasa de crecimiento para la población se maximiza.



**Figura 1.3.** Relación teórica entre la captura (C) y la captura por unidad de esfuerzo (CPUE), respecto al esfuerzo de pesca (E) y puntos de rendimiento máximo sostenible (RMS)<sup>3</sup>.

En cuanto a la sobrepesca o sobreexplotación de un stock, se puede diferenciar entre sobreexplotación en términos de crecimiento (no se respetan las tallas mínimas, con lo que los individuos no pueden alcanzar la talla normal) o por fallos de reclutamiento (el reclutamiento se encuentra a niveles por debajo de los requeridos para sostener el stock); una de las

<sup>3</sup> García del Hoyo (1995).

causas de este tipo de sobrepesca puede deberse a una relación densidad dependiente entre los individuos reclutados cada año y el tamaño del stock, siendo frecuente en especies cuya fecundidad es baja. En algunas situaciones pueden coincidir ambos tipos de sobreexplotación, con lo que la situación de los stocks puede ser crítica.

## **1.2. Formulación de modelos sobre la dinámica de las poblaciones explotadas.**

Estos modelos tienen en común que consideran el stock de recursos como un sistema dinámico abierto. Por una parte, los individuos que componen la población se rigen por un conjunto de relaciones entre sí y con el medio que les rodea que implican un proceso continuo de interacción, ajuste y regulación. Esto lleva a que la población esté en continua evolución y a que existan algunos procesos irreversibles. Otra característica de estos sistemas es que sólo pueden alcanzar, bajo ciertas condiciones, cierta estabilidad en el tiempo. El hecho de que el comportamiento de los componentes del stock dependa de las relaciones que los vinculan hace que las ecuaciones que expliquen los cambios o alteraciones en estos sistemas dependan de todos sus componentes.

El primer modelo que analiza el problema de forma global fue el desarrollado por Russell (1931), en el que considera que la población se mantiene estable si los incrementos coinciden con los decrementos. Con ello obtiene los factores primarios que determinan la variación en peso de

una población cerrada, es decir, en la que no se consideran variaciones debidas a las migraciones.

La formulación de este modelo se lleva a cabo en los siguientes términos: sean  $S_1$  el peso de la población capturable al inicio del período (población natural) y  $S_2$  la biomasa al final del mismo período. La relación entre ambas se puede expresar como

$$S_2 = S_1 + (G + R) - (C + M) \quad (1.1)$$

donde los factores que intervienen en la dinámica de la población son:

- a) El *Reclutamiento* ( $R$ ) de individuos a la fase explotada, formado por aquella parte de la población joven que se incorpora al stock adulto y que han alcanzado la talla suficiente para ser capturados.
- b) El *Crecimiento* ( $G$ ) de los individuos de dicha fase, que recoge el crecimiento en peso de la biomasa.
- c) La *Captura* ( $C$ ) por pesca de algunos individuos.
- d) La *Mortalidad Natural* ( $M$ ). Se considera por muerte natural a la causada por cualquier fenómeno ajeno a la actividad pesquera. Entre estos fenómenos se pueden distinguir los relacionados con factores ambientales e independientes de la población adulta (como los cambios climáticos), y que se denominan densidad-independientes; y los ocasionados por efecto del canibalismo o predación por parte de la población adulta, o también por la escasez y consecuente

competitividad por los alimentos, considerándose fenómenos densidad-dependientes<sup>4</sup>.

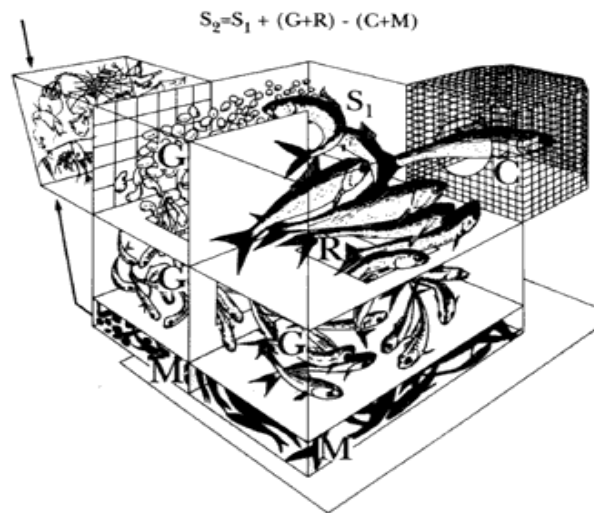


Figura 1.4. Modelo de Russell para predecir la población capturable.<sup>5</sup>

Otra forma de expresar la variación en peso de la población es:

$$S_2 - S_1 = (G + R - M) - C \quad (1.2)$$

siendo  $R+G-M$  la tasa de crecimiento natural de la población en el período de estudio, independiente de la acción del hombre, mientras que la actividad pesquera se representa por el peso de las capturas  $C$ .

La captura de equilibrio es aquella que no altera el tamaño del stock y según la relación (1.2) debe ser  $C=R+G-M$ , con lo que para determinar la

<sup>4</sup> Un análisis detallado sobre los factores primarios puede consultarse García del Hoyo (1995), pag. 91-104.

<sup>5</sup> Cifuentes *et al.* (1995).

máxima captura de equilibrio bastará con estimar el valor del sumando ( $R+G-M$ ) para los distintos tamaños ( $S_i$ ) del stock.

En cuanto a la formulación de modelos de análisis de poblaciones explotadas, Maunder y Punt (2012) consideran que los principales son:

- **Modelos de Producción de Schaefer** (Schaefer, 1954; Pella y Tomlinson, 1969):

Utilizan series temporales de datos de captura y esfuerzo para reconstruir la trayectoria de la biomasa de la población. Se consideran *Modelos Agregados o Descriptivos* ya que valoran la tasa de crecimiento ( $R+G-M$ ) como un todo, sin separar los factores primarios.

Observaciones:

- Los datos necesarios para aplicar estos modelos son los de capturas y esfuerzo pesquero.
  - Estos métodos no consideran la estructura del stock por edades, sino que ajustan los cambios en la biomasa de un año en función de la biomasa del año anterior.
- **Análisis de stock-reclutamiento** (Ricker, 1954; Beverton y Holt, 1957)  
Son modelos de análisis dinámico en los que tiene en cuenta el comportamiento estacional presente en muchas especies explotadas y el hecho de que la actividad pesquera se limita muchas veces a períodos concretos del año o temporadas de pesca. Estiman la relación entre el stock y el reclutamiento para lo que requiere tener datos del tamaño del stock y del reclutamiento para una serie de años. Se clasifican como

*Modelos Analíticos* en los que se estiman separadamente cada uno de los factores primarios. En estos modelos los parámetros se deducen de los cambios observados en la población real.

▪ **Análisis del rendimiento por recluta** (Beverton y Holt, 1957)

Utiliza la información sobre la mortalidad natural, las tasas de crecimiento, y la pesca selectiva por edad para determinar tasas de capturas óptimas y la edad óptima para formar parte de la pesquería, basándose en modelo dinámico de la población estructurada por edad.

Observaciones:

- Las estimaciones que se obtienen con el análisis del rendimiento por recluta ignoran cualquier relación población-reclutamiento y las tasas de capturas resultantes se comparan a menudo con las tasas que se obtienen con otros análisis de la población, por ejemplo análisis virtual.
- A partir del análisis del rendimiento por recluta no se pueden obtener estimaciones absolutas de la biomasa.

▪ **Análisis de cohortes** (Pope, 1972) y **Análisis de Población Virtual** (Gulland, 1965):

Se llama cohorte a los peces nacidos en el mismo período, normalmente dentro de un mismo año. Estos modelos trabajan con series temporales de datos de capturas por edad, para estudiar la evolución de las capturas de una cohorte a medida que envejece con el tiempo. Se

consideran una continuación de los modelos analíticos en los que se estiman separadamente cada uno de los factores primarios.

Observaciones:

- Los datos que necesitan son los de capturas por edad.
- Las cifras iniciales de una cohorte se calculan como la suma de las capturas totales de esa cohorte en conjunción con una estimación de la tasa de mortalidad natural. El tamaño de la población total anual se calcula como la suma de los tamaños de todas las cohortes.
- Los outputs (reclutamiento y biomasa) se suelen usar como inputs para los análisis de stock-reclutamiento.

Hay bastantes limitaciones a la hora de usar estos métodos debido al coste y la complejidad para obtener clasificaciones de datos por edad, además suelen ser poco fiables a menos que se utilice información auxiliar (Pope y Stokes, 1989; Rivard, 1989). ADAPT-VPA (Gavaris, 1988) o métodos de reajustes (Laurec y Shepherd, 1983) son las formas más comunes para incluir información auxiliar en un análisis de captura por edad.

Otros análisis se realizan a partir de individuos que tras ser capturados son marcados y devueltos a la libertad, entre estos se citan

- **Análisis de datos marcados de Petersen** (Petersen, 1896):  
Utiliza el número de individuos que se marcan y se liberan, el tamaño total de la muestra, y el número de marcas que se recuperan para estimar el tamaño poblacional. Trabaja con el número de peces liberados y recapturados.

- **Análisis de crecimiento de individuos marcados** (Fabens, 1965)  
Se basa en los incrementos en el crecimiento de los individuos marcados para estimar las tasas de crecimiento. Talla de liberación, la longitud de recaptura, y el tiempo en libertad. Estas estimaciones sobre el crecimiento se utilizan a menudo como inputs en el análisis de rendimiento por recluta.

La mayoría de los textos sobre pesquerías contienen análisis más amplios de estos modelos (Hilborn y Walters (1992); Quinn y Deriso (1999); Haddon (2001). Vamos a exponer la evolución de los modelos descriptivos o agregados hasta llegar a los modelos de stock-reclutamiento, que al formularlos en tiempo discreto permiten la aplicación de las técnicas bayesianas.

### **1.3. Modelos descriptivos o agregados.**

Los modelos agregados consideran la influencia conjunta de los factores naturales ( $R$ ,  $G$  y  $M$ ) en la dinámica de la población y representan mediante una función adecuada esta influencia, además suponen implícitamente una densidad-dependencia para la tasa de variación de la población.

Denotaremos por  $x(t)$  al nivel de la biomasa de la población en un instante dado  $t$ . La tasa de crecimiento de la población dependiente del

tamaño actual del stock se puede representar mediante una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F[x(t)] \quad (1.3)$$

donde  $F[x(t)]$  es la función de crecimiento natural dependiente del tamaño actual del stock y definida para valores de  $x(t)$  mayores que cero. Generalmente se supone que  $F[x(t)]$  presenta dos valores extremos  $x_0(t)$  y  $x_1(t)$ , de forma que:

$$\begin{aligned} F[x(t)] &\leq 0 & \text{si } 0 \leq x(t) \leq x_0(t) \\ F[x(t)] &> 0 & \text{si } x_0(t) < x(t) < x_1(t) \\ F[x(t)] &\leq 0 & \text{si } x(t) \geq x_1(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Para definir la función de crecimiento  $F[x(t)]$  se utilizan curvas cuya integral tiene forma sigmoidea, es decir, inicialmente presentan un crecimiento mayor que proporcional y posteriormente menor que proporcional, aproximándose asintóticamente a un nivel máximo de población. Esta evolución está presente en la mayoría de las poblaciones de peces, cuyo tamaño está limitado por la capacidad del medio que sustenta a los individuos.

### 1.3.1. Modelo General de Producción de Schaefer.

El modelo de Schaefer (1954) considera una variable independiente, el tiempo  $t$  (años) y cuatro variables dependientes o funciones del tiempo:

*Biomasa de la población  $x(t)$  (Tm)*

*Tasa de esfuerzo de pesca  $E(t)$  (Barcos-día/año)*

*Tasa de captura  $C(t)$  (Tm/año)*

*Tasa de captura por unidad de esfuerzo (CPUE)  $U(t)$  (Tm/Barcos-día)*

Mientras que los parámetros que se que se estiman son:

*Tasa intrínseca de crecimiento  $r$  (1/años)*

*Capacidad soportable  $K$  (Tm)*

*Coefficiente de capturabilidad  $q$  (1/Barcos-día).*

Schaefer considera el término  $R+G-M$  de la ecuación de Russell como una función continua de la biomasa (tamaño del stock de peces)  $x(t)$ , expresando la tasa de crecimiento de la población mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F[x(t)] = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) \quad (1.5)$$

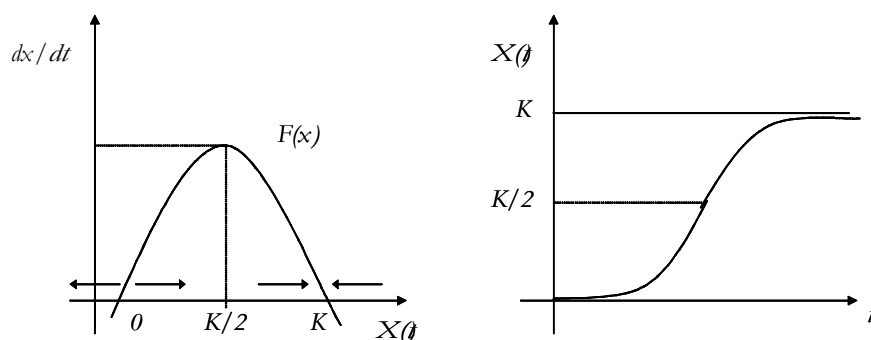
siendo la curva solución a esta ecuación:

$$x(t) = \frac{k}{1 - A^{-rt}} \quad (1.6)$$

donde  $A$  se obtiene a partir de las condiciones iniciales, tomando el valor  $A = \frac{x(0)-k}{x(0)}$  (figura 1.5).

La constante  $r$  (tasa intrínseca de crecimiento) es un parámetro característico de cada especie, mientras que  $K$  es el tamaño máximo

asintótico que puede alcanzar la población en el medio en el que se encuentra, de ahí el nombre capacidad soportable o sostenible, siendo una característica propia del medio para cada especie.



**Figura 1.5.** Tasa de crecimiento y trayectoria del stock no explotado según el modelo de Schaefer (1954)<sup>6</sup>.

Un punto de equilibrio es aquel para el que  $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ , en este caso existen dos puntos de equilibrio para los valores  $x(t)=0$  y  $x(t)=K$ . El primero de ellos es un punto de equilibrio inestable ya que la trayectoria temporal tiende a alejarse de él en ambos sentidos, sin embargo el punto  $x(t)=K$  es un equilibrio asintóticamente estable ya que coincide con el valor límite de la población cuando  $t$  tiende a infinito.

En el modelo de crecimiento de la población considerado hasta ahora sólo han intervenido factores naturales y no intervienen factores que dependan de la acción del hombre. Veamos cómo cambia el modelo si la

<sup>6</sup> Clark (1990), p. 17.

---

población del recurso se encuentra sometida a explotación a una tasa de captura  $C(t)$ .

La tasa de crecimiento se puede representar mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F[x(t)] - C(t) \quad (1.7)$$

donde  $F[x(t)]$  es la función de crecimiento natural definida en (1.4) y  $C(t)$  es la tasa anual de capturas.

Según Schaefer,  $C(t)$  es proporcional al tamaño del stock  $x(t)$  y a una tasa de mortalidad por pesca dependiente del esfuerzo que se efectúe ( $E(t)$ ). Si denotamos la tasa de mortalidad por  $Q[E(t)]$ , la tasa de capturas se puede expresar como:

$$C(t) = Q[E(t)]x(t) \quad (1.8)$$

Además supuso que la mortalidad por pesca era directamente proporcional al esfuerzo pesquero, con lo que se tendría:

$$Q[E(t)] = qE(t) \quad (1.9)$$

donde  $q$  es una constante que depende de la eficiencia de la actividad pesquera y representa el *coeficiente de capturabilidad*.

El análisis de Schaefer trata, en primer lugar, de determinar la captura en equilibrio  $C(t)$  que permita mantener el nivel de población en equilibrio, considerando que los niveles de esfuerzo son constantes, es

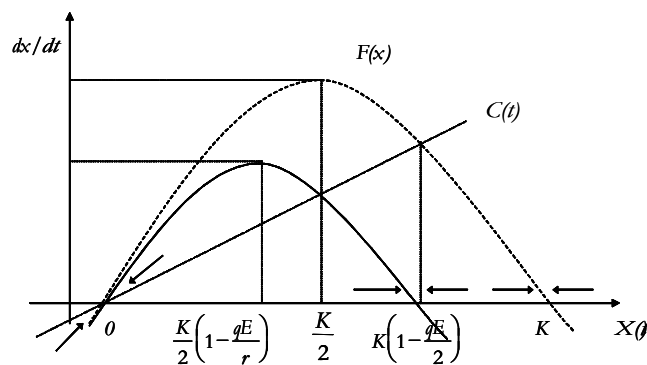
decir  $E(t)=E$  en cualquier instante  $t$ . El equilibrio se alcanza cuando  $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ , o lo que es lo mismo,  $F[x(t)]=C(t)$ . Si tenemos en cuenta las ecuaciones anteriores debe verificarse:

$$rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) = qEx \tag{1.10}$$

despejando  $x$  de esta igualdad se obtiene la población de equilibrio o población de equilibrio sostenido en función del esfuerzo ejercido, siendo su valor:

$$x = K \left(1 - \frac{qE}{r}\right) \tag{1.11}$$

En la representación gráfica de  $F(x)$  y la recta  $C(t)$  (Figura 1.6) se observa que el punto de corte es el definido por (1.11), y cómo la curva que representa el crecimiento del stock experimenta una reducción a causa de la actividad pesquera.



**Figura 1.6.** Crecimiento del stock explotado a esfuerzo constante.<sup>7</sup>

<sup>7</sup> García del Hoyo (1995, pag. 123).

---

Sustituyendo este valor en la ecuación (1.7) se obtienen las capturas de equilibrio dependientes de los distintos niveles de esfuerzo, a esta función de rendimientos sostenidos se le llama curva esfuerzo-rendimiento, siendo su expresión:

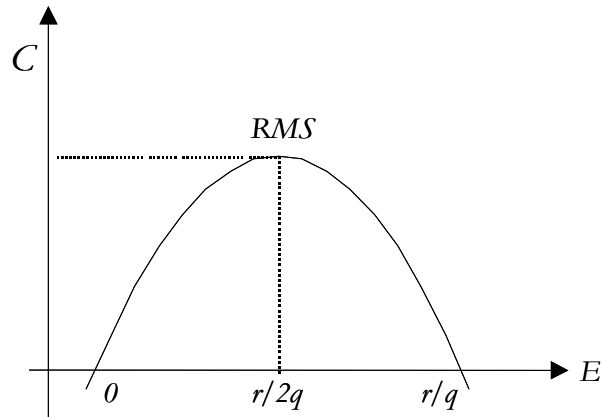
$$C = qEK \left(1 - \frac{qE}{t}\right) \quad (1.12)$$

### Conclusiones del modelo general de Schaefer.

La captura sostenible será cero siempre que la tasa instantánea de mortalidad por pesca  $Q(E)=qE$  sea igual o mayor que la tasa intrínseca de crecimiento  $r$ , si esto ocurre la población tenderá asintóticamente al equilibrio  $x=0$ , con lo que se llegaría a la extinción del recurso.

Sin embargo, con una regulación adecuada del esfuerzo que se ejerce, se puede mantener el stock en un nivel deseado, manteniendo el equilibrio sobre la curva de esfuerzo-rendimiento. A largo plazo, el objetivo del gestor de pesquerías sería mantener las capturas en el máximo de la función o *Rendimiento Máximo Sostenible (RMS)*, ya definido en el apartado 1.2.

La mayoría de los investigadores considera que una pesquería está sobreexplotada cuando los niveles de biomasa son inferiores a los que se obtendrían con el *RMS* para un nivel de esfuerzo dado. En este caso el objetivo de la gestión es recuperar los niveles de stock regulando el esfuerzo ejercido.



**Figura 1.7.** Curva esfuerzo rendimiento (1.12) y RMS en el modelo de Schaefer<sup>8</sup>

Utilizando la expresión (1.10), para el esfuerzo correspondiente al Rendimiento Máximo Sostenible,  $E_{RMS}=r/2q$ , se obtiene una biomasa  $x_{RMS}=K/2$ , éste es el nivel en el que el recurso podría mantenerse indefinidamente proporcionando el mayor rendimiento posible (figura 1.7).

En el caso en que el esfuerzo fuera nulo, lo que equivale a la ausencia de explotación, el recurso tiende asintóticamente a mantenerse en el equilibrio estable  $x=K$ , pero si el esfuerzo es igual o superior al valor máximo  $E=r/2q$ , la población tiende a largo plazo a la extinción como consecuencia de la sobreexplotación biológica del recurso.

---

<sup>8</sup> Clark (1990), p.16.

**Consideración dinámica del esfuerzo.**

En el modelo descrito hasta ahora se considera que el nivel de recursos no afecta a la evolución del esfuerzo que se ejerce, es decir, son independientes, lo que lleva a una pérdida considerable de generalidad. La realidad es que la variación del esfuerzo de pesca depende de la rentabilidad que obtengan los pescadores, permaneciendo éstos en una pesquería sólo si sus beneficios se mantienen por encima de un cierto nivel que depende de los costes de explotación.

El propio Schaefer (1954) consideró la dinámica del esfuerzo ejercido sobre el recurso como una función dependiente del stock y de otros parámetros; y junto al modelo general de producción, obtuvo el siguiente modelo dinámico no lineal:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= rx(t) - \frac{r}{K}x(t)^2 - qx(t)E(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \alpha E(t)(x(t) - \beta) \end{aligned} \tag{1.13}$$

donde  $\beta$  representa el nivel crítico de la población para el que ninguna inversión adicional en esfuerzo resulta rentable, y  $\alpha$  es un nuevo parámetro del modelo. En este sistema se considera el esfuerzo como una parte predatora del recurso y es básicamente un modelo depredador-presa.

### 1.3.2. Otros modelos descriptivos.

El modelo de Schaefer consideraba que el crecimiento natural seguía una trayectoria logística, lo que implicaba una simetría respecto al punto de inflexión  $K/2$  (valor del recurso en el que la tasa de crecimiento alcanzaba el valor máximo). Sin embargo, la mayoría de las especies sometidas a explotación pesquera presentan una asimetría muy clara en dicha curva, obteniéndose el valor máximo para la tasa de crecimiento en  $x(t) < K/2$ . Esto da lugar a la aparición de modelos alternativos al de Schaefer que intentan solucionar este problema y entre los que se pueden citar:

- Pella y Tomlinson (1969) que generalizaron el modelo de Schaefer mediante una familia de curvas logísticas, expresando  $F(x)$  mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) - \frac{r}{K}x(t)^m \quad (1.14)$$

- Fox (1970) en vez de usar una logística para representar la tasa de crecimiento natural, optó por una curva Gompertz de la forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) - \frac{r}{K}x(t)\ln x(t) \quad (1.15)$$

- Walter (1973) adaptó los modelos anteriores considerando la existencia de retardos a causa de la reproducción, con lo que la función de crecimiento natural de Schaefer se transforma en la expresión:

---

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) - \frac{r}{K}x(t)^2 - lnx(t)x(t-w) \quad (1.16)$$

## 1.4 Modelos Analíticos.

Un inconveniente que tienen los modelos descriptivos o agregados es que al no explicar de forma separada los factores primarios de la ecuación de Russell, tampoco pueden explicar los fenómenos relacionados con cada factor, con lo que se les achaca de una falta de realismo en el sentido biológico. Por ejemplo, no sirven para explicar los fenómenos derivados de la selectividad de las artes, los cuales están estrechamente relacionados con el proceso de crecimiento de los individuos que componen el stock del recurso. A pesar de ello, en algunas circunstancias, los modelos de producción general pueden proporcionar mejores resultados que los modelos estructurados por edad (Ludwig y Walters , 1985 y 1989).

Los modelos analíticos solucionan las carencias que presentan los modelos agregados al describir de forma separada cada uno de los factores que intervienen en la evolución del stock de recursos pesqueros, es decir, se tienen en cuenta aspectos como la mortalidad natural, el crecimiento y, en cierto grado, el reclutamiento; sin embargo no se considera al recurso en conexión con el medio que le rodea con lo que se deja fuera el aspecto ecológico, ello se debe fundamentalmente a la cantidad tan enorme de parámetros que habría que tener en cuenta.

Una característica común a estos modelos es que casi siempre se considera que la tasa de mortalidad natural ( $M$ ) es constante e independiente de la edad y de la densidad de población<sup>9</sup>. Estos modelos se refieren a numerosidades (número de individuos que componen una población) y no a la biomasa.

#### **1.4.1 Modelo de Beverton-Holt.**

El modelo de Beverton-Holt (1957) parte de considerar la población de pesca formada por un número de distintas clases anuales o cohortes, como resultado de la freza anual y consiguiente reclutamiento.

En primer lugar se desarrolla teniendo en cuenta una única cohorte o clase anual, para la que se denotará por  $N(t)$ , con  $t \geq 0$ , al número de peces que están vivos en el instante  $t$ .

Para simplificar se considera que  $t=0$  corresponde al momento de reclutamiento de la cohorte (es decir, el momento en que los componentes de la cohorte tienen la talla suficiente para que puedan ser capturados por primera vez). Así  $t$  representa la edad de post-reclutamiento, que se identificará con la edad de la cohorte. Se considera que la función  $N(t)$  satisface la ecuación diferencial:

---

<sup>9</sup> Vetter (1988) considera que esta condición es errónea, relacionando la tasa de mortalidad natural con la edad máxima de las especies, la tasa de crecimiento, el tamaño máximo y otros factores demográficos

$$\frac{dN(t)}{dt} = -(M + F)N$$

$$N(0)=R$$
(1.17)

donde  $M > 0$  representa la *tasa de mortalidad natural* y  $F \geq 0$  la *tasa de mortalidad por pesca*, ambas tasas se consideran constantes y el objetivo es determinar el valor óptimo para  $F$ . También se supone constante el número de individuos que entran anualmente en la fase de reclutamiento ( $R$ ). Bajo estas hipótesis hay que observar que la ecuación (1.17) implica que la mortalidad natural y la mortalidad por pesca son independientes entre sí y además que la mortalidad natural es independiente del tamaño del stock  $N$ .

En el modelo de Beverton-Holt se consideran como parámetros el tamaño de la malla ( $\mu$ ) y el coeficiente de mortalidad por pesca ( $F$ ), que, como hipótesis de partida, se toman constantes. Además, las artes de pesca tienen unas características selectivas de forma que todos los peces de edad  $t \geq t_\mu$  que se encuentran con la red son capturados y aquellos que no llegan a dicha edad escapan, estando sometidos solamente a la mortalidad natural.

Bajo estas hipótesis, la solución a la ecuación (1.17) viene dada por:

$$N(t) = \begin{cases} Re^{-Mt} & \text{si } 0 < t < t_\mu \\ Re^{-Mt_\mu} e^{-(M+F)(t-t_\mu)} & \text{si } t > t_\mu \end{cases}$$
(1.18)

Siendo el rendimiento de la biomasa total ( $Y_\mu$ ) que se obtiene de la cohorte:

$$Y_{\mu}(F) = \int_{t_{\mu}}^{\infty} FN(t)w(t)dt = RF e^{Ft_{\mu}} \int_{t_{\mu}}^{\infty} e^{-(M+F)t} w(t)dt \quad (1.19)$$

Dado  $w(t)$  el peso medio de un pez con edad  $t$ . Para cada valor de  $F$  existe un tamaño de malla  $\mu$  con el que se obtiene el rendimiento máximo sostenible. La curva que resulta de esta relación  $Y=Y_{eum}(F)$ , definida por:

$$Y_{eum} = \max_{\mu} Y_{\mu}(F) \quad (1.20)$$

se llama *curva de rendimiento eumétrico* y permite determinar para cada nivel de intensidad de pesca cuál es la malla que proporciona el rendimiento máximo.

La ecuación (1.18) tiene varias interpretaciones. Además de representar el rendimiento de una cohorte durante la fase explotada, denota el rendimiento anual que se obtiene de una población en equilibrio formada por las cohortes de todas las posibles edades. Esto es cierto bajo la hipótesis de que el coeficiente de mortalidad por pesca  $F$ , el tamaño de malla  $\mu$  y el reclutamiento anual  $R$  permanezcan constantes en todo momento.

Las hipótesis de partida del modelo básico pueden modificarse introduciendo tendencia en la mortalidad o considerando fenómenos densidad-dependientes. Pero, salvo casos muy extremos, los resultados difieren poco de los que se obtienen con el primer modelo. Ahora bien, es muy importante el hecho de considerar que el reclutamiento anual es constante. Esto implica aceptar que, para cualquier tamaño posible del

stock, el número de reclutas  $R$  es el mismo, lo cual no es cierto para todas las pesquerías.

Algunos autores llegan a la conclusión de que la única diferencia entre el modelo de Beverton-Holt y el de Schaefer se debe a la introducción del parámetro sobre el tamaño de la malla  $\mu$ . Sin embargo el modelo de Beverton-Holt es bastante más complejo que el de Schaefer. El análisis dinámico es mucho más difícil, debido a la complejidad que aparece en los modelos de las poblaciones estructuradas por edades, obteniéndose a veces resultados incompletos.<sup>10</sup>

#### 1.4.2 Otros modelos analíticos.

El primer trabajo que puede considerarse un modelo analítico es el desarrollado por Baranov (1918) y tenía las siguientes características:

- El número de peces reclutados anualmente es constante e independiente del tamaño de la población.
- El crecimiento de los individuos depende de la edad pero es independiente del tamaño del stock.
- La mortalidad natural es una tasa constante y la tasa instantánea de mortalidad por pesca es proporcional a la intensidad de pesca ( $n^{\circ}$  de

---

<sup>10</sup> Una comparación más detallada entre los modelos de Schaefer y Beverton-Holt puede verse en Clark (1990), cap. 9, donde además se incluye un desarrollo de la optimización dinámica del modelo de Beverton-Holt.

unidades de esfuerzo de pesca, donde el esfuerzo de pesca de una flota se define como las "horas estándar de pesca por año").

El principal defecto de este trabajo es que integró la función de crecimiento desde que el pez entra en la fase explotada hasta el infinito, con lo que se obtienen curvas de crecimiento sin límites asintóticos, lo que hace que los resultados no sean aceptables, especialmente si la mortalidad por pesca es baja.

Otro modelo fue el desarrollado por Thompson y Bell (1934) en el que aparecen las siguientes características:

- Utilizaron tasas porcentuales para representar la mortalidad natural y la pesquera.
- Cada año de vida del individuo el crecimiento era un porcentaje constante, de ahí que lo representaran por una progresión geométrica creciente.
- También consideraban que el reclutamiento anual era constante y que la tasa de mortalidad por pesca era proporcional al número de unidades de esfuerzo.

El inconveniente de este modelo es que la curva de rendimientos presentaba unos rendimientos muy altos a medida que descendía la mortalidad por pesca, en contraste con los datos observados. Ricker (1944) dedujo tasas de reclutamiento, crecimiento y mortalidad natural densidad-dependientes para explicar estas anomalías,

aunque según Beverton y Holt (1954) estas tasas presentaban el inconveniente de sobrevalorar el peso y la talla de los individuos de más edad en las curvas de crecimiento individuales.

El trabajo de Parrish y Jones (1953) mantuvo las mismas hipótesis que las anteriores, excepto en el crecimiento individual donde introdujeron curvas constantes en cada tramo de edad pero diferentes a cada nivel de población.

Una innovación muy importante fue el análisis de la población virtual de Pope (1974) que realizaba predicciones sobre la biomasa total existente en un caladero mediante un proceso iterativo, utilizando las ecuaciones de crecimiento y mortalidad descritas anteriormente. El análisis se efectuaba sobre cada una de las generaciones o cohortes que componían una población, lo que proporcionaba resultados más detallados sobre la estructura de la misma, con lo que podía detectarse el impacto que determinadas circunstancias tenían sobre cada cohorte, lo que era especialmente importante en relación al momento del reclutamiento a la fase explotada.

## **1.5. Modelos Stock – Reclutamiento.**

Los modelos stock-reclutamiento se formulan en tiempo discreto y se basan en las relaciones entre el stock reproductor o frezante y el reclutamiento obtenido a partir de él. Frente a los modelos agregados

expresados en tiempo continuo, como el modelo de Schaefer, lo cual supone que tanto el ciclo reproductivo como el resto de los fenómenos demográficos que afectan a la población de peces se produce de forma continuada en el tiempo; éstos permiten modelizar el comportamiento estacional de algunas especies así como aquellas pesquerías en las que se establecen medidas que limitan la pesca en un período concreto del año, generalmente posterior al período de reproducción o de reclutamiento de nuevos individuos.

En líneas generales, estos modelos vienen definidos por dos componentes, cuya dinámica se representa en la figura 1.8. En este modelo, el stock de reproductores o de frezantes ( $S_t$ ) producirá la nueva generación de peces o recluta<sup>11</sup> ( $X_{t+1}$ ). Parte de estos reclutas serán capturados ( $P_{t+1}$ ) y el resto conformarán un nuevo stock de reproductores, conocido también como supervivientes (escapement), que darán lugar a la próxima generación.

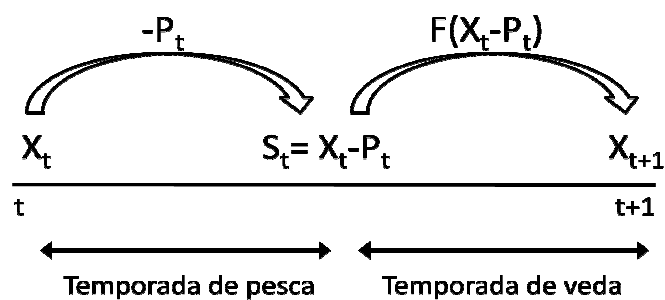


Figura 1.8. Esquema general de un modelo *stock*-reclutamiento.

<sup>11</sup> Se denomina reclutamiento al conjunto de individuos que se agregan cada cierto tiempo, normalmente cada año, al *stock* explotado. (Guerra, A y Sánchez, J.L., 1998, p. 97)

---

Por tanto, siguiendo a Clark (1990), estos modelos suponen que el stock de reproductores no sobrevive para pasar a formar parte del stock de reclutas así como que la captura tiene lugar previamente al proceso de reproducción. El sistema formado por las ecuaciones (1.21) y (1.22) define dichos modelos:

$$X_t = F(S_{t-1}) \quad (1.21)$$

$$S_t = X_t - P_t \quad (1.22)$$

Donde a la ecuación (1.21) se le denomina *relación stock-reclutamiento*. Entre los distintos modelos hay que destacar el de Ricker (1954) y el de Beverton-Holt (1957) como los más importantes en el ámbito de gestión de pesquerías.

### 1.5.1 Funciones stock-reclutamiento.

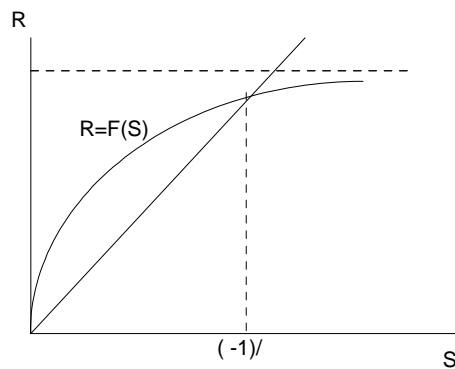
Entre las distintas formas que se han desarrollado para expresar las relaciones stock-reclutamiento que modelizan la dinámica de una población explotada cabe citar las siguientes:

#### a) *Modelo de Beverton-Holt.*

La función de reclutamiento de Beverton-Holt puede escribirse de la forma:

$$X_t = \frac{\alpha S_{t-1}}{1 + \beta S_{t-1}} \quad (1.23)$$

donde el parámetro  $\alpha$  se relaciona con la mortalidad densidad-independiente y  $\beta$  con la mortalidad densidad-dependiente de las larvas.



**Figura 1.9.** Relación stock-reclutamiento de Beverton-Holt.

En general, este modelo resulta adecuado para aquellas especies en las que el reclutamiento no se ve afectado por la actividad pesquera, al menos dentro de un rango “normal” de esfuerzo de pesca ya que el reclutamiento sería virtualmente independiente del stock patermo (Clark, 1990, p.209).

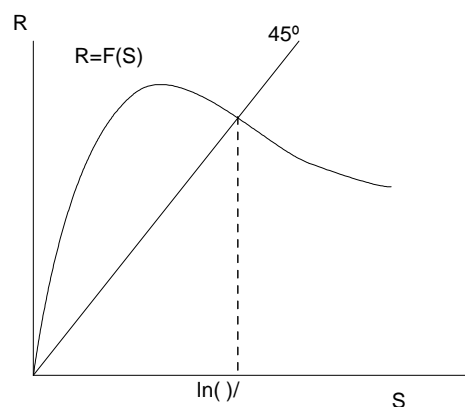
Las curvas de este modelo son asintóticas (Figura 1.8) de tal forma que el valor de la asíntota es  $(\alpha-1)/\beta$ , lo que representa un valor de reclutamiento constante sea cual sea el stock de supervivientes. Dicho nivel constituye el punto de equilibrio estable al que llegaría la población en ausencia de explotación pesquera.

**b) Modelo de Ricker**

En este caso:

$$X_t = \alpha S_{t-1} e^{-\beta S_{t-1}} \quad (1.24)$$

donde, el parámetro  $\alpha$  se relaciona con la mortalidad densidad-independiente y  $\beta$  con la mortalidad densidad-dependiente. A diferencia del modelo de Beverton-Holt, esta función supone que el reclutamiento aumenta hasta llegar a un máximo para un valor moderado de supervivientes ( $1/\beta$ ) y, a partir de entonces, disminuye a medida que se eleva el nivel de supervivientes. En este caso, la trayectoria de aproximación al equilibrio en ausencia de explotación pesquera depende del nivel de supervivientes así como del valor del parámetro  $\alpha$ , de forma que sólo cuando el nivel de supervivientes es superior a  $1/\beta$ , el punto de equilibrio es estable. En caso contrario, dependiendo del valor del parámetro  $\alpha$ , puede llegarse, tal como demostró May (1974) a una situación de “caos” dinámico.



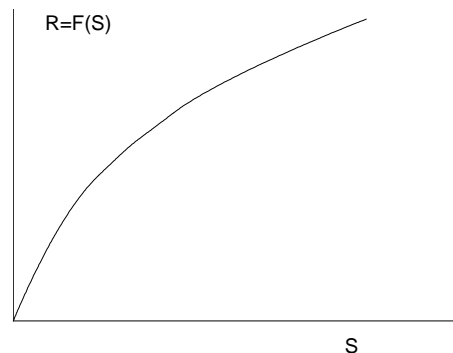
**Figura 1.10.** Función *stock*-reclutamiento de Ricker.

**c) Modelo de Cushing.**

La expresión general de la función de reclutamiento de Cushing viene dada por la ecuación:

$$X_t = \alpha S_{t-1}^\beta \quad (1.25)$$

siendo  $\beta$  un índice de dependencia de densidad. A diferencia de los modelos anteriores, tal como se recoge en la figura 1.9, la función de Cushing muestra un reclutamiento que crece de forma continua, sin límites, a medida que aumenta el stock de supervivientes, aunque a una tasa decreciente.



**Figura 1.11.** Modelo *stock*-reclutamiento de Cushing.

**d) Modelo de Clark-Ricker y Modelo de Clark-Cushing.**

Estos modelos incorporan en los modelos de Ricker y Cushing, respectivamente, un término adicional que recoge el efecto de la mortalidad depensatoria. Recoge la hipótesis de Clark (1974) referida a la

alta mortalidad que puede ocurrir para niveles bajos de biomazas en las pesquerías de pelágicos. Las funciones asumen la siguiente forma:

$$X_t = \alpha S_{t-1} e^{-\beta S_{t-1} - \theta/S_{t-1}} \quad (1.26)$$

$$X_t = \alpha S_{t-1}^\beta e^{-\theta/S_{t-1}} \quad (1.27)$$

La hipótesis básica que recogen las funciones stock-reclutamiento presentadas en el apartado 1.6, considera que el reclutamiento de la población es función únicamente del tamaño del stock de supervivientes, asumiendo que *los efectos que sobre el reclutamiento, supervivencia y crecimiento tienen los factores meteorológicos son de carácter fortuito, o que, por lo menos, no muestran correlación con los cambios de la población debidos a cambios en la intensidad de la pesca*<sup>12</sup>. En caso contrario, si dichos factores hubiesen influido en los cambios en el crecimiento de la población, de forma que fuesen lo suficientemente importantes en comparación con los cambios debidos únicamente al tamaño del stock, el propio autor considera que *incurriríamos en un error al imputar los cambios en la magnitud de la población a las variaciones del esfuerzo de pesca*<sup>13</sup>.

<sup>12</sup> Schaefer, M. (1957), p. 275.

<sup>13</sup> Schaefer, M. (1957), p. 275.

# **DISTRIBUCIONES A PRIORI NO INFORMATIVAS: Jeffreys y Zellner**

# **2**

En el presente capítulo se expondrán los métodos de construcción de distribuciones a priori no informativas o difusas<sup>1</sup> que hemos optado por aplicar al problema fundamental de este estudio, es decir, la determinación de las distribuciones a priori no informativas en el caso de trabajar con modelos de espacios de estados no lineales aplicados fundamentalmente a la gestión de pesquerías. Uno de ellos será la técnica desarrollada por Jeffreys (1967/ 1ª ed. 1939) y que se basa en la información de Fisher (1922) para determinar las distribuciones a priori. El segundo método es el desarrollado por Zellner (1971, 1977, 1996, 1997) donde aplica la interpretación de la inferencia estadística como tratamiento de la información, utilizando la entropía o medida de información de Shannon (1948). También tendremos en cuenta el método de máxima entropía de Shannon para determinar distribuciones a priori mínimo informativas.

En primer lugar se describirán las medidas de información que utilizan ambos métodos (Información de Fisher y Entropía de Shannon), así

---

<sup>1</sup> Kass y Wasserman (1996) ofrecen un análisis de la mayoría de los métodos que se han desarrollado para determinar distribuciones a priori no informativas, así como los resultados que se obtienen cuando se aplican estos métodos.

como sus propiedades fundamentales y que necesitaremos utilizar en desarrollos posteriores. A continuación se expondrán los métodos de determinación de distribuciones a priori no informativa desarrollados por Jeffreys (1967) y por Zellner (1971), desarrollando con más extensión este último y llegando finalmente a la relación entre ambas.

## **2.1 Medidas de información y análisis bayesiano.**

Desde 1960 la aplicación de las técnicas bayesianas en los modelos econométricos ha crecido considerablemente, bien para describir e interpretar modelos económicos, o plantear problemas de decisión que surgen a partir de la teoría económica, usando para ello modelos econométricos y métodos de predicción y análisis de políticas. Con anterioridad a esta fecha la mayoría de los científicos que empleaban las técnicas de econometría no aplicaban métodos no bayesianos. Jeffreys (1967/ 1ª ed. 1939) proporcionó un sistema axiomático en relación a la teoría de la probabilidad que resulta útil en cualquier campo de investigación, basándose en la información que proporcionan los datos disponibles para explicar experiencias y resultados pasados y para hacer predicciones. Estableció que la inducción científica engloba (1) observación y sistemas de medición y (2) generalización a partir de las experiencias pasadas y resultados que permitan explicar el pasado y predecir el comportamiento futuro. En cuanto a la definición de probabilidad la considera como una medida del grado de confianza en una proposición basada en la información disponible en cada momento, de esta forma

siempre que se obtenga nueva información es posible actualizar la probabilidad o la confianza asociada a la proposición establecida anteriormente, aplicando la teoría de probabilidad y en particular usando el teorema de Bayes, lo que constituye un modo formal de aprender a partir de la experiencia y de los datos. Entre los autores que desarrollan los métodos bayesianos cabe citar, además de Jeffreys (1967), a Box y Tiao (1973) o Zellner (1971).

Una característica de la aproximación bayesiana es que la información a priori se incorpora de forma flexible o formal en los procedimientos de estimación, predicción, test de hipótesis y análisis de políticas. Con respecto a la estimación, a partir del Teorema de Bayes se llega al resultado general de que una función de densidad de probabilidades (*fdp*) a posteriori para los parámetros de un modelo es proporcional a la *fdp* a priori del parámetro por la función de verosimilitud, es decir:

$$fdp \text{ a posteriori} \propto fdp \text{ a priori} \times \text{función de verosimilitud}$$

que matemáticamente se puede expresar como:

$$f(\theta|D) = cf(\theta|I_0)l(\theta|x), \quad \theta \in \Theta, \quad x \in S_x \quad (2.1)$$

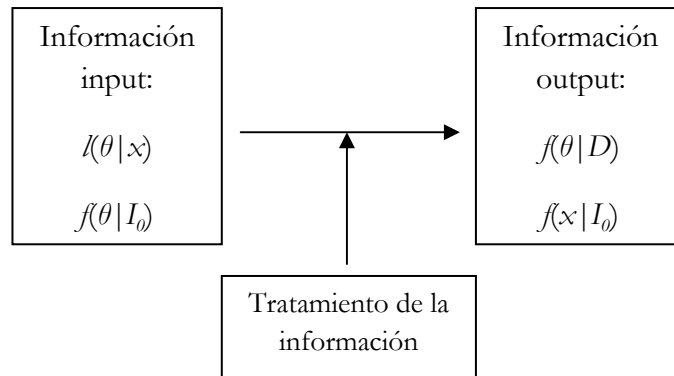
Siendo  $\theta$  un vector de parámetros,  $\Theta$  el espacio paramétrico,  $x$  un vector de observaciones,  $S_x$  el espacio muestral,  $I_0$  la información inicial  $D=(x, I_0)$  y, por último,  $l(\theta/x)$  la función de verosimilitud. La constante de normalización es:

$$c = \left[ \int_{\Theta} f(\theta|I_0)l(\theta|x)d\theta \right]^{-1} \quad (2.2)$$

Una conclusión que se obtiene con esta igualdad es que para cualquier problema de estimación, dada una *fdp* a priori y una función de verosimilitud, el teorema de Bayes proporciona una *fdp* a posteriori exacta para los parámetros del modelo. Otra forma de interpretar esta relación es verla como una transformación de la *fdp* a priori en una *fdp* a posteriori que incorpora la información inicial sobre el parámetro y la información muestral.

Bajo la perspectiva de que la inferencia estadística se puede considerar como el tratamiento de cierta información, hay un gran número de investigadores que intentan mejorar los modelos de aprendizaje bayesianos utilizando elementos de la teoría de la información, por ejemplo Soofi (1992), Jaynes (1968) o Zellner (1988) donde se establece una relación entre una información inicial o input y otra resultante u output.

La información input es la que aparece la función de verosimilitud, en los datos disponibles y en las distribuciones a priori. La información output o resultante es la información en la densidad a posteriori asociada a los parámetros y en las densidades marginales correspondientes a las observaciones (Figura 2.1).



**Figura 2.1:** Inputs y Outputs para cualquier tratamiento de la información.

Considerando medidas de información en los inputs y en los outputs se busca la forma de las densidades a posteriori asociadas a los parámetros que minimicen la diferencia entre ambas. Bajo el *Principio de Conservación de la Información (PCI)*: Información Input = Información Output, se considera que un tratamiento de la información es 100% eficiente si satisface el *PCI* en el sentido de que el cociente entre ambas informaciones es igual a la unidad.<sup>2</sup>

En cualquier caso, ya sea utilizando el teorema de Bayes directamente como aplicando teoría de la información, hay que contar con la función de densidad de probabilidades a priori asociada a los parámetros,  $f(\theta/I_0)$ . Una vez establecida la distribución muestral a partir de las observaciones, el único fundamento o base que nos permite decidir

<sup>2</sup> En Zellner(1988) se expone este desarrollo y se demuestra que, tomando como medidas de información en los inputs y en los outputs la entropía asociada a las funciones, el tratamiento de la información es 100% eficiente si las funciones de densidad a posteriori se calculan aplicando el teorema de Bayes, es decir tomándolas proporcionales al producto entre la distribución a priori de los parámetros y la función de verosimilitud.

entre diferentes posibilidades, todas ellas en principio admisibles, recae en las distribuciones a priori.

Éstas se pueden elegir para representar la información disponible acerca de los posibles valores del parámetro, son las llamadas *distribuciones a priori informativas*, aunque ya desde los trabajos de Laplace, las aplicaciones de la teoría de la probabilidad se enfrentan a las dificultades inherentes al tratamiento de la información que se posee inicialmente. Es evidente que el hecho de no tener en cuenta este conocimiento previo, que a menudo puede ser relevante con respecto a los cuestiones que con el mismo problema se plantean, puede llevar unido una inconsistencia en los razonamientos que se apliquen y proporcionar resultados erróneos.

Ahora bien, una de las mayores críticas a los métodos bayesianos ha sido la arbitrariedad (algunas veces llamada subjetivismo) a la hora de asignar las distribuciones a priori. Actualmente, la mayoría de las aplicaciones de las técnicas bayesianas parten de distribuciones a priori que se construyen a partir de métodos formales, se las llama *distribuciones a priori no informativas o de referencia*, que en Box y Tiao (1973) se definen como aquellas que proporcionan muy poca información con relación al experimento que se esté estudiando. No hay que confundir este concepto con el de desconocimiento absoluto sobre la variable que se esté estudiando, nunca se parte de la ignorancia absoluta, lo que no se hace es presuponer un comportamiento inicial específico para esta variable.

## 2.2. Medida de Información de Fisher.

Según Fisher (1922) el propósito de los métodos estadísticos debía ser poder sustituir una muestra de datos por ciertos valores (estadísticos) que la representen adecuadamente en el sentido de que contengan la máxima información posible que sea relevante y que originalmente estaba contenida en la muestra.

De aquí emerge la idea de una medida sobre la cantidad de información que poseen los datos y su estudio a partir de la función de verosimilitud, proporcionando una medida intrínseca sobre la cantidad de información contenida en las observaciones en relación a cualquier parámetro poblacional cuyo valor es desconocido. Estudiando las condiciones de pérdida de información establece que, con el método de la máxima verosimilitud, en muchos casos, la pérdida de información es menor que con cualquier otro método del que se obtengan estadísticos eficientes.

La definición de la Información de Fisher tiene sentido sólo sobre modelos de probabilidad regulares, cuyas condiciones pasamos a determinar en primer lugar. Para ello consideramos  $P_0 = \{P_\theta: \theta \in \Theta\}$  un modelo paramétrico de probabilidades, donde  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$  es el espacio paramétrico y cada  $P_\theta$  es una medida de probabilidad sobre un espacio muestral común  $X$ . Dada  $X$  una variable aleatoria continua, cuya función de densidad de probabilidades (*f.d.p.*) dependiente de un valor particular del

parámetro,  $\theta \in \Theta$ , denotaremos por  $f_\theta(x) = f(x, \theta)$  se dice que se satisfacen las *condiciones de regularidad FI*<sup>3</sup> si:

- 1) Existe  $\frac{\partial}{\partial \theta_i} f(x, \theta)$  y es finita cualquiera que sea la componente  $\theta_i$  de  $\theta \in \Theta$ .
- 2) Se puede intercambiar la integración de  $f(x, \theta)$  respecto a  $x$  con la derivada respecto a cualquier componente  $\theta_i$  de  $\theta \in \Theta$ , es decir:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \int f(x, \theta) dx = \int \frac{\partial}{\partial \theta_i} f(x, \theta) dx, \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (2.3)$$

- 3) El conjunto soporte  $C = \{x: f(x, \theta) > 0\}$  es el mismo cualquiera que sea  $\theta \in \Theta$ .

Además de estas tres condiciones básicas hay autores que incluyen entre ellas la posibilidad de que el intercambio entre la derivada respecto al parámetro y la integración respecto a la variable pueda llevarse a cabo en el caso de las derivadas de segundo orden, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \int \frac{\partial}{\partial \theta_i} f(x, \theta) dx = \int \frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_i} f(x, \theta) dx \quad \forall i, j = 1, \dots, k \quad (2.4)$$

Esta condición no es necesaria para el cálculo de la información de Fisher, aunque sí que es deseable que se cumpla para facilitar los cálculos.

---

<sup>3</sup> Skervish (1995, p. 111)

Una función relacionada directamente con la medida que pretendemos determinar es la *función score* que denotaremos por  $S(x, \theta)$  y que se define como el vector aleatorio de componentes  $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f(x, \theta)$ . Una de las características más importantes de esta función se recoge en la siguiente propiedad.

**Teorema 2.1:** Bajo las condiciones de regularidad establecidas anteriormente se verifica que  $E_\theta[S(x, \theta)] = 0$ .

**Dem:** Dada la *f.d.p.* de  $x$ ,  $f(x, \theta)$ , se cumple  $\int f(x, \theta) dx = 1$ , con lo que  $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \int f(x, \theta) dx = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ .

Por otra parte y teniendo en cuenta la segunda condición de regularidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \int f(x, \theta) dx &= \int \frac{\partial}{\partial \theta_i} f(x, \theta) dx = \int \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_i} f(x, \theta)}{f(x, \theta)} f(x, \theta) dx \\ &= \int \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f(x, \theta) f(x, \theta) dx = E \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f(x, \theta) \right] \end{aligned}$$

Como resultado  $E \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f(x, \theta) \right] = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$

□

A partir de la función score se define la información de Fisher acerca de  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$  y que proporciona la variable  $X$ , a la matriz de covarianzas condicionadas a un valor dado del parámetro correspondiente a dicha función, la denotaremos por  $I_x(\theta) = (I(x, \theta)_{i,j})$  donde:

$$I(x, \theta)_{i,j} = Cov_{\theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f(x, \theta), \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f(x, \theta) \right) \quad (2.5)$$

Como consecuencia de la propiedad 2.1. y bajo las condiciones de regularidad, una forma alternativa de expresar los elementos de la matriz de información de Fisher es:

$$I(x, \theta)_{i,j} = E_{\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f(x, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f(x, \theta) \right] \quad i, j = 1, \dots, k \quad (2.6)$$

Si el espacio paramétrico es unidimensional (i.e.  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ ), la información de Fisher coincide con la varianza de la función score, que bajo las condiciones de regularidad finalmente se calcularía como:

$$I_x(\theta) = E \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta) \right)^2 \right] \quad (2.7)$$

Este cálculo, ya sea en el caso unidimensional como el multidimensional, puede simplificarse bastante si suponemos que el intercambio entre la derivada respecto al parámetro y la integral respecto a la variable también se puede efectuar cuando la derivada es de segundo orden, es decir, bajo las condiciones de regularidad y suponiendo que se

da la igualdad que se recoge en la expresión (2.4), una forma alternativa de obtener la información de Fisher en el caso multidimensional es:

$$I_X(\theta) = -E_\theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln f(x, \theta) \right] \quad (2.8)$$

Obsérvese que la matriz de Fisher es simétrica, por lo que da lo mismo el orden en el que se realicen las derivadas parciales respecto a los componentes del vector paramétrico. En el caso unidimensional, el cálculo queda reducido a:

$$I_X(\theta) = -E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(x, \theta) \right] \quad (2.9)$$

**Dem:** Basta demostrarlo en el caso multidimensional ya que el unidimensional sería exactamente igual, sin distinguir las componentes en el parámetro.

$$\begin{aligned} 0 &= E_\theta \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f(x, \theta) \right] \Rightarrow \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \int \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f(x, \theta) f(x, \theta) dx = \int \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left( \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f(x, \theta) f(x, \theta) \right) dx \\ &= \int \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln f(x, \theta) f(x, \theta) dx + \int \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f(x, \theta) \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta_j} f(x, \theta)}_{= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f(x, \theta) f(x, \theta)} dx \\ &= E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln f(x, \theta) \right] + I(x, \theta)_{ij} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$I_X(\theta) = -E_\theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln f(x, \theta) \right]$$

□

Una de las interpretaciones de esta medida es que, dado que las derivadas de segundo orden miden curvaturas, la información de Fisher en un valor particular del parámetro es una medida de la curvatura esperada de la función de verosimilitud para el valor del parámetro dado. También se interpreta como el valor que muestra la sensibilidad de la función de verosimilitud ante pequeños cambios en los parámetros.

Hasta ahora se ha hecho referencia al cálculo de la información de Fisher cuando se trabaja con una única variable aleatoria, pero también caben otras posibilidades. Si estamos trabajando con  $n$  variables aleatorias se define la información conjunta de Fisher como:

$$I_X(\theta) = I_{X_1, \dots, X_n}(\theta) = E_\theta \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x_1, \dots, x_n, \theta) \right)^2 \right] \quad (2.10)$$

siendo  $f(x_1, \dots, x_n, \theta)$  la *f.d.p.* conjunta de las  $n$  variables.

Por otro lado, si consideramos un estadístico  $T(X)$ , la información de Fisher asociada al mismo sería:

$$I_T(\theta) = E \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln g_\theta(t) \right)^2 \right] \quad (2.11)$$

Donde por  $g_\theta(t)$  representamos la *f.d.p.* asociada al estadístico.

### 2.2.1 Propiedades de la Información de Fisher.

Veamos a continuación algunas propiedades de esta medida de información, sólo se hará referencia y se demostrarán aquellas que puedan intervenir en el objetivo de nuestro trabajo.

**Propiedad 2.1.** La información de Fisher es aditiva, es decir, dadas dos variables aleatorias independientes,  $X$  e  $Y$ , se verifica:

$$I_{X,Y}(\theta) = I_X(\theta) + I_Y(\theta) \quad (2.12)$$

Como consecuencia de esta propiedad, dada  $X_1, \dots, X_n$ , una muestra aleatoria simple (*m.a.s.*) procedente de la variable aleatoria  $X$ , se tiene que:

$$I_{X_1, \dots, X_n}(\theta) = nI_X(\theta) \quad (2.13)$$

**Dem:** Suponiendo que  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ , y dada  $Z=(X,Y)$  con  $X$  e  $Y$  variables aleatorias independientes, se verifica:

$$I(z, \theta)_{ij} = E \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f_\theta(z) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f_\theta(z) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln(f_\theta(x)f_\theta(y)) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln(f_\theta(x)f_\theta(y)) \right] \\
&= E \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f_\theta(x) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f_\theta(x) \right] + E \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f_\theta(y) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f_\theta(y) \right] \\
&+ E \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f_\theta(x) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f_\theta(y) \right] + E \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f_\theta(y) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f_\theta(x) \right]
\end{aligned}$$

Al ser  $X$  e  $Y$  independientes, la esperanza del producto que aparece en los dos últimos términos se puede separar como producto de esperanzas que, bajo las condiciones de regularidad, son nulas (propiedad 2.1), por lo que finalmente se obtiene que  $I(z, \theta)_{ij} = I(x, \theta)_{ij} + I(y, \theta)_{ij}$ .

□

**Propiedad 2.2.** Considerando que  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ , bajo las condiciones de regularidad y suponiendo que el intercambio entre la derivada y la integral se puede llevar a cabo hasta de segundo orden, la información conjunta de  $n$  variables aleatorias se puede calcular a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
I_X(\theta) &= I_{X_1}(\theta) + E_{X_1} [I_{X_2|X_1}(\theta)] + E_{X_1, X_2} [I_{X_3|X_1, X_2}(\theta)] + \\
&\dots + E_{X_1, \dots, X_{n-1}} [I_{X_n|X_1, \dots, X_{n-1}}(\theta)]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Donde

$$I_{X_i|X_1, \dots, X_{i-1}}(\theta) = -E_{X_i|X_1, \dots, X_{i-1}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_\theta(x_i|x_1, \dots, x_{i-1}) \right] \tag{2.15}$$

Para  $i=2,3,\dots,n$ .

La propiedad se enuncia y se demuestra exactamente igual en el caso multidimensional, con la salvedad de que estaría referida a cada elemento  $I(x,\vartheta)_{ij}$  de la matriz de información y de que en la expresión (2.15) debería aparecer  $\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \ln f$  en lugar de  $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f$ . Nos remitimos al caso unidimensional por simplificar la notación.

**Dem:** Dadas  $n$  variables aleatorias  $X_1,\dots,X_n$ , la función de densidad conjunta se puede expresar como:

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) = f_\theta(x_1, \dots, x_{n-1})f_\theta(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})$$

A partir de lo cual

$$\begin{aligned} I_X(\theta) &= -E_\theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_\theta(x_1, \dots, x_n) \right] \\ &= -E_\theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_\theta(x_1, \dots, x_{n-1}) \right] - E_\theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_\theta(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}) \right] \end{aligned}$$

El primer término de la última expresión se puede seguir descomponiendo siguiendo la misma pauta con la función de densidad, es decir se tomaría:

$$f_\theta(x_1, \dots, x_{n-1}) = f_\theta(x_1, \dots, x_{n-2})f_\theta(x_{n-1}|x_1, \dots, x_{n-2})$$

En cuanto al segundo término se comprueba que:

$$\begin{aligned}
& -E_{\theta} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_{\theta}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) \right] \\
& = - \int \dots \int \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_{\theta}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) f_{\theta}(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n \\
& = \int \dots \left[ - \int \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_{\theta}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) f_{\theta}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) dx_n \right] f_{\theta}(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_1, \dots, dx_{n-1} \\
& = E_{X_1, \dots, X_{n-1}} [I_{X_n | X_1, \dots, X_{n-1}}(\theta)]
\end{aligned}$$

La demostración continua de la misma forma hasta llegar a la expresión que aparece en el enunciado de la propiedad.  $\square$

La última propiedad que veremos se refiere al comportamiento de la información de Fisher respecto a las reparametrizaciones, algo que se tendrá muy en cuenta a la hora de determinar las distribuciones iniciales no informativas.

**Propiedad 2.3.** La información de Fisher no es invariante ante reparametrizaciones. Supongamos que  $\eta = h(\theta)$  es una reparametrización continua de  $\theta$ , donde  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ , se verifica:

$$I_X^*(\eta) = I_X(h^{-1}(\eta)) \left( \frac{\partial}{\partial \eta} h^{-1}(\eta) \right)^2 \quad (2.16)$$

Si  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ , con  $k > 1$ , se tiene:

$$I_X(\eta) = \Delta(\eta) I_X(h^{-1}(\eta)) \Delta(\eta)^t \quad (2.17)$$

Donde:

$$\Delta_{ij}(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta_i} h_j^{-1}(\eta) \quad (2.18)$$

**Dem:** Veámoslo para el caso unidimensional.

Supongamos que  $\eta = h(\theta)$  es una reparametrización continua de  $\vartheta$ , donde  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ , y sea  $l(\eta, x) = \ln f(x, \eta)$  el logaritmo de la función de verosimilitud asociada a  $\eta$ .

Aplicando la regla de la cadena para las derivadas tendríamos:

$$\frac{\partial l(\eta, x)}{\partial \eta} = \frac{\partial l(\theta, x)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

$$E \left[ \left( \frac{\partial l(\eta, x)}{\partial \eta} \right)^2 \right] = E \left[ \left( \frac{\partial l(\theta, x)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2$$

Que también se puede expresar como:

$$I_X(\eta) = I_X(h^{-1}(\eta)) \left( \frac{\partial}{\partial \eta} h^{-1}(\eta) \right)^2$$

□

### 2.3 Entropía o Medida de Información de Shannon.

El desarrollo de Shannon (1948) se enmarca dentro de los métodos aplicados en la teoría de la comunicación, donde considera que uno de los problemas fundamentales es el de reproducir en un momento dado de forma exacta o lo más aproximada posible un mensaje seleccionado a partir de un conjunto de mensajes posibles<sup>4</sup>.

Inicialmente analiza una fuente de elección de información discreta como un proceso de Markov y define un valor que pueda medir, en cierto sentido, cuánta información se produce en este proceso. Para ello fija un conjunto de  $n$  sucesos posibles con probabilidades de ocurrencia o de elección  $p_1, p_2, \dots, p_n$  y que supone que es lo único que se conoce en relación a estos sucesos.

Determina que una medida  $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$  que proporcione un valor sobre la incertidumbre que se tiene sobre el resultado de una elección debe cumplir las siguientes condiciones:

- 1)  $H$  debe ser continua en  $p_i$ .
- 2) Si los sucesos son equiprobables, es decir,  $p_i=1/n, \forall i=1, \dots, n$ ,  $H$  debe ser una función monótona creciente de  $n$ . Esto equivale a suponer

---

<sup>4</sup>Los postulados o axiomas que deben cumplir las medidas de información fueron descritos por primera vez por Hartley(1928), que intentó medir la información en conjuntos donde los elementos tenían la misma probabilidad de aparición. El caso concreto de la entropía o medida de información de Shannon es una extensión de la medida de información de Hartley a conjuntos donde los elementos pueden aparecer con distinta probabilidad.

que en el caso de equiprobabilidad, cuanto mayor sea el número de sucesos posibles, mayor será la incertidumbre sobre el resultado.

- 3) Si una posible elección se separa en dos elecciones sucesivas, el valor inicial de  $H$  debe ser una suma ponderada de los valores individuales de  $H$ .

Como consecuencia establece el siguiente resultado:

**Teorema 2.2:** La única  $H$  que satisface las tres condiciones anteriores es de la forma:

$$H = -K \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (2.19)$$

siendo  $K$  una constante positiva que depende de la elección de las unidades de medida.

Shannon (1948) llama entropía de un conjunto de probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , al valor  $H = -K \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$ . Si  $X$  es una variable que recoge las distintas posibilidades, se denotará por  $H(x)$  a su entropía, aunque entendiendo que  $x$  no es un argumento de la función sino una etiqueta que permita diferenciar las entropías asociadas a varias variables.

En el caso de que la distribución de probabilidades sea continua, Shannon extiende la definición de entropía cambiando el sumatorio por la integración y las probabilidades del caso discreto por la función de

densidad de probabilidades, con lo que el valor de  $H$  se calcularía a partir de la siguiente expresión:

$$H = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x) dx \quad (2.20)$$

En el caso de que la distribución sea n-dimensional se tiene:

$$H = - \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) \ln f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n \quad (2.21)$$

siendo  $f(x_1, \dots, x_n)$  la función de densidad de probabilidades conjunta de las n variables.

Asimismo, dadas dos variables  $X$  e  $Y$  (que pueden ser multidimensionales), las entropías conjunta y condicional vienen dadas por:

$$H = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \ln f(x, y) dx dy \quad (2.22)$$

Y

$$H_x(y) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \ln \frac{f(x, y)}{f(x)} dx dy \quad (2.23)$$

$$H_y(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \ln \frac{f(x, y)}{f(y)} dx dy$$

donde  $f(x)$  y  $f(y)$  son las funciones de densidad marginales de  $x$  e  $y$  respectivamente.

### 2.3.1 Propiedades de la Medida de Información de Shannon.

Las entropías en el caso de distribuciones continuas tienen las siguientes propiedades:

**Propiedad 2.5.** Para cualesquiera dos variables  $X$  e  $Y$  se tiene:

$$H(x, y) = H(x) + H_x(y) = H(y) + H_y(x) \quad (2.24)$$

$$H_x(y) \leq H(y) \quad (2.25)$$

Dándose la igualdad si y sólo si  $x$  e  $y$  son independientes, es decir,  $f(x, y) = f(x)f(y)$  (salvo posiblemente en un conjunto de medida nula).

La demostración de esta propiedad surge de manera directa teniendo en cuenta las expresiones (2.22) y (2.23), y la relación entre las distribuciones conjunta y condicionada a partir del teorema de Bayes,  $f(x, y) = f(x)f_x(y)$ .

**Propiedad 2.6.** La entropía asociada a una distribución normal con valor esperado  $\mu$  y desviación típica  $\sigma$  es:

$$w(x) = \frac{1}{2} \ln 2\pi e + \ln \sigma \quad (2.26)$$

**Dem:** Dada  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-(x - \mu)^2 / \sigma^2\right]$ , con  $-\infty < \mu < +\infty$  y  $\sigma > 0$ , la

entropía asociada toma la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 H(x) &= \int f(x) \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) dx + \int f(x) \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} dx \\
 &= \ln\sqrt{2\pi}\sigma + \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = \ln\sqrt{2\pi}\sigma + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln(2\pi e) + \ln\sigma \quad \square
 \end{aligned}$$

**Propiedad 2.7.** La entropía no es invariante ante reparametrizaciones de la variable. De hecho, ante un cambio de forma que se obtenga un nuevo conjunto de variables  $y_1, \dots, y_n$ , la nueva entropía viene dada por:

$$H(y) = \int \dots \int f(x_1 \dots x_n) J(x, y) \ln(f(x_1 \dots x_n) J(x, y)) dy_1 \dots dy_n \quad (2.27)$$

Donde  $J(x, y)$  representa el jacobiano asociado a la transformación paramétrica. Como resultado se obtiene la siguiente expresión:

$$H(y) = H(x) - \int f(x_1 \dots x_n) \ln J(x, y) dy_1 \dots dy_n \quad (2.28)$$

Es decir, la nueva entropía equivale a la antigua menos el valor esperado del logaritmo del jacobiano asociado a la transformación. Debido a este hecho Shannon (1948) señala que la entropía puede ser considerada en el caso continuo como una medida de la aleatoriedad relativa a un cambio de parámetros.

En definitiva, la Entropía de Shannon mide la información contenida en una distribución. De aquí surge el método de Máxima Entropía de Shannon (1948) que consiste en establecer la distribución que maximiza esta medida de información. Si se tiene información previa sobre la distribución de los datos, este cálculo se convierte en un problema de

optimización sujeto a las condiciones que se establecen con esta información previa.

Jaynes (1968) estableció que para solventar este problema de no invarianza ante reparametrizaciones, la entropía debía definirse como:

$$W' = \int f(x) \ln \frac{f(x)}{m(x)} \quad (2.29)$$

donde  $m(x)$  es una función de medida. Si el objetivo final es la maximización de la entropía, se puede asumir que  $m(x)=m$ , una constante, siendo en tal caso  $W'=W-\ln m$ , con lo que maximizar  $W'$  es equivalente a buscar la función que maximiza  $W$ .

## **2.4 Distribuciones no informativas. Regla de Jeffreys.**

Desde el punto de vista de Jeffreys, un problema de estimación es aquel donde, dada la forma de la distribución, existen parámetros que pueden ser tratados como desconocidos, sin que haya preferencias por asignarles inicialmente algún valor, y lo que se pretende es conocer la distribución de probabilidades asociada a estos parámetros dadas las observaciones.

La dificultad es encontrar una forma de confirmar la incertidumbre asociada a un parámetro cuando no hay un valor de preferencia, para lo cual aporta dos soluciones:

- Si el parámetro puede tomar cualquier valor en un rango finito o de  $-\infty$  a  $+\infty$  su distribución a priori debe ser uniforme.
- Si se puede establecer que toma valores entre 0 y  $+\infty$  entonces la distribución a priori de su logaritmo debe ser uniforme.

Hay casos de estimación donde una norma puede aplicarse de la misma forma sobre distintos conjuntos de parámetros, con lo cual es deseable emplear aquella que lleve a los mismos resultados cualquiera que sea el conjunto de parámetros que se elija, una regla que cumpla esta propiedad se dice que posee la propiedad de invarianza ante reparametrizaciones.

La función esencial de estas normas es proporcionar una manera “formal” de expresar la ignorancia asociada al valor de un parámetro dentro de un rango establecido. Dar pautas formales lo más objetivas posible.

En el caso de un espacio paramétrico finito consideró el “principio de la razón insuficiente” para asignar la misma probabilidad a cada posible valor del parámetro. Extiende este resultado al caso de intervalos acotados o la recta real al completo considerando que la distribución inicial de un parámetro debía ser constante. En el segundo caso esta condición hace que la distribución a priori sea impropia o lo que es lo mismo no tiene integral finita, aunque no lo consideró como una dificultad fundamental.

Es importante tener en cuenta que nunca se puede suponer un estado de completa ignorancia, además, la expresión “conocer poco a

priori” puede tener sentido sólo en relación a la información que proporciona un experimento. Se supone que una distribución a priori representa el conocimiento acerca de los parámetros previamente a la obtención de observaciones a partir de un experimento. Por ello la cuestión principal es seleccionar un distribución inicial que proporcione poca información relativa a la que se espera obtener con el experimento. Aquello que los datos pueden proporcionar sobre un parámetro se recoge en la función de verosimilitud.

El método para definir las distribuciones a priori no informativas descrito por Jeffreys (1967) se basó en la información de Fisher, que recordamos quedaba determinada en el caso unidimensional como:

$$I_X(\theta) = E \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta) \right)^2 \right] \quad (2.30)$$

Jeffreys estableció que la distribución a priori del parámetro,  $\pi(\theta)$ , debía ser:

$$\pi(\theta) \propto I^{1/2}(\theta) \quad (2.31)$$

La justificación de este método de debe a que las funciones resultantes cumplen la propiedad de invarianza ante reparametrizaciones del modelo.

Supongamos que  $\eta = h(\theta)$  es una reparametrización continua de  $\theta$ , donde  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ , Por la propiedad (2.4) de la información de Fisher teníamos:

$$I_X(\eta) = I_X(\theta) \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2 \quad (2.32)$$

$$\pi(\eta) \propto I_X^{1/2}(\eta) = I_X^{1/2}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \propto \pi(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

lo que nos lleva a que, en el caso de reparametrización, el cambio de las distribuciones a priori asociadas a los parámetros, se realiza aplicando la fórmula del cambio de variables.

En este análisis incluye una modificación para los casos de localización y escala, indicando que si se combinan ambos tipos de parámetros, los de localización debían separarse del resto, es decir, si hay parámetros de localización  $\mu_1, \dots, \mu_n$  y otro parámetro multidimensional  $\theta$ , entonces la distribución a priori debe ser:

$$\pi(\mu_1, \dots, \mu_n) \propto \det(I(\theta))^{1/2} \quad (2.33)$$

## 2.5 Distribuciones no informativas. Regla de Zellner.

Es necesario reconocer el papel que juega la información a priori en la formulación de modelos asociados a observaciones y en las funciones de densidad iniciales relativas a los parámetros que aparecen en estos modelos.

En relación a la deducción de los modelos, sería deseable tener un método formal a partir del cual se pudieran formular funciones de

densidad iniciales que fueran no informativas o difusas. Jaynes (1980) definió esta necesidad como la prioridad principal en los problemas de investigación sobre la teoría bayesiana. También cabe destacar la apreciación de Akaike (1978) que señala cómo a pesar de la aparente utilidad de los modelos bayesianos en inferencia estadística no se ha desarrollado un análisis sistemático del papel desempeñado por las distribuciones a priori, hasta el punto de que se pueda dar a los estadísticos una confianza absoluta al usar sus propias distribuciones a priori.

En Zellner (1971) se recogen ejemplos donde se pone de manifiesto que la formulación de los modelos implican un uso muy importante de información a priori, incluso esta información inicial puede ser más importante que el uso que se le dé en las densidades a priori asociadas a los parámetros, impresión que también recoge Tuckey (1978).

Zellner (1971) plantea la búsqueda de la distribución a priori aplicando la teoría de la información, para ello, parte de una función de densidad de probabilidades conjunta,  $f(x, \theta)$ , para una observación  $x$  ( que puede ser un vector) y un parámetro  $\theta$  (que también, puede ser un vector), donde  $x \in R_x$  y  $\theta \in R_\theta$ . Basándose en la definición de entropía que proporciona Shannon (1948), define como medida de información contenida en esta función de probabilidades a su entropía negativa, es decir:

$$-H(f(x, \theta)) = \int_{R_x} \int_{R_\theta} f(x, \theta) \ln(f(x, \theta)) dx d\theta \quad (2.34)$$

Teniendo en cuenta que podemos expresar  $f(x, \theta) = \pi(\theta)f(x/\theta)$  donde  $\pi(\theta)$  es la función de densidad a priori para  $\theta$  y  $f(x/\theta)$  es la función de densidad para  $x$  condicionada a un valor de  $\theta$ , obtendremos:

$$\begin{aligned} -H(f(x, \theta)) &= \int_{R_x} \int_{R_\theta} \pi(\theta)f(x|\theta) \ln[\pi(\theta)f(x/\theta)] dx d\theta \\ &= \int_{R_\theta} \int_{R_x} \{\pi(\theta)f(x/\theta) \ln[f(x/\theta)] + f(x/\theta)\pi(\theta) \ln[\pi(\theta)]\} dx d\theta \end{aligned}$$

De lo cual:

$$-H(f(x, \theta)) = \int_{R_\theta} I(\theta)\pi(\theta)d\theta + \int_{R_\theta} \pi(\theta) \ln[\pi(\theta)]d\theta \quad (2.35)$$

Donde:

$$I(\theta) = \int_{R_x} f(x/\theta) \ln[f(x/\theta)] dx \quad (2.36)$$

Es una medida de la información contenida en  $f(x/\theta)$ .

De esta forma se puede considerar  $-H(f(x, \theta))$  como la suma de dos términos, por un lado la información esperada en la función de densidad de las observaciones  $\int_{R_\theta} I(\theta)\pi(\theta)d\theta$  más la información contenida en la distribución a priori asociada al parámetro  $\int_{R_\theta} \pi(\theta) \ln[\pi(\theta)]d\theta$ .

Como una medida que represente la “ganancia” en información una vez obtenidas las observaciones define la siguiente función:

$$G(\pi(\theta)) = \int_{R_\theta} I(\theta)\pi(\theta)d\theta - \int_{R_\theta} \pi(\theta)\ln[\pi(\theta)]d\theta \quad (2.37)$$

Es decir, la información esperada inicialmente en los datos menos la información contenida en la función de densidad asociada a priori al parámetro  $\vartheta$  y medida por  $\int \pi(\theta)\ln \pi(\theta)d\theta$ .<sup>5</sup>

Define la distribución que maximiza la información que inicialmente se espera en los datos – Maximal Data Information Prior (MDIP) – como aquella función de densidad de probabilidades para  $\theta$  que a priori contiene “mínima información”, es decir, aquella  $\pi(\theta)$  que maximiza  $G(\pi(\theta))$ , para  $f(x|\theta)$  ya dado. Tenemos que tener en cuenta que buscamos distribuciones a priori que sean propias, es decir se maximiza  $G(\pi(\theta))$  sujeto a que  $\int_{R_\theta} \pi(\theta) d\theta = 1$ , donde  $R_\theta$  es la región que contiene a  $\theta$ .

Para calcular las MDIP aplicaremos el siguiente teorema:

**Teorema1:** Sea  $x$  una variable aleatoria con función de densidad de probabilidades propia, dependiente de un parámetro  $\theta$ ,  $f(x, \theta)$  y definida

<sup>5</sup> Soofi(1992) y Zellner(1991) proporcionan más interpretaciones sobre  $G(\pi(\theta))$  y su relación con otros criterios para generar distribuciones a priori. Por otra parte Venegas Martínez(1990) y Zhang y Yao(1991) han demostrado, de forma independiente, que las soluciones MDIP son únicas.

<sup>6</sup>Esto obliga a que  $R_\theta$  sea una región compacta que puede ser muy grande, pero que también puede restringirse a intervalos finitos si los parámetros toman valores acotados (Zellner, 1995).

positiva en una región  $R_x$ . Supongamos que  $\theta$  es un parámetro que toma valores en una región  $R_\theta$ . Entonces la función de densidad propia a priori para  $\theta$  que maximiza  $G(\pi(\theta))$  es:

$$\pi(\theta) = \begin{cases} c \exp[I(\theta)] & \text{si } \theta \in R_\theta \\ 0 & \text{c.c} \end{cases} \quad (2.38)$$

donde  $c$  es una constante de normalización,  $c = \left( \int_{R_\theta} \exp[I(\theta)] d\theta \right)^{-1}$ .

**Dem:** Sea  $g(\theta)$  una función arbitraria tal que  $\int_{R_\theta} g(\theta) d\theta = 0$  y consideramos:

$$G(\varepsilon) = \int_{R_\theta} \{I(\theta) - \ln[\pi^*(\theta) + \varepsilon g(\theta)]\} \{\pi^*(\theta) + \varepsilon g(\theta)\} d\theta$$

Derivando  $G'(\varepsilon) = \int_{R_\theta} g(\theta) \{I(\theta) - \ln[\pi^*(\theta) + \varepsilon g(\theta)]\} d\theta$  donde hemos aplicado que  $\int_{R_\theta} g(\theta) d\theta = 0$

Aplicando la condición necesaria para obtener un máximo,  $G'(0)=0$ , tenemos que  $\int_{R_\theta} g(\theta) \{I(\theta) - \ln[\pi^*(\theta)]\} d\theta = 0$ , lo que se satisface si  $I(\theta) = \ln[\pi^*(\theta)]$  o equivalentemente  $\pi^*(\theta) = \exp[I(\theta)]$ .

La derivada segunda queda  $G''(\varepsilon) = - \int_{R_\theta} \frac{g^2(\theta)}{\pi^*(\theta) + \varepsilon g(\theta)} d\theta$ , así que  $G''(0) < 0$ , lo que confirma que  $\pi^*(\theta) = \exp[I(\theta)]$  maximiza  $G$ . Finalmente  $\pi(\theta) = c \exp[I(\theta)]$  es la función de densidad a priori propia que maximiza  $G$ , donde  $c = \left( \int_{R_\theta} \exp[I(\theta)] d\theta \right)^{-1}$

□

Las funciones de densidad a priori MDIP son invariantes ante cambios lineales en los parámetros, dándose los siguientes resultados generales:

**Tabla 2.1.** MDIP caso general parámetros localización y escala.

<i>f.d.p.</i> de los datos $f(x \theta)$	Medida de información en los datos $I(\theta)$ (2.36)	MDIP $\pi(\theta) \propto \exp[I(\theta)]$
$f(x - \theta)$	Constante	$\pi(\theta) \propto cte.$
$\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x}{\sigma}\right)$	Constante - $\ln\sigma$	$\pi(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma}$
$\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x - \theta}{\sigma}\right)$	Constante - $\ln\sigma$	$\pi(\theta, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma}$

Muchos autores han desarrollado las MDIP para distintos modelos de probabilidad, entre ellos Kass y Wasserman (1995), Venegas-Martínez (1990), Zellner (1996) o Zhang y Yao (1991) entre otros. Estos artículos incluyen comparaciones entre las distribuciones a priori MDIP y las que se obtienen con otros procedimientos.

Veamos, como caso particular, la aplicación de esta medida y su comparación con la distribución a priori que se obtendría al aplicar la regla de Jeffreys en el caso de la distribución normal cuya valor esperado  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  son desconocidas:

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right], \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.39)$$

Tendríamos:

$$\begin{aligned} I_X(\mu, \sigma) &= \int f_{\mu,\sigma}(x) \ln(f_{\mu,\sigma}(x)) dx \\ &= \int \left(\frac{-1}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right) f_{\mu,\sigma}(x) dx \\ &= \frac{-1}{2} \ln 2\pi e - \ln \sigma \end{aligned} \quad (2.40)$$

Aplicando el teorema 1, el resultado de la distribución a priori MDIP asociada a los parámetros  $\mu$  y varianza  $\sigma$  es:

$$\pi(\theta) \propto \exp[I(\theta)] \propto \frac{1}{\sigma}$$

Es decir, la distribución que a priori presenta “mínima información” es aquella en la que  $\mu$  y  $\sigma$  son independientes, siendo las distribuciones asociadas a  $\mu$  y  $\ln \sigma$  uniformes. En este caso la distribución inicial asociada a ambos parámetros coincide con la que se obtiene si para el mismo ejemplo se aplicara la regla modificada en función de parámetros de localización y escala de Jeffreys.

Veamos cómo se definen las MDIP ante distintas situaciones respecto a las observaciones y los parámetros y que nos resultarán útiles a la hora de establecer distribuciones iniciales no informativas en el caso que estamos estudiando.

### 2.5.1 MDIP para parámetros comunes a distintas funciones de densidad.

En general los distintos métodos que se utilizan para generar distribuciones a priori llegarán a distintas soluciones en función de la función  $f_i(x|\theta)$  que se considere. Para conseguir que la distribución inicial sea única, Zellner(1993) propone calcular aquella con la que se maximiza la información media contenida en las densidades  $f_i(x, \theta)$  en relación a la que aparece en la distribución a priori  $\pi(\theta)$ , para lo cual considera la función en  $\pi(\theta)$ :

$$G_n[\pi(\theta)] = \sum_{i=1}^n \left( \int I_i(\theta)\pi(\theta) d\theta - \int \pi(\theta)\ln(\pi(\theta)) d\theta \right) \quad (2.41)$$

Donde:

$$I_i(\theta) = \int f_i(x, \theta) \ln(f_i(x, \theta)) dx \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.42)$$

Para obtener la distribución a priori hay que maximizar  $G_n[\pi(\theta)]$  sujeto a la condición de que  $\pi(\theta)$  sea propia, es decir  $\int \pi(\theta) d\theta = 1$ , obteniéndose como resultado:

$$\pi_n(\theta) \propto \left( \prod_{i=1}^n e^{I_i(\theta)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.43)$$

Es decir, la media geométrica de las MDIP individuales.

### 2.5.2 MDIP para un conjunto de observaciones.

Cuando tenemos un conjunto de observaciones Zellner (1996) propone dos posibilidades:

1. Calcular la MDIP para todas las observaciones en conjunto, o
2. Dada la MDIP que maximiza la información esperada a priori de una observación, construir o establecer la función de densidad a posteriori dada la primera observación. Esta distribución a posteriori se puede usar como distribución a priori para la segunda observación, y así sucesivamente.

Si queremos obtener la distribución a priori que recoja las características de éstas observaciones en conjunto, en primer lugar supongamos que las  $n$  observaciones son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) Según  $f_{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ , se tendrá:

$$\begin{aligned}
 G_n[\pi(\theta)] &= \\
 &= \int \left( \int \dots \int f_{\theta}(x_1, \dots, x_n) \ln f_{\theta}(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n \right) \pi(\theta) d\theta \\
 &\quad - \int \pi(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

A partir de lo cual se obtiene:

$$G_n[\pi(\theta)] = \int I(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta - \int \pi(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta$$

Lo que coincide con el criterio aplicado al caso de una única observación. Es decir, considerando  $G_n[\pi(\theta)]$  y la condición de independencia e idéntica distribución de las observaciones, la MDIP que se obtiene es la misma que se obtendría en el caso de una única observación.

Si las observaciones no son *i.i.d.* y la función de densidad conjunta viene dada por  $\prod_{i=1}^n f_i(x_i, \theta)$ , insertando esta expresión en  $G_n[\pi(\theta)]$  definido anteriormente, el resultado es:

$$G_n[\pi(\theta)] = \int \bar{I}_n(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta - \int \pi(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta \quad (2.45)$$

Donde  $\bar{I}_n(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^n I_i(\theta)}{n}$

Siendo:

$$I_i(\theta) = \int f_i(x_i, \theta) \ln f_i(x_i, \theta) dx_i \quad (2.46)$$

Al maximizar  $G_n[\pi(\theta)]$  sujeto a que la distribución inicial del parámetro  $\pi(\theta)$  sea propia se obtiene  $\pi_n^*(\theta) \propto e^{\bar{I}_n(\theta)}$  o, lo que es lo mismo, la media geométrica de las densidades MDIP individuales,  $\pi_i(\theta) \propto e^{I_i(\theta)}$ :

$$\pi_n(\theta) \propto e^{\bar{I}_n(\theta)} = \left( \prod_{i=1}^n e^{I_i(\theta)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.47)$$

### 2.5.3 MDIP ante transformaciones inyectivas.

En Zellner (1977) se demuestra que para funciones de probabilidad con parámetros de localización y escala,  $f(x/\mu, \sigma) = \frac{c}{\sigma} f\left(\frac{1}{\sigma}(x - \mu)\right)$ , las MDIP son invariantes respecto a transformaciones lineales de los parámetros y de las observaciones. En el caso de transformaciones inyectivas más generales, Zellner (1991) demuestra que puede incluir condiciones de invarianza como condiciones añadidas al problema de optimización de  $G = \sum_{i=1}^n G_i$ , donde  $G_i$  se calcula como (2.36) para la  $i$ -ésima parametrización. En el caso de  $m$  transformaciones inyectivas,  $\eta_i = h_i(\mu)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  la MDIP invariante que resulta es:

$$\pi_n(\theta) \propto c \exp \left[ I(\mu) + \frac{1}{(m+1)} \sum_{i=1}^m \ln |h'_i| \right] \quad (2.48)$$

## 2.6 Relación entre la función de densidad a priori de Jeffreys y las MDIP.

Para establecer las MDIP, Zellner (1971) se basó en la entropía negativa, pero también se pueden considerar otras medidas de información y definir  $G(\pi(\theta))$ , cuya expresión se recoge en (2.37), en función de ellas. Por ejemplo, para obtener distribuciones a priori que sigan el modelo propuesto por Fisher considera la siguiente igualdad:

$$G_J[\pi(\theta)] = \int \pi(\theta) \ln[\det(I(\theta))^{1/2}] d\theta - \int \pi(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta \quad (2.49)$$

Donde  $\det(I(\theta))^{1/2}$  es la raíz cuadrada del determinante de la matriz de Fisher.

Maximizando  $G_J(\pi(\theta))$  sujeto a que  $\int_{R_\theta} \pi(\theta) d\theta = 1$  da como solución  $\pi_j^*(\theta) \propto \det(I(\theta))^{1/2}$  con  $\theta \in R_\theta$ . Es decir, obtiene una distribución MDIP con la forma de una distribución a priori de Jeffreys (1967) definida sobre el espacio paramétrico, que puede ser una región finita, posiblemente muy grande. Si la región no es finita puede ocurrir que la distribución inicial que se obtiene aplicando el método de Zellner (1971) sea impropia.

La solución MDIP tienen propiedades de invarianza limitadas, por ejemplo, son invariantes respecto a transformaciones lineales de la variable y de los parámetros, pero no respecto a todas las transformaciones continuas que sean inyectivas (uno a uno), cuando, sin embargo, la norma de Jeffreys (1967) para generar distribuciones iniciales no informativas (i.e.  $\pi_j^*(\theta) \propto \det(I(\theta))^{1/2}$ ) sí que da como resultado distribuciones que son invariantes ante cualquier transformación continua inyectiva. Con este resultado se deja abierta una cuestión sobre la medida de información que se podría usar,  $I(\theta)$  y/o  $\ln \det(I(\theta))^{1/2}$ , que se puede solucionar teniendo en cuenta la cantidad de invarianza que se desea<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup> Zellner (1991, pp. 24-25).

# MODELOS BAYESIANOS APLICADOS A LA GESTIÓN DE PESQUERÍAS – DISTRIBUCIONES INICIALES

## 3

Una de las cuestiones más importantes relacionadas con la valoración de las pesquerías explotadas es la estimación de los parámetros que aparecen en los modelos que tratan de describir la dinámica asociada a estas poblaciones, y que se desarrollan teniendo en cuenta los factores que pueden influir en su evolución. En el primer capítulo realizamos una descripción de los modelos que describen la evolución del stock de recursos pesqueros entre los que se encuentran los modelos agregados, en los que se considera de forma conjunta la influencia de los factores naturales en la dinámica de la población y se formulan en tiempo continuo, lo cual supone que tanto el ciclo reproductivo como el resto de los fenómenos demográficos que afectan a la población de peces se manifiestan de forma continuada en el tiempo. En este capítulo desarrollaremos las distribuciones iniciales no informativas cuando queremos aplicar técnicas bayesianas para estimar los parámetros que aparecen en los modelos de gestión de pesquerías.

En concreto nos centramos en los modelos *stock*-reclutamiento, que se formulan en tiempo discreto y se basan en las relaciones entre el

*stock* reproductor o frezante y el reclutamiento obtenido a partir de éste, esto permite ajustar el comportamiento estacional de algunas especies así como aquellas pesquerías en las que se establecen medidas que limitan la pesca en un período concreto del año, generalmente posterior al período de reproducción o de reclutamiento de nuevos individuos. En líneas generales, estos modelos vienen definidos por dos componentes, cuya dinámica es la siguiente: el *stock* de reproductores o de frezantes ( $S_{t-1}$ ) producirá la nueva generación de peces o recluta ( $X_t$ ), parte de estas reclutas serán capturados ( $P_t$ ) y el resto conformarán un nuevo *stock* de reproductores, conocido también como supervivientes (*escapement*), que darán lugar a la próxima generación. Por tanto, estos modelos suponen que el *stock* de reproductores no sobrevive para pasar a formar parte del *stock* de reclutas así como que la captura tiene lugar previamente al proceso de reproducción. Las ecuaciones (3.1) y (3.2) definen dichos modelos.

$$X_t = F(S_{t-1}, \theta) \quad (3.1)$$

$$S_t = X_t - P_t \quad (3.2)$$

Donde la ecuación (3.1) se denomina relación *stock*-reclutamiento dependiente del *stock* de reproductores en un instante determinado y de un vector de parámetros  $\theta$ .

Por otro lado, es evidente que para la evolución de un recurso pesquero uno de los factores más influyentes es la explotación que el hombre realiza sobre este recurso, así que es necesario, junto al modelo que recoja la dinámica del crecimiento, tener en cuenta una función que

---

recoja esta influencia y representa la producción de la pesquería o función de capturas con la que obtendríamos una ecuación de observación (determinista).

Para determinarla consideramos una versión discreta de la función de capturas propuesta por Schaefer (1954). Ésta supone que *la pesca por unidad de esfuerzo es proporcional a la magnitud de la población*, de forma que la función de producción adopta un caso especial de la función de Cobb-Douglas, con los exponentes restringidos a la unidad, donde:

$$P(t)=qE(t)X(t) \quad (3.3)$$

siendo  $q$  una constante que representa el coeficiente de capturabilidad, esto es, *la tasa instantánea de la mortalidad causada por unidad de esfuerzo pesquero* y  $E(t)$  el esfuerzo pesquero que, en líneas generales, constituye un indicador de la magnitud e intensidad de la actividad humana para extraer el pescado.

Para la discretización de la función (3.3), suponemos que la duración de la temporada de pesca es relativamente pequeña de forma que podemos obviar los efectos de la mortalidad natural y el crecimiento natural durante dicho período, con lo que la población seguirá una trayectoria decreciente, tal como recoge la ecuación (3.4):

$$\frac{dX(t)}{dt} = -qE(t)X(t) \quad (3.4)$$

En consecuencia, la actividad pesquera ejercida en una temporada de duración  $[t_0, t_1]$ , reducirá la población desde una biomasa inicial de  $X_t$  hasta una biomasa final  $S_t$ :

$$\int_{X_t}^{S_t} \frac{dx}{X(t)} = - \int_{t_0}^{t_1} qE(t) dt \quad (3.5)$$

Integrando la ecuación (3.5), y definiendo  $E_t$  como el esfuerzo pesquero ejercido durante la temporada de pesca, se obtiene la función de capturas descrita por Spence (1974):

$$P_t = X_t(1 - e^{-qE_t}) \quad (3.6)$$

### **3.1 Metodología estadística.**

#### **3.1.1 Modelo estado-medida.**

La función de *stock*-reclutamientos dada por la ecuación (3.1) junto a la ecuación de capturas (3.6) constituyen una versión determinista del modelo de producción general. No obstante, dada la incertidumbre asociada a toda pesquería, podemos incluir perturbaciones en ambas ecuaciones. Estas pueden añadirse de forma aditiva, como distribuciones normales con varianza fija o con coeficiente de variación fijo, o bien de forma multiplicativa, en cuyo caso los errores siguen una distribución lognormal. Esta última opción es la que seguimos, incorporando de forma

multiplicativa variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas en (3.1) y en (3.6) que representen respectivamente un error de proceso,  $w_t$ , que recoge la incertidumbre asociada a la dinámica de la población y un error de observación  $v_t$ , relativo a los posibles errores de medida. Se considera que ambas perturbaciones siguen una distribución normal, donde  $h_w$  y  $h_v$  representan respectivamente las precisiones (inversas de las varianzas) de los errores de proceso y observación. Como resultado, el modelo estadístico utilizado para estimar las biomásas y los parámetros biológicos adopta la siguiente forma:

$$\begin{cases} X_t = F(S_{t-1}, \theta) e^{w_t} & \text{con } w_t \sim N(0, h_w) & (3.7) \\ P_t = X_t(1 - e^{-qE_t}) e^{v_t} & \text{con } v_t \sim N(0, h_v) & (3.8) \end{cases}$$

Donde  $S_{t-1} = X_{t-1} - P_{t-1}$  .

El sistema de ecuaciones definido por (3.7) y (3.8) representa un modelo estado-medida sobre el que se pueden aplicar técnicas bayesianas para realizar las estimaciones de los parámetros. La ecuación de estado variará en función del modelo stock-reclutamiento que apliquemos a los datos, para lo que tendremos en cuenta las siguientes posibilidades:

**a) Modelo de Beverton-Holt**

$$X_t = \left( \frac{\alpha S_{t-1}}{1 + \beta S_{t-1}} \right) e^{w_t} \quad \text{con } w_t \sim N(0, h_w) \quad (3.9)$$

**b) Modelo de Ricker**

$$X_t = (\alpha S_{t-1} e^{-\beta S_{t-1}}) e^{w_t} \quad \text{con } w_t \sim N(0, h_w) \quad (3.10)$$

**c) Modelo de Cushing**

$$X_t = (\alpha S_{t-1}^\beta) e^{w_t} \quad \text{con } w_t \sim N(0, h_w) \quad (3.11)$$

Para facilitar los cálculos a la hora de determinar las distribuciones a priori relacionadas con los parámetros, reformulamos el modelo definido en (3.7) y (3.8) considerando logaritmos neperianos, con ello la forma estocástica de las ecuaciones del modelo queda:

$$\begin{cases} \ln X_t = \ln F(S_{t-1}, \theta) + w_t & w_t \sim N(0, h_w) \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} \ln P_t = \ln [X_t (1 - e^{-qE_t})] + v_t & v_t \sim N(0, h_v) \end{cases} \quad (3.13)$$

En cualquiera de los casos anteriores, además de los parámetros que aparecen en las ecuaciones del modelo estado-medida, las variables que se refieren al estado de la biomasa ( $X_t$ ) también son desconocidas y

deberán ser estimadas a partir de las observaciones de esfuerzo y capturas disponibles.

### **3.1.2 Muestreo de Gibbs.**

Una vez claro que el objetivo es estimar las biomásas y los parámetros de los modelos que surgen a partir de las ecuaciones (3.12) y (3.13) y que en conjunto forman un modelo estado-medida no lineal, nos planteamos la metodología que se podría seguir para llevar a cabo estas estimaciones. Entre ellas están el Filtro de Kalman Extendido combinado con Máxima-verosimilitud o la técnica que se basa en los métodos bayesianos conocida como Muestreo de Gibbs, y que es la que vamos a utilizar. Una de las aplicaciones del Muestreo de Gibbs que cabe destacar es la estimación de modelos estado-medida no lineales desarrollada por Carlin et al. (1992). Otras aplicaciones que han utilizado este método son las de García Ordaz y García del Hoyo (1998), Millar y Meyer (2000) o González Galán (2004), que incorpora factores ambientales en las relaciones stock-reclutamiento.

El algoritmo mencionado consiste en generar muestras aleatorias de la distribución conjunta a posteriori  $f(Y_0, Y_1, \dots, Y_n|X)$ , donde  $(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$  son las variables a estimar y  $X$  las variables observadas, a partir de las distribuciones condicionales completas univariantes para cada una de las variables que intervienen en el modelo. De forma general, y

dado un vector inicial  $(Y_0^{(0)}, Y_1^{(0)}, \dots, Y_n^{(0)})$  obtenido mediante la simulación de las distribuciones *a priori*, el algoritmo sigue los siguientes pasos:

**Paso 1:**

$$1^{\text{a}} \text{ extracción } Y_0^{(1)} \sim f(Y_0 | Y_1^{(0)}, \dots, Y_n^{(0)}, X)$$

$$2^{\text{a}} \text{ extracción } Y_1^{(1)} \sim f(Y_1 | Y_0^{(1)}, Y_2^{(0)}, \dots, Y_n^{(0)}, X)$$

$$i\text{-ésima extracción } Y_i^{(1)} \sim f(Y_i | Y_0^{(1)}, \dots, Y_{i-1}^{(1)}, Y_{i+1}^{(0)}, \dots, Y_n^{(0)})$$

$$\text{Extracción final } Y_n^{(1)} \sim f(Y_n | Y_0^{(1)}, Y_1^{(1)}, \dots, Y_{n-1}^{(1)}, X)$$

**Paso 2:**

Tomar como vector inicial

$$(Y_0^{(1)}, Y_1^{(1)}, \dots, Y_n^{(1)})$$

Volver al paso 1 o salir.

Esta secuencia de valores constituye una cadena de Markov, de forma que, operando de forma sucesiva un número  $l$  de veces suficientemente grande, obtendríamos el vector  $(Y_0^{(l)}, Y_1^{(l)}, \dots, Y_n^{(l)})$  que, como demostraron Geman y Geman (1984), converge en distribución a una muestra aleatoria de tamaño unidad de la distribución conjunta  $f(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$  a medida que  $l$  tiende a infinito. Repitiendo el proceso  $G$  veces en paralelo se obtendría una muestra de tamaño  $G$  de extracciones

aleatorias de la distribución conjunta, de tal forma que puede ser utilizada para estimar las densidades marginales y cualquier estadístico de dichas distribuciones. Las extracciones finales de la distribución conjunta la denotaremos por  $(Y_0^k, Y_1^k, \dots, Y_n^k)$ , para  $k=1, 2, \dots, G$ .

Para la estimación de las densidades marginales puede utilizarse el estimador de núcleo, basado en el teorema de Rao-Blackwell, y desarrollado por Gelfand y Smith (1990), que, para una variable cualquiera,  $f(Y_i)$  adoptará la forma

$$\hat{f}(Y_i) = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^G f(Y_i | Y_0^k, \dots, Y_{i-1}^k, Y_{i+1}^k, \dots, Y_n^k, X) \quad (3.14)$$

También se pueden estimar las esperanzas matemáticas de las distribuciones marginales, que serían:

$$\hat{E}(Y_i) = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^G E(Y_i | Y_0^k, \dots, Y_{i-1}^k, Y_{i+1}^k, \dots, Y_n^k, X) \quad (3.15)$$

En nuestro caso las variables no observables son:

- Los parámetros de la ecuación de biomasa y la precisión del error del proceso, llamaremos  $\theta_1$  al vector de parámetros  $(\alpha, \beta, h_w)$
- Los parámetros de la ecuación de capturas y la precisión del error de observación, notaremos por  $\theta_2$  al vector  $(q, h_v)$
- Las biomazas al inicio de cada campaña de pesca:  $X_t$ , con  $t=0, 1, 2, \dots, T$

Las variables que observamos y de las que disponemos información son: las capturas  $(P_t)$  y el esfuerzo ejercido  $(E_t)$ .

Fijándonos en el modelo estado-medida definido por (3.12) y (3.13) y considerando cualquiera de las relaciones concretas de stock-reclutamiento (3.9, 3.10 ó 3.11), observamos que tenemos un total de  $T+6$  variables aleatorias no observables referidas a la biomasa más el número de parámetros que definen el modelo, y que son  $\ln X_0, \ln X_1, \dots, \ln X_T, \alpha, \beta, q, h_v$  y  $h_w$ . La distribución conjunta de las  $T+6$  variables aleatorias combina la información a priori con las variables observables a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 & f(LX_0, LX_1, \dots, LX_T, \alpha, \beta, q, h_w, h_v, P_1, \dots, P_T) \\
 &= f(LT_0) \left[ \prod_{t=1}^T f(LX_t | LX_{t-1}, P_{t-1}, \alpha, \beta, h_w) \right] \left[ \prod_{t=1}^T f(\ln P_t | LX_t, q, h_v) \right] \quad (3.16) \\
 & \quad f(\alpha) f(\beta) f(q) f(h_w) f(h_v)
 \end{aligned}$$

Donde usamos la notación  $LX_t$  por  $\ln X_t$ .

Teniendo en cuenta que la biomasa de un año está condicionada a la biomasa y la captura del año anterior, los parámetros de la relación stock-reclutamiento y el error del proceso, y la relación, al tomar logaritmo neperiano y que se describe en la ecuación (3.12), corresponde a una distribución normal, la función de densidad condicionada tiene la forma:

$$f(LX_t | LX_{t-1}, P_{t-1}, \alpha, \beta, h_w) = \frac{h_w}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h_w}{2} [LX_t - \ln F(S_{t-1}, \theta_1)]^2} \quad (3.17)$$

Donde  $S_{t-1} = X_{t-1} - P_{t-1} = e^{LX_{t-1}} - P_{t-1}$  y  $\ln F(S_{t-1}, \theta_1)$  dependerá de la relación stock-reclutamiento (3.8, 3.9 ó 3.10).

Por ejemplo, si partimos de la relación según el modelo de Cushing (3.10), tendríamos

$$\begin{aligned} \ln F(S_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_1) &= \ln(\alpha S_{t-1}^\beta) = \ln \alpha + \beta \ln S_{t-1} \\ &= \ln \alpha + \beta \ln(e^{LX_{t-1}} - P_{t-1}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por otra parte, la distribución de la captura condicionada a la biomasa, el coeficiente de capturabilidad y el error de observación sigue una distribución normal que, partiendo de la ecuación (3.8), se define como

$$f(\ln P_t | LX_t, q, h_v) = \frac{h_v}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h_v}{2} [\ln P_t - G(LX_t, \boldsymbol{\theta}_2)]^2} \quad (3.19)$$

Siendo

$$G(LX_t, \boldsymbol{\theta}_2) = \ln[X_t(1 - e^{-qEt})] = LX_t + \ln(1 - e^{-qEt}) \quad (3.20)$$

Para poder aplicar el generador de muestras de Gibbs necesitamos determinar las distribuciones a priori de las variables que no son observables y, aplicando el teorema de Bayes, obtener las distribuciones condicionales completas de cada una de ellas, pero dadas las características de los modelos con los que estamos trabajando y la metodología que vamos a seguir, resulta suficiente determinar las distribuciones iniciales del vector formado por los parámetros, las precisiones de las perturbaciones y la biomasa inicial, ya que para el resto de las biomazas ( $X_t$ ,  $t=1,2,\dots,T$ ) se pueden obtener a partir de las ecuaciones

que definen el modelo estado-medida. El hecho de trabajar con relaciones no lineales dificulta la caracterización del núcleo de estas distribuciones condicionadas, por lo que al final nos encontraremos con una mixtura de distribuciones.

### **3.2 Distribuciones iniciales mínimo informativas y no informativas asociadas a los parámetros.**

Con respecto a las distribuciones *a priori*, se puede hablar de dos tipos de distribuciones: informativas y no informativas. Box y Tiao (1973) definen una distribución *a priori* no informativa (o de referencia) como aquella que proporciona muy poca información con relación al experimento que se esté estudiando, en este caso la valoración del *stock* de recursos; el problema que suelen presentar estas distribuciones es que son muy sensibles a los sistemas de medida. Por otra parte, una distribución *a priori* informativa permite incorporar información disponible sobre el *stock* a partir de fuentes literarias o de la experiencia con otros *stocks*, y puede que influya en los resultados.

En los estudios sobre la dinámica de pesquerías, donde se aplican métodos bayesianos de estimación, no se aprecia un consenso en cuanto al uso de uno u otro tipo de distribuciones, algunos autores recomiendan tomarlas no informativas por defecto (Walters y Ludwig, 1994), mientras que otros consideran que, siempre que se pueda, debe incluirse el conocimiento histórico o la experiencia con otros *stocks* a la hora de determinarlas (Punt y Hilborn, 1997).

En cuanto a la determinación de las distribuciones iniciales asociadas a los parámetros que aparecen en las ecuaciones del modelo de espacio de estados (3.12) y (3.13), Tenemos que diferenciar si contamos con algún tipo de información sobre los mismos o si, por el contrario, partimos de la base de que no tenemos ninguna información a priori sobre su comportamiento. Por otro lado, consideraremos la biomasa inicial ( $X_0$ ) como una variable cuya distribución inicial es independiente del resto de las biomásas y en la que no interviene ninguno de los parámetros del modelo.

Otras situaciones que han llevado a desarrollar distribuciones a priori no informativas es cuando se trata de estimar modelos de producción con frontera, esto lleva a que la perturbación asociada a los modelos es unilateral, y por ello no se cumplen las condiciones de regularidad y no se pueden aplicar los métodos convencionales, Ortega Irizo y Basulto Santos (2009) han desarrollado una metodología de determinación de distribuciones a priori en estos casos.

### **3.2.1 Determinación de la distribución inicial de los parámetros cuando existe información previa.**

Supongamos que tenemos información previa sobre los parámetros que aparecen en los modelos que estudiamos, en concreto podemos determinar el valor esperado inicialmente y la precisión asociada a la

variable. Para determinar la distribución a priori mínimo informativa se puede aplicar el método de la máxima entropía.

Hemos visto la definición de entropía o incertidumbre asociada a una función de densidad de probabilidades  $f(x)$  como:

$$H = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x) dx \quad (3.21)$$

El método de máxima entropía, que consiste en maximizar  $H$ , considerando varias condiciones, se ha utilizado como procedimiento para generar distribuciones a priori mínimo informativas de forma muy frecuente. Shannon (1948) ya establece que maximizar la entropía bajo la condición de normalización de la función de densidad daba como resultado la distribución uniforme. Si se añaden más condiciones, en concreto, si se proporciona información sobre los dos primeros momentos centrales de la variable, la distribución a priori mínimo informativa es la distribución normal.

Veamos que, para un parámetro cualquiera ( $\theta_0$ ) del que suponemos conocido el valor esperado inicialmente y su precisión, podemos, aplicando el método de máxima entropía, asignarle la distribución normal con valor esperado y precisión las correspondientes inicialmente al parámetro y que llamaremos  $\eta_{01}$  y  $h_0$  respectivamente.

En principio, dados  $\eta_{01}$  y  $h_0$ , la distribución inicial asociada a  $\theta_0$ ,  $\pi(\theta_0)$ , tiene que cumplir las siguientes condiciones:

$$* C1: \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\theta_0) d\theta_0 = 1, \quad (3.22)$$

$$* C2: \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0 \pi(\theta_0) d\theta_0 = \eta_{01}, \quad (3.23)$$

$$* C3: \int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_0 - \eta_{01})^2 \pi(\theta_0) d\theta_0 = \frac{1}{h_0}, \quad (3.24)$$

o equivalentemente  $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0^2 \pi(\theta_0) d\theta_0 = \frac{1}{h_0} + \eta_{01}^2 = \eta_{02}$

Para aplicar el método de la máxima entropía el objetivo es

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } W(\pi(LX_0)) &= - \int \pi(\theta_0) \ln[\pi(\theta_0)] d\theta_0 \text{ respecto a} \\ &\pi(\theta_0) \\ \text{s.a. } C1, C2 \text{ y } C3 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Este problema se puede expresar como el lagrangiano:

$$\begin{aligned} L = \int \pi(\theta_0) \ln[\pi(\theta_0)] d\theta + \lambda_0 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\theta_0) d\theta_0 - 1 \right) \\ + \lambda_1 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0 \pi(\theta_0) d\theta_0 - \eta_{01} \right) \\ + \lambda_2 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0^2 \pi(\theta_0) d\theta_0 - \eta_{02} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Para el que una condición necesaria de valor extremo es que

$$\ln\pi(\theta_0) + 1 + \lambda_0 + \lambda_1\theta_0 + \lambda_2\theta_0^2 = 0 \quad (3.27)$$

Además de las condiciones *C1* (3.21), *C2* (3.22) y *C3* (3.23), y que la siguiente matriz sea definida positiva:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \eta_{01} \\ \eta_{01} & \eta_{02} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Lo cual se verifica ya que  $a_{11}=1>0$  y  $\det(A) = \det(A) = \eta_{02} - \eta_{01}^2 = \frac{1}{h_0} > 0$

Teniendo en cuenta (3.26), la distribución a priori para  $\theta_0$  tiene la siguiente forma:

$$\pi^*(\theta_0|\lambda) \propto \exp\{-(1 + \lambda_0 + \lambda_1\theta_0 + \lambda_2\theta_0^2)\} \quad (3.29)$$

donde  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ , con  $\lambda_2 > 0$ . Para determinar los valores de  $\lambda$ , hay que sustituir  $\pi^*(\theta_0|\lambda)$  en las condiciones *C1* (3.21), *C2* (3.22) y *C3* (3.23). No es trivial llegar a una solución analítica cuando  $k > 2$ , sino que hay que usar técnicas de optimización no lineal. Zellner y Highfield (1988) desarrollaron una técnica para calcular dichos multiplicadores basándose en el método de Newton-Raphson; más recientemente Wu (2003) busca la solución actualizando de forma secuencial la función de densidad de máxima entropía.

En nuestro caso, dado que  $k=2$ , resolveremos el sistema de ecuaciones para llegar a la solución exacta.

Partiendo de la condición C1 (3.21), se tiene que cumplir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-(1 + \lambda_0 + \lambda_1\theta_0 + \lambda_2\theta_0^2)\} d\theta_0 = 1 \quad (3.30)$$

Ajustando los términos de  $(1 + \lambda_0 + \lambda_1\theta_0 + \lambda_2\theta_0^2)$  para que tengamos una diferencia al cuadrado, se verifica la igualdad:

$$-(1 + \lambda_0 + \lambda_1\theta_0 + \lambda_2\theta_0^2) = -\lambda_2\left(\theta_0 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} - (\lambda_0 + 1)\right) \quad (3.31)$$

De lo que se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\lambda_2\left(\theta_0 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right)^2\right\} \exp\left\{\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} - (\lambda_0 + 1)\right\} d\theta_0 = 1 \quad (3.32)$$

El término  $\exp\left\{\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} - (\lambda_0 + 1)\right\}$  es una constante y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\lambda_2\left(\theta_0 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right)^2\right\} dLX_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_2}} \quad (3.33)$$

Por lo que, finalmente la igualdad en (3.31) nos lleva a que:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_2}} \exp\left\{\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} - (\lambda_0 + 1)\right\} = 1 \quad (3.34)$$

Si aplicamos el mismo procedimiento sobre 3.22 y 3.23, obtenemos las siguientes igualdades:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_2}} \exp\left\{\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} - (\lambda_0 + 1)\right\} \left(\frac{-\lambda_1}{2\lambda_2}\right) = \eta_{01} \quad (3.35)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_2}} \exp\left\{\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2} - (\lambda_0 + 1)\right\} \left(\frac{1}{2\lambda_2} + \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2^2}\right) = \frac{1}{h_0} + \eta_{01}^2 \quad (3.36)$$

Teniendo en cuenta estas tres últimas igualdades, se verifica:

$$\left(\frac{-\lambda_1}{2\lambda_2}\right) = \eta_{01} \quad (3.37)$$

$$\left(\frac{1}{2\lambda_2} + \frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2^2}\right) = \frac{1}{h_0} + \eta_{01}^2 \quad (3.38)$$

de donde:

$$\lambda_1 = -h_0\eta_{01} \text{ y } \lambda_2 = \frac{h_0}{2} \quad (3.39)$$

De (3.33) obtenemos que

$$\exp\{-(\lambda_0 + 1)\} = \frac{\sqrt{h_0}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \exp\left(\frac{h_0}{2}\eta_{01}^2\right) \right]^{-1} \quad (3.40)$$

Es decir, al establecer el valor esperado y la precisión, además de la condición de normalización, obtenemos una solución única para los multiplicadores de Lagrange que ajustan la distribución a una distribución normal. Podemos comprobarlo sustituyendo los valores obtenidos en (3.38) y (3.39) en la definición general de  $\pi^*(LX_0|\lambda)$  (3.28), se tiene:

$$\pi^*(LX_0|\lambda) \propto \frac{\sqrt{h_0}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \exp\left(\frac{h_0}{2}\eta_{01}^2\right) \right]^{-1} \exp\left\{-\left(-h_0\eta_{01}\theta_0 + \frac{h_0}{2}\theta_0^2\right)\right\} = \quad (3.41)$$

$$\frac{\sqrt{h_0}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\left(-h_0\eta_{01}\theta_0 + \frac{h_0}{2}\theta_0^2 + \frac{h_0}{2}\eta_{01}^2\right)\right\} = \quad (3.42)$$

$$\frac{\sqrt{h_0}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{h_0}{2}(\theta_0 - \eta_{01})^2\right\} \quad (3.43)$$

Por lo tanto la solución óptima por el procedimiento de máxima entropía, es que, bajo las condiciones iniciales de esperanza y precisión ya dados, la distribución inicial debe ser una distribución normal con valor esperado y precisión las determinadas inicialmente, con lo cual  $\theta_0 \sim N(\eta_{01}, h_0)$  describe la información inicial del sistema.

### 3.2.2 Determinación de la distribución inicial de los parámetros cuando no existe información previa.

De los parámetros que aparecen en los modelos que estudiamos, biomasa inicial,  $\alpha, \beta, q, h_w$  y  $h_v$ . vamos a suponer que el primero de ellos,  $X_0$ , es independiente del resto.

Los parámetros para los que trataremos de definir formalmente las distribuciones iniciales no informativas, suponiendo que no tenemos ninguna información previa sobre su comportamiento, son  $\alpha, \beta, q, h_w$  y  $h_v$ . Si nos fijamos en la expresión (3.16) vemos que la función de verosimilitud conjunta se puede separar como producto de la función de verosimilitud asociada a los parámetros de la ecuación de estados y la función de verosimilitud asociada a los parámetros de la ecuación de medidas, sin que haya parámetros en común en ambas funciones, ello nos permite separar el cálculo de las distribuciones iniciales para dos vectores paramétricos independientes, llamémosles  $\theta_1 = (\alpha, \beta, h_w)$  y  $\theta_2 = (q, h_v)$ .

### 3.2.3 Determinación de la distribución inicial de los parámetros de la ecuación de estado $\theta_1 = (\alpha, \beta, h_w)$ con el método de Jeffreys.

A partir de la igualdad (3.9), La función de verosimilitud asociada a  $\theta_1$  es

$$l(\theta_1 | LX_0, LX_1, \dots, LX_T) \propto \prod_{t=1}^T f(LX_t | LX_{t-1}, \theta_1) \quad (3.44)$$

$$= \prod_{t=1}^T \left\{ \sqrt{\frac{h_w}{2\pi}} \exp \left[ -\frac{h_w}{2} (LX_t - \ln F(S_{t-1}, \theta_1))^2 \right] \right\}$$

Donde  $LX_t = \ln X_t$ , para  $t=0,1,\dots,T$  y  $F(S_{t-1}, \theta_1)$  depende de la relación de reclutamiento que estamos considerando (ecuaciones 3.11, 3.12 y 3.13).

En primer lugar trataremos de determinar las distribuciones iniciales aplicando la regla de Jeffreys, para lo que necesitamos determinar la matriz de información de Fisher. Por la propiedad (2.14), teniendo en cuenta que estamos ante una cadena de Markov, podemos expresar dicha matriz como la suma de los siguientes términos:

$$I_{L\underline{X}}(\theta) = I_{LX_0}(\theta) + E_{LX_0}[I_{LX_1|LX_0}(\theta)] \quad (3.45)$$

$$+ E_{LX_1}[I_{LX_2|LX_1}(\theta)] + \dots + E_{LX_{T-1}}[I_{LX_T|LX_{T-1}}(\theta)]$$

La solución final para la distribución inicial conjunta del primer vector paramétrico  $\theta_1 = (\alpha, \beta, h_w)$  es:

$$\begin{aligned} \det[I_X(\alpha, \beta)] &\propto \frac{1}{\alpha^2} \left[ n \sum_{t=0}^{n-1} E_{LX_t}[(\ln S_t)^2] - \left( \sum_{t=0}^{n-1} E_{LX_t}(\ln S_t) \right)^2 \right] \\ &= \frac{n}{\alpha^2} \left[ \sum_{t=0}^{n-1} \text{Var}_{LX_t}[\ln S_t] + n \text{Var}(\mathbf{E}_{LX}[\mathbf{lnS}]) \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde  $\mathbf{E}_{LX}[\mathbf{lnS}]$  es el vector formado por  $(E_0(\ln S_0), E_1(\ln S_1), \dots, E_{n-1}(\ln S_{n-1}))$

$$\text{y } \text{Var}[E] = \frac{\sum_{i=0}^n E_i^2}{n} - \left( \frac{\sum_{i=0}^{n-1} E_i}{n} \right)^2.$$

Y además, dado  $S_t = X_t - P_t = e^{LX_t} - P_t$

- $F(S_t, \theta_1) = \frac{S_t}{1 + \beta S_t}$  si la ecuación de estados se define a partir de la relación de Beverton-Holt.
- $F(S_t, \theta_1) = S_t$  en el caso de que la relación que se tome sea la de Ricker.
- $F(S_t, \theta_1) = \ln(S_t)$  si se considera la función de Cushing.

Lo demostraremos para uno de los casos, en concreto considerando la función de reclutamiento de Cushing, que es el que vamos a usar en la aplicación práctica.

Siguiendo el modelo de Cushing, la relación de stock-reclutamiento, incluyendo el término del error de sistema es  $X_t = \alpha S_{t-1}^\beta e^{w_t}$  para  $t=1, 2, \dots, T$ . Si consideramos logaritmo neperiano, trabajamos finalmente con una distribución normal:

$$LX_t = \ln X_t = \ln \alpha + \beta \ln S_{t-1} + w_t \rightarrow \ln X_t = LX_t \sim N(\ln \alpha + \beta \ln S_{t-1}, w_t)$$

Por lo tanto, la función de verosimilitud de  $LX_t$  condicionada a  $LX_{t-1}$  es:

$$l((\alpha, \beta, h_w) | LX_t, LX_{t-1}) = \left(\frac{h_w}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{h_w}{2}(LX_t - \ln \alpha - \beta \ln S_{t-1})^2\right] \quad (3.47)$$

Para  $t=1,2,\dots,T$ , por lo que tomando logaritmo neperiano de esta función, el resultado es:

$$\ln l((\alpha, \beta, h_w) | LX_t, LX_{t-1}) = \frac{1}{2} \ln h_w - \frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{h_w}{2} (LX_t - \ln \alpha - \beta \ln S_{t-1})^2 \quad (3.48)$$

Para construir la matriz de Fisher hay que calcular las derivadas segundas del logaritmo de la función de verosimilitud respecto a los parámetros que estamos estudiando, y el valor esperado de estas derivadas:

- Derivadas parciales primeras y segundas respecto a los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $h_w$ :

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{h_w}{2\alpha} (LX_t - \ln \alpha - \beta \ln S_{t-1})$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{h_w}{2} \ln S_{t-1} (LX_t - \ln \alpha - \beta \ln S_{t-1})$$

$$\frac{\partial l}{\partial h_w} = \frac{1}{2h_w} - \frac{1}{2} (LX_t - \ln \alpha - \beta \ln S_{t-1})^2$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} = -\frac{h_w}{2\alpha^2} (LX_t - \ln \alpha - \beta \ln S_{t-1} + 1)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} = -\frac{h_w}{2} (\ln S_{t-1})^2$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial h_w^2} = \frac{-1}{2h_w^2}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \alpha} = -\frac{h_w}{2\alpha} \ln S_{t-1}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial h_w} = \frac{\partial^2 l}{\partial h_w \partial \alpha} = \frac{1}{2\alpha} (LX_t - \ln \alpha - \beta \ln S_{t-1})$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial h_w} = \frac{\partial^2 l}{\partial h_w \partial \beta} = \frac{1}{2} \ln S_{t-1} (LX_t - \ln \alpha - \beta \ln S_{t-1})$$

- Valor esperado de las derivadas segundas, respecto a  $LX_t$ , y dado  $LX_{t-1}$ :

$$E \left[ \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} \right] = -\frac{h_w}{2\alpha^2}$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} \right] = -\frac{h_w}{2} (\ln S_{t-1})^2$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 l}{\partial h_w^2} \right] = \frac{-1}{2h_w^2}$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} \right] = -\frac{h_w}{2\alpha} \ln S_{t-1}$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial h_w} \right] = \frac{1}{2\alpha} E(LX_t - \ln \alpha - \beta \ln S_{t-1}) = 0$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial h_w} \right] = \frac{1}{2} \ln S_{t-1} E(LX_t - \ln \alpha - \beta \ln S_{t-1}) = 0$$

- Matriz de la información de Fisher de  $LX_t$  condicionada a  $LX_{t-1}$ :

$$I_{LX_t|LX_{t-1}}(\alpha, \beta, h_w) = \begin{pmatrix} \frac{h_w}{2\alpha^2} & \frac{h_w}{2\alpha} \ln S_{t-1} & 0 \\ \frac{h_w}{2\alpha} \ln S_{t-1} & \frac{h_w}{2} (\ln S_{t-1})^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2h_w^2} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Si calculamos los valores esperados sobre las componentes de esta matriz, obtenemos :

$$E_{LX_{t-1}}[I_{LX_t|LX_{t-1}}(\alpha, \beta, h_w)] = \begin{pmatrix} \frac{h_w}{2\alpha^2} & \frac{h_w}{2\alpha} E_{LX_{t-1}}(\ln S_{t-1}) & 0 \\ \frac{h_w}{2\alpha} E_{LX_{t-1}}(\ln S_{t-1}) & \frac{h_w}{2} E_{LX_{t-1}}[(\ln S_{t-1})^2] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2h_w^2} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Recordamos que  $\ln S_t = \ln(X_t - P_t) = \ln(e^{LX_t} - P_t)$  y, Dado que  $X_0$  no depende de  $\theta_1$ ,  $I_{X_0}(\theta_1) = 0$ . El resultado final es

$$I_X(\alpha, \beta, h_w) = \begin{pmatrix} \frac{nh_w}{2\alpha^2} & \frac{h_w}{2\alpha} \sum_{t=1}^n E_{LX_{t-1}}(\ln S_{t-1}) & 0 \\ \frac{h_w}{2\alpha} \sum_{t=1}^n E_{LX_{t-1}}(\ln S_{t-1}) & \frac{h_w}{2} \sum_{t=1}^n E_{LX_{t-1}}[(\ln S_{t-1})^2] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2h_w^2} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$= \begin{pmatrix} I_X(\alpha, \beta)_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & I_X(h_w) \end{pmatrix}$$

$I_X(\alpha, \beta, h_w)$  es una matriz diagonal por bloques, es decir, los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  son, conjuntamente, independientes de  $h_w$ , con ello podemos aplicar la regla modificada de Jeffreys y separar  $h_w$ , como parámetro de escala, de  $\alpha$  y  $\beta$ , para determinar su distribución a priori:

$$\pi(h_w) \propto \sqrt{-E \left[ \frac{\partial^2 l}{\partial h_w^2} \right]} \propto \sqrt{\frac{1}{2h_w^2}} \propto \frac{1}{h_w} \quad (3.52)$$

Por otro lado, la distribución a priori conjunta para los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  es  $\pi(\alpha, \beta) \propto (\det [I_X(\alpha, \beta)])^{1/2}$ , donde:

$$\begin{aligned} \det[I_X(\alpha, \beta)] &\propto \frac{1}{\alpha^2} \left[ n \sum_{t=0}^{n-1} E_{LX_t}[(\ln S_t)^2] - \left( \sum_{t=0}^{n-1} E_{LX_t}(\ln S_t) \right)^2 \right] \\ &= \frac{n}{\alpha^2} \left[ \sum_{t=0}^{n-1} \text{Var}_{LX_t}[\ln S_t] + n \text{Var}(E_{LX}[\ln S]) \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

siendo  $E_{LX}[\ln S]$  es el vector formado por  $(E_0(\ln S_0), E_1(\ln S_1), \dots, E_{n-1}(\ln S_{n-1}))$

$$\text{y } \text{Var}[E] = \frac{\sum_{i=0}^n E_i^2}{n} - \left( \frac{\sum_{i=0}^{n-1} E_i}{n} \right)^2.$$

Vemos que el hecho de trabajar con variables dependientes y con formas no lineales añade una gran complejidad a las distribuciones iniciales, si consideramos todo el proceso en conjunto la solución analítica es inviable. Podemos garantizar que la distribución del logaritmo del parámetros asociado a la perturbación ( $h_w$ ) es uniforme, y que, si el término de la varianza no depende de  $\alpha$ , este parámetro también seguiría

una distribución log-uniforme, pero en principio no podemos afirmar nada sobre  $\alpha$  y  $\beta$  con seguridad.

Teniendo en cuenta que con la metodología que vamos aplicar el proceso se actualiza de forma recursiva con las técnicas bayesianas y el algoritmo de Gibbs, podemos establecer la distribución inicial de los parámetros considerando únicamente el primer período en el que necesitamos definirlos ( $t=1$ )<sup>1</sup>. Zellner (1993) ya indica que es factible, dado un conjunto de observaciones, establecer la MDIP para la primera de ellas y obtener la distribución a posteriori condicionada de la segunda observación dada la primera, que puede ser usada como distribución a priori en el análisis de la segunda observación, y así sucesivamente.

Para determinar la distribución a priori no informativa de la biomasa inicial  $X_0$ , vamos a suponer que su distribución inicial no depende de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , ello da como resultado que el determinante de la matriz de información de Fisher es:

$$\begin{aligned} \det[I_X(\alpha, \beta)] &\propto \frac{1}{\alpha^2} \left[ E_{LX_0}[(\ln S_0)^2] - [E_{LX_0}(\ln S_0)]^2 \right] \\ &= \frac{1}{\alpha^2} [Var_{LX_0} \ln(X_0 - P_0)] \end{aligned} \quad (3.54)$$

$LX_0$  no depende de los parámetros, así que  $[Var_{LX_0} \ln(X_0 - P_0)]$  es constante en relación a ellos, por lo tanto

---

<sup>1</sup> Venegas-Martínez (1990) utiliza este procedimiento para establecer las distribuciones a priori en un modelo del filtro de Kalman.

$$\pi(\alpha, \beta) \propto (\det [I_x(\alpha, \beta)])^{1/2} \propto \frac{1}{\alpha} \quad (3.55)$$

De lo que se deduce que  $\beta$  sigue una distribución uniforme y  $\ln\alpha$  sigue una distribución uniforme. Este resultado se repite si consideramos los modelos de Ricker o de Beverton-Holt.

### 3.2.4 Determinación de la distribución inicial de los parámetros de la ecuación de estado $\theta_1 = (\alpha, \beta, h_w)$ con el método de Zellner.

Veamos si las distribuciones iniciales obtenidas se mantienen o cambian aplicando otros procedimientos, en concreto el propuesto por Zellner(1993).

Los modelos que estudiamos son modelos dinámicos donde la variable en un instante  $t$  está condicionada únicamente al instante anterior  $t-1$ , como punto de salida para aplicar el procedimiento descrito por Zellner trabajaremos con las distribuciones condicionales en cada instante, en lugar de la distribución conjunta para todo el período de estudio. Vamos a aplicar el procedimiento para construir las MDIP para un conjunto de  $T$  variables<sup>2</sup>, para ello definimos la función:

<sup>2</sup> Dado un conjunto de variables con parámetros en común ( $\theta$ ), para las que la función de densidad conjunta se puede expresar como  $\prod_{k=1}^n f_i(x_i|\theta)$ , y dadas las MDIP individuales  $\pi_i(\theta) = e^{H_i(\theta)}$ , la distribución inicial conjunta se calcula como la media geométrica de las MDIP individuales, es decir,  $\pi_T(\theta) = e^{\bar{H}(\theta)}$ , donde  $\bar{H}(\theta) = \sum_{i=1}^n H_i(\theta)/n$

$$G_T[\pi(\theta)] = \sum_{t=1}^T \left[ \int I_t(\theta) \pi(\theta) d\theta - \int \pi(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta \right] \quad (3.56)$$

Donde

$$I_t(\theta) = - \int_{R_{LX_t}} f(LX_t | LX_{t-1}, \theta_1) \ln [f(LX_t | LX_{t-1}, \theta_1)] dLX_t \quad (3.57)$$

Es la entropía asociada a  $f(LX_t | LX_{t-1}, \theta_1)$

Como la función de densidad conjunta se puede expresar como

$$\prod_{t=1}^T f(LX_t | LX_{t-1}, \theta_1) \quad (3.58)$$

Maximizando la función  $G_T[\pi(\theta_1)]$  sujeta a que  $\int \pi(\theta_1) d\theta_1 = 1$ , el resultado es

$$\pi_T^*(\theta_1) \propto \exp[\bar{I}(\theta_1)] \quad (3.59)$$

Siendo

$$\bar{I}(\theta_1) = \frac{\sum_{t=1}^T I_t(\theta_1)}{T} \quad (3.60)$$

La media aritmética de las entropías de cada momento  $t$  condicionadas al momento anterior ( $t-1$ ). Ello nos lleva a que, dadas las MDIP individuales:

$$\pi_t^*(\theta_1) \propto \exp[I_t(\theta_1)] \quad (3.61)$$

La distribución a priori conjunta se calcula como la media geométrica de las MDIP individuales, es decir:

$$\pi_t^*(\boldsymbol{\theta}_1) \propto \left( \prod_{t=1}^T \exp[I_t(\boldsymbol{\theta}_1)] \right)^{1/T} \quad (3.62)$$

Vamos a calcular la entropía asociada a  $f(LX_t|LX_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_1)$ , sabiendo que

$$f(LX_t|LX_{t-1}, P_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_1) = \frac{h_w}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h_w}{2}[LX_t - \ln F(S_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_1)]^2} \quad (3.63)$$

Es decir, tenemos una distribución normal cuyo valor esperado es  $\ln F(S_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_1)$  y precisión  $h_w$ . Con lo cual:

$$\begin{aligned} I_t(\boldsymbol{\theta}) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(LX_t|LX_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_1) \ln[f(LX_t|LX_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_1)] dLX_t = \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} f(LX_t|LX_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_1) \left( \ln \frac{h_w}{\sqrt{2\pi}} - \frac{h_w}{2} [LX_t - \ln F(S_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_1)]^2 \right) dLX_t = \quad (3.64) \\ &\quad - \ln \frac{h_w}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo que la solución final es

$$\pi^*(\boldsymbol{\theta}_1) \propto \left( \prod_{t=1}^T \exp[I_t(\boldsymbol{\theta}_1)] \right)^{1/T} = \left( \prod_{t=1}^T \exp \left[ - \ln \frac{h_w}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2} \right] \right)^{1/T} \propto \frac{1}{h_w} \quad (3.65)$$

Este resultado es independiente del modelo stock-reclutamiento que se considere.

Según este resultado, los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  seguirían distribuciones uniformes, mientras que  $h_w$  seguiría una distribución tal que  $\ln(h_w)$  es uniforme. El inconveniente es que estas distribuciones no son invariantes ante reparametrizaciones que no sean lineales<sup>3</sup>, y es lo que nos ocurre, mientras que las distribuciones que obtenemos aplicando el procedimiento de Jeffreys sí que lo son. Zellner (1991) desarrolló un método que permite modificar las distribuciones a priori, de forma que siguen siendo óptimas según los criterios que establece, pero que al mismo tiempo son invariantes ante cualquier transformación continua inyectiva. Para ello dada  $\eta = h(\theta)$  que cumple con las condiciones citadas, las distribuciones iniciales transformadas serían:

$$\pi_1^*(\theta) \propto c \exp \left[ I(\theta) + \frac{1}{2} \ln |h'(\theta)| \right] \quad (3.66)$$

Y

$$\pi_2^*(\eta) \propto \frac{\pi_1^*(h^{-1}(\eta))}{|h'(h^{-1}(\eta))|} \quad (3.67)$$

Por otro lado, en las distribuciones normales, está perfectamente establecida la distribución inicial que les corresponde a los parámetros, si  $X \sim N(\mu, h_x)$ , con  $\mu$  su valor esperado y  $h_x$  la precisión, entonces:

$$I(\mu, h_x) = -\ln \frac{h_x}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2} = Cte - \ln h_x \quad (3.68)$$

Y por tanto

---

<sup>3</sup> La invarianza se refiere a que cuando transformamos el valor esperado  $\theta$  aplicando una función inyectiva y continua, las distribuciones a priori se transforman para conseguir que cumplan la fórmula de cambio de variables, es decir si  $\eta = g(\theta) \rightarrow \pi^*(\eta)d\eta = \pi^*(\theta)d\theta$ .

$$\pi(\mu, h_x) = \exp[Cte - \ln h_x] = \frac{1}{h_x} \quad (3.69)$$

De lo que se deduce que la distribución inicial asociada a  $\mu$  es uniforme, mientras que la asociada a  $h_x$  es tal que  $\ln h_x$  también sigue una distribución uniforme. Podemos ver que coincide con las soluciones en (3.64) y (3.65).

El problema es que, en los modelos con los que estamos trabajando, en relación al valor esperado, la dimensión del espacio paramétrico es mayor que la que disponemos al trabajar con una distribución normal, por lo que no podemos hacer un cambio de variables considerando los dos parámetros,  $\alpha$  y  $\beta$ , simultáneamente.

Nos planteamos como solución intentar llegar a una distribución inicial que cumpla lo que vamos a llamar “invarianza parcial”. Bajo esta invarianza parcial la distribución conjunta a priori sería invariante ante cambios en uno de los dos parámetros, pero no podemos garantizar que sea invariante si se realizan cambios en los dos parámetros simultáneamente.

Vamos a establecer la distribución inicial de los parámetros considerando únicamente el primer período en el que necesitamos definirlos ( $t=1$ ). Para ello vamos a partir de que la distribución inicial de  $X_0$  no depende de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . El procedimiento será que supondremos generado un valor para uno de los parámetros y estudiamos la distribución inicial invariante, condicionada a ese valor, del segundo

parámetro, si esas distribuciones iniciales no dependen de los valores que se hayan generado, podríamos definir la distribución conjunta como el producto de las dos distribuciones iniciales obtenidas ya que si:

$$\begin{cases} \pi^*(\alpha|\beta = \beta_0) = \pi^*(\alpha) \\ \pi^*(\beta|\alpha = \alpha_0) = \pi^*(\beta) \end{cases} \rightarrow \pi^*(\alpha, \beta) = \pi^*(\alpha)\pi^*(\beta) \quad (3.70)$$

Los parámetros sólo aparecen en relación al valor esperado de la función stock-reclutamiento así que teniendo en cuenta que trabajamos con distribuciones normales en las que dicho valor es independiente de la precisión asociada a las distribuciones, podemos determinar las distribuciones iniciales de los parámetros fijándonos solamente en la distribución inicial marginal del valor esperado de una distribución normal genérica ( $\mu$ ), del que ya sabemos que la información asociada es constante ( $I(\mu)=Cte$  por (3.68)) y, como consecuencia,  $\pi^*(\mu)=Cte$  (3.69). El valor esperado de las distribuciones asociadas a la ecuación de estado de los tres modelos que nos planteamos es:

- *Beverton-Holt*:  $\mu = \ln\alpha - \ln(1 + \beta S_0) + \ln S_0$
- *Ricker*:  $\mu = \ln\alpha - \beta S_0 + \ln S_0$
- *Cushing*:  $\mu = \ln\alpha + \beta \ln S_0$

Veamos en cada caso cómo serían las distribuciones iniciales condicionales invariantes para cada parámetro:

### 1. Modelo de Beverton-Holt

Supongamos en primer lugar que fijamos el parámetro  $\beta = \beta_0$  y estudiamos entonces la distribución condicionada de  $\alpha$ . Podemos considerar  $\mu = \ln\alpha + K$  donde  $K$  es una constante, ello implica que  $\alpha = e^{\mu-K} = h(\mu)$  y  $h'(\mu) = e^{\mu-K}$ . Sustituyendo en las igualdades (3.66) y (3.67), las distribuciones iniciales invariantes son:

$$\pi_1^*(\mu) \propto c \exp \left[ Cte + \frac{1}{2} \ln e^{\mu-K} \right] \propto e^{\mu/2} \quad (3.71)$$

Y

$$\pi_2^*(\alpha | \beta = \beta_0) = Cte \frac{e^{\mu/2}}{e^{\mu-K}} \propto e^{-\mu/2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (3.72)$$

Veamos qué ocurre si fijamos el parámetro  $\alpha$  y estudiamos la distribución condicionada de  $\beta$ . En este caso  $\mu = K - \ln(1 + \beta S_0)$  donde  $K$  y  $S_0$  son constantes respecto a  $\beta$ , por tanto  $\beta = \frac{e^{K-\mu}-1}{S_0} = h(\mu)$  y  $h'(\mu) = \frac{-e^{K-\mu}}{S_0}$ . Sustituyendo nuevamente en las igualdades (3.66) y (3.67), las distribuciones iniciales invariantes son:

$$\pi_1^*(\mu) \propto c \exp \left[ Cte + \frac{1}{2} \ln \frac{e^{K-\mu}}{S_0} \right] \propto e^{-\mu/2} \quad (3.73)$$

Y

$$\pi_2^*(\tilde{\beta} | \alpha = \alpha_0) = Cte \frac{e^{-\mu/2}}{\frac{e^{K-\mu}}{S_0}} \propto e^{\mu/2} \propto \frac{1}{\sqrt{1 + \beta S_0}} \quad (3.74)$$

Ninguna de las dos distribuciones iniciales condicionada a un valor del segundo parámetro depende del valor generado, así que definimos:

$$\pi^*(\alpha, \beta) = \pi^*(\alpha)\pi^*(\beta) \propto \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta S_0}} \quad (3.75)$$

Vemos que se pueden generar de forma independiente, de forma que

$$\begin{aligned} \pi^*(\alpha)/\frac{1}{\alpha} &\sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ si } \alpha > 1 \\ \pi^*(\alpha) &\propto \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{ si } \alpha < 1 \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\pi^*(\beta)/\frac{1}{1 + \beta S_0} \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad (3.77)$$

## 2. Modelo de Ricker

En este caso el valor esperado es  $\mu = \ln\alpha - \beta S_0 + \ln S_0$ . Si fijamos el parámetro  $\beta = \beta_0$  y estudiamos la distribución condicionada  $\alpha$ , estaríamos en la misma situación que el apartado anterior, ya que  $\mu = \ln\alpha + K$  donde  $K$  es una constante. Por la igualdad (3.72) tenemos  $\pi_2^*(\alpha|\beta = \beta_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$  que no depende del valor generado de  $\beta$ .

Si fijamos el parámetro  $\alpha = \alpha_0$  tenemos  $\mu = K - \beta S_0$ , donde  $K$  y  $S_0$  son constantes respecto a  $\beta$ . Estamos por tanto ante una transformación lineal del valor esperado, por lo que las distribuciones iniciales coinciden y se tiene  $\pi^*(\beta) = \text{Cte}$ . Por lo tanto:

$$\pi^*(\alpha, \beta) = \pi^*(\alpha)\pi^*(\beta) \propto \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (3.78)$$

### 3. Modelo de Cushing

Según el modelo de *Cushing*,  $\mu = \ln\alpha + \beta \ln S_0$ . A efectos del estudio de las distribuciones iniciales estamos en el mismo caso que el modelo de Ricker, podemos definir

$$\pi^*(\alpha, \beta) = \pi^*(\alpha)\pi^*(\beta) \propto \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

En los tres casos, el orden en el que generemos los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  es indiferente, es decir, los podemos generar de forma independiente, además las distribuciones son invariantes ante transformaciones lineales de ambos parámetros, ya sea por separado como simultáneamente. En cuanto a transformaciones inyectivas y continuas que no sean lineales, la distribución conjunta a priori sería invariante ante cambios en uno de los dos parámetros, pero no podemos garantizar que sea invariante si se realizan cambios en los dos parámetros simultáneamente.

### 3.2.5 Determinación de la distribución inicial de los parámetros de la ecuación de medida u observación, aplicando la regla de Jeffreys.

Para el vector que recoge los parámetros que aparecen en la ecuación de observación,  $\theta_2$ , la función de verosimilitud queda:

$$l(\theta_2 | LP_1, LP_2, \dots, LP_T, X_1, X_2, \dots, X_T) \propto \prod_{t=1}^T f(LP_t | X_t, \theta_2) \quad (3.79)$$

$$= \prod_{t=1}^T \left\{ \sqrt{\frac{h_v}{2\pi}} \exp \left[ -\frac{h_v}{2} (LP_t - H(X_t, \theta_2))^2 \right] \right\}$$

Donde  $LP_t = \ln P_t$ , para  $t=0,1,\dots,T$  y  $H(X_t, \theta_2) = \ln[X_t(1 - e^{-qE_t})]$

En este caso sólo tenemos dos parámetros,  $q$  y  $h_v$  para los que necesitamos determinar la distribución inicial. Veamos primero qué resultado obtenemos aplicando la regla de Jeffreys, para lo que seguimos el mismo procedimiento que realizamos para los parámetros de la ecuación de estado. La función de verosimilitud es:

$$l(q, h_v | LX_t, LP_t) = \left(\frac{h_v}{2\pi}\right)^{1/2} \exp \left[ \frac{-h_v}{2} (LP_t - LX_t - \ln[1 - e^{-qE_t}])^2 \right] \quad (3.80)$$

Y su logaritmo neperiano es:

$$\begin{aligned} \ln l(q, h_v | LX_t, LP_t) \\ = \frac{1}{2} \ln h_v - \frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{h_v}{2} (LP_t - LX_t - \ln[1 - e^{-qE_t}])^2 \end{aligned} \quad (3.81)$$

Calculamos los valores necesarios para definir la matriz de información de Fisher.

- Derivadas parciales primeras y segundas respecto a los parámetros  $q$  y  $h_v$ :

$$\frac{\partial l}{\partial q} = h_v (LP_t - LX_t - \ln[1 - e^{-qE_t}]) \frac{E_t e^{-qE_t}}{1 - e^{-qE_t}}$$

$$\frac{\partial l}{\partial h_v} = \frac{1}{2h_v} - \frac{1}{2} (LP_t - LX_t - \ln[1 - e^{-qE_t}])^2$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial q^2} = -h_v \left( \frac{E_t e^{-qE_t}}{1 - e^{-qE_t}} \right)^2 - h_v (LP_t - LX_t - \ln[1 - e^{-qE_t}]) \frac{E_t^2 e^{-qE_t}}{(1 - e^{-qE_t})^2}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial h_v^2} = \frac{-1}{2h_v^2}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial q \partial h_v} = \frac{\partial^2 l}{\partial h_v \partial q} = (LP_t - LX_t - \ln[1 - e^{-qE_t}]) \frac{E_t e^{-qE_t}}{1 - e^{-qE_t}}$$

- Valor esperado de las derivadas segundas, respecto a  $LP_t$ , y dado  $LX_t$ :

$$E \left[ \frac{\partial^2 l}{\partial q^2} \right] = -h_v \left( \frac{E_t e^{-qE_t}}{1 - e^{-qE_t}} \right)^2$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 l}{\partial h_v^2} \right] = \frac{-1}{2h_v^2}$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 l}{\partial q \partial h_v} \right] = 0$$

- Matriz de la información de Fisher de  $LP_t$  condicionada a  $LX_t$ :

$$\begin{aligned} I_{LP_t|LX_t}(q, h_v) &= \begin{pmatrix} h_v \left( \frac{E_t e^{-qE_t}}{1 - e^{-qE_t}} \right)^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2h_v^2} \end{pmatrix} \\ &= -E_{LX_t} [I_{LP_t|LX_t}(q, h_v)] \end{aligned} \quad (3.82)$$

El resultado final queda:

$$I(q, h_v) = \begin{pmatrix} h_v \sum_{t=1}^T \left( \frac{E_t e^{-qE_t}}{1 - e^{-qE_t}} \right)^2 & 0 \\ 0 & \frac{T}{2h_v^2} \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

$I(q, h_v)$  es una matriz diagonal, es decir, el parámetro  $q$  es independiente de  $h_v$ , por lo que podemos aplicar la regla modificada de Jeffreys y separar  $h_v$ , como parámetro de escala, de  $q$ , para determinar su distribución a priori:

$$\pi(h_v) \propto \sqrt{-E \left[ \frac{\partial^2 l}{\partial h_v^2} \right]} \propto \sqrt{\frac{1}{2h_v^2}} \propto \frac{1}{h_v} \quad (3.84)$$

Por otro lado, la distribución a priori del parámetro  $q$  no depende de  $X_t$  y sería:

$$\pi(q) \propto \left( \sum_{t=1}^T \left( \frac{E_t e^{-qE_t}}{1 - e^{-qE_t}} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (3.85)$$

Si tenemos conocimiento de datos de esfuerzo previos al período que queremos estimar, podríamos utilizarlos para establecer la distribución inicial de  $q$ . Si queremos partir de un momento inicial sin información previa, Podemos aplicar el mismo procedimiento que realizamos para los parámetros de la ecuación de estado, es decir, definir la distribución inicial de  $q$  teniendo en cuenta el momento inicial  $X_0$ .

Si contamos con el valor de capturas en el instante  $t=0$  ( $P_0$ ), y el esfuerzo de pesca  $E_0$ , y suponemos el mismo tipo de relación entre la captura  $P_0$  y la biomasa inicial  $X_0$ , la distribución a priori no informativa para  $q$  sería:

$$\pi(q) \propto \frac{E_0 e^{-qE_0}}{1 - e^{-qE_0}} \quad (3.86)$$

Lo que equivale a decir que  $\ln(1 - e^{-qE_0}) \sim \text{Uniforme}$ . El problema que presentan estas distribuciones es que son impropias.

### 3.2.6 Determinación de la distribución inicial de los parámetros de la ecuación de medida u observación según el método de Zellner.

Si, como alternativa, aplicamos el método desarrollado por Zellner, y seguimos el mismo procedimiento expuesto para los parámetros de la ecuación de estado, obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
 I_t(\theta) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(PX_t|LX_t, \theta_2) \ln[f(PX_t|LX_t, \theta_2)] dLX_t = \\
 &- \int_{-\infty}^{+\infty} f(LP_t|LX_t, \theta_2) \left( \ln \frac{h_v}{\sqrt{2\pi}} - \frac{h_v}{2} [LP_t - \ln(X_t(1 - e^{-qE_t}))]^2 \right) dLX_t \quad (3.87) \\
 &= -\ln \frac{h_v}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\pi^*(\theta_2) \propto \left( \prod_{t=1}^T \exp[I_t(\theta_2)] \right)^{1/T} = \left( \prod_{t=1}^T \exp \left[ -\ln \frac{h_v}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2} \right] \right)^{1/T} \propto \frac{1}{h_v} \quad (3.88)$$

Es decir, el parámetro  $q$  seguiría una distribución uniforme, mientras que  $h_v$  seguiría una distribución log-uniforme.

En este caso sí es factible realizar el cambio de variables directamente en la función inicial para lograr que dicha función sea invariante ante transformaciones continuas inyectivas no lineales, para ello

partimos de las dos distribuciones normales,  $\ln P_t \sim N(\ln[X_t(1 - e^{-qE_t})], h_v)$  y  $X \sim N(\mu, h_v)$ .

Consideramos el cambio de variables:

$$\mu = \ln[X_t(1 - e^{-qE_t})] = h^{-1}(q) \quad (3.89)$$

A partir del cual, despejando  $q$  tenemos:

$$e^\mu = X_t(1 - e^{-qE_t}) \rightarrow q = \frac{-1}{E_t} \ln\left(1 - \frac{e^\mu}{X_t}\right) = h(\mu) \quad (3.90)$$

Derivando la función  $h(\mu)$  respecto a  $\mu$ :

$$h'(\mu) = \frac{e^\mu}{E_t(X_t - e^\mu)} \quad (3.91)$$

Teniendo en cuenta la igualdad (3.68) y sustituyendo en las expresiones (3.66) y (3.67) obtenemos:

$$\pi_1^*(\mu, h_v) \propto c \exp\left[cte - \ln h_v + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e^\mu}{E_t(X_t - e^\mu)}\right)\right] \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned}\pi_2^*(q, h_v) &= \pi_1^*(\mu) / |h'(\mu)| \propto \frac{1}{h_v} \frac{\left( \frac{e^\mu}{E_t(X_t - e^\mu)} \right)^{1/2}}{\frac{e^\mu}{E_t(X_t - e^\mu)}} \\ &\propto \frac{1}{h_v} \left( \frac{e^\mu}{X_t - e^\mu} \right)^{-1/2}\end{aligned}\quad (3.93)$$

Dado que  $e^\mu = X_t(1 - e^{-qE_t})$ , finalmente queda:

$$\pi_2^*(q, h_v) \propto \frac{1}{h_v} \left( \frac{e^{-qE_t}}{1 - e^{-qE_t}} \right)^{1/2} \quad (3.94)$$

Si consideramos  $t=1, 2, \dots, T$ :

$$\pi^*(\theta_2) \propto \left[ \prod_{t=1}^T \frac{1}{h_v} \left( \frac{e^{-qE_t}}{1 - e^{-qE_t}} \right)^{1/2} \right]^{1/T} = \frac{1}{h_v} \left[ \prod_{t=1}^T \left( \frac{e^{-qE_t}}{1 - e^{-qE_t}} \right) \right]^{1/2T} \quad (3.95)$$

Y si sólo tenemos en cuenta el instante inicial ( $t=0$ ) y suponemos conocido el esfuerzo de pesca  $E_0$ , y el mismo tipo de relación entre la captura  $P_0$  y la biomasa inicial  $X_0$

$$\pi_2^*(q, h_v) \propto \frac{1}{h_v} \left( \frac{e^{-qE_0}}{1 - e^{-qE_0}} \right)^{1/2} = \frac{1}{h_v} \frac{e^{-qE_0/2}}{(1 - e^{-qE_0})^{1/2}} \quad (3.96)$$

Según este resultado,  $\ln h_v$  sigue una distribución uniforme y  $q$  es tal que  $\pi_2^*(q) \propto \left( \frac{e^{-qE_0}}{1 - e^{-qE_0}} \right)^{1/2}$ , lo que implica que  $e^{-qE_0}$  sigue una distribución beta(1/2, 1/2).

### 3.2.7 Resumen de las distribuciones iniciales mínimo informativas y no informativas asociadas a los parámetros de las ecuaciones de estado y medida.

Finalmente resumimos las distribuciones iniciales asociadas a los parámetros de las ecuaciones de estado y de medida que hemos desarrollado en este apartado, diferenciando los casos en los que partimos de una información previa, basada el valor esperado y la precisión asociada a cada parámetro, de aquellos en los que no consideramos ninguna información inicial.

#### 1) Distribución inicial asociada a la biomasa cuando $t=0$ ( $LX_0$ )

En este caso aplicaremos los resultados del método de máxima entropía. Si no contamos con ninguna información previa sobre  $LX_0$ , y sólo imponemos que la función de densidad inicial esté normalizada, es decir  $\int_{-\infty}^{+\infty} \pi_0(LX_0) dLX_0 = 1$ , entonces  $LX_0 \sim \text{Uniforme}$ .

Si, por el contrario, contamos con información sobre el valor esperado ( $\mu_0$ ) y la precisión ( $h_0$ ) asociadas a esta biomasa, por el mismo método de máxima entropía, la distribución inicial asociada a  $LX_0$  debe ser una distribución normal, es decir  $LX_0 \sim N(\mu_0, h_0)$ .

**2) Distribuciones iniciales asociadas a los parámetros de la ecuación de estado,  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $h_w$ .**

Para el desarrollo de las distribuciones iniciales, hemos supuesto que la biomasa inicial no dependía del resto de los parámetros presentes en los modelos.

Por el método que aplica Jeffreys vimos que la distribución asociada a la precisión correspondiente a la perturbación de la ecuación de estado ( $h_w$ ) es independiente del resto de los parámetros, coincidiendo en este resultado con Zellner. En ambos casos sigue siempre una distribución tal que  $\ln h_w \sim \text{Uniforme}$ .

Para los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , resumimos las distribuciones iniciales determinadas en cada caso en la siguiente tabla:

**Tabla 3.1:** Distribuciones iniciales asociadas a los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

<b>Método</b>	<b>Máxima entropía</b>		<b>Jeffreys</b>	<b>Zellner</b>
	<b>Sin información previa</b>	<b>Con información previa</b>	<b>Determinadas en el caso <math>t=1</math></b>	
<b><math>\alpha</math></b>	<i>Uniforme</i>	$N(\alpha_0, h_\alpha)$	$\ln \alpha \sim \text{Unif.}$	<i>Uniforme*</i>
<b><math>\beta</math></b>	<i>Uniforme</i>	$N(\beta_0, h_\beta)$	<i>Uniforme</i>	<i>Uniforme*</i>

\*No son invariantes ante reparametrizaciones no lineales de los parámetros cuando se quiere calcular la distribución inicial óptima aplicando el método de Zellner.

**Tabla 3.2:** Distribuciones iniciales asociadas a los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , por el método de Zellner suponiendo invarianza parcial\*.

<i>Modelo</i>	<b>Beverton-Holt</b>	<b>Ricker</b>	<b>Cushing</b>
$\alpha$	$\frac{1}{\alpha} \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ si $\alpha > 1$ $\pi^*(\alpha) \propto \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ si $\alpha < 1$		
$\beta$	$\frac{1}{1 + \beta S_0} \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	<i>Uniforme</i>	<i>Uniforme</i>

\* Son invariantes ante reparametrizaciones lineales de los parámetros y ante transformaciones inyectivas continuas y no lineales de uno solo de los parámetros.

### 3) Distribuciones iniciales asociadas a los parámetros de la ecuación de medida, $q$ y $h_v$ .

Seguimos bajo el mismo supuesto de que la biomasa inicial no depende del resto de los parámetros presentes en los modelos. Tal como ocurría en la ecuación de medida, la distribución asociada a la precisión correspondiente a la perturbación de la ecuación de medida ( $h_v$ ) es independiente del coeficiente de capturabilidad,  $q$ , y , tanto por el método de Jeffreys como por el de Zellner,  $\ln h_w \sim \text{Uniforme}$ .

**Tabla 3.3:** Distribuciones iniciales asociadas al coeficiente de capturabilidad  $q$ .

<b>Método</b>	<b>Máxima entropía</b>		<b>Jeffreys</b>	<b>Zellner</b>
<b>Parámetro</b>	Sin información previa	Con información previa	<b>Determinadas considerando la información disponible en <math>t=0</math></b>	
<b><math>q</math></b>	<i>Unif.</i>	$N(q_0, h_q)$	$\ln(1 - e^{-qE_0})$ $\sim$ Uniforme	$\pi(q) \propto$ $\left(\frac{e^{-qE_0}}{1 - e^{-qE_0}}\right)^{1/2}$ i.e. $e^{-qE_0} \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Finalmente, El siguiente paso en el análisis bayesiano es determinar las distribuciones condicionales completas de las variables no observadas. Sabemos que la distribución conjunta de las variables aleatorias combina la información a priori con las variables observables a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 & f(LX_0, LX_1, \dots, LX_T, \alpha, \beta, q, h_w, h_v, P_1, \dots, P_T) \\
 &= f(LT_0) \left[ \prod_{t=1}^T f(LX_t | LX_{t-1}, P_{t-1}, \alpha, \beta, h_w) \right] \left[ \prod_{t=1}^T f(\ln P_t | LX_t, q, h_v) \right] \quad (3.97) \\
 & \qquad \qquad \qquad f(\alpha) f(\beta) f(q) f(h_w) f(h_v)
 \end{aligned}$$

En cuanto a las distribuciones condicionales completas, combinaremos la información a priori con los resultados muestrales a través del Teorema de Bayes. Cuando la función de la variable cuya densidad queremos estimar sea no lineal combinaremos distintos métodos

de generación de variables aleatorias, en concreto el algoritmo de inversión de la función de distribución, el algoritmo de aceptación rechazo y la linealización de los términos no lineales mediante la aproximación de primer orden de Taylor. Por otro lado, observando la distribución conjunta, vemos que las distribuciones a posteriori van a depender de los términos en los que aparezca la variable que queremos estimar y que el resto de términos se puede agrupar como una constante de proporcionalidad. El desarrollo de estas distribuciones se realizará en el siguiente capítulo, centrándonos en el modelo que vamos a aplicar.

# APLICACIÓN DEL MODELO DE CUSHING CON PARÁMETROS AMBIENTALES

## 4

En este capítulo vamos a mostrar dos aplicaciones de modelos de gestión de pesquerías en las que determinamos las distribuciones iniciales no informativas o mínimo informativas asociada a los parámetros de la función de stock-reclutamiento y de capturas, centrándonos en los cambios que sobre los resultados finales puede tener el hecho de utilizar una distribución inicial informativa o no. En ambos casos utilizamos el modelo stock-reclutamiento de Cushing, que va a incorporar parámetros ambientales.

### **4.1 Modelo de Cushing con parámetros ambientales aplicado a datos de la pesquería de la caballa en el caladero de la Región Suratlántica Española.**

La primera aplicación que veremos será sobre los datos aportados a partir de un análisis sobre la pesquería de caballa ejercida por la flota de cerco en la Región Suratlántica Española (Golfo de Cádiz) en el período 1973-2000 y realizado por González Galán (2004), cuyo objetivo principal era un análisis económico de la fabricación de conservas y la actividad pesquera. Hay que destacar la dificultad que la autora del mismo se

encontró a la hora de recopilar los datos, debido al escaso y deficiente sistema de estadísticas pesqueras existentes, teniendo que reconstruir las series de capturas y esfuerzo a partir de las fuentes estadísticas primarias, es decir, las notas de ventas diarias de las lonjas de Huelva y Punta Umbría.

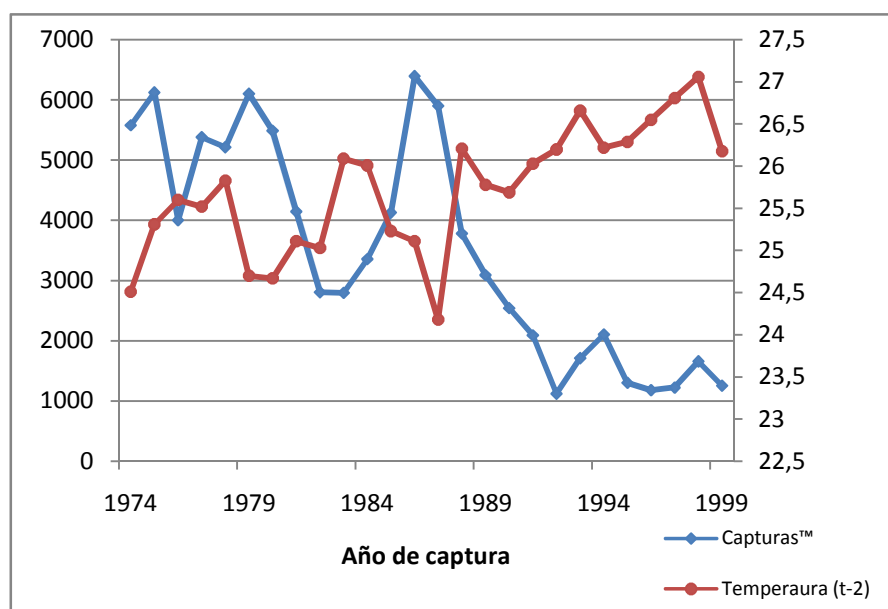
Por otro lado era necesario determinar el esfuerzo de pesca, que en términos económicos, está vinculado al tipo de pesquería que se esté analizando, así como al método de pesca y la forma de su aplicación. Desde un punto de vista biológico está relacionado con la tasa de mortalidad por pesca, y en general se considera que esta tasa es proporcional al esfuerzo, siempre que la medida de esfuerzo esté estandarizada, es decir, bajo las mismas condiciones, las capturas deben ser proporcionales al esfuerzo realizado. En las pesquerías compuestas por una flota heterogénea y con diferente capacidad de pesca hay que *normalizar este esfuerzo*<sup>1</sup>. Al final, debido a la dificultad de obtener una información válida, opta por considerar la flota de Punta Umbría como referencia estándar y sus capturas por unidad de esfuerzo (CPUE) como el mejor indicador de la densidad del stock, expresándolo en toneladas por días de pesca.

Uno de los hechos ya contrastados sobre la caballa es la gran fluctuación anual del reclutamiento y, por lo tanto de la densidad de esta especie. Es tanta su variabilidad que hay autores que consideran que un simple modelo basado en variables ambientales serviría para conocer su evolución (Castonguay *et al.*, 1992) y también hay numerosos estudios

---

<sup>1</sup> González Galán (2004, pp. 129-162) desarrolla un capítulo completo sólo este fin, dada la imposibilidad de obtener datos fiables.

biológicos que indican que la temperatura en la superficie del mar es un factor determinante para el control del crecimiento de esta especie. Dado que en ese momento no se disponía de series de temperaturas referidas a la superficie del mar, se utilizó como indicador la temperatura del aire medida en el observatorio meteorológico de Huelva capital. Respecto a estos datos, se detectó que en el caladero suratlántico, los años con mejores capturas correspondían a aquellos con respecto a los cuales había habido una reducción de temperatura dos años antes. Esto se corresponde con los estudios biológicos que fijan la edad a la que la caballa alcanza su madurez sexual en dos años, así que ese sería el momento en el que tuvo lugar el desove a partir del cual se desarrolló el stock del cual se obtendrían las capturas dos años más tarde.



**Figura 4.1.** Evolución de las capturas de caballa en Punta Umbría y la temperatura media de las máximas con un retardo temporal de dos años.

En consecuencia, se consideró adecuado incluir esta variable ambiental en las funciones de reclutamiento, y concretamente en el parámetro que recoge el efecto de la mortalidad densidad independiente, por lo que el modelo de Cushing con parámetro ambiental, que junto a la ecuación de capturas forma un sistema de espacio de estados, se define de la forma:

$$\begin{cases} X_t = e^{\alpha_0 + \alpha_1 T_{t-2}} S_{t-1}^\beta e^{w_t} \\ P_t = X_t (1 - e^{-qE_t}) e^{v_t} \end{cases} \quad (4.1)$$

En el que estudiaremos los cambios que se manifiestan sobre los parámetros de la ecuación de estado, ante cambios en las distribuciones iniciales. Los datos que utilizamos se pueden consultar en el anexo 1, tabla A.1.2.

#### **4.2 Modelo de Cushing con parámetros ambientales aplicado a datos de la pesquería del boquerón en el Mar de Alborán.**

La segunda aplicación se realiza sobre los datos de la pesquería del boquerón en el Mar de Alborán en el período 1985-2005, provienen de un estudio desarrollado por García del Hoyo (2008) cuyo fin era estudiar la influencia de parámetros ambientales en la evolución del stock del boquerón en el Mar de Alborán. Los datos aparecen en el anexo 1, tabla A.1.2. En este caso la información existente sobre el esfuerzo pesquero, aparte de las características técnicas de las embarcaciones de la flota de

cercos, ha sido generada por la red de muestreo del Instituto Español de Oceanografía (IEO). La unidad de esfuerzo considerada ha sido el número de mareas realizadas por las embarcaciones en las que se han obtenido capturas de la especie considerada, lo cual puede ser poco representativo en los últimos años, dado que con biomásas muy bajas las mareas con éxito pueden subvalorar el esfuerzo efectivamente dirigido a la especie en cuestión.

La serie se inicia con datos muy fragmentarios correspondientes a puertos concretos, entre los cuales el más intensamente investigado ha sido el de Málaga, donde suelen desembarcar no sólo la flota con base en dicho puerto sino también la de otros puertos de la provincia (Marbella, Vélez, Fuengirola o Estepona) y, con menor frecuencia, la de otros puntos de la región. La serie presentada al GFCM por el IEO estima la CPUE global del área a través de la CPUE observada en los puertos para los cuales existe información.

La evolución de la CPUE evidencia el colapso de la pesquería desde el periodo álgido de 1979-1985. Las primeras estimaciones, correspondientes a la flota litoral con base en Almería para algunos meses de 1982 y 1983, proporcionan una CPUE superior a 2 Tm. por marea de pesca, descendiendo abruptamente en 1985 hasta situarse en 397 Kg. por marea efectiva, nivel al que se ha mantenido esta con leves incrementos en 2001 y 2002, coincidiendo con abundantes capturas en la bahía de Málaga.

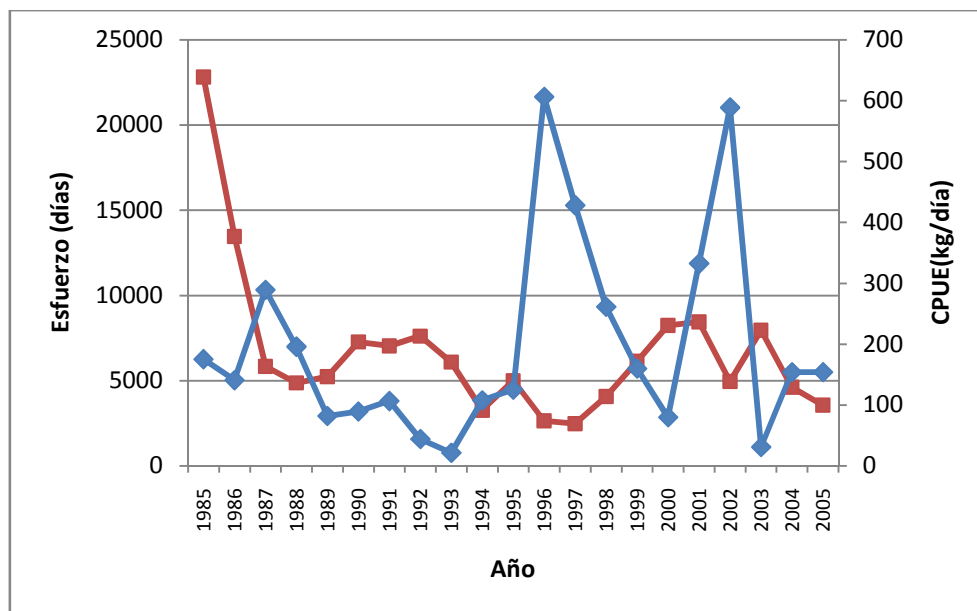


Figura 4.2. Evolución del esfuerzo y la CPUE de la pesquería de boquerón.

En los informes presentados por el IEO al GFCM-SCSA se recogen las series de esfuerzo resultantes para el conjunto de la región estimadas, en su mayor parte, a partir de series relativas a los puertos de Málaga y Estepona de la red de muestreo del IEO, y extrapoladas al conjunto de la región utilizando las estadísticas oficiales. No obstante el esfuerzo – noches efectivas de pesca por especie- se encuentra, en el caso del boquerón, claramente infravalorado, dado que al ser mucho más abundante la sardina, las mareas en las que se ha intentado obtener boquerón y no se ha conseguido, no son consideradas. Por esta razón, creemos mucho más razonable considerar como unidad de esfuerzo el máximo mensual correspondiente a ambas especies, despreciando las mareas dirigidas a boquerón pero en las que no se captura ni ésta especie ni la sardina.

Con estos datos se han estimado diferentes modelos stock-reclutamiento basados en las funciones de reclutamiento de Ricker (1954), Cushing (1971) y Beverton-Holt (1957), bajo la consideración de que los parámetros densidad-dependiente y densidad-independiente se encuentran perturbados por variables ambientales. Como variables ambientales se han considerado las series de *sea surface temperatura* (SST) facilitadas por Olivia Lagmead<sup>2</sup>). En particular se observa una relación inversa muy fuerte de las CPUE del boquerón con las temperaturas medias del mes de julio y directa con el rango de variación de las temperaturas de febrero y julio del año en curso.

Estos resultados de posible dependencia del ciclo reproductivo con las temperaturas han sido destacados en el área que nos ocupa por Giraldez y Abad (1995) y en García et al. (2003), destacando el hecho de que inviernos suaves implican un incremento del período de freza y, por tanto, mayores reclutamientos.

El modelo elegido finalmente correspondía un modelo basado en la relación stock-reclutamiento de Cushing<sup>3</sup> que adopta la forma:

$$X_t = e^{\alpha_1 + \alpha_2 T_{m2t}} S_{t-1}^{\beta_1 T_{m1t} + \beta_2 T_{m2t}} e^{w_t} \quad (4.2)$$

$$P_t = X_t (1 - e^{-qE_t}) e^{v_t} \quad (4.3)$$

---

<sup>2</sup> HadISST, <http://badc.nerc.ac.uk/data/hadisst/>

<sup>3</sup> García del Hoyo (2008). A partir de Mínimos cuadrados no lineales se elige el modelo en el que los criterios de información de Akaike y de Schwarz tienen valores mínimos.

Donde  $T_{m1}$  es la SST de julio del año corriente,  $T_{m2}$  es el cociente de las SST de febrero y julio,  $X_t$  es la biomasa reclutada,  $S_t$  es la SSB de cada año,  $P_t$  son las capturas y  $E_t$  es el esfuerzo de pesca, mientras que  $q$  es la capturabilidad, los parámetros  $\alpha_i$  son parámetros que representan fenómenos densidad-independiente y los  $\beta_i$  son parámetros que representan fenómenos densidad-dependientes.

En este caso aplicaremos cambios en las distribuciones iniciales del coeficiente de capturabilidad, manteniendo fijos los parámetros correspondientes a la ecuación de estado.

### 4.3 Modelo estado-medida con la función de Cushing. Distribuciones condicionales completas.

Como ya indicamos en el capítulo anterior, consideramos el logaritmo neperiano de ambas funciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln X_t = \ln F(S_{t-1}, \theta) + w_t \quad w_t \sim N(0, h_w) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln P_t = \ln [X_t(1 - e^{-qE_t})] + v_t \quad v_t \sim N(0, h_v) \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Con lo que pasamos a trabajar con distribuciones normales. Para la primera aplicación, la ecuación de proceso queda de la forma:

$$\ln X_t = \alpha_0 + \alpha_1 T_{t-2} \ln S_{t-1} + w_t \quad (4.6)$$

Mientras que, para la segunda:

$$\ln X_t = (\alpha_1 + \alpha_2 T_{m_{2t}}) + (\beta_1 T_{m_{1t}} + \beta_2 T_{m_{2t}}) \ln S_{t-1} + w_t \quad (4.7)$$

En ambos casos, al considerar el logaritmo neperiano, los parámetros de la ecuación de proceso pasan a afectar de forma lineal al resto de variables, lo que ya nos indica la distribución inicial no informativa más adecuada para ellos es la uniforme.

En cuanto a la ecuación de capturas, veremos cómo cambia el coeficiente de capturabilidad bajo las distintas distribuciones iniciales propuestas en el capítulo 3.

Vamos a considerar el desarrollo para el caso más complejo (que registra más parámetros ambientales) pues podemos llegar al modelo aplicado sobre el stock de la caballa anulando los parámetros oportunos del segundo modelo.

Teniendo en cuenta que la relación entre las variables que representan a los valores de biomasa en los distintos períodos se rige según el modelo de una cadena de Markov, la distribución conjunta de las variables aleatorias que queremos estimar combina la información a priori con las variables observables a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & f(LX_0, LX_1, \dots, LX_T, \alpha, \beta, q, h_w, h_v, P_1, \dots, P_T) \\ &= f(LT_0) \left[ \prod_{t=1}^T f(LX_t | LX_{t-1}, P_{t-1}, \alpha, \beta, h_w) \right] \left[ \prod_{t=1}^T f(\ln P_t | LX_t, q, h_v) \right] \\ & \quad f(\alpha) f(\beta) f(q) f(h_w) f(h_v) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Donde el logaritmo neperiano de la biomasa en un año dado  $t$ ,  $LX_t$ , condicionado al logaritmo neperiano de la biomasa del año anterior,  $LX_{t-1}$ , a

la captura también del año anterior,  $P_{t-1}$ , y a los parámetros del modelo stock-reclutamiento y del error de proceso, vector  $\boldsymbol{\theta}_1 = (\alpha, \beta, h_w)$ , sigue una distribución normal cuyo valor esperado depende de la relación stock-reclutamiento, y cuya precisión, o inverso de la varianza, toma el valor de la misma vinculada al error sistemático, es decir, su forma es:

$$f(LX_t|LX_{t-1}, P_{t-1}, \alpha, \beta, h_w) = \frac{h_w^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h_w}{2}[LX_t - F(S_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_1)]^2} \quad (4.9)$$

donde  $S_{t-1} = e^{LX_{t-1}} - P_{t-1}$ .

Teniendo en cuenta el modelo que vamos a desarrollar, dado por la ecuación (4.2),  $F(S_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_1)$  es:

$$\begin{aligned} F((S_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_1)) &= \ln \left( e^{\alpha_1 + \alpha_2 T_{m_{2t}}} S_{t-1}^{\beta_1 T_{m_{1t}} + \beta_2 T_{m_{2t}}} \right) \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 T_{m_{2t}} + (\beta_1 T_{m_{1t}} + \beta_2 T_{m_{2t}}) \ln S_{t-1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para simplificar la expresión anterior vamos a llamar  $\alpha_{m_t} = \alpha_1 + \alpha_2 T_{m_{2t}}$ , parámetro que va a depender de la temperatura media en la superficie del mar (SST) de julio del año  $t$ ,  $T_{m_{2t}}$ , y  $\beta_{m_t} = \beta_1 T_{m_{1t}} + \beta_2 T_{m_{2t}}$ , parámetro que dependerá tanto de  $T_{m_{2t}}$  como de  $T_{m_{1t}}$ , que resulta del cociente de las SST de febrero y julio del año  $t$ , con  $t=1,2,\dots,T$ . Por último consideramos las siguientes notaciones:  $\boldsymbol{\alpha}_m = (\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_T})$ ,  $\boldsymbol{\beta}_m = (\beta_{1m}, \dots, \beta_{Tm})$ ,  $\{\boldsymbol{\alpha}_m \setminus \alpha_{m_t}\} = (\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_{t-1}}, \alpha_{m_{t+1}}, \dots, \alpha_{m_T})$ ,  $\{\boldsymbol{\beta}_m \setminus \beta_{m_t}\} = (\beta_{m_1}, \dots, \beta_{m_{t-1}}, \beta_{m_{t+1}}, \dots, \beta_{m_T})$  y  $\boldsymbol{\theta}_t = (\alpha_{m_t}, \beta_{m_t})$ , para  $t=1,\dots,T$ .

Por otra parte, la distribución del logaritmo de las capturas de un año  $t$  ( $P_t$ ), condicionado a la biomasa de ese mismo año ( $LX_t$ ), al coeficiente de capturabilidad,  $q$ , y al error de medida, también es normal con función de densidad:

$$[f(\ln P_t | LX_t, q, h_v)] \frac{h_v^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h_v}{2}[LP_t - G(LX_t, q)]^2} \quad (4.11)$$

donde  $h_v$  es la precisión asociada al error de observación y  $G(LX_t, q) = \ln X_t + \ln(1 - e^{-qE_t})$ .

#### 4.4 Distribuciones a posteriori

El objetivo es determinar las distribuciones condicionales completas de las variables que desconocemos y que pretendemos estimar, es decir:

$$f(X_0 | LX_1, \dots, LX_T, P_1, \dots, P_T, \alpha_m, \beta_m, q, h_w, h_v)$$

$$f(LX_t | X_0, LX_1, \dots, LX_{t-1}, LX_{t+1}, \dots, LX_T, P_1, \dots, P_T, \alpha_m, \beta_m, q, h_w, h_v),$$

$$t = 1, \dots, T$$

$$f(\alpha_{mt} | X_0, LX_1, \dots, LX_T, P_1, \dots, P_T, \{\alpha_m \setminus \alpha_{mt}\}, \beta_m, q, h_w, h_v), \quad t = 1, \dots, T$$

$$f(\beta_{mt} | X_0, LX_1, \dots, LX_T, P_1, \dots, P_T, \alpha_m, \{\beta_m \setminus \beta_{mt}\}, q, h_w, h_v), \quad t = 1, \dots, T$$

$$f(q | X_0, LX_1, \dots, LX_T, P_1, \dots, P_T, \alpha_m, \beta_m, h_w, h_v)$$

$$f(h_w | X_0, LX_1, \dots, LX_T, P_1, \dots, P_T, \alpha_m, \beta_m, q, h_v)$$

$$f(h_v | X_0, \dots, LX_T, P_1, \dots, P_T, \alpha_m, \beta_m, q, h_w)$$

En cada caso, aplicando el teorema de Bayes, la distribución condicional se obtendrá como el cociente entre la distribución conjunta y la distribución marginal del conjunto de variables que están condicionando, por ejemplo, para cualquiera de las biomazas sería:

$$f(LX_t|...) = \frac{f(X_0, LX_1, \dots, LX_T, P_1, \dots, P_T, \alpha_m, \beta_m, q, h_w, h_v)}{\int f(X_0, LX_1, \dots, LX_T, P_1, \dots, P_T, \alpha_m, \beta_m, q, h_w, h_v) dLX_t} \quad (4.12)$$

Con  $t=0,1,\dots,T$ . Veamos cuál es la forma que toma la distribución condicional particularizando para cada una de las variables de estudio.

#### 4.4.1 Densidad condicional de la biomasa inicial. Generación de valores de $X_0$ .

La distribución condicional de la biomasa inicial depende del resto de las biomazas, los parámetros de la ecuación de stock-reclutamiento, los parámetros de la función de producción o capturas, las perturbaciones asociadas a los procesos de estado y medida y las series de datos observados. Sustituyendo en la expresión (4.7), debemos calcularla como:

$$f(X_0|...) = \frac{f(X_0, \dots, LX_T, P_1, \dots, P_T, \alpha_m, \beta_m, q, h_w, h_v)}{\int f(X_0, LX_1, \dots, LX_T, P_1, \dots, P_T, \alpha_m, \beta_m, q, h_w, h_v) dX_0} \quad (4.13)$$

que podemos simplificar al considerar todos aquellos términos en los que no aparece  $X_0$  como parte de la constante de proporcionalidad, lo que finalmente nos llevaría a:

$$f(X_0 | \dots) \propto f(X_0) f(X_0 | LX_1, P_1, \dots, P_T, \alpha_{m_1}, \beta_{m_1}, h_w) \quad (4.14)$$

La distribución inicial de  $LX_0$  dependerá de la información disponible sobre la biomasa inicial, en el caso que estamos estudiando partimos de un valor medio inicial para  $X_0$  conocido y podremos determinar la precisión asociada a su distribución ya que asignaremos un coeficiente de variación a la variable del 5%, para evitar que la amplitud de convergencia del muestreo de Gibbs sea demasiado grande. Bajo estas condiciones, por el criterio de máxima entropía, la distribución de mínima información que podemos asignar a  $X_0$  es una distribución normal, con lo que, sustituyendo en la ecuación (4.9) la distribución condicional completa de  $LX_0$  es:

$$f(X_0 | \dots) \propto e^{-\frac{h_0}{2}(X_0 - \mu_0)^2} e^{-\frac{h_w}{2}(LX_1 - LF(X_0, \theta_1))^2} \quad (4.15)$$

Siendo

$$LF(X_0, \theta_1) = \ln(\alpha_{m_1}(X_0 - P_0)^{\beta_{m_1}}) \quad (4.16)$$

El problema que nos encontramos para generar valores que correspondan a esta distribución condicional es que  $F(X_0, \theta_1)$  no es una función lineal en  $X_0$ . Podemos aplicar varias alternativas, o bien linealizar  $F(X_0, \theta_1)$  con la aproximación en serie de Taylor de primer orden respecto al núcleo de la distribución inicial de  $X_0$ <sup>4</sup>, o utilizar algoritmos de aceptación y rechazo (Desvroye, 1986). En esta ocasión aplicamos directamente el algoritmo de aceptación y rechazo.

---

<sup>4</sup> Se puede consultar este modelo de aproximación en González Galán (2004).

Partiendo de la distribución condicional, el algoritmo se desarrolla según los siguientes pasos:

1) Obtenemos un valor  $\tilde{x}_0$  de  $X_0 \sim N(\mu_0, h_0)$ , con la condición  $\tilde{x}_0 > P_0$ ,

2) Calculamos  $x_1 / \ln x_1 = \ln F(\tilde{x}_0, \theta_1)$ , es decir  $x_1 = e^{\alpha_{m_1}(\tilde{x}_0 - P_0)^{\beta_{m_1}}}$

3) Calculamos  $r_{01} = e^{-\frac{h_w}{2}(x_1 - \tilde{x}_0)^2}$ ,

4) Generamos  $U \sim U(0,1)$ ,

5) Si  $U \leq r_{01}$ , aceptamos  $\tilde{x}_0$  como valor de la distribución condicional de  $X_0$ . En caso contrario, volvemos al paso 1.

#### 4.4.2 Densidad condicional de las biomazas intermedias. Generación de valores de $X_t$ para $t=1,2,\dots,T-1$ .

Si fijamos la biomasa de un año intermedio  $t$ ,  $X_t$  para  $t=1,2,\dots,T-1$  y teniendo en cuenta la forma de la distribución conjunta de los logaritmos neperianos de las variables (4.3), al aplicar el teorema de Bayes, podemos eliminar los elementos que son invariantes respecto a  $\ln X_t = LX_t$  con lo que la función de densidad a posteriori para esta variable es:

$$f(LX_t | \dots) \propto f(LX_t | LX_{t-1}, P_{t-1}, \alpha_{m_t}, \beta_{m_t}, h_w) f(LX_{t+1} | LX_t, P_t, \alpha_{m_{t+1}}, \beta_{m_{t+1}}, h_w) f(LP_t | LX_t, q, h_v) \quad (4.17)$$

$$\propto e^{-\frac{h_w}{2}(LX_t - LF(X_{t-1}, \theta_t))^2} e^{-\frac{h_w}{2}(LX_{t+1} - LF(X_t, \theta_{t+1}))^2} \quad (4.18)$$

$$e^{-\frac{h_v}{2}(LP_t - \ln[X_t(1 - e^{-qE_t})])^2}$$

Siendo

$$LF(X_i, \boldsymbol{\theta}_{i+1}) = \ln(\alpha_{m_{i+1}}(X_i - P_i)^{\beta_{m_{i+1}}}), \quad i=0,1,\dots,T-1 \quad (4.19)$$

Consideramos los valores que sean lineales respecto a  $LX_t$ , y, operando con los exponentes, la función condicional se puede expresar como producto de las funciones de densidad de dos distribuciones normales:

$$f(LX_t|\dots) \propto e^{-\frac{(h_w+h_v)}{2}(LX_t-L\mu_t)^2} e^{-\frac{h_w}{2}(LX_{t+1}-LF(X_t,\boldsymbol{\theta}_{t+1}))^2} \quad (4.20)$$

Donde:

$$\begin{aligned} L\mu_t \\ = \frac{h_w[\ln(e^{\alpha_{m_{t+1}}(X_{t-1} - P_{t-1})^{\beta_{m_{t+1}}})}] + h_v[\ln P_t - \ln(1 - e^{-qE_t})]}{h_w + h_v} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Es el valor esperado de la distribución correspondiente a  $LX_t$ . Como  $LF(X_t, \boldsymbol{\theta}_{t+1})$  no es lineal respecto a  $X_t$ , se podría aplicar una aproximación lineal de primer orden de Taylor en torno a  $L\mu_t$  para llegar finalmente a una distribución normal<sup>5</sup>. Otra opción es utilizar un algoritmo de aceptación rechazo, que es el método que aplicamos, partiendo de que en un instante  $t+1$  ya hemos generado un valor válido para  $X_t$  y podemos suponer:

$$X_{t+1} = e^{\alpha_{m_{t+1}}(X_t - P_t)^{\beta_{m_{t+1}}}} + w_{t+1} \quad \text{con } w_{t+1} \sim N(0, h_w) \quad (4.22)$$

Y que

$$P_{t+1} = X_{t+1}(1 - e^{-qE_{t+1}}) + v_{t+1} \quad \text{con } v_{t+1} \sim N(0, h_v) \quad (4.23)$$

<sup>5</sup> Ver González Galán (2004, cap. 4).

Si despejamos  $X_{t+1}$  de la segunda igualdad, tenemos:

$$X_{t+1} = \frac{1}{(1 - e^{-qE_{t+1}})} P_{t+1} + \frac{1}{(1 - e^{-qE_{t+1}})} v_{t+1} \quad \text{con } v_{t+1} \sim N(0, h_v) \quad (4.24)$$

Es decir, por (4.17):

$$X_{t+1} \sim N\left(e^{\alpha_{m_{t+1}}}(X_t - P_t)^{\beta_{m_{t+1}}}, h_w\right) \quad (4.25)$$

Y por (4.19):

$$X_{t+1} \sim N\left(\frac{1}{(1 - e^{-qE_{t+1}})} P_{t+1}, (1 - e^{-qE_{t+1}})^2 h_v\right) \quad (4.26)$$

Para ajustar las distribuciones calculamos  $X_{t+1}$  a partir de la distribución normal que se obtiene como media aritmética ponderada de ambas, tomando como ponderaciones las precisiones respectivas, el resultado sería una distribución normal, con valor esperado:

$$\mu_{t+1} = h_w e^{\alpha_{m_{t+1}}}(X_t - P_t)^{\beta_{m_{t+1}}} + (1 - e^{-qE_{t+1}})P_{t+1} \quad (4.27)$$

Y precisión

$$h_{t+1} = h_w + (1 - e^{-qE_{t+1}})^2 h_v \quad (4.28)$$

Teniendo en cuenta estas igualdades, el desarrollo del algoritmo para generar valores de esta distribución es el siguiente:

1) Dado  $\tilde{x}_t$ , valor válido para la biomasa en el año  $t$ , *Calculamos*

$$lt_1 = e^{\alpha_{m_{t+1}}}(\tilde{x}_t - P_t)e^{\beta_{m_{t+1}}} \text{ y } lt_2 = (1 - e^{-qE_{t+1}}),$$

2) *Establecemos*  $Medsim1 = h_w lt_1 + h_v P_{t+1} lt_2$

$$Presim1 = h_w + h_v lt_2^2,$$

- 3) Generamos un valor aleatorio de una distribución normal con valor esperado  $Med_{sim1}$  y precisión  $Pres_{im1}$ , llamémosle  $\tilde{x}_{t+1}$ , con la condición de que  $\tilde{x}_{t+1} > P_{t+1}$ ,
- 4) Calculamos  $r_{t0} = e^{\alpha_{m_{t+2}}}(\tilde{x}_{t+1} - P_{t+1})e^{\beta_{m_{t+2}}}$ ,
- 5) Calculamos  $r_{t1} = e^{\frac{-h_w}{2}(x_{t+2} - r_{t0})^2}$ ,
- 6) Generamos  $U \sim U(0,1)$ ,
- 7) Si  $U \leq r_{t1}$ , aceptamos  $\tilde{x}_{t+1}$  como valor de la distribución condicional de  $X_{t+1}$ . En caso contrario, volvemos al paso 3.

#### 4.4.3 Densidad condicional de la biomasa final. Generación de valores de $X_T$ .

Igual que en los casos anteriores, la función de densidad condicional de  $X_T$  sólo depende de los términos en los que interviene dicha variable, por lo que es proporcional al siguiente producto de funciones:

$$f(LX_T | \dots) \propto f(LX_T | LX_{T-1}, P_{T-1}, \alpha_{m_T}, \beta_{m_T}, h_w) f(LP_T | LX_T, q, h_v) \quad (4.29)$$

$$\propto e^{\frac{-h_w}{2}(LX_T - F(X_{T-1}, \theta_T))^2} e^{\frac{-h_v}{2}(LP_T - \ln[X_T(1 - e^{-qET})])^2} \quad (4.30)$$

Donde ambas son lineales respecto a  $LX_T$ , esto lleva a que la función de densidad condicional corresponde a una distribución normal y cuya expresión se puede resumir como:

$$f(LX_T | \dots) \propto e^{\frac{-(h_w + h_v)}{2}(LX_T - \mu_T)^2}$$

Siendo

$$\mu_T = \frac{h_w F(X_{T-1}, \boldsymbol{\theta}_T) + h_v [\ln(P_T) - \ln(1 - e^{-qE_T})]}{h_w + h_v} \quad (4.31)$$

Podríamos generar valores directamente de esta distribución, o emplear el algoritmo de aceptación y rechazo siguiendo los procedimientos anteriores, ello nos evitaría utilizar logaritmos y es el procedimiento que vamos a seguir. Dado  $\tilde{x}_{T-1}$ , valor válido para la biomasa en el año  $T-1$ , La secuencia del algoritmo es la siguiente:

$$1) \text{ Calculamos } lt_1 = e^{\alpha_T} (\tilde{x}_{T-1} - P_{T-1}) e^{\beta_T} \text{ y } lt_2 = (1 - e^{-qE_T}),$$

$$2) \text{ Establecemos } Medsim1 = h_w lt_1 + h_v P_T lt_2$$

$$Presim1 = h_w + h_v lt_2^2,$$

3) Generamos un valor aleatorio de una distribución normal con valor esperado  $Medsim1$  y precisión  $Presim1$ , llamémosle  $\tilde{x}_T$ , con la condición de que  $\tilde{x}_T > P_T$ .

#### 4.4.4 Densidad condicional del parámetro $\alpha_{m_t}$ , para $t=1, \dots, T$ . Generación de valores de $\alpha_{m_t}$ .

En cada momento  $t$ , la distribución condicional completa del parámetro  $\alpha_{m_t}$  es proporcional al siguiente producto de funciones:

$$f(\alpha_{m_t} | \dots) \propto f(\alpha_{m_t}) f(LX_t | LX_{t-1}, P_{t-1}, \alpha_{m_t}, \beta_{m_t}, h_w) \quad (4.32)$$

Que va a depender fundamentalmente de la distribución inicial asociada a  $\alpha_{m_t}$ . En este sentido partimos de dos opciones:

**a)** Conocemos un valor medio inicial y una precisión asociadas a  $\alpha_{m_t}$ , entonces la distribución inicial de mínima información es la distribución normal por el algoritmo de máxima entropía. Tendríamos:

$$\begin{aligned} f(\alpha_{m_t} | \dots) &\propto f(\alpha_{m_t}) f(LX_t | LX_{t-1}, P_{t-1}, \alpha_{m_t}, \beta_{m_t}, h_w) \\ &\propto e^{-\frac{h_{m_{t_0}}}{2}(\alpha_{m_t} - \alpha_{m_{t_0}})^2} e^{-\frac{h_w}{2}(LX_t - \alpha_{m_t} - \beta_{m_t} \ln(X_{t-1} - P_{t-1}))^2} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Si desarrollamos los exponentes en función de  $\alpha_{m_t}$ , nos lleva a una distribución normal con valor esperado:

$$\mu_{m_t} = \frac{h_{m_{t_0}} \alpha_{m_{t_0}} + h_w [LX_t - \beta_{m_t} \ln(X_{t-1} - P_{t-1})]}{h_{m_{t_0}} + h_w} \quad (4.34)$$

Y precisión

$$h_{m_t} = h_{m_{t_0}} + h_w \quad (4.35)$$

Cuyos valores se pueden generar directamente a partir de los algoritmos de generación de la distribución normal estándar.

**b)** Si preferimos partir de una distribución menos informativa sobre  $\alpha_{m_t}$ , aplicando el método determinado por Jeffreys o por Zellner, la distribución inicial adecuada sería la distribución uniforme ya que  $\alpha_{m_t}$  representa un cambio de origen respecto al valor esperado de  $\ln(X_t)$ , y, como hemos visto en el capítulo 3, la distribución inicial no informativa para el valor esperado de una distribución normal es constante o uniforme en todo su rango de variación e invariante ante cambios de origen o de escala. Teniendo en

cuenta esta distribución inicial, la distribución condicional completa de  $\alpha_{m_t}$  es:

$$f(\alpha_{m_t}|\dots) \propto \begin{cases} e^{-\frac{h_w}{2}(LX_t - \alpha_{m_t} - \beta_{m_t} \ln(X_{t-1} - P_{t-1}))^2} & \text{si } \alpha_{m_t} \in [a_1, a_2] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.36)$$

Sigue una distribución normal en su rango de variación y es nula fuera de él.

Se puede utilizar de la información inicial sobre  $\alpha_{m_t}$  para determinar un intervalo de variación de este parámetro. Para generar valores de  $\alpha_{m_t}$  consideramos el siguiente algoritmo:

- 1) Generamos  $U \sim U(0,1)$  y calculamos  $\tilde{\alpha}_{m_t} = a_1 + (a_2 - a_1)U$ ,
- 2) Calculamos  $r_{m_t} = \sqrt{\frac{h_w}{2\pi}} e^{-\frac{h_w}{2}(LX_t - \tilde{\alpha}_{m_t} - \beta_{m_t} \ln(X_{t-1} - P_{t-1}))^2}$ ,
- 3) Generamos  $V \sim U(0,1)$ ,
- 4) Si  $V \leq r_{m_t}$ , aceptamos  $\tilde{\alpha}_{m_t}$  como valor de la distribución condicional de  $\alpha_{m_t}$ . En caso contrario, volvemos al paso 1.

#### 4.4.5 Densidad condicional del parámetro $\beta_{m_t}$ , para $t=1, \dots, T$ .

La distribución condicional completa del parámetro  $\beta_{m_t}$ , para cada momento t, es proporcional al siguiente producto de funciones:

$$f(\beta_{m_t}|\dots) \propto f(\beta_{m_t})f(LX_t | LX_{t-1}, P_{t-1}, \alpha_{m_t}, \beta_{m_t}, h_w) \quad (4.37)$$

Que, igual que ocurría con  $\alpha_{m_t}$ , va a depender fundamentalmente de la distribución inicial asociada a  $\beta_{m_t}$  y para la que vamos a tener en cuenta las mismas opciones:

**a)** Conocemos un valor medio inicial y una precisión asociadas a  $\beta_{m_t}$ , la distribución inicial de mínima información es la distribución normal por el algoritmo de máxima entropía. Tendríamos:

$$\begin{aligned} f(\beta_{m_t}|\dots) &\propto f(\beta_{m_t})f(LX_t|LX_{t-1}, P_{t-1}, \alpha_{m_t}, \beta_{m_t}, h_w) \\ &\propto e^{\frac{-h'_{m_{t_0}}}{2}(\beta_{m_t}-\beta_{m_{t_0}})^2} e^{\frac{-h_w}{2}(LX_t-\alpha_{m_t}-\beta_{m_t}\ln(X_{t-1}-P_{t-1}))^2} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Si desarrollamos los exponentes en función de  $\beta_{m_t}$ , nos lleva a una distribución normal con valor esperado:

$$\mu_{m_t} = \frac{h'_{m_{t_0}}\beta_{m_{t_0}} + \frac{h_w}{\ln(X_{t-1}-P_{t-1})}(LX_t - \alpha_{m_t})}{h'_{m_{t_0}} + h_w[\ln(X_{t-1}-P_{t-1})]^2} \quad (4.39)$$

Y precisión:

$$h'_{m_{t_0}} + h_w[\ln(X_{t-1}-P_{t-1})]^2 \quad (4.40)$$

Igual que ocurría en el caso anterior, los valores se pueden generar directamente a partir de los algoritmos de generación de la distribución normal estándar.

**b)** Si no tenemos ninguna información sobre  $\beta_{m_t}$ , o preferimos partir de una distribución menos informativa, estamos ante el mismo caso que  $\alpha_{m_t}$ , aplicando el método determinado por Jeffreys o por Zellner, la distribución

inicial no informativa sería la distribución uniforme, ya que también representa un cambio de origen respecto al valor esperado de  $\ln(X_t)$ . Bajo esta hipótesis, la distribución condicional completa de  $\beta_{m_t}$  es:

$$f(\beta_{m_t}|\dots) \propto \begin{cases} e^{-\frac{h_w}{2}(LX_t - \alpha_{m_t} - \beta_{m_t} \ln(X_{t-1} - P_{t-1}))^2} & \text{si } \beta_{m_t} \in [b_1, b_2] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.41)$$

donde  $[b_1, b_2]$  representa el intervalo de valores posibles para  $\beta_{m_t}$ , que podemos aproximar a partir de la información inicial sobre  $\beta_{m_t}$ . Para generar valores de esta variable podemos seguir el mismo procedimiento que ya hemos expuesto en el caso de  $\alpha_{m_t}$ .

#### 4.4.6 Densidad condicional del parámetro de la ecuación de captura.

La función de densidad del coeficiente de capturabilidad,  $q$ , condicionado a los valores de biomasa, de capturas y de parámetros de la función stock-reclutamiento, incluidos los errores de proceso y de observación, es proporcional al siguiente producto de funciones:

$$f(q|\dots) \propto \pi(q) \prod_{t=1}^T f(\ln P_t | LX_t, q, h_v) \quad (4.42)$$

Que tendremos que determinar dependiendo de la función inicial que asignemos a  $q$ , que a su vez dependerá de la información con la que contemos sobre este parámetro.

- Conocemos un valor medio inicial y una precisión asociadas a  $q$ , entonces la distribución inicial de mínima información es la distribución normal por el algoritmo de máxima entropía.

- Supongamos que preferimos partir de una distribución menos informativa sobre  $q$ , la alternativa es utilizar las distribuciones iniciales que obtenemos con el método de Jeffreys o con el Zellner, considerando la información sobre la biomasa disponible en  $t=0$ .

- **Método de Jeffreys:**  $\ln(1 - e^{-qE_0}) \sim \text{Uniforme}$ , por la ecuación (3.86) teníamos:

$$\pi(q) \propto \frac{e^{-qE_0}}{1 - e^{-qE_0}} \quad (4.43)$$

El problema que tienen las distribuciones iniciales no informativas de Jeffreys es que pueden ser impropias, como ocurre en este caso, (si  $q \rightarrow 1$ ,  $\pi(q) \rightarrow +\infty$ ). Para poder generar algún valor de  $q$  siguiendo este método, vamos desarrollar  $\pi(q)$  en serie de Taylor de primer orden, para lo que necesitamos partir de un valor  $q_0$  que obtendremos a partir de la relación entre las capturas y la información que tenemos sobre la biomasa inicial, es decir, calculamos  $q_0$  a partir de:

$$P_0 = X_0(1 - e^{-qE_0}) \quad (4.44)$$

y podemos aproximar la función inicial en un entorno de este valor con

$$\pi(q) \propto \pi(q_0) + (q - q_0) \left. \frac{\partial \pi(q)}{\partial q} \right|_{q=q_0} \quad (4.45)$$

Calculando la derivada de primer orden respecto a  $q$ , el resultado es

$$\pi'(q) = \frac{-E_0 e^{-qE_0}}{(1 - e^{-qE_0})^2} \quad (4.46)$$

Que, sustituyendo en (4.39) y teniendo en cuenta (4.38) nos lleva a que

$$\pi(q) \propto \frac{e^{-q_0 E_0}}{1 - e^{-q_0 E_0}} + (q - q_0) \frac{-E_0 e^{-q_0 E_0}}{(1 - e^{-q_0 E_0})^2} \quad (4.47)$$

Si hacemos un cambio de variables  $t = q - q_0$ , la función de densidad asociada a  $t$  sería

$$\pi(t) \propto \frac{e^{-q_0 E_0}}{1 - e^{-q_0 E_0}} - t \frac{E_0 e^{-q_0 E_0}}{(1 - e^{-q_0 E_0})^2} \quad (4.48)$$

Y considerando el valor  $a_0 = \frac{1 - e^{-q_0 E_0}}{E_0}$ , se puede expresar como

$$\pi(t) \propto \left[ \frac{2}{a_0} - \frac{2}{a_0^2} t \right] \quad (4.49)$$

$\pi(t)$  es proporcional a una distribución triangular en  $0 < t < a_0$ . Esta distribución precisamente se utiliza como aproximación al comportamiento de una variable de la que no se cuenta con datos y únicamente se puede suponer un valor mínimo y un máximo.

Para generar datos de  $t$ , y a partir de ellos de  $q$ , utilizamos el método de inversión respecto a la función de distribución, con lo que el algoritmo se desarrolla en los siguientes pasos:

- 1) Calcular  $a_0 = \frac{1 - e^{-q_0 E_0}}{E_0}$ ,
  - 2) Generar  $U \sim U(0,1)$ ,
- (4.50)

3) Calcular  $t_0 = a_0(1 - \sqrt{u})$ ,

4) Devolver  $\tilde{q}_0 = t_0 + q_0$ .

- **Método de Zellner**

Si utilizamos el método de Zellner tenemos:  $e^{-qE_0} \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , i.e.,

$\pi(q) \propto \left(\frac{e^{-qE_0}}{1-e^{-qE_0}}\right)^{1/2}$ . Partimos de una distribución inicial propia para la que muchos programas generan valores aleatorios.

1) Generamos un valor  $t \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,

2) Calculamos  $q = \frac{1}{E_0} \ln\left(\frac{1}{t}\right)$ .

La distribución beta se adapta a situaciones en las que necesitamos un comportamiento global de una variable cuando hay muy pocos datos, un ejemplo es la distribución  $\text{Beta}(1,1)$  que coincide con la distribución uniforme.

### - Distribución condicional completa de $q$ .

Volviendo a la distribución condicional completa de  $q$ , por la igualdad (4.37), es el producto de la distribución inicial de  $q$  ( $\pi(q)$ ), por la distribución conjunta de las capturas en el período de estudio, lo que da como resultado:

$$f(q | \dots) \propto \pi(q) e^{-\frac{h\gamma}{2} \sum_{t=1}^T [\ln(P_t - LX_t - \ln(1 - e^{-qE_t}))]^2} \quad (4.51)$$

En este caso, la función  $\ln(1 - e^{-qE_t})$  no es lineal en  $q$ , así que optamos por desarrollar la aproximación de primer orden de Taylor,

tomando como referencia el valor inicial para  $q$ , es decir  $q_0$ . El resultado final es:

$$\begin{aligned} \ln(1 - e^{-qE_t}) &\cong \ln(1 - e^{-q_0E_t}) + (q - q_0) \frac{E_t e^{-q_0E_t}}{(1 - e^{-q_0E_t})} \\ &= \ln(1 - e^{-q_0E_t}) + (q - q_0) C_{q_0,t} \end{aligned}$$

Sustituyendo en el término correspondiente a las capturas, obtenemos que la densidad condicional de éstas sigue una distribución normal, es decir,  $\prod_{t=1}^T f(\ln P_t | \dots) \sim N(\mu_p, h_p)$  donde:

$$\mu_p = \frac{\sum_{t=1}^T \left[ \ln(P_t) - LX_t - \ln(1 - e^{-q_0E_t}) + q_0 C_{q_0,t} \right]}{\sum_{t=1}^T C_{q_0,t}^2} \quad (4.52)$$

Y

$$h_p = h_v \sum_{t=1}^T C_{q_0,t}^2 \quad (4.53)$$

Una vez fijado el comportamiento del término correspondiente a las capturas, veamos cómo se van a generar los valores de la distribución condicional completa de  $q$  en función de la distribución inicial que se considere:

**a)** Si tenemos información previa sobre el valor esperado de  $q$ , lo identificamos con  $q_0$ , y también conocemos la precisión inicial de  $q$ , entonces podemos tomar la distribución normal como distribución inicial y la distribución condicional final se puede expresar como:

$$f(q | \dots) \propto e^{-\frac{h_0}{2} \sum_{t=1}^T (q - q_0)^2} e^{-\frac{h_v}{2} \sum_{t=1}^T [\ln(P_t - LX_t - \ln(1 - e^{-qE_t}))]^2} \quad (4.54)$$

Que al final nos llevará a una distribución normal con valor esperado y precisión:

$$\mu_q = \frac{h_0 q_0 + h_v \sum_{t=1}^T \left[ \ln(P_t) - LX_t - \ln(1 - e^{-q_0 E_t}) + q_0 C_{q_0, t} \right]}{h_q} \quad (4.55)$$

$$h_q = h_0 + h_v \sum_{t=1}^T C_{q_0, t}^2 \quad (4.56)$$

De la que se pueden generar valores de  $q$  directamente.

**b)** Como alternativa o cuando no tengamos información podemos considerar la distribución a priori obtenida por el procedimiento de Jeffreys o de Zellner. En ambos casos realizamos el mismo procedimiento: para generar un valor de la distribución condicional completa de  $q$ , aplicaremos un algoritmo de aceptación-rechazo, partiendo de valores generados previamente con la distribución inicial asociada a  $q$ . Para ello vemos que podemos expresar la función de densidad condicional conjunta como:

$$f(q | \dots) \propto \pi(q) g(q) \leq c \pi(q) \quad (4.57)$$

Donde  $g(q)$  corresponde al producto de las funciones de densidad de las capturas, considerándola en función de  $q$ , y  $c$  es el valor máximo que puede tomar la función  $g(q)$ . El algoritmo se puede resumir en los siguientes pasos:

- 1) Generar  $\tilde{q}_0$  a partir de  $\pi(q)$  (siguiendo el método de Jeffreys o el de Zellner),
- 2) Generar  $U \sim U(0,1)$ ,

- 3) Si  $U \leq \frac{f(\tilde{q}_0|\dots)}{c\pi(\tilde{q}_0)}$  se acepta  $\tilde{q}_0$  como valor de la variable con función de densidad  $f(q|\dots)$ ,
- 4) En caso contrario volvemos al paso 1.

#### 4.4.7 Densidad condicional del parámetro de la precisión asociada a los errores de proceso y observación.

En cuanto a los errores de proceso y de medida, consideramos que sus distribuciones iniciales son informativas y se especifican como distribuciones gamma con parámetros fijados al suponer que sus desviaciones estándar son de 50 y 500 Tm respectivamente y un coeficiente de variación del 10%.

##### - Densidad condicional completa de la precisión del error de proceso

Aplicando el teorema de Bayes, la función de densidad asociada a la precisión del error de proceso, condicionado a las biomazas y parámetros de la ecuación de estado, es proporcional al siguiente producto de funciones:

$$f(h_w|\dots) \propto f(h_w) \prod_{t=1}^T f(LX_t|LX_{t-1}, P_{t-1}, \alpha_m, \beta_m, h_w) \quad (4.58)$$

$$\propto h_w^{\frac{1}{2}(a_0-2)} e^{-\frac{h_w}{2}b_0} h_w^{\frac{T}{2}} e^{-\frac{h_w}{2} \sum_{t=0}^T (LX_t - F(S_{t-1}, \theta_1))^2}$$

Que, al trabajar con distribuciones conjugadas, hace que la función de densidad de probabilidades condicional completa asociada a  $h_w$  corresponda a la de una distribución gamma de parámetros:

$$a'_0 = a_0 + T \quad (4.59)$$

$$b'_0 = b_0 + \sum_{t=0}^T (LX_t - F(S_{t-1}, \theta_1))^2 \quad (4.60)$$

### - Densidad condicional completa de la precisión del error de observación.

En este caso, la función de densidad de probabilidades condicional completa asociada a  $h_v$  es proporcional a:

$$\begin{aligned} f(h_v | \dots) &\propto f(h_v) \prod_{t=1}^T f(\ln P_t | LX_t, q, h_v) \propto \\ &\propto h_v^{\frac{1}{2}(c_0-2)} e^{-\frac{h_v}{2}d_0} h_v^{\frac{T}{2}} e^{-\frac{h_v}{2}\sum_{t=1}^T (\ln(P_t) - G(X_t, q))^2} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Que corresponde a una distribución gamma de parámetros:

$$c'_0 = c_0 + T \quad (4.62)$$

$$d'_0 = d_0 + \sum_{t=0}^T (LX_t - F(S_{t-1}, \theta_1))^2 \quad (4.63)$$

Ambas distribuciones se pueden generar directamente con los generadores de valores aleatorios de para las distribuciones gamma.

## **4.5 Resultados de la estimación**

Una vez determinada las distribuciones a priori y las densidades condicionales completas de las variables que intervienen en los modelos, procedemos a su estimación mediante el generador de muestras de Gibbs. Como hemos indicado, esta técnica permite generar una muestra aleatoria de la densidad conjunta de los parámetros y de las biomazas al inicio de cada temporada de pesca en el período de estudio.

El software utilizado para la programación de los algoritmos ha sido el paquete estadístico GAUSS 10, utilizando las rutinas de generación de números aleatorios programadas en dicho paquete. Con una amplitud de convergencia de  $l=30$  iteraciones y repitiendo este procedimiento un total de  $G=200$  veces, se ha obtenido una muestra de la distribución conjunta para cada uno de los modelos estimados, utilizando para ello un ordenador Sony VAIO (4GB de RAM). A partir de la muestra de la distribución conjunta, y aplicando el resultado de Gelfand y Smith (1991) hemos extraído una muestra aleatoria para cada una de las variables inobservables.

### **4.5.1 Resultados para los parámetros de la ecuación de biomazas. Modelo de Cushing aplicado a los datos de caballa.**

A continuación mostraremos los resultados sobre los parámetros de la ecuación de biomazas del modelo de Cushing aplicado a los datos de la caballa, diferenciando si siguen una distribución normal o una distribución uniforme.

Recordamos que La ecuación de biomazas tiene la forma:

$$X_t = e^{\alpha_0 + \alpha_1 T_{t-2}} S_{t-1}^\beta e^{w_t} \quad (4.64)$$

**Tabla 4.1.** Resultados finales de los parámetros de ecuación de biomazas, suponiendo una distribución inicial uniforme.

<b>Parámetro</b>	<b>Media</b>	<b>Mediana</b>	<b>Asimetría</b>	<b>Coficiente de variación</b>
$\alpha_0$	-1,5470	-0,2419	-0,3467	853,678%
$\alpha_1$	-0,2799	-0,2838	-0,3272	94,491%
$\beta$	2,3625	2,3353	0,5174	64,442%

**Tabla 4.2.** Resultados finales de los parámetros de ecuación de biomazas, suponiendo una distribución inicial normal.

<b>Parámetro</b>	<b>Media</b>	<b>Mediana</b>	<b>Asimetría</b>	<b>Coficiente de variación</b>
$\alpha_0$	20,336	20,3383	-0,0079	7,861%
$\alpha_1$	-0,4987	-0,4969	-0,2152	12,722%
$\beta$	0,1504	0,1471	0,5283	57,504%

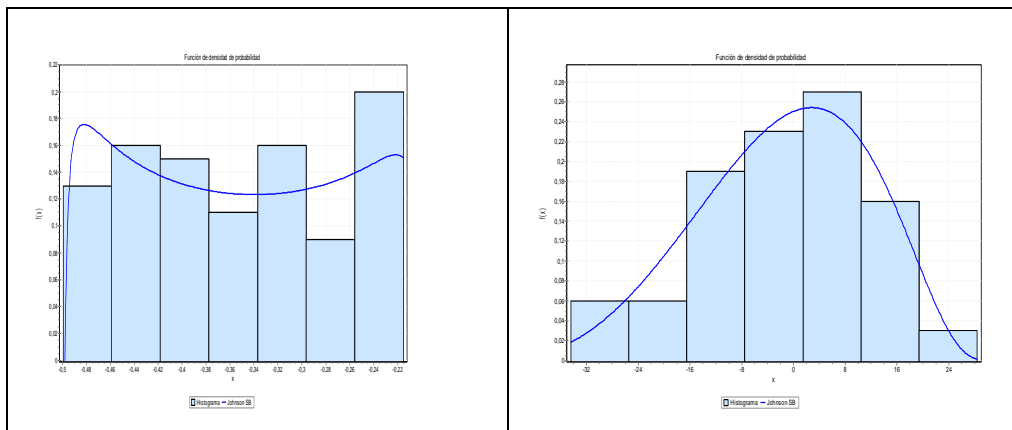
Es evidente que el hecho de usar distribuciones iniciales informativas hace se puede apreciar una reducción significativa en los coeficientes de variación, siendo éstas últimas estimaciones mucho más próximas a las obtenidas por González Galán (2004) y cuyos datos pasamos a mostrar:

**Tabla 4.3.** Resultados finales de los parámetros de ecuación de biomazas, González Galán (2004)

Parámetro	Media	Mediana	Asimetría	Coficiente de variación
$\alpha_0$	20,377	20,383	-0,015	2,83%
$\alpha_1$	-0,499	-0,499	-0,004	4,41%
$\beta$	0,129	0,129	-0,030	2,33%

Hay que añadir que el tamaño muestral del trabajo que tenemos de referencia era 5 veces mayor al nuestro así que las estimaciones finales dan una aproximación a la realidad mucho mejor que la que hemos obtenido.

En este caso, y con el objetivo de comparar los resultados en función de la distribución inicial, el hecho de contar con información previa mejora claramente las estimaciones finales. En las siguientes gráficas mostramos la distribución inicial y el resultado final para cada uno de los coeficientes:



**Figura 4.3.** Densidad inicial y final del parámetro  $\alpha_0$ . Distribución inicial uniforme.

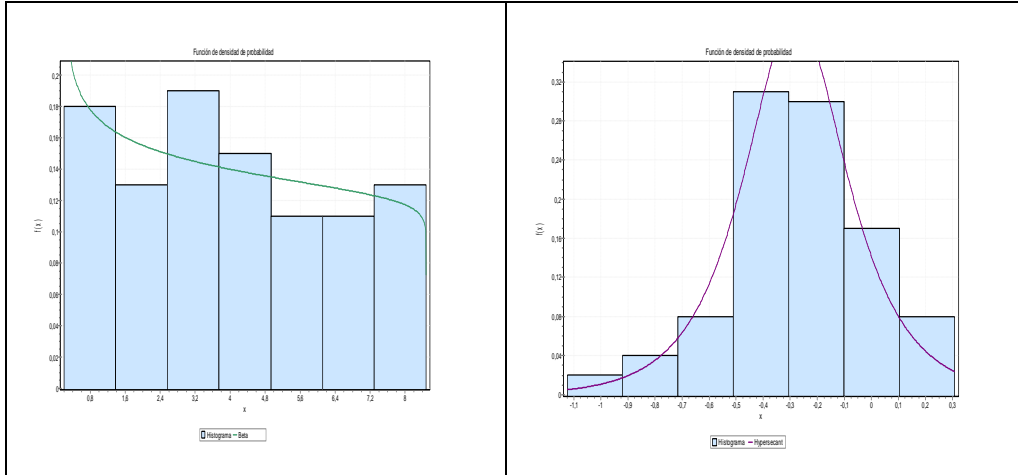


Figura 4.4. Densidad inicial y final del parámetro  $\alpha_1$ . Distribución inicial uniforme.

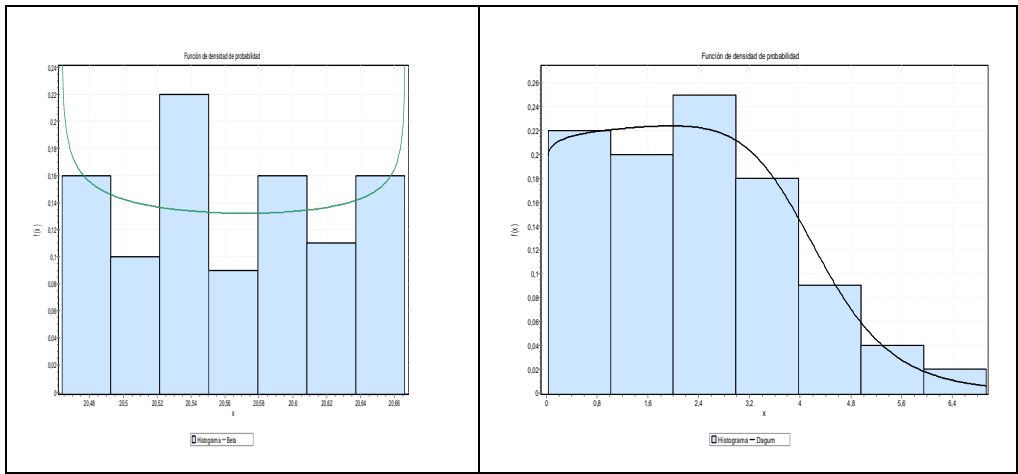


Figura 4.5. Densidad inicial y final del parámetro  $\beta$ . Distribución inicial uniforme.

### 4.5.2 Resultados para los parámetros de la ecuación de capturas. Modelo de Cushing aplicado a los datos del boquerón.

La ecuación de capturas tiene la forma:

$$P_t = X_t(1 - e^{-qEt})e^{vt} \quad (4.65)$$

Donde el parámetro que estudiamos es el coeficiente de capturabilidad  $q$ . Mostramos a continuación los resultados de las estimaciones de este parámetro según las distintas formas de establecer la distribución inicial: Normal, método de Jeffreys y método de Zellner.

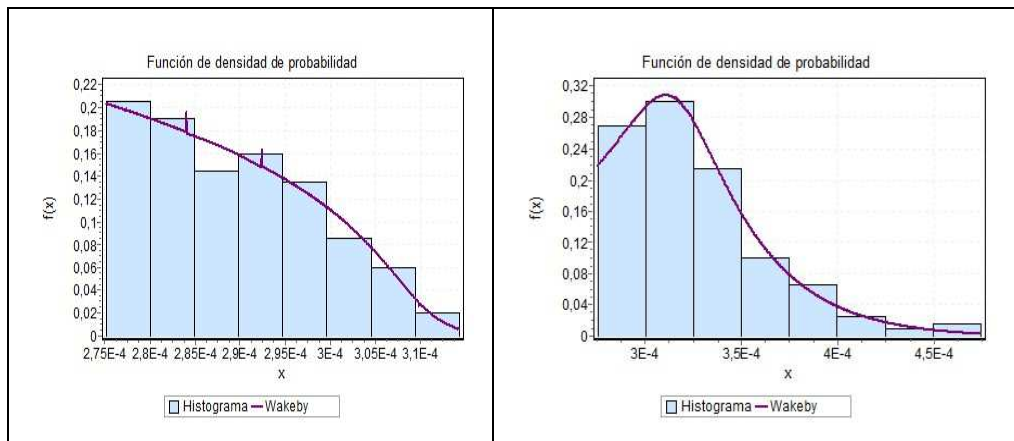
En la tabla 4.5 podemos comprobar que en este caso, sin embargo, las estimaciones con menor coeficiente de variación corresponden a los resultados que se obtienen cuando la distribución inicial es la de jeffreys. Una forma de confirmar la decisión es comparar las capturas finales estimadas en cada caso con las capturas reales.

**Tabla 4.4.** Resultados finales del parámetro de la ecuación de capturas,  $q$ .

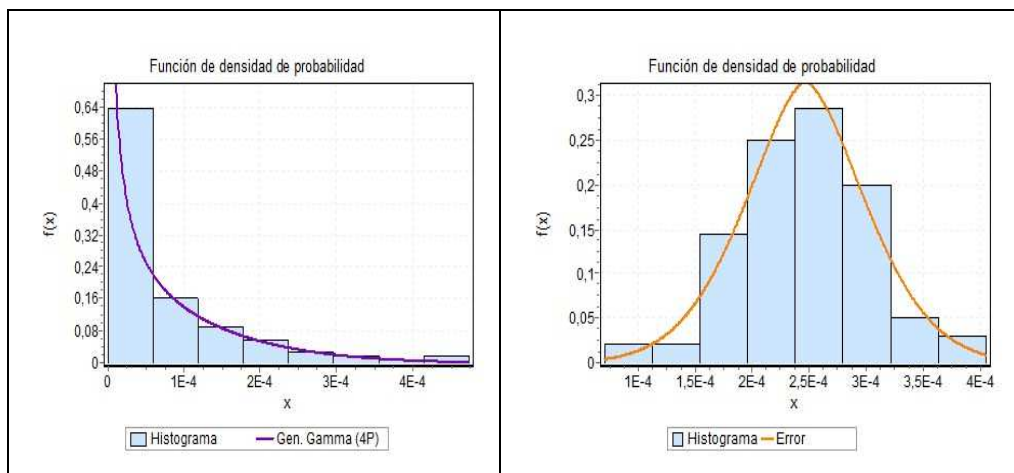
<b>Distribución inicial</b>	<b>Media</b>	<b>Mediana</b>	<b>Asimetría</b>	<b>Coficiente de variación</b>
<b>Jeffreys</b>	0,000326	0,000320	1,207311	11,61%
<b>Zellner</b>	0,000246	0,000247	-0,060379	23,80%
<b>Normal</b>	0,000271	0,000268	-0,244362	26,32%

Con ello vemos que el hecho de partir por defecto de las distribuciones normales no aporta necesariamente la mejor solución, ésta

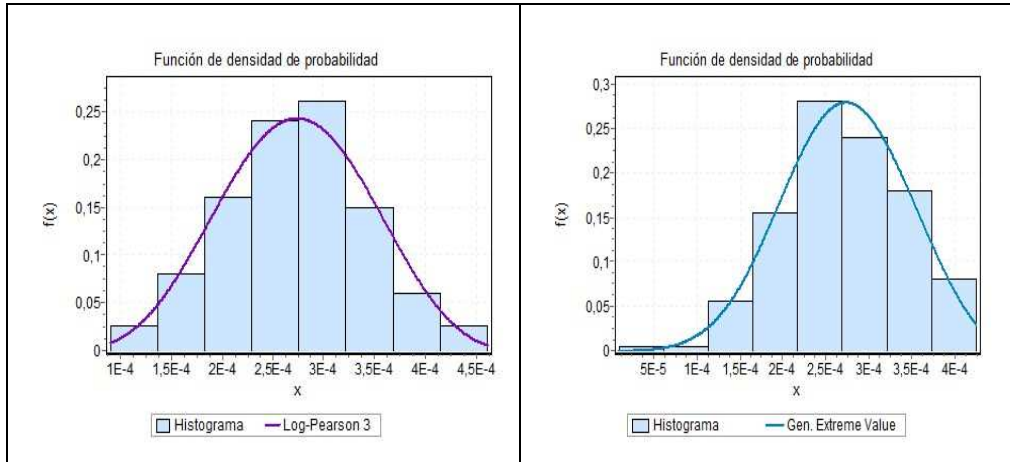
va a depender de los modelos y los datos con los que se esté trabajando. Veamos las gráficas de las distribuciones iniciales y finales en cada situación.



**Figura 4.6.** Densidad inicial y final del parámetro  $q$  cuando la distribución inicial es la de Jeffreys.



**Figura 4.7.** Densidad inicial y final del parámetro  $q$  cuando la distribución inicial es la de Zellner.



**Figura 4.8.** Densidad inicial y final del parámetro  $q$  cuando la distribución inicial es la Normal.

## **CONCLUSIONES Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN**

Este trabajo se ha dividido en tres partes enlazadas entre sí: los modelos de descripción dinámica de una población explotada, y en este caso centrada en la explotación de recursos pesqueros, seguida de la exposición de algunos métodos de construcción de distribuciones iniciales mínimo informativas, y, por último, el tratamiento de los métodos bayesianos aplicados a modelos de gestión de pesquerías, en los que se necesitan tanto los modelos dinámicos que explican la evolución de una pesquería, como de distribuciones iniciales de los parámetros que aparecen en dichos modelos para llegar, aplicando teoría bayesiana, a las distribuciones finales a partir de las cuales podremos estimar estos parámetros.

De la primera parte podemos señalar la dificultad de obtener series de datos referidas a la gestión de pesquerías, ya sea por la escasez de los mismos y bases de datos no fiables, en el caso de series antiguas, como porque, también hay que indicarlo, desde 2007 no se han podido obtener informes desagregados de ninguna pesquería a pesar de que existen estas bases de datos. Esto conlleva

a que no se puedan realizar estudios actualizados que permitan determinar la evolución de estos recursos y plantear políticas de gestión óptima de los mismos.

En cuanto a la segunda y la tercera parte, nos hemos centrado en metodologías de determinación de distribuciones iniciales no informativas o mínimo informativas aplicables a bases de datos finitas, ya que el propósito final era resolver una cuestión que siempre surge cuando se desea realizar estimaciones, basándose en la teoría bayesiana, sobre modelos estado-medida finitos con la estructura que presentan los modelos stock-reclutamiento.

En relación a los resultados obtenidos, se han podido obtener por la propia aplicación de las técnicas bayesianas que nos permite determinar la distribución inicial de los parámetros fijando el primer momento en el que entran en el modelo, ya que en los siguientes se puede utilizar esta distribución a priori para determinar el resto de distribuciones. La solución analítica de todo el período en conjunto es inviable.

La función inicial asociada a los parámetros depende de su forma de participar en el modelo. Los parámetros que suponen un cambio de origen respecto a la media de la distribución seguirán una distribución uniforme, mientras que aquellos que son parámetros de escala siguen una distribución log-uniforme.

Donde hemos obtenido más diferencias es el parámetro  $q$  (coeficiente de capturabilidad) de la función de capturas cuando queremos determinar la distribución a priori sin contar con información previa. Si elegimos el método de Jeffreys,  $\ln(1 - e^{-qE_0}) \sim \text{Uniforme}$ , que en la práctica hemos visto que se puede

aproximar a una distribución triangular. Si aplicamos el método de Zellner,  $\pi_2^*(q) \propto \left(\frac{e^{-qE_0}}{1-e^{-qE_0}}\right)^{1/2}$ , que nos lleva a una distribución beta(1/2,1/2). Ambas distribuciones están vinculadas a comportamientos globales de una población sobre la que se tiene muy poca información, así que se pueden considerar distribuciones iniciales no informativas.

Las soluciones son aplicables a cualquiera de estos modelos y permiten abrir posibilidades distintas a las empleadas hasta este momento, ya que, partiendo de un mismo modelo de stock-reclutamiento y relación de capturas, al considerar distintas distribuciones iniciales, podemos decidir entre varias soluciones finales cuál sería la óptima y ajustar mejor las estimaciones.

Las dos aplicaciones realizadas, para las que disponíamos de información sobre series de esfuerzo y capturas, se caracterizan por ser pesquerías cuya evolución en el tiempo se encuentra sometida a fuertes fluctuaciones, vinculadas en mayor o menor medida a cambios experimentados en las condiciones ambientales. Este comportamiento implica la necesidad de técnicas adaptativas en las que los parámetros constantes de los modelos tradicionales tienen poca aplicabilidad. La posibilidad de introducir directamente estas variables ambientales y permitir cambios aleatorios en los parámetros, introduce mayores dosis de realismo en la modelización de las pesquerías y, por tanto, permite mejorar la evaluación de los recursos y adoptar decisiones coherentes.

Las líneas de estudio que nos planteamos para el futuro se van a orientar hacia el desarrollo de metodologías aplicables a problemas distintos a los planteados en esta tesis, como los flujos migratorios, consumo de

estupefacientes o reconstruir series como las del valor añadido bruto generado por actividades ilegales para las series de Contabilidad Nacional Trimestral de España.

En relación a estas series, en septiembre de 2014 se presentaron los primeros resultados obtenidos tras aplicar la nueva metodología obligatoria de la Unión Europea con base 2010: el Sistema Europeo de Cuentas Nacionales y Regionales (SEC-2010) en las que se incorpora por primera vez el conjunto de actividades que se consideran ilegales<sup>1</sup>.

Las actividades ilegales que se consideran son: prostitución, tráfico de drogas, contrabando de tabaco y juego ilegal. El INE ha realizado estimaciones de estas actividades siguiendo las metodologías y procedimientos establecidos por Eurostat, pero al final los resultados no se ofrecen de forma separada en las cuentas nacionales. Puede ser interesante reconstruir las series a nivel provincial y de Comunidad Autónoma.

---

<sup>1</sup> Se consideran tanto las actividades ilegales propiamente dichas como aquellas no reguladas legalmente.

# ANEXO 1

## TABLAS DE DATOS UTILIZADOS EN LAS APLICACIONES

**Tabla A.1.1.** Capturas, Esfuerzo observado en la pesquería del boquerón y Temperaturas SST Julio y Cociente SST Febrero y Julio

AÑO	CPUE			T1=SST	T2=Cociente SST
	CAP(Kg.)	(Kg./días)	ESF(días)	Julio	Febrero y Julio
1985	3996470	175.2	22813	0.7229	18.83
1986	1894316	140.7	13460	0.6900	18.24
1987	1687401	289.0	5838	0.7063	18.46
1988	954702	195.8	4875	0.6890	18.76
1989	429712	81.9	5248	0.6684	18.64
1990	649882	89.3	7278	0.6861	18.37
1991	749958	106.5	7043	0.6690	17.55
1992	336772	44.2	7620	0.6930	17.33
1993	131698	21.6	6095	0.6654	17.4
1994	352737	107.6	3278	0.6705	18.14
1995	626643	125.1	5011	0.6759	18.94
1996	1612064	606.0	2660	0.7353	17.96
1997	1062283	428.0	2482	0.7188	19.08
1998	1064811	261.2	4077	0.7162	17.79
1999	980668	159.7	6139	0.6897	17.86
2000	659543	79.9	8251	0.7035	17.45
2001	2811923	332.5	8456	0.7029	18.7
2002	2920511	588.5	4963	0.7361	18.42
2003	246104	30.9	7963	0.6661	18.42
2004	711637	154.0	4622	0.6933	18.23
2005	549116	153.9	3569	0.6788	18.56

**Tabla A.1.2.** Capturas, Esfuerzo observado en la pesquería de caballa en la Resgión Suratlántica Española y Temperatura media de las máximas de la temporada de pesca con un retardo de dos años.

Año	Capturas <sup>TM</sup>	Esfuerzo (días de pesca)	Temperaura (t-2)
1973	4483	2839	24,51
1974	5578	4754	25,31
1975	6123	3928	25,6
1976	4003	2273	25,52
1977	5381	4754	25,83
1978	5215	2244	24,7
1979	6102	4526	24,67
1980	5488	4142	25,11
1981	4146	2130	25,03
1982	2806	1433	26,09
1983	2797	3338	26,01
1984	3357	2570	25,23
1985	4129	3324	25,11
1986	6395	4038	24,18
1987	5901	4212	26,21
1988	3782	3150	25,78
1989	3092	2036	25,69
1990	2544	3231	26,03
1991	2093	2802	26,2
1992	1122	1551	26,66
1993	1714	1291	26,22
1994	2105	3883	26,29
1995	1303	3038	26,55
1996	1182	1523	26,81
1997	1226	1618	27,06
1998	1661	2071	26,18
1999	1255	1008	26,4
2000	1607	1548	26,43

## BIBLIOGRAFÍA

Akaike, H. (1973): "Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle". En Petrov, B. y Csake, F. (eds.), *Second International Symposium on Information Theory*, Budapest: Akademiai Kiado.

Akaike, H. (1978): "A new look at the Bayes procedure". *Biometrika*, 65(1), 53-59.

Alvarez et al. (1986): "Análisis de la pesca de cerco en la región surmediterránea". *Inf. Técn. Inst. Esp. Oceanogr.*, 15.

Amemiya, T. (1985): *Advanced Econometrics*, Cambridge: Harvard, University Press.

Andersen, J. L. (1999): "A review of the Basic Biological and Economic Approaches to Fishing Effort". *SJFI-Working Paper n° 1 12/1999*.

Arrow, K. J. (1968): "Applications of Control Theory to Economics Growth". En *Lectures in Applied Mathematics (12)*, Providence: American Mathematical Society.

Arrow, K., Chenery, H., Minhas, B. y Solow, R. (1961): "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency". *Reviews of Economics and Statistics*, 45, 225-247.

Baranov, T. I. (1918): "On the Question of the biological Basis of Fisheries". *Nauch. Issledov. iktiolog. Inst. Izv.*, 1 (1), 81-128.

- Bellman, R. E. (1957): *Dynamic Programming*. Princenton: Princenton University Press.
- Berck, P. y Johns, G. (1991): "Estimating Structural Resource Models when Stock is Uncertain: Theory and its Applications to Pacific Halibut". En Lund, D. y Øksendal, B. (eds.), *Stochastic Models and Option Values*, Amsterdam: Elsevier Science, 243-266.
- Bernardo, J.M. (1979): "Reference posterior distributions for Bayesian inference". *J. Roy. Statist. Soc. B*, 41, 113-147.
- Beverton, R. J. H. y Holt, S. J. (1957): *On the dynamics of exploited fish populations*. Fishery Investigations Serie II, XIX, Londres: Ministry of Agriculture, Fisheries and Food, 533 pp.
- Box, G.E.P. and Tiao, G.C. (1973): *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Reading, MA: Addison-Wesley, 588 pp.
- Brandon, J., Wade, P.R., (2006): "Assessment of the Bering–Chukchi–Beaufort Seas stock of bowhead whales using Bayesian model averaging". *J. Cet. Res. Manage*, 8, 225–239.
- Caddy, J. F. (1980): "Surplus production models". Selected lectures from the CIDA/FAO/CECAF seminar on fishery resource evaluation. Casablanca, Morocco, 6-24 March 1978: Rome, FAO Canada Funds-in-Trust, FAO/TF/INT 180, 29-55.
- Carlin, B. P. et al. (1991): "Inference for Nonconjugate Bayesian Models Using the Gibbs Sampler". *Canadian Journal of Statistics*, 19, 399-405.
- Carlin, B. P., Polson, N. G. y Stoffer, D. S. (1992): "A Monte Carlo approach to nonnormal and nonlinear state space modelling". *J. Am. Statist. Ass.*, 87, 493-500.

Casella, G. y George, E. (1992): "Explaining the Gibbs Sampler". *The American Statistician*, 46, 167-174.

Castonguay, M., Rose, G. A. y Leggett, W. C. (1992): "Onshore movements of Atlantic mackerel (*Scomber scombrus*) in the northern Gulf of St. Lawrence: associations with wind-forced advections of warmed surface waters". *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 49, 2232-2241

Cheng, H. y Capps, O. (1988): "Demand analysis of fresh and frozen finfish and shellfish in the United States". *American Agricultural Economics Associations*, 70 (3), 533-542.

Cifuentes Lemus, J.L., Torres-García, P. y Frías Mondragón, M. (2003): *El Océano y Sus Recursos, IX. La Pesca*. Fondo de Cultura Económica - Colecc. La Ciencia para Todos, México, 182 pp.

Clark, C. W. y Munro, G. R., (1975): "The economics of Fishing and modern capital theory: a simplified approach". *Journal of Environmental Economics and Management*, 2, 92-106.

Clark, C. W. y Munro, G. R. (1980): "Fisheries and the processing sector: some implications for management policy". *The Bell Journal of Economics*, 11 (2), 603-616.

Clark, C. W. y Munro, G. R. (1982): "The Economics of Fishing and Modern Capital Theory: A simplified approach". En Mirman, L.J. y D. F. Spulber (eds.), *Essays in the economics of renewable resources*, Amsterdam: North-Holland, 31-54.

Clark, C. W., (1973a): "The Economics of Overexploitation". *Science*, 181, 630-634.

Clark, C. W. (1973b): "Profit Maximization and the Extinction of Animal Species". *Journal of Political Economy*, 81, 950-961.

- Clark, C. W. (1974): "Possible effects of schooling on the dynamics of exploited fish populations". *Cons. Perm. Int. Explor. Mer. J.*, 36 (1), 7-14.
- Clark, C. W. (1976): *Mathematical Bioeconomics. The Optimal Management of Renewable Resources*. Nueva York: Wiley; 386 pp.
- Clark, C. W., (1990): *Mathematical Bioeconomics. The optimal management of renewable resources* (second edition), Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience publication. John Wiley & Sons, Inc. 386 pp.
- Clark, C. W., Clarke, F. H. y Munro, G. R. (1979): "The optimal exploitation of renewable resource stocks: problems of irreversible investment". *Econometrica*, 47, 25-47.
- Clark, C.W., (1990): *Mathematical Bioeconomics. The Optimal Management of Renewable Resources*. Nueva York: Wiley.
- Crutchfield, J. y Zeller, A. (1962): "Economic Aspects of the Pacific Halibut Fishery". *Fishery Industrial Research*, 1 (1), 1-173.
- Cushing, D. H. (1959): "On the nature of production in the sea". *Fish. Invest. Lond. Ser. 2*, 18 (7), 104 pp.
- Cushing, D. H. (1971): "The dependence of recruitment on parent stock in different groups of fishes". *Cons. Perm. Int. Explor. Mer. J.*, 33, 340-362.
- Cushing, D. H. (1972): "The production cycle and numbers of marine fish". *Symp. Zool. Soc. Lond.*, 29, 213-232.
- Cushing, D. H. (1975): *Marine Ecology and Fisheries*. Cambridge: Cambridge University Press, 252 pp.

- Dasgupta, P. y Heal, G. M. (1974): "The Optimal Depletion of Exhaustible Resources". *Review of Economic Studies (Symposium on the Economics of Exhaustible Resources)*, 3-28.
- Davidson, R. y MacKinnon, J., (1985): "Testing linear and loglinear regressions against box-cox alternatives". *Canadian Journal of Economics*, 18, 499-517.
- Deriso, R.B., Quinn II, T.J., Neal, P.R. (1985): Catch-age analysis with auxiliary information. *Canadian Journal of Fisheries And Aquatic Sciences* 42, 815-824.
- Desvroye, L., (1986): *Non-Uniform Random Variate Generation*. Nueva York: Springer-Verlag, 843 pp.
- Fabens, A.J. (1965): "Properties and fitting of the von Bertalanffy growth curve". *Growth* 29, 265-289.
- Fisher, R.A. (1922): "On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics". *Phil. Trans. Roy. Soc., Series A*, 222, 309.
- Fourneau, F. (1983): *La provincia de Huelva y los problemas del desarrollo provincial*. Huelva: Diputación Provincial. 378 pp.
- Fournier, D., Archibald, C.P. (1982): "A general theory for analyzing catch at age data". *Canadian Journal of Fisheries And Aquatic Sciences* 39, 1195-1207.
- Fox, W.W. (1970). "An exponential surplus-yield model for optimizing exploited fish populations". *Trans. Am. Fish. Soc.*, 99(1): 80-88.

- Freeman, S. N., y Kirkwood, G. P. (1995): "On a structural time series method for estimating stock biomass and recruitment from catch and effort data". *Fish. Res.*, 22, 77-98.
- García del Hoyo, J. J. (1995): *Modelización bioeconómica de la pesca: propuestas para una regulación de las pesquerías de cerco andaluzas*. Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 760 pp.
- García del Hoyo, J. J. y Castilla, D. (2008): "Influencia del cambio climático en la gestión de pesquerías: la pesca de cerco en el mar de Alborán". En Lorena Bello (ed), *Lecciones de Economía Pesquera*, La Coruña: Instituto Universitario de Estudios Marítimos.
- García del Hoyo, J. J., Castilla, D., Jiménez, R. (2004): "Determination of technical Efficiency of Fisheries by Stochastic Frontier Models: a Case on the Gulf of Cádiz (Spain)". *Journal of Marine Science*, 61, pp.416-421.
- García del Hoyo, J. J. y Herrero Chacón, I. (1998): "The Production Function in the Spanish Trawl Fleet in Moroccan Waters". *Seventh Conference of the International Institute of Fisheries Economics and Trade*, Tromso, Norway.
- García Ordaz, F. (1999): *Innovación Tecnológica en la pesquería de chirla del litoral suratlántico, conflicto entre artes y consecuencias para una gestión óptima del recurso*. Tesis doctoral, Universidad de Huelva, Edición electrónica, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- García Ordaz, F. y García del Hoyo, J.J. (1998): "Un modelo bioeconómico para la pesquería de chirla (*Chamelea gallina*) de la Región Suratlántica española". *Rev. Est. Agrosoc. Pesq.*, 184, 183-211.

- Gavaris, S., (1988): "An adaptive framework for the estimation of population size". *Canadian Journal Of Fisheries And Aquatic Sciences*, Adv. Comm. Res. Doc. 88/29.
- Gelfand, A. E. y Smith, A. F. M. (1990): "Sampled-Based Approaches to Calculating Marginal Densities". *JASA*, 85, 398-409.
- Gelfand, A. E. y Smith, A. F. M. (1991): "Gibbs Sampling for Marginal Posterior Expectations". *Commun. in Statistics. Theory and Methods*, 20, 1747-1766.
- Gelman, A., Carlin, B.P., Stern, H.S., Rubin, D.B. (1995): *Bayesian Data Analysis*. Chapman and Hall, London, 526 pp.
- Gelman, A., Meng, X., y Stern, H. (1996): "Posterior predictive assessment of model fitness via realized discrepancies". *Statist. Sin.*, 6, 733-807.
- Geman, S. y Geman, D. (1984): "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images". *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machines Intelligence*, 6, 721-741.
- Gibbs, J.J.L. (1990): *UK Multiplier Values of the Fishing Industry*. Sea Fish Industry Authority.
- Gilks, W. R., y Wild, P. (1992): "Adaptive Rejection Sampling for Gibbs Sampling". *Appl. Statist.*, 41, 337-348.
- Giráldez, A. y Abad, R. (1995): "Aspects on the reproductive biology of the Western Mediterranean Anchovy from the coasts of Málaga (Alboran Sea)". *Scientia Marina*, 59(1), pp. 15-23.

- González Galán, M.D. (2004): *Fabricación de conservas y actividad pesquera: Un análisis económico*, Huelva: Servicio de publicaciones de la Universidad de Huelva, 372 pp.
- Graham, M., (1935): "Modern theory of exploiting a fishery, and application to North Sea trawling". *Journal du Conseil International pour l'exploration de la mer*, 10(3), 264-274.
- Greene, W. H. (1998): *Análisis econométrico*. Prentice Hall.
- Guerra, A. y Sánchez, J. L., (1998): *Fundamentos de explotación de recursos vivos marinos*. Editorial Acribia, 249 pp.
- Gujarati, D. N. (1990): *Econometría, 2ª ed.* McGraw-Hill.
- Gulland, J. A. (1965): "Estimation of mortality rates". Annex to Arctic Fisheries Working Group Report (meeting in Ham burg, January 1965). International Council for the Exploitation of the Sea, Conference and Meeting Documents, Document 3 (mimeo), Copenhagen.
- Gulland, J. A. (1983): *Fish stock assessment: a manual of basic methods*. Chichester, U.K., Wiley Interscience, FAO/Wiley series on food and agriculture, 1, 223 pp.
- Gulland, J. A. (1956): *Manual of methods for fish stock assesment, 1. Fish population analysis*. FAO Manuals in Fisheries Science, 4, 154.
- Haddon, M. (2001): *Modelling and Quantitative Methods in Fisheries*. Chapman and Hall, New York, 450 pp.
- Hamley, J. M., & Skud, B. E. (1978): "Factors affecting longline catch and effort: II Hook-spacing". *Int. Pac. Halibut Comm. Sci. Rep*, (62).

- Hanesson, R. (1983): "Bioeconomic Production Function in Fisheries; Theoretical and Empirical Analysis". *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 40, 968-982.
- Hartley, R.V.L. (1928): "Transmission of Information". *Bell System Technical Journal*, p. 535.
- Hilborn, R., Liermann, M. (1998): "Standing on the shoulders of giants: learning from experience in fisheries". *Rev. Fish. Biol. Fish.* 8, 273–283.
- Hilborn, R., Walters, C.J. (1992): *Quantitative Fisheries Stock Assessment: Choice, Dynamics and Uncertainty*. Chapman and Hall, New York, 570 pp.
- Hoening, J.M., Warren, W.G., Stocker, M. (1994): "Bayesian and related approaches to fitting surplus production models". *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 51, 1823–1831.
- Hulme, H. R., Beverton, R. J. H. y Holt, S. J. (1947): "Population Studies in Fisheries Biology". *Nature*, 159, 714-715.
- INE (2014): *Contabilidad Nacional de España. Nueva base 2010. Serie 2010-2013*, Madrid: Instituto Nacional de Estadística.
- Intrilligator, M. D. (1971): *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Nueva Jersey: Prentice-Hall.
- IWC (1995). Report of the Scientific Committee, Annex F. Report of the Subcommittee on Aboriginal Subsistence Whaling. *Rep. Int. Whal. Comm.* 45, 142–164
- Jaynes, E.T. (1968): "Prior probabilities". *IEEE Transactions On Systems Science and Cybernetics*, 4(3), pp. 227-241.

- Jaynes, E.T. (1980): Discussion, *Bayesian Statistics*. Valencia, Spain: University Press, pp. 618-629.
- Jeffreys, H. (1967/ 1ª ed 1939, 2ª ed 1961): *Theory of Probability, 3rd rev. edn.* London: Oxford University Press.
- Kalman, R. E. (1960): "A new approach to linear filtering and prediction problems". *Journal of Basic Engineering*, 82, 35-45.
- Kamien, M. L. y Schwartz, N. L. (1991): *Dynamic Optimization. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Amsterdam: North-Holland.
- Kass, R.E. and Wasserman, L. (1995): "A reference bayesian test for nestes hypotheses and its relationship to the Schwarz Criterion". *Journal of the American Statistical Association*, 90 (431), pp. 928-934.
- Kass, R.E. and Wasserman, L. (1996): "The selection of prior distributions by formal rules". *Journal of the American Statistical Association*, 91(435), pp. 1343-1370.
- Kmenta, J., (1967): "On estimation of the CES Production Function". *International Economic Review*, 8, 180-189.
- Laurec, A., Shepherd, J.G. (1983): "On the analysis of catch and effort data". *J. Cons. Int. Explor. Mer.* 41, 81-84.
- Lee, L. F. (1978): "Simultaneous equation models with discrete and censored dependent variables". En Manski, P. y McFadder, D. (eds.), *Structural Analysis of Discrete Data with Economic Implications*, MIT Press, Cambridge, 346-364.

Ludwig D., Walters, C.J. (1985): "Are age-structured models appropriate for catch-effort data?". *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 42 1066-1072.

Ludwig D., Walters, C.J. (1989) A robust method for parameter estimation from catch and effort data. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 46, 137-144.

Matsuda, H., Kishida, T. y Kidachi, T., (1992): "Optimal harvesting policy for chub mackerel (*Scomber japonicus*) in Japan under a fluctuating environment". *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 49, 1796-1800.

Maunder, M. N., Piner, K. R. (2014): "Contemporary fisheries stock assessment: many issues still remain". *ICES Journal of Marine Science*, 12p..

Maunder, M. N., Punt, A. E. (2013): "A review of integrated analysis in fisheries stock assessment". *Fisheries Research*, 142: 61–74.

Maunder, M.N. (2003): "Paradigm shifts in fisheries stock assessment: from integrated analysis to Bayesian analysis and back again". *Nat. Res. Model*, 16, 465–475.

Maunder, M.N. (2004): "Population viability analysis, based on combining integrated, Bayesian, and hierarchical analyses". *Acta Oecol.* 26, 85–94.

Maunder, M.N. (2003): "Is it time to discard the Schaefer model from the stock assessment scientist's toolbox?". *Fish. Res*, 61, 145–149.

Maunder, M.N., Starr, P.J. (2001): "Bayesian assessment of the SNA1 snapper (*Pagrus auratus*) stock on the north-east coast of New Zealand". *N.Z. J. Mar. Freshwat. Res*, 35, 87–110.

- Maunder, M.N., Starr, P.J., Hilborn, R. (2000): "A Bayesian analysis to estimate loss in squid catch due to the implementation of a sea lion population management plan". *Mar. Mamm. Sci.* 16, 413–426.
- May, R. M., (1974): "Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos". *Science* 186, 645-647.
- McAllister, M.K., Ianelli, J.N. (1997): "Bayesian stock assessment using catch-age data and the sampling/importance resampling algorithm". *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 54,284–300.
- McAllister, M.K., Kirkwood, G.P., (1998): "Bayesian stock assessment and policy evaluation:a review and example application using the logistic model". *ICES J. Mar.Sci.*, 55, 1031–1060.
- McAllister, M.K., Pikitch, E.K., Babcock, E.A., (2001): "Using demographic methods to construct Bayesian priors for the intrinsic rate of increase in the Schaefer model and implications for stock rebuilding". *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 58, 1871–1890.
- McAllister, M.K., Pikitch, E.K., Punt, A.E., Hilborn, R. (1994): "A Bayesian approach to stock assessment and harvest decisions using the sampling/importance resampling algorithm". *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 52, 2673–2687.
- MEMPES (1998): *Estudio de necesidades y viabilidad para la puesta en marcha de un centro de distribución de productos pesqueros en Huelva, Empresa Pública de Desarrollo Agrario y Pesquero, Junta de Andalucía.* MEMPES (1999): Estudio de viabilidad comercial.
- Methot, R.D. (1990): "Synthesis model: an adaptable framework for analysis of diverse stock assessment data". *Bull. Int. North Pacific Fish. Comm.* 50, 259–277.

Metropolis, N., et al. (1953): "Equations of State Calculations by Fast Computing Machines". *Journal of Chemical Physics*, 21, 1087-1091.

Meyer, R., Millar, R.B. (1999): "Bayesian stock assessment using state-space implementation of the delay difference model". *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 56, 37-52.

Millar, R. B. y Meyer, R. (2000): "Non-linear state space modelling of fisheries biomass dynamics by using Metropolis-Hastings within-Gibbs sampling". *Appl. Statist.*, 49 (3), 327-342.

Myers, R.A., Bowen, K.G., Barrowman, N.J. (1999): "Maximum reproductive rate of fish at low population sizes". *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 56, 2404-2419.

Newton, M. A. y Raftery, A. E. (1994): "Approximate Bayesian inference by the weighted likelihood bootstrap". *J. R. Statist. Soc. B.*, 56, 3-48.

Ormoneit, D., White, H. (1999): "An efficient algorithm to compute maximum entropy densities". *Econometric Reviews*, 18(2), 127-140.

Ortega Irizo, F.J. (2001): *Obtención de distribuciones a priori no informativas usando medidas de información*. Aplicación a la evaluación de revista científicas, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla.

Ortega Irizo, F.J., Basulto Santos, J. (2009): "Estimación Bayesiana en modelos de producción con frontera determinista". *Estudios de Economía Aplicada*, 27-2, 1-22.

Parma, A.M. (2001): "Bayesian approaches to the analysis of uncertainty in the stock assessment of pacific halibut". *Am. Fish. Soc. Symp.* 24, 111-132.

- Parrish, B.B. and Jones, R. (1953): "The Sate of the Haddock Stcks in the North Sea 1946-1950 and at Faroe 1914-1950". En *Haddock Bionomics*, Scottish Home Dept., *Mar. Res.*, 4, 7-172.
- Parrish, R. H. y MacCall, A. D. (1978): "Climatic variation and exploitation in the pacific mackerel fishery". *Fish Bulletin*, 167, 2-110.
- Patterson, K.R. (1999): "Evaluating uncertainty in harvest control law catches using Bayesian Markov chain Monte Carlo virtual population analysis with adaptive rejection sampling and including structural uncertainty". *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 56, 208-2.
- Pauly, D. (1984): "Fish population dynamics in tropical waters: a manual for use with programmable calculators". *ICLARM Stud. Rev.*, 8, 325 pp.
- Pella, J.J., Tomlinson, P.K. (1969): "A generalized stock production model". *Bulletin of the Inter-American Tropical Tuna Commission*, 13, 421-458.
- Petersen, C.G.J. (1896): "The yearly immigration of young plaice into the Limfiord from the German Sea". *Rep. Dan. Biol. Stn.* 6, 5-84.
- Pope, J. G. (1972): "An investigation of the accuracy of virtual population analysis using Cohort analysis". *International Commission for Northwest Atlantic Fisheries Research Bulletin*, 9, 65-74.
- Pope, J. G. (1974): "Note on cohort analysis and age-specific fishing mortality". En *Workshop on Tuna Population Dynamics. Scient. Pap. Int. Commn. Atlant. Tunas*, 237-239.
- Pope, J.G., Stokes, T.K. (1989): "Use of multiplicative models for separable virtual population analysis (VPA), integrated analysis, and the general VPA tuning problem". *Am. Fish. Soc. Symp.*, 6, 92-101.

- Punt, A. y Hilborn R. (1997): "Fisheries stock assessment and decision analysis: The Bayesian approach". *Reviews in Fish Biology and Fisheries*, 7, 35-63.
- Punt, A.E., Kennedy, R.B. (1997): "Population modelling of Tasmanian rock lobster". *Jasus edwardsii, resources. Mar. Freshwat. Res.*, 48, 967-980.
- Quinn, T. J., II, Deriso, R. B. (1999): *Quantitative Fish Dynamics*. Oxford University Press, New York, NY.
- Quinn, T. J., II. (2003): "Ruminations on the development and future of population dynamics models in fisheries". *Natural Resource Modeling*, 16: 341-392.
- Quirk, J. P. y Smith, V. L. (1970): "Dynamic economic models of fishing". Scott, A. D. (ed.), *Economics of Fisheries Management. A Symposium*, Vancouver: University of British Columbia, 3-32.
- Raftery, A. E. (1996): "Hypothesis testing and model selection". En Gilks, W. R., Richardson, S. y Spiegelhalter, D. J. (eds.), *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, 163-187. Chapman & Hall, London.
- Reed, W. J. y Simons, C. M. (1996): "Analyzing catch-effort data by means of the Kalman filter". *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 53, 2157-2166.
- Reed, W. J. (1974): "A stochastic model for the economic management of a renewable animal resource". *Mathematical Bioscience*, 22, 313-337.
- Reed, W. J. (1979): "Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models". *Journal of Environmental Economics and Management*, 6, 350-363.

- Ricker, W. E. (1944): "Further Notes on Fishing Mortality and Effort". *Copeia*, 1, 23-44.
- Ricker, W. E. (1945): "A method of estimating minimum size limits for obtaining maximum yield". *Copeia*, 2, 84-94.
- Ricker, W. E. (1954): "Stock and Recruitment". *J. Fish. Res. Bd. Canada*, 11(5), 559-623.
- Ricker, W. E. (1958): "Handbook of computations for biological statistics of fish populations". *Fish. Res. Bd. Can. Bull.*, 119, 300 pp.
- Ricker, W. E. (1975): "Computation and interpretation of biological statistics of fish populations". *Bull. Fish. Res. Board Can.*, 191, 382 pp.
- Ripley, B. D. (1987): *Stochastic Simulation*, New York: Wiley, 237 pp.
- Rivard, D. (1989): "Overview of the systematic, structural, and sampling errors in cohort analysis". *Am. Fish. Soc. Symp.*, 6, 49-65.
- Russel-Hunter, W. D. (1970): *Aquatic Productivity*, Nueva York: Macmillan, 273pp.
- Russell, E. S. (1931): "Some Theoretical Considerations on the Overfishing Problem". *Journal du Conseil International pour l'exploration de la mer*, 6 (1), 3-20.
- Russell, E. S. (1942): *The Overfishing Problem*, Cambridge.

- Sainsbury, K.J. (1988): "The ecological basis of multispecies fisheries, and management of a demersal fishery in tropical Australia". En Gulland, J.A. (Ed.), *Fish Population Dynamics*. , 2nd ed. Wiley, New York, pp. 349–382.
- Schaefer, K. M. (1980): *Synopsis of biological data on the chub mackerel, Scomber Japonicus Houttuyn, 1782, in the Pacific Ocean*. Inter-American Tropical Tuna Commission, La Jolla, California.
- Schaefer, M. B. (1954): "Some aspects of the Dynamics of Populations Important to the Management of the Commercial Marine Fisheries". *Bulletin of the Inter-American Tropical Tuna Commission*, 1 (2), 1-56.
- Schaefer, M. B. (1957): "Some considerations of populations dynamics and economics in relation to the management of the marine fisheries". *J. Fish. Res. B. Can.*, 14 (5), 669-681.
- Schaffer, W. A., (1970): *Estimating Regional Input-Output Coefficients*. Georgia Institute of Technology, Discussion Paper, 16.
- Schnute, J. (1977): "Improved estimates from the Schaefer Production Model: Theoretical Considerations". *J. Fish. Res. B. Canada*, 34 (5), 583-603.
- Schnute, J. (1985): "A General Theory for Analysis of Catch and Effort Data". *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 42, 414-429.
- Scott, A. (1955): "The Fishery: The objectives of sole ownership". *Journal of Political Economy*, 63, 116-124.
- SEC (1986): *Comercialización de productos pesqueros*. Colección Estudios, Ministerio de Economía y Hacienda, Madrid.

- Sette, O. E. (1943): "Biology of the Atlantic Mackerel (*Scomber Scombrus*) of North America. I. Early life History including the growth, drift and mortality of egg and larval populations". *US Fish and Wildlife Serv. Fish. Bull.*, 50 (38), 149-237.
- Sette, O. E. (1950): "Biology of the Atlantic Mackerel (*Scomber Scombrus*) of North America. Part II. Migrations and habits". *US Fish and Wildlife Serv. Fish. Bull.*, 51, 251-358.
- Shannon, C.E. (1948): "The mathematical theory of communication". *Bell System Technical Journal*, July-October, reprinted in C.E. Shannon and W. Weaver, (1949), *The mathematical theory of communication*, University of Illinois Press, pp. 3-91.
- Soofi, E.S. (1992): "Information theory and Bayesian statistics". En *Bayesian Analysis in Statistics and Econometrics: Essays in Honor of Arnold Zellner*, (1996), New York: Wiley, pp. 179-189.
- Spence, M. (1973): *Blue Whales and Applied Control Theory*. Techn. Report nº 108, Stanford University, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, 35 pp.
- Spence, M. (1974): *Blue Whales and applied control theory*. En Zadeh, C.L. et al. (eds.), *System Approaches for Solving Mathematical Problems*, Gottingen y Zurich: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Sullivan, P. J. (1992): "A Kalman filter approach to catch-at-length analysis". *Biometrics*, 48, 237-257.
- Tanner, M.A. y Wong, W.H. (1987): "The Calculation of Posterior Distributions by Data Augmentation". *JASA*, 82, 82-86.

- Thompson, W. F., F. H. Bell. (1934): "Biological statistics of the Pacific halibut fishery". En 2. *Effect of changes in intensity upon total and yield per unit of gear. Rep. Int. Fish., (Pacific Halibut) Comm.*, 8, 49 p.
- Tukey, J.W. (1978): "Discussion of Granger on Seasonality". En *Seasonal analysis of economic time series*, Washington DC: US Government Printing Office, pp. 50-53.
- Varian, H. R. (1984): "The nonparametric approach to production analysis". *Econometrica*, 52 (3), 579-597.
- Venegas Martínez, F. (1990): "On regularity and optimality conditions for maximum entropy priors". *The Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 4, 105-136.
- Vetter, E.F. (1988): "Estimation of natural mortality in fish stocks: a review". *Fishery Bulletin*, 86 (1), 25-43.
- Walter, G.G. (1973): "Delay-differential equation models for fisheries". *Journal of the Fisheries Research Board of Canada* 30, 939-45.
- Walters, C.J. y Ludwig, D. (1994): "Calculation of Bayes posterior probability distributions for key population parameters". *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 51, 946-958.
- Walters, C.J., Punt, A.E. (1994): "Placing odds on sustainable catch using virtual population analysis and survey data". *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 51, 946-958.
- Ximing Wu, (2003): "Calculation of maximum entropy densities with application to income distributions". *Journal of Econometrics*, 115, 347-354.

Zellner, A. (1971): *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*. J. Wiley & Sons, Inc. N. York, 431 pp.

Zellner, A. (1977): "Maximal data information prior distributions". En *New developments in the applications of Bayesian methods*, Amsterdam: North Holland, pp. 211-232.

Zellner, A. (1984): *Basic issues in econometrics*. Chicago: University of Chicago Press.

Zellner, A. (1988): "Optimal information processing and Bayes's theorem". *The American Statistician*, 42(4), 278-284.

Zellner, A. (1991): "Bayesian Methods and entropy in economics and econometrics". En Grandy y Schick, *Maximun Entropy and Bayesian Methods*, Netherland, pp. 17-31.

Zellner, A. (1996): "Models, prior information and Bayesian analysis". *Journal of Econometrics*, 75(1), 51-68.

Zellner, A. (1997): *Bayesian Analysis in Econometrics and Statistics*. UK: Edward Elgar Publishing Company.

Zhang, Y. and Yao, Q. (1991): "Some maximal information and generalized maximal entropy priors". *Chinese Journal Applied Probability & Statistics*, 7, 192-200.